

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

На правах рукописи



**ХОА ВАН ДОНГ**

**ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ЭЛЕМЕНТАХ ТОНКОСТЕННЫХ  
КОНСТРУКЦИЙ ИЗ СЛОИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ**

Специальность 1.1.8. – Механика деформируемого твердого тела

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени

кандидата технических наук

Научный руководитель:

д.т.н., доцент

Миронова Любовь Ивановна

Москва – 2025

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ .....</b>	<b>5</b>
<b>ГЛАВА I. МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ТЕРМОУПРУГОСТИ ТОНКОСТЕННЫХ СИСТЕМ.....</b>	<b>12</b>
1.1. Обзор литературы о применяемых методах решения задачи.....	12
1.2. Подход к интегрированию уравнений теории упругости для тонкостенных тел.....	29
1.2.1. Общие основы метода Сен-Венана – Пикара – Банаха (SVPB).....	29
1.2.2. Итерационный процесс для узкой полосы, деформируемой с учетом действия поля температуры.....	31
1.2.3. Выполнение граничных условий на длинных сторонах полосы. Основные разрешающие соотношения.....	34
1.2.4. Выполнение граничных условий на коротких сторонах полосы. Условие свободных краев.....	39
1.2.5. Выполнение условия жесткого защемления на коротких сторонах полосы.....	41
1.2.6. Преобразование уравнений способом прямых подстановок. Решение для защемленной по краям полосы .....	43
1.2.7. Выполнение расчета на соотношениях следующего приближения .....	45
1.3. Выводы по первой главе .....	56
<b>ГЛАВА II. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СЛОИСТОЙ ПОЛОСЫ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА СЖАТЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ .....</b>	<b>58</b>
2.1. Произвольно нагруженная по длинным сторонам слоистая полоса .....	58
2.2. Выполнение граничных условий на длинных сторонах полосы .....	61
2.3. Решение пространственной задачи для двухслойной полосы .....	63
2.3.1. Двухслойная полоса со слоями одинаковой толщины.....	63
2.3.2. Двухслойная полоса со слоями различной толщины .....	72
2.4. Полоса с произвольным количеством слоев различной толщины .....	77

2.4.1. Выполнение условий на длинных сторонах .....	77
2.4.2. Выполнение условий на коротких сторонах.....	80
2.5. Выводы по второй главе .....	87
<b>ГЛАВА III. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ СЛОИСТОЙ</b>	
<b>ПОЛОСЫ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА СЖАТЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ.....</b>	<b>88</b>
3.1. Произвольно нагруженная по длинным сторонам полоса при действии поля температуры .....	88
3.2. Двухслойная полоса при действии механической нагрузки и поля температуры .....	90
3.2.1. Случай слоев равной толщины.....	91
3.2.2. Двухслойная полоса со слоями различной толщины .....	100
3.3. Полоса с произвольным количеством слоев различной толщины при действии механической нагрузки и поля температуры .....	107
3.3.1. Выполнение граничных условий на лицевых сторонах.....	107
3.3.2. Выполнение условий на коротких сторонах полосы .....	111
3.4. Выводы по третьей главе .....	116
<b>ГЛАВА IV. ТРЕХМЕРНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ.....</b>	<b>118</b>
4.1. Изотропная пластина при механическом и температурном нагружении ...	118
4.1.1. Последовательность приближенных соотношений для искомым неизвестных.....	118
4.1.2. Граничные условия на лицевых сторонах пластины. Разрешающие соотношения для основных неизвестных задачи.....	123
4.1.3. Выполнение граничных условий на торцевых поверхностях. Аналитический и численный результаты .....	128
4.2. Основные соотношения для пластины с произвольным количеством слоев. Уравнения для основных неизвестных .....	138
4.3. Разрешающие соотношения для основных неизвестных. Выполнение условий на лицевых сторонах .....	141

4.3.2. Двухслойная пластина со слоями различной толщины .....	149
4.3.3. Пластина с произвольным количеством слоев различной толщины ....	152
4.4. Выводы по четвертой главе .....	155
<b>ГЛАВА V. ПРИМЕРЫ РЕАЛИЗАЦИИ РАСЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ В ИССЛЕДОВАНИИ ТЕХНИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ МАТЕРИАЛОВ С ФУНКЦИОНАЛЬНО ИЗМЕНЯЕМЫМ СОСТАВОМ .....</b>	<b>157</b>
5.1. Металлическая конструкция с наплавленным слоем .....	157
5.2. Конструкция режущей твердосплавной пластины с покрытиями титановольфрамовой группы .....	161
5.3. Выводы по пятой главе .....	175
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>	<b>176</b>
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....</b>	<b>179</b>

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы исследования.** Одним из приоритетных направлений создания новой авиационной техники является разработка и внедрение в производство конструкций из перспективных материалов, удельные массовые и прочностные показатели которых при требуемой надежности существенно снижают металлоемкость изделий. Такими преимуществами обладают, несомненно, композиционные материалы, состоящие из композитов различных структур: волокнистых, слоистых, включающих как металлические, так и неметаллические, в том числе полимерные составляющие.

Вместе с этим не малый интерес у специалистов вызывают слоистые материалы с функционально изменяемым составом, характеризующиеся многослойной структурой, где каждый слой, например, меняющийся от хрупкой керамики до пластичного металла, выполняет заранее заданную функцию [1, 2]. Наружные слои такой структуры способны противостоять нагреву до высокой температуры и воздействию окислительной среды, а внутренние слои интенсивно охлаждаться.

В производстве режущих инструментов с совершенствованием технологий получения инструментальных материалов широко применяются режущие пластины, имеющие многослойные покрытия, толщиной в несколько нанометров. По структуре такие конструкции являются слоистыми, в которых каждый слой характеризуется определенными поверхностными свойствами (микротвердостью, теплостойкостью, физико-химической пассивностью к обрабатываемому материалу и пр.). Нанесение износостойких покрытий на твердосплавный режущий инструмент существенно повышает эксплуатационные показатели инструмента [3].

В процессе эксплуатации под силовым воздействием конструкции из слоистых материалов испытывают неравномерное напряженно-деформированное состояние (НДС), особенно по границам слоев, имеющих разные физико-механические свойства. Возникающие при этом деформации и напряжения могут

достигать предельных значений, приводящих к расслаиванию материала, а в некоторых случаях, его разрушению.

Весьма важным здесь является разработка методов исследования НДС с учетом тщательного анализа условий эксплуатации и комплекса воздействующих факторов, что указывает на необходимость детального анализа поведения конструкции, например, при действии перепадов температур.

Несмотря на значительное количество разработанных уточненных методов расчета в постановке теории пластин и оболочек приоритетной задачей является возможность получения решения для исходных уравнений теории упругости, в меньшей степени ограниченного упрощающими гипотезами.

Наличие в структуре материала слоистых составляющих с существенно различными свойствами, ставит задачу подробного изучения полей напряжений, воздействующих как на компоненты материала, так и на состояние связей между ними. Особенно значимым является исследование НДС в узких краевых зонах и областях иных сингулярностей, где возможны (или проявляются) резкие изменения значений напряжений. Обычное для теории тонкостенных конструкций усредненное рассмотрение, выражающееся в применении интегральных силовых факторов (усилий, моментов), влияет на точность выполнения граничных условий, что сказывается на результате не только вблизи сингулярностей, но также способно отразиться на расчете и основного напряженного состояния (во внутренней области).

Следует отметить, что одной из качественных проблем, сдерживающих эффективность построения решения многих задач механики, является наложение упрощающих интуитивных гипотез, существенно снижающих информативность и точность получения результата. Наивысшей точкой достижения качественной картины НДС любой конструкции без принятых искусственных влияний и, может быть, искажений, допущений и ограничений является стремление специалистов к получению конечного решения в аналитическом виде.

Поэтому разработка расчетных моделей и математического аппарата, нацеленных на решение указанных выше задач, на основе развивающегося нового итерационно-асимптотического метода, названного в литературе методом Сен-Венана–Пикара–Банаха, определяет **актуальность** выполненного исследования. Такой подход повышает точность определения температурных напряжений в элементах тонкостенных конструкций из слоистых материалов при сложном нагружении и позволяет провести исследования, важных для практики, как на макроуровне в слоях с толщиной более 100 микрон, так и на микроуровне, когда сформированные слои имеют малую величину в пределах десятков нанометров.

**Объект диссертационного исследования** — тонкостенные элементы конструкций из изотропных и многослойных материалов, моделями которых служат узкая полоса и пластина, при воздействии на них механической нагрузки и поля температуры.

**Предметом исследования** является метод расчета компонент напряженно-деформированного состояния тонкостенных элементов конструкций из слоистых материалов.

**Целью диссертационной работы** является разработка методики постановки и решения задач теории упругости для тонкостенных конструкций при заданном распределении температуры, ценность которой заключается в ее аналитичности и новизне, дающих полную картину работы слоистого материала в изделии с учетом температурного воздействия. Строгие аналитические решения в механике для тонкостенных элементов из слоистого материала в литературе отсутствуют.

**Задачами настоящей работы** являются:

– построение сходящейся асимптотической по малому параметру тонкостенности итерационной процедуры интегрирования уравнений теории упругости полосы/балки и пластины без каких-либо априорных гипотез и предположений;

– сведение исходной системы дифференциальных уравнений термоупругости к итерационной последовательности интегральных уравнений типа Пикара относительно поперечной координаты с асимптотическими оценками всех неизвестных;

– выполнение граничных условий на длинных сторонах полосы/балки и лицевых сторонах пластины, и разделение уравнений для медленно меняющихся и быстро меняющихся (типа краевого эффекта) элементарных компонент неизвестных;

– построение формул для всех неизвестных в виде асимптотического ряда по малому параметру, коэффициентами которого являются степенные ряды по степеням поперечной координаты и интегрирование уравнений для коэффициентов асимптотического ряда;

– выполнение всех граничных условий на торцевых поверхностях;

– апробация заявленной методики в исследовании напряженно-деформированного состояния реальных тонкостенных конструкций из изотропных и слоистых материалов, моделями которых служат узкая полоса и пластина, при воздействии на них механической нагрузки и поля температуры.

**Методы исследования.** В диссертационной работе для решения сформулированных задач использованы следующие методы исследования:

– метод асимптотических разделения исходных сложных уравнений в частных производных на итерационные последовательности для определения медленно меняющихся и быстро меняющихся компонент общего решения на основе их асимптотических оценок по степеням малого параметра ;

– аналитический метод решения систем дифференциальных уравнений в частных производных путем сведения их к итерационной последовательности интегральных уравнений типа Пикара относительно поперечной координаты.

**Достоверность и обоснованность результатов и выводов** гарантируется применением теоретически обоснованного математического аппарата, а также

сравнением результатов расчета полученных по разработанной в диссертации асимптотических теорий с аналогичными данными классической теории.

**Научная новизна.** В диссертации получены следующие новые научные результаты, выносимые на защиту:

1. Предложена и реализована методика постановки и решения задач теории упругости, позволившая расширить границы применимости метода Сен-Венана – Пикара – Банаха для исследования термонапряженного состояния тонкостенных конструкций слоистой структуры при различных видах термонагружения.

2. В рамках единого подхода методом Сен-Венана – Пикара – Банаха интегрирования уравнений теории упругости тонкостенных систем для полосы и пластины из изотропного и слоистого материала в пространственной постановке получены последовательным приближением соотношения, выражающие компоненты напряженно-деформированного состояния через новые основные неизвестные функции меньшей размерности с учетом температурных деформаций. Соотношения, полученные без каких-либо априорных гипотез и предположений, имеют вид асимптотических рядов по малому параметру тонкостенности. Способ построения имеет характер итерационной процедуры, включающей интегральные уравнения типа Пикара относительно поперечной координаты.

3. Путем выполнения всех граничных условий на длинных сторонах полосы/балки и лицевых сторонах пластины получены разрешающие соотношения для основных неизвестных применительно к задаче о действии поверхностной механической нагрузки и поля температуры внутри тела. На этих соотношениях для полосы из изотропного и слоистого материала найдены аналитически решения и вычислены выполнением всех граничных условий на торцевых поверхностях константы интегрирования (для случая начального приближения – аналитически, для последующего – численно). По найденным решениям для основных неизвестных определены все компоненты напряженно-деформированного состояния.

4. Решение построено аналитически с учетом медленно меняющихся составляющих (основное решение для внутренней области) и быстро меняющихся (типа краевого эффекта). Получены их относительные асимптотические оценки. Показаны области локализации наибольших напряжений, в том числе поперечных касательных и нормальных, способных оказаться опасными для структуры слоистого материала.

5. Для задачи о термомеханическом воздействии на полосу из изотропного материала получены новые решения: для начального приближения – с применением аппарата асимптотик, для следующего приближения – с использованием прямых подстановок в процессе преобразования уравнений. Проведено сопоставление результатов. Сделаны выводы о наиболее эффективном применении рассмотренных подходов.

**Практическая значимость диссертационной работы.** Метод расчета тонкостенных конструкций, основанный на методе простых итераций и асимптотическом подходе, может быть использован в прочностных расчетах разрабатываемых изделий из перспективных материалов слоистой структуры и с функционально изменяемым составом, применяемых в самолетостроении, двигателестроении, ракетостроении, строительстве, а также других отраслях промышленности.

**Личный вклад автора.** Основные положения диссертации получены лично автором, либо при непосредственном его участии, что подтверждено публикациями.

**Апробация результатов работы.** Основные положения и результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

– XLIX Международной молодежной научной конференции «Гагаринские чтения» 11-14 апреля, 2023 г., Москва;

– 22-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика», 22-24 ноября 2023 г., Москва;

– 21-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика», 21-25 ноября 2022, Москва;

– XLVIII Международной молодёжной научной конференции «Гагаринские чтения», 12-15 апреля 2022 г., Москва;

– XXXIII Международной инновационной конференции молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения (МИКМУС-2021), 30 ноября-2 декабря 2021 г., Москва;

– 20-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика», 22-26 ноября 2021 г., Москва.

**Публикации.** Основное содержание диссертационной работы и ее результатов полностью отражено в 14-ти публикациях автора, в том числе в пяти статьях по заявленной специальности и в двух статьях по смежным специальностям в журналах, включенных в перечень ВАК РФ, одной статье журнала, индексируемого в Scopus, шести публикациях других изданий и журналов.

**Структура и объем.** Диссертационная работа состоит из введения, 5 глав, заключения и списка литературы. Работа содержит 196 страниц, 81 рисунок. Список литературы содержит 205 наименований.

## **ГЛАВА I. МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ТЕРМОУПРУГОСТИ ТОНКОСТЕННЫХ СИСТЕМ**

В данной главе представлен обзор литературы по основным методам решения задач механики тонкостенных систем. На основе метода Сен–Венана–Пикара–Банаха (SVPB) построена сходящаяся асимптотическая по малому параметру тонкостенности итерационная процедура интегрирования уравнений теории упругости с учетом температурного нагружения. Принцип построений, являющийся общим для метода, реализован на примере полосы/балки.

### **1.1. Обзор литературы о применяемых методах решения задачи**

Основные методы решения задач механики тонкостенных систем можно условно разделять на аналитические и численные, математические и прикладные, методы гипотез, разложения по толщине, и асимптотические [4, 6, 19, 20]. Эти методы, являющиеся в достаточной степени общими, находят применение и в расчете конструкций из композиционных материалов, в частности, слоистых.

Композиционные материалы благодаря совмещению свойств компонент и эффективному их комбинированию (в том числе взаимному расположению) позволяют достигать высоких прочностных и иных свойств (например, теплозащитных), концентрируя эти свойства в пространстве требуемым образом. Примером тому служат несущие авиационные конструкции, где использование армированных композитов (преимущественно ориентированной волокнистой структуры) дает необходимое снижение массы.

Значительная часть таких материалов имеет структуру, позволяющую рассматривать ее как состоящую из квазиоднородных слоев (в свою очередь включающих, например, направленные волокна и наполнитель). Исследование зависимости свойств таких слоев от характеристик его компонентов и структуры является предметом микромеханики композитов [20-27]. Аналитическое применение этих моделей ограничено идеализированным характером, обусловленным в том числе трудностями учета реализуемых в конкретных условиях параметров технологического процесса. В связи с чем основной

областью их приложения является разработка новых материалов и модификация их свойств [28]. Исторически оправданным показал себя экспериментальный подход, при котором необходимые параметры материала определяются по испытаниям образцов (в том числе отдельных слоев), изготовленных тем же методом, учитывающим все технологические факторы, что и для применяемых в изделии [28]. Наряду с этим для решения локальных и комплексных задач находят применение методы численного моделирования [29-32].

При построении прикладной теории расчета конструкций непосредственный учет неоднородностей композиционного материала обычно решается на макроуровне. Применительно к слоистому материалу это – собственно его слоистая структура, каждый из слоев которой считается квазиоднородным [28]. Принимая во внимание, что эффективное применение находят перспективные материалы, слои которых могут обладать как направленным, так и условно изотропным строением [33, 34], в настоящей работе развивается метод, учитывающий в первую очередь основную особенность таких структур – их слоистость; при этом материал каждого слоя рассматривается как изотропный, что имеет прямое отношение к соответствующим типам слоистых композитов [34]. Первостепенным же является желание получить результат в конечной аналитической форме.

Трехмерные уравнения теории упругости позволяют описать широкий класс задач механики конструкций из композиционных материалов. Вместе с тем непосредственное получение с их помощью конечного результата как в аналитическом виде, так и численно, связано со значительными трудностями [5, 28]. Принимая во внимание свойство тонкостенности (резкое отличие одного из измерений), характерное в основном для балок, пластин и оболочек, обычным способом упрощения является уменьшение размерности задачи, в результате чего, путем введения допущений, вместо начальных неизвестных (функций трех пространственных координат) новыми неизвестными становятся функции меньшей размерности либо константы, а решение сводится в предельном случае к

обыкновенным дифференциальным либо линейным алгебраическим уравнениям. Такая редукция может быть выполнена как формально математически, так и путем введения некоторых гипотез, в частности, геометрического, физического характера, касательно поведения модели [28].

Отделение координаты толщины (поперечной координаты) является общепринятым и связывается с особенностью геометрии тонкостенной конструкции, а также, применительно к слоистым материалам, – отличием свойств тела в направлении, перпендикулярном расположению слоев. Представление классической теории (Эйлера – Бернулли – Кирхгофа) о пластине как о плоской поверхности, элементы которой обладают конечной толщиной, а прямые трансверсальные сечения остаются прямыми и расположенными по нормали к поверхности после ее деформации, с определенными ограничениями может быть применено к конструкциям из композиционных материалов [28]. Основными критериями применимости здесь являются условия тонкостенности и малости прогибов. Второе требование обусловлено использованием приближенных выражений для кривизн (при изгибе) и можно добавить, опирается на их малость; первое фактически дает предпосылку для аппроксимаций и осреднений по толщине, одна из которых – гипотеза прямых нормалей. Ее продолжением являются теории (Тимошенко – Рейсснера и другие), допускающие дополнительно трансверсальные сдвиговые деформации [20, 35-37].

Получаемая с применением допущений система дифференциальных уравнений в этом случае имеет более высокий порядок, что позволяет полнее учесть граничные условия; также снимается часть противоречий, присущих классической теории [38]. Достигаемые при этом уточнения проявляются в большей степени в области сингулярностей (например, мест приложения сосредоточенной поперечной нагрузки, узких краевых зон, углов пластинки и возле отверстий, диаметр которых сопоставим с толщиной пластинки) [39].

Влияние сдвиговой податливости материала также оказывается более заметным при увеличении толщины стенки (в сравнении с линейным размером),

но, как показывают практические расчеты, при достаточной ее малости в значительной части случаев данным эффектом можно пренебречь [28]. Важным учет сдвига является для слоистых композитов, в частности со слоями, податливыми сдвигу (например, трехслойные конструкции с легким податливым на сдвиг заполнителем) [5, 28].

Гипотезы геометрического характера, лежащие в основе классической и сдвиговой теории имеют взаимную зависимость с представлениями о свойствах материала, вводимыми в модель. В частности, соотношения, отвечающие гипотезе прямых нормалей могут быть получены с использованием допущения физической ортотропности, когда жесткости (модули упругости) на растяжение – сжатие и сдвиг в трансверсальном направлении полагаются сколь угодно большими в сравнении с латеральными [28]. Для учета деформаций поперечного сдвига данные условия должны быть смягчены, и при построении прикладных моделей композитных стержней пластин и оболочек из двух указанных зачастую остается лишь ограничение в виде постоянства толщины (несжимаемости) пластинки [28]. Собственно линейное распределение перемещений по толщине пластины (закон плоских сечений) может быть получено путем принятия гипотез о несжимаемости и осреднения сдвиговых деформаций по толщине, которое для пластин малой толщины может рассматриваться как обобщение гипотезы обращения их в ноль [28].

Вывод уравнений классической и сдвиговой теорий может быть осуществлен как исходя из рассмотрения равновесия элемента поверхности подобно тому, как это делается в обычной теории балок [39], так и на основе системы соотношений теории упругости путем принятия допущений [28]. Ввиду близости к обычной (балочной) теории, вывод разрешающих соотношений, и определение обратным пересчетом искомых величин (компонент напряженно-деформированного состояния) в прикладных теориях тонких пластин обычно осуществляется с использованием выражений внутренних силовых факторов (усилий, моментов), осредняющих напряжения по сечению. Уравнения

равновесия, составленные посредством таких величин имеют смысл выполняющихся интегрально. То же касается основных статических граничных условий, взгляд на которые во многом аналогичен обычной теории, то есть основан на применении принципа Сен-Венана, с учетом чего решение получается значимым в основном, за исключением узкой краевой области [39, 40].

Геометрические граничные условия также строятся на представлениях одномерной балочной теории и касаются только перемещений в точках, расположенные вдоль края по линии на некотором расстоянии от лицевых поверхностей; также для защемленного края условие равенства угла наклона срединной линии переносится из обычной теории напрямую [39].

Несмотря на ряд несогласованностей и неточностей [38, 41] прикладной подход к построению теории тонких пластин, особенности которого отмечены выше, продолжает оставаться действенным инструментом технических расчетов (с учетом известных ограничений) и имеет ряд модификаций. Его популярность обеспечивается достигаемыми упрощениями (в сравнении с решением в рамках теории упругости), близостью к обычной (балочной) теории, значительной изученностью свойств модели, развитостью аппарата методов построения разрешающих соотношений и их решения. Благодаря этому данная система воззрений берется как основа прикладной теории тонких пластин из композиционного материала [28]. Помимо собственно композиционных материалов ее применение может быть направлено и на расчет тонкостенных регулярно подкрепленных конструкций (например, обшивки) [28, 42].

Обычное осреднение характеристик материалов, составляющих пакет, путем интегрирования по высоте приводит к образованию обобщенных коэффициентов жесткости (мембранных, изгибных, смешанных – имеющих отношение к соответствующим силовым факторам). При этом жесткости (модули упругости) в поперечном направлении в простом случае принимаются с учетом допущений теории плоских сечений (выбранного ее варианта), которой в результате будет удовлетворять смоделированный материал с усредненными

характеристиками (действительное взаимодействие слоев при этом не учитывается).

Расчет напряжений в слое выполняется пересчетом от решения для осредненного материала (в месте расположения слоя) к модели материала слоя (например, в случае ориентировано армированного материала слоя – с учетом взаимного расположения осей элемента и фактического расположения волокон). При симметричном расположении слоев (либо однородном по толщине материале), что нередко встречается на практике, значения смешанных жесткостей могут быть обращены в ноль (путем выбора положения начальной плоскости). В этом случае разрешающие соотношения разделяются относительно переменных, описывающих плоское напряженное состояние (нормальные и сдвиговые осредненные усилия в плоскости пластины) и изгиб (функции прогибов и угла наклона сечения). В отсутствии симметрии даже в допущении отсутствия сдвига разделение не происходит [28, 42].

Для слоистого материала применение гипотезы прямой линии дает удовлетворительный результат в случае малости толщины и малого различия модулей поперечного сдвига заполнителя и несущих слоев [28, 43]. Для получения более реалистичной картины применяются гипотезы ломаной линии и обобщенной ломаной линии (задающей более сложную форму аппроксимации в пределах слоев) [28, 44-46]. На данном направлении трудность вызывает построение прикладной теории как внутренне непротиворечивой, то есть позволяющей удовлетворить граничные условия на лицевых сторонах, обеспечить непрерывность перемещений и поперечных напряжений на стыках слоев, а также выполнить точно (не в интегральном смысле) уравнения обобщенного закона Гука [46]. Более подробный анализ моделей расчета слоистых пластин и оболочек содержится в работах [46-52].

Описание поведения тонкостенных тел вблизи краев и иных сингулярностей в таких моделях связывается обычно с наличием в решении быстроменяющихся (затухающих от края) компонент наряду с медленно изменяющимся основным

решением. В принципе, эта цель достигается переходом от классической теории к сдвиговой и более сложным. Происходящее при этом повышение порядка системы дифференциальных уравнений расширяет возможность выполнения условий закрепления [5, 41]. Вместе с тем, применение в структуре модели осреднений, описание состояния тела и условий на границах через поведение и условия, налагаемые на опорную поверхность, позволяют рассматривать достигаемый результат в большей мере как способствующий качеству модели в целом, нежели направленный на исследование влияния реальных физических условий закрепления.

Отказ от применения осреднений более строгое математически решение [28, 53, 54] при сохранении гипотез (физической и метода начальных функций) также показывает наличие разрывов в функциях компонент решения (как конечных, так и бесконечных – в угловых точках). Сложность детальной формализации действительных физических условий закрепления также указывает на скорее формальный, нежели фактический характер уточнений, проявляющихся при учете погранслоя в прикладной теории [28]. Исследование путей решения этих проблем содержится, в частности, в работах [55-64]. В ряде случаев возможно отделение соотношений для основного напряженного состояния от уравнений, содержащих быстроменяющееся решение [45, 65-67], однако, ввиду непосредственной связи этих двух решений в условиях на границах, последовательное точное их рассмотрение возможно при совместном их рассмотрении [5, 64].

В качестве основных [5] по применению метода гипотез в целом при построении моделей для расчетов пластин и оболочек могут быть названы исследования [20, 37, 68-73]. Наиболее распространенная [5] модель Тимошенко–Рейсснера рассмотрена в работах [35, 36, 38, 74-76].

Метод гипотез опирается в процессе принятия упрощающих допущений на представления о непротиворечивости построения (и его результата) физической сути процесса. В значительной мере такое воззрение заменяет строгое математическое доказательство, особенно в прикладных решениях [5, 28]. Данный

метод в значительной мере пересекается с точными методами решения, под которыми обычно понимается представление искомых функций в виде рядов. Наряду с направлением использования степенных рядов (в том числе с последующим использованием вариационных методов для получения соответствующих уравнений) [5, 77-84], значительные успехи достигнуты на пути выбора в качестве базиса при разложении ортогональных функций (включая гармонические) [39, 85-87], в том числе специальных (полиномов Лежандра) [72, 88-90].

Для прикладных расчетов пластин и панелей слоистой структуры, ввиду относительно несложной формы и эффективности в сочетании с применением вычислительной техники, рекомендуется метод разложения в двойные гармонические ряды [28], где в качестве неизвестных выступают коэффициенты ряда – константы и форма в поперечном направлении определяется принятой моделью. Решение для функции прогибов в виде одинарных тригонометрических рядов, в котором искомыми функциями являются функциями одной координаты и определяются из решения обыкновенных дифференциальных уравнений, обладает лучшей сходимостью, но при прочих равных условиях отличается большей громоздкостью [28, 86].

До тех пор, пока ряд рассматривается как бесконечный, разложение имеет формально математический характер. Однако, связанное с практическим применением усечение длины ряда, фактически ставит проблему на ступень принятия гипотез о физическом поведении материала конструкции (речь идет об ограничении свободы его поведения). В качестве дополнительных возникают вопросы сходимости и оценки погрешности получаемых решений. Отдельным является вопрос согласованности представлений каждой из искомых величин (напряжений, деформаций, перемещений) в плане количества удерживаемых членов ряда. Прием вычисления частных решений, в которых производится объединение неизвестной составляющей в виде константы или функции уменьшенной размерности и известной – вида функций, обычно применяемых для

разложения составляющих [28, 39, 41, 91, 92], также соотносится с частным случаем разложения (усеченным).

На представлении в виде степенных рядов основан символический метод интегрирования А.И. Лурье [93-99]. Метод начальных функций, применяемый, в том числе, к расчету многослойных оболочек, также включает разложение в степенной ряд Тейлора [28, 100-103].

Не смотря на то, что большая часть упрощающих гипотез и допущений рассматривается обычно как имеющая естественный характер, их введение накладывает ограничение на решение в сравнении с изначальной трехмерной моделью среды. В таких случаях важными становится подтверждение и непротиворечивость принятых отступлений [38, 41], что достигается сопоставлением с результатами, полученными иными методами либо при помощи иных моделей.

Для прикладных теорий свойственным является понимание непротиворечивости, как согласованности с интуитивными представлениями о механике процесса, основанном на опыте [104]. Признаком, указывающим на качество модели является возможность быть выведенной из уравнений теории упругости (либо иной общей теории, например моментной) [17, 28б 37, 41]. Как положительная взаимосвязь может указываться согласованность механической модели концепциям общей физики (концепция физической состоятельности). В частности, при рассмотрении процесса деформирования как адиабатического, начала термодинамики сводятся к закону сохранения механической энергии, запись которого в вариационной форме содержит условия равновесия и граничные условия (например, для пластины из несжимаемого по толщине материала) [105, 106].

Результирующими применения вариационного принципа, устанавливающего энергетические критерии, являются основные соотношения задачи механики, позволяющего в зависимости от выбора варьируемых величин рассмотреть различные группы соотношений (уравнения равновесия,

соотношения совместности деформаций, граничные условия) [28, 104]. Полученным таким образом соотношения задачи считаются энергетически согласованными [28]. Выбор варьируемых величин (функций перемещений, напряжений либо смешанный подход) дает основу целым группам методов. Так, на допущении истинности напряжений и, в частности, применении вариационного принципа Лагранжа основываются, например, широко применяемые метод Ритца, вариационно-разностный метод, метод конечных элементов [28]. Подход, включающий варьирование по перемещениям и функции напряжений, применен В.З. Власовым [101, 104].

Приложение вариационного метода часто сочетается с представлением искомых функций в виде ряда по заданным функциям, помогающим выполнить граничные условия. Такими методами являются метод Ритца, примыкающий к нему метод И.Г. Бубнова и Б.Г. Галеркина, а также близкие к ним прямые методы, сводящиеся к решению системы алгебраических уравнений [104]. Различие между ними отчасти заключается в свойстве аппроксимирующего набора функций (базиса разложения) удовлетворить полностью либо частично граничным условиям. От выбора этих функций зависит точность метода [104].

Так, например, обобщение переходом от двойных рядов к простому ряду М. Леви [39] содержит вариационный метод В.З. Власова и Л.В. Канторовича приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям [28, 101, 104, 107, 108]. Изложен подход в двумерной постановке с применением аппарата теории пластин и оболочек, где зависимость искомых величин от координаты высоты определена задачей (например, введенной гипотезой).

Применение вариационного принципа позволяет получить взаимно согласованные соотношения. Они остаются быть основанными на тех допущениях, при помощи которых сформированы исходные функции и взаимосвязи между компонентами напряженно-деформированного состояния, на которых построен энергетический функционал (как, например, теория Кирхгофа [104]).

Весьма важным является развитие аналитических методов на пути раскрытия сущности явлений и процессов без внесения упрощающих решение допущений либо сокращающих их (в частности, при сведении трехмерных уравнений к двумерным). В работе [84] показана возможность построения энергетически согласованной теории, т.е. обладающей качествами, которыми не располагает классическая и большая часть уточненных теорий. Под этим, например, понимается взаимосвязь с условием минимума функционала Лагранжа и точное выполнение условий заделки и свободного края. При этом в качестве фактических допущений задействовано только разложение в ряд по вертикальной координате искомым перемещений (для сведения задачи к двумерной) и введено осреднение по толщине, результатом чего становятся усилия и моменты, подобные принятым в обычной теории. Также определено условие, которому должны удовлетворять функции разложения (в качестве примера даны полиномы Лежандра). Применение данного подхода, в том числе к задачам, учитывающим температурное поле, с использованием разложений по нескольким начальным членам степенного ряда развито в работах [109-113]. Повышение точности метода (вариационно-полиномиального) связывается с увеличением количества членов ряда разложения. Прикладной результат достигается численно применением метода конечных разностей к построенным уравнениям в частных производных.

Сочетание вариационного и асимптотического подходов к построению неклассической теории пластин из композиционных материалов исследуется в работах [5, 114]. В частности, в работе [114] сведение задачи к двумерной выполнено методом асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений трехмерной теории упругости А.Л. Гольденвейзера [115]. С помощью полученных зависимостей дальнейшее решение осуществлено методом, аналогичным вариационному методу Власова–Канторовича (приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям) с применением разложения по функциям из класса полиномов, подбор которых выполнен по критерию лучшей аппроксимации затухающей у края компоненты решения. Применение

вариационно-полиномиального метода в цикле работ, указанных выше, является получение уточненных оценок дополнительных составляющих напряжений в узких краевых зонах.

Общей основой техник сведения в теориях тонкостенных тел является существенное отличие одного из измерений (толщины), а также анизотропия свойств по высоте (для соответствующих композиционных материалов). Эти предпосылки дают возможность естественно вводить в вычисления малые параметры и применять асимптотические методы исследования. Присутствие в уравнениях малого параметра оказывает влияние на решение, которое может оказаться неразрывным либо разрывным (в смысле близости решения при стремлении малого параметра к нулю – решению в случае обращения малого параметра в ноль). То есть возмущение малым параметром (относительно случая когда он равен нулю) может проявляться как регулярное либо сингулярное, и в связи с этим применяются соответствующие методы.

Свойством сингулярности, например, обладает модель Тимошенко–Рейсснера, решение для которой складывается из регулярной составляющей (основного, медленно изменяющегося решения) и составляющей типа пограничного слоя. При обращении малого параметра в ноль часть оператора системы вырождается, что приводит к потере быстроизменяющейся составляющей, и модель переходит к форме классической [5]. Возникновение асимптотических явлений (разрывы, быстрые переходы, потеря граничных условий и другие некорректности и неоднородности) является следствием приближенного описания, которое связано с понижением порядка дифференциальных уравнений [116] исходной системы уравнений (в общем случае – трехмерной теории).

Математические методы возмущений (методы малого параметра) представляют собой одно из наиболее мощных средств современной прикладной механики [117]. Свое развитие и применение они получили для задачи о

регулярном возмущении в работах [118-120], а также для случаев сингулярных возмущений дифференциальных уравнений [19, 87, 115-117, 121-129].

В теории гибких пластин метод возмущений (метод малого параметра) впервые был применен П.Я. Полубариновой-Кочиной [130]. Его суть заключается в следующем. Искомые функции и функция нагрузки (функции двух координат) раскладываются в асимптотический ряд по искомой величине прогиба в некоторой точке (малый параметр). После подстановки в решаемые уравнения, последние раскладываются (по степеням малого параметра), образуя итерационный процесс. Произвол может касаться выбора коэффициентов ряда функции нагрузки.

Начало широкого применения асимптотических методов к задачам механики тонкостенных конструкций положено работами Фридрихса [116, 121], Грина [131, 132], Рейса [133], А.Л. Гольденвезера [115]. В методе А.Л. Гольденвейзера асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений трехмерной теории упругости возмущающей величиной служит параметр тонкостенности; и произвол (допущение) о соотношении порядков малости накладывается напрямую на ряды разложения неизвестных (в целом). Варианты асимптотических иерархий (задаваемых априори) приводят к уравнениям, близким характерным случаям (упрощенным), рассматриваемым в теории тонкостенных тел (в частности, изгиба, кручения и плоской деформации), которые рассматриваются в качестве моделей основного напряженного состояния и краевого эффекта, и соответствующим им итерационным процессам, дающим возможность их уточнения (в асимптотическом смысле [116]). Применяемый метод наложения граничных условий способствует устранению противоречий путем подбора параметров, определяющих общую изменяемость асимптотических рядов.

Направление непосредственного асимптотического интегрирования уравнений теории упругости (в том числе для задач термоупругости слоистых материалов) развито в работах [19, 87, 89, 115, 125, 126, 134-150]. Подход, основанный на введении представлений о решении исходной задачи как

функциях, удовлетворяющих более простым уравнениям, с последующим асимптотическим анализом таких уравнений, рассмотрен (включая случай слоистого материала) в исследованиях [151-156].

Применение этих методов позволяет увидеть и математически обосновать взаимосвязь общей и прикладных теорий, в частности, соотношения классической теории следуют как первое приближение асимптотического ряда. Метод успешно применяется для построения новых моделей, учитывающих специальные аспекты (особые физические свойства среды [143, 144], произвольный вид нагружения [159], неклассические модели среды – несимметричные (моментные) [160-165]). Получаемые соотношения при построении обладают свойством взаимной согласованности в смысле удержания величин равного асимптотического порядка. Для многослойных пластин итерационный энерго-асимптотический метод развит в работах [166-168].

Образование (путем построения) в процессе применения асимптотических методов итерационных процессов является элементом самостоятельного подхода, относящегося к группе аналитических [169]. Считается, что метод последовательных приближений к расчету тонкостенных конструкций ввел И.Г. Бубнов [104] (в первом приближении конструкция в целом рассчитывается как балка; далее выполняется переход к отдельным элементам как собственно тонкостенным). Принцип последующего уточнения результата, получаемого в предположении известной упрощенной формы решения, принятого как начальное приближение, согласуется с идеей полу-обратного метода, введенного в механике Сен-Венаном [40]. К итерационным процессам сводится метод возмущений, применяемый как в постановке теории упругости, так и в форме соотношений для тонкостенных тел [87, 115, 130].

Без применения аппарата асимптотик итерационный процесс (действующий по принципу метода последовательных приближений) для решения нелинейных дифференциальных уравнений изгиба пластин показан в работе [104]. Его суть заключается в следующем. На первой итерации решаются линеаризованные

неоднородные уравнения. Далее найденное решение подставляется как известное в нелинейную часть оператора для вычисления последующих приближений. Для слоистого тонкостенного тела итерационный процесс, дающий результат, согласующийся с трехмерным уравнением теории упругости и удовлетворяющий все граничные условия, построен в работе [170].

В работах [12, 171-176] построены итерационные процессы (включая операторы метода простых итераций) на уравнениях теории оболочек, дающие трактовку как метода последовательных приближений первому и второму итерационным процессам А.Л. Гольденвейзера построения основного напряженного состояния, и непосредственно на соотношениях теории упругости в двумерной и трехмерной постановках. Следует отметить, что идея последовательного взаимного выражения искомых величин на начальных соотношениях присутствует, например, в работе [115], однако в качестве итерационного процесса не была развита.

В случае уравнений теории упругости (в качестве исходных) понижение размерности задачи достигается с применением интегрирования по координате толщины для начальных соотношений, включающих соответствующие частные производные. Эти элементы интегрирования в общей последовательности отвечают оператору Пикара [177], например, в методе решения дифференциальных уравнения первого порядка методом последовательных приближений. Последовательное выполнение процесса дает прямое выражение (в общем случае в интегро-дифференциальной форме) каждой из исходных неизвестных задачи через новые основные неизвестные меньшей размерности, количество которых соответствует количеству операторов Пикара в операторе метода. Получаемые выражения приобретают вид степенных рядов по координате толщины в ходе построения, а не в силу гипотез или задания формы решения.

Присутствие параметра тонкостенности позволяет видеть в полученных соотношениях асимптотические ряды. Их сходимость рассматривается согласно принципу сжатых отображений [178] (теореме Банаха о неподвижной точке). В

качестве начального приближения используются сами искомые функции новых основных неизвестных задачи без наложения ограничений на их форму, что близко идее полу-обратного метода Сен-Венана [40] и обобщает его до итерационного. Вычисление новых основных неизвестных осуществляется в процессе выполнении граничных условий. Путем рассмотрения функций решения, как содержащих медленно и быстро меняющиеся асимптотики (оцениваемые с применением малого параметра тонкостенности), результат в ряде случаев может быть получен аналитически. Также в аналитической форме могут быть получены разрешающие соотношения без применения асимптотического разделения [179]. Обозначенный метод, называемый в литературе методом Сен-Венана – Пикара – Банаха, применен с участием автора к задачам механики тонкостенных тел (двумерная полоса, пластинка, тонкая оболочка), в том числе анизотропным и имеющим слоистую структуру. Дополнительно развито его приложение к задачам, учитывающим воздействие распределенного температурного поля.

Помимо механического нагружения, одним из расчетных условий работы конструкций является **учет влияния температуры**. Ее воздействие может быть задано для некоторой области тела (например, граничной поверхности) непосредственно как температура, либо как поток тепла, либо рассматриваться как процесс теплообмена с внешней средой [180]. В упрощенной постановке обычно не учитывается влияние деформации на поле температуры (теория температурных напряжений). Более общая задача термоупругости связывает теорию упругости и теорию теплопроводности на основе термодинамики необратимых процессов. Ее продолжениями, охватывающими более широкий класс физических явлений, являются, например, пьезотермоупругость и магнитотермоупругость [181]. Хотя воздействие температуры приводит к изменению физических свойств материала, на которых, как правило, строится решение, данное обстоятельство в задачах механики обычно не рассматривается (изменение температуры полагается незначительным).

При этом поведение среды может описываться как соотношениями теории упругости, так и моделями меньшей размерности, в частности, теории пластин, в том числе из композиционных материалов [182]. В несвязанных задачах фактор, отражающий линейное температурное расширение, обычно вводится через физические соотношения в виде закона Гука, как частного случая закона Дюамеля – Неймана, получаемого из рассмотрения задачи связанной термоупругости [181]. Геометрические соотношения остаются при этом неизменными [182].

При решении задачи в усилиях и моментах, аналогично дополнительные члены появляются в выражениях нормальных сил, действующих в плоскости элемента, а также изгибающих моментов. Эти добавки имеют строение аналогичное обобщенным жесткостям. Следует отметить, что в прикладной теории тонкостенных систем, где материал в поперечном направлении полагается недеформируемым, это фактически означает и отсутствие температурного расширения в этом направлении [182].

Аналитических решений в конченной форме, близких рассматриваемой задаче, описано не так много. В частности, если распределение температуры по толщине пластины рассматривать как линейное (отсчет ведется от срединной поверхности и на параллельных ей поверхностях, где температура остается постоянной), и если края пластины свободны, то с позиции классической теории картина деформаций будет соответствовать случаю чистого изгиба и пластина изогнется по сфере [39] в допущении малости прогиба в сравнении с толщиной, необходимым для исключения мембранных деформаций. Уравнению прогибов в классической теории соответствует частное решение в виде параболоида [183]. При подвижных, но зафиксированных от поворота краях в тех же предположениях изгибающий момент во внутренней области уравнивается равным ему моментом, приложенным по краям. В результате чего прогиб не возникает [180, 184]. Для слоистых композитов области контакта слоев характеризуются

разрывами в функциях напряжений, связанными с различными механическими свойствами материалов [185].

## **1.2. Подход к интегрированию уравнений теории упругости для тонкостенных тел**

### **1.2.1. Общие основы метода Сен-Венана – Пикара – Банаха (SVPB)**

В задачах механики истоки метода простых итераций реализованы в полуобратном методе Сен–Венана [40, 173]. В работе [173] указано, что если в методе Сен-Венана использовать обычно принятые допущения в качестве величин начального приближения, по которым вычисляются остальные искомые неизвестные, то можно по полученным величинам вычислить поправку к величинам начального приближения. Оценивая эту поправку как существенную или малую, не трудно сделать вывод о применимости исходных допущений.

Начальные величины выбраны удачно, если вычисленная поправка является малой. Тогда данные вычисления могут быть рассмотрены как нулевое приближение некоторого итерационного процесса. Построенный таким образом итерационный процесс нуждается в обосновании своей сходимости [173]. Сен–Венан применил свою идею к решению задачи кручения и изгиба длинного и узкого стержня. По мнению Е.М. Зверева можно оценить сходимость вычислений к некоторому решению, используя наличие малого параметра, обеспечивающего асимптотическую сходимость. Такой подход приводит к методу простых итераций, принципу сжатых отображений и теореме Банаха о неподвижной точке [173, 186].

Изложенный С. Банахом принцип для доказательства существования и единственности решения алгебраических, дифференциальных, интегральных и других функциональных уравнений является обработкой идеи Пикара – метода последовательных приближений, получивший название принципа сжатых отображений [187, 188]. Его сутью является рассмотрение вопроса о

существовании и единственности неподвижной точки при некотором отображении соответствующего метрического пространства в себя.

Отображение  $y = Ay$  метрического пространства  $M$  в себя называется сжимающим отображением, если существует такое число  $\varepsilon < 1$ , что для любых двух точек  $x, y \in M$  выполняется неравенство  $\rho(Ax, Ay) \leq \varepsilon \rho(x, y)$ , где  $\rho$  – метрика пространства  $M$ . Точку  $y$  называют неподвижной точкой отображения, если  $y = Ay$ . Искомые неподвижные точки являются решениями уравнения  $y = Ay$  [173, 186]. Исходя из некоторого начального приближения  $y_{(0)}$  начинается итерационный процесс [12]. Процедура сходится к некоторому решению  $y$  независимо от выбора величины начального приближения, если оператор  $A$  является сжимающим. Последовательные приближения  $y_{(1)}, y_{(2)}, y_{(3)} \dots$  находятся с помощью формулы  $y_{(n+1)} = Ay_{(n)}$ .

Метод простых итераций, используемый в данной работе, сводится к последовательному применению метода Пикара для решения дифференциального уравнения первого порядка в виде  $y' = f(x, y)$ , разрешенного относительно производной. Его решением с условием  $y(t_0) = y_0$  будет интегральное уравнение

$$y(x) = \int_{x_0}^x f[t, (y(t))] dt + y_0. \quad (1.1)$$

Для решения (1.1) на основании принципа сжатых отображений строится итерационный процесс по следующей схеме

$$y_{(n+1)}(x) = \int_{x_0}^x f[t, (y_{(n)}(t))] dt + y_0.$$

Такой подход позволяет построить последовательность гладких функций  $y_{(n)}(t)$ , сходящихся к решению уравнения (1.1).

Рассматриваемый метод, названный в литературе методом Сен-Венана–Пикара–Банаха (SVPB), применен к решению ряд пространственных задач теории

упругости тонкостенных тел [189-191]. Изложим приложение общего метода к задаче о деформировании длинной тонкой упругой полосы прямоугольной формы при воздействии на нее механической нагрузки и поля температуры.

### 1.2.2. Итерационный процесс для узкой полосы, деформируемой с учетом действия поля температуры

Следуя работе [196] сформулируем задачу следующим образом. Прямоугольную полосу длиной  $l$  и высотой  $2h$  отнесем к прямоугольной системе координат  $x^*, z^*$ , так что  $0 \leq x^* \leq l$ ,  $-h \leq z^* \leq +h$ . Длинные стороны полосы несут некоторую произвольную нагрузку, короткие стороны полосы могут быть так или иначе закреплены или нагружены. Такую полосу можно рассматривать как уточненную модель балки прямоугольного поперечного сечения.

Уравнения плоской задачи теории упругости, описывающие напряженно-деформированное состояние такой полосы, возьмем в следующем виде:

– уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z^*} + \frac{\partial \tau^*}{\partial x^*} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \tau^*}{\partial z^*} = 0$$

– соотношения упругости

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x^* - \nu \sigma_z^*), \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z^* - \nu \sigma_x^*), \quad \gamma = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau^*$$

– формулы, связывающие компоненты деформации и перемещения

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u^*}{\partial x^*}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w^*}{\partial z^*}, \quad \gamma = \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*}.$$

Здесь  $E$  – модуль упругости,  $\nu$  – коэффициент Пуассона, считающиеся для изотропного или слоистого материала функциями координат,  $\varepsilon_x, \varepsilon_z$  – безразмерные продольная и поперечная деформации,  $\gamma$  – сдвиг;  $\sigma_x^*, \sigma_y^*, \tau^*$  – нормальные и касательные напряжения. Размерные перемещения, напряжения и нагрузки отмечены звездочкой.

Введем безразмерные координаты  $x = x^* / l$ ,  $z = z^* / h$ , безразмерные

перемещения  $u = u^* / h$ ,  $w = w^* / h$  вдоль осей  $x^*, z^*$ , соответственно, и безразмерные нормальные и касательные напряжения  $\sigma_x = \sigma_x^* / E$ ,  $\sigma_z = \sigma_z^* / E$ ,  $\tau = \tau^* / E$ . Безразмерные уравнения в этих переменных принимают вид

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0, \quad \varepsilon_x = \sigma_x - \nu \sigma_z, \quad \varepsilon_z = \sigma_z - \nu \sigma_x,$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_x = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Здесь величина  $\varepsilon = h/l$  – малый параметр.

Преобразуем их так, чтобы, выбрав в качестве величин начального приближения некоторые  $w_{(0)} = w_0(x, z)$  и  $\tau_{(0)} = \tau_0(x, z)$ , можно было последовательно вычислить все остальные искомые неизвестные методом последовательных приближений, заменив дифференциальные уравнения интегральными [173]. Получим

$$\frac{\partial u_{(0)}}{\partial z} = -\varepsilon w_0' + 2(1+\nu)\tau_0, \quad \varepsilon_{x(0)} = \varepsilon u_{(0)}' + \alpha T, \quad \frac{\partial \sigma_{z(0)}}{\partial z} = -\varepsilon \tau_0',$$

$$\sigma_{x(0)} = \varepsilon_{x(0)} + \nu \sigma_{z(0)}, \quad \varepsilon_{z(0)} = (1-\nu^2)\sigma_{z(0)} - \nu \varepsilon_{x(0)} + \alpha T, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial w_{(1)}}{\partial z} = \varepsilon_{z(0)}, \quad \frac{\partial \tau_{(1)}}{\partial z} = -\varepsilon \sigma_{x(0)}', \quad \frac{\partial u_{(1)}}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial w_{(1)}}{\partial x} + 2(1+\nu)\tau_{(1)} \dots$$

Здесь и далее нижним индексом в скобках обозначен номер приближения. Штрих означает дифференцирование по координате  $x$ . Во второй и пятой формулах системы (1.2) для деформаций добавлены учитывающие температурную деформацию члены  $\alpha T$ :  $\alpha$  – коэффициент линейного теплового расширения материала полосы,  $T$  – температура, взятая относительно некоторой нулевой температуры, при которой температурные деформации считаются отсутствующими. В общем случае они являются функциями обеих координат.

Будем интересоваться уравнениями нулевого и первого приближений при выборе величин начального приближения  $w_{(0)} = w_0(x)$  и  $\tau_{(0)} = \tau_0(x)$ , принятыми не зависящими от координаты  $z$ . В силу этого процесс вычислений может быть

записан в квадратурах по координате  $z$  таким образом, чтобы сжатие по Банаху было обеспечено за счет малого параметра  $\varepsilon$  как множителя в правой части интегральных операторов Пикара. Вследствие этого вычисленная в первом приближении величина приобретает множитель  $\varepsilon^2$  относительно величины нулевого приближения

$$\begin{aligned}
 w_{(0)} &= w_0, \quad \tau_{(0)} = \tau_0, \quad u_{(0)} = -\varepsilon \int \frac{\partial w_0}{\partial x} dz + 2(1+\nu) \int \tau_0 dz + u_0(x), \\
 \sigma_{z(0)} &= -\varepsilon \int \frac{\partial \tau_0}{\partial x} dz + \sigma_{z0}(x), \quad \varepsilon_{x(0)} = \varepsilon \frac{\partial u_{(0)}}{\partial x} + \alpha T, \quad \sigma_{x(0)} = \varepsilon_{x(0)} + \nu \sigma_{z(0)}, \\
 \varepsilon_{z(0)} &= (1-\nu^2) \sigma_{z(0)} - \nu \varepsilon_{x(0)} + (1+\nu) \alpha T, \quad \tau_{(1)} = \tau_0 - \varepsilon \int \frac{\partial \sigma_{x(0)}}{\partial x} dz, \\
 w_{(1)} &= w_0 + \int \varepsilon_{z(0)} dz \dots
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Нижним индексом «0» обозначены произволы интегрирования. Заданные величины начального приближения  $w_0$  и  $\tau_0$  записаны также в первом приближении. Итерационный процесс вычисления неизвестных может быть продолжен, и в результате будем иметь формулы для неизвестных в любом приближении. Видно, что все искомые неизвестные выражаются через четыре основные неизвестные  $u_0(x)$ ,  $\sigma_{z0}(x)$ ,  $w_0(x)$ ,  $\tau_0(x)$ , которые при вычислении интегралов будут умножаться на поперечную координату  $z$  с соответствующим степенным показателем.

Найденные неизвестные  $u, \varepsilon_x, \sigma_z, \sigma_x, \varepsilon_z$  в нулевом приближении и  $w, \tau, \sigma_z$  в первом будем считать вычисленными с достаточной степени точности. Они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 u_{(0)} &= \left[ -\varepsilon w_0' + 2(1+\nu) \tau_0 \right] z + u_0, \quad \sigma_{z(0)} = -\varepsilon \tau_0' z + \sigma_{z0}, \\
 \sigma_{x(0)} &= \left[ -\varepsilon^2 w_0'' + \varepsilon(2+\nu) \tau_0' \right] z + \varepsilon u_0' + \nu \sigma_{z0} + \alpha T, \\
 \varepsilon_{z(0)} &= \left[ \varepsilon^2 \nu w_0'' - (\nu+1)^2 \varepsilon \tau_0' \right] z - \varepsilon \nu u_0' + (1-\nu^2) \sigma_{z0} + \alpha T,
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}\tau_{(1)} &= \left[ \varepsilon^3 w_0''' - (2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0'' \right] \frac{z^2}{2} - \left( \varepsilon^2 u_0'' + \varepsilon \nu \sigma_{z_0}' \right) z + \tau_0 - \varepsilon \int_0^z (\alpha T)' dz, \\ w_{(1)} &= \left[ \varepsilon^2 \nu w_0'' - (\nu + 1)^2 \varepsilon \tau_0' \right] \frac{z^2}{2} - \left[ \varepsilon \nu u_0' z - (1 - \nu^2) \sigma_{z_0} \right] z + \int_0^z (\alpha T) dz + w_0, \\ \sigma_{z(1)} &= \left[ -\varepsilon^4 w_0'''' + (2 + \nu) \varepsilon^3 \tau_0''' \right] \frac{z^3}{6} + \left( \varepsilon^3 u_0''' + \varepsilon^2 \nu \sigma_{z_0}'' \right) \frac{z^2}{2} - \varepsilon \tau_0' z + \\ &\quad + \sigma_{z_0} + \varepsilon^2 \int_0^z (\alpha T)'' dz dz.\end{aligned}$$

Из формул видно, что, задав в качестве единиц измерения искомых функций  $w_0(x)$  и  $\tau_0(x)$  как величины  $O(\varepsilon^0)$ , величины, вычисленные в нулевом и первом приближении, приобретают дополнительные члены с множителем  $\varepsilon^2$ , показывающие в практических задачах порядок поправки относительно главной величины. Также видно, что при  $z=0$  приближения для исходных неизвестных  $u, \sigma_z, w, \tau$  тождественны соответствующим новым основным неизвестным.

Таким образом, получены аналитические выражения для всех искомых неизвестных задачи. Рассмотрим механизм выполнения граничных условий на длинных и коротких сторонах заданной прямоугольной области.

### 1.2.3. Выполнение граничных условий на длинных сторонах полосы. Основные разрешающие соотношения

На лицевых поверхностях полосы  $z^* = \pm h$  надо выполнить граничные условия, соответствующие условиям нагружения. Принимаем их в виде

$$\sigma_z^* = Z_+, \tau^* = X_+ \text{ при } z^* = h; \sigma_z^* = Z_-, \tau^* = X_- \text{ при } z^* = -h$$

В безразмерном виде эти условия запишем в виде

$$\sigma_z = Z_+, \tau = X_+ \text{ при } z = 1; \sigma_z = Z_-, \tau = X_- \text{ при } z = -1. \quad (1.5)$$

Отметим, что безразмерные нагрузки  $X_+, X_-, Z_+, Z_-$  получены путем деления размерных  $X_+, X_-, Z_+, Z_-^*$  на модуль упругости  $E$ . Предполагаем, что они заданы медленно меняющимися функциями координаты  $x$ .

Условия будем выполнять величинами первого приближения из формул (1.4), считая, что соотношения с достаточной точностью аппроксимируют искомые величины

$$\begin{aligned}
\varepsilon^3 w_0''' \frac{1}{2} - (2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0'' \frac{1}{2} - \varepsilon^2 u_0'' - \nu \varepsilon \sigma_{z_0}' + \tau_0 &= X_+ + \varepsilon \int_0^1 (\alpha T)' dz, \\
\varepsilon^3 w_0''' \frac{1}{2} - (2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0'' \frac{1}{2} + \varepsilon^2 u_0'' + \nu \varepsilon \sigma_{z_0}' + \tau_0 &= X_- + \varepsilon \int_0^{-1} (\alpha T)' dz, \\
-\varepsilon^4 w_0'''' \frac{1}{6} + (2 + \nu) \varepsilon^3 \tau_0''' \frac{1}{6} + \varepsilon^3 u_0''' \frac{1}{2} + \nu \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' \frac{1}{2} - \varepsilon \tau_0' + \\
+ \sigma_{z_0} &= Z_+ - \varepsilon^2 \int_0^1 \int_0^z (\alpha T)'' dz dz, \\
\varepsilon^4 w_0'''' \frac{1}{6} - (2 + \nu) \varepsilon^3 \tau_0''' \frac{1}{6} + \varepsilon^3 u_0''' \frac{1}{2} + \nu \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' \frac{1}{2} + \varepsilon \tau_0' + \\
+ \sigma_{z_0} &= Z_- - \varepsilon^2 \int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)'' dz dz.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Складывая и вычитая попарно первые два уравнения и последние два, получим систему из четырех уравнений

$$\begin{aligned}
\varepsilon^3 w_0''' - (2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0'' + 2\tau_0 &= X_+ + X_- + \varepsilon \int_0^1 (\alpha T)' dz + \varepsilon \int_0^{-1} (\alpha T)' dz, \\
-\varepsilon^4 w_0'''' \frac{1}{3} + (2 + \nu) \varepsilon^3 \tau_0''' \frac{1}{3} - 2\varepsilon \tau_0' &= Z_+ - Z_- - \varepsilon^2 \int_0^1 \int_0^z (\alpha T)'' dz dz + \\
+ \varepsilon^2 \int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)'' dz dz, \\
-2\varepsilon^2 u_0'' - 2\nu \varepsilon \sigma_{z_0}' &= X_+ - X_- + \varepsilon \int_0^1 (\alpha T)' dz - \varepsilon \int_0^{-1} (\alpha T)' dz, \\
\varepsilon^3 u_0''' + \nu \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' + 2\sigma_{z_0} &= Z_+ + Z_- - \varepsilon^2 \int_0^1 \int_0^z (\alpha T)'' dz dz - \varepsilon^2 \int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)'' dz dz.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Система распадается на две независимые. Первая пара уравнений служит для определения неизвестных  $w_0$  и  $\tau_0$ , вторая — для  $u_0$  и  $\sigma_{z_0}$ .

