

На правах рукописи



Майоров Андрей Юрьевич

**КАЧЕСТВЕННЫЙ И АСИМПТОТИЧЕСКИЙ
АНАЛИЗ ДИНАМИКИ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ
СИСТЕМ С КВАДРАТИЧНЫМ ТРЕНИЕМ**

Специальность 01.02.01 —
«Теоретическая механика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2017

Работа выполнена на кафедре «Моделирование динамических систем» Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ).

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Моделирование динамических систем» ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ)
Красильников Павел Сергеевич

Официальные оппоненты: **Шатина Альбина Викторовна**, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Московский технологический университет» (МИРЭА)

Зленко Александр Афанасьевич, кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет» (МАДИ)

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов» (РУДН)

Защита состоится 15 декабря 2017 года в 12 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.125.14 в Московском авиационном институте по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского авиационного института по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4 или на сайте МАИ по ссылке:

Автореферат разослан « ____ » _____ 2017 г.

Отзывы на автореферат просим отправлять в 2-х экземплярах, заверенных гербовой печатью, по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4, Ученый совет МАИ.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 212.125.14, кандидат физико-математических наук, доцент



Гидаспов В.Ю.

Общая характеристика работы

В настоящей диссертационной работе изучается задача устойчивости равновесия механических систем с двумя и тремя степенями свободы, находящихся под действием как потенциальных, так и не потенциальных (неконсервативных) сил. Под неконсервативными силами подразумеваются диссипативные силы, а так же позиционные силы, не допускающие потенциала. Последние силы так же называются следящими, циркуляционными или силами радиальной коррекции.

Актуальность темы. Механические системы, в которых действуют неконсервативные силы, нашли свое применение в различных областях науки и техники. Можно указать целые области, где при моделировании возникают неконсервативные системы. Это проектирование конструкций в машиностроении, авиации, ракетной техники. Поэтому исследование устойчивости и колебаний неконсервативных механических систем, находящихся под действием потенциальных и неконсервативных сил, в том числе линейных и квадратичных диссипативных сил, является актуальной.

Изучению устойчивости циркуляционных систем посвящено большое количество задач, среди которых можно выделить работы таких ученых как В. В. Болотин, Дж. Херманн, Г. Циглер, Д. Р. Меркин, С. А. Агафонов, А. В. Карапетян, В. В. Белецкий, П. С. Красильников, А. Е. Байков, О. Н. Кириллов, и др.

Впервые вопрос о решении неконсервативных задач со следящими силами ставится после работ Эйлера, в которых он исследовал устойчивость форм равновесия упругой балки. Изучение области применимости метода Эйлера в задачах устойчивости упругих систем показало, что если силы неконсервативные, то метод Эйлера становится непригодным. Основным методом исследования неконсервативных задач теории упругости является метод, основанный на рассмотрении колебаний системы вблизи положения равновесия, что сближает его с теорией устойчивости и классической механикой.

Наибольшую известность среди неконсервативных задач получил парадокс дестабилизации, называемый так же эффект Циглера¹, когда сколь угодно малые по модулю линейные диссипативные силы дестабилизируют равновесие системы, устойчивое в отсутствие сил трения. Это явление изучалось в работах В. В. Болотина, Я. Г. Пановко, Г. Циглера, С. А. Агафонова, А. П. Сейраняна, О. Н. Кириллова, П. С. Красильникова, А. Е. Байкова и других ученых. Сложность в изучении данного эффекта заключается в том, что характеристический полином системы содержит все коэффициенты при степенях неизвестных, поэтому неравенства в критерии Раусса-Гурвица имеют весьма сложный вид и их сложно исследовать на совместность. В настоящий момент одним из наиболее эффективных подходов к изучению эффекта Циглера является использование критерия дестабилизации, сформулированного

¹ Ziegler H. Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik // Ing. Arch. 1952. Bd. 20.H.1.s. 49 – 56.

и доказанного для систем с двумя степенями свободы в работе П. С. Красильникова и А. Е. Байкова².

Как один из частных случаев неконсервативных механических систем, задача исследования движения механических систем, в частности, твердых тел, в сопротивляющейся среде также давно заинтересовала специалистов. С развитием авиации вопрос о влиянии сил сопротивления на движение тел в среде стал особенно актуальным. Пионерские работы в этой области принадлежат Ньютону И., Стоксу Дж. Г., Циолковскому К. Э., Жуковскому Н. Е. и другим классикам.

Современная постановка задачи о движении тел в среде с сопротивлением предполагает учет динамики самой среды, т.е. рассмотрения уравнений Навье-Стокса. Однако данный подход сопряжен с большими теоретическими и вычислительными сложностями. Поэтому большинство авторов рассматривают упрощенную постановку, например, учитывают только эффект присоединенных масс и вязкое сопротивление.

В диссертационной работе исследуется устойчивость механических систем с двумя и тремя степенями свободы при наличии позиционных и диссипативных сил. Изучаются области устойчивости и неустойчивости равновесной конфигурации трёхзвенного стержневого механизма, находящегося под действием сосредоточенной следящей силы. В простейшем случае эта модель описывает динамику заправочного шланга, находящегося под действием реактивной силы равномерного истечения жидкости.

