

На правах рукописи



Цапко Екатерина Дмитриевна

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО  
ВОЗМУЩЕННЫХ НАЧАЛЬНЫХ И КРАЕВЫХ ЗАДАЧ  
ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ,  
МОДЕЛИРУЮЩИХ ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ**

Специальность 1.2.2. —  
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы  
программ»

Автореферат  
диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Москва— 2022

Работа выполнена на кафедре «Мехатроника и теоретическая механика» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт

Научный руководитель: **Кузнецов Евгений Борисович**,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
профессор кафедры «Мехатроника и теоретическая механика» в ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Официальные оппоненты: **Андреев Степан Николаевич**,  
доктор физико-математических наук,  
заведующий кафедрой «Математика» в ФГАОУ ВО «Московский Политехнический Университет»

**Егорчев Михаил Вячеславович**,  
кандидат физико-математических наук,  
старший программист-исследователь в ООО «РобоСиВи»

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н. Э. Баумана)

Защита состоится 30 декабря 2022 г. в 10 часов 00 мин. на заседании диссертационного совета 24.2.327.02 федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» или на сайте: <https://mai.ru>

Автореферат разослан «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2022 г.

Отзывы на автореферат просим отправлять в 2-х экземплярах, заверенных гербовой печатью, по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4, Ученый совет МАИ.

Ученый секретарь диссертационного  
совета 24.2.327.02 к.ф.-м.н.



Рассказова В. А.

# Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Сингулярно возмущенными уравнениями описываются задачи из таких прикладных областей науки и техники, как аэродинамика, гидродинамика, теория горения, теория каталитических реакций, проектирование ядерных реакторов и т.д. Одним из первых такие задачи рассматривал в своих работах А. Н. Тихонов. Им рассматривались так называемые задачи с пограничным слоем. Впоследствии учениками его научной школы А. Б. Васильевой, В. Ф. Бутузовым, Н. Н. Нефедовым и другими были развиты задачи с контрастными структурами (внутренними слоями).

Сингулярно возмущенные уравнения относят к классу жестких уравнений. В зависимости от задачи определяющие уравнения могут дополняться начальными или краевыми условиями, а сами они могут быть нелинейными или квазилинейными. Поэтому получить точное аналитическое решение затруднительно. Традиционные численные методы оказываются малоэффективными для таких задач. Явные схемы редко позволяют получить решение приемлемой точности. Применение неявных схем, разрабатываемых такими учеными как Н. Н. Калиткин, Г. Ю. Куликов, Л. М. Скворцов и др., сопряжено с вычислительными трудностями при решении систем нелинейных или трансцендентных уравнений. Это показывает необходимость разработки новых подходов к решению таких задач.

Метод продолжения решения по наилучшему аргументу, развитый в работах Э. И. Григолюка, В. И. Шалашилина, Е. Б. Кузнецова и их учеников, позволяет повысить эффективность явных численных методов при решении сингулярно возмущенных задач. Метод наилучшей параметризации успешно применялся в работах Н. Н. Калиткина, А. А. Семенова, С. Мэй, К. Ванга к некоторым жестким и сверхжестким задачам химической кинетики, теории прочности и задачам математической физики. Однако в случае, когда интегральные кривые исходной задачи имеют экспоненциальную скорость роста, такой подход не позволяет существенно понизить жесткость преобразованной задачи.

**Целью** исследования является разработка эффективного подхода к численному решению сингулярно возмущенных задач и задач с контрастными структурами для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с экспоненциальной скоростью роста интегральных кривых. Предлагается модифицировать наилучший аргумент таким образом, чтобы понизить показатель жесткости решаемой задачи.

Для достижения поставленной цели решаются следующие **задачи**:

1. Разработать подход на основе метода продолжения решения для того, чтобы повысить эффективность явных численных схем при решении жестких начальных и краевых задач.
2. Разработать программный комплекс для применения разработанного подхода к решению жестких начальных и краевых задач.
3. Апробировать разработанный подход. Для этого будут решены две тестовые начальные задачи, получившие название степенного и экспоненциального тестов, а также будет рассмотрена математическая модель возникновения одномерного стационарного потока в трубе с постоянной или увеличивающейся площадью переменного сечения.

4. Доказать абсолютную устойчивость разностной схемы явного метода Эйлера для задач, преобразованных с применением разработанного подхода.

**Методы исследования.** При численном решении задачи Коши для систем ОДУ используются явные и неявные методы семейства Рунге-Кутты с постоянным и переменным шагом интегрирования. Для численного решения краевой задачи для системы ОДУ используется метод стрельбы (пристрелки) с применением итерационной процедуры Ньютона. Для исследования абсолютной устойчивости разностной схемы явного метода Эйлера используется тест Далквиста, хорошо проявившего себя для понимания характера поведения разностных схем при решении жестких систем.

**Научная новизна.** В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

1. Разработана модификация метода продолжения решения по наилучшему аргументу, позволяющая повысить эффективность явных численных методов при решении жестких начальных и краевых систем ОДУ с экспоненциальной скоростью изменения интегральных кривых. Новый аргумент получил название экспоненциального наилучшего аргумента.
2. Получено более общее доказательство расширения области устойчивости разностной схемы явного метода Эйлера для задачи, преобразованной к наилучшему аргументу.
3. Получено условие, при котором разностная схема явного метода Эйлера является абсолютно устойчивой для задачи, преобразованной к экспоненциальному наилучшему аргументу.

**Научная и практическая значимость** полученных в диссертационной работе результатов состоит в следующем:

1. Предложенная модификация наилучшего аргумента позволяет повысить точность и сократить время счета сингулярно возмущенных задач и задач с контрастными структурами с экспоненциальной скоростью изменения интегральных кривых, а также получить численное решение тогда, когда другие методы не позволяют этого сделать.
2. Модифицированный наилучший аргумент включает в себя дополнительный регулируемый параметр, варьируя значения которого можно добиться более точного прохождения через пограничные и внутренние слои задачи при применении явных численных методов.
3. По результатам проводимых исследований разработан комплекс программ «Численное решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью модифицированного наилучшего параметра» (свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022610641), который может быть использован для решения практических задач.

**Достоверность** полученных результатов обеспечивается: **1)** строгим использованием адекватного математического аппарата, **2)** удовлетворительным согласованием полученных расчетных данных с точными аналитическими решениями рассматриваемых задач, а также опубликованными расчетными и экспериментальными результатами других авторов.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях, симпозиумах и конкурсах: **1)** XLIV Международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения

– 2018» (Москва, 2018); **2)** XII и XIII Международные конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (Алушта, 2018 и 2020); **3)** 17-й Международная конференция «Авиация и космонавтика – 2018» (Москва, 2018); **4)** III Международная научная конференция «Конвергентные когнитивно-информационные технологии» (Москва, 2018); **5)** XXI и XXII Международные конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (Алушта, 2019 и 2021); **6)** X Международная научная молодежная школа-семинар «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» им. Е. В. Воскресенского (Саранск, 2022). Из них доклады на XII Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (Алушта, 2018), XXI и XXII Международных конференциях по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (Алушта, 2019 и 2021) были отмечены дипломами за «Лучший доклад».

**Личный вклад.** Автором реализованы используемые численные методы решения начальных и краевых задач в программной среде Matlab, проведены численные эксперименты и выполнен анализ полученных расчетов. Выбор круга рассматриваемых задач и разработка модифицированного наилучшего аргумента проводились под руководством Е. Б. Кузнецова и С. С. Леонова. Автору принадлежат формулировки и доказательства основных теоретических результатов.

**Публикации.** Основные результаты по теме работы изложены в 15 печатных и электронных изданиях, среди которых 5 статей опубликованы [1-5] в журналах, входящих в перечень ВАК и международные системы цитирования, 10 опубликованы в тезисах докладов конференций [6-15]. Принята к печати 1 статья в Журнал Вычислительной Математики и Математической Физики.

В соавторстве с Е. Б. Кузнецовым и С. С. Леоновым создан и зарегистрирован программный комплекс «Численное решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью модифицированного наилучшего параметра» (свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022610641 от 13.01.2022).

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и одного приложения. Полный объём диссертации составляет 112 страниц с 9 рисунками и 13 таблицами. Список литературы содержит 91 наименование.

Работа поддержана грантом РФФИ № 19-08-00718 А: «Разработка методов и вычислительных программ решения краевых задач, моделирующих нелинейное деформирование материалов со сложной реологией» (2018-2021) и выигранным мной аспирантским грантом РФФИ № 20-31-90054-20: «Численные методы решения сингулярно возмущенных начальных и краевых задач, моделирующих механические и физические явления» (2020-2022).

**Благодарности.** Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Кузнецову Евгению Борисовичу за неоценимую помощь на всех этапах выполнения диссертации, а также Леонову Сергею Сергеевичу за значимые замечания и важнейшие советы при проведении исследования и оформлении диссертации.

## Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность проводимых исследований, приводится краткий обзор научной литературы по изучаемой проблеме, ставятся цель и

задачи работы, формулируются научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

В **первой главе** рассмотрены основные численные методы решения начальных и краевых задач, которые используются в следующих главах диссертации.

Рассмотрим следующую систему из  $n$  обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

с начальными условиями

$$y_i(0) = y_{i,0}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

где  $f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$  — заданные функции.