Заметим, что формулы для  $\tau_{(1)}$  и  $\sigma_{z(1)}$  из списка (1.4) после выполнения граничных условий на длинных сторонах на основе выражений (1.7) приводятся к простому виду

$$\begin{aligned}
\tau &= \tau_0(1-z^2) + (X_+ + X_-) \frac{z^2}{2} - (X_+ - X_-)z - \varepsilon \int_0^z (\alpha T)' dz + \\
&+ \varepsilon \left[ \int_0^1 (\alpha T)' dz + \int_0^{-1} (\alpha T)' dz \right] \frac{z^2}{2} - \varepsilon \left[ \int_0^1 (\alpha T)' dz - \int_0^{-1} (\alpha T)' dz \right] z, \\
\sigma_z &= \varepsilon \tau_0' (z^3 - z) + \sigma_{z0}(1-z^2) + \frac{1}{2}(Z_+ - Z_-)z^3 + \frac{1}{2}(Z_+ + Z_-)z^2 + \\
&+ \varepsilon^2 \int_0^z \int_0^z (\alpha T)'' dz dz - \varepsilon^2 \left[ \int_0^1 \int_0^z (\alpha T)'' dz dz + \int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)'' dz dz \right] \frac{z^3}{2} - \\
&- \varepsilon^2 \left[ \int_0^1 \int_0^z (\alpha T)'' dz dz - \int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)'' dz dz \right] \frac{z^2}{2}.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Отбрасывая в первом уравнении в (1.7) величину  $\varepsilon^2 \tau_0''$  по сравнению  $\tau_0$  как величину  $O(\varepsilon^2)$ , и  $\varepsilon^3 \tau_0'''$  во втором уравнении по сравнению с  $\varepsilon \tau_0'$ , также как величину  $O(\varepsilon^2)$ , получим уравнения для медленно меняющихся величин  $w_0^s$  и  $\tau_0^s$ , определенные на координате  $x$  и известное уравнение краевого эффекта [71], определенное на координате  $x/\varepsilon$ . Заметим, что последняя является независимой в силу произвола параметра  $\varepsilon$ . Здесь и далее введены новые обозначения в виде верхних индексов «s» и «q». Величины, обозначенные верхним индексом «s», считаем медленно меняющимися, в то время как, индекс «q» будем присваивать к быстроменяющимся величинам. Запишем для этих величин соотношения в виде

$$\varepsilon^3 w_0^{s''''} + 2\tau_0^s = X_+ + X_- + \varepsilon \int_0^1 (\alpha T)' dz + \varepsilon \int_0^{-1} (\alpha T)' dz, \tag{1.9}$$

$$-\varepsilon^4 w_0^{s''''} \frac{1}{3} - 2\varepsilon \tau_0^{s'} = Z_+ - Z_- - \varepsilon^2 \int_0^1 \int_0^z (\alpha T)'' dz dz + \varepsilon^2 \int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)'' dz dz,$$

$$-(2+\nu)\varepsilon^2 \tau_0^{q''} + 2\tau_0^q = 0, \tag{1.10}$$

Уравнение (1.10) используется для выполнения не удовлетворённых решением уравнений (1.9) граничных условий на коротких сторонах полосы и устранения разрывов.

Система однородных уравнений (1.9) сводится к разрешающему уравнению  $w_0^{s''''} = 0$ , решением которого является полином третьей степени. Дифференцирование такого полинома не меняет его порядка по  $\varepsilon$ . Таким образом функция  $w_0^s$  есть всегда медленно меняющаяся и следовательно  $w_0^s \equiv w_0$ . Функция  $\tau_0$  в общем случае является суммой медленно меняющейся величины и быстро меняющейся, то есть  $\tau_0 = \tau_0^s + \tau_0^q$ . При этом применение оператора  $\varepsilon(\ )'$  к величине  $\tau_0^q$  не меняет ее асимптотического порядка, то есть  $\tau_0^q \sim \varepsilon \tau_0^{q'} \sim \varepsilon^2 \tau_0^{q''}$ , так как  $\tau_0^q = \tau_0^q(x/\varepsilon)$ . Здесь и в дальнейшем верхними индексами  $s$  и  $q$  отмечаются медленно меняющаяся величины и быстро меняющиеся, соответственно.

Система (1.9) может быть сведена к одному разрешающему уравнению

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \varepsilon^4 w_0^{s''''} = Z_+ - Z_- - \varepsilon (X_+' + X_-' ) - \varepsilon^2 \int_0^z \int_0^z (\alpha T)'' dz dz + \varepsilon^2 \int_0^{-1} \int_0^{-1} (\alpha T)'' dz dz + \\ + \varepsilon^2 \int_0^1 (\alpha T)'' dz + \varepsilon^2 \int_0^{-1} (\alpha T)'' dz. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Последние два уравнения из системы (1.7) также могут быть преобразованы. Продифференцируем первое уравнение по  $x$ , умножим на  $\varepsilon$  и сложим со вторым. В результате получим

$$\begin{aligned} \sigma_{z_0} = \frac{1}{2} (Z_+ + Z_-) + \frac{1}{4} \varepsilon (X_+' - X_-' ) - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_0^z \int_0^z (\alpha T)'' dz dz - \\ - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_0^{-1} \int_0^{-1} (\alpha T)'' dz dz + \frac{1}{4} \varepsilon^2 \int_0^1 (\alpha T)'' dz - \frac{1}{4} \varepsilon^2 \int_0^{-1} (\alpha T)'' dz. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Исключим из третьего уравнения величину  $\varepsilon \sigma_{z_0}'$  для получения уравнения для неизвестной  $u_0$ . Имеем

$$\begin{aligned}
2\varepsilon^2 u_0'' &= -\frac{1}{2}(X_+ - X_-) - \frac{1}{2}\varepsilon \int_0^1 (\alpha T)' dz + \frac{1}{2}\varepsilon \int_0^{-1} (\alpha T)' dz - \\
&- \nu \left[ \varepsilon (Z_+' + Z_-' ) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 (X_+'' - X_-'' ) - \varepsilon^2 \int_0^1 \int_0^z (\alpha T)''' dz dz - \right. \\
&\left. - \varepsilon^2 \int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)''' dz dz + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \int_0^1 (\alpha T)''' dz - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \int_0^{-1} (\alpha T)''' dz \right].
\end{aligned}$$

Из величин в квадратных скобках здесь можно оставить только  $\varepsilon (Z_+' + Z_-')$  как независимую, а остальные отбросить как малые по сравнению с одноименными. Таким образом, для неизвестной  $u_0$  получим уравнение

$$2\varepsilon^2 u_0'' = -\frac{1}{2}(X_+ - X_-) - \varepsilon (Z_+' + Z_-') - \frac{1}{2}\varepsilon \int_0^1 (\alpha T)' dz + \frac{1}{2}\varepsilon \int_0^{-1} (\alpha T)' dz. \quad (1.13)$$

Функция  $\sigma_{z0}$  определена алгебраически через нагрузки и температуру (1.12). Поэтому решение  $u_0$  однородного уравнения (1.13) является медленно меняющимся.

Заметим, что в последнем уравнении системы (1.7) содержится оператор  $\nu \varepsilon^2 \sigma_{z0}'' + 2\sigma_{z0}^q$ , который также определен на координате  $x/\varepsilon$ . Его можно использовать для нахождения частного решения в случае приложения быстро осциллирующей нагрузки, но это должно быть целью отдельного исследования.

Известно [191], что однородное изотропное тело под действием равномерного постоянно поля температуры стремится изменить свои размеры, при этом, если связи, ограничивающие его деформирование, не наложены, то дополнительные напряжения не возникают. То же происходит и в случае поля температуры, распределенного по линейному закону по толщине материала [183, 192, 193]. Напротив, различные виды закрепления приводят к образованию напряжений. На построенной модели рассмотрим некоторые соответствующие случаи применительно к граничным условиям на торцах полосы.

### 1.2.4. Выполнение граничных условий на коротких сторонах полосы.

#### Условие свободных краев

Примем  $\alpha T = t(x)z$ , и нагрузку на длинных сторонах отсутствующей:  $X_+ = X_- = Z_+ = Z_- = 0$ . Уравнения (1.9) и (1.11)–(1.13) принимают вид

$$\begin{aligned}\tau_0^s &= -\frac{1}{2}\varepsilon^3 w_0^{s''''} - \frac{1}{2}\varepsilon t' \left( \int_0^1 z dz + \int_0^{-1} z dz \right), \quad \varepsilon^2 u_0'' = \frac{1}{2}\varepsilon t' \left( \int_0^1 z dz - \int_0^{-1} z dz \right), \\ \frac{2}{3}\varepsilon^2 w_0^{s''''} &= t'' \left( \int_0^1 \int_0^z z dz dz - \int_0^{-1} \int_0^z z dz dz - \int_0^1 z dz - \int_0^{-1} z dz \right), \\ \sigma_{z0} &= \frac{1}{2}\varepsilon^2 t'' \left( \int_0^1 \int_0^z z dz dz + \int_0^{-1} \int_0^z z dz dz - \frac{1}{2} \int_0^1 z dz + \frac{1}{2} \int_0^{-1} z dz \right).\end{aligned}\tag{1.14}$$

Положим для простоты изложения  $t = const$ . Дифференциальные уравнения (1.14) и (1.10) могут быть проинтегрированы. Выполнив также интегрирование по  $z$  в скобках, получим

$$\begin{aligned}w_0(x) &= -\varepsilon^{-2} \frac{t}{2} x^2 + C_{w3} x^3 + C_{w2} x^2 + C_{w1} x + C_{w0}, \quad \varepsilon^2 u_0^s = L_1 x + L_0, \\ \tau_0^s &= -\frac{3}{4}\varepsilon C_{w3} = C_{\tau0}, \quad \sigma_{z0} = 0,\end{aligned}\tag{1.15}$$

$$\tau_0^q = \begin{cases} B_0 \exp\left(-\frac{kx}{\varepsilon}\right) & \text{при } x \geq 0 \\ B_1 \exp\left(-\frac{k(1-x)}{\varepsilon}\right) & \text{при } x \leq 1 \end{cases}.$$

Здесь  $C_{w3}, C_{w2}, C_{w1}, C_{w0}, L_1, L_0$  – произволы интегрирования медленно меняющихся решений,  $B_0, B_1$  – произволы интегрирования быстро меняющегося решения типа краевого эффекта. Они определяются из краевых условий на коротких сторонах.

Примем, что концы полосы свободны, т.е.  $\sigma_x = \tau = 0$  при  $x = 0; 1$ . Обратившись к формулам (1.4) запишем эти условия в развернутом виде

$$\sigma_x = -\varepsilon^2 w_0'' z + (2 + \nu)\varepsilon \tau_0' z + \varepsilon u_0' + \nu \sigma_{z0} - tz = 0 \quad \text{при } x = 0; 1,$$

$$\tau = \tau_0 = 0 \text{ при } x = 0;1.$$

Потребовав обращения коэффициентов в ноль при каждой степени  $z$ , получим следующую последовательность конечных условий для неизвестных  $w_0$  и  $\tau_0$

$$\begin{aligned} \tau_0 &= 0, \\ -\varepsilon^2 w_0'' + (2 + \nu) \varepsilon \tau_0' - t &= 0 \text{ при } x = 0;1, \end{aligned} \quad (1.16)$$

и для  $u_0$

$$\varepsilon u_0' + \nu \sigma_{z=0} = 0 \text{ при } x = 0;1, \quad (1.17)$$

В условиях (1.16) в величине  $\tau_0$  надо учесть, что  $\tau_0 = \tau_0^s + \tau_0^q$ , тогда

$$\tau_0^s + \tau_0^q = 0, \quad -\varepsilon^2 w_0^{s''} + (2 + \nu) \varepsilon (\tau_0^{s'} + \tau_0^{q'}) - t = 0 \text{ при } x = 0;1.$$

Из решений (1.15) имеем  $\tau_0^{s'} \equiv \tau_0^{q'} \equiv 0$ . Это приводит к записи

$$\tau_0^s + \tau_0^q = 0, \quad -\varepsilon^2 w_0^{s''} + (2 + \nu) \varepsilon \tau_0^{q'} - t = 0 \text{ при } x = 0;1.$$

С помощью решений (11) на краю  $x = 0$  условия преобразуются к виду

$$-\frac{3}{4} \varepsilon C_3 + B_0 = 0, \quad -\frac{3}{2} C_2 - (2 + \nu) k B_0 = 0 \text{ при } x = 0,$$

и на краю  $x = 1$

$$-\frac{3}{4} \varepsilon C_3 + B_1 = 0, \quad -\frac{3}{2} (C_3 + C_2) + (2 + \nu) k B_1 = 0 \text{ при } x = 1.$$

Величина  $t$  при этом во вторых условиях сокращается. Складывая и вычитая попарно. Имеем

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2} \varepsilon C_3 + B_0 + B_1 &= 0, \quad B_0 - B_1 = 0, \\ -\frac{3}{2} C_3 - 3C_2 - (2 + \nu) k (B_0 - B_1) &= 0, \quad \frac{3}{2} C_3 - (2 + \nu) k (B_0 + B_1) = 0. \end{aligned}$$

Из четырех уравнений получим

$$C_2 = C_3 = 0, \quad B_0 = B_1 = 0.$$

Условия (1.17) выполняются при  $\sigma_{z0} = 0$  и основные искомые неизвестные можно записать в таком виде

$$w_0^s = -\varepsilon^{-2}t \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}\varepsilon^{-2}(C_{w1}x + C_{w0}), u_0^s = \varepsilon^{-2}L_0, \quad (1.18)$$

$$\tau_0^s = 0, \sigma_{z0} = 0, \tau_0^q = 0, \alpha T = tz.$$

Перемещения  $w_0^s$  и  $u_0$  определены с точностью до перемещений полосы как жесткого тела. Тогда

$$u_0^s(0) = u_0^s(1) = 0, u_0^s(x) \equiv 0, w_0^s = \frac{1}{2}\varepsilon^{-2}t(x - x^2).$$

Подставив найденные величины (1.18) в формулы(1.4), получим решение исходной задачи теории упругости

$$u = \varepsilon^{-1}txz, \varepsilon_x = tz, \sigma_x = 0, \varepsilon_z = tz, w = \frac{tz^2}{2} + \frac{\varepsilon^{-2}t}{2}(x - x^2), \tau = 0, \sigma_z = 0.$$

Формулы показывают, что в свободной от закреплений полосе напряжения отсутствуют, продольные перемещения составляют величину порядка  $O(\varepsilon^{-1})$ , поперечные  $O(\varepsilon^{-2})$  – по отношению к заданной величине температурного расширения  $\alpha T = tz$ . Поправка следующего приближения для поперечного перемещения учитывает изменение поперечных размеров полосы за счет нагрева и пренебрежимо мала  $O(\varepsilon^0)$  по сравнению с главным членом  $O(\varepsilon^{-2})$ .

При короблении полосы имеют место перемещения и деформация расширения, напряжения при этом отсутствуют.

### **1.2.5. Выполнение условия жесткого защемления на коротких сторонах полосы**

Рассмотрим второй случай граничных условий на концах, когда

$$u = 0, w = 0 \text{ при } x = 0; 1. \quad (1.19)$$

Температура распределена по высоте полосы по линейному закону  $\alpha T = tz$ . Воспользовавшись формулами для перемещений из (1.4), запишем для краев  $x = 0; 1$  соотношения в виде

$$w = \left[ \varepsilon^2 \nu w_0'' - (1 + \nu)^2 \varepsilon \tau_0' \right] \frac{z^2}{2} - \left[ \nu \varepsilon u_0' - (1 - \nu^2) \sigma_{z_0} \right] z + (1 + \nu) t \frac{z^2}{2} + w_0 = 0, \quad (1.20)$$

$$u = \left[ -\varepsilon w_0' + 2(1 + \nu) \tau_0 \right] z + u_0 = 0. \quad (1.21)$$

Потребовав обращения коэффициентов при каждой степени  $z$  в ноль, получим следующую последовательность концевых условий для основных неизвестных  $w_0^s, \tau_0^s, \tau_0^q$

$$w_0^s = 0, \quad -\varepsilon w_0^{s'} + 2(1 + \nu)(\tau_0^s + \tau_0^q) = 0, \quad (1.22)$$

$$\varepsilon^2 \nu w_0^{s''} - (1 + \nu)^2 \varepsilon \tau_0^{q'} + (1 + \nu)t = 0 \text{ при } x = 0; 1.$$

и для  $u_0^s, \sigma_{z_0}$

$$\nu \varepsilon u_0^{s'} - (1 - \nu^2) \sigma_{z_0}^s = 0, \quad (1.23)$$

$$u_0^s = 0 \text{ при } x = 0; 1.$$

Здесь учтено, что  $\tau_0^{s'} = 0$ .

Подстановка в граничные условия (1.22)÷(1.23) решения (1.15) приводит к следующим выражениям:

$$C_3 = 0, C_{w_2} = \varepsilon^{-2} \frac{t}{2} - \frac{\varepsilon^{-1}(\nu + 1)t}{2\varepsilon\nu - k(1 + \nu)}, C_{w_1} = \frac{\varepsilon^{-1}(\nu + 1)t}{2\varepsilon\nu - k(1 + \nu)},$$

$$w_0^s = \frac{\varepsilon^{-1}(\nu + 1)t}{k(1 + \nu) - 2\varepsilon\nu} (x^2 - x), \tau_0^s = -\frac{3}{4} \varepsilon C_3 = 0, u_0^s = 0, \sigma_{z_0} = 0; \quad (1.24)$$

$$\tau_0^q = \begin{cases} B_0 \exp\left(-\frac{kx}{\varepsilon}\right) & \text{при } x \geq 0 \\ B_1 \exp\left(-\frac{k(1-x)}{\varepsilon}\right) & \text{при } x \leq 1 \end{cases}, \quad k^2 = \frac{6}{2 + \nu}, B_0 = -B_1 = \frac{t}{4\varepsilon\nu - 2k(1 + \nu)}.$$

Исходные неизвестные задачи (компоненты напряженно-деформированного состояния) определяются подстановкой (1.24) в выражения (1.4)

$$\begin{aligned}
 u(x, z) &= \left[ -\varepsilon w_0' + 2(1 + \nu) \tau_0 \right] z, \quad \sigma_z(x, z) = -\varepsilon \tau_0' z, \\
 \sigma_x(x, z) &= \left[ -\varepsilon^2 w_0'' + \varepsilon(2 + \nu) \tau_0' + t \right] z, \quad \varepsilon_z(x, z) = \left[ \varepsilon^2 \nu w_0'' - (\nu + 1)^2 \varepsilon \tau_0' + t \right] z, \\
 \tau(x, z) &= \tau_0 - (2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0'' \frac{z^2}{2}, \\
 w(x, z) &= \left[ \varepsilon^2 \nu w_0'' - (\nu + 1)^2 \varepsilon \tau_0' + t \right] \frac{z^2}{2} + w_0, \\
 \sigma_z(x, z) &= (2 + \nu) \varepsilon^3 \tau_0''' \frac{z^3}{6} - \varepsilon \tau_0' z.
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

Анализ полученного результата приведен в разделе 1.3 в сравнении с полученным на соотношениях следующего приближения.

### 1.2.6. Преобразование уравнений способом прямых подстановок. Решение для защемленной по краям полосы

В разделе 1.2.3 разрешающие соотношения для основных неизвестных получены (на граничных условиях (1.5) на длинных сторонах полосы) преобразованиями уравнений (1.6), основывающимися на асимптотических оценках по малому параметру тонкостенности  $\varepsilon$ . Положительным свойством результата является его совместность в плане учета величин одного асимптотического порядка. Другим возможным способом является продолжение прямых преобразований уравнений [180]. Для первой пары уравнений таким образом можно получить соотношение

$$\begin{aligned}
 -4\varepsilon \tau_0' &= 3(Z_+ - Z_-) + \varepsilon(X_+' + X_-' ) - \varepsilon^2 \left[ \int_0^1 (\alpha T)'' dz + \int_0^{-1} (\alpha T)'' dz \right] + \\
 &+ 3\varepsilon^2 \left[ \int_0^1 \int_0^z (\alpha T)'' dz dz - \int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)'' dz dz \right].
 \end{aligned}$$

Принимая это во внимание, второе уравнение дает (для сокращения записи

поверхностную нагрузку считаем здесь отсутствующей)

$$\varepsilon^4 w_0^{IV} = \frac{1}{4} \varepsilon^4 (2 + \nu) \left[ \int_0^1 (\alpha T)^{IV} dz + \int_0^{-1} (\alpha T)^{IV} dz - 3 \left( \int_0^1 \int_0^z (\alpha T)^{IV} dz dz - \int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)^{IV} dz dz \right) \right] - \\ - \frac{3}{2} \varepsilon^2 \left[ \int_0^1 (\alpha T)'' dz + \int_0^{-1} (\alpha T)'' dz \right] + \frac{3}{2} \varepsilon^2 \left[ \int_0^1 \int_0^z (\alpha T)'' dz dz - \int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)'' dz dz \right].$$

Эти разрешающие соотношения отвечают медленно меняющемуся (основному) решению. Их вычисление при выборе функций  $\alpha$  и  $T$  соответствующего вида, не представляет большого затруднения. Положим для краткости  $\alpha T = t(x)z$ . Для такого случая решение имеет вид

$$w_0(x) = C_{w3}x^3 + C_{w2}x^2 + C_{w1}x + C_{w0} - \varepsilon^{-2}t \frac{x^2}{2}.$$

Плагая теперь во втором уравнении (1.7)  $w_0$  известной величиной, найдем дополнительное соотношение для касательных напряжений, учитывающее быструю изменчивость,

$$(2 + \nu) \varepsilon^3 \tau_0''' - \frac{1}{3} - 2\varepsilon \tau_0' = 0,$$

и его решение

$$\tau_0 = C_{t0} + C_{t1} e^{-\frac{kx}{\varepsilon}} + C_{t2} e^{\frac{kx}{\varepsilon}}, \quad k^2 = \frac{6}{2 + \nu}.$$

Рассматривая подобным образом вторую пару уравнений (1.7), получаем сначала выражения для медленно меняющихся компонент

$$2\sigma_{z0} = Z_+ + Z_- + \frac{1}{2} \varepsilon (X_+' - X_-' ) + \varepsilon^2 \int_0^1 \int_0^z (\alpha T)'' dz dz + \\ + \varepsilon^2 \int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)'' dz dz - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_0^1 (\alpha T)'' dz + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_0^{-1} (\alpha T)'' dz,$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 u_0''' &= -\frac{\nu}{2} \varepsilon^2 \left[ (Z_+'' + Z_-'') + \frac{1}{2} \varepsilon (X_+''' - X_-''') \right] - \varepsilon (X_+' - X_-'') - \\ & - \frac{\nu}{2} \varepsilon^4 \left[ \int_0^1 \int_0^z (\alpha T)'''' dz dz + \int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)'''' dz dz - \frac{1}{2} \int_0^1 (\alpha T)'''' dz + \frac{1}{2} \int_0^{-1} (\alpha T)'''' dz \right] + \\ & + \varepsilon^2 \left[ \int_0^1 (\alpha T)'' dz - \int_0^{-1} (\alpha T)'' dz \right]. \end{aligned}$$

где для рассматриваемого частного случая нагружения

$$u_0(x) = C_{u2}x^2 + C_{u1}x + C_{u0}.$$

В свою очередь, быстро изменяющееся (осциллирующее) решение для функции  $\sigma_{z0}$  в рассматриваемом приближении определяется оператором  $\nu \varepsilon^2 \sigma_{z0}'' + 2\sigma_{z0}$  (аналогично результату в разделе 1.2.2).

Полученные решения включают найденные выше с применение аппарата асимптотик. Последующее выполнение граничных условий на коротких сторонах в частности, условия жесткого защемления (1.19), для приближений  $u_{(0)}, w_{(1)}$  из (1.4), аналогично изложенному выше, приводит также к результату (1.24).

Рассмотренный способ прямых подстановок характеризуется большим формализмом (в сравнении с примененным выше асимптотическим), что упрощает получение результата.

### 1.2.7. Выполнение расчета на соотношениях следующего приближения

Формулы (1.4), полученные интегрированием и подстановками найденных величин в итерационной последовательности (1.3) при начальном приближении  $w_{(0)} = w_0(x)$  и  $\tau_{(0)} = \tau_0(x)$ , содержат соотношения для неизвестных задачи (компонент напряженно-деформированного состояния) найденные в нулевом и первом приближении, при помощи которых была решена методом SVPB задача о термомеханическом нагружении полосы выше. Найдем решение этой задачи на соотношениях следующего приближения. Для этого аналогично (1.4) сделаем вычисления

$$w_{(0)} = w_0, \tau_{(0)} = \tau_0, u_{(0)} = \left[ -\varepsilon w_0' + 2(1+\nu)\tau_0 \right] z + u_0, \sigma_{z(0)} = -\varepsilon \tau_0' z + \sigma_{z_0},$$

$$\varepsilon_{x(0)} = \left[ -\varepsilon^2 w_0'' + 2(1+\nu)\varepsilon \tau_0' \right] z + \varepsilon u_0' + \alpha T,$$

$$\sigma_{x(0)} = \left[ -\varepsilon^2 w_0'' + (2+\nu)\varepsilon \tau_0' \right] z + \varepsilon u_0' + \nu \sigma_{z_0} - \alpha T,$$

$$\varepsilon_{z(0)} = \left[ \varepsilon^2 \nu w_0'' - (1+\nu)^2 \varepsilon \tau_0' \right] z - \nu \varepsilon u_0' + (1-\nu^2) \sigma_{z_0} + \alpha T,$$

$$w_{(1)} = \left[ \varepsilon^2 \nu w_0'' - (1+\nu)^2 \varepsilon \tau_0' \right] \frac{z^2}{2} + \left[ -\nu \varepsilon u_0' + (1-\nu^2) \sigma_{z_0} \right] z + \\ + (1+\nu) \int_0^z (\alpha T) dz + w_0,$$

$$\tau_{(1)} = \left[ \varepsilon^3 w_0''' - (2+\nu)\varepsilon^2 \tau_0'' \right] \frac{z^2}{2} + \left[ -\varepsilon^2 u_0'' - \nu \varepsilon \sigma_{z_0}' \right] z + \tau_0 + \varepsilon \int_0^z (\alpha T)' dz,$$

$$u_{(1)} = \left[ (2+\nu)\varepsilon^3 w_0''' - (1+\nu)(3+\nu)\varepsilon^2 \tau_0'' \right] \frac{z^3}{6} - \quad (1.26)$$

$$- \left[ (2+\nu)\varepsilon^2 u_0'' + (1+\nu)^2 \varepsilon \sigma_{z_0}' \right] \frac{z^2}{2} - \left[ \varepsilon w_0' - 2(1+\nu)\tau_0 \right] z + \\ + u_0 + (1+\nu) \varepsilon \int_0^z \int_0^z (\alpha T)' dz dz,$$

$$\sigma_{z(1)} = \left[ -\varepsilon^4 w_0'''' + (2+\nu)\varepsilon^3 \tau_0''' \right] \frac{z^3}{6} + \left[ \varepsilon^3 u_0''' + \nu \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' \right] \frac{z^2}{2} - \varepsilon \tau_0' z + \\ + \sigma_{z_0} - \varepsilon^2 \int_0^z \int_0^z (\alpha T)'' dz dz,$$

$$\varepsilon_{x(1)} = \varepsilon^2 (\nu+1) \int_0^z \int_0^z (\alpha T)'' dz dz + \varepsilon u_0'(x) +$$

$$+ z^3 \frac{\varepsilon^3}{6} \left[ \varepsilon (\nu+2) w_0'''' - (\nu^2 + 4\nu + 3) \tau_0''' \right] -$$

$$- z^2 \frac{\varepsilon^2}{2} \left[ \varepsilon (\nu+2) u_0''' + (\nu+1)^2 \sigma_{z_0}'' \right] + z \varepsilon \left[ -\varepsilon w_0'' + 2(\nu+1)\tau_0' \right],$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{x(1)} &= \left[ \frac{1}{3} \varepsilon^4 w_0^{IV} - \varepsilon^3 \left( \frac{\nu}{3} + \frac{1}{2} \right) \tau_0''' \right] z^3 - \left[ \varepsilon^3 u_0''' + \varepsilon^2 \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \sigma_{z0}'' \right] z^2 + \\
&+ z \left[ -\varepsilon^2 w_0'' + \varepsilon (2 + \nu) \tau_0' \right] + \varepsilon u_0' + \nu \sigma_{z0} - \alpha T + \varepsilon^2 \int_0^z \int_0^z (\alpha T)'' dz dz, \\
w_{(2)} &= -\varepsilon^2 (\nu + 1) \int_0^z \int_0^z \int_0^z (\alpha T)'' dz dz dz + z^4 \left[ -\frac{\varepsilon^4}{24} (2\nu + 1) w_0^{IV} + \frac{\varepsilon^3}{12} (\nu + 1)^2 \tau_0''' \right] + \\
&+ z^3 \left[ \frac{\varepsilon^2 \nu}{3} (\nu + 1) \sigma_{z0}'' + \frac{\varepsilon^3}{6} (2\nu + 1) u_0''' \right] + (\nu + 1) \int_0^z \alpha T dz + \\
&+ z^2 \left[ \frac{\varepsilon^2 \nu w_0''}{2} - \left( \frac{\varepsilon \nu^2}{2} + \varepsilon \nu + \frac{\varepsilon}{2} \right) \tau_0' \right] + z \left[ -\varepsilon \nu u_0' + (1 - \nu^2) \sigma_{z0} \right] + w_0, \\
\tau_{(2)} &= -\varepsilon^3 \int_0^z \int_0^z \int_0^z (\alpha T)''' dz dz dz + \varepsilon \int_0^z (\alpha T)' dz + z^4 \left[ -\frac{\varepsilon^5 w_0^V}{12} + \left( \frac{\varepsilon^4 \nu}{12} + \frac{\varepsilon^4}{8} \right) \tau_0^{IV} \right] + \\
&+ z^3 \left[ \frac{\varepsilon^4 u_0^{IV}}{3} + \left( \frac{\varepsilon^3 \nu}{3} + \frac{\varepsilon^3}{6} \right) \sigma_{z0}''' \right] + z^2 \left[ \frac{\varepsilon^3 w_0'''}{2} + \left( -\frac{\varepsilon^2 \nu}{2} - \varepsilon^2 \right) \tau_0'' \right] + \\
&+ z \left( -\varepsilon^2 u_0'' - \varepsilon \nu \sigma_{z0}' \right) + \tau_0, \\
\sigma_{z(2)} &= \varepsilon^4 \int_0^z \int_0^z \int_0^z \int_0^z (\alpha T)^{IV} dz dz dz dz - \varepsilon^2 \int_0^z \int_0^z (\alpha T)'' dz dz - \varepsilon z \tau_0' + \\
&+ z^5 \left[ \frac{\varepsilon^6 w_0^{VI}}{60} + \left( -\frac{\varepsilon^5 \nu}{60} - \frac{\varepsilon^5}{40} \right) \tau_0^V \right] + z^4 \left[ -\frac{\varepsilon^5 u_0^V}{12} + \left( -\frac{\varepsilon^4 \nu}{12} - \frac{\varepsilon^4}{24} \right) \sigma_{z0}^{IV} \right] + \\
&+ z^3 \left[ -\frac{\varepsilon^4 w_0^{IV}}{6} + \left( \frac{\varepsilon^3 \nu}{6} + \frac{\varepsilon^3}{3} \right) \tau_0''' \right] + z^2 \left( \frac{\varepsilon^3 u_0''}{2} + \frac{\varepsilon^2 \nu \sigma_{z0}''}{2} \right) + \sigma_{z0}.
\end{aligned}$$

Римские цифры в верхнем индексе указывают кратность дифференцирования по переменной  $x$  (4-я и 5-я производные).

Как и ранее, поиск решения для основных неизвестных  $u_0, \sigma_{z0}, w_0, \tau_0$  ведется путем выполнения граничных условий на приближенных соотношениях для искомым компонент напряженно-деформированного состояния (1.26). Поскольку форма этих выражений позволяет рассматривать их в качестве рядов по степеням параметра  $\varepsilon$  (который может считаться сколь угодно малой

величиной), то и ряды приобретают смысл асимптотических, и их точность оценивается как  $O(\varepsilon^p)$ , где  $p$  – показатель степени старшего члена отбрасываемой части ряда.

В качестве граничных условий выберем для длинных сторон полосы общий случай распределенной нагрузки, для коротких – условие жесткого защемления (1.19). Так же температурный член будем считать заданным линейно по высоте:  $\alpha T = t(x)z$ .

При выполнении граничных условий на длинных сторонах приближениями  $\sigma_{z(2)}$  и  $\tau_{(2)}$  и применении способа прямых подстановок (раздел 1.2.5) разрешающие соотношения для основных неизвестных приобретают вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 \tau_0^{IV} - 24\varepsilon^2 \tau_0''' + 120\tau_0' &= \varepsilon^3 t^{IV}, \\ \frac{\varepsilon^6 w_0''}{30} - \frac{\varepsilon^4 w_0}{3} &= -\frac{B_{w1} C_{\tau 1} e^{-k_1 x}}{k_1^4} - \frac{B_{w2} C_{\tau 2} e^{k_1 x}}{k_1^4} - \frac{B_{w3} C_{\tau 3} e^{-k_2 x}}{k_2^4} - \frac{B_{w4} C_{\tau 4} e^{k_2 x}}{k_2^4} + \\ &+ C_{w0} + C_{w1} x + C_{w2} x^2 + C_{w3} x^3 - \frac{\varepsilon^4 t_0}{60} + \frac{\varepsilon^2 t_0 x^2}{6}, \\ \frac{\varepsilon^4 \sigma_{z0}^{IV}}{12} - 2 \frac{\varepsilon^2 \sigma_{z0}''}{3} + 2\sigma_{z0} &= 0, \\ -\frac{\varepsilon^5 u_0''}{6} + \varepsilon^3 u_0 &= C_{u0} + C_{u1} x + C_{u2} x^2 + D_{u1} D_{u5} e^{m_2 x} \cos(m_1 x) + D_{u2} D_{u5} e^{m_2 x} \sin(m_1 x) + \\ &+ D_{u3} D_{u5} e^{-m_2 x} \cos(m_1 x) + D_{u4} D_{u5} e^{-m_2 x} \sin(m_1 x). \end{aligned}$$

где буквами  $B, C, D$  с индексами обозначены константы интегрирования,

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{6-\sqrt{6}}}{\varepsilon}, \quad k_2 = \frac{\sqrt{2}\sqrt{6+\sqrt{6}}}{\varepsilon}, \\ m_1 &= \frac{2^{3/4}\sqrt[4]{3} \sin(m_3)}{\varepsilon}, \quad m_2 = \frac{2^{3/4}\sqrt[4]{3} \cos(m_3)}{\varepsilon}, \quad m = \frac{a \tan(\sqrt{2}/2)}{2}. \end{aligned}$$

Решением дифференциальных соотношений являются следующие функции:

$$\tau_0(x) = C_{\tau 0} + C_{\tau 1} e^{-k_1 x} + C_{\tau 2} e^{k_1 x} + C_{\tau 3} e^{-k_2 x} + C_{\tau 4} e^{k_2 x}, \quad (1.27)$$

$$w_0(x) = B_{w1}C_{\tau1}D_{w5}e^{-k_1x} + B_{w2}C_{\tau2}D_{w5}e^{k_1x} + B_{w3}C_{\tau3}D_{w7}e^{-k_2x} + B_{w4}C_{\tau4}D_{w7}e^{k_2x} + \\ + C_{w0} + C_{w1}x + C_{w2}x^2 + C_{w3}x^3 - \frac{t_0}{20} - \frac{t_0x^2}{2\varepsilon^2},$$

$$\sigma_{z0}(x) = [C_{\sigma1}\sin(m_1x) + C_{\sigma2}\cos(m_1x)]e^{-m_2x} + \\ + [C_{\sigma3}\sin(m_1x) + C_{\sigma4}\cos(m_1x)]e^{m_2x},$$

$$u_0(x) = -B_{u1}C_{\sigma1}e^{-m_2x}\sin(m_1x) + B_{u1}C_{\sigma4}e^{m_2x}\cos(m_1x) - B_{u2}C_{\sigma2}e^{-m_2x}\sin(m_1x) + \\ + B_{u2}C_{\sigma3}e^{m_2x}\cos(m_1x) - B_{u3}C_{\sigma1}e^{-m_2x}\cos(m_1x) + B_{u3}C_{\sigma4}e^{m_2x}\sin(m_1x) - \\ - B_{u4}C_{\sigma2}e^{-m_2x}\cos(m_1x) + B_{u4}C_{\sigma3}e^{m_2x}\sin(m_1x) + \frac{C_{u0}}{\varepsilon^3} + \frac{C_{u1}x}{\varepsilon^3}.$$

Видно, что полученные зависимости содержат медленно меняющиеся (степенные) и быстро меняющиеся (экспоненциальные и гармонические) компоненты, то есть с их помощью может быть описано как основное напряженно-деформированное состояние, так и краевой эффект.

В случае граничных условий на торцах (1.19) необходимое количество уравнений для вычисления констант интегрирования может дать использование выражений  $u_{(1)}, w_{(1)}$  (1.26). Часть констант, входящих в выражения (1.27), могут быть вычислена аналитически

$$B_{w1} = -B_{w2} = \frac{\varepsilon^5 k_1^5 \nu}{30} + \frac{\varepsilon^5 k_1^5}{20} - \frac{\varepsilon^3 k_1^3 \nu}{3} - \frac{2\varepsilon^3 k_1^3}{3} + 2\varepsilon k_1,$$

$$B_{w3} = -B_{w4} = \frac{\varepsilon^5 k_2^5 \nu}{30} + \frac{\varepsilon^5 k_2^5}{20} - \frac{\varepsilon^3 k_2^3 \nu}{3} - \frac{2\varepsilon^3 k_2^3}{3} + 2\varepsilon k_2,$$

$$C_{\sigma1} = C_{\sigma2} = C_{\sigma3} = C_{\sigma4} = 0, \quad C_{u0} = C_{u1} = 0.$$

Остальные определяются численно решением системы алгебраических уравнений. Надо отметить, что, аналитические преобразования громоздких выражений также выполнялись с применением компьютера (использовался пакет символьных вычислений).

Ориентируясь на номер приближения величин  $\sigma_{z(2)}, \tau_{(2)}$ , которыми выполнены граничные условия на длинных сторонах полосы, будем называть полученное здесь решение результатом второго приближения; аналогично,

полученный в предыдущем разделе – результатом первого.

Известное в литературе [39, 193, 194] решение (построенное на основе гипотезы Кирхгоффа–Лява) применительно к изотропной пластине показывает, что при линейном распределении температуры по толщине и заземленных краях прогиб срединной поверхности не возникает. Это объясняется наложением коробления в положительном направлении (как действия изгибающего момента, вызванного разностью температур верхней и нижней поверхностей тела как свободного) и изгибающего момента в заделке (как результат температурного расширения и сжатия верхних и нижних относительно срединной поверхности «продольных волокон»), направленных в противоположные стороны.

Проявление этих двух факторов на модели, не ограниченной допущением прямой несжимаемой нормали, можно наблюдать в полосе (Рис. 1.1, Рис. 1.2), рассматривая ее как сечение пластины плоскостью, перпендикулярной ее основаниям.

Исходные данные: материал полосы сталь ( $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ ); длина полосы  $l = 1 \text{ м}$ ; толщина полосы  $2h = 0,1 \text{ м}$ , перепад температуры между точками, расположенными на оси  $Ox$  и поверхностью  $\pm 10^\circ\text{C}$  (верхняя сторона нагрета, нижняя охлаждена; температура на на оси  $Ox$  считается начальной, не вызывающей температурной деформации). Распределение температуры в продольном направлении считается постоянным.

Как следует из (1.27) и Рис. 1.1, при уменьшении толщины полосы ширина краевой зоны сокращается (малый параметр тонкостенности в показатель степени экспонент входит в отрицательной степени). Рост градиента температуры  $t_0 = t/\alpha$ , входящего в отвечающее за коробление частное решение множителем, вызывает увеличение кривизны параболы во внутренней области (Рис. 1.2). Пространственный характер температурного деформирования (здесь – различие амплитуд поперечных перемещений по толщине) проявляется на Рис. 1.3, Рис. 1.4. Согласно (1.26) решение обладает симметрией относительно оси  $Ox$ , и графики

приведены для верхней части полосы. Также в подписях к графикам указан номер приближения, для которого выполнен расчет.

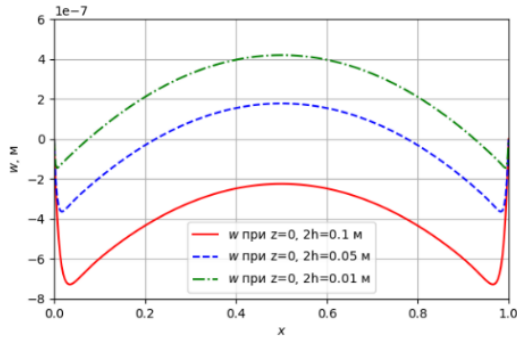


Рис. 1.1. Поперечные перемещения  $w_{(1)}$  в сечении  $z = 0$ . Влияние толщины полосы. (2-е приближение)

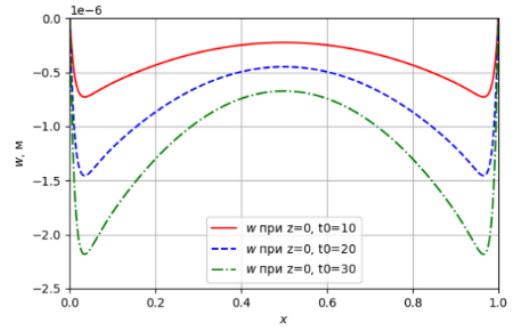


Рис. 1.2. Поперечные перемещения  $w_{(1)}$  в сечении  $z = 0$ . Влияние температуры. (2-е приближение)

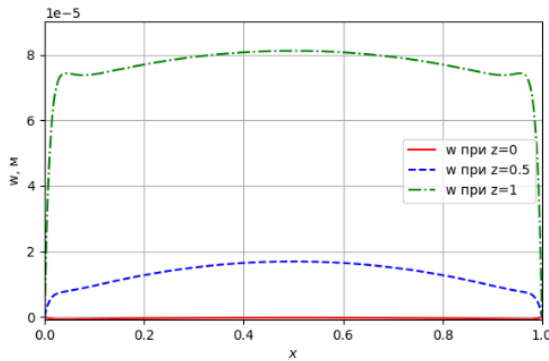


Рис. 1.3. Поперечные перемещения  $w_{(1)}$  в продольных сечениях (2-е приближение)

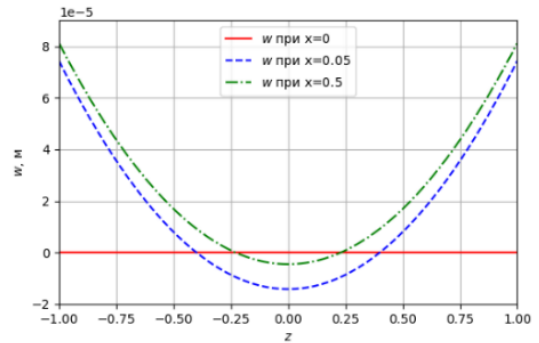


Рис. 1.4. Поперечные перемещения  $w_{(1)}$  в поперечных сечениях (2-е приближение)

Решение первого приближения для поперечных перемещений (1.24), в отличие от (1.27), не включает быстро меняющихся компонент (Рис. 1.51.5). Его меньшей «податливостью» и преобладанием изгибающих моментов в заделке (о которых сказано выше) можно объяснить однонаправленность графиков в сторону, противоположную зависимостям на Рис. 1.1.

Еще одной особенностью решения первого приближения является его формальная неточность в части быстро меняющейся составляющей  $\tau_0$ . Первые два уравнения подобны между собой, но при разрешении их относительно  $\tau_0$  возможны два варианта. Их результат по форме одинаков, но отличается коэффициентами (имеющими асимптотический порядок  $O(\varepsilon^0)$ ). Предпочтение

отдано разрешающему соотношению, отвечающему точно второму уравнению. Желание получить более глубокую информацию о решении на имеющихся соотношениях, включая быстро меняющуюся компоненту, дает повод считать совместность уравнений разрешенной асимптотически. Численно такое решение показано на Рис. 1.6. Как следует из (1.24), (1.26) и рисунка, отклонение от требуемого условия равенства нулю на поверхности проявляется локально возле угловой точки, расположенной в области краевого эффекта, ширина которой зависит от относительной толщины (здесь  $2h/l = 0.1$ ).

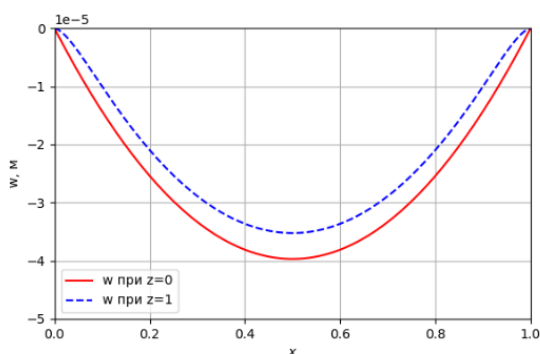


Рис. 1.5. Поперечные перемещения  $W_{(1)}$  в продольных сечениях (1-е приближение)

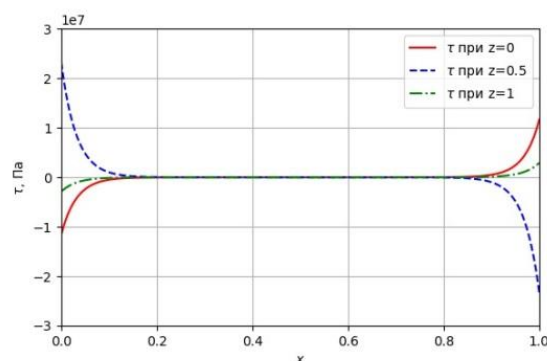


Рис. 1.6. Касательные напряжения  $\tau_{(1)}$  в продольных сечениях (1-е приближение)

Решение второго приближения помимо того, что не использует дополнительных допущений, имеет форму более гибкую для учета внешних воздействий на среду, составляющую полосу. Граничные условия выполняются в этом случае полностью и точно (в рамках приближений представлений искомых функций (1.26)). С учетом этого, а также принимая во внимание асимптотический характер составляющих эти представления рядов, будем считать результат второго приближения основным.

Распределение касательных напряжений на Рис. 1.7, Рис. 1.8 демонстрирует полиномиальный характер по толщине, следующий из описания (1.26), и сокращенный краевой эффект (в сравнении с первым приближением).

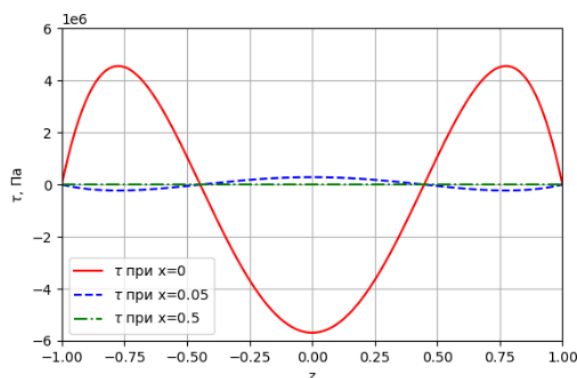


Рис. 1.7. Касательные напряжения  $\tau_{(2)}$  в поперечных сечениях (2-е приближение)

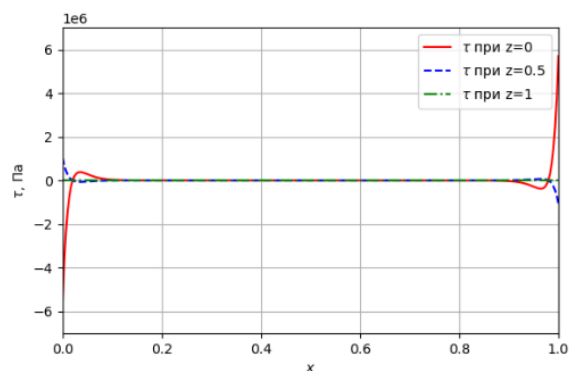


Рис. 1.8. Касательные напряжения  $\tau_{(2)}$  в продольных сечениях (2-е приближение)

То же наблюдается и для функций поперечных нормальных напряжений Рис. 1.9÷Рис. 1.12. Сопоставимость с результатами первого приближения (где формально неточные выражения для  $\tau_0$  входят во все выражения искомых величин здесь также качественная.

В полученных зависимостях как для касательных, так и для нормальных поперечных напряжений (не учитываемых классической теорией) обращают на себя внимание максимумы, учет которых может оказаться существенен при проектировании конструкций.

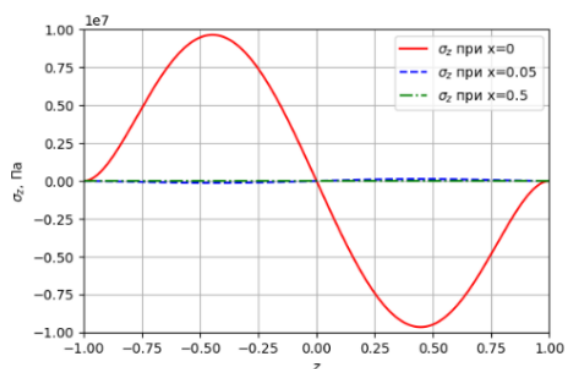


Рис. 1.9. Поперечные нормальные напряжения  $\sigma_{z(2)}$  в поперечных сечениях (2-е приближение)

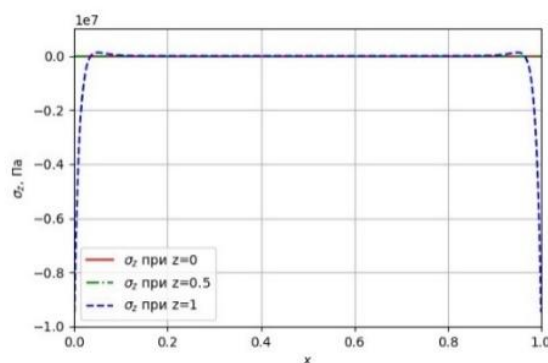


Рис. 1.10. Поперечные нормальные напряжения  $\sigma_{z(2)}$  в продольных сечениях (2-е приближение)

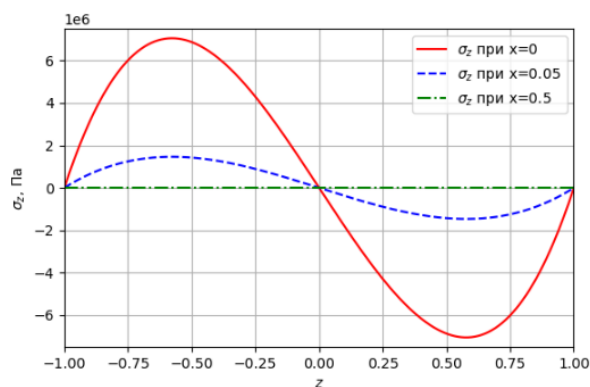


Рис. 1.11. Поперечные нормальные напряжения  $\sigma_{z(1)}$  в поперечных сечениях (1-е приближение)

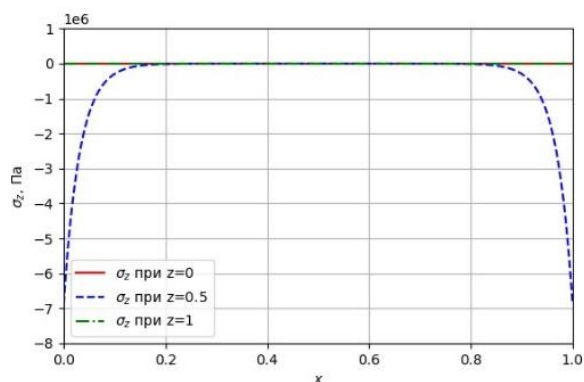


Рис. 1.12. Поперечные нормальные напряжения  $\sigma_{z(1)}$  в продольных сечениях (1-е приближение)

Графики нормальных продольных напряжений (Рис. 1.13÷Рис. 1.18) показывают количественную и качественную сопоставимость в целом результатов первого и второго приближений.

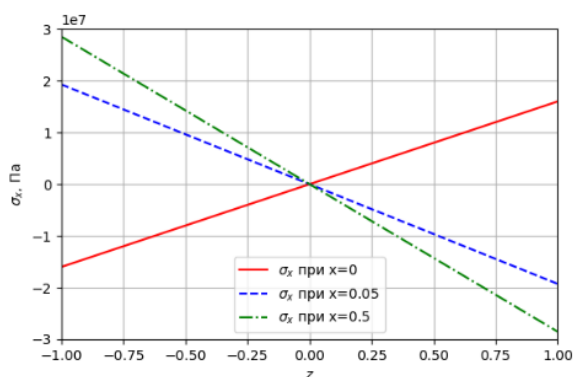


Рис. 1.13. Продольные нормальные напряжения  $\sigma_{x(0)}$  в поперечных сечениях (1-е приближение)

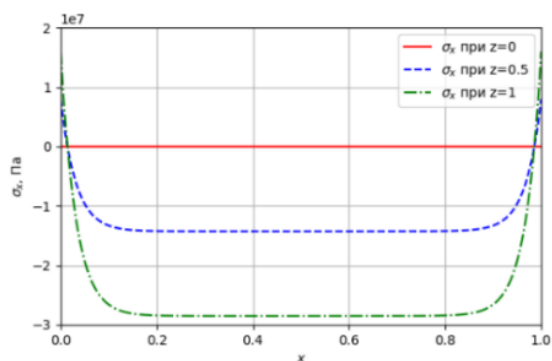


Рис. 1.14. Продольные нормальные напряжения  $\sigma_{x(0)}$  в продольных сечениях (1-е приближение)

Расхождение в графиках продольных перемещений (Рис. 1.15÷Рис. 1.20) объясняется взаимной разнонаправленностью (для результатов второго и первого приближений) поперечных перемещений, формальной неточностью  $\tau_0$  на первой итерации, а также учетом влияния  $\sigma_{z0}$ , принимаемой во внимание в расширенной зависимости  $u_{(1)}$  в отличие от  $u_{(0)}$ .

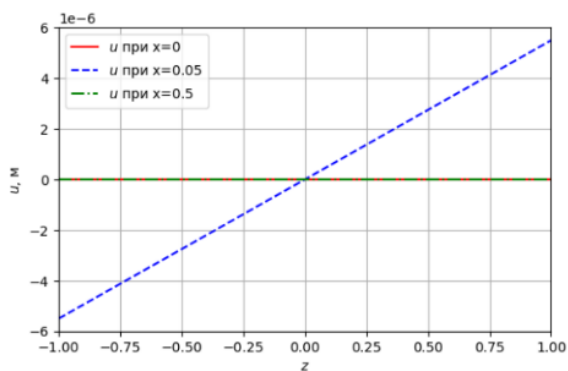


Рис. 1.15. Продольные перемещения  $u_{(0)}$  в продольных сечениях (1-е приближение)

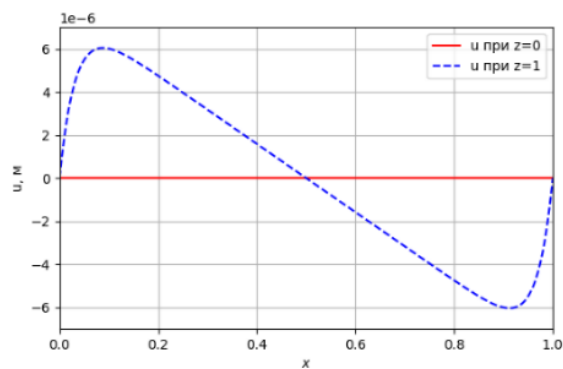


Рис. 1.16. Продольные перемещения  $u_{(0)}$  в поперечных сечениях (1-е приближение)

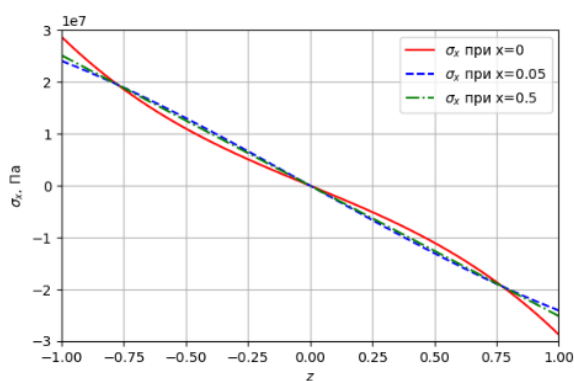


Рис. 1.17. Продольные нормальные напряжения  $\sigma_{x(1)}$  в поперечных сечениях (2-е приближение)

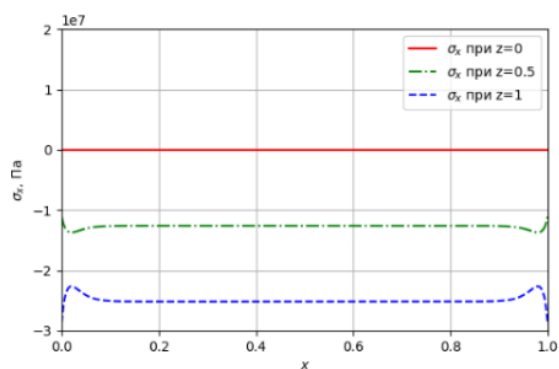


Рис. 1.18. Продольные нормальные напряжения  $\sigma_{x(1)}$  в продольных сечениях (2-е приближение)

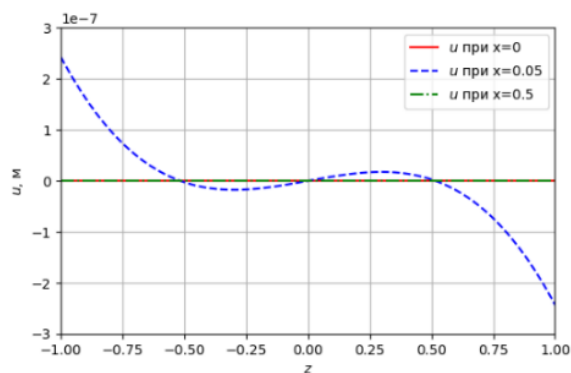


Рис. 1.19. Продольные перемещения  $u_{(1)}$  в поперечных сечениях (2-е приближение)

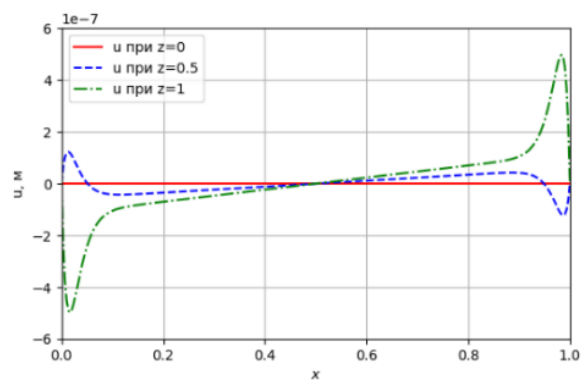


Рис. 1.20. Продольные перемещения  $u_{(1)}$  в продольных сечениях (2-е приближение)

### 1.3. Выводы по первой главе

1. Представлен обзор литературы, касающийся основных аспектов решаемой задачи. Рассмотрены кратко особенности подходов и методов, применяемых к расчетам тонкостенных конструкций из слоистых материалов.

2. Поскольку наибольшей общностью обладает пространственная постановка, в качестве пути решения выбран метод Сен-Венана – Пикара – Банаха, согласно которому интегрирование уравнений теории упругости осуществляется без введения обычных допущений, ограничивающих форму решения; также направленностью метода является получение решения аналитически.

3. Применение метода развито для решения на соотношениях второго приближения для задачи о термомеханическом воздействии на прямоугольную полосу. Получены путем прямого интегрирования выражения для искомых неизвестных (компонент напряженно-деформированного состояния) через четыре произвольные функции интегрирования, являющиеся новыми основными неизвестными задачи.

4. Для найденных зависимостей показана возможность получения разрешающих соотношений путем прямых подстановок – при выполнении граничных условий на длинных сторонах полосы. Способ обладает большим формализмом в сравнении с применяемым обычно асимптотическим подходом.

5. С точностью до констант интегрирования получено решение для рассматриваемого приближения. Константы интегрирования при выполнении граничных условий на коротких сторонах полосы найдены аналитически для случая соотношений первого приближения и численно – для второго.

6. Выполнено сопоставление результатов первого и второго приближений, полученные с использованием аппарата асимптотик и прямых подставок, соответственно. Асимптотически построенное решение на соотношениях начального приближения показывает возможность уловить элементы решения, утрачиваемые при формальном подходе, но обнаруживаемые на соотношениях следующего приближения (быстро изменяющиеся составляющие типа краевого

эффекта). Решение, развитое на дифференциальных уравнениях более высокого порядка позволило удовлетворить все граничные условия задачи формально более точно без применения асимптотических представлений.

7. Изложенный подход, ввиду достаточной общности, составляет основу применения метода Сен-Венана – Пикара – Банаха к задаче о термомеханическом деформировании тонкостенных тел из композиционных материалов. Полученные результаты применимы непосредственно к композитным элементам с изотропными однородными свойствами, требуемыми в известных случаях [195].

## ГЛАВА II. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СЛОИСТОЙ ПОЛОСЫ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА СЖАТЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В рамках применяемого подхода рассматривается аспект решения задачи, связанный со структурой слоистого материала. Решение рассматривается как включающее медленно и быстро меняющиеся составляющие, отвечающие внутренней области и зонам сингулярностей (типа краевого эффекта). С учетом этого, а также малости параметра тонкостенности, методом SVPB получены разрешающие соотношения для полосы, состоящей из материала, содержащего произвольное количество слоев, асимптотические оценки компонент решения, а также аналитические выражения для них в конечной форме для рассмотренных случаев.

### 2.1. Произвольно нагруженная по длинным сторонам слоистая полоса

Принципы, положенные а основу метода Сен-Венана – Пикара – Банаха, рассмотренные в предыдущей главе для случая изотропной прямоугольной полосы, позволяют обобщить их до более общего, рассматривая материал состоящим из произвольного количества слоев требуемой толщины.