Так же в работе исследуются малые колебания неконсервативных механических систем с двумя степенями свободы, которые находятся под действием потенциальных, неконсервативных позиционных сил, линейных и квадратичных диссипативных сил, моделирующих движение систем в сопротивляющейся среде с квадратичными законами сопротивления. В качестве примера такой механической системы с двумя степенями свободы, разработана специальная стержневая модель. Проводится её линейный анализ устойчивости положения равновесия. Такая система может служить упрощенной моделью движения лопасти на упругой втулке несущего или рулевого винта вертолета в плоскости тяги.

Целью диссертационной работы является изучение влияния совместного действия неконсервативных позиционных сил, потенциальных, линейных и квадратичных диссипативных сил на устойчивость механических систем с двумя и тремя степенями свободы.

Для достижения поставленной цели решаются следующие **задачи**:

1. Получение необходимых условий устойчивости положения равновесия трехзвенной стержневой системы в отсутствие диссипативных сил.

²Байков А. Е., Красильников П. С. Об эффекте Циглера в неконсервативной механической системе // ПММ, 2010. Т. 74, Вып. 1. с. 74 – 88.

2. Формулировка и доказательство критерия асимптотической устойчивости положения равновесия систем с тремя степенями свободы при наличии малых линейных диссипативных сил.

3. Построение областей устойчивости и зоны дестабилизации положения равновесия малыми диссипативными силами (зоны Циглера) трехзвенной стержневой системы.

4. Получение достаточных условий существования предельного инвариантного тора для систем с двумя степенями свободы, находящихся под действием потенциальных, неконсервативных позиционных сил, линейных и квадратичных диссипативных сил.

5. Исследование устойчивости положения равновесия и зон Циглера в механической системе, моделирующей движение лопасти винта в плоскости тяги.

Методы исследования. Для составления дифференциальных уравнений движения рассматриваемых в диссертационной работе механических систем использовались уравнения Лагранжа 2-го рода. Все аналитические вычисления проводились применением методов компьютерной алгебры. Для исследования влияния линейных диссипативных сил на устойчивость положения равновесия стержневых систем использовался метод малого параметра теории возмущений. Анализ малых колебаний неконсервативных механических систем проводился с помощью метода нормализации Хори-Кэмила и метода усреднения.

Научная новизна. В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

1. Результаты исследования трехзвенной стержневой системы, находящейся под действием неконсервативной позиционной силы и линейных диссипативных сил являются новыми. Ранее в исследованиях неконсервативных систем не рассматривались трехзвенные стержневые механизмы. Так же, по сравнению с результатами, полученными при исследовании аналогичной двухзвенной стержневой системы, при анализе устойчивости трехзвенного механизма были обнаружены новые эффекты, возникающие при изменении направления действия следящей силы. В работе также сформулирован и доказан критерий существования эффекта Циглера для трехзвенной стержневой системы с малыми силами трения, что также является новым результатом в исследовании механических систем с тремя степенями свободы.

2. Использование кубической диссипативной функции Рэлея для исследования совместного влияния потенциальных, неконсервативных позиционных, линейных и квадратичных диссипативных сил на устойчивость и колебания механических систем рассматривается впервые. Для систем с одной и двумя степенями свободы получены новые результаты: проведена нормализация уравнений на основе метода Хори-Кэмила, выведены усредненные уравнения по медленным переменным, получены достаточные условия суще-

ствования предельного инвариантного тора усредненной системы с двумя степенями свободы в случае функции Рэля, не содержащей смешанных членов.

3. Описана новая модель движения лопасти винта на упругой втулке в плоскости тяги. Впервые получены условия устойчивости стационарных режимов при наличии малых линейных вязких сил трения, построены зоны Циглера в плоскости параметров.

Научная и практическая значимость полученных в диссертационной работе результатов состоит в следующем:

1. Полученный при исследовании устойчивости трехзвенной стержневой системы эффект, не имеющий аналога в системе с двумя степенями свободы, указывает на необходимость исследования колебаний механических систем со многими степенями свободы.

2. Результаты исследования эффекта Циглера для трехзвенной стержневой системы при наличии малых сил трения позволяют оценить области устойчивости, области нарастающих поперечных колебаний в зонах неустойчивости для дискретных моделей ракеты-носителя и заправочного шланга летательного аппарата.

3. Полученные достаточные условия существования инвариантного тора в фазовом пространстве систем с двумя степенями свободы, подверженных действию линейных и квадратичных диссипативных сил, вносят новый вклад в исследования, посвященные анализу аттракторов механических систем, и расширяет теоретические знания в предметной области, посвященной малым колебаниям.

4. Результаты линейного анализа устойчивости и построения зон Циглера для стационарных режимов движения винта в плоскости тяги можно использовать при конструировании безопасных режимов движений лопасти вертолета.

Достоверность полученных результатов обеспечивается: **1)** строгим использованием классических механических концепций и адекватного математического аппарата, **2)** применением классических аналитических и приближенно-аналитических методов исследования, **3)** использованием математического пакета Maple версии 13.0 (Maple build ID 397624).

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях и научных семинарах: **1)** Семинар "Динамические системы и механика" кафедр 803 и 802 (Москва, 2014), **2)** Международной конференции "Ломоносов-2015" (Москва, 2015), **3)** 16-ой международной конференции "Авиация и космонавтика" (Москва, 2016).

