



Научная статья
УДК 629.7.015.4
URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=188822>
EDN: <https://www.elibrary.ru/AKPCRS>

Анализ устойчивости композитных подкрепленных панелей летательных аппаратов с локальными дефектами

Илья Александрович Казаков

Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н.Е. Жуковского (ЦАГИ),
Московская область, Жуковский, Российская Федерация
normist@tsagi.ru

Аннотация. Предложен приближенный метод расчета устойчивости композитных стрингерных панелей с учетом малоразмерных дефектов. Рассмотрены варианты дефектов в виде повреждений обшивки, стрингера и отрыва стрингера от обшивки. Результаты расчетов по данному методу сравнивались с результатами, приведенными в литературе и полученными по методу конечных элементов. Проведены параметрические исследования влияния параметров стрингера и размеров зоны отрыва на устойчивость панели.

Ключевые слова: расчет устойчивости, композитные подкрепленные панели, упрощенные модели локальных дефектов, отрыв стрингера от обшивки

Для цитирования: Казаков И.А. Анализ устойчивости композитных подкрепленных панелей летательных аппаратов с локальными дефектами // Вестник Московского авиационного института. 2026. Т. 33. № 3. С. 51–61. URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=188822>

Original article

Buckling Analysis of Composite Reinforced Panels of the Aircraft with Local Defects

Il'ya A. Kazakov

Central Aerohydrodynamic Institute named after N.E. Zhukovsky (TsAGI),
Moscow Region, Zhukovsky, Russian Federation
normist@tsagi.ru

Abstract

Reinforced thin-walled panels from polymer composite materials are widely used in the load bearing elements of the aircraft airframe. High specific characteristics of strength and stiffness of these composite materials allow ensuring high weight efficiency compared to panels from conventional metal alloys. The main disadvantage of polymer composites is the impact of technological and operational defects of mechanical characteristics of the structure elements. Low-velocity impact damages may lead to a significant residual strength reduction.

One of the most common types of defects in composite panels is a skin-stringer separation, called debonding. Due to the significant difference in stiffness between the stringer and the skin, major stresses arise in the coupling layer. When reaching a certain size, this defect leads to the significant strength and stability degradation of the stringer

The article proposes a simplified method for the critical buckling load computing of stiffened composite panels with account for the effects of the small-size defects. The authors consider damages of the skin, stringer, as well as defect of the stringer-skin debonding type. The problem solution is based on the Rayleigh–Ritz energy method with global approximating functions. An option of applying special local functions for the displacements approximation in the defect region is proposed. Application of these functions allows improving the solution convergence. Local skin buckling may occur herewith. To prevent further damage development the stringer-skin coupling is being extra reinforced by the rivets or transverse stitching.

Computations of the critical composite stringer panel buckling loads under the impact of compression and shear were performed. Based on the proposed method, critical buckling load computations were performed for composite panels with various sizes of the skin-stringer debonding zone. Comparison with the results, obtained with the finite element method in the Femap program with the Nastran solver, was made. Buckling analysis of the stiffened composite panels and comparison with results reported in the literature were performed. The results were compared with various types of the damages impact experimental data. The proposed method may be applied at the early design stages to assess the defects impact on the composite panels buckling.

Keywords: buckling analysis, composite reinforced panels, simplified models of local defects, skin-stringer debonding

For citation: Kazakov I.A. Buckling Analysis of Composite Reinforced Panels of the Aircraft with Local Defects. *Aerospace MAI Journal*. 2026;33(3):51–61. (In Russ.). URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=188822>

List of Figures

Fig. 1. The stringer panel plan view

Fig. 2. The panel section with the T-shaped stringer: h_{st} — the stringer height; b_{st} — the flange width; $\delta_{об}$ — the housing width; $\delta_{ст}$ — the stringer rib width

Fig. 3. Defect location scheme

Fig. 4. Critical buckling load of a panel with the skin-stringer separation

List of Tables

Table 1. Results of the panel buckling load computing under compression

Table 2. Results of the panel buckling load computing under shear

Table 3. Computational results comparison with the experiment

Введение

Подкрепленные тонкостенные панели из слоистых полимерных композиционных материалов (ПКМ) широко используются в силовых элементах конструкции планера летательного аппарата (ЛА). Высокие характеристики прочности и жесткости при сравнительно низкой плотности ПКМ позволяют обеспечить большую весовую эффективность в сравнении с панелями из металлических сплавов. Кроме того, панели сложной формы из ПКМ могут быть изготовлены одной деталью. Выбор рациональных параметров композитных панелей позволяет добиться высокой весовой эффективности композитных конструкций [1].

Одним из основных недостатков ПКМ является значительное влияние технологических и эксплуатационных дефектов на механические характеристики элементов конструкции. Повреждения в композитных панелях могут приводить к существенному снижению несущей способности (предельной нагрузки) [2–4]. Процесс развития повреждений в подкрепленных панелях при сжатии часто сопровождается отслоением стрингеров от обшивки [5–7].

В работе [5] представлены результаты испытаний средненагруженных панелей горизонтального оперения самолета, выполненных из ПКМ. Отмечено, что ударные повреждения в обшивке в меньшей степени влияют на общую форму потери устойчивости в отличие от дефекта типа перебитого стрингера (пропил). Аналогичные результаты анализа влияния ударных повреждений на остаточную прочность подкрепленной панели получены в работе [6]. В работе [8] приведены результаты испытаний композитных панелей с ударными повреждениями в области стрингера. Получено снижение критической нагрузки потери устойчивости порядка 25% в сравнении с неповрежденной панелью. Результаты испытаний стрингерных панелей из ПКМ на сжатие после удара [9] показали, что при ударе в области стрингера возникают расслоения и деградация механических свойств материала не только в обшивке, но и в самом стрингере.