Наипростейшими традиционными методами решения начальных задач являются явный и неявный методы Эйлера и явный метод Рунге-Кутты 4-го порядка точности. Данные методы относятся к классу конечно-разностных методов и требуют построения сетки в области интегрирования решаемой задачи. Сетку можно построить с постоянным шагом  $h$ , однако при решении жестких задач применение переменного шага оказывается более эффективным подходом, позволяя сократить время счета на участке медленного изменения поведения интегральной кривой и увеличить точность приближенного решения в области его резкого изменения. Метод Рунге-Ромберга-Ричардсона традиционно используется для построения неравномерной сетки<sup>1</sup>. Согласно ему, вычисляется локальная погрешность численного решения задачи на  $k$ -ом шаге, и на основании заданной точности принимается решение об уменьшении или увеличении шага интегрирования.

Одно из ранних определений жестких уравнений, данных Кертиссом и Хиршфельдером<sup>2</sup>, гласит, что жесткие уравнения — это уравнения, для которых неявные методы работают несравненно лучше, чем явные методы. Поэтому, как уже упоминалось во введении, большинство специализированных численных методов решения жестких задач построены на основе неявных схем. Неявные методы позволяют найти решения жестких и плохо обусловленных задач Коши, но не могут сравниться по быстродействию с явными методами, так как на каждом шаге неявного метода приходится решать систему нелинейных уравнений. Этот недостаток удается устранить при помощи метода продолжения решения<sup>3</sup>, который заключается в замене исходного аргумента задачи Коши на новый. Можно выбирать различные аргументы продолжения решения, но наиболее часто используют наилучший аргумент. Данный аргумент отсчитывается по касательной к интегральной кривой и обладает рядом исключительных свойств.

Для задачи (1)-(2) наилучший аргумент  $\lambda$  записывается в скалярной форме:

$$d\lambda^2 = dy_1^2 + \dots + dy_n^2 + dt^2. \quad (3)$$

Будем полагать, что все переменные  $y_1, y_2, \dots, y_n$  и аргумент  $t$  зависят от  $\lambda$ . Дополняя систему (1) соотношением (3) и разрешая полученную систему относительно

<sup>1</sup>Калиткин Н. Н. Численные методы. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 592 с.

<sup>2</sup>Curtiss C. F., Hirschfelder J. O. Integration of stiff equations // Proc. Nat. Acad. Sci. 1952. Vol. 38. Pp. 235-243.

<sup>3</sup>Шалашилин В. И., Кузнецов Е. Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 224 с.

производных по  $\lambda$ , получим преобразованную систему

$$\frac{dy_i}{d\lambda} = \frac{f_i(t, y_1, \dots, y_n)}{\sqrt{Q(t, y_1, \dots, y_n)}}, \quad \frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{Q(t, y_1, \dots, y_n)}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

где  $Q(t, y_1, \dots, y_n) = 1 + \sum_{i=1}^n f_i^2(t, y_1, \dots, y_n)$ .

Начальные условия (2) для системы (4) переписутся в виде

$$y_i(0) = y_{i,0}, \quad t(0) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Задача (4)-(5) обладает рядом важных для численного решения свойств:

1. Квадратичная норма правой части системы (4) равна единице, т. е. устраняются вычислительные трудности, связанные с неограниченным возрастанием правых частей системы (1).
  2. Обусловленность системы (4) является наилучшей.
  3. Показатель жесткости преобразованной системы (4) меньше, чем у исходной.
- Все отмеченные свойства дают возможность решать преобразованную задачу (4)-(5) любыми численными методами, в том числе и явными.

Рассмотрим краевую задачу следующего вида:

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), & a < x < b, \\ y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b. \end{cases} \quad (6)$$

Существует множество численных методов для решения краевой задачи вида (6). К ним относят, например, метод сеток, ряд проекционных методов, метод конечных элементов и другие<sup>4</sup>. В диссертации применяется метод стрельбы, так как согласно ему краевая задача сводится к решению задач Коши, что позволяет применить метод наилучшей параметризации, рассмотренный ранее, и таким образом понизить жесткость решаемой задачи.

Во **второй главе** на примере тестовых начальных задач [1, 2, 3] и одной краевой задачи, моделирующей одномерный стационарный поток в трубе с постоянным или переменным сечением [4, 5], показано, что переход к наилучшему аргументу позволяет повысить эффективность явных численных методов при решении жестких задач, но только в случаях, когда скорость изменения интегральных кривых является степенной.

Рассмотрим начальную задачу для уравнения следующего вида<sup>5</sup>:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\xi(t)(u^2 - a^2)^2}{(u^2 + a^2)}, \quad u(0) = 0. \quad (7)$$

<sup>4</sup>Калиткин Н. Н. Численные методы. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 592 с.

<sup>5</sup>Белов А. А., Калиткин Н. Н. Особенности расчета контрастных структур в задачах Коши // Математическое моделирование. 2016. Т. 28. № 10. С.97-109.

При  $\xi(t) = \xi_0 \cdot \cos(t)$  решение задачи (7) имеет вид:

$$u(t) = -\frac{2\Xi(t)a^2}{1 + \sqrt{1 + 4a^2\Xi^2(t)}},$$

где  $\Xi(t) = \xi_0 \sin(t)$ .

В дальнейших расчетах  $a = \pi$ . Жесткость задачи характеризуется множителем  $\xi_0$  при периодической функции. Условно, по значению параметра  $\xi_0$ , можно разбить задачи вида (7) на следующие классы: при малых значениях  $\xi_0$  (порядка нескольких единиц) задача является нежесткой, при  $\xi_0 \geq 10$  – жесткой и при  $\xi_0 \geq 1000$  – сверхжесткой. Это определяется видом правой части: при приближении значения косинуса к нулю скорость изменения решения, даже при большом параметре  $\xi_0$ , стремится к нулю, а при стремлении значения косинуса к единице значение правой части принимает наибольшее значение. Таким образом, происходит смена плавно меняющихся компонент решения с быстро меняющимися переходными зонами, которые тем короче, чем больше значение  $\xi_0$ . Данные особенности видны на рис. 1.

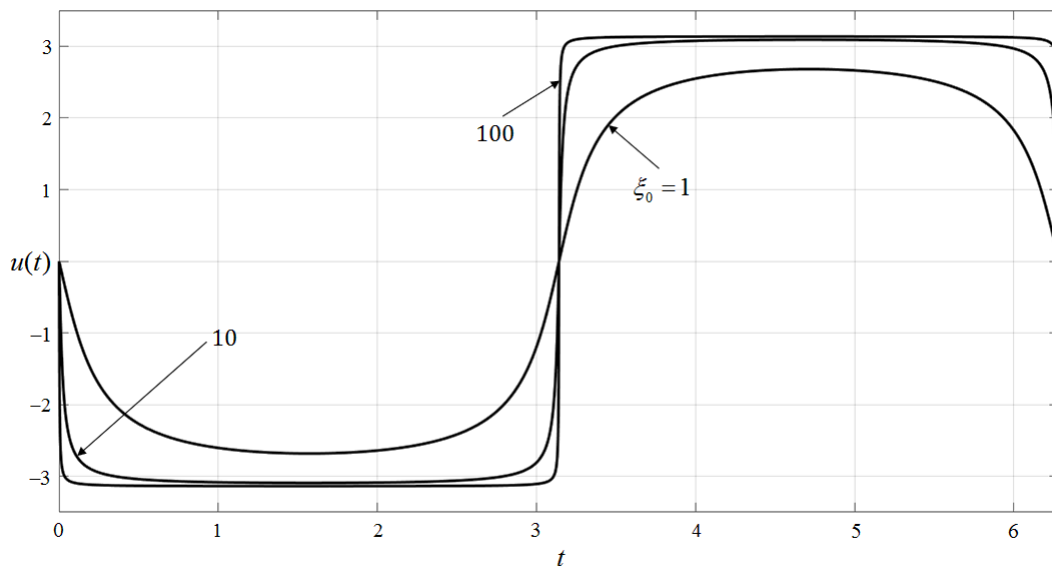


Рис. 1. Численное решение задачи (7) при  $\xi_0 = 1; 10; 100$ , метод Рунге-Кутты четвертого порядка с постоянным шагом  $h = 10^{-3}$ .

В табл. 1 приведены данные о средней погрешности  $\varepsilon$  и времени счета  $t_c$  решений задачи (7), полученными явными методами Эйлера и Рунге-Кутты 4-го порядка и неявным методом Эйлера с постоянным шагом интегрирования.

Расчеты показывают, что по сравнению с явным методом Эйлера неявный метод Эйлера позволяет получить результаты с меньшей погрешностью. Однако, время счета в связи с усложнением вычислительного процесса как для метода простых итераций (МПИ), так и метода Ньютона (МН), может увеличиваться на порядок и более. При малой жесткости метод Ньютона позволяет быстрее получить решение задачи по сравнению с методом простых итераций, но с повышением жесткости уступает ему как в точности, так и в быстродействии. Это можно связать с особенностями реализации МН (в частности, с выбором начального приближения на каждом шаге) и с затруднением при переходе через внутренний слой для неявного метода Эйлера. Таким образом,



Таблица 1. Погрешность решения и время счета для задачи (7), явные методы Эйлера и Рунге-Кутты 4-го порядка и неявный метод Эйлера с постоянным шагом.