Личный вклад. Автору принадлежат формулировки и доказательства основных теоретических результатов, представленных в диссертационной работе. Также автором реализованы используемые аналитические методы компьютерной алгебры в среде Maple. Выбор методов анализа, круга рассматриваемых задач и разработка модели, приближенно описывающей дви-

жение лопасти винта в плоскости тяги, проводились под руководством П. С. Красильникова.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 10 работах, среди которых 3 статьи в журналах из перечня ВАК [1-3] и 7 публикаций в иных изданиях, основные из которых [4-7].

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 75 страниц с 20 рисунками и 1 таблицей. Список литературы содержит 62 наименования.

Диссертационная работа выполнена в Московском авиационном институте (Национальный исследовательский университет) за счет гранта РФФИ № 14-21-00068 (2014-2016).

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность проводимых исследований, приводится краткий обзор научной литературы по изучаемой проблеме, ставятся цель и задачи работы, формулируются научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

В **первой главе** исследуется устойчивость положения равновесия голономной неконсервативной механической системы с идеальными стационарными связями, находящейся на гладкой горизонтальной плоскости и состоящей из трех стержней, соединенных друг с другом с помощью спиральных пружин. Спиральные пружины помимо упругих свойств создают момент демпфирования, противоположный относительной угловой скорости. На свободный конец стержня действует следящая сила F , составляющая фиксированный угол α с осью стержня (рис. 1).

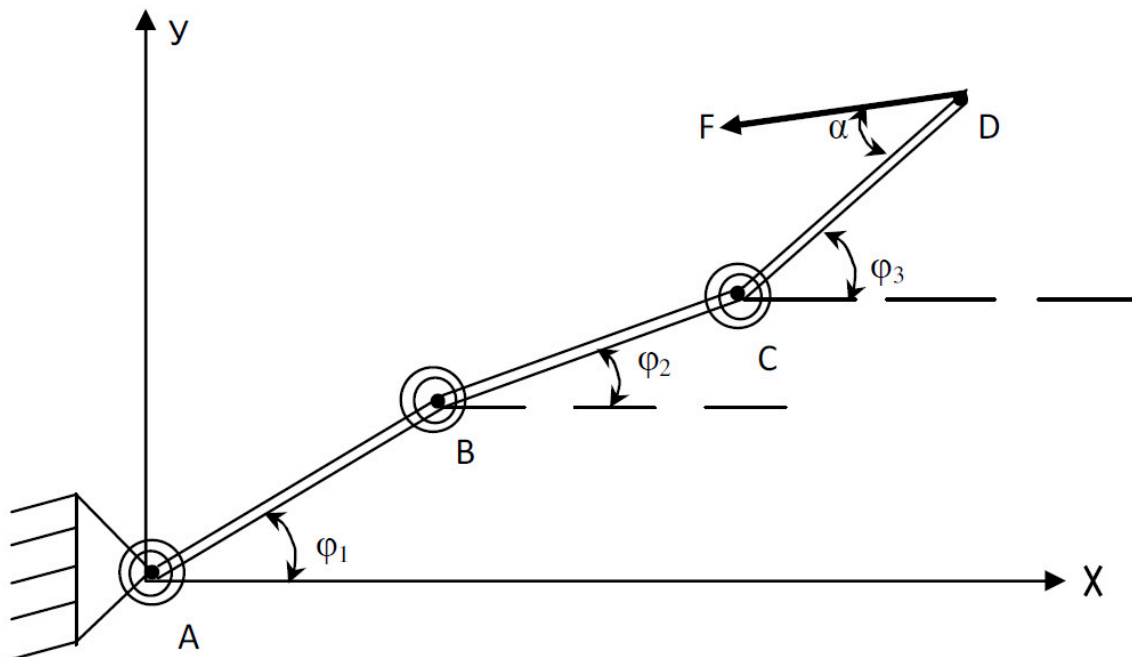


Рис. 1. Исследуемая механическая модель

Для рассматриваемой системы составлены уравнения Лагранжа 2-го рода, найдено единственное положение равновесия, получены уравнения возмущенного движения. Для обезразмеренных уравнений возмущенного движения получены уравнения первого приближения

$$A\ddot{\beta} + \varepsilon B\dot{\beta} + C\beta = 0, \quad (1)$$

С помощью алгоритма Леверье³ получены явные выражения для коэффициентов характеристического полинома $\theta(\lambda; \varepsilon)$ системы (1).

В первой части первой главы рассматривается задача устойчивости в отсутствие сил трения (когда $\varepsilon = 0$). В такой постановке условия устойчивости положения равновесия системы (1) эквивалентны положительности дискриминанта и коэффициентов характеристического полинома $\theta(\lambda)$. Для случая $\alpha = 0$ получены явные условия устойчивости положения равновесия в виде системы неравенств, графическое изображение которых представлено на рисунке 2.