Рассмотрим длинную прямоугольную полосу, состоящую из произвольного количества слоев. Условия ее нагружения таковы, что длинные стороны (при  $z^* = \pm h$ ) несут произвольную нагрузку, короткие стороны полосы могут быть закреплены или нагружены. Как и в п. 1.2.2, отнесем полосу к прямоугольной системе координат  $x^*, z^*$ , так, что  $0 \leq x^* \leq l$ ,  $-h \leq z^* \leq h$ .

Запишем уравнения плоской задачи теории упругости в размерных величинах, которые отмечены звездочкой

$$\frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \tau^*}{\partial z^*} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z^*} + \frac{\partial \tau^*}{\partial x^*} = 0, \quad (2.1)$$

$$E^* \varepsilon_x = \sigma_x^* - \nu \sigma_z^*, \quad E^* \varepsilon_z = \sigma_z^* - \nu \sigma_x^*, \quad \gamma = \frac{2(1+\nu)}{E^*} \tau^*,$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u^*}{\partial x^*}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w^*}{\partial z^*}, \quad \gamma = \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*}.$$

Введем безразмерные координаты  $x = x^* / l$ ,  $z = z^* / h$ , перемещения  $u = u^* / h$ ,  $w = w^* / h$  (вдоль осей  $x^*$  и  $z^*$ , соответственно), нормальные  $\sigma_x = \sigma_x^* / E_h$ ,  $\sigma_z = \sigma_z^* / E_h$  и касательные  $\tau = \tau^* / E_h$  напряжения. Тогда соотношения (2.1) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \varepsilon \tau' &= 0, & \frac{\partial \tau}{\partial z} + \varepsilon \sigma_x' &= 0, \\ \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_z), & \tau &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma, & \sigma_z &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_z + \nu \varepsilon_x), \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \varepsilon_x &= \varepsilon u', & \gamma &= \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon w'. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь все обозначения остаются прежними; штрихом обозначена операция дифференцирования по безразмерному аргументу  $x$ ;  $\varepsilon = h/l$  – малый параметр.

Примем  $E^* = E(z) E_h$ , где  $E_h$  как некоторое характерное постоянное среднее значение модуля Юнга. Соответственно считаем, что  $E(z)$  есть безразмерная ступенчатая функция, заданная по слоям,  $E(z) \sim \varepsilon^0$ . Входящий в физические соотношения безразмерный коэффициент Пуассона также можно в общем случае считать заданным ступенчатой функцией  $\nu = \nu(z)$  [6].

Расположив уравнения системы (2.2) в определенной последовательности и задав в качестве известных величин начального приближения

$$w_{(0)} = w_0(x), \quad \tau_{(0)} = \tau_0(x), \quad (2.3)$$

можно свести вычисления к методу последовательных приближений в соответствии со следующей схемой:

$$\frac{\partial u_{(0)}}{\partial z} = -\varepsilon w_0' + \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_0, \quad \frac{\partial \sigma_{z(0)}}{\partial z} = -\varepsilon \tau_0', \quad \varepsilon_{x(0)} = \varepsilon u_{(0)}', \quad (2.4)$$

$$\sigma_{x(0)} = E\varepsilon_{x(0)} + \nu\sigma_{z(0)}, \varepsilon_{z(0)} = -\nu\varepsilon_{x(0)} + \frac{1-\nu^2}{E}\sigma_{z(0)}, \frac{\partial w_{(1)}}{\partial z} = \varepsilon_{z(0)}, \frac{\partial \tau_{(1)}}{\partial z} = -\varepsilon\sigma_{x(0)}',$$

$$\frac{\partial \sigma_{z(1)}}{\partial z} = -\varepsilon\tau_{(1)}', \dots,$$

где производные по координате  $z$  от искомым величин помещены в левые части дифференциальных уравнений. Нижним индексом в скобках здесь и далее обозначен номер приближения.

Выбор величин начального приближения в форме (2.3) вытекает из тех соображений, что записав уравнения (2.2) в интегральной форме

$$u = -\varepsilon \int_0^z w' dz + \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} \tau dz + u_0(x), \sigma_z = -\varepsilon \int_0^z \tau' dz + \sigma_{z0}(x), \varepsilon_x = \varepsilon u',$$

$$\sigma_x = E\varepsilon_x + \nu\sigma_z, \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x + \frac{1-\nu^2}{E}\sigma_z,$$

$$w = \int_0^z \varepsilon_z dz + w_0(x), \tau = -\varepsilon \int_0^z \sigma_x' dz + \tau_0(x), \sigma_z = -\varepsilon \int_0^z \tau' dz + \sigma_{z0}(x),$$

получаем произволы интегрирования  $u_0(x)$ ,  $\sigma_{z0}(x)$ ,  $w_0(x)$ ,  $\tau_0(x)$ , любых двух из которых достаточно для организации итерационного процесса вида.

В силу независимости величин начального приближения от  $z$ , все неизвестные вычисляются в результате интегрирования по  $z$ . Тогда

$$u_{(0)} = -\varepsilon w_0' z + \tau_0 \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz + u_0(x),$$

$$\varepsilon_{x(0)} = -\varepsilon^2 w_0'' z + \varepsilon \tau_0' \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz + \varepsilon u_0', \sigma_{z(0)} = -\varepsilon \tau_0' z + \sigma_{z0}(x),$$

$$\sigma_{x(0)} = -E\varepsilon^2 w_0'' z + \varepsilon \tau_0' \left[ E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz - \nu z \right] + E\varepsilon u_0' + \nu \sigma_{z0},$$

$$\varepsilon_{z(0)} = \nu \varepsilon^2 w_0'' z - \varepsilon \tau_0' \left[ \nu \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz - \frac{1-\nu^2}{E} z \right] - \nu \varepsilon u_0' + \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_{z0},$$
(2.5)

$$\begin{aligned}
w_{(1)} &= \varepsilon^2 w_0'' \int_0^z v z dz - \varepsilon \tau_0' \left[ \int_0^z \frac{1-v^2}{E} z dz + \int_0^z v \int_0^z \frac{2(1+v)}{E} dz dz \right] + \\
&\quad + \sigma_{z_0} \int_0^z \frac{1-v^2}{E} dz - \varepsilon u_0' \int_0^z v dz + w_0(x), \\
\tau_{(1)} &= \varepsilon^3 w_0''' \int_0^z E z dz - \varepsilon^2 \tau_0'' \left[ \int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+v)}{E} dz dz - \int_0^z v z dz \right] - \\
&\quad - \varepsilon^2 u_0'' \int_0^z E dz - \varepsilon \sigma_{z_0}' \int_0^z v dz + \tau_0(x), \\
\sigma_{z(1)} &= -\varepsilon^4 w_0'''' \int_0^z \int_0^z E z dz dz + \varepsilon^3 \tau_0''' \left[ \int_0^z \int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+v)}{E} dz dz dz - \int_0^z \int_0^z v z dz dz \right] + \\
&\quad + \varepsilon^3 u_0''' \int_0^z \int_0^z E dz dz + \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' \int_0^z \int_0^z v dz dz - \varepsilon \tau_0' z + \sigma_{z_0}.
\end{aligned}$$

Нижним индексом 0 без скобок обозначены произвольные функции интегрирования  $u_0 = u_0(x)$ ,  $\sigma_{z_0} = \sigma_{z_0}(x)$ ,  $w_0 = w_0(x)$ ,  $\tau_0 = \tau_0(x)$ , зависящие только от продольной координаты. Две из них  $w_0$ ,  $\tau_0$  выбраны в качестве величин начального приближения (2.3) в первых двух уравнениях системы (2.4).

В списке формул (2.5) заданные величины начального приближения  $w_0(x)$  и  $\tau_0(x)$  вычисляются также в первом приближении с тем, чтобы вычислить поправку к ним. Величины  $\tau$ ,  $\sigma_z, w$  записаны в первом приближении, остальные — в нулевом. При этом все неизвестные выражены в зависимости от произвольных функций интегрирования  $\tau_0(x)$ ,  $\sigma_{z_0}(x)$ ,  $w_0(x)$ ,  $u_0(x)$ , относительные порядки которых по  $\varepsilon$  будут определены из граничных условий на длинных сторонах и концах полосы.

## 2.2. Выполнение граничных условий на длинных сторонах полосы

На лицевых поверхностях полосы  $z^* = \pm h$  должны удовлетворяться граничные условия, соответствующие условиям нагружения. Запишем условия в безразмерном виде

$$\sigma_z = Z_+(x), \tau = X_+(x) \text{ при } z = 1; \sigma_z = Z_-(x), \tau = X_-(x) \text{ при } z = -1. \quad (2.6)$$

Нагрузки считаем медленно меняющимися функциями координаты  $x$ . Условием (2.6) будем удовлетворять величины первого приближения из общих решений (2.5), в предположении, что они с достаточной точностью аппроксимируют искомые величины. В таком случае система уравнений примет следующий вид [6, 7]

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^3 w_0''' \int_0^1 E z dz - \varepsilon^2 \tau_0'' \left[ \int_0^1 E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^1 \nu z dz \right] - \varepsilon^2 u_0'' \int_0^1 E dz - \\
& \quad - \varepsilon \sigma_{z_0}' \int_0^1 \nu dz + \tau_0 = X_+, \\
& \varepsilon^3 w_0''' \int_0^{-1} E z dz - \varepsilon^2 \tau_0'' \left[ \int_0^{-1} E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^{-1} \nu z dz \right] - \varepsilon^2 u_0'' \int_0^{-1} E dz - \\
& \quad - \varepsilon \sigma_{z_0}' \int_0^{-1} \nu dz + \tau_0 = X_-, \\
& -\varepsilon^4 w_0'''' \int_0^1 \int_0^z E z dz dz + \varepsilon^3 \tau_0''' \left[ \int_0^1 \int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz dz - \int_0^1 \int_0^z \nu z dz dz \right] + \\
& \quad + \varepsilon^3 u_0''' \int_0^1 \int_0^z E dz dz + \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' \int_0^1 \int_0^z \nu dz dz - \varepsilon \tau_0' + \sigma_{z_0} = Z_+, \\
& -\varepsilon^4 w_0'''' \int_0^{-1} \int_0^z E z dz dz + \varepsilon^3 \tau_0''' \left[ \int_0^{-1} \int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz dz - \int_0^{-1} \int_0^z \nu z dz dz \right] + \\
& \quad + \varepsilon^3 u_0''' \int_0^{-1} \int_0^z E dz dz + \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' \int_0^{-1} \int_0^z \nu dz dz + \varepsilon \tau_0' + \sigma_{z_0} = Z_-.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Она может быть разрешена относительно неизвестных  $\tau_0(x)$ ,  $\sigma_{z_0}(x)$ ,  $w_0(x)$ ,  $u_0(x)$  после вычисления в общем случае 16-ти интегральных коэффициентов от заданных функций  $E(z)$  и  $\nu(z)$  путем

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \int_0^1 E z dz & \int_0^1 E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^1 \nu z dz & \int_0^1 E dz & \int_0^1 \nu dz \\ \int_0^{-1} E z dz & \int_0^{-1} E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^{-1} \nu z dz & \int_0^{-1} E dz & \int_0^{-1} \nu dz \\ \int_0^1 \int_0^z E z dz dz & \int_0^1 \int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz dz - \int_0^1 \int_0^z \nu z dz dz & \int_0^1 \int_0^z E dz dz & \int_0^1 \int_0^z \nu dz dz \\ \int_0^{-1} \int_0^z E z dz dz & \int_0^{-1} \int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz dz - \int_0^{-1} \int_0^z \nu z dz dz & \int_0^{-1} \int_0^z E dz dz & \int_0^{-1} \int_0^z \nu dz dz \end{array} \right\}. \quad (2.8)$$

При вычислении кратных интегралов внутренний интеграл с переменным верхним пределом вычисляется от  $z=0$  до  $z$ , лежащей в слое, соответствующем пределу внешнего интеграла.

Таким образом учитывается информация о характеристиках всех внутренних слоев. Физический смысл получаемых величин характеризует эффективные коэффициенты жесткости (моментные функции).

### 2.3. Решение пространственной задачи для двухслойной полосы

#### 2.3.1. Двухслойная полоса со слоями одинаковой толщины

Рассмотрим случай полосы, состоящей из двух слоев одинаковой толщины (Рис. 2.1).

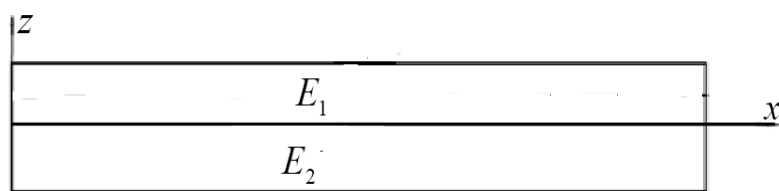


Рис. 2.1. Полоса из двух слоев одинаковой толщины

Как и в работе [12] принимаем для верхнего слоя полосы при  $0 \leq z \leq 1, 0 \leq x \leq 1$  жесткость  $E_1$  и коэффициент Пуассона  $\nu_1$ . Для нижнего слоя при  $0 \leq z \leq -1, 0 \leq x \leq 1$  –соответственно жесткость  $E_2$  и коэффициент Пуассона  $\nu_2$ . Считаем  $E_1$  и  $E_2$  константами, задающими значения функции  $E(z)$  в соответствующих областях,  $E_1, E_2 \sim \varepsilon^0$ . Положим также константами  $\nu_1$  и  $\nu_2$ , так,

что  $v_1 = v_2 = v = const$ . Вычислим интегральные коэффициенты (2.8), входящие в уравнения (2.7). Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 E_1 z dz &= \frac{1}{2} E_1, \quad \int_0^1 E_1 \int_0^z \frac{2(1+v)}{E_1} dz dz - \int_0^1 v z dz = \frac{2+v}{2}, \quad \int_0^1 E_1 dz = E_1, \quad \int_0^1 v dz = v, \\ \int_0^{-1} E_2 z dz &= \frac{1}{2} E_2, \quad \int_0^{-1} E_2 \int_0^z \frac{2(1+v)}{E_2} dz dz - \int_0^{-1} v z dz = \frac{2+v}{2}, \quad \int_0^{-1} E_2 dz = -E_2, \quad \int_0^{-1} v dz = -v, \\ \int_0^1 \int_0^z E_1 z dz dz &= \frac{1}{6} E_1, \quad \int_0^1 \int_0^z E_1 \int_0^z \frac{2(1+v)}{E_1} dz dz dz - \int_0^1 \int_0^z v z dz dz = \frac{2+v}{6}, \quad \int_0^1 \int_0^z E_1 dz dz = \frac{1}{2} E_1, \\ \int_0^1 \int_0^z v dz dz &= \frac{1}{2} v, \quad \int_0^1 \int_0^z E_2 z dz dz = -\frac{1}{6} E_2, \quad \int_0^1 \int_0^z E_2 dz dz = \frac{1}{2} E_2, \\ \int_0^{-1} \int_0^z E_2 \int_0^z \frac{2(1+v)}{E_2} dz dz dz - \int_0^{-1} \int_0^z v z dz dz &= -\frac{2+v}{6}, \quad \int_0^{-1} \int_0^z v dz dz = \frac{1}{2} v. \end{aligned}$$

Подставим их в уравнения (2.7)

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 w_0''' E_1 \frac{1}{2} - \varepsilon^2 \tau_0'' \frac{2+v}{2} - \varepsilon^2 u_0'' E_1 - v \varepsilon \sigma_{z_0}' + \tau_0 &= X_+, \\ \varepsilon^3 w_0''' E_2 \frac{1}{2} - \varepsilon^2 \tau_0'' \frac{2+v}{2} + \varepsilon^2 u_0'' E_2 + v \varepsilon \sigma_{z_0}' + \tau_0 &= X_-, \\ -\varepsilon^4 w_0'''' E_1 \frac{1}{6} + \varepsilon^3 \tau_0''' \frac{2+v}{6} + \varepsilon^3 u_0''' E_1 \frac{1}{2} + v \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' \frac{1}{2} - \varepsilon \tau_0' + \sigma_{z_0} &= Z_+, \\ \varepsilon^4 w_0'''' E_2 \frac{1}{6} - \varepsilon^3 \tau_0''' \frac{2+v}{6} + \varepsilon^3 u_0''' E_2 \frac{1}{2} + v \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' \frac{1}{2} + \varepsilon \tau_0' + \sigma_{z_0} &= Z_-. \end{aligned}$$

Проведем попарное сложение и вычитание первых двух и последних двух уравнений, меняя порядок записи уравнений. Получим

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 w_0''' \frac{1}{2} (E_1 + E_2) - (2+v) \varepsilon^2 \tau_0'' - \varepsilon^2 u_0'' (E_1 - E_2) + 2\tau_0 &= X_+ + X_-, \\ -\varepsilon^4 w_0'''' \frac{1}{6} (E_1 + E_2) + \frac{1}{3} (2+v) \varepsilon^3 \tau_0''' + \varepsilon^3 u_0''' \frac{1}{2} (E_1 - E_2) - 2\varepsilon \tau_0' &= Z_+ - Z_-, \\ \varepsilon^3 w_0''' \frac{1}{2} (E_1 - E_2) - \varepsilon^2 u_0'' (E_1 + E_2) - 2v \varepsilon \sigma_{z_0}' &= X_+ - X_-, \end{aligned}$$

$$-\varepsilon^4 w_0'''' \frac{1}{6} (E_1 - E_2) + \frac{1}{2} \varepsilon^3 u_0'''' (E_1 + E_2) + \nu \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' + 2\sigma_{z_0} = Z_+ + Z_-.$$

Принимаем в соответствии с описанием метода SVPB [191] в первой паре уравнений  $\tau_0$  как сумму двух составляющих  $\tau_0 = \tau_0^s + \tau_0^q$ , где  $\tau_0^s$  – медленно меняющаяся функция,  $\tau_0^q$  – быстро меняющаяся функция. Отметим характерные особенности этих функций. Медленно меняющуюся функцию называют функцию, применение к которой оператора  $d/dx$  не меняет ее асимптотического порядка по  $\varepsilon$ . Быстро меняющуюся функцию называют такую, применение к которой оператора  $\varepsilon(d/dx)$  также не меняет ее асимптотического порядка по  $\varepsilon$ . Для их определения справедливы соотношения [12]

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 w_0'''' \frac{1}{2} (E_1 + E_2) - (2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0^{s''} - (2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0^{q''} - \varepsilon^2 u_0'' (E_1 - E_2) + 2\tau_0^s + 2\tau_0^q &= X_+ + X_-, \\ -\varepsilon^4 w_0'''' \frac{1}{6} (E_1 + E_2) + \frac{1}{3} (2 + \nu) \varepsilon^3 \tau_0^{s''''} + (2 + \nu) \varepsilon^3 \tau_0^{q''''} + \varepsilon^3 u_0'''' \frac{1}{2} (E_1 - E_2) - \\ - 2\varepsilon \tau_0^{s'} - 2\varepsilon \tau_0^{q'} &= (Z_+ - Z_-). \end{aligned}$$

Запишем приведенные соотношения отдельно для быстро меняющихся

$$\begin{aligned} -(2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0^{q''} + 2\tau_0^q &= 0; \\ (2 + \nu) \varepsilon^3 \tau_0^{q''''} - 6\varepsilon \tau_0^{q'} &= 0, \end{aligned} \tag{2.9}$$

и медленно меняющихся неизвестных

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 w_0^{s''''} \frac{1}{2} (E_1 + E_2) - \varepsilon^2 u_0^{s''} (E_1 - E_2) + 2\tau_0^s &= X_+ + X_-, \\ -\varepsilon^4 w_0^{s''''} \frac{1}{6} (E_1 + E_2) + \varepsilon^3 u_0^{s''''} \frac{1}{2} (E_1 - E_2) - 2\varepsilon \tau_0^{s'} &= Z_+ - Z_-, \\ \varepsilon^3 w_0^{s''''} \frac{1}{2} (E_1 - E_2) - \varepsilon^2 u_0^{s''} (E_1 + E_2) - 2\nu \varepsilon \sigma_{z_0}^{s'} &= X_+ - X_-, \\ -\varepsilon^4 w_0^{s''''} \frac{1}{6} (E_1 - E_2) + \frac{1}{2} \varepsilon^3 u_0^{s''''} (E_1 + E_2) + 2\sigma_{z_0}^s &= Z_+ + Z_-. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Два первых уравнений дают

$$\varepsilon^4 w_0^{s''''} \frac{1}{3} (E_1 + E_2) - \varepsilon^3 u_0^{s'''} \frac{1}{2} (E_1 - E_2) = (Z_+ - Z_-) + \varepsilon (X_+' + X_-').$$

Из четвертого уравнения следует, что  $\sigma_{z_0}^s \sim \varepsilon^3 u_0^s \wedge \varepsilon^4 w_0^s$ . Поэтому в третьем уравнении величина  $2\nu\varepsilon\sigma_{z_0}^{s'}$   $\sim \varepsilon^4 u_0^s \wedge \varepsilon^6 w_0^s$ , и по сравнению с главными членами может быть отброшена как малая второго порядка. Тогда уравнение преобразуется к виду

$$\varepsilon^3 w_0^{s'''} \frac{1}{2} (E_1 - E_2) - \varepsilon^2 u_0^{s''} (E_1 + E_2) = X_+ - X_-. \quad (2.11)$$

Уравнение с отброшенным членом  $2\nu\varepsilon\sigma_{z_0}^{s'}$  и третье из системы (10) сводятся к двум разрешающим [12]

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 \frac{1}{3} (E_1 + E_2) \left[ 1 - \frac{3(E_1 - E_2)^2}{4(E_1 + E_2)^2} \right] w_0^{s''''} = Z_+ - Z_- + \\ + \varepsilon (X_+' + X_-') - \varepsilon \frac{E_1 - E_2}{2(E_1 + E_2)} (X_+' - X_-'), \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\varepsilon^2 u_0^{s''} (E_1 + E_2) = \varepsilon^3 w_0^{s'''} \frac{1}{2} (E_1 - E_2) - (X_+ - X_-). \quad (2.13)$$

Отбросим в уравнении (2.12) производные от продольной нагрузки, принимая  $Z_- = 0, Z_+ = q, E_1 = E_2 = E, w_0^s = y$ , получаем классическое уравнение изгиба изотропной балки  $\varepsilon^4 \frac{2}{3} E y'''' = q$ , нагруженной распределенной нагрузкой  $q$ , где  $w_0^s$  – перемещение поперечного сечения полосы как жесткого целого для фиксированного значения аргумента  $z$ , – заменено величиной прогиба оси балки  $y$ .

Неизвестные  $\sigma_{z_0}^s$  и  $\tau_0^s$  находятся из первого и четвертого уравнений системы (2.10)

$$2\sigma_{z_0}^s = Z_+ + Z_- + \varepsilon^4 w_0^{s''''} \frac{1}{6} (E_1 - E_2) - \frac{1}{2} \varepsilon^3 u_0^{s'''} (E_1 + E_2), \quad (2.14)$$

$$2\tau_0^s = X_+ + X_- - \varepsilon^3 w_0^{s''''} \frac{1}{2} (E_1 + E_2) + \varepsilon^2 u_0^{s''} (E_1 - E_2).$$

прямыми действиями без интегрирования.

Асимптотические оценки искомых величин (при  $X_+ = X_- = 0$ ) вытекают из уравнений (2.12)–(2.14) в виде

$$w_0^s \sim \varepsilon^{-4} Z, u_0^s \sim \varepsilon w_0^s \wedge \varepsilon^{-3} Z, \sigma_{z_0}^s \sim Z, \tau_0^s \sim \varepsilon^3 w_0^{s''''}. \quad (2.15)$$

Для уравнений (2.12), (2.13) сформулируем условия на концах полосы  $x=0$  и  $x=1$ . Принимаем их как условия жесткого защемления: перемещения  $u = w = 0$  в каждой точке  $z \in [-1; 1]$  поперечного края. С учетом формул (2.7) получим условия на концах полосы

$$\begin{aligned} u_{(0)} \Big|_{x=0,1} &= -\varepsilon w_0' z + 2(1+\nu)\tau_0 \int_0^z \frac{1}{E} dz + u_0 = 0, \\ w_{(1)} \Big|_{x=0,1} &= \varepsilon^2 w_0'' \int_0^z \nu z dz - \varepsilon \tau_0' \left[ \int_0^z \frac{1-\nu^2}{E} z dz + \int_0^z \nu \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz \right] + \\ &+ \sigma_{z_0} \int_0^z \frac{1-\nu^2}{E} dz - \varepsilon u_0' \int_0^z \nu dz + w_0 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда зададим перемещения:

при  $z \geq 0$

$$-\varepsilon w_0' z + \frac{2(1+\nu)}{E^+} \tau_0 z + u_0 = 0, \quad (2.16)$$

$$\nu \varepsilon^2 w_0'' \frac{z^2}{2} - \varepsilon \tau_0' \frac{(1+\nu)^2}{E^+} \frac{z^2}{2} + \sigma_{z_0} \frac{1-\nu^2}{E^+} z - \nu \varepsilon u_0' z + w_0 = 0;$$

при  $z \leq 0$

$$\varepsilon w_0' z - \frac{2(1+\nu)}{E^-} \tau_0 z + u_0 = 0, \quad (2.17)$$

$$\nu \varepsilon^2 w_0'' \frac{z^2}{2} - \varepsilon \tau_0' \frac{(1+\nu)^2}{E^-} \frac{z^2}{2} - \sigma_{z_0} \frac{1-\nu^2}{E^-} z + \nu \varepsilon u_0' z + w_0 = 0.$$

Потребуем обращения каждого коэффициента при различных степенях  $z$  в ноль в выражениях (2.16) и (2.17). Получим:

при  $z \geq 0$

$$u_0 = 0, \quad (2.18)$$

$$-\varepsilon w_0' + \frac{2(1+\nu)}{E^+} \tau_0 = 0, \quad (2.19)$$

$$w_0 = 0, \quad (2.20)$$

$$\sigma_{z0} \frac{1-\nu^2}{E^+} - \nu \varepsilon u_0' = 0, \quad (2.21)$$

$$\nu \varepsilon^2 w_0'' - \varepsilon \tau_0' \frac{(1+\nu)^2}{E^+} = 0; \quad (2.22)$$

при  $z \leq 0$

$$u_0 = 0, \quad (2.23)$$

$$\varepsilon w_0' - \frac{2(1+\nu)}{E^-} \tau_0 = 0, \quad (2.24)$$

$$w_0 = 0, \quad (2.25)$$

$$-\sigma_{z0} \frac{1-\nu^2}{E^-} + \nu \varepsilon u_0' = 0, \quad (2.26)$$

$$\nu \varepsilon^2 w_0'' - \varepsilon \tau_0' \frac{(1+\nu)^2}{E^-} = 0. \quad (2.27)$$

Перепишем условия (2.19), (2.20) с учетом  $\tau_0 = \tau_0^s + \tau_0^q$ . Получим

$$-\varepsilon w_0' + \frac{2(1+\nu)}{E^+} (\tau_0^s + \tau_0^q) = 0, \quad (2.28)$$

$$\nu \varepsilon^2 w_0'' - \varepsilon (\tau_0^{s'} + \tau_0^{q'}) \frac{(1+\nu)^2}{E^+} = 0. \quad (2.29)$$

На основании последней оценки из (2.15) члены с  $\tau_0^s$  могут быть отброшены как малые второго порядка по сравнению с главными в обоих уравнениях. Однако, заметим, что  $\tau_0^q$  и  $\varepsilon \tau_0^{q'}$  являются величинами одного порядка. Чтобы уравнения (2.28) и (2.29) были совместными, принимаем  $\tau_0^q \sim \varepsilon^2 w_0$ . Отсюда, соответственно, будет  $\varepsilon \tau_0^{q'} \sim \varepsilon^2 w_0$ . Член  $\tau_0^q$  в уравнении (2.28) отбросим как

малый по сравнению с первым  $\varepsilon w_0'$ . Полученная оценка быстро меняющейся неизвестной принимает вид

$$\varepsilon \tau_0^{q'} \sim \varepsilon^2 w_0 \vee \varepsilon^{-2} Z. \quad (2.30)$$

Тем самым, дополняет ранее полученные оценки (2.15) для медленно меняющихся неизвестных. Окончательно перепишем условия (2.28) и (2.29) при  $z \geq 0$  следующим образом

$$w_0' = 0, \quad (2.31)$$

$$\varepsilon^2 \nu w_0'' - \varepsilon \tau_0^{q'} \frac{(1+\nu)^2}{E^+} = 0. \quad (2.32)$$

Аналогично рассуждения справедливы для условий (2.24) и (2.27) при  $z \leq 0$ .

Условия (2.20), (2.25), (2.31) при  $x=0;1$  имеют одну и ту же запись и при  $z \geq 0$ , и при  $z \leq 0$ , образуя таким образом вместе с уравнением (2.12) разрешимую  $w$ -задачу. Считая, что верхний край  $z=1$  несет только равномерно распределенную нагрузку  $Z_+ = p$ , получим решение для  $w$ -задачи в виде

$$w_0^s = \frac{p}{\varepsilon^4 C} \left( \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{24} \right).$$

Для  $u$ -задачи решение, сформированное из уравнения (2.13) с условиями (2.18) и (2.24), имеет вид

$$u_0^s = \frac{p}{\varepsilon^3 C} \frac{E_1 - E_2}{2(E_1 + E_2)} \left( \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12} \right).$$

Тогда, при известных  $w_0^s$  и  $u_0^s$  выражения (2.14) запишем в виде

$$2\sigma_{z0}^s = p - \frac{1}{12} \frac{p}{C} (E_1 - E_2),$$

$$2\tau_0^s = -\frac{p}{2\varepsilon C} \left( x - \frac{1}{2} \right) (E_1 + E_2) \left[ 1 + \frac{(E_1 - E_2)^2}{(E_1 + E_2)^2} \right].$$

Вклад величины  $\sigma_{z0}^s \sim \varepsilon^0 Z$  в выполнении условий (2.21), (2.26) в рассматриваемом приближении по сравнению с величиной  $\varepsilon u_0' = \varepsilon^{-3} Z$

пренебрежим [12]. Покажем, что условия  $u_0' = 0$  можно выполнить в следующем приближении, где появиться еще одно быстроменяющееся решение  $u_0^q$ .

Условия вида (2.32) выполняются за счет величины краевого эффекта  $\tau_0^q$ . Данная величина является решением первого уравнения (2.9), которое представим в общем виде [11]

$$\tau_0^q = \begin{cases} C_1 \exp(-kx / \varepsilon) & \text{при } x = 0 \\ C_2 \exp(k(1-x) / \varepsilon) & \text{при } x = 1 \end{cases}, k^2 = 2 / (2 + \nu). \quad (2.33)$$

Отсюда имеем:

для участка края  $x = 0, z \geq 0$

$$\tau_0^{q+} = C_1^+ \exp(-kx / \varepsilon);$$

для участка края  $x = 0, z \leq 0$

$$\tau_0^{q-} = C_1^- \exp(-kx / \varepsilon).$$

Подставив  $\varepsilon \tau_0^{q+}$  и  $\varepsilon \tau_0^{q-}$  в условие (2.32), получим коэффициенты

$$C_1^+ = -\frac{\nu p E^+}{12 \varepsilon^2 C k (1 + \nu) (1 - \nu + 2 \nu E^+)},$$

$$C_1^- = -\frac{\nu p E^-}{12 \varepsilon^2 C k (1 + \nu) (1 - \nu + 2 \nu E^-)}.$$

Подставив коэффициенты  $C_1^+$  и  $C_1^-$  в выражение (2.33) для  $\tau_0^q$ , запишем выражение для краевого эффекта

$$\tau_0^q = -\frac{\nu p}{12 \varepsilon^2 C k (1 + \nu)} \exp\left(-\frac{kx}{\varepsilon}\right) \begin{cases} \frac{E_+}{1 - \nu + 2 \nu E^+} \\ \frac{E_-}{1 - \nu + 2 \nu E^-} \end{cases}$$

на заземленном краю  $x = 0$ .

Решение для краевого эффекта на краю  $x = 1$  записывается аналогично.

Из последней формулы следует асимптотическая оценка краевого эффекта

$$\tau_0^q \sim \varepsilon^{-2} p. \quad (2.34)$$

Наибольший вклад краевого эффекта имеет место в напряжении  $\sigma_x$ . Вкладом краевого эффекта в остальные искомые величины пренебрегаем [191]. Тогда для  $\sigma_x$  получим формулы в виде

при  $z \geq 0$

$$\begin{aligned} \sigma_{x(0)} = & -E^+ \frac{p}{\varepsilon^2 C} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right) z + \varepsilon \tau_0^{q+} (2 + \nu) z + \\ & + E^+ \frac{p}{\varepsilon^2 C} \frac{E_1 - E_2}{2(E_1 + E_2)} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right) + \nu \sigma_{z_0}; \end{aligned}$$

при  $z \leq 0$

$$\begin{aligned} \sigma_{x(0)} = & -E^- \frac{p}{\varepsilon^2 C} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right) z + \varepsilon \tau_0^{q-} (2 + \nu) z + \\ & + E^- \frac{p}{\varepsilon^2 C} \frac{E_1 - E_2}{2(E_1 + E_2)} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right) + \nu \sigma_{z_0}. \end{aligned}$$

Это дает вклад, соизмеримый с первым членом в силу условия (2.32). Их этих выражений следует оценка  $\tau_0^{q+} \wedge \tau_0^{q-} \sim \varepsilon^{-2} p$ .

Подстановкой вычисленных величин  $w_0^s$ ,  $u_0^s$ ,  $\tau_0^s$ ,  $\sigma_{z_0}$  в формулы (2.5) получим выражения для остальных неизвестных задачи (напряжений, деформаций и перемещений)

$$\begin{aligned} u_{(0)} = & -\frac{p}{\varepsilon^3 C} \left( \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12} \right) z + \tau_0 \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz + \frac{p}{\varepsilon^3 C} \frac{E_1 - E_2}{2(E_1 + E_2)} \left( \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12} \right), \\ \varepsilon_{x(0)} = & -\frac{p}{\varepsilon^2 C} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right) z + \varepsilon \tau_0' \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz + \frac{p}{\varepsilon^2 C} \frac{E_1 - E_2}{2(E_1 + E_2)} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right), \\ \sigma_{z(0)} = & -\varepsilon \tau_0' z + \frac{p}{2} \left( 1 - \frac{E_1 - E_2}{12C} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{x(0)} &= -E \frac{p}{\varepsilon^2 C} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right) z + \varepsilon \tau_0^{q'} (2 + \nu) z + E \frac{p}{\varepsilon^2 C} \frac{E_1 - E_2}{2(E_1 + E_2)} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right) + \\
&\quad + \nu p \left( 1 - \frac{E_1 - E_2}{12C} \right), \\
\varepsilon_{z(0)} &= \nu \frac{p}{\varepsilon^2 C} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right) z - \varepsilon \tau_0' \left[ \nu \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz - \frac{1-\nu^2}{E} z \right] - \\
&\quad - \nu \frac{p}{\varepsilon^2 C} \frac{E_1 - E_2}{2(E_1 + E_2)} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right) + \frac{1-\nu^2}{E} p \left( 1 - \frac{E_1 - E_2}{12C} \right), \\
w_{(1)} &= \frac{p}{\varepsilon^2 C} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right) \int_0^z \nu z dz - \varepsilon \tau_0' \left[ \int_0^z \frac{1-\nu^2}{E} z dz + \int_0^z \nu \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz \right] + \\
&+ \frac{p}{2} \left( 1 - \frac{E_1 - E_2}{12C} \right) \int_0^z \frac{1-\nu^2}{E} dz - \frac{p}{\varepsilon^2 C} \frac{E_1 - E_2}{2(E_1 + E_2)} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right) \int_0^z \nu dz + \frac{p}{\varepsilon^4 C} \left( \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{24} \right), \\
\tau_{(1)} &= \frac{p}{\varepsilon C} \left( x - \frac{1}{2} \right) \int_0^z E z dz - \varepsilon^2 \tau_0'' \left[ \int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^z \nu z dz \right] - \\
&\quad - \frac{p}{\varepsilon C} \frac{E_1 - E_2}{2(E_1 + E_2)} \left( x - \frac{1}{2} \right) \int_0^z E dz + \tau_0(x), \\
\sigma_{z(1)} &= -\varepsilon^4 w_0'''' \int_0^z \int_0^z E z dz dz + \varepsilon^3 \tau_0''' \left[ \int_0^z \int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz dz - \int_0^z \int_0^z \nu z dz dz \right] + \\
&\quad + \frac{p}{C} \frac{E_1 - E_2}{2(E_1 + E_2)} \int_0^z \int_0^z E dz dz - \varepsilon \tau_0' z + \frac{p}{2} \left( 1 - \frac{E_1 - E_2}{12C} \right).
\end{aligned}$$

### 2.3.2. Двухслойная полоса со слоями различной толщины

Случай полосы, состоящей из двух слоев различной толщины, иллюстрируется Рис. 2.2.

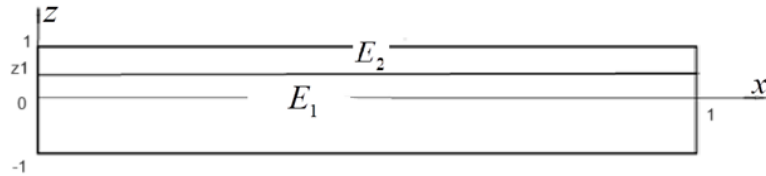


Рис. 2.2. Полоса из двух слоев различной толщины

Полоса сформирована из нижнего слоя при  $-1 \leq z \leq z_1$ ,  $0 \leq x \leq 1$  с

жесткостью  $E_1$  и верхнего слоя при  $z_1 \leq z \leq 1$ ,  $0 \leq x \leq 1$  жесткостью  $E_2$ . Принимаем  $E_1$  и  $E_2$  константами, определяющими значения функции  $E(z)$  по слоям,  $E_1, E_2 \sim \varepsilon^0$ . Для сокращения вычислений положим опять  $\nu = const$  во всей полосе.

Вычислим интегральные коэффициенты (2.8) при искомым неизвестных  $w_0$ ,  $u_0$ ,  $\tau_0$  и  $\sigma_{z_0}$ , входящие в уравнения (2.7):

при  $z \geq 0$

$$\int_0^1 E z dz = (E_1 - E_2) \frac{z_1^2}{2} + E_2 \frac{1}{2}, \int_0^1 E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^1 \nu z dz = \frac{2+\nu}{2}, \int_0^1 \int_0^z \nu dz dz = \frac{1}{2} \nu,$$

$$\int_0^1 E dz = (E_1 - E_2) z_1 + E_2, \int_0^1 \nu dz = \nu, \int_0^1 \int_0^z E z dz dz = (E_1 - E_2) \left( \frac{z_1^2}{2} - \frac{z_1^3}{3} \right) + E_2 \frac{1}{6},$$

$$\int_0^1 \int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz dz - \int_0^1 \int_0^z \nu z dz dz = \frac{2+\nu}{6}, \int_0^1 \int_0^z E dz dz = \frac{1}{2} (E_1 - E_2) (2 - z_1) z_1 + E_2 \frac{1}{2};$$

при  $z \leq 0$

$$\int_0^{-1} E z dz = \frac{1}{2} E_1, \int_0^{-1} E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^{-1} \nu z dz = \frac{2+\nu}{2}, \int_0^{-1} E dz = -E_1,$$

$$\int_0^{-1} \nu dz = -\nu \int_0^{-1} \int_0^z \nu dz dz = \frac{1}{2} \nu, \int_0^{-1} \int_0^z E z dz dz = -\frac{1}{6} E_1,$$

$$\int_0^{-1} \int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz dz - \int_0^{-1} \int_0^z \nu z dz dz = -\frac{2+\nu}{6}, \int_0^{-1} \int_0^z E_1 dz dz = \frac{1}{2} E_1.$$

Подставим их в уравнения (2.7), выполняя граничные условия (2.6) на лицевых поверхностях полосы  $z^* = \pm h$ . Получим

$$\varepsilon^3 w_0''' \left[ (E_1 - E_2) \frac{z_1^2}{2} + E_2 \frac{1}{2} \right] - \varepsilon^2 \tau_0'' \frac{2+\nu}{2} - \varepsilon^2 u_0'' \left[ (E_1 - E_2) z_1 + E_2 \right] - \nu \varepsilon \sigma_{z_0}' + \tau_0 = X_+,$$

$$\varepsilon^3 w_0''' E_1 \frac{1}{2} - \varepsilon^2 \tau_0'' \frac{2+\nu}{2} + \varepsilon^2 u_0'' E_1 + \nu \varepsilon \sigma_{z_0}' + \tau_0 = X_-,$$

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon^4 w_0'''' \left[ (E_1 - E_2) \left( \frac{z_1^2}{2} - \frac{z_1^3}{3} \right) + E_2 \frac{1}{6} \right] + \varepsilon^3 \tau_0''' \frac{2+\nu}{6} + \\
& + \varepsilon^3 u_0''' \left[ \frac{1}{2} (E_1 - E_2) (2 - z_1) z_1 + E_2 \frac{1}{2} \right] + \nu \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' \frac{1}{2} - \varepsilon \tau_0' + \sigma_{z_0} = Z_+, \\
& \varepsilon^4 w_0'''' E_1 \frac{1}{6} - \varepsilon^3 \tau_0''' \frac{2+\nu}{6} + \varepsilon^3 u_0''' E_1 \frac{1}{2} + \nu \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' \frac{1}{2} + \varepsilon \tau_0' + \sigma_{z_0} = Z_-.
\end{aligned}$$

Как и ранее, сложим и вычтем их попарно, изменив порядок записи, получим следующие уравнения

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^3 w_0''' \left[ (E_1 - E_2) \frac{z_1^2}{2} + (E_1 + E_2) \frac{1}{2} \right] - (2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0'' - \varepsilon^2 u_0'' (E_1 - E_2) (z_1 + 1) + \\
& \quad + 2\tau_0 = X_+ + X_-, \\
& -\varepsilon^4 w_0'''' \left[ (E_1 - E_2) \left( \frac{z_1^2}{2} - \frac{z_1^3}{3} \right) + (E_1 + E_2) \frac{1}{6} \right] + \varepsilon^3 \tau_0''' \frac{2+\nu}{3} + \\
& \quad + \varepsilon^3 u_0''' \frac{1}{2} (E_1 - E_2) (2z_1 - z_1^2 - 1) - 2\varepsilon \tau_0' = Z_+ - Z_-, \\
& \varepsilon^3 w_0''' (E_1 - E_2) \left( \frac{z_1^2}{2} - \frac{1}{2} \right) - \varepsilon^2 u_0'' [(E_1 - E_2) z_1 - (E_1 - E_2)] - 2\nu \varepsilon \sigma_{z_0}' = X_+ - X_-, \\
& -\varepsilon^4 w_0'''' (E_1 - E_2) \left( \frac{z_1^2}{2} - \frac{z_1^3}{3} - \frac{1}{6} \right) + \varepsilon^3 u_0''' \frac{1}{2} [(E_1 - E_2) (2 - z_1) z_1 + E_1 + E_2] + \\
& \quad + \nu \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' + 2\sigma_{z_0} = Z_+ + Z_-.
\end{aligned}$$

В первой паре уравнений примем  $\tau_0 = \tau_0^s + \tau_0^q$ . Тогда

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^3 w_0''' \frac{1}{2} [(E_1 - E_2) z_1^2 + (E_1 + E_2)] - (2 + \nu) \varepsilon^2 (\tau_0^{s''} + \tau_0^{q''}) - \\
& - \varepsilon^2 u_0'' [(E_1 - E_2) z_1 + E_1 + E_2] + 2(\tau_0^s + \tau_0^q) = X_+ + X_-, \\
& -\varepsilon^4 w_0'''' \left[ (E_1 - E_2) \left( \frac{z_1^2}{2} - \frac{z_1^3}{3} \right) + (E_1 + E_2) \frac{1}{6} \right] + \frac{2+\nu}{3} \varepsilon^3 (\tau_0^{s'''} + \tau_0^{q'''}) + \\
& \quad + \varepsilon^3 u_0''' \frac{1}{2} (E_1 - E_2) (2z_1 - z_1^2 - 1) - 2\varepsilon (\tau_0^{s'} + \tau_0^{q'}) = Z_+ - Z_-.
\end{aligned}$$

Запишем их отдельно для неизвестных:

быстро меняющихся

$$-(2+\nu)\varepsilon^2\tau_0^{q''} + 2\tau_0^q = 0,$$

$$(2+\nu)\varepsilon^3\tau_0^{q'''} - 6\varepsilon\tau_0^{q'} = 0;$$

медленно меняющихся

$$\varepsilon^3 w_0^{s''''} \left[ (E_1 - E_2) \frac{z_1^2}{2} + (E_1 + E_2) \frac{1}{2} \right] - \varepsilon^2 u_0^{s''} [(E_1 - E_2)z_1 + E_1 + E_2] + \quad (2.35)$$

$$+ 2\tau_0^s = X_+ + X_-,$$

$$-\varepsilon^4 w_0^{s''''} \left[ (E_1 - E_2) \left( \frac{z_1^2}{2} - \frac{z_1^3}{3} \right) + (E_1 + E_2) \frac{1}{6} \right] + \quad (2.36)$$

$$+ \varepsilon^3 u_0^{s''''} \frac{1}{2} (E_1 - E_2) (2z_1 - z_1^2 - 1) - 2\varepsilon\tau_0^{s'} = Z_+ - Z_-,$$

$$\varepsilon^3 w_0^{s''''} \frac{1}{2} (E_1 - E_2) (z_1^2 - 1) - \varepsilon^2 u_0^{s''} [(E_1 - E_2)z_1 + (E_1 + E_2)] - \quad (2.37)$$

$$- 2\nu\varepsilon\sigma_{z_0}^{s'} = X_+ - X_-,$$

$$-\varepsilon^4 w_0^{s''''} (E_1 - E_2) \left( \frac{z_1^2}{2} - \frac{z_1^3}{3} - \frac{1}{6} \right) + \varepsilon^3 u_0^{s''''} [(E_1 - E_2)(2 - z_1)z_1 + (E_1 + E_2)] + \quad (2.38)$$

$$+ 2\sigma_{z_0}^s = Z_+ + Z_-.$$

Первое уравнение продифференцируем по координате  $x$  и умножим на  $\varepsilon$ .

Далее исключим  $\tau_0^{s'}$  из первых двух. Получим

$$\varepsilon^4 w_0^{s''''} \left[ (E_1 + E_2) + (E_1 - E_2) \frac{1}{3} \left( z_1^3 - \frac{z_1^2}{2} \right) \right] + \quad (2.39)$$

$$+ \varepsilon^3 u_0^{s''''} \left[ (E_1 - E_2) \left( 2z_1 - \frac{z_1^2}{2} - \frac{1}{2} \right) - (E_1 + E_2) \right] = (Z_+ - Z_-) + \varepsilon (X_+' + X_-' ).$$

Аналогично предыдущему параграфу сделаем выводы о том, что из четвертого уравнения (2.38) следует, что  $\sigma_{z_0}^s \sim \varepsilon^3 u_0^s \wedge \varepsilon^4 w_0^s$ . Поэтому в уравнении (2.37) величину  $\nu\varepsilon\sigma_{z_0}^{s'} \sim \varepsilon^4 u_0^s \wedge \varepsilon^6 w_0^s$  отбросим как малую второго порядка по сравнению с главными членами. Тогда уравнение (2.37) преобразуем в виду

$$\varepsilon^3 w_0^{s''''} \frac{1}{2} (E_1 - E_2) (z_1^2 - 1) - \varepsilon^2 u_0^{s''} [(E_1 - E_2) z_1 + (E_1 + E_2)] = X_+ - X_-,$$

которое с отброшенным членом  $2\nu\varepsilon\sigma_{z_0}^s$  вместе с уравнением (2.39) сведем к двум разрешающим

$$\varepsilon^2 u_0^{s''} [(E_1 - E_2) z_1 + (E_1 + E_2)] = \varepsilon^3 w_0^{s''''} \frac{1}{2} (E_1 - E_2) (z_1^2 - 1) - (X_+ - X_-), \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 C w_0^{s''''} &= (Z_+ - Z_-) + \varepsilon (X_+' + X_-' ) + \\ &+ \left[ (E_1 - E_2) \left( 2z_1 - \frac{z_1^2}{2} - \frac{1}{2} \right) - (E_1 + E_2) \right] \frac{\varepsilon (X_+' - X_-')}{(E_1 - E_2) z_1 + (E_1 + E_2)}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Здесь

$$\begin{aligned} C &= (E_1 + E_2) + (E_1 - E_2) \frac{1}{3} \left( z_1^3 - \frac{z_1^2}{2} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ (E_1 - E_2) \left( 2z_1 - \frac{z_1^2}{2} - \frac{1}{2} \right) - (E_1 + E_2) \right] \frac{(E_1 - E_2) (z_1^2 - 1)}{(E_1 - E_2) z_1 + (E_1 + E_2)}. \end{aligned}$$

Отметим, что уравнения (2.40), (2.41) и (2.12), (2.13) одинаковы по смыслу [12]. Неизвестные  $\sigma_{z_0}^s$  и  $\tau_0^s$  находим из уравнений системы (2.37) и (2.38) прямыми действиями без интегрирования. Имеем

$$\begin{aligned} 2\tau_0^s &= X_+ + X_- - \varepsilon^3 w_0^{s''''} \left[ (E_1 - E_2) \frac{z_1^2}{2} + (E_1 + E_2) \frac{1}{2} \right] + \\ &+ \varepsilon^2 u_0^{s''} [(E_1 - E_2) z_1 + E_1 + E_2], \\ 2\sigma_{z_0}^s &= Z_+ + Z_- + \varepsilon^4 w_0^{s''''} (E_1 - E_2) \left( \frac{z_1^2}{2} - \frac{z_1^3}{3} - \frac{1}{6} \right) - \\ &- \varepsilon^3 u_0^{s''} [(E_1 - E_2) (2 - z_1) z_1 + (E_1 + E_2)]. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Отметим также, что и в этом случае остаются справедливыми оценки основных неизвестных  $w_0^s, u_0^s, \tau_0^s, \sigma_{z_0}^s$ , вычисленными по формулам (2.15). Решение уравнений (2.40) и (2.41) находим, как и прежде, (предыдущий параграф), при соответствующих граничных условиях.

## 2.4. Полоса с произвольным количеством слоев различной толщины

### 2.4.1. Выполнение условий на длинных сторонах

Полоса с произвольным количеством слоев различной толщины иллюстрируется Рис. 2.3. Как и прежде, полосу отнесем к системе безразмерных прямоугольных координат  $x, z$ . Считаем, что верхняя часть полосы при  $0 \leq z \leq 1$  состоит из  $n$  слоев различных толщин и различных жесткостей  $E_i$  (значения безразмерной ступенчатой функции  $E(z)$ ),  $i = 1 \div n$ . Границы верхних слоев задаем координатами  $z_i = \{z_0, \dots, z_n\}$ , положив  $z_0 = 0$ ,  $z_n = 1$ . Считаем также, что нижняя часть полосы  $-1 \leq z \leq 0$  состоит из  $m$  слоев различных толщин и различных жесткостей  $E_i$ ,  $i = 1 \div m$ . Границы нижних слоев задаем координатами  $z_i = \{-z_0, \dots, -z_m\}$ , положив  $z_m = -1$ .

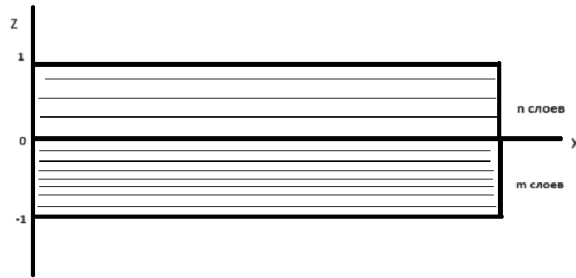


Рис. 2.3. Полоса с произвольным количеством слоев различной толщины

Решение системы уравнений (2.7) включает вычисление коэффициентов (2.8) для случая произвольного числа слоев. В предположении, что коэффициент Пуассона  $\nu$  не зависит от координаты  $z$ , необходимо вычислить четыре коэффициента  $\int_0^1 Edz$ ,  $\int_0^1 Ezdz$ ,  $\int_0^1 \int_0^z Edzdz$ ,  $\int_0^1 \int_0^z Ezdzdz$  для верхней части полосы и соответственно – четыре коэффициента  $\int_0^{-1} Edz$ ,  $\int_0^{-1} Ezdz$ ,  $\int_0^{-1} \int_0^z Edzdz$ ,  $\int_0^{-1} \int_0^z Ezdzdz$  для нижней.

Введем обозначения искомых коэффициентов и запишем соответственно для них следующие формулы [12]

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_z^+ &= \int_0^1 E z dz = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n E_i h_i^2, \quad \tilde{E}^+ = \int_0^1 E dz = \sum_{i=1}^n E_i h_i, \quad \tilde{E}_z^- = \int_0^{-1} E z dz = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m E_i h_i^2, \\
\tilde{E}^- &= \int_0^{-1} E dz = -\sum_{i=1}^m E_i h_i, \\
\tilde{\tilde{E}}_z^+ &= \int_0^1 \int_0^z E z dz dz = \sum_{i=1}^n E_i \left[ \frac{z_i^3}{6} - \frac{z_{i-1}^3}{6} - \frac{z_{i-1}^2}{2} h_i \right] + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-j} E_i h_{i+1} \left( \frac{z_i^2}{2} - \frac{z_{i-1}^2}{2} \right), \\
\tilde{\tilde{E}}^+ &= \int_{z_0}^1 \int_{z_0}^z E dz dz = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n E_i h_i^2 + \sum_{j=1}^{n-2} E_j h_j \sum_{i=j+1}^{n-1} h_i + h_n \sum_{i=1}^{n-1} E_i h_i, \\
\tilde{\tilde{E}}_z^- &= \int_0^{-1} \int_0^z E z dz dz = -\sum_{i=1}^m E_i \left[ \left( \frac{z_i^3}{6} - \frac{z_{i-1}^3}{6} \right) - \frac{z_{i-1}^2}{2} h_i \right] - \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{m-j} E_i h_{i+1} \left( \frac{z_i^2}{2} - \frac{z_{i-1}^2}{2} \right), \\
\tilde{\tilde{E}}^- &= \int_{z_0}^{-1} \int_{z_0}^z E dz dz = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m E_i h_i^2 + \sum_{j=1}^{m-2} E_j h_j \sum_{i=j+1}^{m-1} h_i + h_n \sum_{i=1}^{m-1} E_i h_i.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Перепишем уравнения (2.7) через введенные обозначения для интегральных коэффициентов. Получим

$$\varepsilon^3 w_0''' \tilde{E}_z^+ - \varepsilon^2 \tau_0'' \frac{1}{2} (2 + \nu) - \varepsilon^2 u_0'' \tilde{E}^+ - \nu \varepsilon \sigma_{z_0}' + \tau_0 = X_+, \tag{2.44}$$

$$\varepsilon^3 w_0''' \tilde{E}_z^- - \varepsilon^2 \tau_0'' \frac{1}{2} (2 + \nu) + \varepsilon^2 u_0'' \tilde{E}^- + \nu \varepsilon \sigma_{z_0}' + \tau_0 = X_-,$$

$$-\varepsilon^4 w_0'''' \tilde{\tilde{E}}_z^+ + \varepsilon^3 \tau_0''' \frac{1}{6} (2 + \nu) + \frac{1}{2} \varepsilon^3 u_0''' \tilde{\tilde{E}}^+ + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \nu \sigma_{z_0}'' - \varepsilon \tau_0' + \sigma_{z_0} = Z_+, \tag{2.45}$$

$$\varepsilon^4 w_0'''' \tilde{\tilde{E}}_z^- - \varepsilon^3 \tau_0''' \frac{1}{6} (2 + \nu) + \frac{1}{2} \varepsilon^3 u_0''' \tilde{\tilde{E}}^- + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \nu \sigma_{z_0}'' + \varepsilon \tau_0' + \sigma_{z_0} = Z_-.$$

Складывая первые 2 уравнения и вычитая попарно последние 2 уравнения, запишем результат в следующем порядке

$$\varepsilon^3 w_0''' (\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^-) - (2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0'' - \varepsilon^2 u_0'' (\tilde{E}^+ - \tilde{E}^-) + 2\tau_0 = X_+ + X_-, \tag{2.46}$$

$$-\varepsilon^4 w_0'''' (\tilde{\tilde{E}}_z^+ + \tilde{\tilde{E}}_z^-) + \frac{1}{3} (2 + \nu) \varepsilon^3 \tau_0''' + \varepsilon^3 u_0''' (\tilde{\tilde{E}}^+ - \tilde{\tilde{E}}^-) - 2\varepsilon \tau_0' = Z_+ - Z_-,$$

$$\varepsilon^3 w_0''' (\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-) - \varepsilon^2 u_0'' (\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-) - 2\nu \varepsilon \sigma_{z_0}' = X_+ - X_-, \tag{2.47}$$

$$-\varepsilon^4 w_0'''' \left( \tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^- \right) + \varepsilon^3 \tau_0'''' \frac{1}{3} (2 + \nu) + \varepsilon^3 u_0'''' \left( \tilde{E}^+ + \tilde{E}^- \right) + \\ + \varepsilon^2 \nu \sigma_{z_0}'' + 2\sigma_{z_0} = Z_+ + Z_-.$$

Аналогично случаю с двухслойной полосой в первой паре уравнений принимаем  $\tau_0$  как сумму функций: медленно меняющейся и быстро меняющейся  $\tau_0 = \tau_0^s + \tau_0^q$ . Тогда перепишем (2.47) в следующем виде

$$\varepsilon^3 w_0'''' \left( \tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^- \right) - (2 + \nu) \left( \varepsilon^2 \tau_0'' + \varepsilon^2 \tau_0^{q''} \right) - \varepsilon^2 u_0'' \left( \tilde{E}^+ - \tilde{E}^- \right) + 2 \left( \tau_0^s + \tau_0^q \right) = X_+ + X_-, \\ -\varepsilon^4 w_0'''' \left( \tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^- \right) + \frac{1}{3} (2 + \nu) \varepsilon^3 \left( \varepsilon^2 \tau_0^{s''''} + \varepsilon^2 \tau_0^{q''''} \right) + \\ + \varepsilon^3 u_0'''' \left( \tilde{E}^+ - \tilde{E}^- \right) - 2 \left( \varepsilon \tau_0^{s'} + \varepsilon \tau_0^{q'} \right) = Z_+ - Z_-.$$

Такой подход позволит записать соотношения для функций: быстро меняющихся

$$-(2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0^{q''} + 2\tau_0^q = 0, \\ (2 + \nu) \varepsilon^3 \tau_0^{q''''} - 6\varepsilon \tau_0^{q'} = 0; \tag{2.48}$$

медленно меняющихся

$$\varepsilon^3 w_0^{s''''} \left( \tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^- \right) - \varepsilon^2 u_0^{s''} \left( \tilde{E}^+ - \tilde{E}^- \right) + 2\tau_0^s = X_+ + X_-, \\ -\varepsilon^4 w_0^{s''''} \left( \tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^- \right) + \varepsilon^3 u_0^{s''''} \left( \tilde{E}^+ - \tilde{E}^- \right) - 2\varepsilon \tau_0^{s'} = Z_+ - Z_-, \\ \varepsilon^3 w_0^{s''''} \left( \tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^- \right) - \varepsilon^2 u_0^{s''} \left( \tilde{E}^+ + \tilde{E}^- \right) - 2\nu \varepsilon \sigma_{z_0}^{s'} = X_+ - X_-, \\ -\varepsilon^4 w_0^{s''''} \left( \tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^- \right) + \varepsilon^3 u_0^{s''''} \left( \tilde{E}^+ + \tilde{E}^- \right) + \varepsilon^2 \nu \sigma_{z_0}^{s''} + 2\sigma_{z_0}^s = Z_+ + Z_-. \tag{2.49}$$

Из первых двух уравнений получаем

$$\varepsilon^4 w_0^{s''''} \left( \tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^- - \tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^- \right) - \varepsilon^3 u_0^{s''''} \left( \tilde{E}^+ - \tilde{E}^- - \tilde{E}^+ + \tilde{E}^- \right) = \\ = Z_+ - Z_- + \varepsilon \left( X_+' + X_-' \right). \tag{2.50}$$

Сделаем вывод, аналогичный предыдущей задаче. Из четвертого уравнения,

следует, что  $\sigma_{z_0}^s \sim \varepsilon^3 u_0^s \wedge \varepsilon^4 w_0^s$ . С учетом этого в третьем уравнении величину  $2\nu\varepsilon\sigma_{z_0}^{s'}$   $\sim \varepsilon^4 u_0^s \wedge \varepsilon^6 w_0^s$  отбросим как малую второго порядка по сравнению с главными членами. Тогда уравнение

$$\varepsilon^3 w_0^{s''''} (\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-) - \varepsilon^2 u_0^{s''} (\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-) = X_+ - X_-$$

с отброшенным членом  $2\nu\varepsilon\sigma_{z_0}^{s'}$  и уравнение (2.50) сводим к двум разрешающим

$$\varepsilon^4 C w_0^{s''''} = Z_+ - Z_- + \varepsilon (X_+' + X_-') + \varepsilon \frac{1}{\tilde{E}_+^+ + \tilde{E}_-^-} (X_+' - X_-'), \quad (2.51)$$

где  $C = \left[ \left( \tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^- - \tilde{\tilde{E}}_z^+ - \tilde{\tilde{E}}_z^- \right) + \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{\tilde{E}_+^+ + \tilde{E}_-^-} \left( \tilde{E}^+ - \tilde{E}^- - \tilde{\tilde{E}}^+ + \tilde{\tilde{E}}^- \right) \right]$ , и

$$\varepsilon^2 u_0^{s''} (\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-) = \varepsilon^3 w_0^{s''''} (\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-) - (X_+ - X_-). \quad (2.52)$$

Неизвестные  $\sigma_{z_0}^s$  и  $\tau_0^s$  находим из первого и четвертого уравнений системы (2.49) прямыми действиями без интегрирования [12]. Получим

$$2\sigma_{z_0}^s = Z_+ + Z_- + \varepsilon^4 w_0^{s''''} (\tilde{\tilde{E}}_z^+ - \tilde{\tilde{E}}_z^-) - \varepsilon^3 u_0^{s''''} (\tilde{\tilde{E}}^+ + \tilde{\tilde{E}}^-), \quad (2.53)$$

$$2\tau_0^s = X_+ + X_- - \varepsilon^3 w_0^{s''''} (\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^-) + \varepsilon^2 u_0^{s''} (\tilde{E}^+ - \tilde{E}^-).$$

Как видим, оценки основных неизвестных, вытекающие из формул (2.51)-(2.53), совпадают с оценками выражения (2.15).