Параметры		Явный метод Эйлера		Метод Рунге-Кутты		Неявный метод Эйлера			
						МПИ		МН	
$\xi_0$	$h$	$\varepsilon$	$t_c, c$	$\varepsilon$	$t_c, c$	$\varepsilon$	$t_c, c$	$\varepsilon$	$t_c, c$
1	0.1	0.4548	0.009	$2.1332 \cdot 10^{-4}$	0.0081	0.3137	0.0662	0.3138	0.0255
	0.01	0.0361	0.0095	$2.2776 \cdot 10^{-8}$	0.0656	0.034	0.1774	0.0345	0.1457
	0.001	0.0035	0.0255	$2.1461 \cdot 10^{-12}$	0.1732	$8.6629 \cdot 10^{-4}$	1.188	0.0035	0.6134
10	0.1	—	—	—	—	—	—	—	—
	0.01	0.0826	0.0109	$2.3893 \cdot 10^{-5}$	0.0168	0.074	0.1864	0.0787	0.0878
	0.001	0.008	0.0301	$2.5136 \cdot 10^{-9}$	0.0759	0.0029	1.1653	0.008	0.7302
100	0.1	—	—	—	—	—	—	—	—
	0.01	—	—	—	—	—	—	—	—
	0.001	0.0127	0.0381	$2.4843 \cdot 10^{-6}$	0.1011	0.0078	0.9977	0.0126	1.5954
1000	0.1	—	—	—	—	—	—	—	—
	0.01	—	—	—	—	—	—	—	—
	0.001	—	—	—	—	—	—	—	—

используемый неявный метод Эйлера не позволяет значительно улучшить результаты явных методов, затрачивая при этом большее время счета.

В табл. 2 приведены результаты расчёта задачи (7), преобразованной к наилучшему аргументу  $\lambda$ , методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности с постоянным шагом (качественно для метода Эйлера результаты аналогичны), где  $l$  — шаг по аргументу  $\lambda$ . Кривые, полученные при численном решении, аналогичны приведенным на рис. 1. Для сравнения в табл. 2 приведены результаты решения исходной задачи (7) с шагом, подбираемым из условия равенства порядков средней ошибки решения исходной и преобразованной задач.

Видно, что для непреобразованной задачи (7) для достижения того же порядка ошибки приходится брать шаг до нескольких порядков меньше по сравнению с преобразованной. При этом, несмотря на то, что интервал изменения значений аргумента  $\lambda$  больше, чем у аргумента  $t$ , для параметризованной задачи удается сократить время счета от 0.4 (при  $\xi_0 = 1$ ) 10 раз (при  $\xi_0 = 1000$ ).

В табл. 3 приведены результаты расчета исходной задачи (7) и задачи (7), преобразованной к наилучшему аргументу  $\lambda$ , методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности с переменным шагом. Процедура изменения шага реализована по правилу Рунге. Для преобразованной задачи параметр точности для правила Рунге  $\theta = 10^{-12}$ . Для исходной задачи (7) параметр  $\theta$  выбирался из условия равенства порядков средней погрешности для обеих задач.

Результаты показывают, что и при переменном шаге интегрирования использование наилучшего аргумента  $\lambda$  позволяет получить вычислительные преимущества: удается сократить время счета минимум в два раза. Для сверхжестких задач уменьшение времени счета может достигать нескольких порядков. Отметим также, что, в отличие от преобразованной задачи, решение исходной задачи зависит от начального шага; в особенности это характерно для больших значений  $\xi_0$ .

Однако стоит указать и на ряд недостатков наилучшей параметризации. Преобразованная задача имеет более сложный вид и большую размерность по сравнению

Таблица 2. Средняя ошибка  $\varepsilon$  и время счёта  $t$  задачи (7) методом Рунге-Кутты 4-го порядка с постоянным шагом.

$\xi_0$	Наилучший аргумент			Исходная задача		
	$h$	$\varepsilon$	$t, c$	$h$	$\varepsilon$	$t, c$
1	0.1	$5.4369 \cdot 10^{-7}$	0.0213	0.02	$3.6307 \cdot 10^{-7}$	0.0418
	0.01	$2.9799 \cdot 10^{-11}$	0.183	0.002	$3.6427 \cdot 10^{-11}$	0.2405
	0.001	$5.0522 \cdot 10^{-14}$	0.5505	0.0002	$6.4592 \cdot 10^{-13}$	2.0987
10	0.1	$2.4647 \cdot 10^{-4}$	0.0236	0.02	$3.0375 \cdot 10^{-4}$	0.0422
	0.01	$3.2723 \cdot 10^{-9}$	0.0969	0.001	$2.5136 \cdot 10^{-9}$	0.4414
	0.001	$3.7533 \cdot 10^{-12}$	0.5886	0.0002	$3.662 \cdot 10^{-12}$	2.2979
100	0.1	0.3525	0.0289	0.004	0.0012	0.1303
	0.01	$4.834 \cdot 10^{-6}$	0.1178	0.001	$2.4843 \cdot 10^{-6}$	0.4484
	0.001	$5.0063 \cdot 10^{-11}$	0.5289	0.00005	$1.7076 \cdot 10^{-11}$	8.2501
1000	0.1	—	—	—	—	—
	0.01	0.0047	0.2086	0.00047	0.0012	0.9134
	0.001	$4.0885 \cdot 10^{-8}$	0.5288	0.00007	$5.9638 \cdot 10^{-8}$	5.9466

Таблица 3. Средняя ошибка  $\varepsilon$  и время счёта  $t$  параметризованной и непараметризованной задач методом Рунге-Кутты 4-го порядка с переменным шагом по правилу Рунге с точностью  $\theta$ .

Параметры		Наилучший аргумент			Исходная задача		
$\xi_0$	$h$	$\theta$	$\varepsilon$	$t, c$	$\theta$	$\varepsilon$	$t, c$
1	0.1	$10^{-12}$	$1.1561 \cdot 10^{-10}$	0.2388	$10^{-10}$	$2.1774 \cdot 10^{-10}$	0.4892
	0.01	$10^{-12}$	$1.6079 \cdot 10^{-10}$	0.2592	$3 \cdot 10^{-10}$	$1.1338 \cdot 10^{-10}$	0.571
	0.001	$10^{-12}$	$1.7008 \cdot 10^{-10}$	0.1889	$10^{-10}$	$2.1458 \cdot 10^{-12}$	1.3038
10	0.1	$10^{-12}$	$2.365 \cdot 10^{-9}$	0.2065	$10^{-7}$	$1.5164 \cdot 10^{-9}$	1.6533
	0.01	$10^{-12}$	$2.2218 \cdot 10^{-9}$	0.2812	$4 \cdot 10^{-8}$	$1.1642 \cdot 10^{-9}$	2.025
	0.001	$10^{-12}$	$1.6625 \cdot 10^{-9}$	0.2691	$10^{-7}$	$2.5134 \cdot 10^{-9}$	1.3089
100	0.1	$10^{-12}$	$3.497 \cdot 10^{-8}$	0.2982	$10^{-4}$	$5.8346 \cdot 10^{-8}$	3.2128
	0.01	$10^{-12}$	$3.1933 \cdot 10^{-8}$	0.3346	$10^{-5}$	$2.3953 \cdot 10^{-8}$	4.0536
	0.001	$10^{-12}$	$3.0792 \cdot 10^{-8}$	0.3015	$3 \cdot 10^{-5}$	$2.3106 \cdot 10^{-8}$	4.7691
1000	0.1	$10^{-12}$	$4,2953 \cdot 10^{-7}$	0.2729	—	—	—
	0.01	$10^{-12}$	$3.2001 \cdot 10^{-7}$	0.2318	$10^{-3}$	$9.1802 \cdot 10^{-8}$	15.794
	0.001	$10^{-12}$	$8.7845 \cdot 10^{-7}$	0.1772	$10^{-2}$	$6.4254 \cdot 10^{-7}$	9.8967

с исходной задачей. Для рассматриваемой задачи данный недостаток несущественен, но при решении задач большей размерности преимущества, даваемые наилучшей параметризацией, могут перекрываться сложностью преобразованных задач.

Для другой задачи, рассмотренной в статье А. А. Белова и Н. Н. Калиткина<sup>6</sup> и получившей название экспоненциального теста, получить численное решение оказывается гораздо сложнее. Задача имеет вид

$$\frac{du}{dt} = -\xi(t) \cdot u \cdot (u^2 - a^2), \quad u(0) = u_0, \quad t \in [0, 2\pi] \quad (8)$$

<sup>6</sup>Белов А. А., Калиткин Н. Н. Особенности расчета контрастных структур в задачах Коши // Математическое моделирование. 2016. Т. 28. № 10. С.97-109.

и для  $\xi(t) = \xi_0 \cos(t)$  имеет точное аналитическое решение, представленное на рис. 2.

$$u(t) = \frac{au_0}{\sqrt{u_0^2 + (a^2 - u_0^2) \cdot \exp(-2a^2 \Xi(t))}}, \quad (9)$$

где  $\Xi(t) = \xi_0 \sin(t)$ . В дальнейших расчетах  $a = \pi$ ,  $u_0 = 0.5$ . По аналогии с предыдущей задачей здесь параметр  $\xi_0$  отвечает за жесткость задачи. На рис. 2 видно, что при его увеличении решение задачи (8) имеет более резкий характер изменения в области контрастных структур.