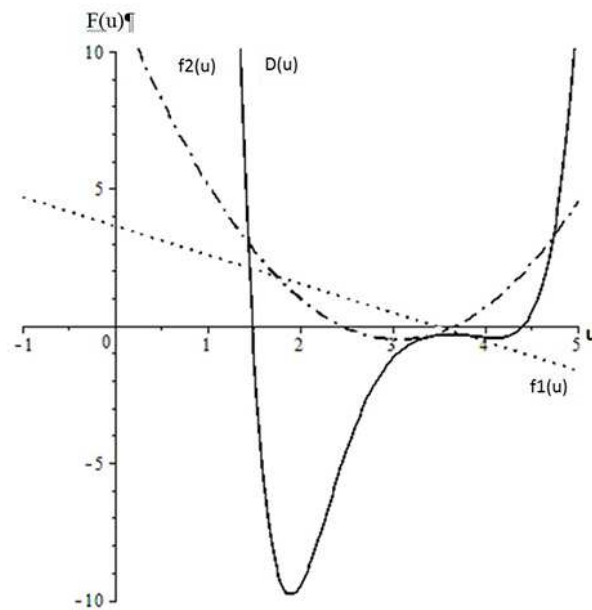


Рис. 2. График коэффициентов $f_1(u)$, $f_2(u)$ и дискриминанта $D(u)$ характеристического полинома при $\alpha = 0$. Здесь $u = \gamma \cos \alpha$, $v = \gamma \sin \alpha$ – новые параметры, и $\gamma = \frac{Fl}{c}$

Условие устойчивости механической системы в отсутствие сил трения возможно при значении параметра $u \leq u^* = 1.483549109$. Аналогичный результат получен при изучении устойчивости двухзвенной стержневой системы⁴.

³Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. – М.: мир, 1977. – 650 с.

⁴Байков А. Е., Красильников П. С. Об эффекте Циглера в неконсервативной механической системе // ПММ, 2010. Т. 74, Вып. 1. с. 74 – 88.

Так же в диссертации рассмотрен случай, когда $|v| \neq 0$, но мало ($\alpha \rightarrow 0$). Графики коэффициентов и дискриминанта изображены на рисунке 3. Как видно из графика, при отрицательных значениях следящей силы F , наблюдается чередование областей устойчивости и неустойчивости при фиксированном значении v .

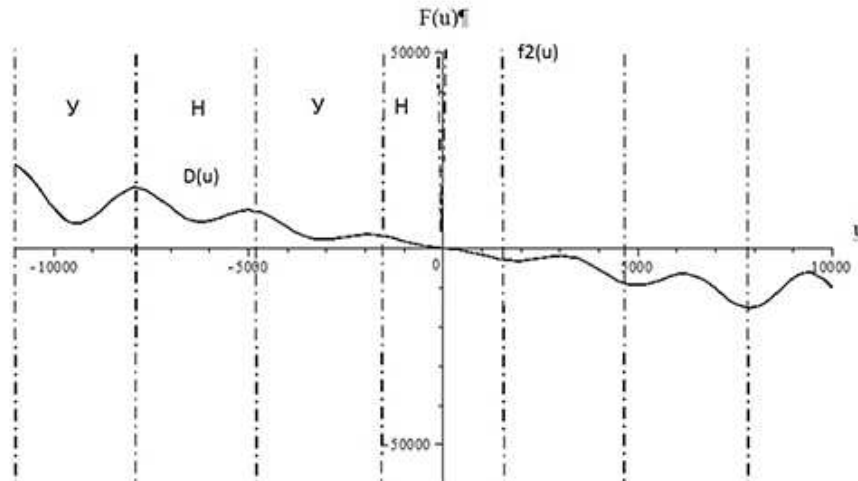


Рис. 3. График коэффициентов $f_1(u)$, $f_2(u)$ и дискриминанта $D(u)$ характеристического полинома при $v = 0.001$.

Во второй части рассматривается устойчивость при малых силах трения (коэффициент трения ε много меньше единицы). Используя теорему о неявной функции, были получены необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости по первому приближению в виде достаточно простых неравенств, накладываемых на параметры задачи для всех механических систем вида:

$$\tilde{A}\ddot{\beta} + \varepsilon\tilde{B}\dot{\beta} + \tilde{C}\beta = 0, \quad (2)$$

где \tilde{A} – симметричная, положительно-определенная матрица, \tilde{B} – положительно-определенная матрица, \tilde{C} – произвольная матрица. Предполагается, что система (2) имеет изолированное положение равновесия $\beta = \dot{\beta} = 0$.

Теорема 1. Пусть положение равновесия $\dot{\beta} = \beta = 0$ системы (2) устойчиво при $\varepsilon = 0$. Тогда при малых силах трения в невырожденном случае (отсутствуют кратные положительные и нулевые корни полинома $\Delta(\mu)$) тривиальное равновесие системы (2) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда выполняется следующая цепочка неравенств:

$$\mu_1 < \mu_* < \mu_2 < \mu^* < \mu_3 \quad (3)$$

где $\omega_i^2 = \mu_i$ – корни полинома частот $\tilde{\Delta}(\omega)$, который получается из характеристического полинома $\theta(\lambda)$ системы (2) с помощью замены $\lambda = i\omega$, μ_* , μ^* – корни квадратного уравнения $\beta_5\mu^2 - \beta_3\mu + \beta_1 = 0$, $\beta_5, \beta_3, \beta_1$ – производные по малому параметру в нуле от соответствующих коэффициентов характеристического уравнения $\theta(\lambda)$.

Из этих условий явствует критерий существования эффекта Циглера для трехзвенной стержневой механической системы.