#### 2.4.2 Выполнение условий на коротких сторонах

Рассмотрим консольную полосу/балку, жестко закрепленную на конце  $x=0$ . Один конец полосы/балки  $x=1$  считаем свободным от какой-либо нагрузки. Ее верхний край  $z=1$  только равномерно нагружен распределенной нагрузкой  $Z_+ = p$ . Рассмотрим четырехслойную полосу (Рис. 2.4) для простоты изложения, принимая равными коэффициенты Пуассона для всех слоев.

Разрешающие уравнения (2.51)-(2.53) в этом случае приведем к виду

$$\varepsilon^4 C w_0^{s''''} = p, \quad (2.54)$$

$$\varepsilon^2 u_0^{s''} = \varepsilon^3 w_0^{s''''} \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-}, \quad (2.55)$$

$$2\sigma_{z_0}^s = p + \varepsilon^4 w_0^{s''''} (\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-) - \varepsilon^3 u_0^{s''''} (\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-), \quad (2.56)$$

$$2\tau_0^s = -\varepsilon^3 w_0^{s''''} (\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^-) + \varepsilon^2 u_0^{s''} (\tilde{E}^+ - \tilde{E}^-).$$

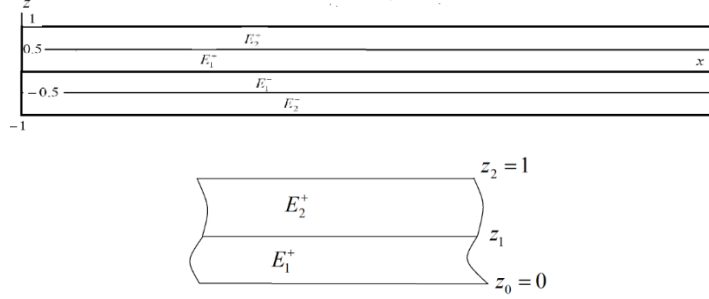


Рис. 2.4. Консольная полоса

На другом конце полосы/балки  $x=0$  с учетом формул (2.5) условия заземления запишем в виде

$$u_{(0)}|_{x=0} = \left[ -\varepsilon w_0' z + \tau_0 2(1+\nu) \int_0^z \frac{1}{E} dz + u_0 \right]_{x=0} = 0, \quad (2.57)$$

$$w_{(1)}|_{x=0} = \left\{ \begin{aligned} & \nu \varepsilon^2 w_0'' \frac{z^2}{2} - \varepsilon \tau_0' \left[ (1-\nu^2) \int_0^z \frac{1}{E} z dz + 2\nu(1+\nu) \frac{z^2}{2} \right] \\ & + (1-\nu^2) \sigma_{z_0} \int_0^z \frac{1}{E} dz - \varepsilon u_0' \nu z + w_0 \end{aligned} \right\}_{x=0} = 0, \quad (2.58)$$

Как ранее сказано, на конце  $x=1$  реализованы условия свободного края

$$\sigma_{x(0)}|_{x=1} = \left\{ \left[ -E \varepsilon^2 w_0'' + \varepsilon \tau_0' (2+\nu) \right] z + E \varepsilon u_0' + \nu \sigma_{z_0} \right\}_{x=1} = 0, \quad (2.59)$$

$$\tau_{(1)}|_{x=1} = \left\{ \varepsilon^3 w_0^{s''''} \int_0^z E z dz - \varepsilon^2 \tau_0'' (2+\nu) \frac{z^2}{2} - \varepsilon^2 u_0'' \int_0^z E dz - \nu \varepsilon \sigma_{z_0}' z + \tau_0 \right\}_{x=1} = 0. \quad (2.60)$$

Условия (2.57), (2.58) запишем для первого слоя  $z_0 \leq z \leq z_1$  при  $x=0$

$$\left[ -\varepsilon w_0' + 2(1+\nu) \tau_0 \frac{1}{E_1} \right] (z - z_0) + u_0 = 0, \quad (2.61)$$

$$\left\{ \nu \varepsilon^2 w_0'' - \varepsilon \tau_0' \left[ \frac{1}{E_1} (1 - \nu^2) + 2\nu(1 + \nu) \right] \right\} \left( \frac{z^2}{2} - \frac{z_0^2}{2} \right) + \left[ (1 - \nu^2) \sigma_{z_0} \frac{1}{E_1} - \nu \varepsilon u_0' \right] (z - z_0) + w_0 = 0. \quad (2.62)$$

Для второго слоя  $z_1 \leq z \leq z_2$  при  $x = 0$  условия закрепления будут

$$-\varepsilon w_0' \left[ (z_1 - z_0) + (z - z_1) \right] + 2(1 + \nu) \tau_0 \left[ \frac{1}{E_1^+} (z_1 - z_0) + \frac{1}{E_2^+} (z - z_1) \right] + u_0 = 0, \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} & \nu \varepsilon^2 w_0'' \left[ \left( \frac{z_1^2}{2} - \frac{z_0^2}{2} \right) + \left( \frac{z^2}{2} - \frac{z_1^2}{2} \right) \right] - \\ & - \varepsilon \tau_0' \left\{ (1 - \nu^2) \left[ \frac{1}{E_1^+} \left( \frac{z_1^2}{2} - \frac{z_0^2}{2} \right) + \frac{1}{E_2^+} \left( \frac{z^2}{2} - \frac{z_1^2}{2} \right) \right] \right\} + \\ & + 2\nu(1 + \nu) \left[ \left( \frac{z_1^2}{2} - \frac{z_0^2}{2} \right) + \left( \frac{z^2}{2} - \frac{z_1^2}{2} \right) \right] \right\} + \\ & + \left[ (1 - \nu^2) \sigma_{z_0} - \nu \varepsilon u_0' \right] \left[ \frac{1}{E_1^+} (z_1 - z_0) + \frac{1}{E_2^+} (z - z_1) \right] + w_0 = 0. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Вычтем из (2.63) уравнение (2.61) и из (2.64) уравнение (2.62) при  $z = z_1$ , получим условия на конце  $x = 0$  для второго слоя в виде

$$\left[ -\varepsilon w_0' + 2(1 + \nu) \tau_0 \frac{1}{E_2^+} \right] (z - z_1) + u_0 = 0, \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \nu \varepsilon^2 w_0'' - \varepsilon \tau_0' \left[ (1 - \nu^2) \frac{1}{E_2^+} + 2\nu(1 + \nu) \right] \right\} \left( \frac{z^2}{2} - \frac{z_1^2}{2} \right) + \\ & + \left[ (1 - \nu^2) \sigma_{z_0} - \nu \varepsilon u_0' \right] \frac{1}{E_2^+} (z - z_1) + w_0 = 0. \end{aligned} \quad (2.66)$$

В сравнении условий (2.61), (2.62) с условиями (2.65), (2.66), отметим их однотипность. Из чего следует, что условия защемления ставятся для каждого слоя. Такой подход может быть продолжен для полосы с произвольным числом слоев, как для верхних  $z > 0$ , так и для нижних слоев  $z < 0$ .

Отсюда, для слоев при  $z > 0$  имеем восемь условий на концах полосы

$$u_0 = 0; \quad (2.67)$$

$$-\varepsilon w_0' + \frac{2(1+\nu)}{E_i^+} (\tau_0^s + \tau_0^q) = 0, \quad i = 1, 2; \quad (2.68)$$

$$w_0 = 0; \quad (2.69)$$

$$\sigma_{z_0} \frac{1-\nu^2}{E_i^+} - \nu \varepsilon u_0' = 0, \quad i = 1, 2; \quad (2.70)$$

$$\nu \varepsilon^2 w_0'' - \left( \varepsilon \tau_0^{s'} + \varepsilon \tau_0^{q'} \right) \left[ \frac{1-\nu^2}{E_i^+} + 2\nu(1+\nu) \right] = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.71)$$

Отметим, что условия (2.68), (2.70), (2.71) записаны для первого и второго слоев. Здесь, как и прежде, используем прием в предположении, что  $\tau_0 = \tau_0^s + \tau_0^q$ . Учитывая, что  $\tau_0^s \sim \varepsilon^3 w_0$  из (2.56) отбросим  $\tau_0^s$  в уравнениях (2.68), (2.71) как величину порядка  $\varepsilon^2$  по сравнению с  $w_0^s$ . Также, отбросим второй член  $\tau_0^q$  в уравнении (2.68), поскольку в уравнении (2.71)  $\varepsilon \tau_0^{q'} \sim \nu \varepsilon^2 w_0''$ . В совокупности появляется возможность использовать следующие условия на конце  $x=0$  при нахождении решения уравнений (2.54), (2.55)

$$w_0 = w_0' = u_0 = 0. \quad (2.72)$$

Условия свободного края (2.59), (2.60) (на конце  $x=1$ ) в рассматриваемом приближении представим в виде

$$-E_i \varepsilon^2 w_0'' + \varepsilon \tau_0^{q'} (2+\nu) = 0, \quad i = 1, 2; \quad (2.73)$$

$$E_i \varepsilon u_0' + \nu \sigma_{z_0} = 0, \quad i = 1, 2; \quad (2.74)$$

$$\tau_0^s + \tau_0^q = 0; \quad (2.75)$$

$$-\varepsilon^2 u_0'' \int_0^z E dz - \nu \varepsilon \sigma_{z_0}' z = 0; \quad (2.76)$$

$$\varepsilon^3 w_0''' \int_0^z E z dz - \varepsilon^2 \tau_0^{q''} (2+\nu) \frac{z^2}{2} = 0. \quad (2.77)$$

Следуя изложенным выше рассуждениям в условиях жесткого защемления,

отбросим член  $\tau_0^s$  в соотношениях (2.73), (2.77) как малую величину  $\varepsilon^2$  по сравнению с  $w_0^s$ . В силу оценок (2.15)  $u_0^s \sim \varepsilon^{-3}Z$ ,  $\sigma_{z_0}^s \sim Z$ , в условии (2.74) величина  $\sigma_{z_0}^s$  может быть отброшена по сравнению с  $\varepsilon u_0^s$ . Аналогично в условии (2.76) отбросим величину  $\varepsilon \sigma_{z_0}^s$  по сравнению с  $\varepsilon^2 u_0^s$ . После таких преобразований и вычисления интегралов имеем

$$-E_1 \varepsilon^2 w_0'' + \varepsilon \tau_0^{q'} (2 + \nu) = 0 \text{ при } 0 \leq z \leq z_1; \quad (2.78)$$

$$-E_2 \varepsilon^2 w_0'' + \varepsilon \tau_0^{q'} (2 + \nu) = 0 \text{ при } z_1 \leq z \leq 1; \quad (2.79)$$

$$E_1 \varepsilon u_0' = 0, \text{ при } 0 \leq z \leq z_1; \quad (2.80)$$

$$E_2 \varepsilon u_0' = 0 \text{ при } z_1 \leq z \leq 1; \quad (2.81)$$

$$\tau_0^s + \tau_0^q = 0 \text{ при } 0 \leq z \leq 1; \quad (2.82)$$

$$-\varepsilon^2 u_0'' E_1 = 0 \text{ при } 0 \leq z \leq z_1; \quad (2.83)$$

$$-\varepsilon^2 u_0'' E_2 = 0 \text{ при } z_1 \leq z \leq 1; \quad (2.84)$$

$$\varepsilon^3 w_0''' E_1 - \varepsilon^2 \tau_0^{q''} (2 + \nu) = 0 \text{ при } 0 \leq z \leq z_1; \quad (2.85)$$

$$\varepsilon^3 w_0''' E_1 - \varepsilon^2 \tau_0^{q''} (2 + \nu) = 0 \text{ при } z_1 \leq z \leq 1. \quad (2.86)$$

При  $u_0'' = 0$  выполняются условия (2.83) и (2.84), из чего следует с учетом (2.55), что

$$w_0''' = 0. \quad (2.87)$$

Далее перепишем условия (2.78)-(2.86), справедливые на конце  $x=1$  при  $0 \leq z \leq 1$

$$w_0'' = 0; \quad (2.88)$$

$$u_0' = 0; \quad (2.89)$$

$$\tau_0^s = 0; \quad (2.90)$$

$$\tau_0^q = 0. \quad (2.91)$$

Условие (2.91) показывает, что на свободном крае отсутствует краевой эффект. В силу соотношения (2.55) условие (2.90) совпадает с условием (2.87). В итоге оставшиеся семь условий на концах полосы/балки (четыре при  $x=1$  (2.87)-(2.90) и три (2.72) при  $x=0$ ) достаточны для определения шести постоянных интегрирования уравнений (2.54) и (2.55). После проведения вычислений получим основные неизвестные

$$w_0^s = \frac{p}{\varepsilon^4 C} \left( \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} \right), \quad u_0^s = \frac{p}{\varepsilon^3 C} \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-} \left( \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{12} - \frac{x}{3} \right),$$

$$\tau_0^s = -\frac{p}{2\varepsilon C} (x-1) (\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^-), \quad \sigma_{z0}^s = \frac{p}{2} \left( 1 + \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{C} \right).$$

Подставим эти выражения в формулы (2.5), получим выражения для всех искомых неизвестных величин (напряжений, деформаций и перемещений)

$$u_{(0)} = \frac{p}{C} \left[ -\left( \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \right) z - \frac{1}{2} \varepsilon^2 (x-1) (\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^-) \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz + \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-} \left( \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{12} - \frac{x}{3} \right) \right]$$

$$\varepsilon_{x(0)} = -\frac{p}{\varepsilon^2 C} \left[ \left( \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{4} \right) z - \varepsilon^2 \frac{1}{2} (\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^-) \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz + \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x}{6} - \frac{1}{3} \right) \right],$$

$$\sigma_{z(0)} = \frac{p}{2} \left( \frac{\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^-}{C} z + 1 + \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{2C} \right),$$

$$\sigma_{x(0)} = -E \frac{p}{\varepsilon^2 C} \left( \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{4} \right) z - \frac{p}{2C} (\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^-) (2+\nu) z +$$

$$+ E \frac{p}{\varepsilon^2 C} \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x}{6} - \frac{1}{3} \right) + \nu \frac{p}{2} \left( 1 + \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{C} \right),$$

$$\varepsilon_{z(0)} = \nu \frac{p}{\varepsilon^2 C} \left( \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{4} \right) z - \frac{p}{2C} (\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^-) \left[ \nu \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz - \frac{1-\nu^2}{E} z \right] -$$

$$- \nu \frac{p}{\varepsilon^2 C} \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x}{6} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1-\nu^2}{E} \frac{p}{2} \left( 1 + \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{C} \right),$$

$$\begin{aligned}
\tau_{(1)} &= \frac{P}{\varepsilon^2 C} (x-1) \int_0^z E z dz - \varepsilon^2 \tau_0^{q''} (2+\nu) \frac{z^2}{2} - \\
&\quad - \frac{P}{\varepsilon^4 C} (x-1) \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-} \int_0^z E dz - \frac{P}{2\varepsilon C} (x-1) (\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^-), \\
w_{(1)} &= \frac{p\nu}{\varepsilon^2 C} \left( \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{4} \right) \frac{z^2}{2} + \frac{P}{2C} (\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^-) \left[ \int_0^z \frac{1-\nu^2}{E} z dz + 2\nu(1+\nu) \frac{z^2}{2} \right] + \\
&\quad + \frac{P}{2} \left( 1 + \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{C} \right) \int_0^z \frac{1-\nu^2}{E} dz - \frac{P}{\varepsilon^2 C} \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x}{6} - \frac{1}{3} \right) \int_0^z \nu dz + \frac{P}{\varepsilon^4 C} \left( \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} \right), \\
\tau_{(1)} &= \frac{P}{\varepsilon^2 C} (x-1) \int_0^z E z dz - \varepsilon^2 \tau_0^{q''} (2+\nu) \frac{z^2}{2} - \\
&\quad - \frac{P}{\varepsilon^4 C} (x-1) \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-} \int_0^z E dz - \frac{P}{2\varepsilon C} (x-1) (\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^-), \\
\sigma_{z(1)} &= -\frac{P}{C} \int_0^z \int_0^z E z dz dz + \varepsilon^3 \tau_0^{q'''} (2+\nu) \frac{z^3}{6} + \\
&\quad + \frac{P}{\varepsilon^2 C} \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-} \int_0^z \int_0^z E dz dz + \frac{P}{2C} (\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^-) - \varepsilon \tau_0^{q'} z + \frac{P}{2} \left( 1 + \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{C} \right).
\end{aligned}$$

В них вычисленные по формулам (2.43) коэффициенты жесткости имеют значения [12]

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_z^+ &= \int_0^1 E z dz = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n E_i h_i^2, \quad \tilde{E}^+ = \int_0^1 E dz = \sum_{i=1}^n E_i h_i, \quad \tilde{E}_z^- = \int_0^{-1} E z dz = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m E_i h_i^2, \\
\tilde{E}^- &= \int_0^{-1} E dz = -\sum_{i=1}^m E_i h_i, \quad \tilde{E}^+ = \int_{z_0}^z \int_{z_0}^z E dz dz = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n E_i h_i^2 + \sum_{j=1}^{n-2} E_j h_j \sum_{i=j+1}^{n-1} h_i + h_n \sum_{i=1}^{n-1} E_i h_i, \\
\tilde{\tilde{E}}_z^+ &= \int_0^1 \int_0^z E z dz dz = \sum_{i=1}^n E_i \left[ \frac{z_i^3}{6} - \frac{z_{i-1}^3}{6} - \frac{z_{i-1}^2}{2} h_i \right] + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-j} E_i h_{i+1} \left( \frac{z_i^2}{2} - \frac{z_{i-1}^2}{2} \right), \\
\tilde{\tilde{E}}_z^- &= \int_0^{-1} \int_0^z E z dz dz = -\sum_{i=1}^m E_i \left[ \left( \frac{z_i^3}{6} - \frac{z_{i-1}^3}{6} \right) - \frac{z_{i-1}^2}{2} h_i \right] - \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{m-j} E_i h_{i+1} \left( \frac{z_i^2}{2} - \frac{z_{i-1}^2}{2} \right),
\end{aligned}$$

$$\tilde{E}^- = \int_{z_0}^{-1} \int_{z_0}^z E dz dz = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m E_i h_i^2 + \sum_{j=1}^{m-2} E_j h_j \sum_{i=j+1}^{m-1} h_i + h_n \sum_{i=1}^{m-1} E_i h_i.$$

## 2.5. Выводы по второй главе

1. Метод Сен-Венана – Пикара – Банаха развит в применении к слоистому материалу на примере узкой прямоугольной полосы при действии механической поверхностной нагрузки (на длинных сторонах).

2. Последовательно рассмотрены случаи двуслойной полосы с симметричным и несимметричным расположением слоев. Задача обобщена на случай произвольного количества слоев.

3. Применяемый подход к построению разрешающих соотношений – путем выполнения граничных условий на длинных сторонах тела, – дает уравнения, включающие интегральные коэффициенты, имеющие вид, сходный с обобщенными коэффициентами жесткости в прикладной теории. В них аккумулируется информация о структуре и физических свойствах слоев.

4. При выполнении граничных условий на длинных сторонах полосы, в отличие от случая однородного материала, разделение уравнений на описывающие изгиб и растяжение не происходит. Разрешающие соотношения для основных неизвестных получены с использованием аппарата асимптотик по малому параметру тонкостенности.

5. При рассмотрении граничных условий на коротких сторонах полосы построены заменяющие их однотипные соотношения, форма которых не зависит от количества слоев.

6. Получены аналитические решения, включая константы интегрирования, при различных условиях на торцах для случаев двух – четырех слоев.

## ГЛАВА III. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ СЛОИСТОЙ ПОЛОСЫ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА СЖАТЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Задача о воздействии механической нагрузки на длинную упругую полосу из многослойного материала, техника решения которой, включая получение искомым величин в аналитическом виде, а также их асимптотических оценок компонент основных неизвестных, изложена в предыдущей главе, в данной главе обобщается до случая учета воздействия распределенного поля температуры.

### 3.1. Произвольно нагруженная по длинным сторонам полоса при действии поля температуры

В качестве исходных уравнений, описывающих поведение длинной прямоугольной полосы из слоистого материала, геометрия и механические характеристики которой соответствуют рассмотренным в разделе 2.1, принимаем двумерные соотношения плоской задачи теории упругости (уравнения равновесия, физические и геометрические соотношения) в виде (2.1), преобразуемых к безразмерной форме (2.2) с образованием малого параметра тонкостенности, дополнительно учитывая в них температурное воздействие путем добавления соответствующих температурных компонентов к формулам нормальных деформаций [6, 7, 14-16]. Подобным образом эта система трансформируется к виду последовательности взаимных подстановок, как это сделано в (2.4). В результате получим

$$\begin{aligned}
 w_{(0)} = w_0(x), \quad \tau_{(0)} = \tau_0(x), \quad \frac{\partial u_{(0)}}{\partial z} = -\varepsilon w_0' + \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_0, \quad \frac{\partial \sigma_{z(0)}}{\partial z} = -\varepsilon \tau_0', \\
 \varepsilon_{x(0)} = \varepsilon u_{(0)}' + \alpha T, \quad \sigma_{x(0)} = E \varepsilon_{x(0)} + \nu \sigma_{z(0)}, \quad \varepsilon_{z(0)} = -\nu \varepsilon_{x(0)} + \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_{z(0)} + \alpha T, \quad (3.1) \\
 \frac{\partial w_{(1)}}{\partial z} = \varepsilon_{z(0)}, \quad \frac{\partial \tau_{(1)}}{\partial z} = -\varepsilon \sigma_{x(0)}', \quad \frac{\partial u_{(1)}}{\partial z} = -\varepsilon w_{(1)}' + \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{(1)}, \quad \frac{\partial \sigma_{z(1)}}{\partial z} = -\varepsilon \tau_{(1)}', \dots
 \end{aligned}$$

Откуда находим формулы, выражающие искомые величины исходной задачи теории упругости через основные неизвестные в виде

$$\begin{aligned}
u_{(0)} &= -\varepsilon w_0' z + \tau_0 \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz + u_0, \quad \sigma_{z(0)} = -\varepsilon \tau_0' z + \sigma_{z0}, \\
\varepsilon_{x(0)} &= -\varepsilon^2 w_0'' z + \varepsilon \tau_0' \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz + \varepsilon u_0' + \alpha T, \\
\sigma_{x(0)} &= -E \varepsilon^2 w_0'' z + \varepsilon \tau_0' \left[ E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz - \nu z \right] + E \varepsilon u_0' - E \alpha T + \nu \sigma_{z0}, \\
\varepsilon_{z(0)} &= \nu \varepsilon^2 w_0'' z - \varepsilon \tau_0' \left[ \nu \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz + \frac{1-\nu^2}{E} z \right] - \nu \varepsilon u_0' + (1+\nu) \alpha T + \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_{z0}, \\
w_{(1)} &= \varepsilon^2 w_0'' \int_0^z \nu dz - \varepsilon \tau_0' \left[ \int_0^z \frac{1-\nu^2}{E} z dz + \int_0^z \nu \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz \right] + \sigma_{z0} \int_0^z \frac{1-\nu^2}{E} dz - \\
&\quad - \varepsilon u_0' \int_0^z \nu dz + \int_0^z (1+\nu) \alpha T dz + w_0, \\
\tau_{(1)} &= \varepsilon^3 w_0''' \int_0^z E z dz - \varepsilon^2 \tau_0'' \left[ \int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^z \nu z dz \right] - \varepsilon^2 u_0'' \int_0^z E dz + \\
&\quad + \int_0^z \varepsilon E (\alpha T)' dz - \varepsilon \sigma_{z0}' \int_0^z \nu dz + \tau_0, \\
\sigma_{z(1)} &= -\varepsilon^4 w_0'''' \int_0^z \int_0^z E z dz dz + \varepsilon^3 \tau_0''' \left[ \int_0^z \int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz dz - \int_0^z \int_0^z \nu z dz dz \right] + \\
&\quad + \varepsilon^3 u_0''' \int_0^z \int_0^z E dz dz - \varepsilon^2 \int_0^z \int_0^z E (\alpha T)'' dz dz + \varepsilon^2 \sigma_{z0}'' \int_0^z \int_0^z \nu dz dz - \varepsilon \tau_0' z + \sigma_{z0}, \dots
\end{aligned} \tag{3.2}$$

В выражениях (3.1) и (3.2)  $\alpha$  – коэффициент линейного температурного расширения;  $T$  – температура, отсчитываемая от некоторого нулевого значения, при котором температурные деформации считаем отсутствующими.

Эти формулы сохраняют характер соотношений (2.5), дополнительно учитывая температурное деформирование. При этом  $\alpha$  и  $T$  являются функциями обеих координат [196].

Форму решения задачи для новых основных неизвестных  $w_0, \tau_0, u_0, \sigma_{z0}$ , как функций одной продольной координаты, находим путем выполнения граничных условий на длинных внешних сторонах полосы в соответствии с применяемой

ранее техникой. Выпонение условий для верхней и нижней сторон ( $z^* = \pm h$ ) приводят к обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно искомым основным неизвестных. Для случая нагружения поверхностными силами [9]

$$\sigma_z = Z_+(x), \tau = X_+(x) \text{ при } z = 1, \sigma_z = Z_-(x), \tau = X_-(x) \text{ при } z = -1 \quad (3.3)$$

и удовлетворении их величинами первого приближения из соотношений (3.2) получим

$$\begin{aligned} & \varepsilon^3 w_0''' \int_0^1 E z dz - \varepsilon^2 \tau_0'' \left[ \int_0^1 E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^1 \nu z dz \right] - \varepsilon^2 u_0'' \int_0^1 E dz + \\ & \quad + \varepsilon \int_0^1 E (\alpha T)' dz - \varepsilon \sigma_{z_0}' \int_0^1 \nu dz + \tau_0 = X_+, \\ & \varepsilon^3 w_0''' \int_0^{-1} E z dz - \varepsilon^2 \tau_0'' \left[ \int_0^{-1} E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^{-1} \nu z dz \right] - \varepsilon^2 u_0'' \int_0^{-1} E dz + \\ & \quad + \varepsilon \int_0^{-1} E (\alpha T)' dz - \varepsilon \sigma_{z_0}' \int_0^{-1} \nu dz + \tau_0 = X_-, \\ & -\varepsilon^4 w_0'''' \int_0^z \int_0^z E z dz dz + \varepsilon^3 \tau_0''' \left[ \int_0^z \int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz dz - \int_0^z \int_0^z \nu z dz dz \right] + \\ & \quad + \varepsilon^3 u_0''' \int_0^z \int_0^z E dz dz - \varepsilon^2 \int_0^z \int_0^z E (\alpha T)'' dz dz + \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' \int_0^z \int_0^z \nu dz dz - \varepsilon \tau_0' + \sigma_{z_0} = Z_+, \\ & -\varepsilon^4 w_0'''' \int_0^{-z} \int_0^{-z} E z dz dz + \varepsilon^3 \tau_0''' \left[ \int_0^{-z} \int_0^{-z} E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz dz - \int_0^{-z} \int_0^{-z} \nu z dz dz \right] + \\ & \quad + \varepsilon^3 u_0''' \int_0^{-z} \int_0^{-z} E dz dz - \varepsilon^2 \int_0^{-z} \int_0^{-z} E (\alpha T)'' dz dz + \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' \int_0^{-z} \int_0^{-z} \nu dz dz + \varepsilon \tau_0' + \sigma_{z_0} = Z_-. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Присутствующие здесь интегральные коэффициенты имеют характер обобщенных жесткостей в обычной теории упругости. Как правило, они аккумулируют информацию о геометрии сечения и физических свойствах.

### 3.2. Двухслойная полоса при действии механической нагрузки и поля температуры

### 3.2.1. Случай слоев равной толщины

Для модели двухслойной полосы, постановка задачи о воздействии механической нагрузки дана в разделе 2.3. Присвоим нижние индексы «1» и «2» параметрам задачи, соответствующих верхнему и нижнему слоям модели.

Добовляя компоненты температурной деформации, после вычисления интегралов, входящих в (3.4), получим следующие уравнения

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^3 w_0''' E_1 \frac{1}{2} - \varepsilon^2 \tau_0'' \frac{2+\nu}{2} - \varepsilon^2 u_0'' E_1 - \nu \varepsilon \sigma_{z_0}' + \tau_0 &= X_+ - \varepsilon E_1 \int_0^1 (\alpha T)' dz, \\
 \varepsilon^3 w_0''' E_2 \frac{1}{2} - \varepsilon^2 \tau_0'' \frac{2+\nu}{2} + \varepsilon^2 u_0'' E_2 + \nu \varepsilon \sigma_{z_0}' + \tau_0 &= X - \varepsilon E_2 \int_0^{-1} (\alpha T)' dz, \\
 -\varepsilon^4 w_0'''' E_1 \frac{1}{6} + \varepsilon^3 \tau_0''' \frac{2+\nu}{6} + \varepsilon^3 u_0''' E_1 \frac{1}{2} + \nu \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' \frac{1}{2} - \varepsilon \tau_0' + \\
 + \sigma_{z_0} &= Z_+ + \varepsilon^2 E_1 \int_0^1 \int_0^z (\alpha T)'' dz dz, \\
 \varepsilon^4 w_0'''' E_2 \frac{1}{6} - \varepsilon^3 \tau_0''' \frac{2+\nu}{6} + \varepsilon^3 u_0''' E_2 \frac{1}{2} + \nu \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' \frac{1}{2} + \varepsilon \tau_0' + \\
 + \sigma_{z_0} &= Z_- + \varepsilon^2 E_2 \int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)'' dz dz.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Их преобразование в изложенной технике раздела 2.3 приводит к разрешающим соотношениям:

- для быстро меняющейся компоненты

$$-(2+\nu)\varepsilon^2 \tau_0^{q''} + 2\tau_0^q = 0; \tag{3.6}$$

- для медленно меняющихся компонент решения

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^4 w_0'''' \left[ \frac{1}{3}(E_1 + E_2) - \frac{1}{4} \frac{(E_1 - E_2)^2}{E_1 + E_2} \right] &= (Z_+ - Z_-) + \varepsilon (X_+' + X_-' ) - \\
 -\frac{1}{2} \varepsilon (E_1 - E_2) \frac{(X_+ - X_-)'}{E_1 + E_2} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2} &\left[ E_1 \int_0^1 (\alpha T)'' dz - E_2 \int_0^{-1} (\alpha T)'' dz \right] + \\
 + \varepsilon^2 \left[ E_1 \int_0^1 \int_0^z (\alpha T)'' dz dz - E_2 \int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)'' dz dz - E_1 \int_0^1 (\alpha T)'' dz - E_2 \int_0^{-1} (\alpha T)'' dz \right], & \tag{3.7}
 \end{aligned}$$

$$\varepsilon^2 u_0^{s''} (E_1 + E_2) = \varepsilon^3 w_0^{s''''} \frac{1}{2} (E_1 - E_2) - X_+ + X_- + \varepsilon \left[ E_1 \int_0^1 (\alpha T)' dz - E_2 \int_0^{-1} (\alpha T)' dz \right], \quad (3.8)$$

$$2\sigma_{z_0}^s = Z_+ + Z_- + \varepsilon^4 w_0^{s''''} \frac{1}{6} (E_1 - E_2) - \frac{1}{2} \varepsilon^3 u_0^{s''''} (E_1 + E_2) + \\ + \varepsilon^2 \left[ E_1 \int_0^1 \int_0^z (\alpha T)'' dz dz + E_2 \int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)'' dz dz \right], \quad (3.9)$$

$$2\tau_0^s = X_+ + X_- - \varepsilon^3 w_0^{s''''} \frac{1}{2} (E_1 + E_2) + \varepsilon^2 u_0^{s''} (E_1 - E_2) - \\ - \varepsilon \left[ E_1 \int_0^1 (\alpha T)' dz + E_2 \int_0^{-1} (\alpha T)' dz \right].$$

Если принять  $Z_+ = Z_- = X_+ = X_- = 0$  и характер температурного поля линейным по толщине полосы

$$\alpha T = \begin{cases} \alpha_2 t_2 z, & \text{при } z \geq 0 \\ \alpha_1 t_1 z, & \text{при } z < 0 \end{cases}, \quad (3.10)$$

где  $t_1 = const, t_2 = const$ , то из уравнений (3.7)–(3.9) вытекают следующие асимптотические оценки искомых величин

$$w_0^s \sim \varepsilon^{-2} \alpha T, \quad u_0^s \sim \varepsilon w_0^s \wedge \varepsilon^{-1} \alpha T, \quad \sigma_{z_0}^s \sim \varepsilon^2 \alpha T, \quad \tau_0^s \sim \varepsilon \alpha T. \quad (3.11)$$

Решение уравнений (3.7)–(3.9) имеет вид

$$w_0^s = \frac{3\varepsilon^{-2}}{2} \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2} \frac{E_1 \alpha_1 t_1 - E_2 \alpha_2 t_2 - \frac{E_1 \alpha_1 t_1 + E_2 \alpha_2 t_2}{4}}{(E_1 + E_2) \left[ 1 - \frac{3(E_1 - E_2)^2}{4(E_1 + E_2)^2} \right]} x^2 + C_{w3} x^3 + C_{w2} x^2 + \\ + C_{w1} x + C_{w0}, \quad (3.12)$$

$$u_0^s = \varepsilon w_0^{s'} \frac{1}{2} \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2} + \frac{\varepsilon^{-1}}{E_1 + E_2} (E_1 \alpha_1 t_1 - E_2 \alpha_2 t_2) \frac{x}{2} + C_{u1} x + C_{u0}, \quad (3.13)$$

$$2\tau_0^s = \frac{9\varepsilon^{-1}C_{w3}}{(E_1 + E_2) \left[ 1 - \frac{3(E_1 - E_2)^2}{4(E_1 + E_2)^2} \right]} \left[ \frac{(E_1 - E_2)^2}{E_1 + E_2} - (E_1 + E_2) \right] - \varepsilon \left[ E_1 \int_0^1 (\alpha T)' dz + E_2 \int_0^{-1} (\alpha T)' dz \right], \quad (3.14)$$

$$\tau_0^q = \begin{cases} C_{\tau_0} \exp\left(-\frac{kx}{\varepsilon}\right) & \text{при } x \geq 0 \\ C_{\tau_1} \exp\left(-\frac{k(1-x)}{\varepsilon}\right) & \text{при } x \leq 1 \end{cases}, \quad k^2 = \frac{6}{2+\nu}, \quad (3.15)$$

$$2\sigma_{z_0}^s = \varepsilon^4 w_0^{s''''} \frac{1}{6} (E_1 - E_2) - \frac{1}{2} \varepsilon^3 u_0^{s''''} (E_1 + E_2) + \varepsilon^2 \left[ E_1 \int_0^1 \int_0^z (\alpha T)'' dz dz + E_2 \int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)'' dz dz \right]. \quad (3.16)$$

Постоянные интегрирования  $C_{w_0}$ ,  $C_{w_3}$ ,  $C_{w_2}$ ,  $C_{w_1}$ ,  $C_{w_0}$ ,  $C_{u_1}$ ,  $C_{u_0}$  находим из граничных условий на узких сторонах полосы. При этом в формуле (3.15) значения констант полагаются различными для каждого слоя. Примем, что края  $x=0;1$  жестко заземлены, то есть  $u=w=0$  во всех точках  $z \in [-1,1]$ . Запишем эти условия на соотношениях нулевого и первого приближений (3.2)

$$\begin{aligned} u_{(0)} \Big|_{x=0,1} &= -\varepsilon w_0' z + 2(1+\nu)\tau_0 \int_0^z \frac{1}{E} dz + u_0 = 0, \\ w_{(1)} \Big|_{x=0,1} &= \varepsilon^2 w_0'' \int_0^z \nu z dz - \varepsilon \tau_0' \left[ \int_0^z \frac{1-\nu^2}{E} z dz + \int_0^z \nu \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz \right] + \\ &+ \sigma_{z_0} \int_0^z \frac{1-\nu^2}{E} dz - \varepsilon u_0' \int_0^z \nu dz + \int_0^z (1+\nu)\alpha T dz + w_0 = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Далее, действуя так, как это показано в разделе 2.3, приходим к условиям

$$u_0 = 0, \quad -\varepsilon w_0' + \frac{2(1+\nu)}{E_1} \tau_0 = 0, \quad w_0 = 0, \quad (3.18)$$

$$\sigma_{z_0} \frac{1-\nu^2}{E_1} - \nu \varepsilon u_0' = 0, \quad \nu \varepsilon^2 w_0'' - \varepsilon \tau_0' \frac{(\nu+1)^2}{E_1} + (1+\nu) \alpha_1 t_1 = 0. \quad (3.19)$$

для верхнего слоя (при  $z \geq 0$ ); для нижнего слоя (с модулем Юнга материала  $E_2$ ) форма соотношений аналогична.

Из соотношений (3.12)÷(3.19) следует

$$w_0^s(x) = C_{w1}(x - x^2), \quad C_{w1} = \varepsilon^{-1} \frac{2(1+\nu) \alpha_1 t_1}{4\nu\varepsilon - k(\nu+1)}, \quad \tau_0^s = 0, \quad (3.20)$$

$$\tau_0^q = \begin{cases} C_{\tau 0} \exp\left(-\frac{kx}{\varepsilon}\right) & \text{при } x \geq 0 \\ C_{\tau 1} \exp\left(-\frac{k(1-x)}{\varepsilon}\right) & \text{при } x \leq 1 \end{cases}.$$

При этом

$$\text{для участка } z \geq 0: \quad C_{\tau 0}^+ = -C_{\tau 1}^+ = \frac{E_1 \alpha_1 t_1}{4\nu\varepsilon - k(\nu+1)},$$

$$\text{для участка } z \leq 0: \quad C_{\tau 0}^- = -C_{\tau 1}^- = \frac{E_2 \alpha_1 t_1}{4\nu\varepsilon - k(\nu+1)},$$

где константы с верхним индексом «+» и «-» относятся к верхнему и нижнему слоям, соответственно; также:

$$u_0^s(x) \cong 0, \quad \sigma_{z_0}^s(x) \cong 0.$$

Тогда из (3.2) и (3.20), для исходных неизвестных задачи найдем

$$w(x, z) = \left( \varepsilon^2 \nu w_0'' - \varepsilon \tau_0' \frac{(\nu+1)^2}{E_1} + (1+\nu) \alpha_1 t_1 \right) \frac{z^2}{2} + w_0, \quad (3.21)$$

$$u(x, z) = -\varepsilon w_0' z + \tau_0 \frac{2(1+\nu)}{E_1} z,$$

$$\tau(x, z) = -\varepsilon^2 \tau_0^{q''} (2+\nu) \frac{z^2}{2} + \tau_0^q = \tau_0^q (1-3z^2),$$

$$\sigma_z(x, z) = \varepsilon^3 \tau_0^{q'''} (2+\nu) \frac{z^3}{6} - \varepsilon \tau_0^{q'} z = \varepsilon \tau_0^{q'} z (z^2 - 1),$$

$$\sigma_x(x, z) = \left[ 2E_1\varepsilon^2 C_{w1} + \varepsilon(2 + \nu)\tau_0^{q'} - E_1\alpha_1 t_1 \right] z,$$

$$\varepsilon_x(x, z) = \left[ 2\varepsilon^2 C_{w1} + \varepsilon\tau_0^{q'} \frac{2(1 + \nu)}{E_1} \right] z,$$

$$\varepsilon_z(x, z) = \left[ -2\nu\varepsilon^2 C_{w1} - \varepsilon\tau_0^{q'} \frac{(\nu + 1)^2}{E_1} + (1 + \nu)\alpha_1 t_1 \right] z.$$

Приведенные соотношения даны для верхнего слоя. Для нижнего слоя они аналогичны.

Рассмотрим полосу со следующими исходными данными. Верхний слой: материал – сталь; геометрические параметры: высота  $h_1 = 0.05$  м, длина  $l_1 = 1$  м; физико-механические свойства: модуль упругости  $E_1^* = 2.1 \cdot 10^{11}$  Па, безразмерная жесткость  $E_1 = 1.3125$ , коэффициент линейного теплового расширения  $\alpha_1 = 1.2 \cdot 10^{-5} C^{-1}$ , коэффициент Пуассона  $\nu_1 = 0.3$ . Нижний слой пластины – медный сплав; геометрические параметры те же, высота  $h_2 = 0.05$  м, длина  $l_2 = 1$  м; физико-механические характеристики: модуль упругости  $E_2^* = 1.1 \cdot 10^{11}$  Па, безразмерная жесткость  $E_2 = 0.6875$ , коэффициент линейного теплового расширения  $\alpha_2 = 1.8 \cdot 10^{-5} C^{-1}$ , коэффициент Пуассона  $\nu_2 = 0.34$ . В связи с тем, что коэффициенты Пуассона близки по значению, принимаем в расчетах для обоих слоев  $\nu_1 = \nu_2 = \nu = 0.3$ . Верхний слой пластины нагрет до температуры  $32^\circ C$ , нижний слой имеет температуру  $12^\circ C$ .

Результаты расчетов распределения температур по поперечной координате, проведенные численно по классической теории теплопроводности, представлены на Рис. 3.1. Характер температурного коробления полосы показан на Рис. 3.3.

В качестве температуры, при которой тепловые деформации отсутствуют, принято значение  $-14.7^\circ C$ , относящееся к точкам, расположенным по оси полосы (при  $z = 0$ ), при этом перепады температуры по слоям составили  $t_1^o = 17.3^\circ C$ ,  $t_2^o = 2.7^\circ C$ .

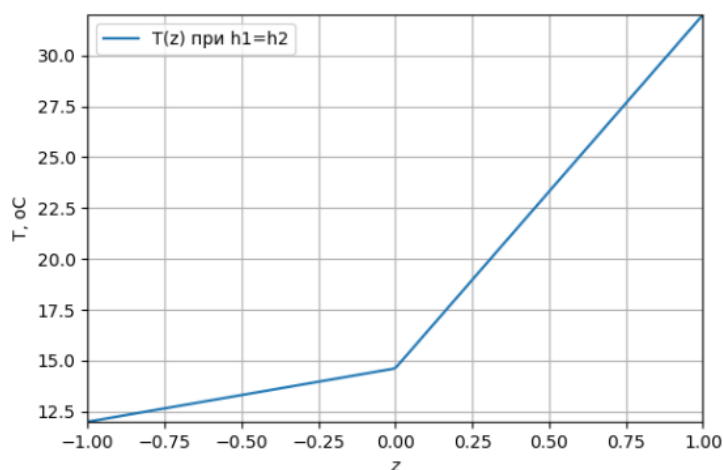


Рис. 3.1. Распределение температуры ( $^{\circ}\text{C}$ ) в поперечном сечении полосы

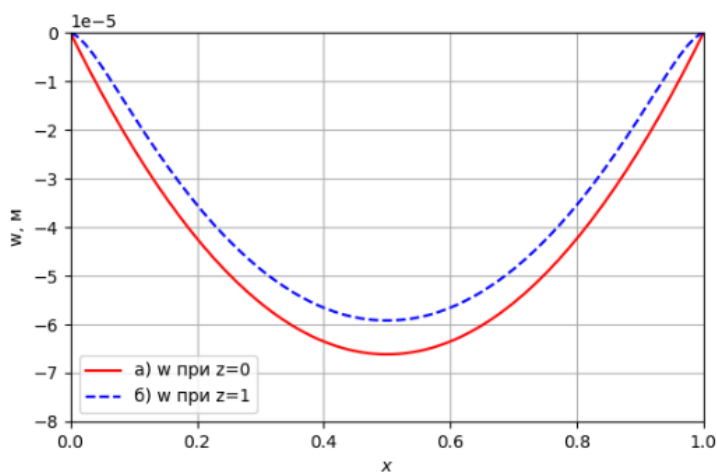


Рис. 3.2. Вертикальные перемещения [м] в продольных сечениях:  
а) при  $z = 0$  б) вдоль верхнего края полосы

Здесь и далее расчеты проведены по формулам (3.21) с учетом соотношений (3.20). В терминах классической теории можно сказать, что в целом для найденного решения действие изгибающего момента, образующегося в заделке (от продольного расширения и сжатия нагретых и, соответственно, охлажденных продольных волокон) оказывается сильнее, чем коробление в положительном направлении от градиента температуры по толщине полосы (как свободной). Видно, что свойственное для балочной теории и теорий пластин и оболочек представление о равенстве угла наклона касательной к срединной линии в заделке для случая температурного деформирования является осредняющим

приближением, и, поскольку в SVPB решение находится на пространственных уравнениях теории упругости, здесь результат наблюдается более детально.

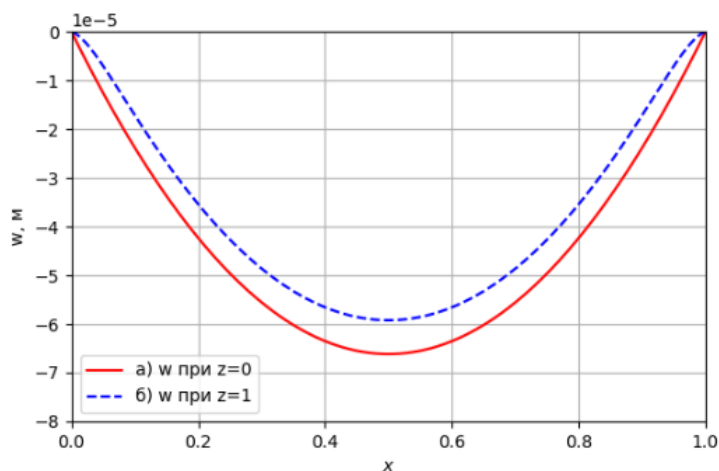


Рис. 3.3. Вертикальные перемещения [м] в продольных сечениях:  
а) при  $z = 0$ ; б) вдоль верхнего края полосы

Краевой эффект в рассматриваемых зависимостях проявляется через присутствие функции  $\tau_0$ , которая содержит быстро изменяющиеся компоненты решения. График изменения функции  $\tau_0$ , соответствующей величине касательных напряжений в продольном сечении при  $z = 0$ , приведен на Рис. 3.4.

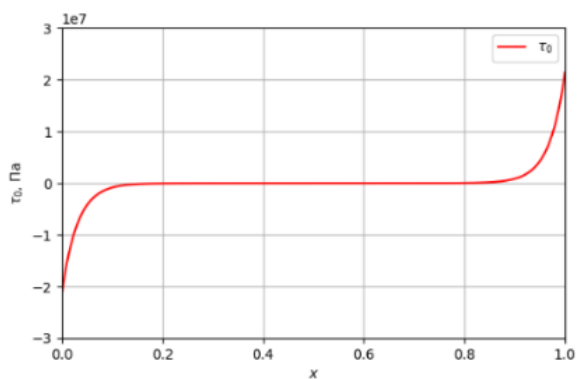


Рис. 3.4. Касательные напряжения [Па] в продольном сечении при  $z = 0$  (вдоль оси)

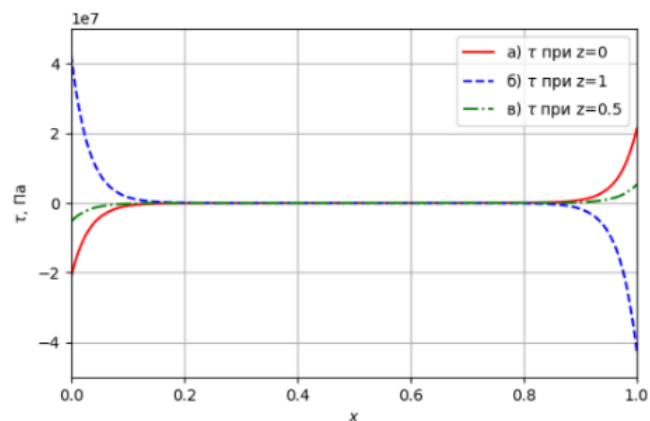


Рис. 3.5. Касательные напряжения [Па] в продольных сечениях: а) при  $z = 0$  (вдоль оси) б) вдоль верхнего  $z = 1$  и нижнего  $z = -1$  краев (функция симметрична) в) вдоль линии, проходящей по центру верхнего слоя  $z = 0,5$

Следует отметить, что условие равенства нулю касательных напряжений на лицевых сторонах выполнено везде асимптотически, за исключением окрестности

«особых» угловых точек (Рис. 3.5). Распределение нормальных напряжений по толщине показано на Рис. 3.6. Поведение решения вблизи особой угловой точки требует отдельного исследования.

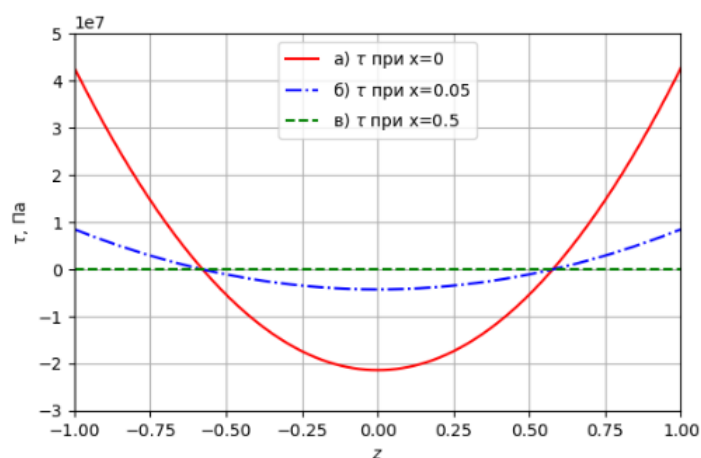


Рис. 3.6. Касательные напряжения [Па] в поперечных сечениях:  
а) в левой заделка б) на удалении  $0,05l$  от нее в) посередине полосы

Графики нормальных продольных напряжений (Рис. 3.7, Рис. 3.8) и продольных перемещений (Рис. 3.9) соответствуют классическому представлению о поведении балки при изгибе с добавлением к ним краевого эффекта и учетом различия упругих свойств слоев.

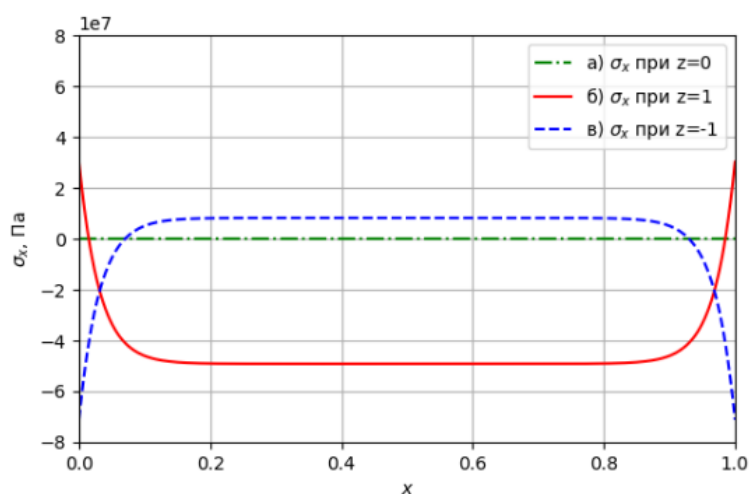


Рис. 3.7. Нормальные продольные напряжения [Па] в продольных сечениях:  
а) вдоль оси (при  $z = 0$ ) б) вдоль верхнего ( $z = 1$ ); в) нижнего  $z = -1$  краев полосы

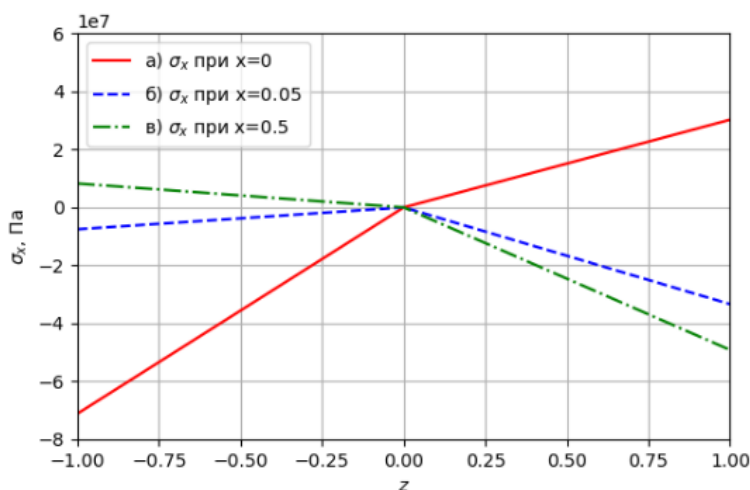


Рис. 3.8. Нормальные продольные напряжения [Па] в поперечных сечениях:  
а) в левой заделке б) на удалении  $0,05l$  от нее в) посередине полосы

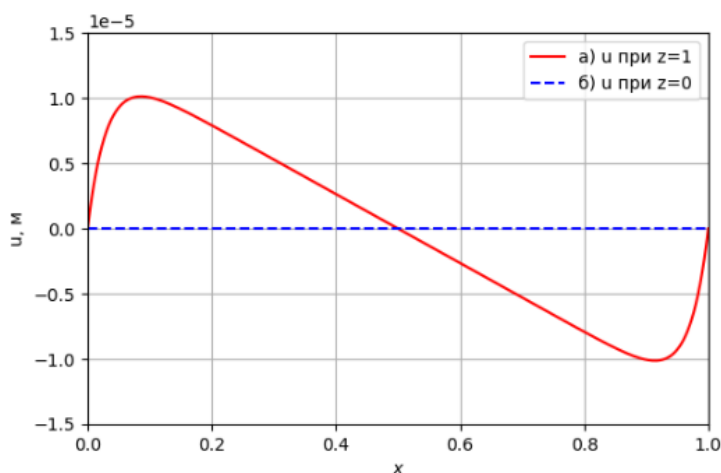


Рис. 3.9. Продольные перемещения [м] в продольных сечениях:  
а) вдоль верхнего края (при  $z=1$ ) б) вдоль оси (при  $z=0$ )

Нормальные поперечные напряжения интегрально (в основном) равны нулю, что свойственно классической теории пластин и оболочек. Найденным решением условие отсутствия поперечных нормальных напряжений на продольных сторонах выполнено точно. Поперечные нормальные напряжения равны нулю при  $x^* = 0,5l$  (Рис. 3.10).

Если материал слоев рассматривать как слоистый с функционально изменяемым составом, спроектированный в основном для восприятия продольных усилий, то наиболее опасными следует считать краевые расслаивающие нормальные напряжения внутри охлажденного слоя и сдвиговые

напряжения между слоями у торцов полосы.

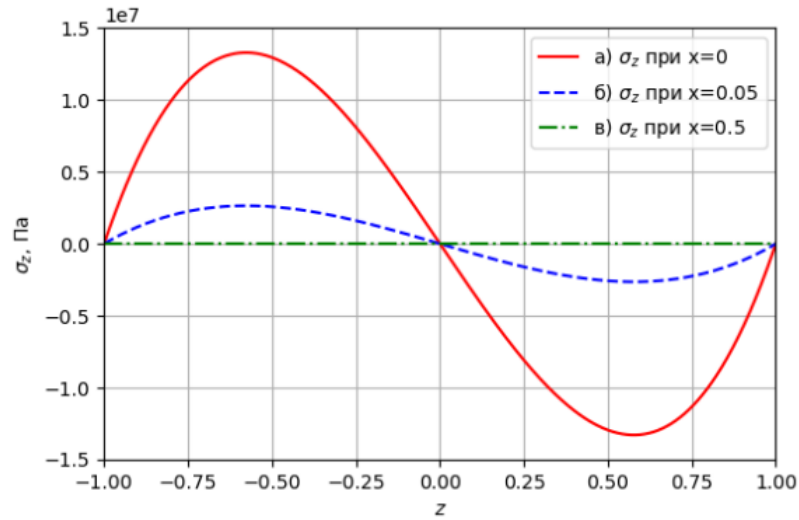


Рис. 3.10. Нормальные поперечные напряжения [Па] в поперечных сечениях:  
а) в левой заделка б) на удалении  $0,05l$  от нее в) посередине полосы

### 3.2.2. Двухслойная полоса со слоями различной толщины

В разделе 2.3.2 метод SVPB применен к задаче о двухслойной полосе с различной толщиной слоев, на которую действует механическая нагрузка. Дополним ее, принимая во внимание влияние температурного поля.