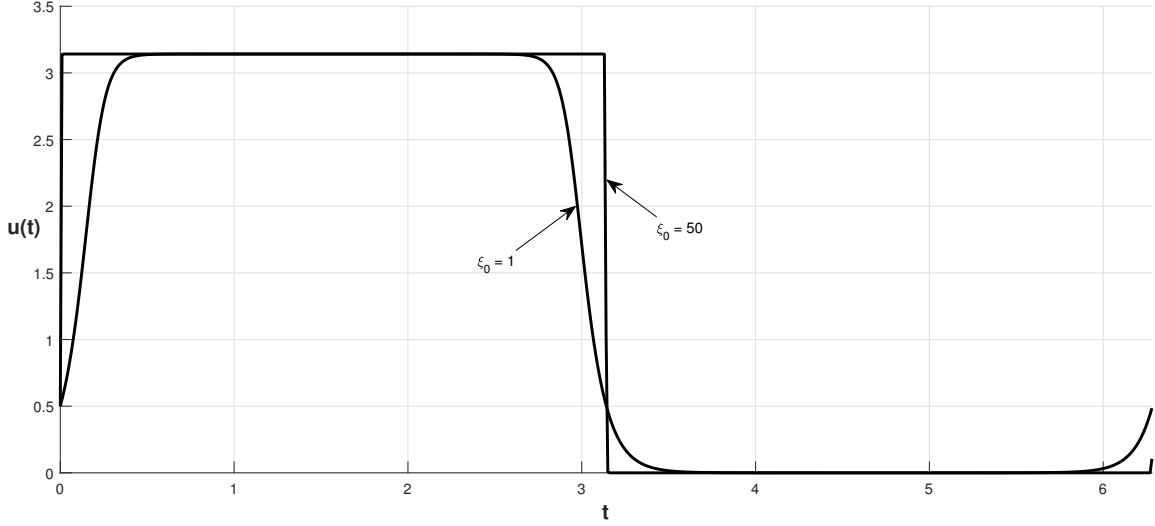


Рис. 2. Точное решение (9) экспоненциального теста (8) для  $\xi_0 = 1$ ,  $\xi_0 = 50$ .

В табл. 4 представлены средняя ошибка численного вычисления  $\varepsilon_{avg}$  и время счета  $t_c$  для исходной задачи (8) и задачи (8), преобразованной к наилучшему аргументу  $\lambda$ . Вычисления были проведены явным методом Эйлера с переменным шагом, высчитываемым по правилу Рунге с заданной точностью  $\theta$  и начальным шагом  $h_0 = 10^{-5}$ .

Таким образом, уже для  $\xi_0 = 10, 50$  получить численное решение не удалось ни для одной из задач. При этом результаты решения задачи, преобразованной к наилучшему аргументу  $\lambda$ , хуже решения исходной задачи по обоим показателям: средняя ошибка и время счета.

Таблица 4. Средняя ошибка  $\varepsilon_{avg}$  и время счета  $t_c$  численного решения задачи (8) со значением  $\xi_0$  явным методом Эйлера с переменным шагом, высчитываемым по правилу Рунге с допустимой погрешностью  $\theta$  и начальным шагом  $h_0 = 10^{-5}$ .

$\xi_0$	$\theta$	Исходная задача		Наилучший аргумент	
		$\varepsilon_{avg}$	$t_c, c$	$\varepsilon_{avg}$	$t_c, c$
1	$10^{-4}$	0.0072	0.01	0.02	0.02
	$10^{-5}$	0.02	0.05	0.02	0.03
	$10^{-6}$	0.006	0.11	0.01	0.18
	$10^{-7}$	$8.5 \cdot 10^{-4}$	0.3	0.002	0.4
	$10^{-8}$	$1.4 \cdot 10^{-4}$	0.8	$2.3 \cdot 10^{-4}$	1.25

При решении задач (8) явным методом Эйлера с постоянным шагом (табл. 5) результаты удалось получить и для более жесткого случая, когда  $\xi_0 = 10$ , однако для значений  $\xi_0 = 50$  и более, оба подхода имеют затруднения при переходе через внутренний слой.

Таблица 5. Средняя ошибка  $\varepsilon_{avg}$  и время счета  $t_c$  численного решения задачи (8) со значением  $\xi_0$  явным методом Эйлера с постоянным шагом  $h$ .

$\xi_0$	$h$	Исходная задача		Наилучший аргумент	
		$\varepsilon_{avg}$	$t_c, c$	$\varepsilon_{avg}$	$t_c, c$
1	$10^{-3}$	$2.85 \cdot 10^{-4}$	0.11	$4.28 \cdot 10^{-4}$	0.17
	$10^{-4}$	$8.99 \cdot 10^{-6}$	0.84	$1.35 \cdot 10^{-5}$	1.55
	$10^{-5}$	$2.84 \cdot 10^{-7}$	8.14	$4.25 \cdot 10^{-7}$	15.78
10	$10^{-3}$	—	—	—	—
	$10^{-4}$	—	—	—	—
	$10^{-5}$	$2.44 \cdot 10^{-4}$	8.11	$8.2 \cdot 10^{-4}$	19.83

Таким образом, в задаче с экспоненциальной скоростью роста интегральных кривых метод наилучшей параметризации оказывается не таким эффективным, как для задач, где кривые решения растут со степенной скоростью. Этот недостаток показал важность поиска нового подхода для решения таких задач.

В **третьей главе** рассмотрен подход к модификации наилучшего аргумента и на его основании предложен экспоненциальный наилучший аргумент. На примере рассмотренных во второй главе задач показаны преимущества разработанной модификации.

Экспоненциальный наилучший аргумент имеет вид

$$d\kappa^2 = dy_1^2 + \dots + dy_n^2 + e^{-2\alpha t} dt^2. \quad (10)$$

Тогда система (1), преобразованная к экспоненциальному наилучшему аргументу  $\kappa$ , будет иметь вид

$$\frac{dy_i}{d\kappa} = \frac{f_i(t, y_1, \dots, y_n) \cdot \exp(\alpha t)}{\sqrt{Q'(t, y_1, \dots, y_n)}}, \quad \frac{dt}{d\kappa} = \frac{\exp(\alpha t)}{\sqrt{Q'(t, y_1, \dots, y_n)}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (11)$$

где  $Q'(t, y_1, \dots, y_n) = 1 + \sum_{i=1}^n f_i^2(t, y_1, \dots, y_n) \cdot \exp(2\alpha t)$ .

Если  $\lambda$ -преобразование позволяет понизить жесткость исходной задачи, то идея выбора экспоненты с некоторым регуляризуемым параметром  $\alpha$  в  $\kappa$ -преобразовании нацелена на то же самое в условиях экспоненциальной скорости роста интегральных кривых решаемой задачи. Таким образом, изначально предполагается, что выбор аргумента (10) будет наиболее эффективным при решении именно таких задач, в то время как его применение к задачам, где интегральные кривые растут, например, со степенной скоростью, будет неоправданным и приведет к увеличению скорости счета.

Рассмотрим применение предложенного модифицированного экспоненциально-наилучшего аргумента на задачах, исследованных ранее во второй главе.

В табл. 6 представлены результаты решения задачи (7), преобразованной к наилучшему аргументу  $\lambda$  и экспоненциальному наилучшему аргументу  $\kappa$ .

Таблица 6. Средняя ошибка  $\varepsilon_{avg}$  и время счёта  $t_c$  задачи (7), преобразованной к наилучшему аргументу  $\lambda$  и экспоненциальному наилучшему аргументу  $\kappa$ , методом Рунге-Кутты 4-го порядка с постоянным шагом  $h$  и параметром  $\alpha$  для модифицированного наилучшего аргумента  $\kappa$ .

$\xi_0$	Наилучший аргумент			Экспоненциальный наилучший аргумент			
	$h$	$\varepsilon_{avg}$	$t_c, c$	$h$	$\alpha$	$\varepsilon_{avg}$	$t_c, c$
1	0.1	$5.44 \cdot 10^{-7}$	0.02	0.1	$10^{-4}$	$5.8 \cdot 10^{-7}$	0.02
	0.01	$2.99 \cdot 10^{-11}$	0.18	0.01	$10^{-5}$	$9.82 \cdot 10^{-11}$	0.22
	0.001	$5.05 \cdot 10^{-14}$	0.55	0.001	$10^{-3}$	$5.67 \cdot 10^{-14}$	1.13
10	0.1	$2.46 \cdot 10^{-4}$	0.02	0.1	$10^{-3}$	$3.25 \cdot 10^{-4}$	0.03
	0.01	$3.27 \cdot 10^{-9}$	0.1	0.015	$10^{-3}$	$1.51 \cdot 10^{-9}$	0.1
	0.001	$3.75 \cdot 10^{-12}$	0.59	0.001	$10^{-3}$	$6.01 \cdot 10^{-12}$	1.18
100	0.1	0.35	0.03	0.1	$10^{-3}$	0.35	0.03
	0.01	$4.83 \cdot 10^{-6}$	0.12	0.011	$10^{-3}$	$2.68 \cdot 10^{-6}$	0.15
	0.001	$5.01 \cdot 10^{-11}$	0.53	0.001	$10^{-3}$	$1.54 \cdot 10^{-11}$	1.15
1000	0.1	—	—	—	—	—	—
	0.01	0.005	0.21	0.01	$10^{-3}$	0.006	0.17
	0.001	$4.09 \cdot 10^{-8}$	0.53	0.001	$10^{-3}$	$5.39 \cdot 10^{-8}$	1.27

Анализируя представленные в табл. 6 результаты, видно, что модифицированный наилучший аргумент  $\kappa$  оказывается малоэффективным для рассматриваемой задачи: в основном средняя ошибка для обоих подходов совпадают, а время счета отличается лишь на сотые, а в некоторых случаях, счет задачи, преобразованной к модифицированному наилучшему аргументу  $\kappa$  занимает в два раза больше времени.