Для частного случая, когда следящая сила F действует вдоль стержня, то есть $\alpha = 0$, в работе получены явные выражения для условий асимптотической устойчивости из Теоремы 1 и условия эффекта Циглера для исследуемой стержневой системы. Графические изображения этих условий представлены на рисунке 4.

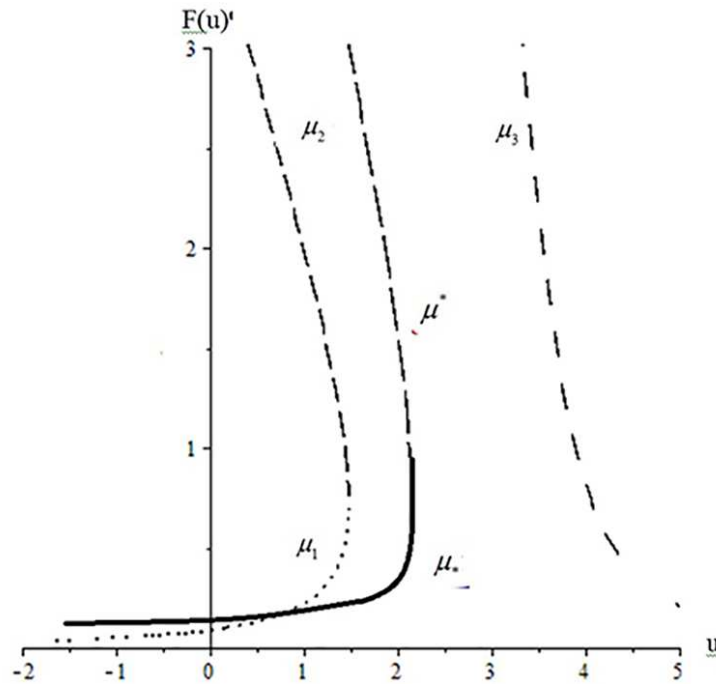


Рис. 4. Совместные графики μ_i , μ_* и μ^* .

Вторая глава диссертации посвящена исследованию некоторых колебаний неконсервативных механических систем. Как известно⁵, малые силы трения вызывают "слабую" неустойчивость равновесия. В частности, в зонах Циглера существует асимптотически устойчивый предельный цикл⁶. Поэтому основное внимание во второй главе уделяется получению условий существования аттрактора в фазовом пространстве системы, отличного от предельного цикла.

Рассмотрена система с двумя степенями свободы, находящаяся под действием потенциальных, неконсервативных позиционных сил, линейных и квадратичных диссипативных сил. Уравнения Лагранжа второго рода, описывающие движения таких систем, имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\nabla \Pi - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{q}} + Q_i \quad (4)$$

Здесь $q = (q_1, q_2)^T$ – вектор обобщенных координат, $T = \frac{1}{2}(A(q)\dot{q}, \dot{q})$ – кинетическая энергия системы, $A(q) = (a_{ij}(q))_{i,j=1}^2$ – матрица кинетической

⁵Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.:Физматгиз,1961.– 339с.

⁶Байков А. Е. Предельный цикл в неконсервативной системе при резонансе 1:2 // ПММ, 2011, Т. 75, № 3, С. 384–395.

энергии, $\Pi = \Pi(q)$ – потенциальная энергия консервативных сил, $Q = (Q_1, Q_2)^T$, $Q_j = Q_j(q)$ ($j = 1, 2$) – вектор неконсервативных позиционных обобщенных сил, Φ, Ψ – диссипативные функции Рэля, квадратические и кубические по обобщенным скоростям соответственно. Выражения для диссипативных функций для систем с двумя степенями свободы имеют вид

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{\varepsilon}{2}(\bar{B}\dot{q}, \dot{q}) \\ \Psi &= \frac{\delta}{3}F(|\dot{q}|) = \frac{\delta}{3}(d_{30}|\dot{q}_1|^3 + d_{21}|\dot{q}_1|^2|\dot{q}_2| + d_{12}|\dot{q}_1||\dot{q}_2|^2 + d_{03}|\dot{q}_2|^3)\end{aligned}\quad (5)$$

где ε, δ – положительные малые параметры, \bar{B} – симметрическая положительно определенная матрица, d_{ij} , ($i + j = 3$) – положительные параметры.

Уравнения (4) приведены к виду, разрешенному относительно вторых производных. Далее вводится масштабирующая замена переменных, такая, что приведенные уравнения описывают колебания в малой окрестности равновесия ($\sim \varepsilon$). Переход к главным координатам x_1, x_2 с помощью неособой линейной замены переменных и разложение нелинейных функций в ряд Тейлора, преобразует уравнения к виду, содержащему члены первого и второго порядка малости. Далее методом Хори-Кэмила проводится нормализация уравнений движения, согласно которому осуществляется переход к новым переменным $x \rightarrow y$. Последующая замена переменных вида

$$y = \rho_1 e_1 \cos(\phi_1) + \rho_2 e_2 \cos(\phi_2), \quad \dot{y} = -\omega_1 \rho_1 e_1 \sin(\phi_1) - \omega_2 \rho_2 e_2 \sin(\phi_2) \quad (6)$$

$$y = (y_1, y_2)^T, \quad e_1 = (1, 0)^T, \quad e_2 = (0, 1)^T, \quad \rho_1 \geq 0, \rho_2 \geq 0$$