В этом случае после вычисления интегральных коэффициентов (2.8), уравнения (3.4), определяющие условия реакции полосы на внутреннее температурное поле и внешнюю поверхностную нагрузку, приложенную по длинным ее сторонам, принимают вид

$$\varepsilon^3 w_0''' \left[ (E_1 - E_2) \frac{z_1^2}{2} + E_2 \frac{1}{2} \right] - \varepsilon^2 \tau_0'' \frac{2+\nu}{2} - \varepsilon^2 u_0'' [(E_1 - E_2) z_1 + E_2] -$$

$$- \nu \varepsilon \sigma_{z_0}' + \tau_0 = X_+ - \varepsilon \int_0^1 E(\alpha T)' dz, \quad (3.22)$$

$$\varepsilon^3 w_0''' E_1 \frac{1}{2} - \varepsilon^2 \tau_0'' \frac{2+\nu}{2} + \varepsilon^2 u_0'' E_1 + \nu \varepsilon \sigma_{z_0}' + \tau_0 = X_- - \varepsilon \int_0^{-1} E(\alpha T)' dz,$$

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon^4 w_0'''' \left[ (E_1 - E_2) \left( \frac{z_1^2}{2} - \frac{z_1^3}{3} \right) + E_2 \frac{1}{6} \right] + \varepsilon^3 \tau_0''' \frac{2+\nu}{6} + \\
& + \varepsilon^3 u_0''' \left[ \frac{1}{2} (E_1 - E_2) (2 - z_1) z_1 + E_2 \frac{1}{2} \right] + \nu \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' \frac{1}{2} - \varepsilon \tau_0' + \\
& \quad + \sigma_{z_0} = Z_+ + \varepsilon^2 \int_0^1 \int_0^z E(\alpha T)'' dz dz, \\
& \varepsilon^4 w_0'''' E_1 \frac{1}{6} - \varepsilon^3 \tau_0''' \frac{2+\nu}{6} + \varepsilon^3 u_0''' E_1 \frac{1}{2} + \nu \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' \frac{1}{2} + \varepsilon \tau_0' + \\
& \quad + \sigma_{z_0} = Z_- + \varepsilon^2 \int_0^{-1} \int_0^z E(\alpha T)'' dz dz.
\end{aligned}$$

Далее, применяя изложенную в разделе 2.3.2 технику, придем к разрешающим соотношениям для основных неизвестных задачи:

быстро меняющейся компоненты

$$-(2+\nu)\varepsilon^2 \tau_0^{q''} + 2\tau_0^q = 0, \quad (3.23)$$

и медленно меняющихся составляющих

$$\begin{aligned}
\varepsilon^3 u_0^{s''''} &= \varepsilon^4 w_0^{s''''} \frac{1}{2} \frac{(E_1 - E_2)(z_1^2 - 1)}{(E_1 - E_2)z_1 + (E_1 + E_2)} + \\
& + \frac{\varepsilon^2}{(E_1 - E_2)z_1 + (E_1 + E_2)} \left[ E_1 \int_0^{\tilde{z}_1} (\alpha T)' dz + E_2 \int_{z_1}^1 (\alpha T)' dz - E_1 \int_0^{-1} (\alpha T)' dz \right], \quad (3.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\tau_0^s &= -\varepsilon^3 w_0^{s''''} \left[ (E_1 - E_2) \frac{z_1^2}{2} + (E_1 + E_2) \frac{1}{2} \right] + \varepsilon^2 u_0^{s''} [(E_1 - E_2)z_1 + E_1 + E_2] - \\
& - \varepsilon \left[ E_1 \int_0^{\tilde{z}_1} (\alpha T)' dz + E_2 \int_{z_1}^1 (\alpha T)' dz + E_1 \int_0^{-1} (\alpha T)' dz \right] = \quad (3.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = -\varepsilon^3 w_0^{s''''} \left[ (E_1 - E_2) \frac{z_1^2}{2} + (E_1 + E_2) \frac{1}{2} \right] + \varepsilon^2 u_0^{s''} [(E_1 - E_2)z_1 + E_1 + E_2], \\
2\sigma_{z_0}^s &= \varepsilon^4 w_0^{s''''} (E_1 - E_2) \left( \frac{z_1^2}{2} - \frac{z_1^3}{3} - \frac{1}{6} \right) - \varepsilon^3 u_0^{s''''} \left[ \frac{(E_1 - E_2)(2 - z_1)z_1 +}{+(E_1 + E_2)} \right] + \\
& + \varepsilon^2 \left[ E_1 \int_0^{\tilde{z}_1} \int_0^z (\alpha T)'' dz dz + E_2 \int_{z_1}^1 \int_0^z (\alpha T)'' dz dz + E_1 \int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)'' dz dz \right] = 0. \quad (3.26)
\end{aligned}$$

Принимая

$$Z_+ = Z_- = X_+ = X_- = 0,$$

$$\alpha T = \begin{cases} \alpha_2 t_2 (z - z_1), & \text{при } z \geq z_1 \\ \alpha_1 t_1 (z - z_1), & \text{при } z < z_1 \end{cases}, \text{ где } t_1 = \text{const}, t_2 = \text{const}$$

найдем:

$$w_0^s = \varepsilon^{-2} \frac{C_{wt1}}{C_{wt0}} \frac{x^2}{2} + \varepsilon^{-2} \frac{C_{wt2}}{C_{wt0}} \frac{x^3}{6} + C_{w3} x^3 + C_{w2} x^2 + C_{w1} x + C_{w0},$$

$$u_0^s = \frac{1}{2} \varepsilon w_0^{s'} \frac{(E_1 - E_2)(z_1^2 - 1)}{(E_1 - E_2)z_1 + (E_1 + E_2)} + C_u \frac{x^2}{2} + C_{u1} x + C_{u0}.$$

Здесь символом  $C$  с индексом обозначены произволы интегрирования, часть из которых определена в процессе решения, как это показана в разделе 2.3.2, из условия совместности уравнений

$$C_{wt0} = (E_1 + E_2) + (E_1 - E_2) \frac{1}{3} \left( z_1^3 - \frac{z_1^2}{2} \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[ (E_1 - E_2) \left( 2z_1 - \frac{z_1^2}{2} - \frac{1}{2} \right) - (E_1 + E_2) \right] \frac{(E_1 - E_2)(z_1^2 - 1)}{(E_1 - E_2)z_1 + (E_1 + E_2)},$$

$$C_{wt1} = E_1 \int_0^{z_1} \int_0^z \alpha T dz dz + E_2 \int_{z_1}^1 \int_0^z \alpha T dz dz - E_1 \int_0^{-1} \int_0^z \alpha T dz dz = E_1 \int_0^{z_1} \int_0^z \alpha_1 t_1 (z - z_1) dz dz +$$

$$, + E_2 \int_{z_1}^1 \int_0^z \alpha_2 t_2 (z - z_1) dz dz - E_1 \int_0^{-1} \int_0^z \alpha_1 t_1 (z - z_1) dz dz = E_2 \alpha_2 t_2 \left( \frac{z_1^3}{6} - \frac{z_1}{2} + \frac{1}{3} \right) +$$

$$+ E_1 \alpha_1 t_1 \left( -\frac{z_1^3}{3} + \frac{z_1}{2} + \frac{1}{6} \right),$$

$$C_{wt2} = E_1 \int_0^{z_1} \alpha T dz + E_2 \int_{z_1}^1 \alpha T dz + E_1 \int_0^{-1} \alpha T dz +$$

$$+ \frac{\left[ (E_1 - E_2) \left( 2z_1 - \frac{z_1^2}{2} - \frac{1}{2} \right) - (E_1 + E_2) \right]}{(E_1 - E_2)z_1 + (E_1 + E_2)} \left[ E_1 \int_0^{z_1} \alpha T dz + E_2 \int_{z_1}^1 \alpha T dz - E_1 \int_0^{-1} \alpha T dz \right] =$$

$$= E_2 \alpha_2 t_2 \left( \frac{1}{2} - z_1 + \frac{z_1^2}{2} \right) + E_1 \alpha_1 t_1 \left( \frac{1}{2} + z_1 - \frac{z_1^2}{2} \right) + \left[ \frac{(E_1 - E_2) \left( 2z_1 - \frac{z_1^2}{2} - \frac{1}{2} \right) - (E_1 + E_2)}{(E_1 - E_2)z_1 + (E_1 + E_2)} \right] \left[ E_2 \alpha_2 t_2 \left( \frac{1}{2} - z_1 + \frac{z_1^2}{2} \right) + E_1 \alpha_1 t_1 \left( \frac{1}{2} + z_1 - \frac{z_1^2}{2} \right) \right],$$

$$C_u = \frac{\varepsilon^{-1}}{(E_1 - E_2)z_1 + (E_1 + E_2)} \left( E_1 \int_0^{z_1} \alpha T dz + E_2 \int_{z_1}^1 \alpha T dz - E_1 \int_0^{-1} \alpha T dz \right),$$

$$\begin{aligned} E_1 \int_0^{z_1} \alpha T dz + E_2 \int_{z_1}^1 \alpha T dz - E_1 \int_0^{-1} \alpha T dz &= E_1 \int_0^{z_1} \alpha_1 t_1 (z - z_1) dz + E_2 \int_{z_1}^1 \alpha_2 t_2 (z - z_1) dz - \\ - E_1 \int_0^{-1} \alpha_1 t_1 (z - z_1) dz &= E_1 \alpha_1 t_1 \left( \frac{z^2}{2} - z_1 z \right) \Big|_0^{z_1} + E_2 \alpha_2 t_2 \left( \frac{z^2}{2} - z_1 z \right) \Big|_{z_1}^1 - E_1 \alpha_1 t_1 \left( \frac{z^2}{2} - z_1 z \right) \Big|_0^{-1} = \\ &= E_2 \alpha_2 t_2 \left( \frac{1}{2} - z_1 + \frac{z_1^2}{2} \right) - E_1 \alpha_1 t_1 \left( \frac{1}{2} + z_1 + \frac{z_1^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Заметим, что и в этом случае остаются справедливыми оценки основных неизвестных  $w_0^s$ ,  $u_0^s$ ,  $\tau_0^s$ ,  $\sigma_{z_0}^s$  по формулам (3.11), полученные для слоев равной толщины.

Проиллюстрируем полученные зависимости, выбрав следующие параметры слоев полосы. Верхний слой выполнен из стали; геометрические параметры: высота  $h_1 = 0.075$  м, длина  $l_1 = 1$  м; физико-механические характеристики: модуль упругости  $E_1^* = 2.1 \cdot 10^{11}$  Па, безразмерная жесткость  $E_1 = 1.3125$ , коэффициент линейного теплового расширения  $\alpha_1 = 1.2 \cdot 10^{-5} C^{-1}$ , коэффициент Пуассона  $\nu_1 = 0.3$ . Нижний слой – медный сплав; высота  $h_2 = 0.025$  м, длина  $l_2 = 1$  м; физико-механические характеристики: модуль упругости  $E_2^* = 1.1 \cdot 10^{11}$  Па, безразмерная жесткость  $E_2 = 0.6875$ , коэффициент линейного теплового расширения  $\alpha_2 = 1.8 \cdot 10^{-5} C^{-1}$ , коэффициент Пуассона  $\nu_2 = 0.34$ . Как и в предыдущей задаче примем  $\nu = 0.3$ .

Поле температуры выберем изменяющимся по линейному закону, как показано на Рис. 3.11. В качестве температуры, при которой тепловые деформации отсутствуют, принимаем значение в середине, равное  $31^{\circ}\text{C}$ . Градиенты температуры по слоям при этом относительно линии стыка слоев составили  $t_1^{\circ} = 19^{\circ}\text{C}$ ,  $t_2^{\circ} = 1^{\circ}\text{C}$ .

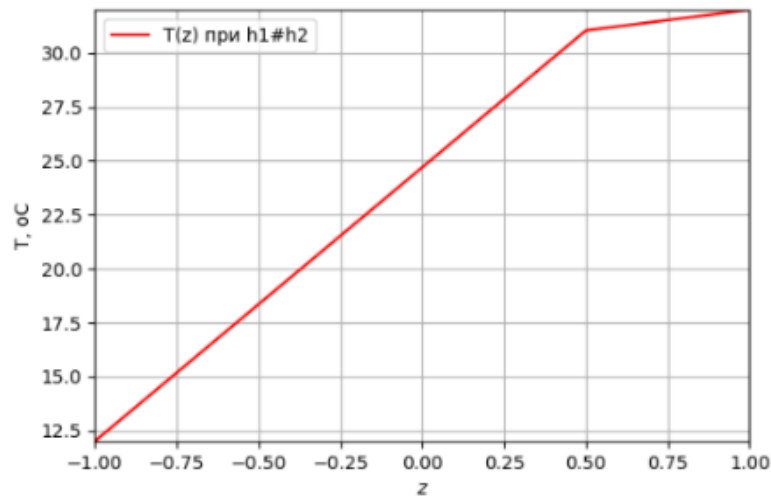


Рис. 3.11. Распределение температуры ( $^{\circ}\text{C}$ ) в поперечном сечении полосы

На Рис. 3.12÷Рис. 3.18 представлены графики распределения перемещений и напряжений, полученных в результате расчетов по вышеприведенным формулам.

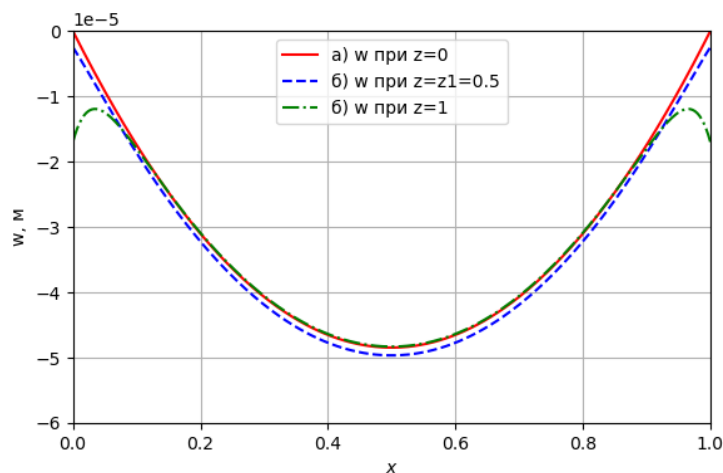


Рис. 3.12. Поперечные перемещения [м] в продольных сечениях: а) вдоль оси (при  $z = 0$ ); б) вдоль верхнего края полосы ( $z = 1$ )

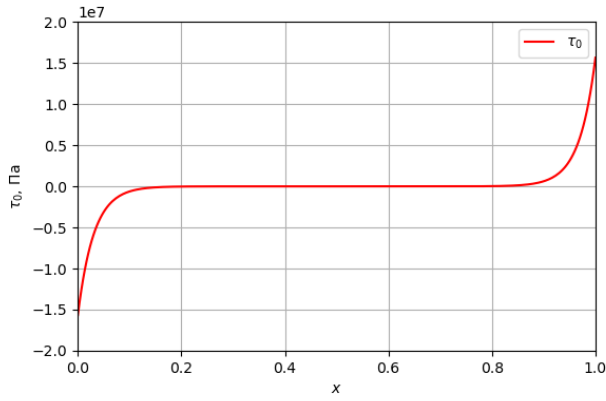


Рис. 3.13. Касательные напряжения [Па] в среднем продольном сечении

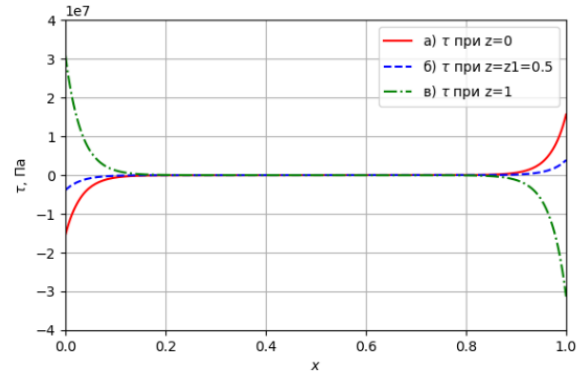


Рис. 3.14. Касательные напряжения [Па] в продольных сечениях: а) вдоль оси (при  $z = 0$ ); б) вдоль верхнего ( $z = 1$ ) и нижнего ( $z = -1$ ) краев (функция симметрична); в) вдоль линии, проходящей по центру верхнего слоя

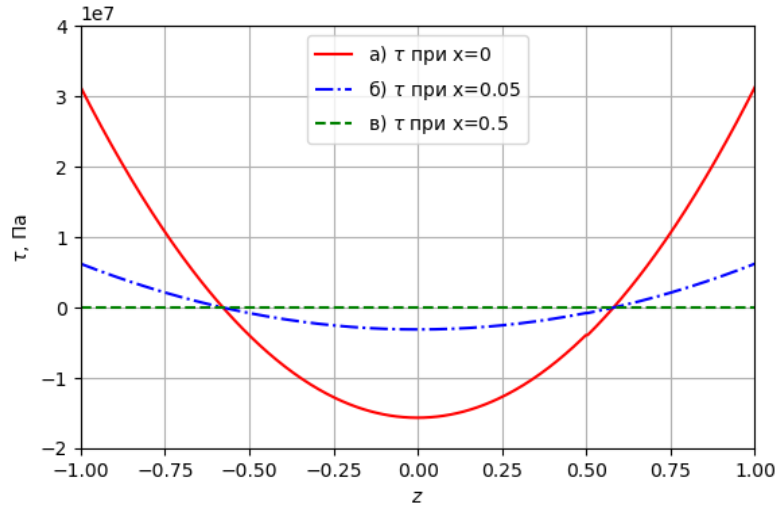


Рис. 3.15. Касательные напряжения [Па] в поперечных сечениях: а) в левой заделка; б) на удалении  $0,05l$  от нее в) посередине полосы

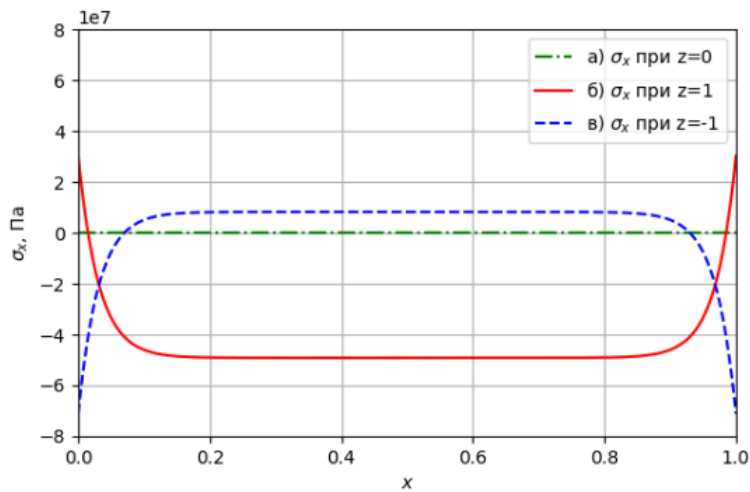


Рис. 3.16. Нормальные продольные напряжения [Па] в продольных сечениях: а) вдоль оси ( $z = 0$ ); б) вдоль верхнего ( $z = 1$ ); в) нижнего ( $z = -1$ ) краев полосы

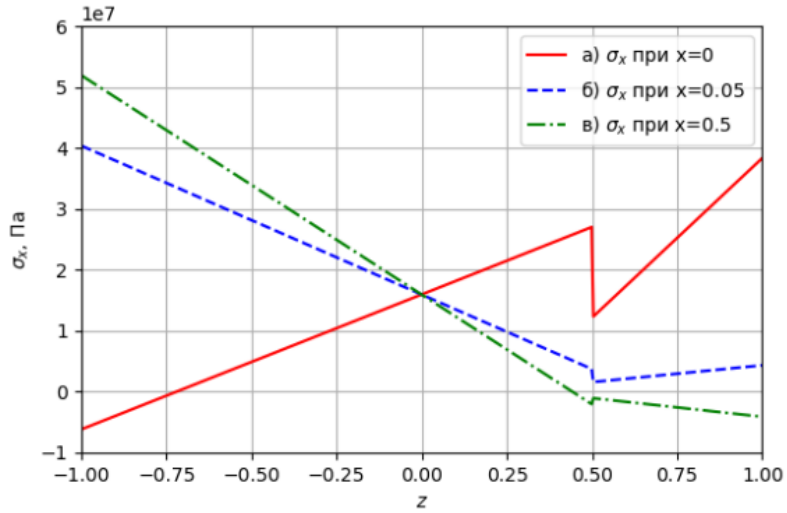


Рис. 3.17. Нормальные продольные напряжения [Па] в зависимости от поперечной координаты высоты: а) в левой заделка; б) на удалении  $0,05l$  от нее; в) посередине полосы

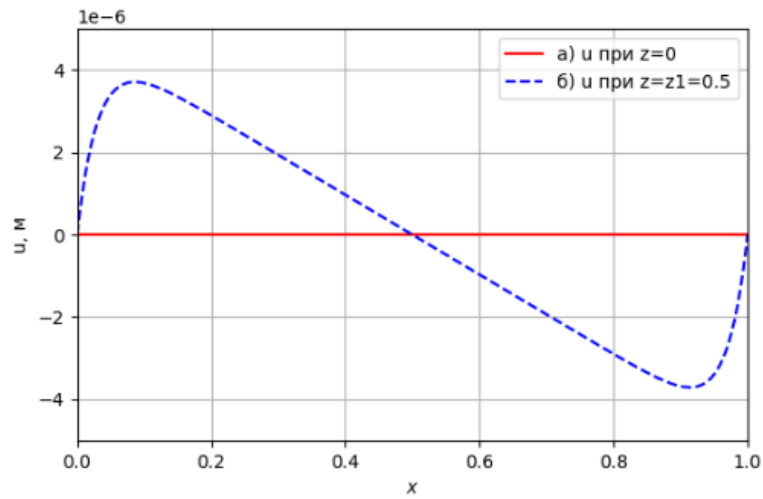


Рис. 3.18. Продольные перемещения [м] в продольных сечениях: а) вдоль верхнего края ( $z = 1$ ); б) вдоль оси ( $z = 0$ )

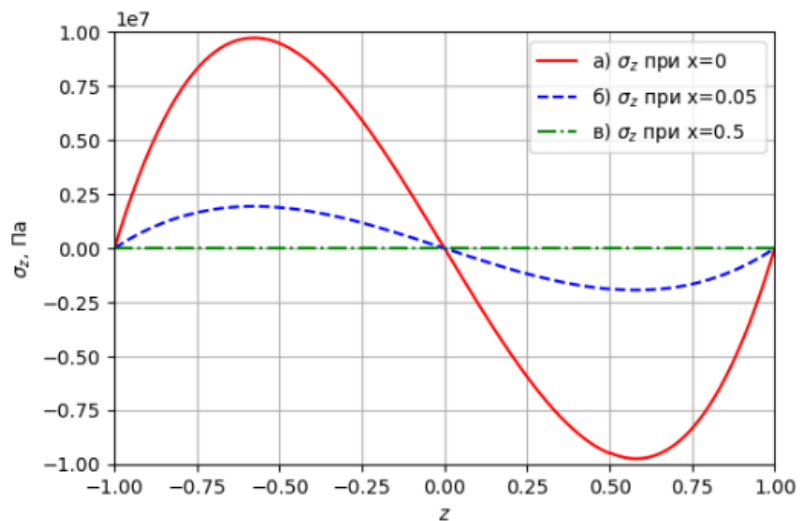


Рис. 3.19. Нормальные поперечные напряжения [Па] в поперечных сечениях: а) в левой заделка; б) на удалении  $0,05l$  от нее в) посередине полосы

Как видно из рисунков иллюстративная картина поперечных перемещений (Рис. 3.12), касательных напряжений (Рис. 3.13÷3.15), продольных перемещений (Рис. 3.18), поперечных нормальных напряжений (Рис. 3.19), качественно соответствует полученным случаю симметричного расположения слоев [6, 15].

Применительно к нормальным продольным напряжениям (Рис. 3.16) зависимость от продольной координаты имеет прежний характер и отвечает представлению о поведении балки при изгибе с добавлением к ним краевого эффекта и учетом различия упругих свойств слоев. Как следует из формул и (Рис. 3.17), разрывы возникают в нормальных продольных напряжениях на границе слоев и являются следствием различия жесткостей материалов [6, 15].

### 3.3. Полоса с произвольным количеством слоев различной толщины при действии механической нагрузки и поля температуры

#### 3.3.1. Выполнение граничных условий на лицевых сторонах

Обобщая модель до случая произвольного количества слоев заданной длины, следуя схеме решения методом SVPB, для граничных условий на длинных сторонах полосы (3.3) запишем уравнения пользуясь соотношениями первого приближения (3.2)

$$\varepsilon^3 w_0''' \tilde{E}_z^+ - \varepsilon^2 \tau_0'' \frac{1}{2}(2+\nu) - \varepsilon^2 u_0'' \tilde{E}^+ - \nu \varepsilon \sigma_{z_0}' + \tau_0 = X_+ - \varepsilon \int_0^1 E(\alpha T)' dz,$$

$$\varepsilon^3 w_0''' \tilde{E}_z^- - \varepsilon^2 \tau_0'' \frac{1}{2}(2+\nu) + \varepsilon^2 u_0'' \tilde{E}^- + \nu \varepsilon \sigma_{z_0}' + \tau_0 = X_- - \varepsilon \int_0^{-1} E(\alpha T)' dz,$$

$$\begin{aligned} -\varepsilon^4 w_0'''' \tilde{E}_z^+ + \varepsilon^3 \tau_0''' \frac{1}{6}(2+\nu) + \frac{1}{2} \varepsilon^3 u_0''' \tilde{E}^+ + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \nu \sigma_{z_0}'' - \varepsilon \tau_0' + \sigma_{z_0} = \\ = Z_+ + \varepsilon^2 \int_0^1 \int_0^z E(\alpha T)'' dz dz, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 w_0'''' \tilde{E}_z^- - \varepsilon^3 \tau_0''' \frac{1}{6}(2+\nu) + \frac{1}{2} \varepsilon^3 u_0''' \tilde{E}^- + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \nu \sigma_{z_0}'' + \varepsilon \tau_0' + \sigma_{z_0} = \\ = Z_- + \varepsilon^2 \int_0^{-1} \int_0^z E(\alpha T)'' dz dz. \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}\tilde{E}_z^+ &= \int_0^1 E z dz = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n E_i h_i^2, \quad \tilde{E}^+ = \int_0^1 E dz = \sum_{i=1}^n E_i h_i, \quad \tilde{E}_z^- = \int_0^{-1} E z dz = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m E_i h_i^2, \\ \tilde{E}^- &= \int_0^{-1} E dz = -\sum_{i=1}^m E_i h_i, \\ \tilde{\tilde{E}}_z^+ &= \int_0^1 \int_0^z E z dz dz = \sum_{i=1}^n E_i \left[ \frac{z_i^3}{6} - \frac{z_{i-1}^3}{6} - \frac{z_{i-1}^2}{2} h_i \right] + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-j} E_i h_{i+1} \left( \frac{z_i^2}{2} - \frac{z_{i-1}^2}{2} \right), \\ \tilde{\tilde{E}}^+ &= \int_{z_0}^1 \int_{z_0}^z E dz dz = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n E_i h_i^2 + \sum_{j=1}^{n-2} E_j h_j \sum_{i=j+1}^{n-1} h_i + h_n \sum_{i=1}^{n-1} E_i h_i, \\ \tilde{\tilde{E}}_z^- &= \int_0^{-1} \int_0^z E z dz dz = -\sum_{i=1}^m E_i \left[ \left( \frac{z_i^3}{6} - \frac{z_{i-1}^3}{6} \right) - \frac{z_{i-1}^2}{2} h_i \right] - \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{m-j} E_i h_{i+1} \left( \frac{z_i^2}{2} - \frac{z_{i-1}^2}{2} \right), \\ \tilde{\tilde{E}}^- &= \int_{z_0}^{-1} \int_{z_0}^z E dz dz = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m E_i h_i^2 + \sum_{j=1}^{m-2} E_j h_j \sum_{i=j+1}^{m-1} h_i + h_n \sum_{i=1}^{m-1} E_i h_i.\end{aligned}$$

Вычисление интегралов для верхней ( $z^* = h$ ) и нижней ( $z^* = -h$ ) сторон полосы ведется от  $z^* = 0$  сквозь все слои. Количество верхних слоев –  $n$ , нижних –  $m$ . Индексы в параметрах физических величин  $E_i$  (безразмерное значение функции  $E(z)$  для слоя;  $i$  – целые числа),  $h_i$  (относительная толщина слоя – в долях от полутолщины полосы) указывают на номер слоя, к которым они относятся. Нумерация слоев ведется от внутреннего, независимо для верхней и нижней сторон полосы. Если линия  $z^* = 0$  проходит сквозь слой, то он условно разделяется на два слоя. Коэффициент Пуассона положен равным для всех слоев  $\nu_i = \nu$  (величины одного порядка). Числа  $z_i$  – безразмерные координаты внешних границ слоев.

В отличие от случая изотропной полосы [197], дифференциальные уравнения граничных условий обычным путем не разделяются. Но, вводя также представления о быстро и медленно меняющихся функциях, можно прийти к результирующим соотношениям. Для медленно меняющихся величин,

(обозначаемых индексом « $s$ », при дифференцировании асимптотический порядок, измеряемый степенью малого параметра  $\varepsilon$ , не изменяется. Тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 A w_0^{s''''} &= Z_+ - Z_- + \varepsilon (X_+' + X_-') + \\ &+ \varepsilon \frac{1}{\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-} (X_+' - X_-') + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2} \left[ \int_0^1 E(\alpha T)'' dz - \int_0^{-1} E(\alpha T)'' dz \right] + \\ &+ \varepsilon^2 \left[ \int_0^1 \int_0^z E(\alpha T)'' dz dz - \int_0^{-1} \int_0^z E(\alpha T)'' dz dz - \int_0^1 E(\alpha T)'' dz - \int_0^{-1} E(\alpha T)'' dz \right], \\ \text{где } A &= \left( \tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^- - \tilde{\tilde{E}}_z^+ - \tilde{\tilde{E}}_z^- \right) + \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-} \left( \tilde{E}^+ - \tilde{E}^- - \tilde{\tilde{E}}^+ + \tilde{\tilde{E}}^- \right), \\ \text{где } A &= \left( \tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^- - \tilde{\tilde{E}}_z^+ - \tilde{\tilde{E}}_z^- \right) + \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-} \left( \tilde{E}^+ - \tilde{E}^- - \tilde{\tilde{E}}^+ + \tilde{\tilde{E}}^- \right), \\ \varepsilon^3 u_0^{s''''} &= \varepsilon^4 w_0^{s''''} \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-} - \varepsilon \frac{1}{\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-} (X_+' - X_-') + \varepsilon \left[ \int_0^1 E(\alpha T)' dz - \int_0^{-1} E(\alpha T)' dz \right], \\ 2\sigma_{z0}^s &= Z_+ + Z_- + \varepsilon^4 w_0^{s''''} \left( \tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^- \right) - \varepsilon^3 u_0^{s''''} \left( \tilde{E}^+ + \tilde{E}^- \right) + \\ &+ \varepsilon^2 \left[ \int_0^1 \int_0^z E(\alpha T)'' dz dz + \int_0^{-1} \int_0^z E(\alpha T)'' dz dz \right]. \end{aligned}$$

Для быстро меняющихся, отмеченных индексом « $q$ », применительно к которым  $\partial/\partial x \sim \varepsilon^{-1}$  справедливо

$$(2 + \nu) \varepsilon^3 \tau_0^{q''''} - 6\varepsilon \tau_0^{q'} = 0.$$

Полученные уравнения являются сбалансированными в плане сохранения в них величин, обладающих сопоставимым асимптотическим порядком. Медленно меняющееся решение соответствует внутренней области в отсутствии сингулярностей. Быстро меняющееся – имеет характер краевого эффекта [7].

Также оказываются верны следующие асимптотические оценки

$$\sigma_{z0}^s \sim \varepsilon^4 w_0^s, \quad \sigma_{z0}^s \sim \varepsilon^3 u_0^s, \quad \tau_0^s \sim \varepsilon^3 w_0^{s''''}. \quad (3.27)$$

Если на полосу воздействует только поле температуры, то решением будет

$$\begin{aligned}
\varepsilon^4 A w_0^{s''''} &= \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2} \left[ \int_0^1 E(\alpha T)'' dz - \int_0^{-1} E(\alpha T)'' dz \right] + \\
&+ \varepsilon^2 \left[ \int_0^1 \int_0^z E(\alpha T)'' dz dz - \int_0^{-1} \int_0^z E(\alpha T)'' dz dz - \int_0^1 E(\alpha T)'' dz - \int_0^{-1} E(\alpha T)'' dz \right], \\
\varepsilon^3 u_0^{s''''} &= \varepsilon^4 w_0^{s''''} \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-} + \varepsilon \left[ \int_0^1 E(\alpha T)' dz - \int_0^{-1} E(\alpha T)' dz \right], \\
2\sigma_{z0}^s &= \varepsilon^4 w_0^{s''''} (\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-) - \varepsilon^3 u_0^{s''''} (\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-) + \\
&+ \varepsilon^2 \left[ \int_0^1 \int_0^z E(\alpha T)'' dz dz + \int_0^{-1} \int_0^z E(\alpha T)'' dz dz \right], \\
2\tau_0^s &= -\varepsilon^3 w_0^{s''''} (\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^-) + \varepsilon^2 u_0^{s''} (\tilde{E}^+ - \tilde{E}^-) - \varepsilon \left[ \int_0^1 E(\alpha T)' dz + \int_0^{-1} E(\alpha T)' dz \right],
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\tau_0^q = \begin{cases} C_{\tau 1} e^{-\frac{k}{\varepsilon} x} & \text{при } x \geq 0 \\ C_{\tau 2} e^{-\frac{k(1-x)}{\varepsilon}} & \text{при } x \leq 1 \end{cases}, \quad k^2 = \frac{6}{2 + \nu}, \tag{3.29}$$

где  $C_{\tau i}$  – константы интегрирования.

В случае линейного изменения температуры по толщине, имеем

$$\begin{aligned}
w_0^s(x) &= \varepsilon^{-2} C_{w1} x^2 + C_{w3} x^3 + C_{w2} x^2 + C_{w1} x + C_{w0}, \\
u_0^s(x) &= \varepsilon^{-1} C_{u1} x + \varepsilon^{-2} C_{u2} x^2 + C_{u2} x^2 + C_{u1} x + C_{u0}, \\
\sigma_{z0}^s &= 0, \tau_0^s = -3\varepsilon^3 C_{w3} (\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^-) + (\varepsilon^2 C_{u2} + C_{u2}) (\tilde{E}^+ - \tilde{E}^-),
\end{aligned} \tag{3.30}$$

где

$$\begin{aligned}
C_{w1} &= \frac{1}{2A} \left[ \int_0^1 \int_0^z E \alpha T dz dz - \int_0^{-1} \int_0^z E \alpha T dz dz - \frac{E_1 + 3E_2}{2(E_1 + E_2)} \int_0^1 E \alpha T dz - \frac{3E_1 + E_2}{2(E_1 + E_2)} \int_0^{-1} E \alpha T dz \right], \\
C_{u1} &= \frac{1}{A} \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-} \left[ \int_0^1 \int_0^z E \alpha T dz dz - \int_0^{-1} \int_0^z E \alpha T dz dz - \right. \\
&\quad \left. - \frac{E_1 + 3E_2}{2(E_1 + E_2)} \int_0^1 E \alpha T dz - \frac{3E_1 + E_2}{2(E_1 + E_2)} \int_0^{-1} E \alpha T dz \right], \\
C_{u2} &= \frac{1}{2} \left( \int_0^1 E \alpha T dz - \int_0^{-1} E \alpha T dz \right)
\end{aligned}$$

постоянные интегрирования, которые находятся при удовлетворении граничных условий на торцах полосы.

### 3.3.2. Выполнение условий на коротких сторонах полосы

Рассмотрим полосу с тремя слоями, расположенными следующим образом. Один из них – центральный, два других расположены симметрично относительно него. Принимаем материалы двух внешних слоев одинаковыми.

Поле температуры задаем линейной функцией интервально. Ось  $z = 0$  проходит по центру вдоль внутреннего слоя. Границы интервалов соответствуют стыкам слоев. Тогда

$$\alpha T(z) = \begin{cases} \alpha_1 t_1 z_1 + \alpha_2 t_2 (z - z_1), \text{ при } z \geq z_1 \\ \alpha_0 t_0 z_0 + \alpha_1 t_1 (z - z_0), \text{ при } z_1 \geq z \geq -z_1 \\ -\alpha_1 t_1 z_1 + \alpha_2 t_2 (z + z_1), \text{ при } z \leq -z_1 \end{cases} \quad (3.31)$$

Здесь  $\alpha_1, \alpha_2$  – коэффициенты линейного температурного расширения внутреннего и внешних слоев, соответственно;  $t_0, t_1, t_2$  – значения температуры (постоянные величины), соответствующие координатам  $z = 0$ ,  $z = z_1$  и  $z = -z_1$ .

Считаем полосу консольно закрепленной

$$\begin{aligned} u = 0, \quad w = 0 \quad \text{при } x = 0, \\ \sigma_x = 0, \quad \tau = 0 \quad \text{при } x = 1. \end{aligned}$$

Эти условия с достаточной точностью выполняются по формулам (3.2).

Для левого края при жестком закреплении ( $x = 0$ ), такие условия приводят к следующим соотношениям:

– для верхней части внутреннего слоя

$$\left[ -\varepsilon w_0' + 2(1 + \nu) \frac{\tau_0}{E_1} \right] (z - z_0) + u_0 = 0,$$

$$\left[ \nu \varepsilon^2 w_0'' - \varepsilon \tau_0' \frac{(1+\nu)^2}{E_1} \right] \left( \frac{z^2}{2} - \frac{z_0^2}{2} \right) + \left[ (1-\nu^2) \sigma_{z_0} \frac{1}{E_1} - \nu \varepsilon u_0' \right] (z - z_0) + \\ + (1+\nu) \left[ (\alpha_0 t_0 - \alpha_1 t_1) z_0 (z - z_0) + \alpha_1 t_1 \left( \frac{z^2}{2} - \frac{z_0^2}{2} \right) \right] + w_0 = 0,$$

– для верхнего наружного слоя

$$-\varepsilon w_0' \left[ (z_1 - z_0) + (z - z_1) \right] + 2(1+\nu) \tau_0 \left[ \frac{1}{E_1^+} (z_1 - z_0) + \frac{1}{E_2^+} (z - z_1) \right] + u_0 = 0,$$

$$\nu \varepsilon^2 w_0'' \left[ \left( \frac{z_1^2}{2} - \frac{z_0^2}{2} \right) + \left( \frac{z^2}{2} - \frac{z_1^2}{2} \right) \right] - \varepsilon \tau_0' \left\{ (1+\nu)^2 \left[ \frac{1}{E_1^+} \left( \frac{z_1^2}{2} - \frac{z_0^2}{2} \right) + \frac{1}{E_2^+} \left( \frac{z^2}{2} - \frac{z_1^2}{2} \right) \right] \right\} + \\ + \left[ (1-\nu^2) \sigma_{z_0} - \nu \varepsilon u_0' \right] \left[ \frac{1}{E_1^+} (z_1 - z_0) + \frac{1}{E_2^+} (z - z_1) \right] + \\ + (1+\nu) \left[ \alpha_1 t_1 \left( \frac{z_1^2}{2} - \frac{z_0^2}{2} \right) + (\alpha_1 t_1 - \alpha_2 t_2) z_1 (z - z_1) + \alpha_2 t_2 \left( \frac{z^2}{2} - \frac{z_1^2}{2} \right) \right] + w_0 = 0.$$

Если из выражений для наружного слоя на границе  $z = z_1$  вычесть аналогичные выражения для внутреннего, то полученные зависимости по форме будут в точности совпадать с выражениями для внутреннего слоя. По аналогии с выкладками пункта 2.4.2 можно показать, что форма соотношений сохраняется при произвольном количестве слоев. Они являются однотипными дополнительными требованиями при выполнении условий для каждого последующего слоя. Их сложность не наращивается. Ход рассуждений для слоев нижней стороны полосы – аналогичен.

Характер и форма выражений для условия свободного края (при  $x = 1$ ) в верхней части внутреннего слоя будут следующими

$$\left[ -E_1 \varepsilon^2 w_0'' + \varepsilon \tau_0' (2+\nu) \right] z - E_1 \left[ \alpha_0 t_0 z_0 + \alpha_1 t_1 (z - z_0) \right] + E_1 \varepsilon u_0' + \nu \sigma_{z_0} = 0,$$

$$\left[ \varepsilon^3 w_0''' E_1 - \varepsilon^2 \tau_0'' (2+\nu) \right] \left( \frac{z^2}{2} - \frac{z_0^2}{2} \right) - \left( \varepsilon^2 u_0'' E_1 + \nu \varepsilon \sigma_{z_0}' \right) (z - z_0) + \tau_0 = 0.$$

Равенство нулю выражений в целом позволяет полагать обращающимися в ноль их части, присутствующие в виде множителей при различных степенях  $z$ .

Тогда в заделке при  $z > 0$  имеем восемь условий

$$u_0 = 0, \\ -\varepsilon w_0' + \frac{2(1+\nu)}{E_i^+}(\tau_0^s + \tau_0^q) = 0, \quad i=1,2, \quad (3.32)$$

$$w_0 = 0, \\ \sigma_{z0} \frac{1-\nu^2}{E_i^+} - \nu \varepsilon u_0' = 0, \quad i=1,2, \\ \nu \varepsilon^2 w_0'' - \varepsilon(\tau_0^{s'} + \tau_0^{q'}) \frac{(1+\nu)^2}{E_i^+} + (1+\nu)\alpha_i t_i = 0, \quad i=1,2. \quad (3.33)$$

Здесь учтено, что  $\tau_0 = \tau_0^s + \tau_0^q$ . Также на свободном краю:

$$-E_i \varepsilon^2 w_0'' + \varepsilon \tau_0^{q'}(2+\nu) - E_i \alpha_i t_i = 0, \quad i=1,2, \\ E_i \varepsilon u_0' + \nu \sigma_{z0} = 0, \quad i=1,2, \quad (3.34)$$

$$\tau_0^s + \tau_0^q = 0, \quad \varepsilon^2 u_0'' E_i + \varepsilon \nu \sigma_{z0}' = 0, \\ \varepsilon^3 w_0''' E_i - \varepsilon^2 \tau_0^{q''}(2+\nu) = 0. \quad (3.35)$$

Как и ранее, отбросим составляющие, оцениваемые асимптотически как относительно малые:  $\tau_0^s \sim \varepsilon^3 w_0$  (в силу (3.28)) в уравнениях (3.32), (3.33) и  $\sigma_{z0}^s \sim \varepsilon^3 u_0^s$  (в соответствии с (3.27)) в соотношениях (3.34), (3.35), и подставив в получаемые выражения известные формы решений основных неизвестных (3.30), (3.29), получим после преобразований

$$w_0^s(x) = -\varepsilon^{-2} \alpha_1 t_1 \frac{x^2}{2}, \quad u_0^s = 0, \quad \tau_0^s = 0, \quad \sigma_{z0}^s = 0, \quad \tau_0^q = -\varepsilon^{-1} \frac{\alpha_1 t_1 E_1^+}{k(1+\nu)^2} e^{-\frac{k}{\varepsilon} x}. \quad (3.36)$$

Требуемые функции напряженно-деформированного состояния для заданного приближения итерационного процесса (3.2) вычислим путем подстановки в них  $u_0, \sigma_{z0}, w_0, \tau_0$  согласно (3.36). Тогда

$$u_{(0)} = -\varepsilon w_0' z + \tau_0 \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz, \quad (3.37)$$

$$\varepsilon_{x(0)} = -\varepsilon^2 w_0'' z + \varepsilon \tau_0' \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz, \quad (3.38)$$

$$\sigma_{z(0)} = -\varepsilon \tau_0' z, \quad (3.39)$$

$$\sigma_{x(0)} = -E \varepsilon^2 w_0'' z + \varepsilon \tau_0' \left[ E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz - \nu z \right] - E \alpha T, \quad (3.40)$$

$$\varepsilon_{z(0)} = \nu \varepsilon^2 w_0'' z - \varepsilon \tau_0' \left[ \nu \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz + \frac{1-\nu^2}{E} z \right] + (1+\nu) \alpha T, \quad (3.41)$$

$$w_{(1)} = \varepsilon^2 w_0'' \int_0^z \nu z dz - \varepsilon \tau_0' (1+\nu)^2 \int_0^z \frac{z}{E} dz + \int_0^z (1+\nu) \alpha T dz + w_0, \quad (3.42)$$

$$\tau(x, z) = -\varepsilon^2 \tau_0'' (2+\nu) \frac{z^2}{2} + \tau_0, \quad (3.43)$$

$$\sigma_z(x, z) = \varepsilon^3 \tau_0''' (2+\nu) \frac{z^3}{6} - \varepsilon \tau_0' z. \quad (3.44)$$

Равенства выполняются здесь приближенно.

Приведем результаты вычислений для модели со следующими исходными данными. Полоса длиной  $l=1\text{ м}$  состоит из материалов: внешних слоев – сплав меди с толщиной каждого слоя –  $h_2=0.025\text{ м}$ , внутреннего слоя – стали с толщиной слоя –  $h_2=0.025\text{ м}$ . Физико-механические характеристики материалов следующие: для сплава меди –  $E_2^*=1.1 \cdot 10^{11}\text{ Па}$ ,  $\alpha_2=1.8 \cdot 10^{-5}\text{ C}^{-1}$ ; для стали –  $E_1^*=2.1 \cdot 10^{11}\text{ Па}$ ,  $\alpha_1=1.2 \cdot 10^{-5}\text{ C}^{-1}$ . В расчетах принимаем средние значения: модуля упругости  $E_h^*=1.6 \cdot 10^{11}\text{ Па}$ ; безразмерных величин  $E_1=1.3125$ ,  $E_2=0.6875$ ; коэффициента Пуассона  $\nu=\nu_1=\nu_2=0.3$ .

Графики, иллюстрирующие полученные результаты, приведены на Рис. 3.20÷Рис. 3.25. Из чего видно, что поле температуры зависит только от поперечной координаты (Рис. 3.20). Начальная температура, при которой деформации отсутствуют, соответствует точке  $z=0$  на графике.

Зависимость поперечных перемещений  $w$  от продольной координаты имеет

вид, представленный на Рис. 3.21. Условия защемления: левый край трехслойной полосы защемлен, правый свободен. Расчет проведен по формуле (3.42). Краевой эффект заметно не проявляется ввиду преобладания основного решения над вкладом быстроизменяющейся компоненты  $\tau_0^q$ , как это следует из (3.27).

На графиках Рис. 3.22 показано распределение  $\tau(x)$  при различных значениях координаты  $z$ , полученных по формуле (3.43). Протяженность краевой зоны в области заделки составляет примерно  $2h$ , где  $h$  – полутолщина трехслойной полосы. Здесь влияние быстроизменяющейся составляющей хорошо заметно.

Графики зависимости нормальных напряжений от поперечной координаты, построенные в сечении  $z = 0$  заметно отличаются от полученных значениях при удалении от края (Рис. 3.23, Рис. 3.24). Для расчета использованы зависимости (3.40) и (3.44), соответственно. Здесь граничные условия на лицевых сторонах (3.3) для напряжений  $\sigma_z$  выполнены точно. По функции  $\tau$  они удовлетворяются асимптотически, которая при удалении от угловой точки, являющейся особой.

Различие физических свойств материала слоев влияет не только на угол наклона графиков продольных напряжений (Рис. 3.24), что указано в обычной теории для изотропного материала линейными, но и вносит конечные разрывы, подобные, в частности, отмеченным в работах [186]. Как следует из (3.41), подобные разрывы присутствуют и в функции  $\varepsilon_z$  (Рис. 3.25).

Максимумы поперечных нормальных напряжений, которые не учитываются в классической теории, видны на Рис. 3.23. Экстремумы нормальных и касательных напряжений в краевой зоне и на границах слоев (для  $\sigma_x$ ), способны оказать разрушающее воздействие на структуру слоистого материала.

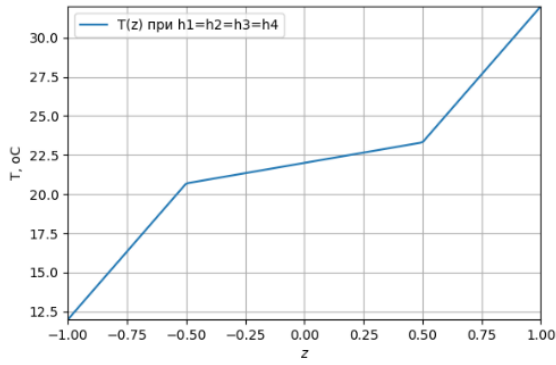


Рис. 3.20. Распределение температуры ( $^{\circ}\text{C}$ ) по безразмерной толщине полосы

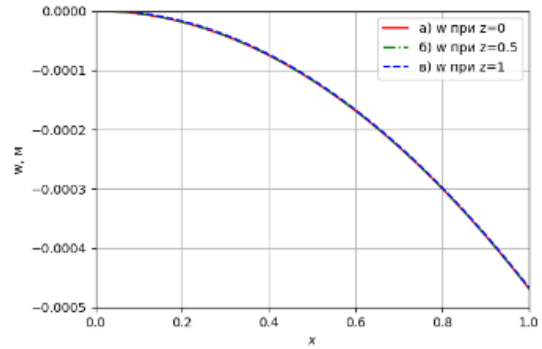


Рис. 3.21. Поперечные перемещения [м] в продольных сечениях полосы

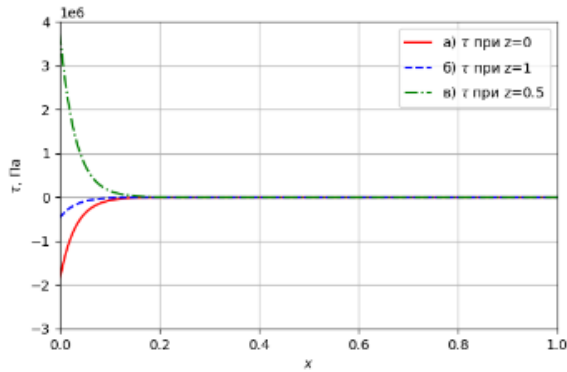


Рис. 3.22. Касательные напряжения [Па] в продольных сечениях

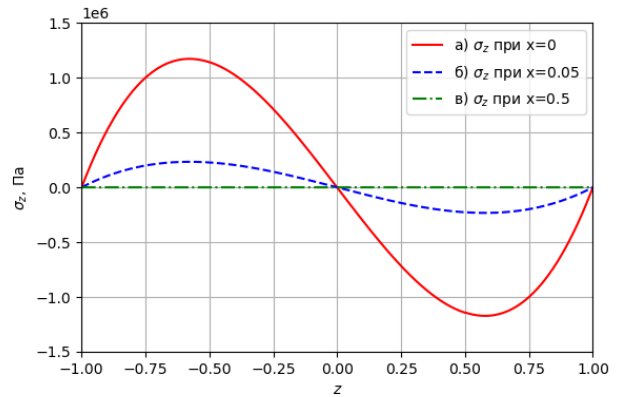


Рис. 3.23. Нормальные продольные напряжения [Па] в поперечных сечениях

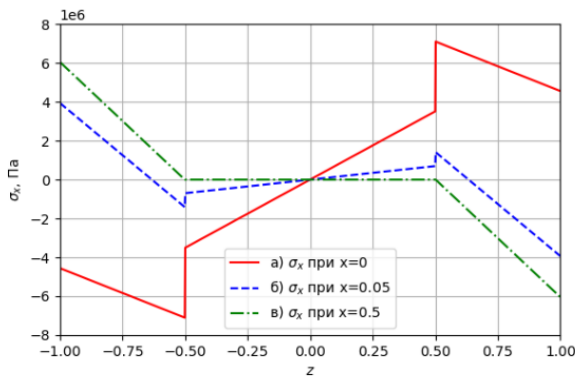


Рис. 3.24. Нормальные продольные напряжения [Па] в поперечных сечениях

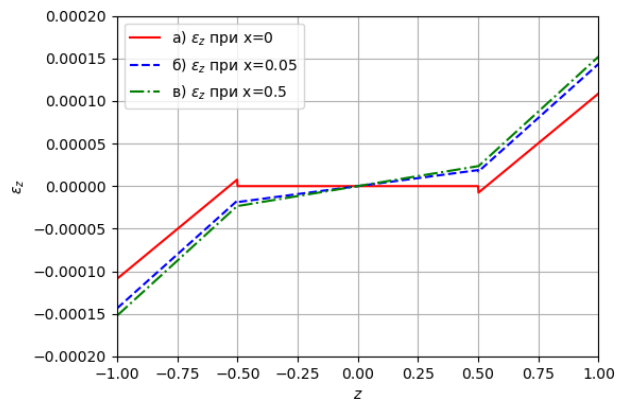


Рис. 3.25. Поперечные деформации в поперечных сечениях

### 3.4. Выводы по третьей главе

1. Дано обобщение приложения метода Сен-Венана – Пикара – Банаха к случаю совместного действия механической нагрузки и поля температуры для тонкостенного тела слоистой структуры на задаче для прямоугольной полосы.

2. Для общего случая в нулевом и первом приближениях рассчитаны соотношения, связывающие искомые неизвестные с новыми основными неизвестными задачи. Получены выполнением граничных условий на длинных сторонах (в соответствии с методом) разрешающие соотношения.

3. Для случая заданного распределения поля температуры найдены с точностью до констант интегрирования формы медленно меняющихся (основное решение) и быстро меняющихся (типа краевого эффекта) составляющих основных неизвестных. Последовательно рассмотрены случаи двуслойной полосы (с симметричным и несимметричным расположением слоев) и произвольного количества слоев. Константы интегрирования для рассмотренных случаев граничных условий на коротких сторонах полосы вычислены аналитически. В качестве иллюстрации приведены численные результаты.

4. Возможность получения аналитического результата в компактной аналитической форме обеспечена в значительной степени применением аппарата асимптотик. Решение найдено на соотношениях нулевого и первого приближений. Выполнены все граничные условия задачи (в части касательных напряжений на поверхности для данного приближения – асимптотически).

5. Полученные пространственные зависимости не только дают возможность определять области наибольших напряжений (покомпонентно) и их величины, но также оценивать опасность воздействия сочетаний их компонент на составляющие слоистого материала по известным методикам [183, 196].

## ГЛАВА IV. ТРЕХМЕРНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ

Задача о деформировании прямоугольной пластины (в том числе для случая слоистого материала) решается на уравнениях теории упругости как обобщение развиваемого подхода. Рассматривается действие механической нагрузки на поверхности тонкостенного объекта и влияние поля температуры.

### 4.1. Изотропная пластина при механическом и температурном нагружении

#### 4.1.1. Последовательность приближенных соотношений для искомым неизвестных

В качестве исходных возьмем уравнения теории упругости [40] в декартовых координатах  $x^* y^* z^*$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \tau_{xz}^*}{\partial z^*} + \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial y^*} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y^*}{\partial y^*} + \frac{\partial \tau_{yz}^*}{\partial z^*} + \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial x^*} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z^*} + \frac{\partial \tau_{xz}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \tau_{yz}^*}{\partial y^*} = 0, \\ \tau_{xy}^* = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right), \quad E\varepsilon_x = \sigma_x^* - \nu(\sigma_y^* + \sigma_z^*), \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u^*}{\partial x^*}, \\ \tau_{xz}^* = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right), \quad E\varepsilon_y = \sigma_y^* - \nu(\sigma_x^* + \sigma_z^*), \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v^*}{\partial y^*}, \\ \tau_{yz}^* = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial y^*} \right), \quad E\varepsilon_z = \sigma_z^* - \nu(\sigma_x^* + \sigma_y^*), \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w^*}{\partial z^*}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

относительно 12 неизвестных:  $\sigma_x^*, \sigma_y^*, \sigma_z^*$  (нормальные напряжения),  $\tau_{xz}^*, \tau_{yz}^*, \tau_{xy}^*$  (касательные напряжения),  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  (линейные деформации),  $u^*, v^*, w^*$  (перемещения в направлениях, соответствующих направлениям координатных осей). Звездочкой отмечено, как и ранее, размерные величины.

Срединную плоскость пластины разместим в пространстве таким образом, что  $0 \leq x^* \leq a$ ,  $0 \leq y^* \leq b$  и  $-h \leq z^* \leq h$ , где  $2a$  – длина,  $2b$  – ширина и  $2h$  – толщина пластины. Введем безразмерные координаты  $x = x^*/a$ ,  $y = y^*/a$ ,

$z = z^*/h$ , и, соответственно безразмерные величины: перемещения  $u = u^*/h$ ,  $v = v^*/h$ ,  $w = w^*/h$  вдоль осей  $x^*, y^*, z^*$ ; напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ , полученные отнесением размерных величин к модулю упругости  $E$ .

Принимаем, что размеры пластины в плоскости соизмеримы между собой  $a, b \sim \varepsilon^0$ . Отметим, что  $\varepsilon = h/a$  – малый параметр тонкостенности, применяемый для асимптотических оценок [11]. Безразмерные уравнения в этих переменных, запишем следующим образом [9]

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial w}{\partial x} + 2(1+\nu)\tau_{xz}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial w}{\partial y} + 2(1+\nu)\tau_{yz}, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}, \quad \varepsilon_x = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha T, \quad \varepsilon_y = \varepsilon \frac{\partial v}{\partial y} + \alpha T,$$

$$\sigma_x = \frac{1}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) + \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_z, \quad \sigma_y = \frac{1}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) + \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_z, \quad (4.3)$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2(1+\nu)}\left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \varepsilon \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}, \quad (4.4)$$

$$\varepsilon_z = \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) + \alpha T, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z, \quad (4.5)$$

добавив при их получении в физических выражениях для  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  отвечающие за температурную деформацию члены  $\alpha T$  [197], где  $\alpha = \alpha(x, y, z)$  – коэффициент линейного температурного расширения материала,  $T = T(x, y, z)$  – температура относительно некоторой начальной, при которой ее вклад в напряженно-деформированное состояние считается отсутствующим.

Отметим, что в уравнениях, (4.2)-(4.5) производные по  $z$  вынесены в левую часть. Члены со множителями малого параметра вынесены в правую часть уравнений. Такой подход [11] позволяет построить процедуру вычислений так, чтобы вычисленная через предыдущую величину следующая величина приобретала малый множитель. Прием последовательного определения неизвестных реализован в соответствующем преобразовании выражений

упругости для нормальных напряжений и деформаций.

Предположим, что в уравнениях (4.2) величины  $w, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  известны. Проинтегрируем их по координате  $z$ , получим перемещения  $u, v$  и поперечное напряжение  $\sigma_z$ . По известным  $u, v$  и  $\tau_{xy}$  из формулы (4.3) определим деформации пластины  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  в плоскости  $xu$ . В таком случае в правых частях соотношений (4.2) стоят теперь известные величины. Определение напряжений в плоскости  $\sigma_x, \sigma_y$  и поперечной деформации  $\varepsilon_z$  не вызывает никаких трудностей. Путем прямого интегрирования уравнений (4.4) по  $z$  определяем искомые  $\tau_{xz}, \tau_{yz}, w$ .

В действительности, величины  $w, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  неизвестны. Однако, их можно задать как некоторые величины начального приближения  $w_0, \tau_{xz0}, \tau_{yz0}$ , и описанный процесс вычисления представить как итерационный

$$\begin{aligned}
 u_{(0)} &= -\varepsilon \int \frac{\partial w_0}{\partial x} dz + 2(1+\nu) \int \tau_{xz0} dz + u_0(x, y), \\
 v_{(0)} &= -\varepsilon \int \frac{\partial w_0}{\partial y} dz + 2(1+\nu) \int \tau_{yz0} dz + v_0(x, y), \\
 \sigma_{z(0)} &= \int \left( -\varepsilon \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \right) dz + \sigma_{z0}(x, y), \\
 \varepsilon_{x(0)} &= \varepsilon \frac{\partial u_{(0)}}{\partial x} + \alpha T, \quad \varepsilon_{y(0)} = \varepsilon \frac{\partial v_{(0)}}{\partial y} + \alpha T, \\
 \tau_{xy(0)} &= \frac{1}{2(1+\nu)} \left( \varepsilon \frac{\partial u_{(0)}}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial v_{(0)}}{\partial x} \right), \\
 \sigma_{x(0)} &= \frac{1}{1-\nu^2} (\varepsilon_{x(0)} + \nu \varepsilon_{y(0)}) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{z(0)}, \\
 \sigma_{y(0)} &= \frac{1}{1-\nu^2} (\varepsilon_{y(0)} + \nu \varepsilon_{x(0)}) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{z(0)}, \\
 \varepsilon_{z(0)} &= \sigma_{z(0)} - \nu (\sigma_{x(0)} + \sigma_{y(0)}) + \alpha T,
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\tau_{xz(1)} = \int \left( -\varepsilon \frac{\partial \sigma_{x(0)}}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial \tau_{xy(0)}}{\partial y} \right) dz + \tau_{xz0}(x, y),$$

$$\tau_{yz(1)} = \int \left( -\varepsilon \frac{\partial \sigma_{y(0)}}{\partial y} - \varepsilon \frac{\partial \tau_{xy(0)}}{\partial x} \right) dz + \tau_{yz0}(x, y),$$

$$w_{(1)} = \int \varepsilon_{z(0)} dz + w_0(x, y),$$

$$u_{(1)} = -\varepsilon \int \frac{\partial w_{(1)}}{\partial x} dz + 2(1+\nu) \int \tau_{xz(1)} dz + u_{(0)},$$

$$v_{(1)} = -\varepsilon \int \frac{\partial w_{(1)}}{\partial y} dz + 2(1+\nu) \int \tau_{yz(1)} dz + v_{(0)},$$

$$\sigma_{z(1)} = \int \left( -\varepsilon \frac{\partial \tau_{xz(0)}}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial \tau_{yz(0)}}{\partial y} \right) dz + \sigma_{z(0)}(x, y),$$

$$\varepsilon_{x(1)} = \varepsilon \frac{\partial u_{(1)}}{\partial x} + \varepsilon_{x(0)}, \quad \varepsilon_{y(1)} = \varepsilon \frac{\partial v_{(1)}}{\partial y} + \varepsilon_{y(0)},$$

$$\tau_{xy(1)} = \frac{1}{2(1+\nu)} \left( \varepsilon \frac{\partial u_{(1)}}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial v_{(1)}}{\partial x} \right), \text{ и так далее.}$$

Индексами «0», «1» и «далее» отмечены номера начального и последующих приближений в итерационном процессе. Отметим также, что в (4.6) в начальное приближение входят шесть произвольных функций интегрирования

$$u_0(x, y), v_0(x, y), \sigma_{z0}(x, y), w_0(x, y), \tau_{xz0}(x, y), \tau_{yz0}(x, y), .$$

Назовем эти неизвестные основными. При вычислении интегралов умножим эти неизвестные на поперечную координату  $z$  с соответствующим интегрированию степенным показателем. Получим

$$u_{(0)} = -\varepsilon \frac{\partial w_0}{\partial x} z + 2(1+\nu) \tau_{xz0} z + u_0(x, y),$$

$$v_{(0)} = -\varepsilon \frac{\partial w_0}{\partial y} z + 2(1+\nu) \tau_{yz0} z + v_0(x, y),$$

$$\sigma_{z(0)} = -\varepsilon \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} z - \varepsilon \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} z + \sigma_{z0}(x, y),$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{x(0)} &= -\varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} z + 2\varepsilon(1+\nu) \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} z + \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x} + \alpha T, \\
\varepsilon_{y(0)} &= -\varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} z + 2(1+\nu)\varepsilon \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} z + \varepsilon \frac{\partial v_0}{\partial y} + \alpha T, \\
\tau_{xy(0)} &= -\frac{1}{1+\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} z + \varepsilon \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial y} z + \varepsilon \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial x} z + \frac{1}{2(1+\nu)} \left( \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial v_0}{\partial x} \right), \\
\sigma_{x(0)} &= -\frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} z - \frac{\nu}{1-\nu^2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} z + \frac{2-\nu}{1-\nu} \varepsilon \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} z + \\
&+ \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} z + \frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\nu}{1-\nu^2} \varepsilon \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{z0} - \frac{\alpha T}{1-\nu}, \\
\sigma_{y(0)} &= -\frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} z - \frac{\nu}{1-\nu^2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} z + \frac{2-\nu}{1-\nu} \varepsilon \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} z + \\
&+ \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} z + \frac{\nu}{1-\nu^2} \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{z0} - \frac{\alpha T}{1-\nu}, \\
\varepsilon_{z(0)} &= \varepsilon \frac{1+\nu}{\nu-1} \left( \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \right) z + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \Delta w_0 z - \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha T, \\
\tau_{xz(1)} &= \left( \frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^3 \Delta \frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{2-\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial y^2} - \frac{1}{1-\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial x \partial y} \right) \frac{z^2}{2} + \\
&+ \left[ -\frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{1}{2(1-\nu)} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2(1+\nu)} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial x} \right] z + \\
&\quad + \frac{\varepsilon}{1-\nu} \int_0^z \frac{\partial(\alpha T)}{\partial x} dz + \tau_{xz0}(x, y), \\
\tau_{yz(1)} &= \left( \frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^3 \Delta \frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{2-\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial y^2} - \frac{1}{1-\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x \partial y} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial x^2} \right) \frac{z^2}{2} + \\
&+ \left[ -\frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - \frac{1}{2(1-\nu)} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2(1+\nu)} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial y} \right] z + \\
&\quad + r \frac{\varepsilon}{1-\nu} \int_0^z \frac{\partial(\alpha T)}{\partial y} dz + \tau_{yz0}(x, y),
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{z(1)} = & \left[ -\frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^4 \Delta^2 w_0 + \frac{2-\nu}{1-\nu} \varepsilon^3 \Delta \left( \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \right) \right] \frac{z^3}{6} + \\ & + \frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^3 \Delta \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \frac{z^2}{2} + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \Delta \sigma_{z0} \frac{z^2}{2} - \varepsilon \left( \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \right) z - \\ & - \frac{\varepsilon^2}{1-\nu} \Delta \int_0^z \int_0^z \alpha T dz dz + \sigma_{z0}(x, y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{(1)} = & \frac{1}{1-\nu} \left[ \nu \varepsilon^2 \Delta w_0 - (1+\nu) \varepsilon \left( \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \right) \right] \frac{z^2}{2} + \\ & + \left[ \frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu} \sigma_{z0} + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \right] z + \frac{1+\nu}{1-\nu} \int_0^z \alpha T dz + w_0(x, y), \dots \end{aligned}$$

Здесь  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  – оператор Лапласа.