Табл. 7 представляет собой табл. 4, в которую добавлены также средняя ошибка и время численного счета задачи (8), преобразованной к экспоненциальному наилучшему аргументу с параметром  $\alpha = -100$ , явным методом Эйлера с переменным шагом. Таким образом, во-первых, показано, что преобразование к экспоненциальному наилучшему аргументу позволило получить численное решение задачи для больших значений  $\xi_0$ . Напомним, что этот параметр отвечает за жесткость задачи: чем он больше, тем жестче задача. Во-вторых, отметим, что для случая  $\xi_0 = 1$   $\kappa$ -преобразованная система лучше всего соблюдает заданную точность  $\theta$  по правилу Рунге.

В табл. 8 приведены результаты из табл. 5 с добавлением в них средней ошибки, времени счета задачи (8), преобразованной к экспоненциальному наилучшему аргументу  $\kappa$  с соответствующим параметром  $\alpha$ , явным методом Эйлера с постоянным шагом. Отметим, что, в отличие от результатов, полученных явным методом Эйлера с переменным шагом, где  $\alpha = -100$ , здесь были выбраны значения  $0 < \alpha \ll 1$ , так как для других значений  $\alpha$  получить решение не удалось. Однако, хотя при использовании переменного шага значения  $0 < \alpha \ll 1$  привели к достаточно точным решениям, это заняло значительно большие временные затраты, поэтому они не были приведены в табл. 7.

Рассмотрим прикладную задачу об одномерном стационарном потоке, возникающем при вдувании газа со сверхзвуковой скоростью в канал с постоянной или с увеличивающейся площадью переменного сечения при наличии противодействия. Данная задача моделируется системой уравнений Навье-Стокса. В работе К. Чанга и Ф.

Таблица 7. Средняя ошибка  $\varepsilon_{avg}$  и время счета  $t_c$  численного решения задачи (8) явным методом Эйлера с переменным шагом, вычисляемым по правилу Рунге с допустимой погрешностью  $\theta$ , начальным шагом  $h_0 = 10^{-5}$  и параметром  $\alpha = -100$  для экспоненциального наилучшего аргумента.

$\xi_0$	$\theta$	Исходная задача		Наилучший аргумент		Экспоненциальный наилучший аргумент	
		$\varepsilon_{avg}$	$t_c, c$	$\varepsilon_{avg}$	$t_c, c$	$\varepsilon_{avg}$	$t_c, c$
1	$10^{-4}$	0.0072	0.01	0.02	0.02	$1.1 \cdot 10^{-4}$	0.33
	$10^{-5}$	0.02	0.05	0.02	0.03	$2 \cdot 10^{-5}$	0.8
	$10^{-6}$	0.006	0.11	0.01	0.18	$3.6 \cdot 10^{-6}$	2.5
	$10^{-7}$	$8.5 \cdot 10^{-4}$	0.3	0.002	0.4	$6.3 \cdot 10^{-7}$	8.2
	$10^{-8}$	$1.4 \cdot 10^{-4}$	0.8	$2.3 \cdot 10^{-4}$	1.25	$1.1 \cdot 10^{-7}$	25
10	$10^{-6}$	—	—	—	—	$7.9 \cdot 10^{-4}$	2.3
	$10^{-7}$	—	—	—	—	$8.5 \cdot 10^{-4}$	7.2
	$10^{-8}$	—	—	—	—	$2.1 \cdot 10^{-4}$	22
50	$10^{-6}$	—	—	—	—	0.006	2
	$10^{-7}$	—	—	—	—	0.003	6.6
	$10^{-8}$	—	—	—	—	$1.6 \cdot 10^{-4}$	22

Таблица 8. Средняя ошибка  $\varepsilon_{avg}$  и время счета  $t_c$  численного решения задачи (8) явным методом Эйлера с постоянным шагом  $h$  и параметром  $\alpha$  для экспоненциального наилучшего аргумента.

$\xi_0$	$h$	Исходная задача		Наилучший аргумент		Экспоненциальный наилучший аргумент		
		$\varepsilon_{avg}$	$t_c, c$	$\varepsilon_{avg}$	$t_c, c$	$\varepsilon_{avg}$	$t_c, c$	$\alpha$
1	$10^{-3}$	$2.85 \cdot 10^{-4}$	0.11	$4.28 \cdot 10^{-4}$	0.17	$5.67 \cdot 10^{-4}$	0.14	$10^{-1}$
	$10^{-4}$	$8.99 \cdot 10^{-6}$	0.84	$1.35 \cdot 10^{-5}$	1.55	$1.78 \cdot 10^{-5}$	1.32	$10^{-1}$
	$10^{-5}$	$2.84 \cdot 10^{-7}$	8.14	$4.25 \cdot 10^{-7}$	15.78	$5.62 \cdot 10^{-7}$	13.14	$10^{-1}$
10	$10^{-3}$	—	—	—	—	0.01	0.15	$10^{-1}$
	$10^{-4}$	—	—	—	—	$6.83 \cdot 10^{-4}$	1.58	$1.3 \cdot 10^{-2}$
	$10^{-5}$	$2.44 \cdot 10^{-4}$	8.11	$8.2 \cdot 10^{-4}$	19.83	$8.83 \cdot 10^{-4}$	15.54	$10^{-2}$
50	$10^{-3}$	—	—	—	—	—	—	—
	$10^{-4}$	—	—	—	—	0.0032	1.38	$10^{-1}$
	$10^{-5}$	—	—	—	—	$9.19 \cdot 10^{-4}$	15.34	$10^{-2}$

Хауэса<sup>7</sup> задача сводится к решению следующей краевой задачи для сингулярно-возмущенного дифференциального уравнения:

<sup>7</sup> Чанг К., Хауэс Ф. Нелинейные сингулярно возмущенные краевые задачи. Теория и приложения. М.: Мир, 1988. 247 с.

$$\begin{cases} \varepsilon A y \frac{d^2 y}{dx^2} = \left[ \frac{\gamma + 1}{2} y - y^{-1} \right] \frac{dy}{dx} - \frac{d}{dx} \left[ \ln A \left( 1 - \frac{\gamma - 1}{2} y^2 \right) \right], & 0 < x < 1, \\ y(0, \varepsilon) = y_-, & y(1, \varepsilon) = y_+, \end{cases} \quad (12)$$

где  $y_- > y_+ > 0$ ,  $\varepsilon$  — малый параметр.

Таким образом, при известной сверхзвуковой скорости  $y_-$  на входе в канал требуется определить, как происходит сверхзвуковой-дозвуковой переход внутри канала при заданной дозвуковой скорости  $y_+$  на выходе из канала.

В случае постоянного сечения  $A = 1$  задача имеет вид

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = \left[ \frac{\gamma + 1}{2} - y^{-2} \right] \frac{dy}{dx}, & 0 < x < 1, \\ y(0, \varepsilon) = y_-, & y(1, \varepsilon) = y_+. \end{cases} \quad (13)$$

На рис. 3 представлены численные решения задачи (13) для  $\varepsilon = 0.1, 1$  явным методом Эйлера. Видно, что при стремлении  $\varepsilon$  к нулю в решении рассматриваемой задачи образуется пограничный слой.

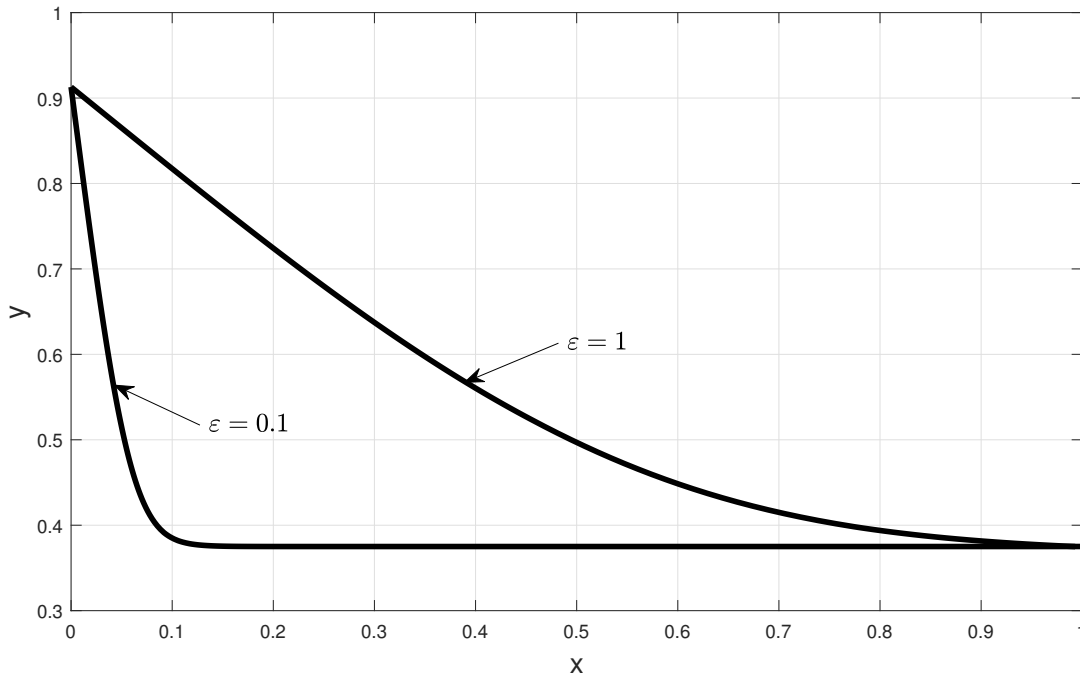


Рис. 3. Численное решение задачи (13) для  $\varepsilon = 0.1, 1$  явным методом Эйлера с переменным шагом, отсчитываемым по правилу Рунге с точностью  $\theta = 10^{-3}$ , с начальным шагом  $h_0 = 10^{-4}$ .