приводит нормализованные уравнения к стандартному виду многочастотной системы, содержащей быстрые и медленные переменные:

$$\begin{cases} \dot{\rho}_j = -\frac{\varepsilon}{\omega_j} f_j \sin(\phi_j) \\ \dot{\phi}_j = \omega_j - \frac{\varepsilon}{\omega_j \rho_1} f_j \cos(\phi_j) \\ j = 1, 2 \end{cases} \quad (7)$$

Здесь f_j представляет собой сумму трех форм: линейной (по скоростям \dot{y}_j), квадратичной и кубической (по скоростям \dot{y}_j и координатам y_j). Кубическая форма является «поправкой», возникающей после нормализации системы.

Некоторые из коэффициентов уравнений (7) являются сложными функциями медленных переменных и представлены в виде определенных интегралов. Далее в диссертации проводится исследование малых колебаний системы, когда квадратичные силы трения действуют независимо вдоль осей

главных координат, то есть для диссипативной функции Рэля вида:

$$\Psi = \frac{\delta}{3}d_{30}|\dot{q}_1|^3 + \frac{\delta}{3}d_{03}|\dot{q}_2|^3$$

В такой постановке усредненные уравнения допускают четыре стационарных решения. На основании элементарного анализа делается вывод об асимптотической устойчивости и неустойчивости одной особой точки

$$\rho_1^* = -\frac{3 \pi b_{11}}{8 d_{30} \omega_1}, \quad \rho_2^* = -\frac{3 \pi b_{22}}{8 d_{03} \omega_{12}}$$

И на основании этого вывода, получены условия устойчивости и неустойчивости тривиального положения равновесия системы (4), а именно, тривиальное положение равновесия является асимптотически устойчивым при $b_{11} > 0, b_{22} > 0$, и неустойчивым при $b_{11}b_{22} < 0^7$ или $b_{11} < 0, b_{22} < 0$. Случай $b_{11}b_{22} < 0$ соответствует зоне Циглера.

Далее, в предположении, что $b_{11}d_{30} < 0, b_{22}d_{03} < 0$, делается вывод об существовании инвариантного тора в фазовом пространстве усредненной системы (7), который состоит из семейства траекторий, задаваемых системой (рис. 5)

$$\begin{cases} y_1 = \rho_1^* \cos(\phi_1) \\ y_2 = \rho_2^* \cos(\phi_2) \\ \dot{y}_1 = -\omega_1 \rho_1^* \sin(\phi_1) \\ \dot{y}_2 = -\omega_2 \rho_2^* \sin(\phi_2) \end{cases} \quad (8)$$

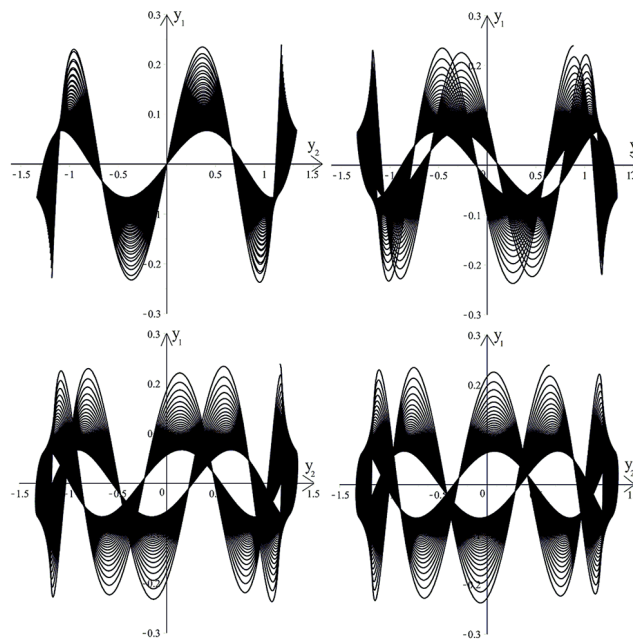


Рис. 5. Проекция фазовых кривых на конфигурационное пространство

⁷Ziegler H. Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik // Ing. Arch. 1952. Bd. 20.H.1.s. 49 – 56.

Тор является неустойчивым, если $b_{11}b_{22} < 0$ или $b_{11} > 0, b_{22} > 0$. При $b_{11} < 0, b_{22} < 0$, инвариантный тор является предельным при $t \rightarrow +\infty$.