Процесс последовательных вычислений в конкретных случаях может быть продолжен [7]. Очевидно, что получаемые выражения в (4.6) имеют вид асимптотических рядов по параметру тонкостенности  $\varepsilon$ , который может быть принят сколь угодно малой величиной.

Имея аналитические выражения для всех искомым неизвестных задачи, приступим к выполнению граничных условий на лицевых и боковых поверхностях пластины.

#### 4.1.2. Граничные условия на лицевых сторонах пластины.

##### Разрешающие соотношения для основных неизвестных задачи

Классическая теория пластин допускает решение задачи только в случае действия нормальной распределенной нагрузки на срединную поверхность пластины [40]. В нашем случае рассмотрим задачу, в которой действует распределенная нагрузка на обеих лицевых сторонах пластины. Запишем граничные условия в виде [11]

$$\begin{aligned} \sigma_z = Z_+(x, y), \quad \tau_{xz} = X_+(x, y), \quad \tau_{yz} = Y_+(x, y), \quad \text{при } z=1, \\ \sigma_z = Z_-(x, y), \quad \tau_{xz} = X_-(x, y), \quad \tau_{yz} = Y_-(x, y), \quad \text{при } z=-1, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где  $X_-, X_+, Y_+, Y_-, Z_-, Z_+$  – безразмерные функции, полученные из размерных делением размерных на модуль упругости материала  $E$ . Принимаем, что они заданы медленно меняющимися функциями координат  $x, y$ .

Выполним условия посредством величин первого приближения  $\tau_{xz(1)}, \tau_{yz(1)}, \sigma_{z(1)}$  из формул (4.7), считая, их достаточно точными. Попарно складывая и вычитая уравнения для одноименных величин, получим отдельные соотношения относительно группы неизвестных  $w_0, \tau_{xz0}, \tau_{yz0}$  в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^3 \Delta \frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{2-\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x^2} - \frac{1}{1-\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial x \partial y} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial y^2} + 2\tau_{xz0} = \\ = X_+ + X_- - \frac{\varepsilon}{1-\nu} \left( \int_0^1 \frac{\partial(\alpha T)}{\partial x} dz + \int_0^{-1} \frac{\partial(\alpha T)}{\partial x} dz \right), \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^3 \Delta \frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{2-\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial y^2} - \frac{1}{1-\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x \partial y} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial x^2} + 2\tau_{yz0} = \\ = Y_+ + Y_- - \frac{\varepsilon}{1-\nu} \left( \int_0^1 \frac{\partial(\alpha T)}{\partial y} dz + \int_0^{-1} \frac{\partial(\alpha T)}{\partial y} dz \right), \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^4 \Delta^2 w_0 + \varepsilon \left( \frac{2-\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \Delta - 6 \right) \left( \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \right) = 3(Z_+ - Z_-) + \\ + \frac{3\varepsilon^2}{1-\nu} \Delta \int_{-1}^1 \int \alpha T dz dz; \end{aligned} \quad (4.11)$$

и относительно неизвестных  $u_0, v_0, \sigma_{z0}$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{1}{2(1-\nu)} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2(1+\nu)} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial x} = \\ = \frac{1}{2}(X_+ - X_-) - \frac{\varepsilon}{2(1-\nu)} \int_{-1}^1 \frac{\partial(\alpha T)}{\partial x} dz, \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - \frac{1}{2(1-\nu)} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2(1+\nu)} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial y} = \\ = \frac{1}{2}(Y_+ - Y_-) - \frac{\varepsilon}{2(1-\nu)} \int_{-1}^1 \frac{\partial(\alpha T)}{\partial y} dz, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon^4}{1-\nu^2} \Delta \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \Delta \sigma_{z0} + 2\sigma_{z0} = Z_+ + Z_- + \\ + \frac{\varepsilon^2}{1-\nu} \Delta \left( \int_0^1 \int_0^z \alpha T dz dz + \int_0^{-1} \int_0^z \alpha T dz dz \right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Заметим, что плоская задача теории упругости для пластины, описываемая уравнениями (4.12)–(4.14), никак не связана с антиплоской, определенной соотношениями (4.9)–(4.11) [7].

Отбрасив вторые и третьи производные от  $\tau_{xz0}$  и  $\tau_{yz0}$  (4.9)–(4.11) как малые величины  $O(\varepsilon^2)$ , получим уравнения для медленно меняющихся величин  $w_0^s$  и  $\tau_0^s$ . Их дифференцирование по пространственной координате не меняет асимптотического порядка, измеряемого степенью малого параметра  $\varepsilon$ . Тогда

$$\frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial x} \Delta w_0^s + 2\tau_{xz0}^s = X_+ + X_- - \frac{\varepsilon}{1-\nu} \left( \int_0^1 \frac{\partial(\alpha T)}{\partial x} dz + \int_0^{-1} \frac{\partial(\alpha T)}{\partial x} dz \right), \quad (4.15)$$

$$\frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial y} \Delta w_0^s + 2\tau_{yz0}^s = Y_+ + Y_- - \frac{\varepsilon}{1-\nu} \left( \int_0^1 \frac{\partial(\alpha T)}{\partial y} dz + \int_0^{-1} \frac{\partial(\alpha T)}{\partial y} dz \right),$$

$$-\frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^4 \Delta^2 w_0^s - 6\varepsilon \left( \frac{\partial \tau_{xz0}^s}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}^s}{\partial y} \right) = 3(Z_+ - Z_-) + \frac{3\varepsilon^2}{1-\nu} \Delta \int_{-1}^1 \alpha T dz dz. \quad (4.16)$$

Уравнения с малым параметром при старших производных (типа краевого эффекта) имеют вид

$$\begin{aligned} -\frac{2-\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}^q}{\partial x^2} - \frac{1}{1-\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{yz0}^q}{\partial x \partial y} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}^q}{\partial y^2} + 2\tau_{xz0}^q = 0, \\ -\frac{2-\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{yz0}^q}{\partial y^2} - \frac{1}{1-\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}^q}{\partial x \partial y} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{yz0}^q}{\partial x^2} + 2\tau_{yz0}^q = 0, \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\frac{2-\nu}{1-\nu} \varepsilon^3 \Delta \left( \frac{\partial \tau_{xz0}^q}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}^q}{\partial y} \right) - 6\varepsilon \left( \frac{\partial \tau_{xz0}^q}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}^q}{\partial y} \right) = 0. \quad (4.18)$$

Для быстро меняющихся величин, определенных на координатах  $x/\varepsilon$ ,  $y/\varepsilon$ , дифференцирование приводит к увеличению их асимптотического порядка, т.е. изменению, асимптотически пропорциональному малому параметру  $\varepsilon$  в

отрицательной степени.

В силу произвола параметра  $\varepsilon$  системы уравнений (4.15), (4.16) и (4.17), (4.18) являются независимыми между собой. Уравнения (4.17), (4.18) могут быть использованы для выполнения не удовлетворённых решением уравнений (4.15), (4.16) граничных условий на торцевых сторонах пластины и для устранения возможных разрывов решений этих же уравнений [7].

Разрешающее уравнение для  $w_0^s$  получим, исключив  $\tau_{zx0}^s$  и  $\tau_{yz0}^s$  с помощью уравнений (4.15) из уравнения (4.16). Тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \Delta \left[ \frac{2}{1-\nu^2} \varepsilon^2 \Delta w_0^s + \frac{3}{1-\nu} \left( \int_0^1 \alpha T dz + \int_0^{-1} \alpha T dz - \int_{-1}^z \int \alpha T dz dz \right) \right] = \\ = 3(Z_+ - Z_-) + 3\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} (X_+ + X_-) + 3\varepsilon \frac{\partial}{\partial y} (Y_+ + Y_-). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Первый член уравнения (4.19) в левой части совпадает с классическим уравнением изгиба пластины. Его правая часть характеризуется внешней нагрузкой на лицевых поверхностях. Учтено температурное воздействие, влияющее на коробление пластины. Изменяемость прогиба  $w_0^s$  определяется изменяемостью нагрузок и температурных членов, которая предполагается малой.

В уравнениях (4.12)÷(4.14) из-за наличия членов  $\frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \Delta \sigma_{z0} + 2\sigma_{z0}$  не возникает быстро меняющихся решений, поскольку напряжение  $\sigma_z$  на лицевых поверхностях является заданным и не предусматривает наличие быстро меняющейся компоненты. Поэтому величина  $\frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \Delta \sigma_{z0}$  как величина  $O(\varepsilon^2)$  может быть отброшена по сравнению с величиной  $2\sigma_{z0}$ . Из оценки из уравнения (4.14) когда,  $\sigma_{z0} \sim \varepsilon^3 u_0 \wedge \varepsilon^3 v_0$ , производные  $\varepsilon \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial x}$ ,  $\varepsilon \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial y}$  оказываются величинами  $O(\varepsilon^4)$  по сравнению с величинами  $\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}$ ,  $\varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}$ . Они, как и в предыдущих случаях могут быть отброшены. В соответствии с этим уравнения

(4.12)÷(4.14) приводим к виду

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{1-\nu^2}\varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}-\frac{1}{2(1-\nu)}\varepsilon^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}-\frac{1}{2(1+\nu)}\varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}= \\ & =\frac{1}{2}(X_+-X_-)-\frac{\varepsilon}{2(1-\nu)}\int_{-1}^1\frac{\partial(\alpha T)}{\partial x}dz, \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{1-\nu^2}\varepsilon^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}-\frac{1}{2(1-\nu)}\varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}-\frac{1}{2(1+\nu)}\varepsilon^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}=\frac{1}{2}(Y_+-Y_-)- \\ & -\frac{\varepsilon}{2(1-\nu)}\int_{-1}^1\frac{\partial(\alpha T)}{\partial y}dz, \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\frac{1}{1-\nu^2}\varepsilon^3\Delta\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)+2\sigma_{z_0}^s=Z_++Z_-+\frac{\varepsilon^2}{1-\nu}\Delta\left(\int_0^1\int_0^z\alpha Tdzdz+\int_0^{-1}\int_0^{-z}\alpha Tdzdz\right). \quad (4.22)$$

Продифференцируем (4.20) по координате  $x$ , уравнение (4.21) по координате  $y$  и сложим результат с (4.22). Получим

$$\begin{aligned} 2\sigma_{z_0}^s & =Z_++Z_-+\frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{\partial X_+'}{\partial x}-\frac{\partial X_-'}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{\partial Y_+'}{\partial y}-\frac{\partial Y_-'}{\partial y}\right)+ \\ & +\frac{\varepsilon^2}{1-\nu}\left[\int_0^1\int_0^z\frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x^2}dzdz+\int_0^1\int_0^z\frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y^2}dzdz+\int_0^{-1}\int_0^{-z}\frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x^2}dzdz+\right. \\ & \left.+\int_0^{-1}\int_0^{-z}\frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y^2}dzdz\right]-\frac{\varepsilon^2}{2(1-\nu)}\int_{-1}^1\frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x^2}dz-\frac{\varepsilon^2}{2(1-\nu)}\int_{-1}^1\frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y^2}dz. \end{aligned} \quad (4.23)$$

В случае коробления пластины при действии только температурного поля принимаем величину  $\alpha T$  в качестве базы асимптотической оценки. При этом искомые функции  $w_0^s$ ,  $\tau_{xz_0}^s$ ,  $\tau_{yz_0}^s$  из (4.19), (4.15) можем отнести к малому параметру  $w_0^s \sim \varepsilon^{-2}\alpha T$ ,  $\tau_{xz_0}^s, \tau_{yz_0}^s \sim \varepsilon^3 w_0^s$ . Аналогично для соотношения (4.23) с учетом (4.20) и (4.21) справедливо  $\sigma_{z_0}^s \sim \varepsilon^2 \alpha T$ ,  $u_0^s, v_0^s \sim \varepsilon^3 \sigma_{z_0}^s$ . Асимптотические оценки быстро меняющихся составляющих следует определять в характерной для них области на уравнениях, задающих условия на торцах пластины.

### 4.1.3. Выполнение граничных условий на торцевых поверхностях. Аналитический и численный результаты

Виды граничных условий могут зададим на торцевых поверхностях пластины при помощи приближенных соотношений (4.7), определяющих компоненты напряженно-деформированного состояния через основные неизвестные.

В качестве примера рассмотрим случай свободной по всем четырем краям квадратной пластины. На краях  $x = \{0;1\}$  и  $y = \{0;1\}$  все напряжения должны обращаться в ноль, что соответствует

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(y,z) = \sigma_x(y,z) = \tau_{xz}(y,z) = 0, \quad \text{при } x = \{0;1\}, \\ \tau_{xy}(x,z) = \sigma_y(x,z) = \tau_{yz}(x,z) = 0, \quad \text{при } y = \{0;1\}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Принимаем, что поверхностная нагрузка отсутствуют, коэффициент линейного температурного расширения пластины постоянен  $\alpha = const$ , и температура изменяется по толщине пластины линейно. Тогда

$$\alpha T(x,y,z) = \alpha t(x,y)z. \quad (4.25)$$

Запишем условия (4.24) с помощью формул  $\tau_{xy(0)}, \sigma_{x(0)}, \sigma_{y(0)}, \tau_{xz(1)}, \tau_{yz(1)}$  из (4.7) с учетом (4.25), и потребуем в этих выражениях обращения в ноль множителей при каждой степени  $z$ . Получим шесть условий на торцевых поверхностях пластины  $x = 0;1$  в виде

$$-\frac{1}{1+\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \varepsilon \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial x} = 0, \quad (4.26)$$

$$-\frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \frac{\nu}{1-\nu^2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{2-\nu}{1-\nu} \varepsilon \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} - \frac{\alpha t}{1-\nu} = 0, \quad (4.27)$$

$$\frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^3 \Delta \frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{2-\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial y^2} - \frac{1}{1-\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial x \partial y} + \frac{\alpha}{2(1-\nu)} \varepsilon \frac{\partial t}{\partial x} = 0, \quad (4.28)$$

$$\tau_{xz0} = 0, \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0, \quad \frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\nu}{1-\nu^2} \varepsilon \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{z0} = 0, \\ -\frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{1}{2(1-\nu)} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2(1+\nu)} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

и шесть условий на торцевых поверхностях  $y=0;1$ , имеющих аналогичную форму.

Уравнения (4.20)÷(4.22) с граничными условиями (4.30) на коротких торцевых сторонах пластины образуют плоскую задачу относительно неизвестных  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $\sigma_{z0}$ , в то время, как уравнения (4.15), (4.17)÷(4.19) с условиями (4.26)÷(4.29) образуют антиплоскую задачу относительно неизвестных  $w_0^s$ ,  $\tau_{xz0}^s$ ,  $\tau_{yz0}^s$ ,  $\tau_{xz0}^q$ ,  $\tau_{yz0}^q$ . Очевидно, что задачи нахождения плоского и антиплоского напряженно–деформированного состояния разделяются [7].

Положим в (4.25)  $t = const$ , получим однородную систему уравнений (4.20) ÷(4.22), которую дополняют однородные условия (4.30). Данная система имеет только тривиальное решение  $u_0 = v_0 = \sigma_{z0} = 0$ .

Запишем систему уравнений антиплоской задачи (4.15), (4.19) при граничных условиях (4.26)÷(4.29) в виде

$$\frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial x} \Delta w_0^s + 2\tau_{xz0}^s = 0, \quad \frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial y} \Delta w_0^s + 2\tau_{yz0}^s = 0, \quad (4.31)$$

$$\varepsilon^2 \Delta \left[ \frac{2}{1-\nu^2} \varepsilon^2 \Delta w_0^s + \frac{2\alpha t}{1-\nu} \right] = 0. \quad (4.32)$$

Частное решение найдем из уравнения (4.32) в квадратных скобках. Для этого, следуя работе [7], введем замену аргументов  $\xi = x + iy$ ,  $\zeta = x - iy$ .

Обозначим частное решение индексом  $(p)$ . С помощью преобразований

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = i \frac{\partial}{\partial \xi} - i \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \zeta}$$

уравнение приобретает вид

$$4\varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_0^s}{\partial \xi \partial \zeta} = -(1 + \nu) \alpha t.$$

Двойным интегрированием получаем частное решение в виде

$$w_0^{s(p)} = -\frac{1}{4} \varepsilon^{-2} (1 + \nu) \alpha t (x^2 + y^2). \quad (4.33)$$

Решение  $w_0^s$  возьмем как сумму частного и общего решений уравнения (4.32)

$$w_0^s = -\frac{1}{4} \varepsilon^{-2} (1 + \nu) \alpha t (x^2 + y^2) + C_{wx3} x^3 + C_{wx2} x^2 + C_{wx1} x + C_{wy3} y^3 + \quad (4.34)$$

$$+ C_{wy2} y^2 + C_{wy1} y + C_{w0},$$

где  $C$  – произволы интегрирования.

Однородная система (4.17), (4.18) определяет быстро изменяющееся решение типа краевого эффекта. Рассматривая  $\varepsilon$ -окрестности границ  $x = \{0; 1\}$ , принимаем в этих уравнениях несущественными компоненты касательных напряжений, направленные вдоль границ, и отбрасываем производные по  $y$  в силу их малой изменчивости. Имеем

$$-\frac{2 - \nu}{1 - \nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}^q}{\partial x^2} + 2\tau_{xz0}^q = 0, \quad -\frac{2 - \nu}{1 - \nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^3 \tau_{xz0}^q}{\partial x^3} + 6 \frac{\partial \tau_{xz0}^q}{\partial x} = 0. \quad (4.35)$$

Проинтегрировав второе уравнение (4.35) по координате  $x$ , получим

$$-\frac{2 - \nu}{1 - \nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}^q}{\partial x^2} + 6\tau_{xz0}^q = C,$$

где  $C$  – произвольная константа. Вычтем из этого соотношения первое уравнение и найдем  $4\tau_{xz0}^q = C$ .

Следует отметить, что медленно изменяющееся решение уже учтено системой (4.15)÷(4.16). Поэтому для нахождения быстро изменяющегося решения из двух асимптотически подобных уравнений (4.35) достаточно только одного. Запишем быстро изменяющееся решение второго уравнения в виде

$$\tau_{xz0}^q = \begin{cases} C_{\tau_{xz1}} \exp\left(k \frac{x}{\varepsilon}\right), & \text{при } x \geq 0 \\ C_{\tau_{xz2}} \exp\left(-k \frac{(1-x)}{\varepsilon}\right), & \text{при } x \leq 1 \end{cases}, \quad \text{где } k = \sqrt{\frac{6(1-\nu)}{2-\nu}}. \quad (4.36)$$

Данное решение может быть использовать для удовлетворения потеранных граничных условий и сглаживания разрывов в медленно меняющихся классических решениях [7]. Аналогичным образом определяется величина  $\tau_{yz0}^q$  у границ пластины  $y=0;1$ . Заметим, что в выражении (4.36) производлы интегрирования по способу получения представляют собой функции пространственных координат:  $y$  – для  $\tau_{xz0}^q$  и  $x$  – для  $\tau_{yz0}^q$ .

Для определения медленно изменяющихся составляющих касательных напряжений подставим выражения (4.34) в уравнения (4.31) и выполним граничные условия (4.26)÷(4.29) с учетом (4.36). При определении констант интегрирования дополнительно наложим условия, исключающие перемещения тела как жесткого целого

$$\sigma_{z0}(x, y) = 0, \quad v_0(x, y) = 0, \quad u_0(x, y) = 0.$$

Окончательно получим следующий результат

$$w_0(x, y) = \frac{1}{2} \varepsilon^{-2} \alpha t_0 (x - x^2 + y - y^2), \quad \tau_{yz0}(x, y) = 0, \quad \tau_{xz0}(x, y) = 0.$$

Найденные решения для основных неизвестных имеют характер приближенных, поскольку их построение реализовано на приближенных соотношениях для граничных условий, выполняемых в (4.7) выбранной итерации. С учетом (4.7) запишем итоговые соотношения для искомых компонент напряженно-деформированного состояния в выбранных приближениях  $w_{(1)}, u_{(0)}, v_{(0)}, \sigma_{x(1)}, \sigma_{y(1)}, \sigma_{z(1)}, \tau_{xy(1)}, \tau_{yz(1)}, \tau_{zx(1)}, \varepsilon_{x(1)}, \varepsilon_{y(1)}, \varepsilon_{z(1)}$  В ВИДЕ

$$\begin{aligned}
 w(x, y, z) &= -\frac{\nu}{1-\nu} \alpha t_0 z^2 + \frac{1}{2} \varepsilon^{-2} \alpha t_0 (x - x^2 + y - y^2), \\
 u(x, y, z) &= \frac{1}{2} \varepsilon^{-1} \alpha t_0 (2x - 1) z, \quad v(x, y, z) = \frac{1}{2} \varepsilon^{-1} \alpha t_0 (2y - 1) z, \\
 \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z &= 0, \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \\
 \varepsilon_x = \alpha t_0 z, \quad \varepsilon_y &= \alpha t_0 z, \quad \varepsilon_z = \alpha t_0 z.
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

Здесь равенства понимаются как асимптотические [7]. Полученные зависимости позволяют получить результат численно.

В качестве примера рассмотрим стальную пластину под действием температурного поля, распределение которого по толщине иллюстрируется Рис. 4.1. Геометрические параметры пластины составляют: толщина  $2h = 0.1$  м, размеры в плане  $a = b = 1$  м; коэффициент линейного теплового расширения –  $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ . Принято, что в сечении  $z = 0$  тепловые деформации отсутствуют при температуре значение  $22^\circ\text{C}$ .

Распределение прогибов показано на Рис. 4.2.

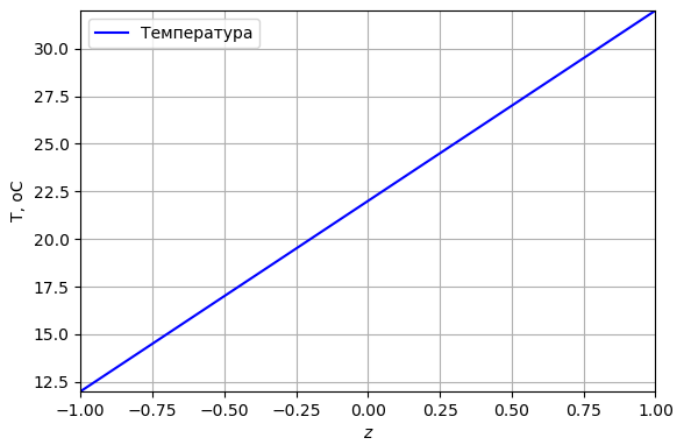


Рис. 4.1. Распределение поля температуры по толщине пластины.

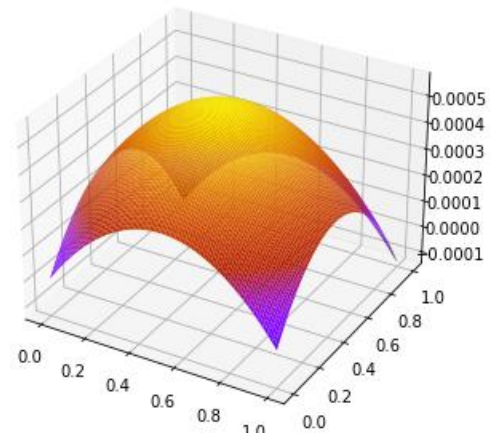


Рис. 4.2. Вертикальные перемещения точек срединной поверхности пластины, м, в зависимости от безразмерных координат  $x, y$ .

Изложенный подход и полученное решение позволяет сделать вывод о том, что характер температурной деформации пластины сопоставим с классическим представлением о температурном короблении свободной незакрепленной пластины [193]. Отметим также, что решение из формул (4.37) учитывает

переменный по толщине самой пластины (пространственный) характер деформаций.

В следующем примере изменим условия закрепления пластины. Все исходные данные остаются прежними. Условием на торцевых поверхностях будет жесткое защемление

$$u = v = w = 0 \text{ при } x = \{0,1\}, y = \{0,1\}. \quad (4.38)$$

Решение для функции прогиба, удовлетворяющее уравнению (4.38) будем искать в виде:

$$w_0 = -\varepsilon^{-2}(1+\nu)\frac{\alpha t_0}{8}x^2y^2 + y^3(a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x) + y^2(b_1x^3 + b_2x^2 + b_3x) + y(c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x), \quad (4.39)$$

где  $a_i, b_j, c_k$  – произволы интегрирования, которые определяются аналогично рассмотренному выше способом через основные неизвестные (4.7) с учетом условий (4.38). Имеем

$$-\varepsilon \frac{\partial w_0}{\partial x} + 2(1+\nu)\tau_{xz0} = 0, \quad u_0 = 0, \quad (4.40)$$

$$-\varepsilon \frac{\partial w_0}{\partial y} + 2(1+\nu)\tau_{yz0} = 0, \quad v_0 = 0, \quad (4.41)$$

$$\nu\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) - (1+\nu)\varepsilon\left(\frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y}\right) + (1+\nu)\alpha t_0 = 0, \quad (4.42)$$

$$\frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu}\sigma_{z0} + \frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + r\frac{\partial v_0}{\partial y}\right), \quad w_0 = 0. \quad (4.43)$$

Тогда функции основных неизвестных принимают вид

$$w_0(x, y) = C_{wf}(y - y^2)(x^2 - x),$$

$$\tau_{xz0}(x, y) = \frac{\varepsilon^3 C_{wf}}{1-\nu^2}(2x-1) + C_{\tau_{xz1}}e^{\frac{kx}{\varepsilon}} + C_{\tau_{xz2}}e^{\frac{kx}{\varepsilon}}, \quad (4.44)$$

$$\tau_{yz0}(x, y) = \frac{\varepsilon^3 C_{wf}}{1-\nu^2}(2y-1) + C_{\tau_{yz1}}e^{\frac{ky}{\varepsilon}} + C_{\tau_{yz2}}e^{\frac{ky}{\varepsilon}},$$

$$u_0(x, y) = v_0(x, y) = 0,$$

$$\sigma_{z0}(x, y) = 0.$$

Константа интегрирования  $C_{wt}$ , необходимая для вычисления величины  $w_0$ , имеет следующее значение

$$C_{wt} = \frac{2\varepsilon^{-1}\alpha t_0(1+\nu)\left(e^{\frac{k}{\varepsilon}} - e^{-\frac{k}{\varepsilon}}\right)}{\left[4\varepsilon\nu\left(e^{\frac{k}{\varepsilon}} - e^{-\frac{k}{\varepsilon}}\right) + k\left(e^{\frac{k}{\varepsilon}} + e^{-\frac{k}{\varepsilon}} + 2\right)\right](y - y^2) - \frac{2\varepsilon^2}{1-\nu}\left[2\varepsilon\left(e^{\frac{k}{\varepsilon}} - e^{-\frac{k}{\varepsilon}}\right) + k\left(e^{\frac{k}{\varepsilon}} + e^{-\frac{k}{\varepsilon}} + 2\right)\right]}.$$

Произволы интегрирования  $C_{\tau xz1}, C_{\tau yz1}$  имеют сходную структуру типа

$$C_{\tau xz1}(y) = -\frac{\alpha t_0\left(e^{\frac{k}{\varepsilon}} + 1\right)\left(y - y^2 - \frac{2\varepsilon^2}{1-\nu}\right)}{\left[4\varepsilon\nu\left(e^{\frac{k}{\varepsilon}} - e^{-\frac{k}{\varepsilon}}\right) + k\left(e^{\frac{k}{\varepsilon}} + e^{-\frac{k}{\varepsilon}} + 2\right)\right](y - y^2) - \frac{2\varepsilon^2}{1-\nu}\left[2\varepsilon\left(e^{\frac{k}{\varepsilon}} - e^{-\frac{k}{\varepsilon}}\right) + k\left(e^{\frac{k}{\varepsilon}} + e^{-\frac{k}{\varepsilon}} + 2\right)\right]}.$$

Переходя от основных неизвестных к искомым характеристикам напряженно-деформированного состояния при помощи соотношений (4.6) находим

$$w_{(1)} = \frac{1}{1-\nu}\left[\nu\Delta_\varepsilon w_0 - (1+\nu)\varepsilon\left(\frac{\partial\tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz0}}{\partial y}\right)\right]\frac{z^2}{2} + \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha t_0\frac{z^2}{2} + w_0(x, y),$$

$$u_{(0)} = \left[-\varepsilon\frac{\partial w_0}{\partial x} + 2(1+\nu)\tau_{xz0}\right]z,$$

$$v_{(0)} = \left[-\varepsilon\frac{\partial w_0}{\partial y} + 2(1+\nu)\tau_{yz0}\right]z,$$

$$\sigma_{x(0)} = -\frac{1}{1-\nu^2}\varepsilon^2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}z - \frac{\nu}{1-\nu^2}\varepsilon^2\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}z + \frac{2-\nu}{1-\nu}\varepsilon\frac{\partial\tau_{xz0}}{\partial x}z + \frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon\frac{\partial\tau_{yz0}}{\partial y}z - \frac{\alpha T}{1-\nu},$$

$$\sigma_{y(0)} = -\frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} z - \frac{\nu}{1-\nu^2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} z + \frac{2-\nu}{1-\nu} \varepsilon \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} z + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} z - \frac{\alpha T}{1-\nu},$$

$$\sigma_{z(1)} = \left[ -\frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^4 \Delta^2 w_0 + \frac{2-\nu}{1-\nu} \varepsilon^3 \Delta \left( \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \right) \right] \frac{z^3}{6} - \varepsilon \left( \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \right) z + \sigma_{z0}(x, y),$$

$$\tau_{xz(1)} = \left( \frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^3 \Delta \frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{2-\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial y^2} - \frac{1}{1-\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial x \partial y} \right) \frac{z^2}{2} + \tau_{xz0}(x, y),$$

$$\tau_{yz(1)} = \left( \frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^3 \Delta \frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{2-\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial y^2} - \frac{1}{1-\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x \partial y} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial x^2} \right) \frac{z^2}{2} + \tau_{yz0}(x, y),$$

$$\varepsilon_{x(0)} = -\varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} z + 2\varepsilon(1+\nu) \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} z,$$

$$\varepsilon_{y(0)} = -\varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} z + 2(1+\nu) \varepsilon \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} z,$$

$$\varepsilon_{z(0)} = \varepsilon \frac{1+\nu}{\nu-1} \left( \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \right) z + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) z + \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha T.$$

При тех же параметрах пластины и температурного поля, выбранных для построения Рис. 4., графики прогиба для рассматриваемого случая зашумленных краев приведены.

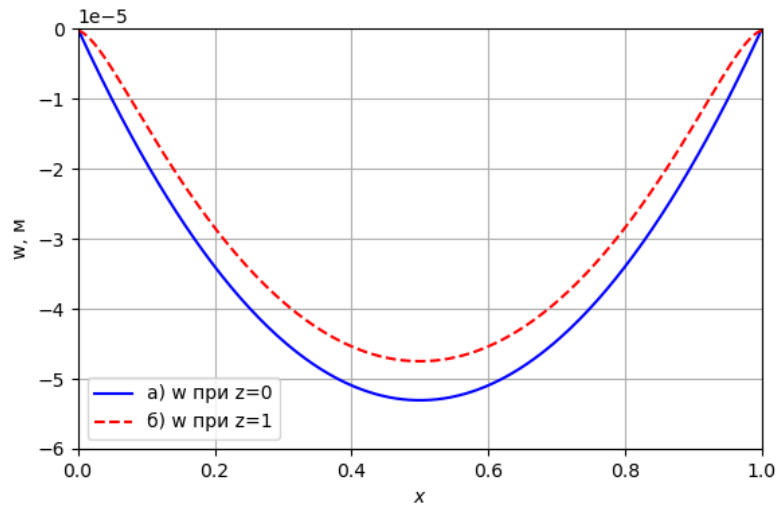


Рис. 4.3. Зависимость поперечных перемещений от продольной координаты  $x$  для сечения плоскостью  $y = 0,5$  а) на срединной поверхности пластины ( $z = 0$ ); б) на поверхности  $z = 1$  (функция  $w_{(1)}$  по координате  $z$  является симметричной)

Сделаем следующие важные выводы. Поскольку задача решалась без

применения упрощающих гипотез о положении и форме исходных нормальных к срединной поверхности сечений, угол наклона касательной к срединной поверхности в самой заделке после коробления отличен от нуля, причем составляет различную величину в зависимости от координаты высоты рассматриваемого условного слоя. На поверхности этот угол ближе к нулю. Сказываются температурное сжатие, расширение и краевой эффект.

Отказ от упрощающих гипотез и учет быстро изменяющихся составляющих решения оказывают влияние не только на область сингулярности, но распространяется на всю область решения, которое в классической постановке для рассматриваемой задачи остается нулевым [39, 193].

Влияние быстро изменяющихся компонент, входящих в решение через функции основных неизвестных касательных напряжений  $\tau_{xz0}, \tau_{yz0}$  (Рис. 4.4), заметно проявляются на амплитудных значениях трансверсальных касательных напряжений и продольных перемещений (Рис. 4.5).

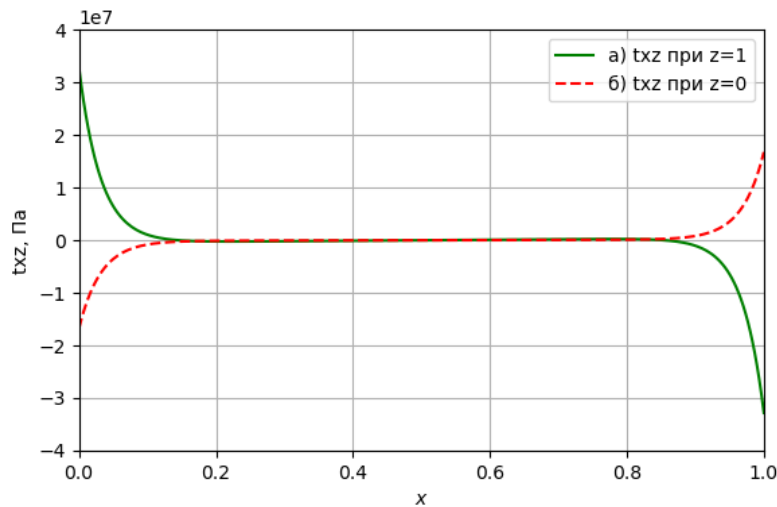


Рис. 4.4. Касательные напряжения  $\tau_{xz(1)}$  на срединной поверхности в сечении  $y = 0,5$  (на свободных лицевых поверхностях напряжения обращаются в ноль)

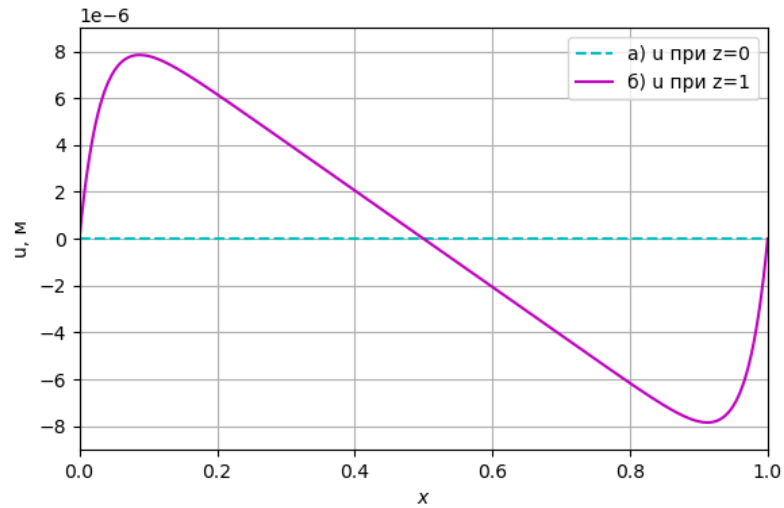


Рис. 4.5. Продольные перемещения  $u_{(0)}$  на поверхности  $z = 1$  пластины в сечении  $y = 0$

Функция возле краев является быстро изменяющейся, в отличие от основной неизвестной  $u_0$ .

Нормальные напряжения в направления осей плоскости пластины имеют линейный закон изменения по толщине, что согласуется с классической теорией, и дополнительно включают краевой эффект по продольной координате через присутствие  $\tau_{xz0}, \tau_{yz0}$ .

Трансверсальные нормальные напряжения  $\sigma_z$ , не учитываемые классической теорией, хотя и обращаются в нуль на свободных поверхностях и на срединной плоскости, имеют максимумы растяжения и сжатия по толщине, а также реагируют на близость к краю, где имеют одинаковый порядок с нормальными продольными напряжениями (Рис. 4.6).

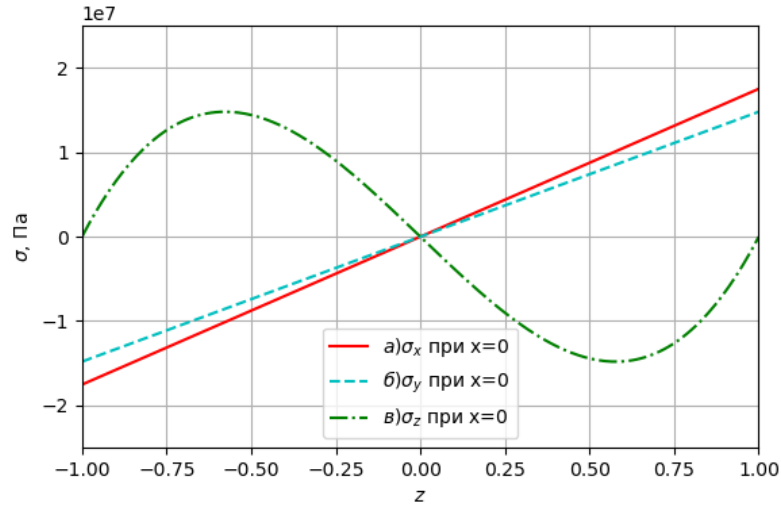


Рис. 4.6. Нормальные продольные напряжения  $\sigma_x$  (а),  $\sigma_y$  (б) и трансверсальные напряжения  $\sigma_z$  (в) в заделке  $x = 0$  при  $y = 0,5$

#### 4.2. Основные соотношения для пластины с произвольным количеством слоев. Уравнения для основных неизвестных

При построении исходной системы уравнений, как в случае многослойной полосы, считаем модуль упругости материала заданной размерной функцией  $E^* = E(z)E_h^*$ , где  $E_h^*$  – некоторое среднее значение модуля упругости,  $E(z)$  – безразмерной ступенчатой функцией, заданной по слоям. Коэффициент Пуассона в общем случае также считаем заданной ступенчатой функцией  $\nu = \nu(z)$ .

Полная система исходных уравнений будет иметь вид, аналогичный принятому в разделе 4.1 (соотношения (4.1)). Безразмерные величины напряжения относятся к среднему значению модуля упругости  $E_h^*$  ( $\sigma_x = \sigma_x^* / E_h^*$ ,  $\sigma_y = \sigma_y^* / E_h^*$ ,  $\sigma_z = \sigma_z^* / E_h^*$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{xy}^* / E_h^*$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{yz}^* / E_h^*$ ,  $\tau_{xz} = \tau_{xz}^* / E_h^*$ ). С учетом этого, и принимая во внимание влияние температуры в выражениях для нормальных напряжений, получим

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \varepsilon \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0,$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

$$\tau_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial x} \right),$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial y} \right),$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} + \alpha T, \quad \varepsilon_y = \varepsilon \frac{\partial v}{\partial y} + \alpha T, \quad \varepsilon_x = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha T,$$

где  $\varepsilon = h/a$  - малый параметр.

Преобразуем полученные уравнения к виду последовательности, аналогично разделу 4.1, и зададимся величинами начального приближения  $w = w_0(x, y)$ ,  $\tau_{xz} = \tau_{xz0}(x, y)$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{yz0}(x, y)$ , не зависящими от координаты  $z$ . Получим подобные (4.7) соотношения, дающие последовательные приближения для неизвестных исходной задачи, как функции новых основных неизвестных

$$u_{(0)} = -\varepsilon \frac{\partial w_0}{\partial x} z + \tau_{xz0} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz + u_0(x, y),$$

$$v_{(0)} = -\varepsilon \frac{\partial w_0}{\partial y} z + \tau_{yz0} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz + v_0(x, y),$$

$$\sigma_{z(0)} = -\varepsilon \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} z - \varepsilon \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} z + \sigma_{z0}(x, y),$$

(4.46)

$$\varepsilon_{x(0)} = -\varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} z + \varepsilon \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz + \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x} + \alpha T,$$

$$\varepsilon_{y(0)} = -\varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} z + \varepsilon \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz + \varepsilon \frac{\partial v_0}{\partial y} + \alpha T,$$

$$\tau_{xy(0)} = -\frac{\varepsilon^2 E}{1+\nu} \frac{\partial w_0}{\partial x \partial y} z + \frac{\varepsilon E}{1+\nu} \left( \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial x} \right) \int_0^z \frac{1+\nu}{E} dz + \frac{\varepsilon E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right),$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{x(0)} &= -\varepsilon^2 \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) z + \varepsilon \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \nu r \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \right) \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz - \\
&\quad - \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon z \left( \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \right) + \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{z0} - \frac{E\alpha T}{1-\nu}, \\
\sigma_{y(0)} &= -\varepsilon^2 \frac{E}{1-\nu^2} \left( \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) z + \varepsilon \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} + \nu \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} \right) \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz - \\
&\quad - \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon z \left( \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} \right) + \varepsilon \frac{E}{1-\nu^2} \left( \nu \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + \sigma_{z0} \frac{\nu}{1-\nu} - \frac{E\alpha T}{1-\nu}, \\
\tau_{yz(1)} &= \varepsilon^3 \left( \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right) \int_0^z \frac{Ez}{1-\nu^2} dz - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial y^2} \left( \int_0^z \frac{E}{1-\nu^2} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^z \frac{\nu z}{1-\nu} dz \right) - \\
&\quad - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x \partial y} \left( \int_0^z \frac{E\nu}{1-\nu^2} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^z \frac{\nu z}{1-\nu} dz \right) - \\
&\quad - \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial x^2} \right) \int_0^z \frac{E}{1+\nu} \int_0^z \frac{1+\nu}{E} dz dz - \\
&\quad - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \int_0^z \frac{E}{2(1-\nu)} dz - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \int_0^z \frac{E}{1-\nu^2} dz - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \int_0^z \frac{E}{2(1+\nu)} dz - \\
&\quad - \varepsilon \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial y} \int_0^z \frac{\nu}{1-\nu} dz + \varepsilon \int_0^z \frac{E}{1-\nu} \frac{\partial(\alpha T)}{\partial y} dz + \tau_{yz0}(x, y), \\
\varepsilon_{z(0)} &= \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \Delta w_0 z - \varepsilon \left( \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \right) \left[ \frac{\nu}{1-\nu} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz + \frac{1-\nu-2\nu^2}{E(1-\nu)} z \right] - \\
&\quad - \varepsilon \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + \frac{1-\nu-2\nu^2}{E(1-\nu)} \sigma_{z0} + \frac{E(1+\nu)}{1-\nu} \alpha T,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{z(1)} = & -\varepsilon \left( \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \right) z + \sigma_{z0} - \varepsilon^4 \left( \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right) \int_0^z \int_0^z \frac{Ez}{1-\nu^2} dzdz + \\
& + \varepsilon^3 \left( \frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial y^3} \right) \left( \int_0^z \int_0^z \frac{E}{1-\nu^2} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dzdzdz - \int_0^z \int_0^z \frac{\nu}{1-\nu} z dzdz \right) + \\
& + \varepsilon^3 \left( \frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial x \partial y^2} \right) \left( \int_0^z \int_0^z \frac{E\nu}{1-\nu^2} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dzdzdz - \int_0^z \int_0^z \frac{\nu}{1-\nu} z dzdz \right) + \\
& + 2\varepsilon^3 \left( \frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial x^2 \partial y} \right) \int_0^z \int_0^z \frac{E}{1+\nu} \int_0^z \frac{1+\nu}{E} dzdzdz - \varepsilon^2 \int_0^z \int_0^z \frac{E}{1-\nu} \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y^2} dzdz + \\
& + \varepsilon^3 \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \right) \int_0^z \int_0^z \frac{E}{1-\nu^2} dzdz + \\
& + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 \sigma_{z0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{z0}}{\partial y^2} \right) \int_0^z \int_0^z \frac{\nu}{1-\nu} dzdz - \varepsilon^2 \int_0^z \int_0^z \frac{E}{1-\nu} \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x^2} dzdz, \\
w_{(1)} = & \varepsilon^2 \Delta w_0 \int_0^z \frac{\nu}{1-\nu} z dz - \varepsilon \left( \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \right) \left( \int_0^z \frac{\nu}{1-\nu} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dzdz + \right. \\
& \left. + \int_0^z \frac{1-\nu-2\nu^2}{E(1-\nu)} z dz \right) - \\
& - \varepsilon \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \int_0^z \frac{\nu}{1-\nu} dz + \sigma_{z0} \int_0^z \frac{1-\nu-2\nu^2}{E(1-\nu)} dz + \int_0^z \frac{E(1+\nu)}{1-\nu} \alpha T dz + w_0(x, y).
\end{aligned}$$

Здесь  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  - оператор Лапласа.

Отметим, что интегральные коэффициенты являются известными величинами, как функции физических постоянных материала слоев и поля температуры, которые вычисляются согласно технике, изложенной в разделе 2.2.

### 4.3. Разрешающие соотношения для основных неизвестных. Выполнение условий на лицевых сторонах

В соответствии с логикой метода SVPB, разрешающие соотношения для определения новых основных неизвестных задачи строятся путем выполнения граничных условий на лицевых сторонах пластины, которые при действии произвольной распределенной нагрузки имеют вид (4.8). Подставим в них

выражения для соответствующих компонент напряжений в виде (4.46). Получим

$$\begin{aligned}
X_+ = & \varepsilon^3 \frac{\partial \Delta w_0}{\partial x} \int_0^1 \frac{E}{1-\nu^2} z dz - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x^2} \left( \int_0^1 \frac{E}{1-\nu^2} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^1 \frac{\nu}{1-\nu} z dz \right) - \\
& - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial y \partial x} \left( \int_0^1 \frac{E \nu}{1-\nu^2} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^1 \frac{\nu}{1-\nu} z dz \right) - \\
& - \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial x \partial y} \right) \int_0^1 \frac{E}{1+\nu} \int_0^z \frac{1+\nu}{E} dz dz - \\
& - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \int_0^1 \frac{E}{1-\nu^2} dz - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \int_0^1 \frac{E}{2(1+\nu)} dz - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \int_0^1 \frac{E}{2(1-\nu)} dz - \\
& - \varepsilon \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial x} \int_0^1 \frac{\nu}{1-\nu} dz + \varepsilon \int_0^1 \frac{E}{1-\nu} \frac{\partial(\alpha T)}{\partial x} dz + \tau_{xz0}, \\
X_- = & \varepsilon^3 \frac{\partial \Delta w_0}{\partial x} \int_0^{-1} \frac{E}{1-\nu^2} z dz - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x^2} \left( \int_0^{-1} \frac{E}{1-\nu^2} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^{-1} \frac{\nu}{1-\nu} z dz \right) - \\
& - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial y \partial x} \left( \int_0^{-1} \frac{E \nu}{1-\nu^2} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^{-1} \frac{\nu}{1-\nu} z dz \right) - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \int_0^{-1} \frac{E}{2(1+\nu)} dz - \\
& - \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial x \partial y} \right) \int_0^{-1} \frac{E}{1+\nu} \int_0^z \frac{1+\nu}{E} dz dz - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \int_0^{-1} \frac{E}{1-\nu^2} dz - \\
& - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \int_0^{-1} \frac{E}{2(1-\nu)} dz - \varepsilon \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial x} \int_0^{-1} \frac{\nu}{1-\nu} dz + \varepsilon \int_0^{-1} \frac{E}{1-\nu} \frac{\partial(\alpha T)}{\partial x} dz + \tau_{xz0}, \\
Y_+ = & \varepsilon^3 \left( \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right) \int_0^1 \frac{E z}{1-\nu^2} dz - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial y^2} \left( \int_0^1 \frac{E}{1-\nu^2} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^1 \frac{\nu z}{1-\nu} dz \right) - \\
& - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x \partial y} \left( \int_0^1 \frac{E \nu}{1-\nu^2} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^1 \frac{\nu z}{1-\nu} dz \right) - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \int_0^1 \frac{E}{1-\nu^2} dz - \\
& - \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial x^2} \right) \int_0^1 \frac{E}{1+\nu} \int_0^z \frac{1+\nu}{E} dz dz - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \int_0^1 \frac{E}{2(1-\nu)} dz - \\
& - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \int_0^1 \frac{E}{2(1+\nu)} dz - \varepsilon \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial y} \int_0^1 \frac{\nu}{1-\nu} dz + \varepsilon \int_0^1 \frac{E}{1-\nu} \frac{\partial(\alpha T)}{\partial y} dz + \tau_{yz0},
\end{aligned} \tag{4.47}$$

$$\begin{aligned}
Y_- = & \varepsilon^3 \left( \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right) \int_0^{-1} \frac{Ez}{1-\nu^2} dz - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial y^2} \left( \int_0^{-1} \frac{E}{1-\nu^2} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^{-1} \frac{\nu z}{1-\nu} dz \right) - \\
& - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x \partial y} \left( \int_0^{-1} \frac{E\nu}{1-\nu^2} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^{-1} \frac{\nu z}{1-\nu} dz \right) - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \int_0^{-1} \frac{E}{2(1+\nu)} dz - \\
& - \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial x^2} \right) \int_0^{-1} \frac{E}{1+\nu} \int_0^z \frac{1+\nu}{E} dz dz - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \int_0^{-1} \frac{E}{2(1-\nu)} dz - \\
& - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \int_0^{-1} \frac{E}{1-\nu^2} dz - \varepsilon \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial y} \int_0^{-1} \frac{\nu}{1-\nu} dz + \varepsilon \int_0^{-1} \frac{E}{1-\nu} \frac{\partial(\alpha T)}{\partial y} dz + \tau_{yz0}(x, y), \\
Z_+ = & -\varepsilon \left( \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \right) + \sigma_{z0} - \varepsilon^4 \Delta^2 w_0 \int_0^1 \int_0^z \frac{Ez}{1-\nu^2} dz dz + \\
& + \varepsilon^3 \left( \frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial y^3} \right) \left( \int_0^1 \int_0^z \frac{E}{1-\nu^2} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz dz - \int_0^1 \int_0^z \frac{\nu}{1-\nu} z dz dz \right) + \\
& + \varepsilon^3 \left( \frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial x \partial y^2} \right) \left( \int_0^1 \int_0^z \frac{E\nu}{1-\nu^2} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz dz - \int_0^1 \int_0^z \frac{\nu}{1-\nu} z dz dz \right) + \\
& + 2\varepsilon^3 \left( \frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial x^2 \partial y} \right) \int_0^1 \int_0^z \frac{E}{1+\nu} \int_0^z \frac{1+\nu}{E} dz dz dz + \\
& + \varepsilon^3 \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \right) \int_0^1 \int_0^z \frac{E}{1-\nu^2} dz dz + \\
& + \varepsilon^2 \Delta \sigma_{z0} \int_0^1 \int_0^z \frac{\nu}{1-\nu} dz dz - \varepsilon^2 \int_0^1 \int_0^z \frac{E}{1-\nu} \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x^2} dz dz - \varepsilon^2 \int_0^1 \int_0^z \frac{E}{1-\nu} \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y^2} dz dz,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_- = & \varepsilon \left( \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \right) + \sigma_{z0} - \varepsilon^4 \Delta^2 w_0 \int_0^{-1} \int_0^z \frac{Ez}{1-\nu^2} dzdz + \\
& + \varepsilon^3 \left( \frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial y^3} \right) \left( \int_0^{-1} \int_0^z \frac{E}{1-\nu^2} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dzdzdz - \int_0^{-1} \int_0^z \frac{\nu}{1-\nu} z dzdz \right) + \\
& + \varepsilon^3 \left( \frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial x \partial y^2} \right) \left( \int_0^{-1} \int_0^z \frac{E\nu}{1-\nu^2} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dzdzdz - \int_0^{-1} \int_0^z \frac{\nu}{1-\nu} z dzdz \right) + \\
& + 2\varepsilon^3 \left( \frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial x^2 \partial y} \right) \int_0^{-1} \int_0^z \frac{E}{1+\nu} \int_0^z \frac{1+\nu}{E} dzdzdz + \\
& + \varepsilon^3 \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \right) \int_0^{-1} \int_0^z \frac{E}{1-\nu^2} dzdz + \\
& + \varepsilon^2 \Delta \sigma_{z0} \int_0^{-1} \int_0^z \frac{\nu}{1-\nu} dzdz - \varepsilon^2 \int_0^{-1} \int_0^z \frac{E}{1-\nu} \frac{\partial^2 (\alpha T)}{\partial x^2} dzdz - \varepsilon^2 \int_0^{-1} \int_0^z \frac{E}{1-\nu} \frac{\partial^2 (\alpha T)}{\partial y^2} dzdz.
\end{aligned}$$

В ряде случаев уравнения (4.47) могут быть разрешены относительно некоторых основных неизветных задачи. Рассмотрим некоторые соответствующие случаи.

#### 4.3.1. Двухслойная пластина со слоями равной толщины

Рассмотрим слоистую пластину, каждый слой которой имеет толщину  $h$ . Слои расположены симметрично относительно продольной плоскости  $xu$ , где  $z = [-1, 1]$  (Рис. 4.). Материал слоев характеризуется безразмерной жесткостью  $E_1$  и  $E_2$  соответственно, причем постоянные величины сопоставимы с  $E_1, E_2 \sim \varepsilon^0$ , коэффициентом Пуассона  $\nu_1 = \nu_2 = \nu = const$ , коэффициентом линейного температурного расширения  $\alpha_1, \alpha_2$  соответственно.