В табл. 9 представлены время счета  $t_c, c$  исходной задачи (13) и задач, преобразованных к наилучшему аргументу  $\lambda$  и его модификации  $\kappa$ , методом стрельбы с точностью  $\delta = 10^{-3}$ . Задачи Коши были решены явным методом Эйлера с переменным шагом, начиная с  $h_0 = 10^{-4}$ , отсчитываемым по правилу Рунге с точностью  $\theta = 10^{-3}$ . Получить численное решение исходной задачи удалось только для значений  $\varepsilon \geq 0.1$ , тогда как преобразование к наилучшему аргументу  $\lambda$  позволило сделать это

для некоторых значений  $\varepsilon < 0.1$ . При уменьшении значений  $\varepsilon$  новый подход оказывается значительно эффективнее других рассматриваемых методов.

Таблица 9. Время счета  $t_c$  задачи (13) методом стрельбы с точностью  $\delta = 10^{-3}$  с применением явного метода Эйлера с переменным шагом, отсчитываемым по правилу Рунге с точностью  $\theta = 10^{-3}$ , с начальным шагом  $h_0 = 10^{-4}$ .

$\varepsilon$	Исходная задача	Наилучший аргумент	Экспоненциальный наилучший аргумент	
	$t_c, c$	$t_c, c$	$t_c, c$	$\alpha$
1.0	0.036	0.061	0.039	$10^{-3}$
0.9	0.033	0.09	0.047	$10^{-3}$
0.8	0.035	0.089	0.048	$10^{-3}$
0.7	0.035	0.085	0.064	$10^{-3}$
0.6	0.038	0.103	0.054	$10^{-3}$
0.5	0.034	0.072	0.053	$10^{-3}$
0.4	0.037	0.063	0.036	$10^{-3}$
0.3	0.096	0.131	0.105	$10^{-3}$
0.2	0.195	1.497	0.228	$10^{-3}$
0.1	352.08	1.035	1.095	$10^{-4}$
0.09	—	5.437	1.259	$10^{-1}$
0.08	—	733.2	1.338	$10^{-4}$
0.07	—	—	9.363	$10^{-1}$
0.06	—	—	19.911	$10^{-3}$
0.05	—	—	1.31	$0.5 \cdot 10^{-5}$

В случае сечения  $A(x) = 1 + x^2$  задача имеет вид

$$\begin{cases} \varepsilon (1 + x^2) y \frac{d^2 y}{dx^2} = \left[ \frac{\gamma + 1}{2} y - y^{-1} + \ln(1 + x^2) (\gamma - 1) y \right] \frac{dy}{dx} - \\ - \frac{2x}{1 + x^2} \left( 1 - \frac{\gamma - 1}{2} y^2 \right), \quad y(0) = y_-, \quad y(1) = y_+, \quad 0 < x < 1. \end{cases} \quad (14)$$

Решение рассматриваемой задачи для  $\varepsilon = 0.05, 1$  представлено на рис. 4. Видно, что при устремлении  $\varepsilon \rightarrow 0$  в задаче (14) образуется внутренний слой.

В табл. 10 приведено время численного решения задачи (14) и задач, полученных при преобразовании задачи (14) к наилучшему аргументу  $\lambda$  и его модификации  $\kappa$ . Для расчета были выбраны те же значения, что и ранее:  $y_- = 0.9129$ ,  $y_+ = 0.375$  и  $\gamma = 7/5$ . Задачи были решены методом стрельбы с применением процедуры Ньютона с малым приращением  $\delta = 10^{-3}$ . Начальные задачи были решены явным методом Эйлера с переменным шагом, выбранным согласно правилу Рунге с точностью  $\theta = 10^{-3}$ . За начальный шаг было взято значение  $h_0 = 10^{-4}$ .

Таким образом, апробация нового подхода показала, что экспоненциальный наилучший аргумент позволяет повысить эффективность явных численных методов при решении задач с пограничными слоями и контрастными структурами, когда скорость роста интегральных кривых является экспоненциальной. При этом, варьируя значения параметра  $\alpha$  можно значительно сократить время счета задачи. Одним из недостатков нового подхода является привязанность экспоненциального наилучшего аргумента  $\kappa$  к данному классу задач, и для задач небольшой жесткости оказывается не эффективнее,



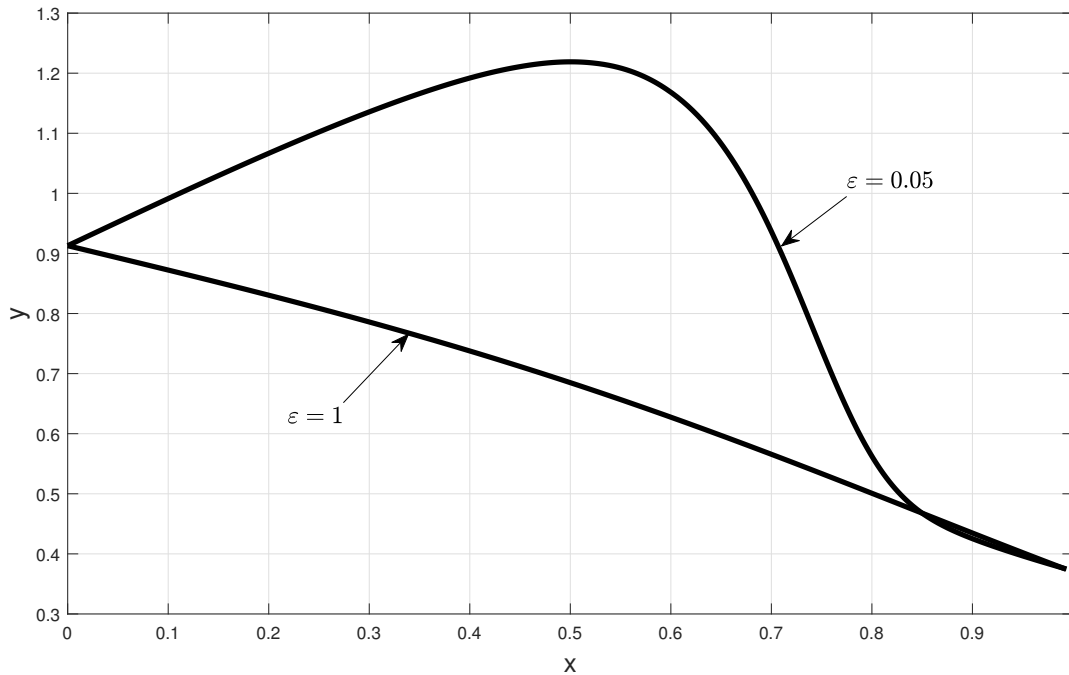


Рис. 4. Численное решение задачи (14) для  $\varepsilon = 0.05, 1$  явным методом Эйлера с переменным шагом, отсчитываемым по правилу Рунге с точностью  $\theta = 10^{-3}$ , с начальным шагом  $h_0 = 10^{-4}$ .

Таблица 10. Время счета  $t_c$  задачи (14) методом стрельбы с углом пристрелки  $\delta = 10^{-3}$  с применением явного метода Эйлера с переменным шагом, отсчитываемым по правилу Рунге с точностью  $\theta = 10^{-3}$ , с начальным шагом  $h_0 = 10^{-4}$ .

$\varepsilon$	Исходная задача	Наилучший аргумент	Экспоненциальный наилучший аргумент	
	$t_c, c$	$t_c, c$	$t_c, c$	$\alpha$
1.0	0.04	0.08	0.06	$10^{-3}$
0.5	0.05	0.09	0.07	$10^{-3}$
0.2	0.08	0.36	0.18	$10^{-3}$
0.15	0.11	0.42	0.2	$10^{-3}$
0.11	0.43	0.54	0.3	$10^{-3}$
0.1	2.65	0.59	0.26	$10^{-3}$
0.09	336.36	9.2	0.7	$10^{-4}$
0.08	119.45	9.18	1.79	$10^{-4}$
0.07	—	22.18	5.41	$10^{-3}$
0.06	—	—	9.95	$10^{-5}$
0.05	—	—	81.75	$0.5 \cdot 10^{-6}$

чем наилучший аргумент  $\lambda$ . Еще один недостаток связан с неоднозначностью выбора параметра  $\alpha$ .

В **четвертой главе** приведены теоретические результаты исследования. Было получено более общее доказательство теоремы об увеличении области абсолютной устойчивости разностной схемы явного метода Эйлера для задач, преобразованных к наилучшему аргументу  $\lambda$ . Также была сформулирована и доказана теорема о том, что экспоненциальный наилучший аргумент  $\kappa$  позволяет еще больше расширить область абсолютной устойчивости явного метода Эйлера. Затем приведены некоторые

следствия и замечания касательно связи наилучшего аргумента  $\lambda$  и экспоненциального наилучшего аргумента  $\kappa$  и возможного критерия для выбора параметра  $\alpha$ . В завершении на примере экспоненциального теста проведена апробация теоретических результатов и показано, что экспоненциальный наилучший аргумент действительно позволяет увеличить шаг интегрирования при численном решении задач с экспоненциальной скоростью изменения интегральных кривых.

Исследование области устойчивости и спектральных характеристик рассматривают, как правило<sup>8</sup>, на примере задачи, получившей название задачи Далквиста, вида

$$\frac{dy}{dt} = ay, \quad y(0) = y_0, \quad (15)$$

где  $a$  — некоторая константа.