В третьей главе исследуется устойчивость положения равновесия механической системы с двумя степенями свободы, находящейся под действием потенциальных, неконсервативных позиционных сил, линейных и квадратичных диссипативных сил. Система представляет собой двухзвенный стержневой механизм, состоящий из двух однородных весомых стержней, и находящийся на гладкой горизонтальной плоскости OXY . На свободный конец стержня OA действует следящая сила F (рис.6). Твердые стержни, имеющие одинаковую длину l и массу m , соединены идеальным сферическим шарниром O и упругой спиральной пружиной с коэффициентом жесткости c_2 . Считается, что неидеальная спиральная пружина создает момент сил трения, противоположный относительной угловой скорости вращения стержня OA с коэффициентом демпфирования b_2 . Стержень CB закреплен на плоскости с помощью двух неподвижных цилиндров, наполненных вязкой жидкостью, и может совершать движение только вдоль оси OY . Предполагается, что сила трения в цилиндрах пропорциональна квадрату линейной скорости с одинаковым коэффициентом вязкости k . Помимо этого, стержень CB закреплен к стенкам поверхности с помощью двух пружин с коэффициентами жесткости c_1 и коэффициентами линейного вязкого трения b_1 . Данная механическая система может служить упрощенной дискретной моделью движений лопасти на упругой втулке несущего или рулевого винта вертолета. Движение лопасти рассматривается в плоскости тяги без учета качения втулки несущего или рулевого винта⁸. Описанная механическая система соответствует рассмотренному во второй главе диссертации частному случаю распределения квадратичных диссипативных сил.

Для системы составлены уравнения Лагранжа 2-го рода, найден единственный стационарный режим системы. Составлены и обезразмерены уравнения возмущенного движения, проведена их линеаризация. Приведены уравнения линейного приближения в векторно-матричном виде

$$A\ddot{\theta} + \varepsilon\tilde{B}\dot{\theta} + \tilde{C}\theta = 0, \quad \theta = (\theta_1, \theta_2)^T \quad (9)$$

Далее исследуется устойчивость уравнений (9) в отсутствие сил трения ($\varepsilon = 0$) с помощью методов, используемых в первой главе диссертации. Показано, что условие устойчивости двухпараметрического семейства стационарных решений системы (9) имеет вид

$$F \leq 4\sigma + \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{30\sigma} \quad (10)$$

⁸Николаев Е. И., Пантюхин К. Н. Динамическая устойчивость вертолета на режиме раскрутки несущего винта на земле с учетом упругости лопастей // Вестник МАИ, 2016, Т.23, №3, с. 112 – 120.

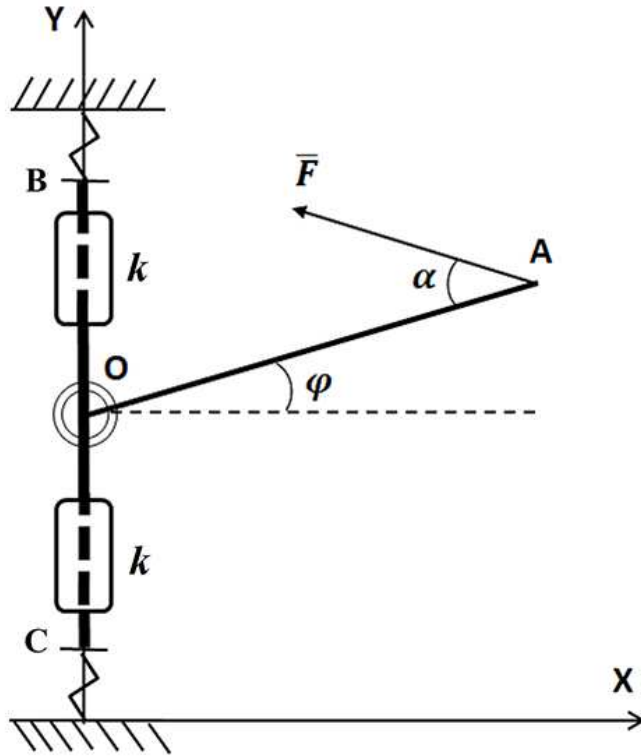


Рис. 6. Исследуемая модель

Во второй части третьей главы исследуется устойчивость системы (9) при наличии малых сил трения ($\varepsilon \rightarrow 0$). Для рассматриваемой системы построен явный вид неособых линейных ортогональных преобразований $\theta = Sx$, приводящих систему (9) к главным координатам

$$\ddot{x} + \varepsilon B\dot{x} + Cx + Px = 0, \quad (11)$$

Исследование устойчивости системы (11) проводится с помощью теоремы об асимптотической устойчивости положения равновесия при малых силах трения, представленной в цитированной выше работе П.С. Красильникова и А.Е. Байкова.

В работе получен явный вид зон дестабилизации для системы (9) для всех значений параметров линейных диссипативных сил β_1, β_2 :

$$\tilde{F} < F \leq 4\sigma + \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{30\sigma}, \quad (12)$$

$$\tilde{F} = \frac{9\beta_1^2\sigma^2 + 144\beta_1\beta_2\sigma^2 - 60\beta_1\beta_2\sigma + 16\beta_1\beta_2 + 36\beta_2^2}{6(\beta_1 + 6\beta_2)(\beta_1\sigma + 2\beta_2)}$$

На рисунке 7 изображены зоны устойчивости, зоны Циглера и зоны неустойчивости для некоторых значений параметров β_1, β_2 . Области Циглера при $\beta_1 = 1.5, \beta_2 = 1$ (левый рисунок), области Циглера при $\beta_1 = 1.5, \beta_2 = 0$

(правый рисунок). Зона Циглера расположена между сплошной кривой, задающей границу области устойчивости в отсутствие сил трения, и пунктирной кривой, описываемой равенством $F = \tilde{F}$.