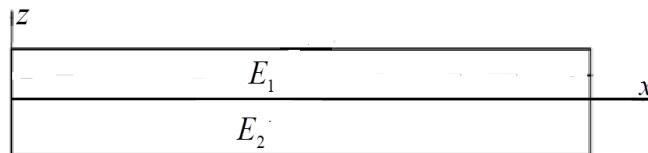


Рис. 4.5. Двухслойная пластина со слоями одинаковой толщины

В этом случае уравнения (4.47) после вычисления входящих в них интегральных коэффициентов принимают вид

$$\begin{aligned}
X_+ + X_- &= \varepsilon^3 \frac{\partial \Delta w_0}{\partial x} \frac{E_1 + E_2}{2(1-\nu^2)} - \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x^2} \frac{2-\nu}{1-\nu} + \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial y \partial x} \frac{2-\nu}{1-\nu} + \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial x \partial y} \right) + \\
&\quad + 2\tau_{xz0} - \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \frac{E_1 - E_2}{1-\nu^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \frac{E_1 - E_2}{2(1+\nu)} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \frac{E_1 - E_2}{2(1-\nu)} \right) + \\
&\quad + \frac{\varepsilon}{1-\nu} \left( E_1 \int_0^1 \frac{\partial \alpha T}{\partial x} dz + E_2 \int_0^{-1} \frac{\partial \alpha T}{\partial x} dz \right), \\
X_+ - X_- &= \varepsilon^3 \left( \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} \right) \frac{E_1 - E_2}{2(1-\nu^2)} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \frac{E_1 + E_2}{1-\nu^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \frac{E_1 + E_2}{2(1+\nu)} - \\
&\quad - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \frac{E_1 + E_2}{2(1-\nu)} - 2\varepsilon \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial x} \frac{\nu}{1-\nu} + \varepsilon \frac{E_1}{1-\nu} \int_0^1 \frac{\partial(\alpha T)}{\partial x} dz - \varepsilon \frac{E_2}{1-\nu} \int_0^{-1} \frac{\partial(\alpha T)}{\partial x} dz, \\
Y_+ + Y_- &= \varepsilon^3 \left( \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right) \frac{E_1 + E_2}{2(1-\nu^2)} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial y^2} \frac{2-\nu}{1-\nu} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x \partial y} \frac{2-\nu}{1-\nu} - \\
&\quad - \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial x^2} \right) - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \frac{E_1 - E_2}{2(1-\nu)} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \frac{E_1 - E_2}{1-\nu^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \frac{E_1 - E_2}{2(1+\nu)} + \\
&\quad + \int_0^{-1} \frac{\partial(\alpha T)}{\partial y} dz + 2\tau_{yz0}, \\
Y_+ - Y_- &= \varepsilon^3 \left( \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right) \frac{E_1 - E_2}{2(1-\nu^2)} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \frac{E_1 + E_2}{2(1-\nu)} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \frac{E_1 + E_2}{1-\nu^2} - \\
&\quad - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \frac{E_1 + E_2}{2(1+\nu)} - 2\varepsilon \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial y} \frac{\nu}{1-\nu} + \varepsilon \frac{E_1}{1-\nu} \int_0^1 \frac{\partial(\alpha T)}{\partial y} dz - \varepsilon \frac{E_2}{1-\nu} \int_0^{-1} \frac{\partial(\alpha T)}{\partial y} dz, \\
Z_+ + Z_- &= 2\sigma_{z0} - \varepsilon^4 \left( \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right) \frac{E_1 + E_2}{6(1-\nu^2)} + \\
&\quad + \varepsilon^3 \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \right) \frac{E_1 + E_2}{2(1-\nu^2)} + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 \sigma_{z0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{z0}}{\partial y^2} \right) \frac{\nu}{1-\nu} - \\
&\quad - \varepsilon^2 \frac{E_1}{1-\nu} \int_0^z \int_0^z \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x^2} dz dz - \varepsilon^2 \frac{E_2}{1-\nu} \int_0^{-z} \int_0^{-z} \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x^2} dz dz - \\
&\quad - \varepsilon^2 \frac{E_1}{1-\nu} \int_0^z \int_0^z \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y^2} dz dz - \varepsilon^2 \frac{E_2}{1-\nu} \int_0^{-z} \int_0^{-z} \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y^2} dz dz,
\end{aligned} \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned}
Z_+ - Z_- = & -2\varepsilon \left( \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \right) - \varepsilon^4 \left( \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right) \frac{E_1 - E_2}{6(1-\nu^2)} + \\
& + \varepsilon^3 \left( \frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial y^3} \right) \frac{2-\nu}{3(1-\nu)} + \varepsilon^3 \left( \frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial x \partial y^2} \right) \frac{2-\nu}{3(1-\nu)} + \\
& + \varepsilon^3 \left( \frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial x^2 \partial y} \right) \frac{2}{3} + \varepsilon^3 \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \right) \frac{E_1 - E_2}{2(1-\nu^2)} - \\
& - \varepsilon^2 \frac{E_1}{1-\nu} \int_0^1 \int_0^z \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x^2} dz dz + \varepsilon^2 \frac{E_2}{1-\nu} \int_0^{-1} \int_0^z \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x^2} dz dz - \varepsilon^2 \frac{E_1}{1-\nu} \int_0^1 \int_0^z \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y^2} dz dz + \\
& + \varepsilon^2 \frac{E_2}{1-\nu} \int_0^{-1} \int_0^z \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y^2} dz dz.
\end{aligned}$$

Как и ранее, будем считать решение, состоящим из быстро и медленно меняющимися компонентами, в частности,  $\tau_{xz0} = \tau_{xz0}^s + \tau_{xz0}^q$ ,  $\tau_{yz0} = \tau_{yz0}^s + \tau_{yz0}^q$ . Пользуясь изложенным подходом, получим группы уравнений, которые отдельно описывают быстро и медленно меняющиеся величины в виде

$$\begin{aligned}
\varepsilon^3 \frac{E_1 + E_2}{2(1-\nu^2)} \Delta \frac{\partial w_0^s}{\partial x} - \varepsilon^2 \frac{E_1 - E_2}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 u_0^s}{\partial x^2} - \varepsilon^2 \frac{E_1 - E_2}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 u_0^s}{\partial y^2} - \varepsilon^2 \frac{E_1 - E_2}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 v_0^s}{\partial x \partial y} + 2\tau_{xz0}^s = \\
= X_+ + X_- - \varepsilon \frac{E_1}{1-\nu} \int_0^1 \frac{\partial(\alpha T)}{\partial x} dz - \varepsilon \frac{E_2}{1-\nu} \int_0^{-1} \frac{\partial(\alpha T)}{\partial x} dz, \\
\varepsilon^3 \frac{E_1 + E_2}{2(1-\nu^2)} \Delta \frac{\partial w_0^s}{\partial y} - \varepsilon^2 \frac{E_1 - E_2}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u_0^s}{\partial x \partial y} - \varepsilon^2 \frac{E_1 - E_2}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 v_0^s}{\partial y^2} - \varepsilon^2 \frac{E_1 - E_2}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 v_0^s}{\partial x^2} + \\
+ 2\tau_{yz0}^s = Y_+ + Y_- - \varepsilon \frac{E_1}{1-\nu} \int_0^1 \frac{\partial(\alpha T)}{\partial y} dz - \varepsilon \frac{E_2}{1-\nu} \int_0^{-1} \frac{\partial(\alpha T)}{\partial y} dz, \tag{4.49} \\
-2\varepsilon \left( \frac{\partial \tau_{xz0}^s}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}^s}{\partial y} \right) - \varepsilon^4 \left( \frac{\partial^4 w_0^s}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_0^s}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 w_0^s}{\partial y^4} \right) \frac{E_1 - E_2}{6(1-\nu^2)} + \\
+ \varepsilon^3 \left( \frac{\partial^3 u_0^s}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u_0^s}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 v_0^s}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v_0^s}{\partial y^3} \right) \frac{E_1 - E_2}{2(1-\nu^2)} = Z_+ - Z_- + \varepsilon^2 \frac{E_1}{1-\nu} \int_0^1 \int_0^z \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x^2} dz dz - \\
- \varepsilon^2 \frac{E_2}{1-\nu} \int_0^{-1} \int_0^z \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x^2} dz dz + \varepsilon^2 \frac{E_1}{1-\nu} \int_0^1 \int_0^z \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y^2} dz dz - \varepsilon^2 \frac{E_2}{1-\nu} \int_0^{-1} \int_0^z \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y^2} dz dz,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^3 \frac{E_1 - E_2}{2(1-\nu^2)} \Delta \frac{\partial w_0}{\partial x} - \varepsilon^2 \frac{E_1 + E_2}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \varepsilon^2 \frac{E_1 + E_2}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - \varepsilon^2 \frac{E_1 + E_2}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - \\
& - 2\varepsilon \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial \sigma_{z_0}}{\partial x} = X_+ - X_- - \varepsilon \frac{E_1}{1-\nu} \int_0^1 \frac{\partial(\alpha T)}{\partial x} dz + \varepsilon \frac{E_2}{1-\nu} \int_0^{-1} \frac{\partial(\alpha T)}{\partial x} dz, \\
& \varepsilon^3 \frac{E_1 - E_2}{2(1-\nu^2)} \frac{\Delta \partial w_0}{\partial y} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \frac{E_1 + E_2}{2(1-\nu)} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \frac{E_1 + E_2}{1-\nu^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \frac{E_1 + E_2}{2(1+\nu)} - \\
& - 2\varepsilon \frac{\partial \sigma_{z_0}}{\partial y} \frac{\nu}{1-\nu} = Y_+ - Y_- - \varepsilon \frac{E_1}{1-\nu} \int_0^1 \frac{\partial(\alpha T)}{\partial y} dz + \varepsilon \frac{E_2}{1-\nu} \int_0^{-1} \frac{\partial(\alpha T)}{\partial y} dz, \\
& - \varepsilon^4 \Delta^2 w_0 \frac{E_1 + E_2}{6(1-\nu^2)} - \varepsilon^2 \frac{E_2}{1-\nu} \int_0^1 \int_0^z \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y^2} dz dz + 2\sigma_{z_0} + \\
& + \varepsilon^3 \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \right) \frac{E_1 + E_2}{2(1-\nu^2)} + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 \sigma_{z_0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{z_0}}{\partial y^2} \right) \frac{\nu}{1-\nu} = \\
& = Z_+ + Z_- + \varepsilon^2 \frac{E_1}{1-\nu} \int_0^1 \int_0^z \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x^2} dz dz + \varepsilon^2 \frac{E_2}{1-\nu} \int_0^{-1} \int_0^z \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x^2} dz dz + \\
& + \varepsilon^2 \frac{E_1}{1-\nu} \int_0^1 \int_0^z \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y^2} dz dz.
\end{aligned}$$

Ввиду громоздкости, здесь и далее приведены только выкладки, дающие аналитический результат в конечной форме. Преобразуя первые три уравнения (4.49), найдем

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^4 \frac{E_1 + 2E_2}{3(1-\nu^2)} \Delta^2 w_0^s - \varepsilon^3 \frac{E_1 - E_2}{2(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^3 u_0^s}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v_0^s}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u_0^s}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 v_0^s}{\partial y^3} \right) = \varepsilon \frac{\partial(X_+ + X_-)}{\partial x} + \\
& + \varepsilon \frac{\partial(Y_+ + Y_-)}{\partial y} + Z_+ - Z_- - \varepsilon^2 \left[ \begin{aligned} & \frac{E_1}{1-\nu} \int_0^1 \frac{\partial^2 \alpha T}{\partial x^2} dz + \frac{E_2}{1-\nu} \int_0^{-1} \frac{\partial^2 \alpha T}{\partial x^2} dz + \frac{E_1}{1-\nu} \int_0^1 \frac{\partial^2 \alpha T}{\partial y^2} dz + \\ & \frac{E_2}{1-\nu} \int_0^{-1} \frac{\partial^2 \alpha T}{\partial y^2} dz - \int_{-1}^1 \int_0^z \frac{E}{1-\nu} \frac{\partial^2 \alpha T}{\partial x^2} dz dz - \\ & - \int_{-1}^1 \int_0^z \frac{E}{1-\nu} \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y^2} dz dz \end{aligned} \right] \quad (4.50)
\end{aligned}$$

Так же из вторых трех уравнения (4.49) получим

$$\begin{aligned}
\varepsilon^4 \frac{E_1 + 5E_2}{12(1-\nu^2)} \Delta^2 w_0 + 2\sigma_{z0} = & \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial(X_+ - X_-)}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial(Y_+ - Y_-)}{\partial y} + Z_+ + Z_- + \\
+ \frac{\varepsilon^2}{2} & \left( \frac{E_2}{1-\nu} \int_0^{-1} \frac{\partial^2 \alpha T}{\partial x^2} dz - \frac{E_1}{1-\nu} \int_0^1 \frac{\partial^2 \alpha T}{\partial y^2} dz + \frac{E_2}{1-\nu} \int_0^{-1} \frac{\partial^2 \alpha T}{\partial y^2} dz - 2 \frac{E_1}{1-\nu} \int_0^1 \int_0^z \frac{\partial^2 \alpha T}{\partial x^2} dz dz \right) - \\
& - \varepsilon^2 \left( \frac{E_2}{1-\nu} \int_0^{-1} \int_0^z \frac{\partial^2 \alpha T}{\partial x^2} dz dz + \frac{E_1}{1-\nu} \int_0^1 \int_0^z \frac{\partial^2 \alpha T}{\partial y^2} dz dz + \right. \\
& \left. + \frac{E_2}{1-\nu} \int_0^{-1} \int_0^z \frac{\partial^2 \alpha T}{\partial y^2} dz dz + \frac{1}{2} \frac{E_1}{1-\nu} \int_0^1 \frac{\partial^2 \alpha T}{\partial x^2} dz \right). \tag{4.51}
\end{aligned}$$

Из уравнения (4.51) следует, что

$$\sigma_{z0}^s \sim \varepsilon^4 w_0^s \wedge \varepsilon^3 u_0^s \wedge \varepsilon^3 v_0^s. \tag{4.52}$$

Полагая, что на пластину воздействует только поле температуры (4.49),

найдем

$$\begin{aligned}
\varepsilon^4 \frac{E_1 - E_2}{2(1-\nu^2)} \Delta^2 w_0 - \varepsilon^3 \frac{E_1 + E_2}{1-\nu^2} & \left( \frac{\partial^3 u_0^s}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v_0^s}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u_0^s}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 v_0^s}{\partial y^3} \right) = -\varepsilon^2 \frac{E_1}{1-\nu} \int_0^1 \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x^2} dz + \\
+ \varepsilon^2 \frac{E_2}{1-\nu} & \int_0^{-1} \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x^2} dz - \varepsilon^2 \frac{E_1}{1-\nu} \int_0^1 \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y^2} dz + \varepsilon^2 \frac{E_2}{1-\nu} \int_0^{-1} \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y^2} dz, \\
\varepsilon^4 \frac{E_1 + 2E_2}{3(1-\nu^2)} & \left( \frac{\partial^4 w_0^s}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_0^s}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_0^s}{\partial y^4} \right) - \varepsilon^3 \frac{E_1 - E_2}{2(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^3 u_0^s}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v_0^s}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u_0^s}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 v_0^s}{\partial y^3} \right) = \\
= -\varepsilon^2 \frac{E_1}{1-\nu} & \int_0^1 \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x^2} dz - \varepsilon^2 \frac{E_2}{1-\nu} \int_0^{-1} \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x^2} dz - \varepsilon^2 \frac{E_1}{1-\nu} \int_0^1 \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y^2} dz - \\
- \varepsilon^2 \frac{E_2}{1-\nu} & \int_0^{-1} \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y^2} dz + \varepsilon^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^z \frac{E}{1-\nu} \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x^2} dz dz + \varepsilon^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^z \frac{E}{1-\nu} \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y^2} dz dz.
\end{aligned}$$

Откуда получим

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon^2}{1+\nu} \frac{E_1^2 + 18E_1E_2 + E_2^2}{6} \Delta^2 w_0 = & -E_1 \frac{E_1 + 3E_2}{E_1 + E_2} \int_0^1 \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x^2} dz - \\
- E_2 \frac{3E_1 + E_2}{E_1 + E_2} & \int_0^{-1} \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x^2} dz - E_1 \frac{E_1 + 3E_2}{E_1 + E_2} \int_0^1 \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y^2} dz - E_2 \frac{3E_1 + E_2}{E_1 + E_2} \int_0^{-1} \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y^2} dz + \\
+ 2(E_1 + E_2) & \int_{-1}^1 \int_{-1}^z E \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x^2} dz dz + 2(E_1 + E_2) \int_{-1}^1 \int_{-1}^z E \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y^2} dz dz, \tag{4.53}
\end{aligned}$$

$$2\sigma_{z0} = -\varepsilon^4 \frac{E_1 + 5E_2}{12(1-\nu^2)} \Delta^2 w_0 + \frac{\varepsilon^2}{2} \left( \begin{aligned} & \frac{E_2}{1-\nu} \int_0^{-1} \frac{\partial^2 \alpha T}{\partial x^2} dz - \frac{E_1}{1-\nu} \int_0^1 \frac{\partial^2 \alpha T}{\partial y^2} dz + \\ & + \frac{E_2}{1-\nu} \int_0^{-1} \frac{\partial^2 \alpha T}{\partial y^2} dz - 2 \frac{E_1}{1-\nu} \int_0^1 \int_0^z \frac{\partial^2 \alpha T}{\partial x^2} dz dz \end{aligned} \right) - \\ - \varepsilon^2 \left( \begin{aligned} & \frac{E_2}{1-\nu} \int_0^{-1} \int_0^z \frac{\partial^2 \alpha T}{\partial x^2} dz dz + \frac{E_1}{1-\nu} \int_0^1 \int_0^z \frac{\partial^2 \alpha T}{\partial y^2} dz dz + \\ & + \frac{E_2}{1-\nu} \int_0^{-1} \int_0^z \frac{\partial^2 \alpha T}{\partial y^2} dz dz + \frac{1}{2} \frac{E_1}{1-\nu} \int_0^1 \frac{\partial^2 \alpha T}{\partial x^2} dz \end{aligned} \right).$$

Решение первого из них представляет собой бигармоническое уравнение, и, при заданном поле температуры может быть найдено известными методами. При определении функции  $w_0^s$ , характеризующей поперечные перемещения точек, расположенных в плоскости  $z=0$  (срединная плоскость), значения второй основной неизвестной  $\sigma_{z0}^s$  находятся без существенных трудностей.

#### 4.3.2. Двухслойная пластина со слоями различной толщины

Теперь рассмотрим задачу о нагружении двухслойной пластины с различной толщиной слоев, расположенных в соответствии с Рис. 4.. Продольная плоскость  $xu$  расположена на равном расстоянии от лицевых сторон, координата стыка между слоями  $z = z_1$ . Все другие исходные данные такие же, как и в задаче раздела 4.3.1.

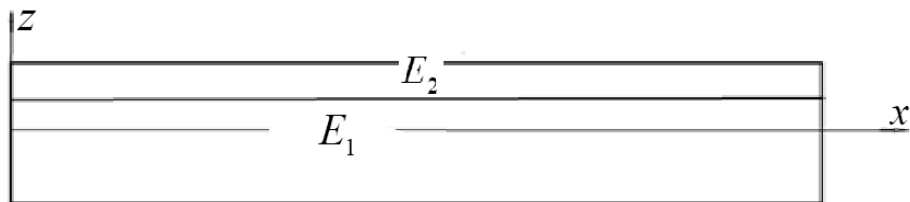


Рис. 4.6. Двухслойная пластина со слоями различной толщины

Уравнения (4.47) после вычисления интегральных коэффициентов, а также попарного сложения и вычитания приобретают вид

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^3 \frac{\partial \Delta w_0}{\partial x} \frac{E_1(z_1^2 + 1) + E_2(1 - z_1^2)}{2(1 - \nu^2)} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x^2} \frac{2 - \nu}{1 - \nu} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial y \partial x} \frac{\nu}{1 - \nu} - \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial x \partial y} \right) - \\
& - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \frac{(E_2 - E_1)(1 - z_1)}{1 - \nu^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \frac{(E_2 - E_1)(1 - z_1)}{2(1 + \nu)} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \frac{(E_2 - E_1)(1 - z_1)}{2(1 - \nu)} + \\
& + 2\tau_{xz0} = X_+ + X_- - \varepsilon \int_0^1 \frac{E}{1 - \nu} \frac{\partial(\alpha T)}{\partial x} dz - \varepsilon \int_0^{-1} \frac{E}{1 - \nu} \frac{\partial(\alpha T)}{\partial x} dz, \\
& \varepsilon^3 \frac{\partial \Delta w_0}{\partial x} \frac{(E_2 - E_1)(1 - z_1^2)}{2(1 - \nu^2)} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \frac{E_1(z_1 + 1) + E_2(1 - z_1)}{1 - \nu^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \frac{E_1(z_1 + 1) + E_2(1 - z_1)}{2(1 + \nu)} - \\
& - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \frac{E_1(z_1 + 1) + E_2(1 - z_1)}{2(1 - \nu)} - 2\varepsilon \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial x} \frac{\nu}{1 - \nu} = X_+ - X_- - \varepsilon \int_{-1}^1 \frac{E}{1 - \nu} \frac{\partial(\alpha T)}{\partial x} dz, \\
& \varepsilon^3 \frac{\partial \Delta w_0}{\partial y} \frac{E_1(z_1^2 + 1) + E_2(1 - z_1^2)}{2(1 - \nu^2)} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial y^2} \frac{2 - \nu}{1 - \nu} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x \partial y} \frac{\nu}{1 - \nu} - \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial x^2} \right) - \\
& - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \frac{(E_2 - E_1)(1 - z_1)}{2(1 - \nu)} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \frac{(E_2 - E_1)(1 - z_1)}{1 - \nu^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \frac{(E_2 - E_1)(1 - z_1)}{2(1 + \nu)} + 2\tau_{yz0} = \\
& = Y_+ + Y_- - \varepsilon \int_0^1 \frac{E}{1 - \nu} \frac{\partial(\alpha T)}{\partial y} dz - \varepsilon \int_0^{-1} \frac{E}{1 - \nu} \frac{\partial(\alpha T)}{\partial y} dz, \\
& Y_+ - Y_- - \varepsilon \int_{-1}^1 \frac{E}{1 - \nu} \frac{\partial(\alpha T)}{\partial y} dz = \varepsilon^3 \frac{\partial \Delta w_0}{\partial y} \frac{(E_2 - E_1)(1 - z_1^2)}{2(1 - \nu^2)} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \frac{E_1(z_1 + 1) + E_2(1 - z_1)}{2(1 - \nu)} - \\
& - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \frac{E_1(z_1 + 1) + E_2(1 - z_1)}{1 - \nu^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \frac{E_1(z_1 + 1) + E_2(1 - z_1)}{2(1 + \nu)} - 2\varepsilon \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial y} \frac{\nu}{1 - \nu}, \\
& Z_+ + Z_- - \varepsilon^2 \int_0^1 \int_0^z \frac{E}{1 - \nu} \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x^2} dz dz - \varepsilon^2 \int_0^{-1} \int_0^z \frac{E}{1 - \nu} \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x^2} dz dz + \varepsilon^2 \int_0^1 \int_0^z \frac{E}{1 - \nu} \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y^2} dz dz - \\
& - \varepsilon^2 \int_0^{-1} \int_0^z \frac{E}{1 - \nu} \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y^2} dz dz = 2\sigma_{z0} - \varepsilon^4 \Delta^2 w_0 \frac{(E_2 - E)(1 - z_1^3)}{6(1 - \nu^2)} + \\
& + \varepsilon^3 \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \right) \frac{E_1(z_1^2 + 1) + E_2(1 - z_1^2)}{2(1 - \nu^2)} + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 \sigma_{z0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{z0}}{\partial y^2} \right) \frac{\nu}{1 - \nu},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_+ - Z_- - \varepsilon^2 \int_{-1}^1 \int_0^z \frac{E}{1-\nu} \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x^2} dz dz + \varepsilon^2 \int_{-1}^1 \int_0^z \frac{E}{1-\nu} \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y^2} dz dz = & -2\varepsilon \left( \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \right) - \\
& -\varepsilon^4 \Delta^2 w_0 \frac{E_1(z_1^3 + 1) + E_2(1 - z_1^3)}{6(1-\nu^2)} + \varepsilon^3 \left( \frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial y^3} \right) \frac{2-\nu}{3(1-\nu)} + \\
& + \varepsilon^3 \left( \frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial x \partial y^2} \right) \frac{\nu}{3(1-\nu)} + \frac{2}{3} \varepsilon^3 \left( \frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial x^2 \partial y} \right) + \\
& + \varepsilon^3 \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \right) \frac{(E_2 - E_1)(1 - z_1^2)}{2(1-\nu^2)}.
\end{aligned}$$

Подход, основанный на принятии во внимание различия асимптотик для быстро и медленно меняющихся компонент решения, примененный в предыдущем разделе, также позволяет получить аналитический результат в виде следующих разрешающих соотношений

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{E_1(3z_1^2 - z_1^3 + 2) + E_2(z_1^3 - 3z_1^2 + 2)}{3} - \frac{\varepsilon^2}{2(1+\nu)} \Delta^2 w_0^s = - \int_0^1 E \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x^2} dz - \right. \\
& \left. \frac{(z_1 - 1)^2 (1 - z_1^2)}{4} \frac{(E_2 - E_1)^2}{E_1(z_1 + 1) + E_2(1 - z_1)} \right] \frac{\varepsilon^2}{2(1+\nu)} \Delta^2 w_0^s = - \int_0^1 E \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x^2} dz - \\
& - \int_0^{-1} E \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y^2} dz - \int_{-1}^1 \int_0^z E \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x^2} dz dz + \\
& + \frac{E_2 - E_1}{2} \frac{(z_1 - 1)^2}{E_1(z_1 + 1) + E_2(1 - z_1)} \left( \int_{-1}^1 E \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x^2} dz + \int_{-1}^1 E \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y^2} dz \right) + \quad (4.54) \\
& + \int_{-1}^1 \int_0^z E \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y^2} dz dz, \\
2\sigma_{z0} = & \varepsilon^4 \Delta^2 w_0^s \frac{(E_2 - E_1)(1 - z_1^3)}{6(1-\nu^2)} + \varepsilon^2 \int_0^1 \int_0^z \frac{E}{1-\nu} \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y^2} dz dz + \varepsilon^2 \int_0^{-1} \int_0^z \frac{E}{1-\nu} \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y^2} dz dz - \\
& - \varepsilon^3 \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \right) \frac{E_1(z_1^2 + 1) + E_2(1 - z_1^2)}{2(1-\nu^2)} - \\
& - \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 \sigma_{z0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{z0}}{\partial y^2} \right) \frac{\nu}{1-\nu} - \varepsilon^2 \int_0^1 \int_0^z \frac{E}{1-\nu} \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x^2} dz dz - \varepsilon^2 \int_0^{-1} \int_0^z \frac{E}{1-\nu} \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x^2} dz dz.
\end{aligned}$$

При этом остаются также верны асимптотические оценки (4.52).

### 4.3.3. Пластина с произвольным количеством слоев различной толщины

Рассмотрим задачу нагружения пластины с произвольным количеством слоев различной толщины, которые расположены в соответствии со схемой Рис. 4.7. Продольная координатная плоскость  $x$  расположена симметрично относительно лицевых сторон пластины. Верхняя часть пластины содержит  $n$  слоев, нижняя –  $m$  слоев. В случае, когда плоскость  $x$  разделяет слой на две части, каждая из них условно считается отдельным слоем.

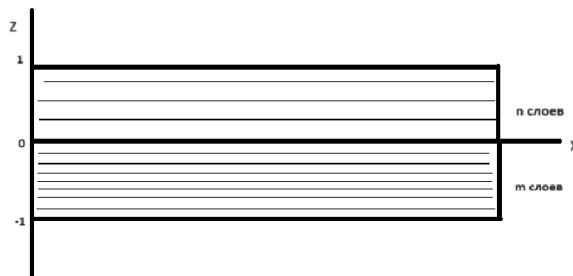


Рис. 4.7. Многослойная пластина со слоями различной толщины

Координаты внешних слоев –  $z_i$ , где  $i$  обозначает номер слоя: для верхней –  $i=1 \div n$  и нижней  $i=1 \div m$  сторон пластины. Соответственно, для слоев определены безразмерные коэффициенты жесткости  $E_i$ ; коэффициент Пуассона  $\nu$  от координаты  $z$  полагается не зависящим. Интегральные коэффициенты при этих условиях имеют значения

$$\tilde{E}_z^+ = \int_0^1 E z dz = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n E_i h_i^2,$$

$$\tilde{E}^+ = \int_0^1 E dz = \sum_{i=1}^n E_i h_i,$$

$$\tilde{E}_z^- = \int_0^{-1} E z dz = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m E_i h_i^2,$$

$$\tilde{E}^- = \int_0^{-1} E dz = -\sum_{i=1}^m E_i h_i,$$

$$\begin{aligned}\tilde{E}^+ &= \int_{z_0}^1 \int_{z_0}^z E dz dz = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n E_i h_i^2 + \sum_{j=1}^{n-2} E_j h_j \sum_{i=j+1}^{n-1} h_i + h_n \sum_{i=1}^{n-1} E_i h_i, \\ \tilde{E}_z^+ &= \int_0^1 \int_0^z E z dz dz = \sum_{i=1}^n E_i \left[ \frac{z_i^3}{6} - \frac{z_{i-1}^3}{6} - \frac{z_{i-1}^2}{2} h_i \right] + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-j} E_i h_{i+1} \left( \frac{z_i^2}{2} - \frac{z_{i-1}^2}{2} \right), \\ \tilde{E}_z^- &= \int_0^{-1} \int_0^z E z dz dz = - \sum_{i=1}^m E_i \left[ \left( \frac{z_i^3}{6} - \frac{z_{i-1}^3}{6} \right) - \frac{z_{i-1}^2}{2} h_i \right] - \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{m-j} E_i h_{i+1} \left( \frac{z_i^2}{2} - \frac{z_{i-1}^2}{2} \right), \\ \tilde{E}^- &= \int_{z_0}^{-1} \int_{z_0}^z E dz dz = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m E_i h_i^2 + \sum_{j=1}^{m-2} E_j h_j \sum_{i=j+1}^{m-1} h_i + h_n \sum_{i=1}^{m-1} E_i h_i.\end{aligned}$$

С учетом этого уравнения граничных условий (4.47) приобретают вид

$$\begin{aligned}& \frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^3 \frac{\partial \Delta w_0}{\partial x} \tilde{E}_z^+ - \frac{1}{2} \frac{2-\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial y \partial x} - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial x \partial y} \right) - \\ & - \frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \tilde{E}^+ - \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \tilde{E}^+ - \frac{1}{2(1-\nu)} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \tilde{E}^+ - \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial x} + \\ & + \tau_{xz0}(x, y) = X_+ - \frac{1}{1-\nu} \varepsilon \int_0^1 E \frac{\partial(\alpha T)}{\partial x} dz, \\ & \frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^3 \frac{\partial \Delta w_0}{\partial x} \tilde{E}_z^- - \frac{1}{2} \frac{2-\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial y \partial x} - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial x \partial y} \right) - \\ & - \frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \tilde{E}^- - \frac{1}{2(1+\nu)} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \tilde{E}^- - \frac{1}{2(1-\nu)} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \tilde{E}^- + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial x} + \\ & + \tau_{xz0}(x, y) = X_- - \frac{1}{1-\nu} \varepsilon \int_0^{-1} E \frac{\partial(\alpha T)}{\partial x} dz, \\ & \frac{\varepsilon^3}{1-\nu^2} \frac{\partial \Delta w_0}{\partial y} \tilde{E}_z^+ - \frac{1}{2} \frac{2-\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial y^2} - \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial x^2} \right) - \\ & - \frac{\varepsilon^2}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \tilde{E}^+ - \frac{\varepsilon^2}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \tilde{E}^+ - \frac{\varepsilon^2}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \tilde{E}^+ - \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial y} + \\ & + \tau_{yz0}(x, y) = Y_+ - \frac{\varepsilon}{1-\nu} \int_0^1 E \frac{\partial(\alpha T)}{\partial y} dz,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^3 \frac{\partial \Delta w_0}{\partial y} \tilde{E}_z^- - \frac{1}{2} \frac{2-\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial x^2} \right) - \\
& - \frac{1}{2(1-\nu)} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \tilde{E}^- - \frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \tilde{E}^- - \frac{1}{2(1+\nu)} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \tilde{E}^- + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial y} + \\
& + \tau_{yz0}(x, y) = Y_- - \frac{1}{1-\nu} \varepsilon \int_0^{-1} E \frac{\partial(\alpha T)}{\partial y} dz, \\
& - \frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^4 \Delta^2 w_0 \tilde{E}_z^+ + \frac{1}{6} \frac{2-\nu}{1-\nu} \varepsilon^3 \left( \frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial y^3} \right) + \frac{1}{6} \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon^3 \left( \frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial x \partial y^2} \right) + \\
& + \frac{1}{3} \varepsilon^3 \left( \frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial x^2 \partial y} \right) + \frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^3 \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \right) \tilde{E}^+ - \varepsilon \left( \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \right) + \\
& + \frac{1}{2} \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 \sigma_{z0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{z0}}{\partial y^2} \right) + \sigma_{z0} = Z_+ + \frac{1}{1-\nu} \varepsilon^2 \int_0^1 \int_0^z E \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x^2} dz dz + \\
& + \frac{1}{1-\nu} \varepsilon^2 \int_0^1 \int_0^z E \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y^2} dz dz, \\
& - \frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^4 \Delta^2 w_0 \tilde{E}_z^- - \frac{1}{6} \frac{2-\nu}{1-\nu} \varepsilon^3 \left( \frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial y^3} \right) - \frac{1}{6} \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon^3 \left( \frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial x \partial y^2} \right) - \\
& - \frac{1}{3} \varepsilon^3 \left( \frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial x^2 \partial y} \right) + \frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^3 \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \right) \tilde{E}^- + \\
& + \frac{1}{2} \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 \sigma_{z0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{z0}}{\partial y^2} \right) + \varepsilon \left( \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \right) + \sigma_{z0} = \\
& = Z_- + \frac{1}{1-\nu} \varepsilon^2 \int_0^{-1} \int_0^z E \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x^2} dz dz + \frac{1}{1-\nu} \varepsilon^2 \int_0^{-1} \int_0^z E \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y^2} dz dz.
\end{aligned}$$

С использованием аппарата асимптотик и учетом различной изменяемости компонент решения преобразуем их к следующему виду

$$\frac{\varepsilon^4}{1-\nu^2} \Delta^2 w_0 \left[ \left( -\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^- + \tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^- \right) + \frac{\left( \tilde{E}^+ - \tilde{E}^- - \tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^- \right) \left( \tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^- \right)}{\tilde{E}^+ - \tilde{E}^-} \right] =$$

$$= -\frac{\varepsilon^2}{1-\nu} \left( \int_0^1 E \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y^2} dz + \int_0^{-1} E \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y^2} dz + \int_0^1 E \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x^2} dz + \int_0^{-1} E \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x^2} dz - \right.$$

$$\left. - \int_{-1}^z \int_0^z E \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x^2} dz dz - \frac{1}{1-\nu} \varepsilon^2 \int_{-1}^z \int_0^z E \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y^2} dz dz + \right.$$

$$\left. + \frac{\tilde{E}^+ - \tilde{E}^- - \tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{\tilde{E}^+ - \tilde{E}^-} \left[ \int_{-1}^z E \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x^2} dz + \int_{-1}^z E \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y^2} dz \right] \right).$$

Характер полученной зависимости в целом повторяет результаты предшествующих двух случаев (соотношение (4.53) в разделе 4.3.1 и (4.54) в разделе 4.3.2). Кроме того, остаются верны асимптотические оценки (4.52).

#### 4.4. Выводы по четвертой главе

1. Дано обобщение применения метода Сен-Венана – Пикара – Банаха на трехмерное тело в виде слоистой прямоугольной пластины при действии механической нагрузки и поля температуры.

2. Для общего случая получены выражения для неизвестных исходной задачи через новые основные неизвестные (6 функций двух координат) в нулевом и первом приближениях.

3. В соответствии со структурой метода, на граничных условиях для лицевых сторон (общий случай приложения нагрузки, распределенной по поверхности) получены разрешающие соотношения для основных неизвестных в виде уравнений в частных производных (от двух координат в плоскости пластины) – отдельно для медленно меняющихся и быстро меняющихся (типа краевого эффекта) составляющих. Результат получен для изотропной пластины, а также пластины состоящей из двух и произвольного количества слоев.

4. Для изотропной пластины система уравнения для основных неизвестных разделяется на две, описывающие плоскую и антиплоскую задачи. Это позволило в заданном приближении аналитически найти все неизвестные

задачи (компоненты напряженно-деформированного состояния), удовлетворив все граничные условия. Форма решения для поперечных перемещений точек, расположенных на равном расстоянии от лицевых поверхностей, отвечает известному в литературе аналитическому результату.

5. Для двухслойной пластины получены разрешающие соотношения, позволяющие определить отдельно некоторые из основных неизвестных (функции, определяющие поперечные перемещения и поперечные нормальные напряжения на равном расстоянии от лицевых поверхностей). Для случая двух и более слоев ввиду известной сложности пространственной задачи решение для основных неизвестных в компактной форме получено частично.

6. Дополнительный результат представляют полученные и вычисленные для случая произвольного количества слоев интегральные коэффициенты (близкие по сути обобщенным жесткостям), входящие в структуру разрешающих соотношений. Для их расчета применена описанная в работе техника вычисления кратных интегралов по координате толщины по пакету слоев.

## ГЛАВА V. ПРИМЕРЫ РЕАЛИЗАЦИИ РАСЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ В ИССЛЕДОВАНИИ ТЕХНИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ МАТЕРИАЛОВ С ФУНКЦИОНАЛЬНО ИЗМЕНЯЕМЫМ СОСТАВОМ

### 5.1. Металлическая конструкция с наплавленным слоем

Во многих технических конструкциях имеются металлические детали, поверхности которых наплавлены специальными материалами для создания слоя, обладающего требуемым комплексом свойств, например, повышенной износостойкостью, теплостойкостью, стойкостью к воздействиям агрессивной среды и пр. Такие многослойные детали получают, как правило, либо методами сварки, либо другими способами [198].

В настоящее время технологии наплавки методом сварки хорошо разработаны. Однако, изготовленные детали таким способом в окончательном виде подвержены значительному короблению. Нарушение правильности геометрической формы отдельных наплавленных узлов затрудняет сборку всей конструкции, что требует проведения дополнительной операции правки, которая может выполняться как с нагревом исправляемого узла конструкции, так и без дополнительного нагрева путем механического воздействия на холодный металл.

В случае правки изделия посредством его нагрева до некоторой температуры, помимо снятия сварочных деформаций и напряжений, в деталях образуются «свои» температурные деформации, назовем их вторичными. Их оценку проведем на примере мембранной панели печи мусоросжигательной установки, используемой в утилизации бытовых отходов [199].

Исходные данные задачи. Панель имеет сложную тонкостенную геометрическую форму большой протяженности (размер  $L$ ) с равной толщиной стенки, Рис. 5.1. Такую конструкцию выполняют сваркой с последующей наплавкой ее лицевых поверхностей. В качестве основного металла используют малоуглеродистую сталь, в качестве наплавки – легированные хромоникелевые сплавы. Образованный защитный слой является жаропрочным и коррозионностойким к воздействиям среды.

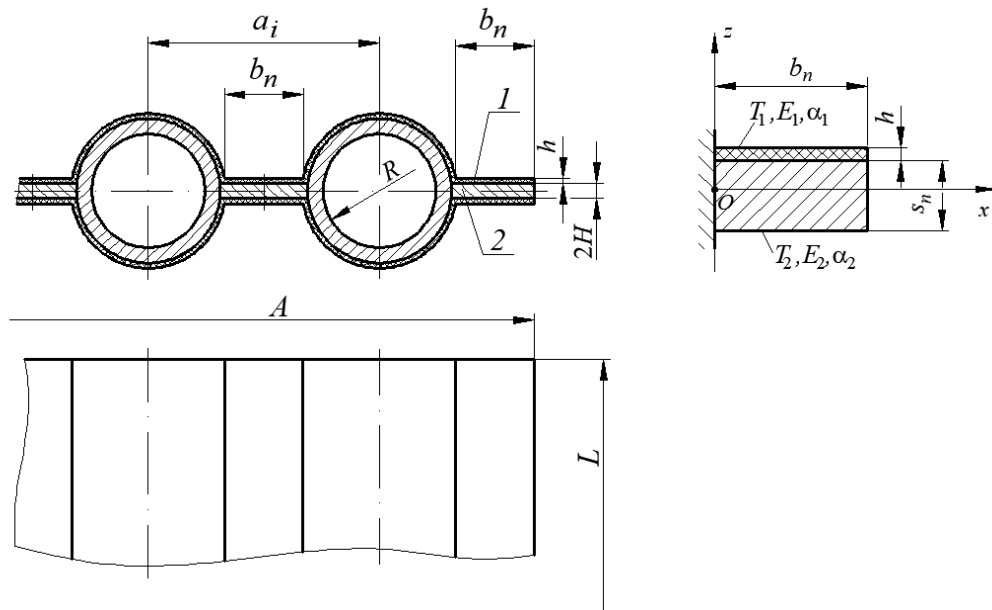


Рис. 5.1. Панель мембранная: 1 – наплавленный слой; 2 – основной металл

В процессе наплавки и последующего охлаждения наибольшей деформации подвергается свободный край панели, что при сборке оборудования доставляет значительные неудобства. Правку свободного края панели осуществляют нагревом до температуры, значение которой не превышает  $280^\circ\text{C}$ . Для оценки температурных деформаций принимаем модель в виде двухслойной панели, рассматривая ее в продольном сечении, проходящем через плоскость симметрии. Расчетная схема и условия закрепления приведены на Рис. 5.2.

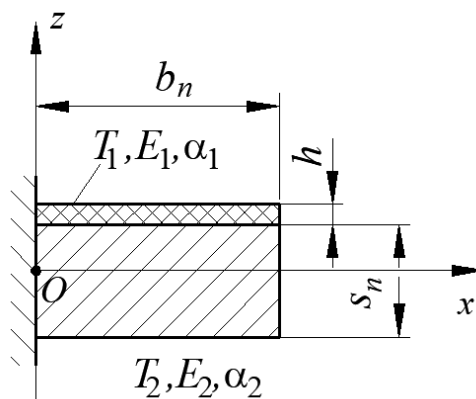


Рис. 5.2. Расчетная модель

При этом считаем, что равномерно нагревается только поверхностный слой панели до температуры  $250^\circ\text{C}$ . Такие условия могут быть обеспечены токами высокой частоты (ТВЧ).

Основные соотношения и ход решения задачи показаны в п.3.2.2. Задача при следующих исходных данных:  $h_n = 3 \cdot 10^{-3}$  м;  $s_n = 6 \cdot 10^{-3}$  м;  $b_n = 3 \cdot 10^{-2}$  м;  $L = 6$  м;  $T_1 = 250^\circ\text{C}$ ;  $T_2 = 21^\circ\text{C}$ ;  $E_1 = 2,0 \cdot 10^6$  МПа;  $E_2 = 2,0 \cdot 10^5$  МПа;  $\alpha_1 = 14,8 \cdot 10^{-6}$  1/град;  $\alpha_2 = 11,3 \cdot 10^{-6}$  1/град. Начальная температура, при которой отсутствует деформация, – считается  $21^\circ\text{C}$ . Значения физико-механических характеристик взяты осредненными [205].

Закон распределения температуры по толщине пластины принимается линейным:

$$\alpha T = \begin{cases} \frac{\alpha_1 t_1 - \alpha_2 t_2}{z_1 - 1} z + \frac{\alpha_2 t_2 z_1 - \alpha_1 t_1}{z_1 - 1}, & \text{при } z \geq z_1 \\ \frac{\alpha_1 t_1}{z_1 + 1} (z + 1), & \text{при } z < z_1 \end{cases}, \quad t_1 = \text{const}; \quad t_2 = \text{const}$$

$$t_1 = T_{z_1} - T_0, \quad t_2 = T_1 - T_{z_1}.$$

Внешняя поверхностная нагрузка отсутствует  $Z_+ = Z_- = X_+ = X_- = 0$ ,

Рассматривались следующие граничные условия

$$\begin{aligned} u = 0, \quad w = 0 & \text{ при } x = 0, \\ \sigma_x = 0, \quad \tau = 0 & \text{ при } x = 1 \end{aligned}$$

Распределение температуры по толщине пластины относительно безразмерной координаты  $z$  приведено на рис. 5.3.

Следует отметить, что при решении задачи температура нижней лицевой поверхности принималась равной  $21^\circ\text{C}$  намеренно, с целью определения максимального значения температурной деформации. В действительности в условиях естественного охлаждения нижней поверхности (на воздухе) величина коробления будет значительно меньше в силу меньшего температурного градиента.

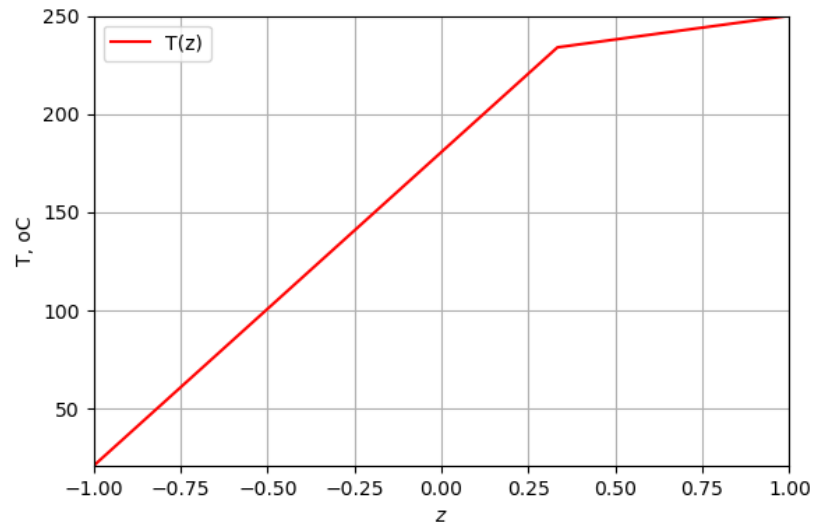


Рис. 5.3. Распределение температуры ( $^{\circ}\text{C}$ ) по безразмерной толщине полосы

Графики распределения продольных и поперечных деформаций пластины приведены на Рис. 5.4, 5.5.

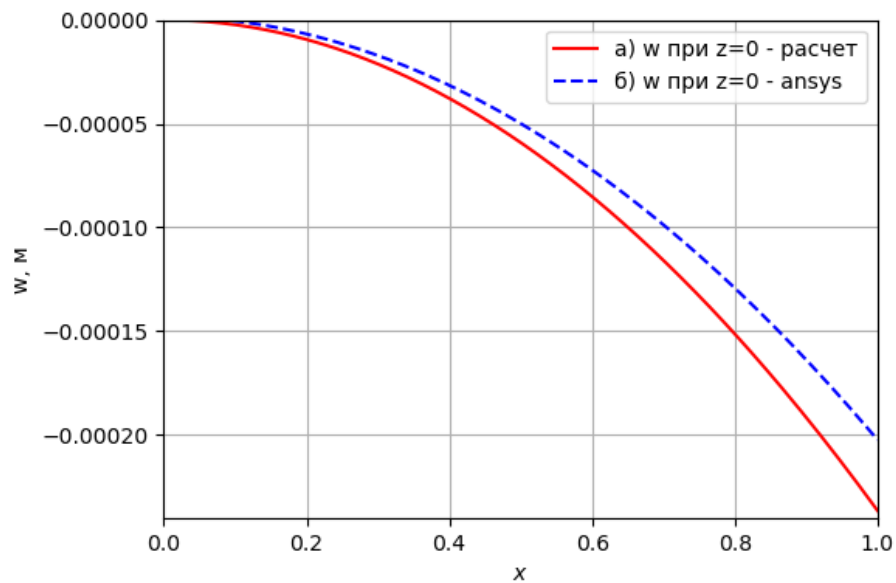


Рис. 5.4. Поперечные перемещения [м] при  $z=0$ : (а) – аналитическое решение; (б) – численное решение

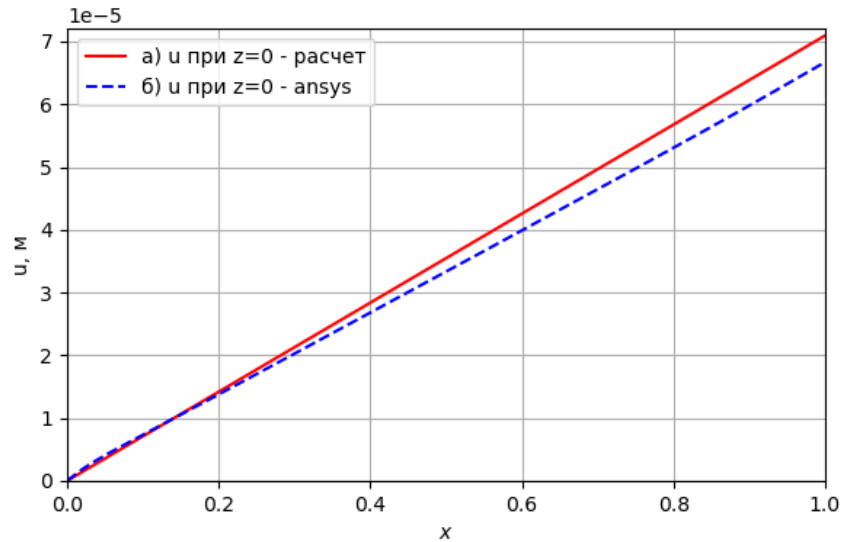


Рис. 5.5. Продольные перемещения [м] при  $z=0$ : (а) – аналитическое решение; (б) – численное решение

Полученные результаты сравнивались с численными решениями задачи, полученными методом конечных элементов (МКЭ) в программном комплексе ANSYS. Сопоставимость обоих решений позволяет сделать вывод о том, что разработанный в работе метод Сен-Венана – Пикара – Банаха (SVPB) может быть успешно применен в оценке НДС изделий из слоистых материалов в конструкторско-технологическом обеспечении машиностроительного производства.

## 5.2. Конструкция режущей твердосплавной пластины с покрытиями титановольфрамовой группы

В настоящее время в металлообрабатывающей промышленности широкое распространение получили режущие инструменты с многофункциональными покрытиями, позволяющие решать чрезвычайно важные задачи для машиностроительного производства [3]. Формообразование получистовых и чистовых поверхностей заготовок с применением таких инструментов осуществляется, к примеру, точением резца с твердосплавными пластинами, имеющими специальные покрытия режущих кромок [200]. Несмотря на то, что процессы резания хорошо изучены [201-203], вопросы термонапряженного состояния режущих инструментов, обусловленного контактным взаимодействием

и интенсивным тепловыделением в зоне резания [203, 204], в литературе недостаточно освещены. Особо это касается пластин с перспективными наноструктурированными многослойными покрытиями, формируемыми на твёрдосплавной основе.

Решения задачи о термонапряженном состоянии режущего элемента (вставки резца), геометрия которого показана на Рис. 5.6 выполнена на модели двухслойной полосы аналогично рассмотренной в разделе 3.2.2.

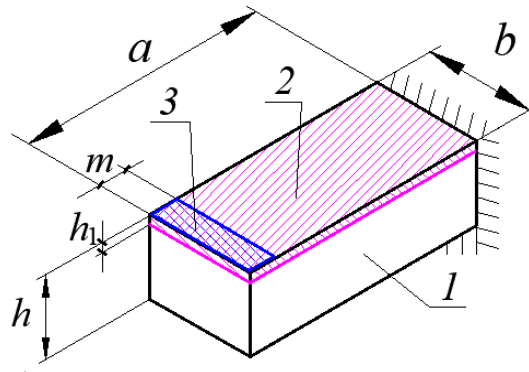


Рис. 5.6. Геометрия режущей вставки: 1 – основа твердосплавной пластины; 2 – покрытие; 3 – область приложения нагрузки

Параметры модели:

Геометрические параметры:  $a$  – 20 мм;  $b$  – 4 мм;  $h$  – 4 мм;  $h_1$  – 0,001 мм;  $m$  – 0,1 мм;

Характеристика материала слоев:

- материал основного слоя титановольфрамовой группы:  $E_1 = 4,1 \cdot 10^5$  МПа;  $\alpha_1 = 5,2 \cdot 10^{-6}$  1/град;

- слоя покрытия системы карбонитридов:  $E_2 = 1,03 \cdot 10^5$  МПа;  $\alpha_2 = 8,5 \cdot 10^{-6}$  1/град.

Значения физико-механических характеристик взяты осредненными [205].

В расчетах, как в модели раздела 3.2.2 коэффициент Пуассона обоих слоев положен равным  $\nu = 0,3$ .

Нагрузка в зоне резания (Рис 5.7) составляет  $P_x = 12 \cdot 9,81 = 117,72$  Н,  $P_z = 10 \cdot 9,81 = 98,1$  Н [3]. При этом учитывалось, что зона резания охлаждалась путем применения охлаждающей жидкости.

Модель адаптирована для получения аналитического решения. Нагрузка  $P_x, P_z$ , сконцентрированная в малой области и имеющая характер быстро изменяющейся, перенесена на торцевую поверхность и заменена медленно меняющимися функциями типа полиномов.

Правый торец режущего элемента зафиксирован и полагается жестко заземленным. Поле температуры задано функцией:  $T = (275+T_0)+5z$  (°C); начальная температура –  $T_0=21$ °C; градиент температуры соответствует режиму охлаждения. Способ приложения нагрузки и его преобразование в расчетной модели показаны на Рис. 5.7.

В силу линейности постановки и в целях сопоставления и анализа задача решена последовательно поэлементно. Рассмотрены три случая: нагружение продольной нагрузкой (случай « $X_0$ »), поперечно нагрузкой (случай « $Z_0$ »), температурное воздействие.

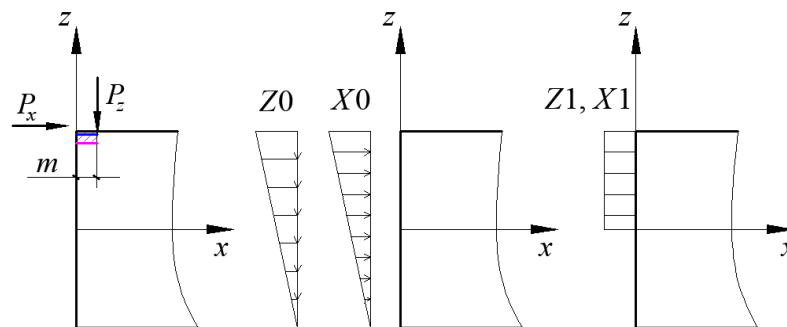


Рис. 5.7. Преобразование модели приложения нагрузки. Слева – исходная схема. В центре – схема, применяемая в аналитических расчетах. Справа - сопоставимая нагрузка в численном эксперименте

Для модели (двухслойной полосы), находящейся в условиях действия температурного поля, верхняя и нижняя стороны которой свободны, в разделе 3.2.2 было получено необходимое решение, задающее форму основных неизвестных с точностью до констант интегрирования. Последние находятся выполнением оставшихся условий на торцевых поверхностях. В случае воздействия силовых факторов ( $X_0$  и  $Z_0$ ) – это условие жесткого заземления на правом краю:

$$u = 0, w = 0 \text{ при } x = 1.$$

На левом торце:

- в задаче о действии продольно направленного усилия ( $X_0$ ):

$$\sigma_x = X_0 = -\frac{9.81P_x}{2hmE}(z+1), \tau = 0 \text{ при } x = 0.$$

- в случае поперечного нагружения ( $Z_0$ ):

$$\sigma_x = 0, \tau = Z_0 = \frac{9.81 \cdot 3P_z}{8hmE}(z+1)^2 \text{ при } x = 0.$$

Граничные условия выполняются на приближенных соотношениях  $u_{(0)}, w_{(1)}, \tau_{(1)}, \sigma_{z(1)}$  (3.2). Форма функций, аппроксимирующих нагрузку  $X_0, Z_0$  выбрана сообразно характеру зависимости  $\sigma_{z(1)}, \tau_{(1)}$  от координаты  $z$ .

Константы интегрирования были вычислены изложенным в разделах 2.3.2, 3.2.2 способом. Найденные величины основных неизвестных (функций с определенными значениями констант) применены для вычисления компонент напряженно-деформированного состояния в приближениях  $u_{(0)}, w_{(1)}, \tau_{(1)}, \sigma_{x(0)}, \sigma_{z(1)}$  по формулам (3.2); присутствующие в них физические постоянные приняты согласно данным задачи для каждого слоя. Полученные результаты проиллюстрированы на графиках Рис. 5.8–5.20.

В случае механического нагружения (силами  $X_0, Z_0$ ) для сопоставления результатов выполнен расчет по методу конечных элементов решателем CalculiX [<https://www.calculix.de/>]. Подготовка цифровой модели и файлов данных для вычислений осуществлена в среде FreeCAD [<https://www.freecad.org/>]. Сетка конечных элементов для модели построена интегрированным в CAD-систему генератором NetGEN и имеет вид Рис 5.8. При построении цифровой модели системой применен треугольный 6-узловой плоский оболочечный конечный элемент. Экспресс-верификация решателя и выбранного конечного элемента проведена на задачах растяжения и изгиба балки, которая показала высокую степень совпадения результатов с обычной моделью.

Расчет МКЭ для задач воздействия сил  $X_0$  и  $Z_0$  проведен в условиях нагрузки, распределение которой приближенно соответствует принятой в аналитическом расчете (Рис. 5.7). Амплитуда нагрузки в области ее приложения постоянна ( $X_1, Z_1$ ) и интегрально соответствует требуемой по условиям задачи (далее – модель МКЭ2).

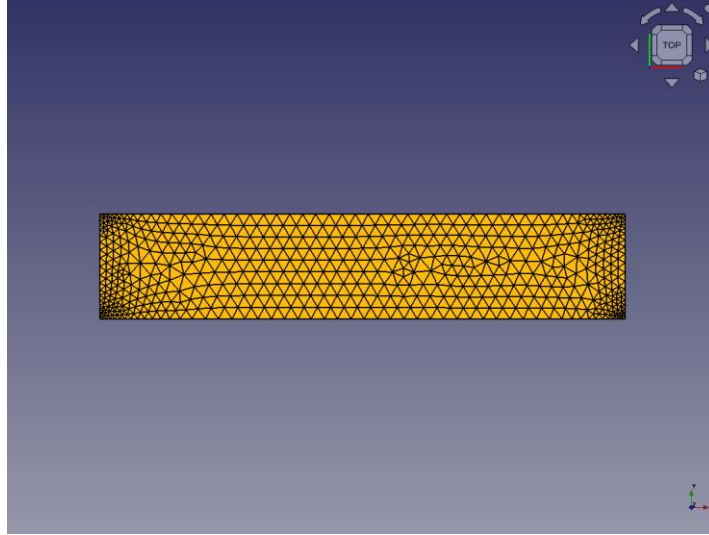


Рис. 5.8. Сетка конечных элементов модели

Для сопоставления с исходной физической моделью рассмотрен случай, когда нагрузка приложена в области, отвечающей, контакту режущего инструмента с обрабатываемой деталью (далее – модель МКЭ1). Результаты численного моделирования приводятся в осях  $X, Y$  (размерность [м]; начало координат – в левом нижнем углу полосы), направление которых соответствует размерным осям абсцисс и ординат аналитической модели. С учетом этого в результатах МКЭ:  $Dx, Dy$  – продольные и поперечные перемещения, [м];  $S_{xx}, S_{yy}, S_{xy}$  – нормальные продольные и поперечные, а также касательные напряжения, [Па]. В легенде графиков однообразно положения сечений определены безразмерными координатами  $x, z$  (как в аналитической модели).

На Рис. 5.9 охарактеризованы поля деформации в моделях с различной локализацией нагрузки МКЭ1 и МКЭ2 для случая действия продольного усилия (случай нагружения « $X_0$ »). Отличие в амплитуде прогиба объясняется разным

эксцентриситетом приложения нагрузки (в терминах классической модели внецентренного сжатия). Характер и порядок величин результатов аналитического (Рис. 5.10) и численного (Рис. 5.9) моделирования на графиках, относящихся к среднему продольному сечению полосы, совпадают.

В аналитическом решении значения пространственных функций перемещений  $u, w$  а также напряжений  $\tau, \sigma_z$  в сечении  $z = 0$  равны значениям функций основных неизвестных  $u_0, w_0, \tau_0, \sigma_{z0}$ , отражающих изменчивость в направлении координаты  $x$ .

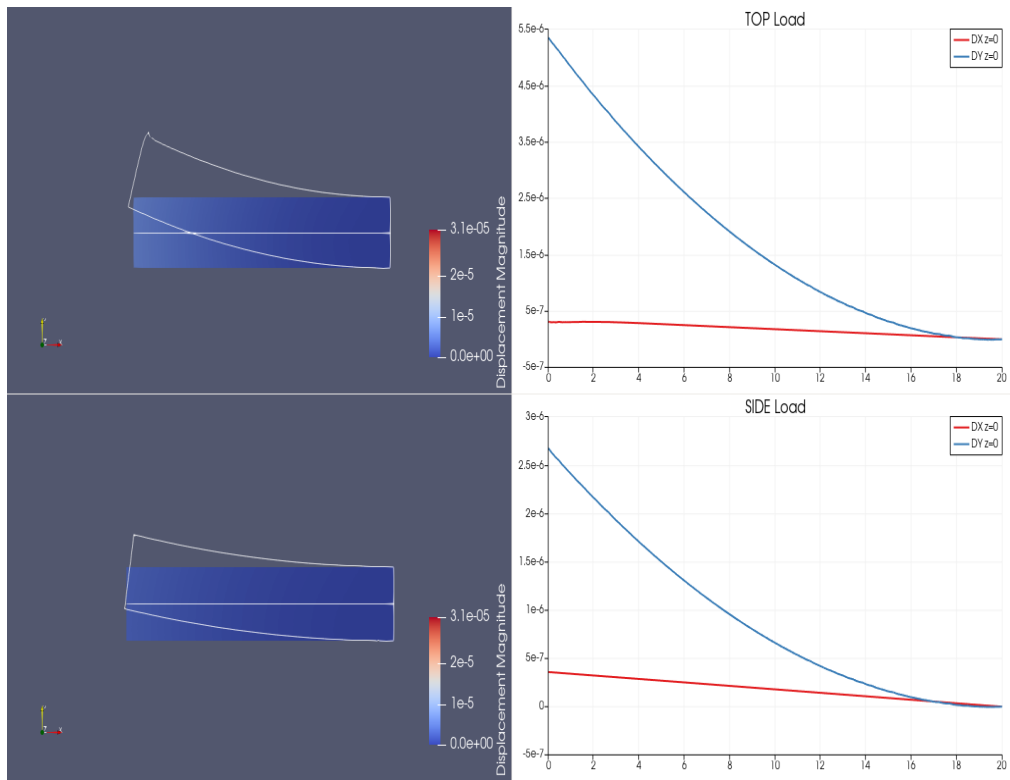


Рис. 5.9. Перемещения точек полосы в моделях МКЭ1 (вверху) и МКЭ2 (внизу) для случая нагружения « $X_0$ », [м]. Слева – амплитуда перемещений. Справа – графики компонент перемещений для точек в среднем продольном сечении

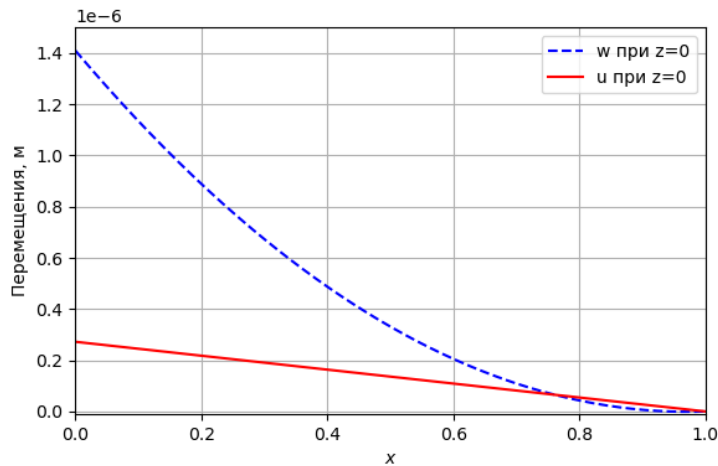


Рис. 5.10. Аналитическое решение. Величины продольных и поперечных перемещений точек в среднем продольном сечении полосы для случая нагружения « $X_0$ », [м]

Краевой эффект на левом торце на графиках напряжений (Рис. 5.11) связан с особенностями способов приложения нагрузки: в модели МКЭ1 концентрация нагрузки на малой области; в модели МКЭ2 расчетному сечению  $z = 0$  соответствует пик ступенчатой функции нагрузки. В остальном зависимости практически совпадают между собой и с аналитическим решением Рис. 5.12.