Следующая теорема дает условие на шаг интегрирования, при котором разностная схема явного метода Эйлера для задачи (15) сохраняет абсолютную устойчивость. Стоит отметить, что в известных формулировках данного результата (например, в монографии А. А. Самарского и А. В. Гулина<sup>9</sup>) принимается  $a < 0$ , а шаг интегрирования  $h_t > 0$ . На практике возможен случай, когда  $h_t < 0$ . Тогда условие абсолютной устойчивости будет справедливым, если  $a < 0$ . Этот случай включен и доказан в этой и следующих теоремах диссертации.

**Теорема 1.** *Разностная схема явного метода Эйлера для задачи (15) является абсолютно устойчивой, если шаг интегрирования удовлетворяет неравенству*

$$|h_t| \leq \frac{2}{|a|}. \quad (16)$$

В статье Е. Б. Кузнецова и В. И. Шалашилина<sup>10</sup> было получено условие абсолютной устойчивости разностной схемы явного метода Эйлера для задачи (15), преобразованной к наилучшему аргументу  $\lambda$ . Однако в доказательстве авторами принималось, что второе уравнение системы (4) для задачи (15) вносит пренебрежимо малый вклад в характер устойчивости приближенного решения, что является верным только в окрестности предельной особой точки. В доказательстве, приведенном в данной диссертации, этот недостаток устранен.

**Теорема 2.** *Разностная схема явного метода Эйлера для преобразованной к наилучшему аргументу  $\lambda$  задачи (15) является абсолютно устойчивой, если шаг интегрирования удовлетворяет неравенству*

$$|h_\lambda| \leq \frac{2(1 + a^2 y_m^2)^{3/2}}{|a|}. \quad (17)$$

По аналогии с предыдущими теоремами был получен следующий теоретический результат, который дает оценку абсолютной устойчивости разностной схемы явного

<sup>8</sup> Dahlquist G. A. A special stability problem for linear multistep methods // ВИТ. 1963. No. 3. Pp. 27-43.

<sup>9</sup> Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М.: Наука, 1980.

<sup>10</sup> Кузнецов Е. Б., Шалашилин В. И. Задача Коши как задача продолжения решения по параметру // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1993. Т. 33. № 12. С. 1792-1805.

метода Эйлера для задачи (15), преобразованной к экспоненциальному наилучшему аргументу  $\kappa$ .

**Теорема 3.** *Разностная схема явного метода Эйлера для задачи (15), преобразованной к экспоненциальному наилучшему аргументу  $\kappa$ , является абсолютной устойчивой для значений параметра  $\alpha$ , удовлетворяющих условию*

$$a \cdot \alpha \leq 0, \quad (18)$$

если шаг интегрирования удовлетворяет неравенству

$$|h_\kappa| \leq \frac{4(1 + a^2 y_m^2 \exp 2\alpha t_m)^{3/2}}{|D_{\max}| \exp \alpha t_m}, \quad (19)$$

где

$$D_{\max} = \begin{cases} D_1, & a + \alpha \geq -\frac{2(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\alpha t_m))^{3/2}}{h_\kappa \exp(\alpha t_m)}, \\ D_2, & a + \alpha < -\frac{2(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\alpha t_m))^{3/2}}{h_\kappa \exp(\alpha t_m)}, \end{cases}$$

$$D_1 = a + \alpha + \sqrt{(a - \alpha)^2 - 4a^3 \alpha y_m^2 \exp(2\alpha t_m)},$$

$$D_2 = a + \alpha - \sqrt{(a - \alpha)^2 - 4a^3 \alpha y_m^2 \exp(2\alpha t_m)}.$$

Очевидно, что при  $\alpha = 0$  экспоненциальный наилучший аргумент  $\kappa$  становится наилучшим аргументом  $\lambda$ . В диссертации доказано следствие из теоремы 3, подтверждающее связь между наилучшим аргументом и его модификацией. При этом варьируя значения  $\alpha$ , можно добиться увеличения области абсолютной устойчивости разностной схемы явного метода Эйлера для преобразованной задачи.

В диссертации также показано, что выбор  $\alpha = -a$  хорошо подходит для решения жестких и сверхжестких начальных задач и менее пригоден для начальных задач с малыми значениями параметра  $a$ . Однако при больших значениях параметра  $a$  возникают вычислительные трудности с проведениями расчетов, поскольку значения  $\exp(at_m)$  могут достигать очень больших значений.

На верхнем графике рис. 5 представлены точное решение задачи (8) (отмечено маркерами в виде крестика), численные решения исходной задачи (8) (штриховая линия), задачи (8), полученной в результате преобразования к наилучшему аргументу  $\lambda$  (пунктирная линия), а также его модификации  $\kappa$  (сплошная линия).

На нижнем графике рис. 5 изображен график значений шага интегрирования в каждой точке решения исходной задачи (8) (штриховая линия) и соответствующих задач, преобразованных к наилучшему аргументу  $\lambda$  (пунктирная линия) и его модификации  $\kappa$  (сплошная линия). Для исходной задачи и задачи, преобразованной к наилучшему аргументу  $\lambda$ , наблюдается уменьшение шага интегрирования при прохождении пограничных и внутренних слоев. При решении задачи, преобразованной к модифицированному наилучшему аргументу  $\kappa$ , шаг практически не уменьшается на протяжении всего процесса вычисления, только приостанавливая свое увеличение при прохождении участков быстрого изменения интегральной кривой. Отметим, что параметр модифицированного наилучшего аргумента здесь имеет значение  $\alpha = -10$ , в

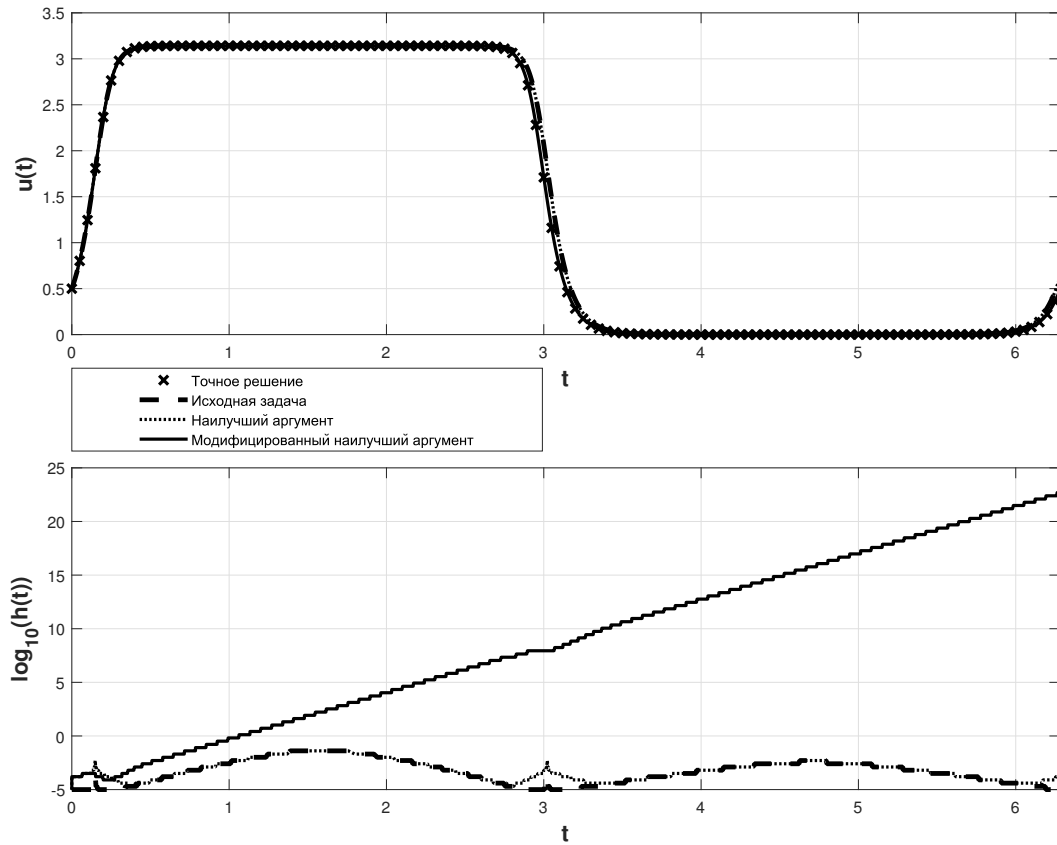


Рис. 5. Сверху: точное и численное решение задачи (8) для  $\xi_0 = 1$  явным методом Эйлера с переменным шагом, высчитываемым по правилу Рунге с допустимой погрешностью  $\theta = 10^{-8}$ , начальным шагом  $h_0 = 10^{-5}$  и параметром модифицированного наилучшего аргумента  $\alpha = -10$ .

Снизу: соответствующие значения шага интегрирования на каждом участке решения задачи (8).

отличие от расчетов, приведенных в табл. 7. Это сделано с целью более наглядного представления полученных результатов. Согласно им, при  $\alpha = -100$  шаг интегрирования увеличивается каждый раз еще значительно, что делает графики изменения шага интегрирования менее информативными.

Также стоит обратить внимание: на верхнем графике рис. 5 видно, что решение задачи, преобразованной к модифицированному наилучшему аргументу, наиболее близко к точному решению (9). И хотя численное решение заняло больше времени – 22 секунды, чем при решении исходной задачи – 6 секунд и задачи, преобразованной к наилучшему аргументу  $\lambda$  – 4 секунды, его точность на несколько порядков выше. Увеличение времени счета для задачи, преобразованной к экспоненциальному наилучшему аргументу  $\kappa$ , связано с необходимостью вычисления экспоненты с большими значениями аргументов.