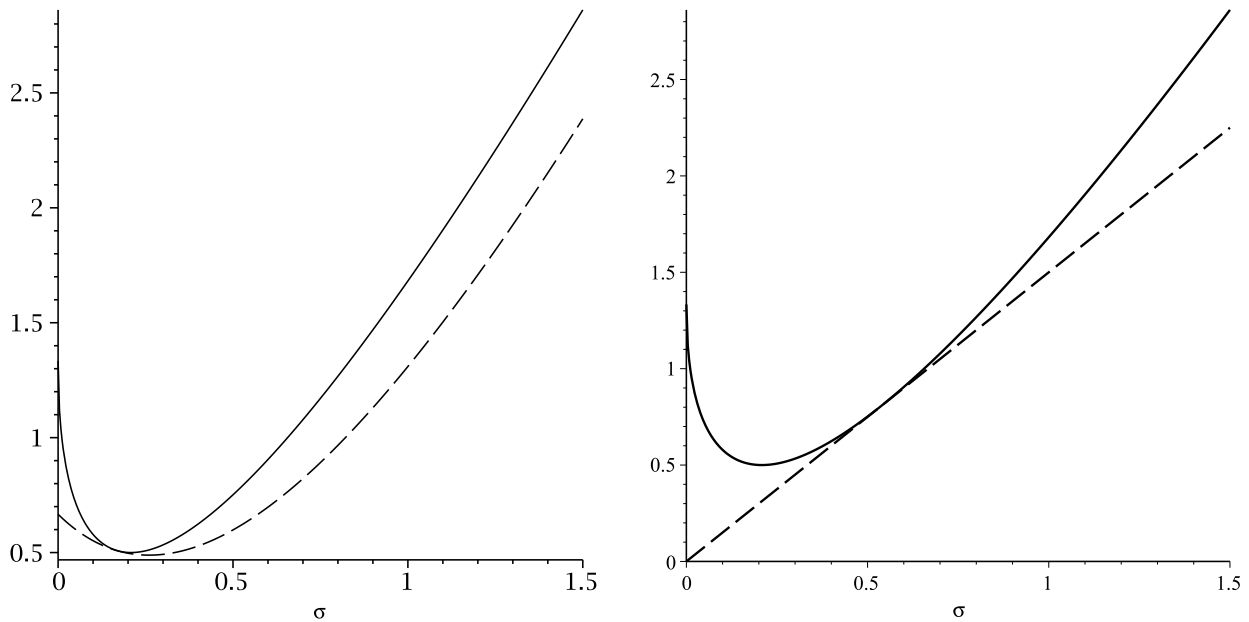


Рис. 7. Области Циглера при разных значениях β_1, β_2

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Получены условия устойчивости положения равновесия трехзвенной стержневой системы, если диссипативные силы отсутствуют.
2. Получен критерий устойчивости положения равновесия и критерий эффекта Циглера трехзвенной стержневой системы при малых силах трения.
3. Построены области устойчивости и зона Циглера положения равновесия трехзвенной стержневой системы.
4. Получены достаточные условия существования предельного инвариантного тора для неконсервативных систем с двумя степенями свободы, которые находятся под действием линейных и квадратичных диссипативных сил.
5. Исследована устойчивость положения равновесия механической системы, моделирующей движение лопасти винта в плоскости тяги.

Публикации в журналах из перечня ВАК

1. Майоров А. Ю., Байков А. Е. Об устойчивости положения равновесия дискретной модели заправочного шланга под действием реактивной силы // *Нелинейная динамика*, 2015, Т. 11, № 1, С. 127–146.
2. Майоров А. Ю., Байков А. Е. Исследование устойчивости положения равновесия трехзвенной стержневой системы, нагруженной следящей силой // *Электронный журнал "Труды МАИ"* 2015, Т.80.

3. *Майоров А. Ю.* О дестабилизации положения равновесия, вызванной линейными и квадратичными силами вязкого трения // СВМО, 2016, Т.18, №3, с.49 – 60

Публикации по теме диссертации в других изданиях

Помимо публикаций в журналах из перечня ВАК по теме диссертации имеется 7 публикации в других изданиях и материалах конференций, основные из которых

4. *Майоров А. Ю.* Исследование устойчивости систем с квадратичными силами вязкого трения // Международная конференция по математической теории управления и механике. Тезисы докладов. Суздаль, 2015. С. 89.

5. *Майоров А. Ю., Байков А. Е.* Об устойчивости стержневой системы с тремя степенями свободы, нагруженной следящей силой // Седьмые Поляховские чтения: Тезисы докладов Международной научной конференции по механике. Санкт-Петербург, 2-6 февраля 2015 г. - М.: Издатель И.В. Балабанов, 2015. С. 22

6. *Майоров А. Ю., Байков А. Е.* Нелинейный эффект Циглера в неконсервативных механических системах // 15-я Международная конференция «Авиация и космонавтика – 2016». 14–18 ноября 2016 года. Москва. Тезисы. – Типография «Люксор», 2016. – 739 с.

7. *Майоров А. Ю., Байков А. Е.* О нелинейном эффекте Циглера и малых колебаниях в неконсервативных системах с двумя степенями свободы // 59-я Всероссийская научная конференция МФТИ с международным участием. 21–26 ноября 2016 года. Москва. Тезисы докладов, [Электронный ресурс] [http : //conf59.mipt.ru/static/prog.html](http://conf59.mipt.ru/static/prog.html)