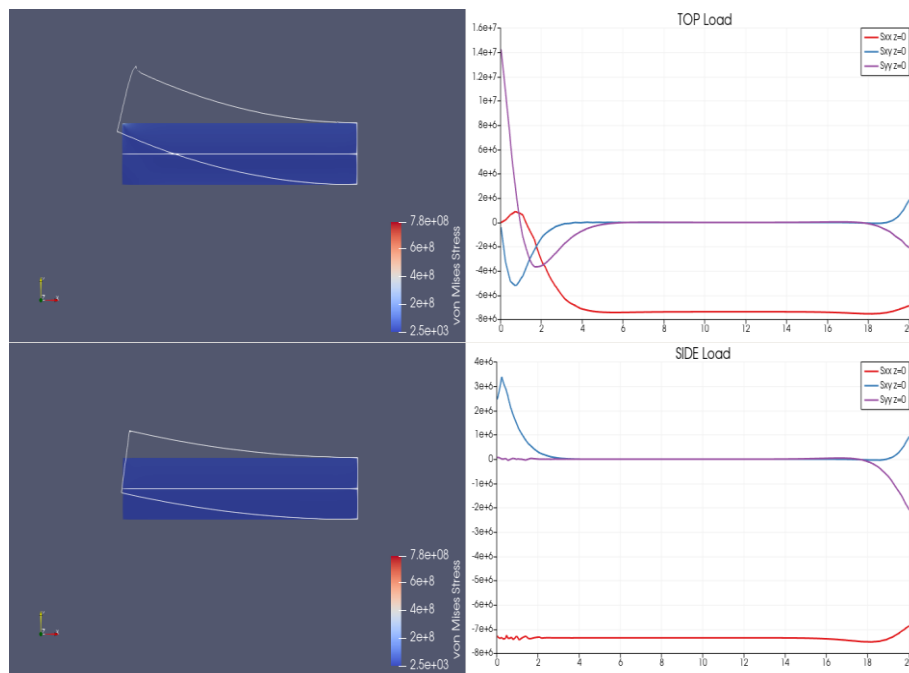


Рис. 5.11. Напряжения в моделях МКЭ1 (вверху) и МКЭ2 (внизу) для случая нагружения « $X_0$ », [Па]. Слева – эквивалентные напряжения (IV-я гипотеза прочности). Справа – графики компонент напряжений для точек в среднем продольном сечении

В аналитическом решении начального приближения краевой эффект учитывается быстро меняющимися компонентами основных неизвестных, а именно, благодаря функции  $\tau_0^q$ . Соответственно в сечении  $z=0$  близость края проявляется только для функции касательных напряжений (на стороне заделки).

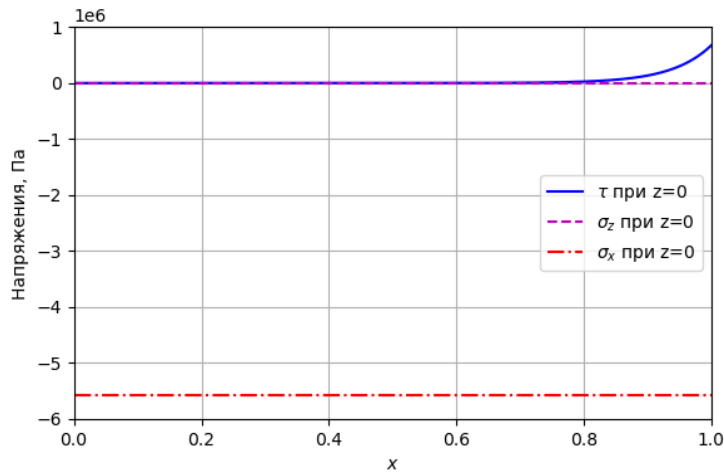


Рис. 5.12. Аналитическое решение. Значения компонент напряжений для точек в среднем продольном сечении полосы для случая нагружения « $X_0$ », [Па]

На графиках нормальных продольных напряжений отличия в способе приложения продольной нагрузки в моделях МКЭ1, МКЭ2 (Рис. 5.13) и аналитической (Рис. 5.14) наиболее заметно проявляются в сечении  $x=0$ . Соответствие результатов лучше во внутренней области. Характер краевого эффекта вблизи заделки для аналитического решения в целом соотносится с численным экспериментом, за исключением верхней правой точки модели. Для рассматриваемой начальной итерации приближенная форма зависимости  $\sigma_x$  от  $z$  – линейная.

Касательные напряжения во внутренней области, как следует из графиков в продольных (Рис. 5.11) и поперечных (Рис. 5.15) сечениях, малы для всех моделей.

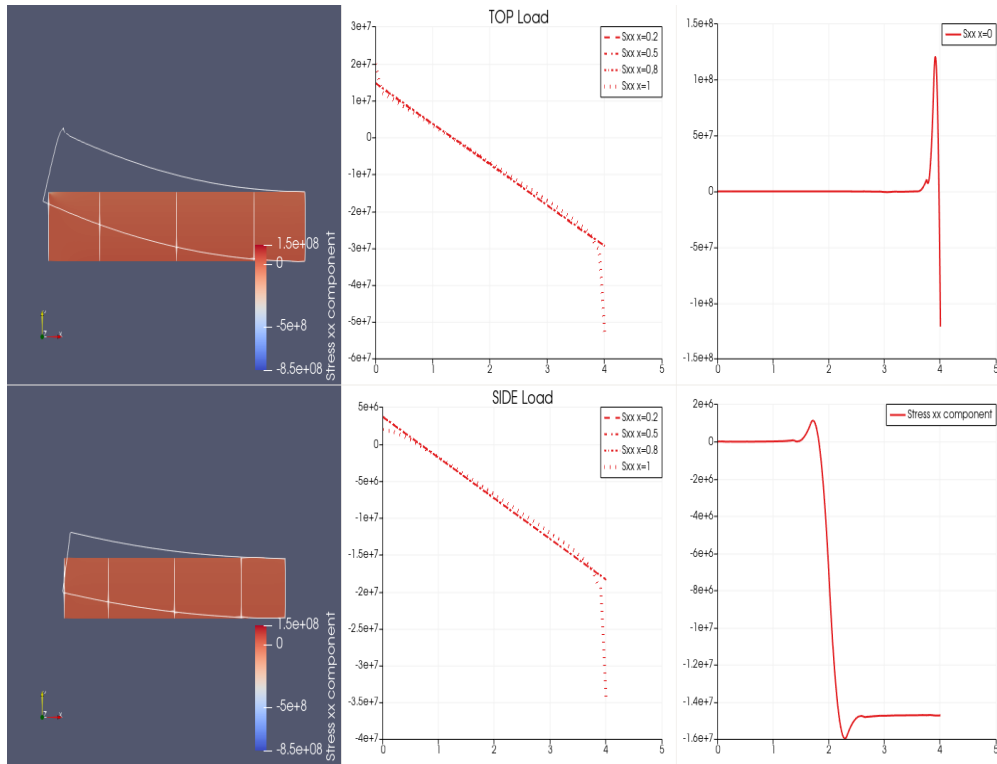


Рис. 5.13. Нормальные продольные напряжения в поперечных сечениях для случая нагружения « $X_0$ », [Па], – в моделях МКЭ1 (вверху) и МКЭ2 (внизу). Справа и в центре – графики для поперечных сечений

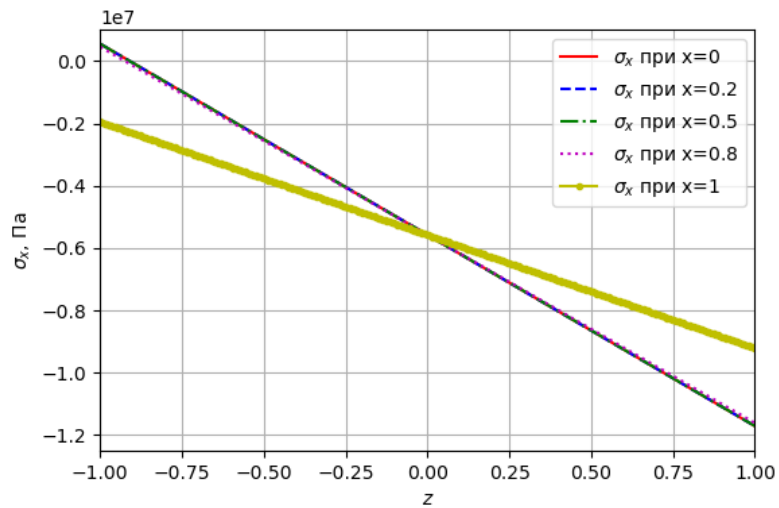


Рис. 5.14. Аналитическое решение. Нормальные продольные напряжения в поперечных сечениях для случая нагружения « $X_0$ », [Па]

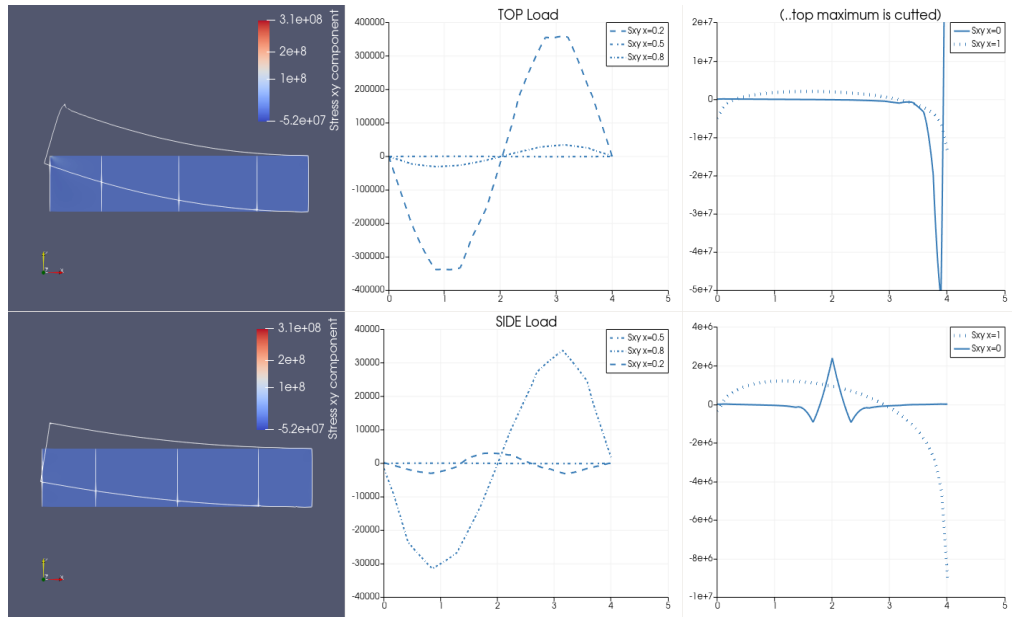


Рис. 5.15. Касательные напряжения в поперечных сечениях для случая нагружения «  $X_0$  », [Па], – в моделях МКЭ1 (вверху) и МКЭ2 (внизу). Справа и в центре – графики для поперечных сечений

В моделях МКЭ1, МКЭ2 локальные особенности в месте приложения нагрузки а также форма распределения напряжений по поперечному сечению для переходной области отражают способ ее приложения. Краевой эффект в заделке, рассчитанный с применением аппарата асимптотик (Рис. 5.16), при сравнении с численным экспериментом дает достаточно точную оценку порядка и характера распределения напряжений, несколько ухудшающуюся к углам заделки.

Следует отметить, что угловые точки в заделке, в постановке задачи относятся одновременно и к заделке, и к верхней поверхности (граничные условие для которой – это равенство нулю поперечных нормальных и касательных напряжений). В верхней угловой точке условие выполнено численно точнее решением в асимптотической постановке.

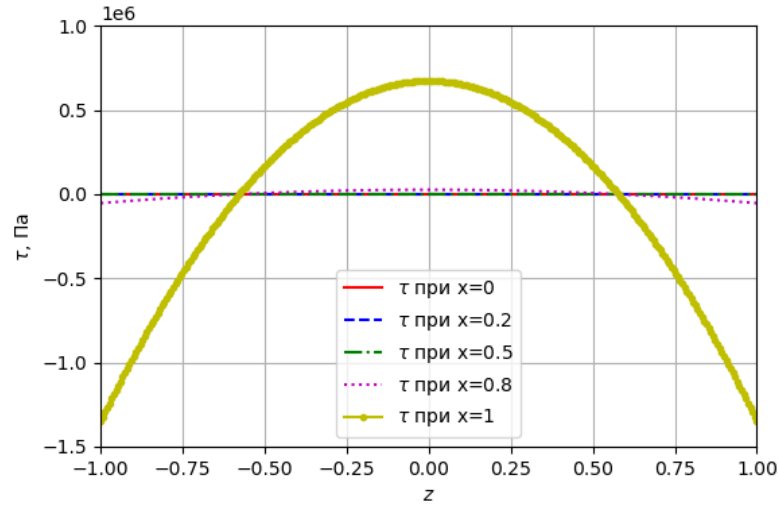


Рис. 5.16. Аналитическое решение. Касательные напряжения в поперечных сечениях для случая нагружения « $X_0$ », [Па]

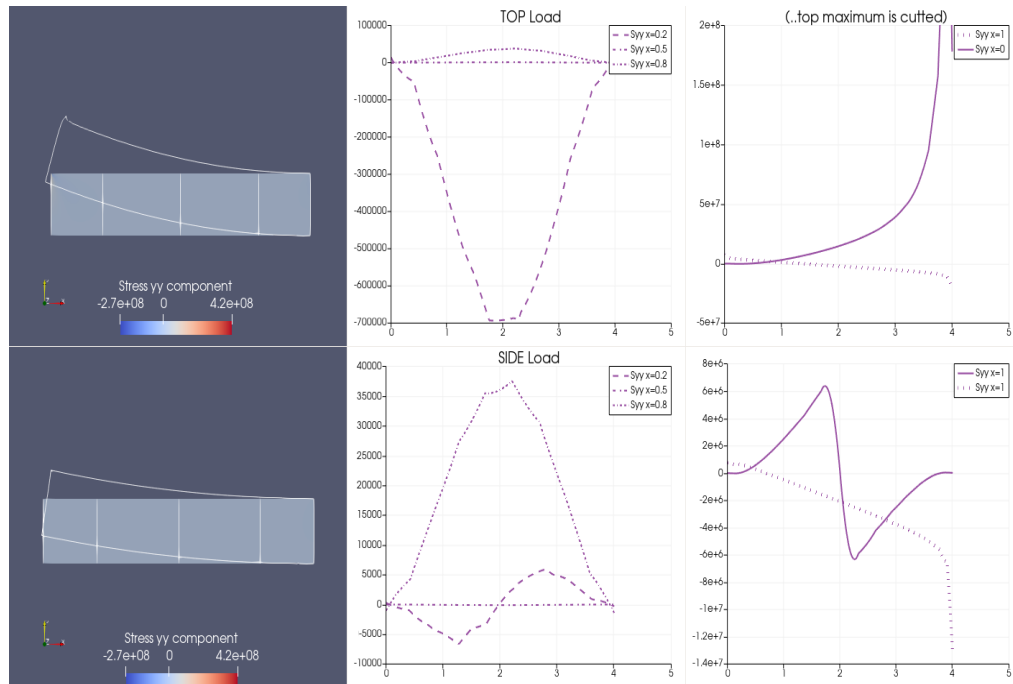


Рис. 5.17. Нормальные поперечные напряжения в поперечных сечениях для случая нагружения « $X_0$ », [Па], – в моделях МКЭ1 (вверху) и МКЭ2 (внизу). Справа и в центре – графики для поперечных сечений

В общем, те же выводы можно сделать и по графикам поперечных нормальных напряжений (Рис. 5.17, 5.18). Здесь влияние характера сингулярностей в способах приложения нагрузки в моделях МКЭ1 и МКЭ2 проявляется заметнее, нежели для касательных напряжений. Асимптотические

оценки для внутренней области и в заделке в среднем близки результатам численного моделирования.

Подобные расчеты проведены для случая нагружения « $Z_0$ » (воздействие поперечного усилия). Общая характеристика картины деформаций (Рис 5.19, 5.20) показывает значительную их близость.

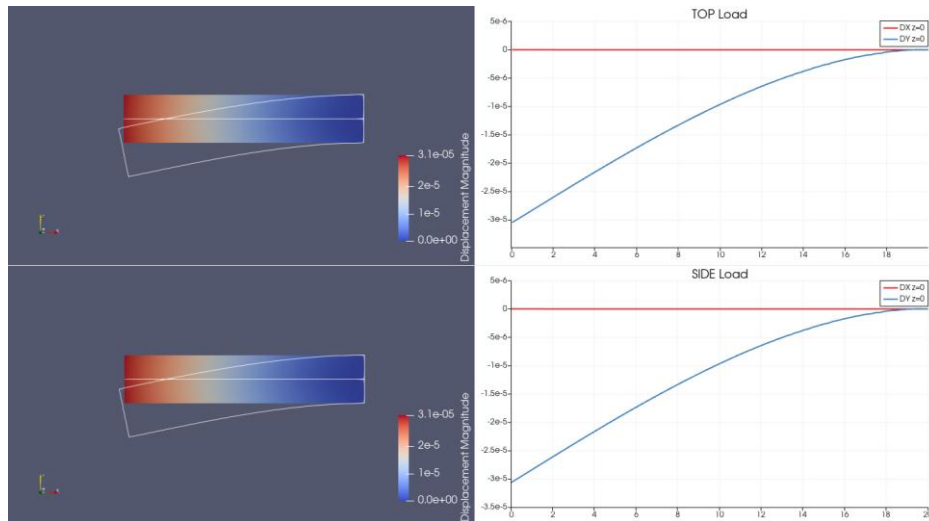


Рис. 5.19. Перемещения точек полосы в моделях МКЭ1 (вверху) и МКЭ2 (внизу) для случая нагружения « $Z_0$ », [м]. Слева – амплитуда перемещений. Справа – графики компонент перемещений для точек в среднем продольном сечении

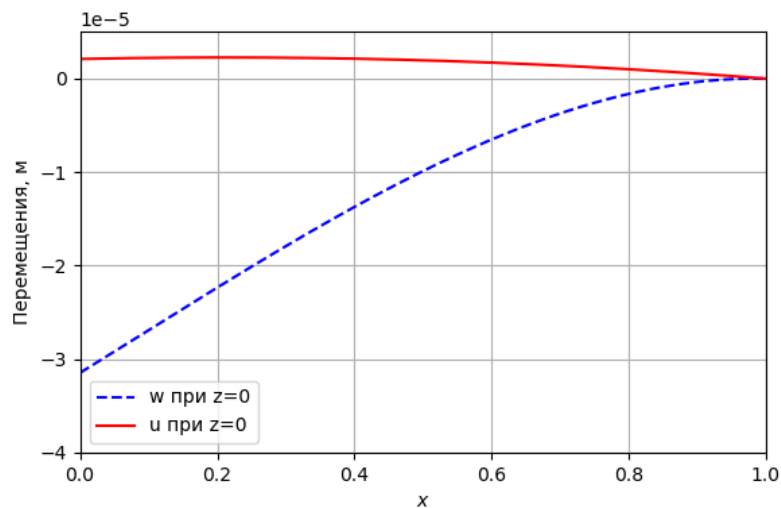


Рис. 5.20. Аналитическое решение. Величины продольных и поперечных перемещений точек в среднем продольном сечении полосы для случая нагружения « $Z_0$ », [м]

Решение задачи о температурном воздействии проведено на двух моделях, отличающихся граничными условиями на правом краю полосы. В задаче о механическом нагружении фиксация рассматривалась в виде заделки. Ее основная роль – восприятие усилий резания, приходящих на полосу. В предположении фиксирования также и температурных деформаций моделью граничных условий также выступает жесткое заземление. Если учесть, что конструкция основания нагревается совместно с режущим элементом, их температурные деформации можно условно положить независимыми, а край – свободным (во второй модели).

На графиках Рис. 5.21, 5.22 приведено сравнение значений функций перемещений, полученных аналитически и в результате численного эксперимента. Слой покрытия, характеризуемый крайне малой толщиной (0,001 мм) и близкими к основному слою физическими постоянными, в модели МКЭ не учитывался. Его влияние на характерную форму деформирования не отразилось и результаты численного и аналитического расчетов практически совпадают.

В аналитическом решении начальной итерации быстро меняющиеся компоненты присутствуют только в функциях основных неизвестных  $\tau_0$ , отвечающей касательным напряжениям вдоль средней линии полосы. На графике Рис. 5.23, где краевой эффект для касательных напряжений порожден условием жесткого заземления, также наблюдается хорошее совпадение численного и аналитического результатов.

Надо отметить, что для полосы, как однородной и изотропной, поле температуры рассматриваемой формы напряжений не вызывает (показано в разделе 1.2.3). Поэтому напряжения в модели МКЭ соответствуют только краевому эффекту (заделка). Вместе с тем аналитическая модель дает оценку продольных нормальных напряжений для микрослоя  $\sigma_x = -5 \cdot 10^7$  Па в модели консольного закрепления и  $\sigma_x = -9 \cdot 10^7$  Па при условии свободных краев. Результат сопоставим с решением по упрощенной одномерной моделью  $\sigma_x = (\alpha_1 - \alpha_2)TE_2 = -9,52 \cdot 10^7$  [Па] (где  $T$  – температура верхнего слоя), если в массивном слое его температурную деформацию считать зафиксированной.

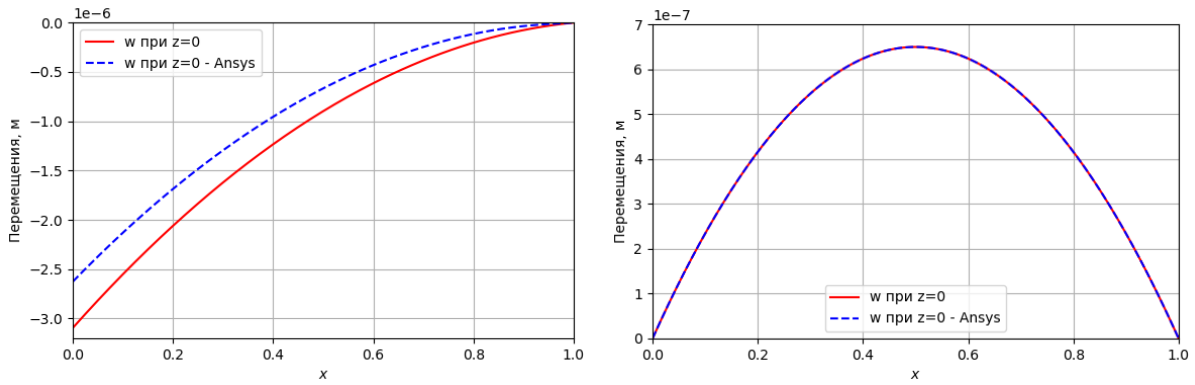


Рис. 5.21. Поперечные перемещения в центральном продольном сечении полосы для случаев консольного закрепленной (слева) и свободных краев (справа), [м]. Сравнение аналитического результата с расчетом МКЭ

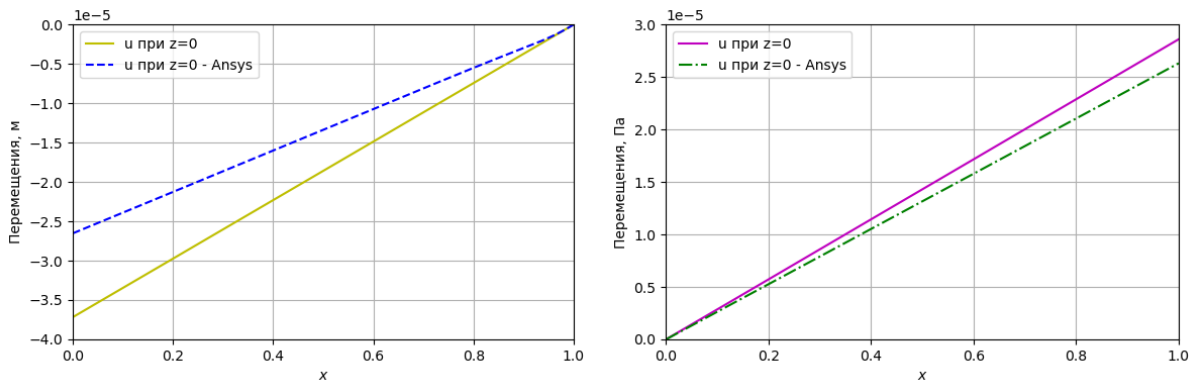


Рис. 5.22. Продольные перемещений в центральном продольном сечении полосы для случаев консольного закрепленной (слева) и свободных краев (справа) (левая точка условно неподвижна), [м]. Сравнение аналитического результата с расчетом МКЭ

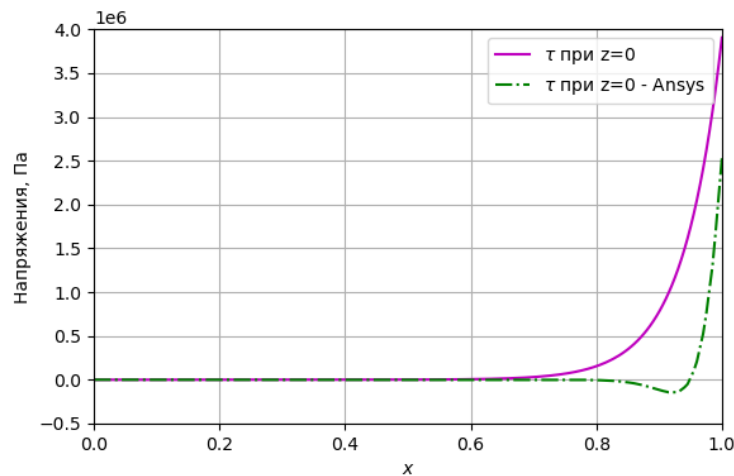


Рис. 5.23. Касательные напряжения в центральном продольном сечении полосы для случаев консольного закрепленной (слева) и свободных краев (справа), [Па]. Сравнение аналитического результата с расчетом МКЭ

### 5.3. Выводы по пятой главе

1. Апробированы предложенные расчетные модели в исследовании технических конструкций из материалов с функционально изменяемым составом на примерах плакированной мембранной панели печи мусоросжигательной установки и режущей твердосплавной пластины с нанесенным покрытием. Расчетные модели адекватно характеризуют натурные конструкции, работающие в разных условиях термомеханического нагружения. Геометрические размеры конструкций имеют величины различных порядков. Полученные численные результаты в достаточной степени близки к решениям такого класса задач других авторов [180, 183, 192].

2. Для анализа полученных результатов проведены решения задач численным методом МКЭ в программном комплексе ANSYS и программной среде FreeCAD. Сопоставимость результатов, полученных аналитически и численно, иллюстрируется графически. В целом, отклонения не превышают 8%.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработана методика постановки и решения задач теории упругости для тонкостенных конструкций при заданном распределении температуры, ценность которой заключается в ее аналитичности и новизне, дающих полную картину работы слоистого материала в изделии с учетом температурного воздействия.

2. Дано развитие и расширены границы применения метода Сен-Венана – Пикара – Банаха в интегрировании уравнений теории упругости для тонкостенных моделей слоистой структуры в условиях механического нагружения и действия поля температуры. Единый подход применен последовательно к решению плоской задачи для прямоугольной полосы и прямоугольной пластины в пространственной постановке. Задача, сформулированная для однородного материала, развита на случай произвольного количества слоев.

3. В концепции метода преобразована исходная система уравнений задачи к виду последовательности, в которой найденные величины подставляются в последующие соотношения как известные. Операторы дифференцирования по координате толщины исключаются прямым интегрированием в содержащих их уравнениях. Сведение исходной задачи к задаче меньшей размерности следует из выбора произволов интегрирования (неизвестных функций) как новых основных неизвестных, а части из них – в качестве начального приближения.

4. Построены выражения для компонент НДС, как функций новых основных неизвестных, путем последовательных приближений в виде полиномиальных рядов по поперечной координате и одновременно асимптотических рядов по малому параметру тонкостенности. Коэффициенты ряда представляют собой дифференциальные выражения от основных неизвестных.

5. Найдены разрешающие соотношения путем выполнения граничных условий на длинных сторонах полосы (а для пластины – на продольных сторонах) на соотношениях нулевого и первого приближения – с использованием аппарата асимптотик, а также на соотношениях первого и второго приближений – путем

прямых подстановок. При таком подходе условие сшивки границ слоев отдельно не рассматривается. Информация о геометрии слоев и физических свойствах материала учитывается в интегральных коэффициентах, входящих в разрешающие соотношения. Благодаря структуре уравнений получение решения аналитически (с точностью до констант) для всех компонент оказалось возможно во всех рассмотренных случаях для полосы, а для пластины – при однородном изотропном материале. Во всех этих случаях граничные условия выполнены полностью, включая условия на узких сторонах. При этом константы интегрирования определены аналитически, а для выражений второго приближения — численно.

6. Проведено сопоставление полученных результатов, показывающее, что асимптотический подход даже на начальном приближении способен выявить как медленно меняющиеся компоненты основного решения, так и быстро меняющееся типа краевого эффекта. Путь решения способом прямых подстановок, примененный к соотношениям следующего приближения, позволил формально более точно удовлетворить граничным условиям, что оказало влияние и на внутреннюю область.

7. Обоснована сущность применения отработанных инструментов аппарата асимптотик, направленного на получение аналитического результата, эффективного своей оценочной стороной. Способ прямых подстановок при получении решения (с точностью до констант интегрирования) связан с количественно объемными выкладками, реализуемыми в современных условиях программными средствами символьных вычислений. Достигаемые им количественные поправки на соотношениях следующего приближения также ориентированы на компьютерный счет. Результат, получаемый обоими путями, дает возможность анализа локального влияния компонент напряжений и их сочетаний на составляющие структуры слоистых тонкостенных конструкций.

8. Проведено апробирование разработанных расчетных моделей в исследовании термонапряженного состояния технических тонкостенных

конструкций из материалов с функционально изменяемым составом. Полученные результаты аналитически и численно в программном комплексе ANSYS и программной среде FreeCAD имеют хорошую сходимость. В целом, отклонения не превышают 8%.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Федик И.И., Миронова Л.И. Оценочные критерии термопрочности композиций с функционально изменяемым составом // Материалы XXI Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. МАИ. 2015. С. 83.
2. Ланин А.Г., Федик И.И. Термопрочность материалов. Подольск, НИИ ПО «Луч», 2005. 309 с.
3. Лыткин Д. Н. Повышение стойкости твёрдосплавного инструмента при точении крупногабаритных деталей энергетического машиностроения на основе применения наноструктурированных многослойно-композиционных покрытий. Дисс... на соиск. уч. ст. канд. наук., Москва, 2021.
4. Филатов В.Н. Термоупругость пластин и пологих оболочек переменной толщины при конечных прогибах. Дис... доктора тех. наук. 2001. 399 с.
5. Бутенко Ю.И. Вариационно-асимптотические методы построения неклассических моделей расчета однослойных и многослойных стержней и пластин: Дис... доктора физ.-мат. наук: 01.02. 04. Казань: Казань, 2001. 402 с.
6. Хоа В.Д., Зверяев Е.М. Аналитическое решение для термонапряженной двухслойной упругой полосы // Труды МАИ. 2023. № 133.
7. Хоа В.Д., Зверяев Е.М., Пыхтин А.В. Напряженнодеформированное состояние тонкой прямоугольной полосы при температурном воздействии // Труды МАИ. 2024. № 134.
8. Хоа Ван Донг, Зверяев Е.М. Температурная деформация тонкой многослойной упругой полосы // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. 2023. № 23. С. 50-60.
9. Хоа Ван Донг, Во Ань Хиеу. Температурная деформация тонкой упругой пластины // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. 2024. № 25. С. 22-33.

10. Hoa Van Dong, Zveryaev E.M., Pykhtin A.V. Refined equations of thermal stress–Strain state of composite material beam // AIP Conference Proceedings. AIP Publishing, 2023. Vol. 2697, Issue 1.
11. Зверяев Е.М., Пыхтин А.В., Хоа В.Д. Пространственная задача для прямоугольной упругой пластины // Строительная механика и расчет сооружений. Акционерное общество Научно-исследовательский центр Строительство, 2021. № 4. С. 2–11.
12. Зверяев Е.М., Рыжковская М.И., Хоа В.Д. Построение решения уравнений теории упругости слоистой полосы на основе принципа сжатых отображений // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 5. С. 421–449.
13. Хоа В.Д. Зверяев Е.М. Дополненное решение задачи о температурной деформации упругой полосы. Сборник тезисов работ международной молодёжной научной конференции XLVIII Гагаринские чтения 2022. М.: Изд-во «Перо», 2022. С. 465–466.
14. Хоа В.Д., Зверяев Е.М., Пыхтин А.В. Уточненные уравнения термонапряженно-деформированного состояния балки из композиционного материала // Сб. трудов XXXIII Международной инновационной конференции молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения (МИКМУС-2021). 2021. С. 89–96.
15. Хоа В.Д., Зверяев Е.М., Пыхтин А.В. Аналитическое решение для термонапряженной двуслойной упругой полосы // Сб. тезисов 21-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика». М.: Изд-во «Перо», 2022. С. 433–434.
16. Хоа В.Д., Зверяев Е.М., Пыхтин А.В. Пространственная задача о термонапряженно-деформированном состоянии упругой пластины // Сб. тезисов 20-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика». М.: Изд-во «Перо», 2021. С. 470–471.

17. Хоа В.Д., Зверьяев Е.М., Пыхтин А.В. Дополненное аналитическое решение задачи о термонапряженно-деформированном состоянии упругой пластины методом SVPB // Сб. тезисов 22-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика». – М.: Издательство «Перо», 2023. С. 276–277.
18. Ноа V.D., Zveryaev E.M. Development of solution of thermal stress-strain state problem of a layered strip by SVPB method // Сб. тезисов работ международной молодежной научной конференции XLIX Гагаринские чтения 2023. М.: Изд-во «Перо», 2023. С. 896–897.
19. Гольденвейзер А.Л. Методы обоснования и уточнения теории оболочек // Обзор последних результатов//ПММ. 1968. Т. 32.
20. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. Наука, 1974. 448 с.
21. Нильсен Л. Механические свойства полимеров и полимерных композиций. М., Химия. 1978. 310 с.
22. Скудра А.М., Булавс Ф.Я. Структурная теория армированных пластиков // Рига: Зинатне. 1978. 192 с.
23. Тамуж В.П., Кук В.С. Микромеханика разрушения полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1978. 284 с.
24. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М.: Мир. 1982. 334 с.
25. Фудзии Т., Дзако М. Механика разрушения композиционных материалов: пер. с яп. Мир. 1982. 232 с.
26. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М.: МГУ. 1984. 336 с.
27. Ванин Г.А. Микромеханика композиционных материалов. Киев: Наукова думка, 1985. 302 с.
28. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
29. Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И. Расчет эффективных характеристик композитов с периодической структурой методом конечных элементов // Вестник МГТУ им. НЭ Баумана. Сер. Естественные науки. 2002. № 2. С. 95–108.

30. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Асимптотическая теория конструктивно-ортотропных пластин с двухпериодической структурой // Математическое моделирование и численные методы. МГТУ им. НЭ Баумана. 2014. № 1 (1). С. 36–56.
31. Димитриенко Ю.И. Моделирование термонапряжений в композитных пластинах на неорганической матрице // Ключевые тренды в композитах: наука и технологии. 2019. С. 211–220.
32. Сборщиков С.В. Моделирование циклического деформирования упруго-пластических композиционных материалов на основе метода асимптотического осреднения. Автореферат на соиск. уч. ст. канд. техн. наук. Москва, 2023. 157 с.
33. Baker A.A. Composite materials for aircraft structures. AIAA, 2004. 311 p.
34. Milton G.W. The Theory of Composites. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2022. 745 p.
35. Reissner E. On the Theory of Bending of Elastic Plates // Journal of Mathematics and Physics. 1944. Vol. 23, No. 1–4. P. 184–191.
36. Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. American Society of Mechanical Engineers, 1945. Vol. 12, Issue 2. P. 69-77.
37. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1967. 360 с.
38. Васильев В.В. О теории тонких пластин // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 3. С. 26–47.
39. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 p.
40. Ляв А. Математическая теория упругости.-Москва-Ленинград, Объединённое научно-техническое издание НКТП СССР. 1935. 674 с.
41. Tovstik P., Tovstik T. On the 2D models of plates and shells including the transversal shear // ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik: Wiley Online Library, 2007. Vol. 87, № 2. P. 160–171.
42. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: ГИТЛ, 1947. 356 с.

43. Королев В.И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. М., Машиностроение, 1965. 272 с.
44. Григолюк Э.И. Конечные прогибы трехслойных оболочек с жестким наполнителем // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. № 1. С. 26–34.
45. Григолюк Э.И., Чулков П.П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М.: Машиностроение, 1973. 172 с.
46. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Пути развития теории упругих многослойных пластин и оболочек // Вестник Тамбовского государственного технического университета. 2005. Т. 11, № 2. С. 439–448.
47. Григолюк Э.И., Коган Ф.А. Современное состояние теории многослойных оболочек // Прикладная механика. 1972. Т. 8, № 6. С. 3–17.
48. Григолюк Э.И., Коган Е.А. Статика упругих слоистых оболочек // М.: НИИ Механики МГУ. 1999. 215 с.
49. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Развитие общего направления в теории многослойных оболочек // Механика композитных материалов. 1988. № 2. С. 287–298.
50. Noor A.K., Burton W.S. Assessment of Computational Models for Multilayered Composite Shells. Applied Mechanics Reviews. 1990. Vol. 43. No 4. P. 67-97. doi:10.1115/1.3119162
51. Carrera E. Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells // Archives of computational methods in engineering. Springer, 2002. Vol. 9. P. 87–140.
52. Carrera E. Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells // Appl. Mech. Rev. 2003. Vol. 56, No. 3. P. 287–308.
53. Васильев В.В., Лурье С.А. Вариант уточненной теории изгиба балок из слоистых пластмасс // Механика полимеров. 1972. № 4. С. 674–681.
54. Васильев В.В., Лурье С.А. Плоская задача теории упругости для ортотропной консольной полосы // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1984. № 5. С. 125–135.

55. Рабинович А.Л., Макаркина Р.Н. Поперечный изгиб пластин с заполнителем // Тр. ЦАГИ. 1948. № 661.
56. Прусаков А.П. Основные уравнения изгиба и устойчивости трехслойных пластин с легким заполнителем // Прикладная математика и механика. 1951. Т. 15, № 1. С. 27-36.
57. Прусаков А.П. Основные уравнения изгиба и устойчивости ортотропных трехслойных пластин с легким заполнителем // Изв. вузов, Строительство и архитектура. 1960. № 5.
58. Plantema F.J., Alphen W.J. Compressive Buckling of sandwich plates having various edge conditions // Anniversary volume on applied mechanics. Dedicated to C.V. Biezeno, Haarlem, Antwerpen. 1953. P. 133–148.
59. Брюккер Л.Э. Некоторые варианты упрощения уравнений изгиба трехслойных пластин // Расчеты элементов авиационных конструкций. М.: Машиностроение. 1965. № 3. С. 74–99.
60. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
61. Александров В.М., Мхитарян М.С. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
62. Гурьянов Н.Г. Изгиб слоистых пластин и пологих оболочек // Тр. XV Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек. Казань, 1990. С. 631–636.
63. Гурьянов Н.Г. Исследование напряженного состояния слоистых пластин и оболочек при уточненных соотношениях для прослойки. Дисс... на соиск. д.ф-м. наук, Казань, 1994. 320 с.
64. Гурьянов Н.Г., Гурьянова О.Н. Исследование краевого эффекта в прослойке трехслойной пологой оболочки и пластины // Тр. XVII международной конференции по теории пластин и оболочек. Казань, 1996. С. 44-49.
65. Куршин Л.М. Уравнения трехслойных цилиндрических оболочек // Изв. АН СССР, ОТН. 1958. № 3. С. 142.

66. Григолюк Э.И., Чулков П.П. К расчету трехслойных пластин с жестким наполнителем // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1964. № 1. С. 67–74.
67. Григолюк Э.И., Корнев В.Н. Анализ уравнений трехслойных оболочек несимметричной структуры с жестким наполнителем // Прикл. механика. 1968. Т. 4, № 3. С. 136–144.
68. Галиньш А.К. Расчет пластин и оболочек по уточненным теориям // Исследования по теории пластин и оболочек // Исслед. по теор. пластин и оболочек, 5, Казань, изд-во Казанского ун-та, 1967, 66–92.
69. Галиньш А. К. Уточненные уравнения движения термоупругих ортотропных оболочек // В сб.: Исследования по теории пластин и оболочек, вып. 8. Казань, Изд-во Казан, ун-та, 1972. с. 365—392.
70. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. М.: ВИНТИ, 1973. 271 с.
71. Пикуль В.В., Аникин Е.П. Теория и расчет слоистых конструкций. 1985. 192 с.
72. Галимов Ш.К. Уточненные теории пластин и оболочек. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1990. 136 с.
73. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. С-Пб.: Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 2010. 378 с.
74. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. - Киев : Наук. думка, 1973. - 248 с.
75. Галимов К.З. К нелинейной теории тонких оболочек типа Тимошенко // Изв. вузов. Матем., 1977, № 4, 21–32.
76. Васильев В.В. К дискуссии по классической теории пластин // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1995. № 4. С. 140–150.
77. Муштари Х.М. Теория изгиба плит средней толщины // Изв. АН СССР, ОТН, мех. И машстр. 1959. № 2.

78. Муштари Х.М., Терегулов И.Г. Теория пологих ортотропных оболочек средней толщины // Известия Академии наук СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. 1959, № 6. С. 60-67.
79. Терегулов И.Г. К теории пластин средней толщины // Тр. конф. по теор. пластин и оболочек, Казанский гос. ун-т, Казань, 1961, 367–375.
80. Терегулов И.Г. К построению уточненных теорий пластин и оболочек // Прикладная математика и механика. 1962. Т. 26, № 2. С. 346–358.
81. Кильчевский Н.А. Анализ различных методов приведения трехмерных задач теории упругости к двумерным и исследование постановки краевых задач теории оболочек // Тр. II Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. Киев: Изд-во АН УССР. 1962. С. 58–69.
82. Кильчевский Н.А. Основы аналитической механики оболочек. АН УССР, 1963.
83. Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме уточнения теории пологих оболочек // Изв. АН. МТТ. 1990. № 6. С. 139–146.
84. Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме построения неклассической теории пластин // Изв. АН. МТТ. 1990. № 2. С. 158-167.
85. Levy S. Bending of rectangular plates with large deflections. 1942. 47 p.
86. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Гос. изд. техн.-теор. лит., 1957. 463 с.
87. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
88. Понятовский В.В. К теории изгиба анизотропных пластинок // Прикладная математика и механика. 1964. Т. 28, № 6. С. 1033–1039.
89. Хома И.Ю. Некоторые вопросы теории анизотропных оболочек и пластин // В сб.: Материалы I Всесоюзной школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин. Изд-во Тбилисского ун-та. 1975. С. 409–420.
90. Векуа И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука, 1982. 286 с.

91. Образцов И.Ф. Вариационные методы расчета тонкостенных авиационных конструкций. М.: Машиностроение, 1966. 392 с.
92. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика. М., Машиностроение, 1977. 488 с.
93. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.
94. Лехницкий С.Г. Упругое равновесие трансверсально-изотропного слоя и толстой плиты // Прикладная механика и математика. 1962. Т. 26, № 4. С. 687–696.
95. Нигул У.К. О применении символического метода А.И.Лурье к анализу напряженных состояний и двумерных теорий упругих плит // ПММ. 1963. Т. 27, № 3. С. 583–588.
96. Прокопов В.К. Применение символического метода к выводу уравнений теории плит // Прикл. мат. и мех. 1965. Т. 29, № 5. С. 902–919.
97. Прокопов В.К. Однородные решения теории упругости и их приложение к теории тонких пластинок. Труды II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике, 1964, № 3, М.: Наука, 1966, с. 253-259.
98. Прокопов В.К. Обзор работ по однородным решениям теории упругости и их приложениям // Труды ЛПИ. 1967. № 279. С. 31.
99. Прокопов В.К., Груздев Ю.А. Полимоментная теория равновесия толстых плит // ПММ. 1968. Т. 32, № 2. С. 344–352.
100. Власов В.З., Леонтев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М: Физматгиз, 1960. 491 с.
101. Власов В.З. Избранные труды. М.: Изд-во АН СССР, 1962. Т. 1. 528 с.
102. Власов В.З. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики. Стройиздат, 1975. 224 с.
103. Волков А.Н. Статика толстых оболочек. Дисс... на соиск. уч. ст. докт. техн. наук. Москва, 1974. 408 с.
104. Вольмир А.С. Гибкие пластины и оболочки. М.: ГИТЛ, 1956. 420 с.

105. Седов Л.И. Механика сплошной среды (том 1). М.: Наука, 1970 , 492 с.
106. Пикуль В.В. Современное состояние теории оболочек и перспективы ее развития // Изв. РАН, Механика твердого тела. 2000. № 2. С. 153–168.
107. Власов В.З. Избранные труды Т. 3, Тонкостенные пространственные системы. М.: Наука, 1964.
108. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.: Физматгиз, 1962. 708 с.
109. Зоан К.Х. Напряженно-деформированное состояние пластин переменной толщины на основе уточненной теории. Дисс... на соиск. уч. ст. канд. техн. наук. Москва, 2000. 155 с.
110. Фирсанов В.В., Доан Ч.Н. Энергетически согласованная теория цилиндрических оболочек // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2011. № 6. С. 49–54.
111. Фирсанов В.В., Доан Ч.Н. Энергетически согласованный подход к исследованию упругих оболочек произвольной геометрии // Вестник МАИ. 2011. Т. 18, № 1. С. 194-207.
112. Фирсанов В.В., Зоан К.Х. Напряженно-деформированное состояние симметричных прямоугольных пластин переменной толщины при температурном воздействии // Тепловые процессы в технике. 2019. Т. 11, № 8. С. 365–372.
113. Фирсанов В.В., Тхиен Ф.В., Доан Ч.Н. Анализ напряженно-деформированного состояния многослойных композитных сферических оболочек на основе уточненной теории // Труды МАИ. 2020. № 114.
114. Фирсанов В. Об уточнении классической теории прямоугольных пластинок из композиционных материалов // Механика композиционных материалов и конструкций. 2002. Т. 8, № 1. С. 28–64.
115. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // Прикладная математика и механика. 1962. Т. 26, № 4. С. 668–686.

116. Friedrichs K.O. Asymptotic phenomena in mathematical physics // *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1955. Vol. 61, No 6. P. 485–504.
117. Найфэ А. Введение в методы возмущений. мир. М.: Мир, 1984. 535 с.
118. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел: Учебное пособие. МГУ, М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. 367 с.
119. Гузь А.Н., Немиш Ю.Н. Методы возмущения в пространственных задачах теории упругости. Киев: Вища школа, 1982. 350 с.
120. Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В., Андрианов И.В. Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1991. 415 с.
121. Friedrichs K.O. Kirchhoff's boundary conditions and the edge effect for elastic plates // *PS Appl Math*. 1950. Vol. 3. P. 117–124.
122. М. И. Вишик, Л. А. Люстерник. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // *УМН*, 12:5(77) (1957), с. 3–122.
123. М. И. Вишик, Л. А. Люстерник. Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений с большими или быстро меняющимися коэффициентами и граничными условиями // *УМН*, 15:4(94) (1960), 27–95; *Russian Math. Surveys*, 15:4 (1960), с. 23–91.
124. Гольденвейзер А.Л. Асимптотическое интегрирование линейных дифференциальных уравнений в частных производных с малой главной частью // *ПММ*. 1959. Т. 23, № 1. С. 35–57.
125. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // *Прикладная математика и механика*. 1963. Т. 27, № 4. С. 593–608.
126. Гольденвейзер А.Л. Погранслой и его взаимодействие с внутренним напряженным состоянием упругой тонкой оболочки // *ПММ*. 1969. Т. 33, № 6. С. 996 .

127. Бабич ВМ Б.В. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 456 с.
128. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука. ГРФМЛ, 1973. 272 с.
129. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
130. Полубаринова-Кочина П.Я. К вопросу об устойчивости пластинки // Прикл. матем. и мех. 1936. Т. 3, № 1. С. 16–22.
131. Green A.E. Boundary-layer equations in the linear theory of thin elastic shells // Proc. R. Soc. Lond. A. 1962. Vol. 269, No 1339. P. 481–491.
132. Green A.E. On the linear theory of thin elastic shells // Proc. R. Soc. Lond. A. 1962. Vol. 266, No 1325. P. 143–160.
133. Reiss E.L. On the theory of cylindrical shells // The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. Oxford University Press, 1962. Vol. 15, No 3. P. 325–338.
134. Гольденвейзер А.Л. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 383 с.
135. Гольденвейзер А.Л. Алгоритм асимптотического построения линейной двумерной теории тонких оболочек и принцип Сен-Венана // РАН. ПММ. 1994. Т. 58, № 6. 96 с.
136. Гольденвейзер А.Л. О приближенных методах расчета тонких упругих оболочек и пластин // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1997. № 3. С. 134–149.
137. Гольденвейзер А.Л., Колос А.В. К построению двумерных уравнений упругих тонких пластин // Прикл. мат. и мех. 1965. Т. 29, № 1. С. 141–161.
138. Гусейн-Заде М.И. О необходимых и достаточных условиях существования затухающих решений плоской задачи теории упругости для полуполосы // Прикл. мат. и мех. 1965. Т. 29, № 4. С. 752–760.
139. Гусейн-Заде М.И. К построению теории изгиба слоистых пластин // Прикл. мат. и мех. 1968. Т. 32, № 2. С. 232–243.

140. Гусейн-Заде М.И. Асимптотический анализ граничных и начальных условий в динамике тонких пластинок // Прикл. мат. и мех. 1978. Т. 42, № 5. С. 899-907.
141. Колос А.В. Методы уточнения классической теории изгиба и растяжения пластинок // Прикл. мат. и мех. 1965. Т. 29, № 4. С. 771–781.
142. Рогачева Н.Н. О соотношениях упругости Рейсснера–Нахди // ПММ. 1974. Т. 38, № 6. 1063 с.
143. Рогачева Н.Н. Уточненная теория термоупругих оболочек // В сб.: Тр. X Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Тбилиси. Мецниереба. 1975. С. 251–259.
144. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Об асимптотическом решении смешанных трехмерных задач для двухслойных анизотропных пластинок // ПММ. 1986. Т. 50, № 2. 271 с.
145. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. О неклассических краевых задачах трехслойных термоупругих пластин и некоторых приложениях. В сб. тр. XIV Всес. конф. по теории пластин и оболочек. Тбилиси. Изд-во Тбилисск. ун-та. I. 1987. С. 28–34.
146. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Об асимптотическом решении неклассических краевых задач для двухслойных анизотропных термоупругих оболочек. // Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia. National Academy of Sciences of Armenia, 1989. Т. 42, № 3. С. 28–36.
147. Чепига В.Е. Об асимптотической погрешности некоторых гипотез в теории слоистых оболочек // М.: Машиностроение. 1986.
148. Гольденвейзер А.Л., Каплунов Ю.Д. Динамический погранслои в задачах колебаний оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 4. С. 152–162.
149. Гольденвейзер А.Л., Каплунов Ю.Д., Нольде Е.В. Асимптотический анализ и уточнение теории пластин и оболочек типа Тимошенко-Рейсснера // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 6. С. 124–138.
150. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука. Физматлит, 1997. 414 с.

151. Аксентян О.К., Ворович И.И. Напряженное состояние плиты малой толщины // Прикл. мат. и мех. 1963. Т. 27, № 6. С. 1057–1074.
152. Ворович И.И. Некоторые математические вопросы нелинейной теории оболочек. Дисс. на соиск. уч. ст. докт. физ-мат. наук. Ростов-на-Дону, 1958. 368 с.
153. Ворович И.И. Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек // Материалы I Всесоюз. школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та. 1975.
154. Ворович И.И., Малкина О.С. Асимптотический метод решения задачи теории упругости о толстой плите // Тр. VI Всес. конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука. 1966. С. 251–254.
155. Ворович И.И., Кадомцев И.Г. Качественное исследование напряженно-деформированного состояния трехслойной плиты // Прикл. мат. и мех. 1970. Т. 34, № 5. С. 870–876.
156. Ворович И.И., Кадомцев И.Г., Устинов Ю.А. К теории неоднородных по толщине плит // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1975. № 3. С. 119–130.
157. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272 с.
158. Космодамианский А.С., Ложкин В.Н. Асимптотический анализ электроупругого состояния тонкого пьезоэлектрического слоя // Прикладная механика. 1978. Т. 14, № 5. С. 3–8.
159. Понятовский В.В. Применение асимптотического метода интегрирования в задаче равновесия тонкого бруса, произвольно нагруженного по боковой поверхности // Изв. АН СССР ММТ. 1968. № 5. С. 139–143.
160. Саркисян С.О. Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1992. 235 с.
161. Саркисян С.О. Асимптотическая теория тонких пластин по несимметричной упругости // Современ. пробл. концентрации напряжений. Тр. международной науч. конф. Донецк, 1998. С. 219–223.

162. Саркисян С.О. Асимптотическая теория тонких пластин по несимметричной теории упругости. Казань: УНИПРЕСС, 1998. С. 198–203.
163. Саркисян С.О. Асимптотическая теория и вариационное уравнение плоской задачи упругой тонкой пластинки по моментной теории упругости // Доклады НАН Армении, 1999. Т. 99, № 2. С. 138–147.
164. Саркисян С.О. Асимптотическая теория и вариационное уравнение задачи изгиба упругой тонкой пластинки по моментной теории упругости // Доклады НАН Армении., 1999. Т. 99, № 3. С. 216–225.
165. Саркисян С.О. Асимптотическая теория тонких оболочек по несимметричной теории упругости. Казань: Новое Знание, 2000. С. 356–361.
166. Плеханов А.В. О построении теории изгиба многослойных пластин средней толщины/Плеханов АВ // Сопротивление материалов и теория сооружений. К. 1977. № 31. С. 67–72.
167. Плеханов А.В. Развитие неклассической теории пологих слоистых оболочек несимметричной структуры // Днепропетр. инж.-строит. ин-т. - Днепропетровск, 1987. - 13с. - Д е п в Укр. НИИНТИ 06. 01. 87, № 235 Ук-87. 1987.
168. Плеханов А.В. Уточненный вариант прикладной теории пологих слоистых оболочек // Изв. вузов. Стр-во и архитектура.- 1991.- № 1. 1991. С. 22–25.
169. Дудченко А.А., Лурье С.А., Образцов И.Ф. Анизотропные многослойные пластины и оболочки // М.: ВИНТИ. 1983. С. 3–68.
170. Гондляр А.В. Итерационно-аналитическая теория деформирования многослойных оболочек // Сопротивление материалов и теория сооружений. К.: Будівельник. 1988. № 53. С. 33–37.
171. Зверьяев Е.М. Построение основного напряженного состояния тонкой упругой оболочки методом простых итераций. // В сб. Детормирование и разрушение элементов конструкций летательных аппаратов. М.: МАТИ, 1989,- С.56-63.
172. Зверьяев Е.М. Конструктивная теория тонких упругих оболочек. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2016. 24 с.

173. Зверяев Е.М. Метод Сен-Венана – Пикара – Банаха интегрирования уравнений теории упругости тонкостенных систем // ПММ. 2019. Т. 83, № 5–6. С. 823–833.
174. Зверяев Е.М., Макаров Г.И. Общий метод построения теорий типа Тимошенко // Прикл. мат. и мех. 2008. Т. 72, № 2. С. 308–321.
175. Зверяев Е.М., Олехова Л.В. Сведение трехмерных уравнений НДС пластины из композиционного материала к двумерным на базе принципа сжатых отображений. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2014. 29 с.
176. Зверяев Е.М., Тупикова Е.М. Итерационные методы построения решения уравнений незамкнутых оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. РУДН, 2021. Т. 17, № 6. С. 588–607.
177. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, ГФМЛ, 1976. 576 с.
178. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 543 с.
179. Зверяев Е.М., Пыхтин А.В. Решение задачи нагружения полосы методом Сен-Венана-Пикара-Банаха. Материалы XXII международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2021). 2021. С. 214-215.
180. Мелан Э., Паркус Г. Термоупругие напряжения вызываемые стационарными температурными полями. М.: Физматгиз, 1958. 167 с.
181. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости: Пер. с пол. Мир, 1970. 256 с.
182. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
183. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
184. Лурье С. А., Дудченко А. А., Нгуен Д. К.. Градиентная модель термоупругости для слоистой композитной структуры // Труды МАИ. 2014. № 75.

185. Love A. E. H., *Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1927. 662 p.
186. Zveryaev E.M. Modern interpretation of Saint-Venant's principle and semi-inverse method: 5 // *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020. Vol. 16, No 5. P. 390–413.
187. Краснов М. Л. *Интегральные уравнения*. М.: Наука, 1975. 303 с.
188. Kolmogorov A.N., Fomin S.V., Fomin S.V. *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*. Courier Corporation, 1999. 292 p.
189. Zveryayev Ye.M. A consistent theory of thin elastic shells // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2016. Vol. 80, No 5. P. 409–420.
190. Зверьяев Е.М., Олехова Л.В. Сведение трехмерных уравнений НДС пластины из композиционного материала к двумерным на базе принципа сжатых отображений. - М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2014. - 29 с.
191. Zveryaev E.M. Saint-Venant–Picard–Banach Method for Integrating Thin-Walled System Equations of the Theory of Elasticity // *Mech. Solids*. 2020. Vol. 55, No 7. P. 1042–1050.
192. Лекция-беседа В.И. Феодосьева «О температурных напряжениях». URL: <https://prosopromat.ru/lekicii-besedy-izbrannyye-voprosy-i-zadachi-v-i-feodoseva/lekciya-beseda-v-i-feodoseva-o-temperaturnyx-napryazheniyax.html> (дата обращения: 14.02.2021).
193. Боли Б., Уэйнер Д. *Теория температурных напряжений*. М.: Мир, 1964. 517 с.
194. *Машиностроение. Энциклопедия*, Ред. совет: К.В. Фролов (пред.) и др. -М.: Машиностроение. Динамика и прочность машин. Теория механизмов и машин. Т. 1-3. В 2-х кн. Кн. 2 / А. В. Александров, Н. А. Алфутов, В. В. Астанин и др.; Под общ. ред. К. С. Колесникова. Машиностроение, 1995. 624 с.
195. Полилов А.Н. *Этюды по механике композитов*. М.: Физматлит, 2015. 313 с.
196. Зверьяев Е.М. Температурная деформация длинной упругой полосы // *Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования*. 2021. Т. 22, № 3. С. 293–304.

197. Лебедев Н.Н. Температурные напряжения в теории упругости. Москва-Ленинград: ОНТИ. 1937. 110 с.
198. Сварка и свариваемые материалы. Справочник в трех томах / под общей ред. В.Н. Волченко. Том I. М.: Metallurgy, 1991.
199. Тугов А.Н. Исследование процессов и технологий энергетической утилизации бытовых отходов для разработки отечественной ТЭС на ТБО. Автореферат на соиск. уч. ст. докт. техн. наук.. Москва, 2012. 43 с.
200. Жедь, В.П. Режущие инструменты, оснащенные сверхтвердыми и керамическими материалами, и их применение : справочник / В.П. Жедь, Г.В. Боровский, Я.А. Музыкант, Г.М. Ипполитов. М.: Машиностроение, 1987. 320 с.
201. Клушин М.И. Резание металлов. М.: Машгиз, 1958. 453 с.
202. Васин С.А., Верещака А.С., Кушнер В.С. Резание материалов. – М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2001, 448 с.
203. Резников, А.Н. Тепловые процессы в технологических системах. М.: Машиностроение, 1990. С. 288.
204. Кондратенко Л.А., Миронова Л.И. К вопросу о динамике тепловых потоков при сверлении глубоких отверстий в деталях / Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2019. – №3. – С. 97 – 103.
205. Марочник сталей / Под общей ред. А.С. Зубченко. М.: Машиностроение, 2003. 784 с.