Таким образом, преобразование исходной задачи к наилучшему и модифицированному наилучшему аргументам позволяет увеличить шаг интегрирования при применении явного метода Эйлера, что соответствует полученным теоретическим результатам. При этом применение модифицированного наилучшего аргумента в некоторых

случаях практически освобождает от необходимости подбора начального шага при использовании явного метода Эйлера с переменным шагом.

В **приложении** диссертации дается описание комплекса программ «Численное решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью модифицированного наилучшего параметра» (свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022610641 от 13.01.2022). Программный комплекс использовался для решения начальных и краевых задач, рассмотренных в диссертации. Общая блок-схема данного программного комплекса изображена на рис. 6.

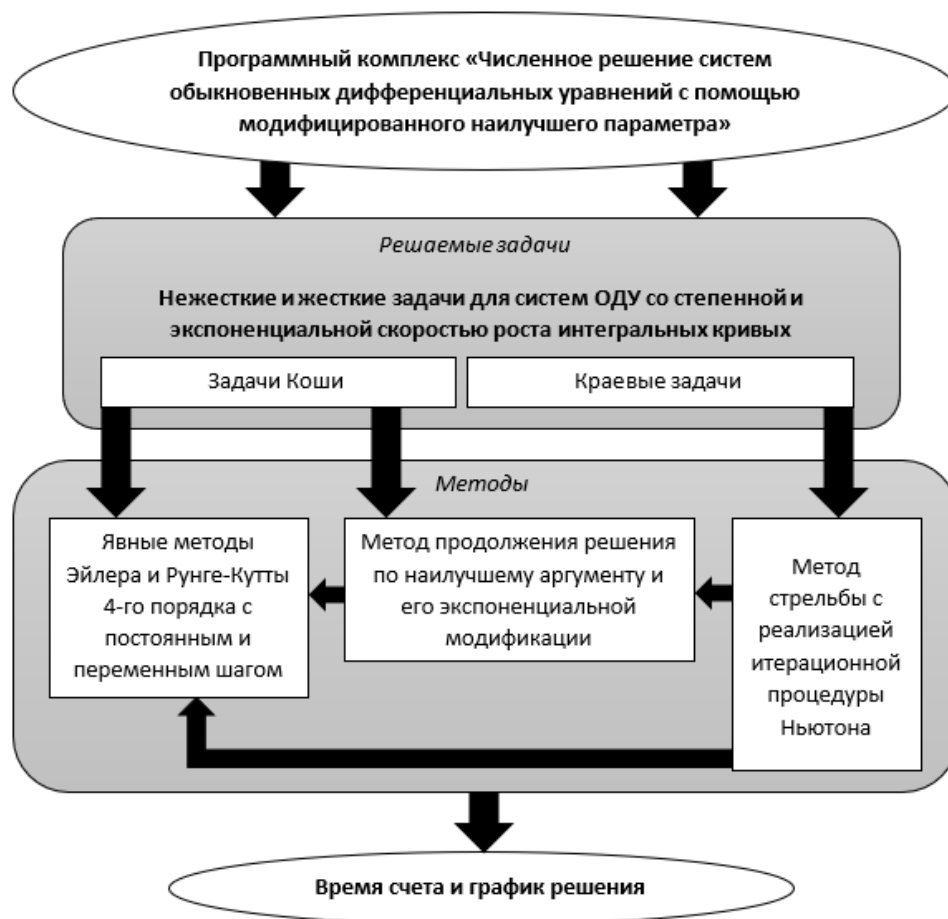


Рис. 6. Общая блок-схема программного комплекса

### Основные результаты, выносимые на защиту:

1. Проведено численное моделирование задачи сверхзвукового течения в каналах постоянного и переменного сечения [3, 5].

2. Разработан новый численный метод решения начальных и краевых задач для сингулярно возмущенных уравнений с контрастными структурами [1, 2, 4].

3. Разработан комплекс вычислительных программ, получивший государственную регистрацию [16].

4. Получено более общее доказательство абсолютной устойчивости разностной схемы явного метода Эйлера при решении задач, преобразованных к наилучшему аргументу [14].

5. Доказана абсолютная устойчивость разностной схемы явного метода Эйлера при решении задач, преобразованных к модифицированному наилучшему аргументу [15].

## Публикации в журналах из перечня ВАК и международных систем цитирования

1. *Кузнецов Е. Б., Леонов С. С., Цапко Е. Д.* Параметризация задачи Коши для нелинейных дифференциальных уравнений с контрастными структурами // Вестник Мордовского университета. 2018. Т. 28. № 4. С. 486-510. (WoS, ВАК)

2. *Кузнецов Е. Б., Леонов С. С., Тархов Д. А., Цапко Е. Д., Бабинцева А. А.* Численные методы решения задач с контрастными структурами // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2018. Т. 14. № 3. С. 539-547.

Перевод: *Kuznetsov E. B., Leonov S. S., Tarkhov D. A., Tsapko E. D., Babintseva A. A.* Arc Length and Multilayer Methods for Solving Initial Value Problems for Differential Equations with Contrast Structures // Modern Information Technology and IT Education. SITITO 2018. Communications in Computer and Information Science, Springer, Cham. 2020. Vol. 1201. Pp. 335-351. (Scopus, ВАК)

3. *Kuznetsov E. B., Leonov S. S., Tsapko E. D.* A new numerical approach for solving initial value problems with exponential growth integral curves // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. Vol. 927. No. 1. (Scopus, ВАК)

4. *Kuznetsov E. B., Leonov S. S., Tsapko E. D.* Applying the Best Parameterization Method and Its Modifications for Numerical Solving of Some Classes of Singularly Perturbed Problems // Advances in Theory and Practice of Computational Mechanics. Smart Innovation, Systems and Technologies. Springer, Singapore. 2022. Vol. 274. Pp. 311-330. (Scopus, ВАК)

5. *Цапко Е. Д.* Численное решение сингулярно возмущенной краевой задачи сверхзвукового течения, преобразованной к модифицированному наилучшему аргументу // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24. № 3. С. 304–316. (ВАК)

## Публикации по теме диссертации в материалах конференций

6. *Цапко Е. Д., Леонов С. С.* Методы решения дифференциальных уравнений с контрастными структурами: материалы XLIV междунар. молодежной науч. конф. «Гагаринские чтения - 2018», Москва, 2018 г. / М.: Моск. авиационный ин-т (национальный исследовательский университет). 2018. 417 с.

7. *Леонов С. С., Цапко Е. Д.* Численное решение задачи Коши для систем дифференциальных уравнений с контрастными структурами: Материалы XII Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (NPNJ'2018), 24-31 мая 2018 г., Алушта. М.: Изд-во МАИ. 2018. 768 с.

8. *Цапко Е. Д., Леонов С. С.* Численное моделирование задач с контрастными структурами: 17-я Международная конференция «Авиация и космонавтика - 2018». 19-23 ноября 2018 г., Москва. Тезисы. / Типография «Люксор». 2018. 740 с.

9. *Леонов С. С., Цапко Е. Д.* Численное решение краевых задач для дифференциальных уравнений с контрастными структурами: Материалы XXI Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2019), 24-31 мая 2019 г., Алушта. М.: Изд-во МАИ. 2019. 816 с.

10. *Цапко Е. Д., Кузнецов Е. Б.* Численное решение начальных задач с контрастными структурами переходом к специальным аргументам продолжения решения: «Гагаринские чтения - 2020»: Сборник тезисов докладов. / М.: МАИ. 2020. 1731 с.

**11.** *Леонов С. С., Цапко Е. Д.* О способах понижения жесткости при численном решении задач с контрастными структурами: Материалы XIII Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (АММАГ'2020), 6-13 сентября 2020 г., Алушта. М.: Изд-во МАИ. 2020. 784 с.

**12.** *Цапко Е. Д., Кузнецов Е. Б., Леонов С. С.* Численное решение задач с экспоненциальной скоростью роста интегральных кривых: 19-я Международная конференция «Авиация и космонавтика - 2018». 23-27 ноября 2020 г., Москва. Тезисы. / М.: Изд-во «Перо». 2020. 980 с.

**13.** *Цапко Е. Д., Леонов С. С., Кузнецов Е. Б.* Метод продолжения решения для краевой задачи сверхзвукового течения в случае экспоненциальной скорости роста интегральных кривых: Материалы XXII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2021), 4-13 мая 2021 г., Алушта. М.: Изд-во МАИ. 2021. 696 с.

**14.** *Цапко Е. Д., Леонов С. С., Кузнецов Е. Б.* Оценка области абсолютной устойчивости метода продолжения решения по аргументам специального вида при интегрировании жестких начальных задач: Материалы XXII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2021), 4-13 мая 2021 г., Алушта. М.: Изд-во МАИ. 2021. 696 с.

**15.** *Цапко Е. Д., Леонов С. С., Кузнецов Е. Б.* Абсолютная устойчивость явной схемы метода Эйлера для задач, преобразованных к модифицированному наилучшему аргументу: Аннотации докладов X Международной научной молодежной школы-семинара «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» им. Е. В. Вознесенского, 14-18 июля 2022 г., Саранск. Саранск: Средне-Волжское математическое общество. 2022. с. 17-18.

### **Дополнительно**

**16.** Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022610641 от 13.01.2022 «Численное решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью модифицированного наилучшего параметра».