Ряд публикаций посвящен вопросам численного анализа остаточной прочности композитных панелей при наличии дефектов. Для решения подобных задач может применяться метод конечных элементов (МКЭ) с различными моделями прогрессирующего разрушения [10–12].

На ранних этапах проектирования используются упрощенные методы для быстрой оценки прочности и устойчивости тонкостенных конструкций из ПКМ с дефектами. В работе [13] предложен метод расчета устойчивости композитных панелей с отрывом стрингера при сжатии. Расчет выполнялся дискретным методом Рэлея–Ритца. Панель делится на участки в виде прямоугольных пластин, связанных между собой по кромкам упругими связями. В работе [14] приведены результаты расчета устойчивости подкрепленной панели с отрывом стрингера при сдвиге. Численно-аналитический метод оценки нагрузки, при которой происходит отрыв «брошенного» стрингера от обшивки, представлен в работе [15]. Применение таких методов позволяет снизить временные затраты на проведение расчетных исследований в сравнении с МКЭ.

Характеристики жесткости стрингера и обшивки в композитных панелях, как правило, достаточно сильно различаются. Слои в полке и ребре стрингера ориентированы преимущественно вдоль его оси, тогда как в обшивке пакет слоев состоит из разноориентированных слоев для обеспечения жесткости при сдвиге и действии поперечных нагрузок. Значительная разница в жесткости приводит к высокому уровню нагрузки в соединительной клеевой прослойке. Для предотвращения возможного отслоения стрингера от обшивки (это особенно важно для «брошенного» стрингера) применяют дополнительные механические соединения (клепка, прошивка и т. д.). Такие соединения в большей или меньшей степени приводят к снижению механических характеристик в плоскости панели.

В ряде моделей усталостного роста повреждений закладывается предположение, что рост расслоения начинается при достижении критической нагрузки потери устойчивости отслоившегося участка (выпучивания), как это описано в статье [16]. Выбор рационального шага подкрепления (заклепок или поперечной прошивки) соединения стрингера с обшивкой может предотвратить местное выпучивание и замедлить усталостный рост отслоения.

В настоящей работе предложен приближенный метод расчета устойчивости композитных панелей с учетом отрыва стрингера от обшивки и малоразмерных повреждений обшивки и стрингера. Рассмотрены панели с относительно тонкой обшивкой. Приведены результаты параметрических исследований влияния длины участка отрыва стрингера на критическую нагрузку потери устойчивости панели при сжатии. Выполнено сравнение результатов расчета с результатами, полученными по МКЭ и представленными в литературе.

Расчетная модель композитной стрингерной панели с дефектами

Рассмотрены прямоугольные подкрепленные панели, выполненные из слоистых ПКМ. Схема стрингерной панели представлена на рис. 1. Основные геометрические параметры: a — длина панели; b — ширина панели; $y_{cm i}$ — положение оси i -го стрингера вдоль оси y .

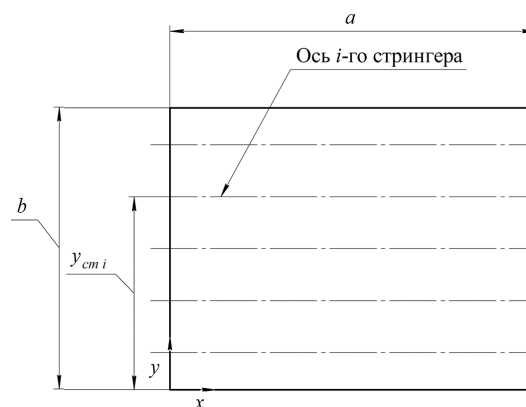


Рис. 1. Схема стрингерной панели на виде в плане

Местное сечение панели с Т-образным стрингером представлено на рис. 2.

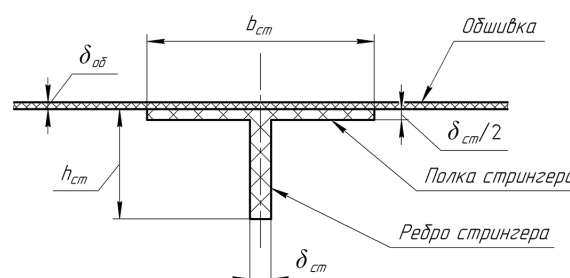


Рис. 2. Сечение панели с Т-образным стрингером:

h_{cm} — высота ребра стрингера;
 b_{cm} — ширина полки; $\delta_{об}$ — толщина обшивки;
 δ_{cm} — толщина ребра стрингера

Расчет устойчивости стрингерной панели с дефектами реализован на основе энергетического метода. Потенциальная энергия панели определяется как сумма энергий элементов, входящих в состав конструкции:

$$U_{пан} = U_{об} + \sum_{i=1}^{N_{ст}} U_{ct i} + \sum_{i=1}^{N_{ст}} U_{сви} - U_{деф},$$

где $U_{об}$ — потенциальная энергия обшивки; $U_{ct i}$ — потенциальная энергия i -го стрингера; $U_{сви}$ — потенциальная энергия упругой связи между i -м стрингером и обшивкой; $U_{деф}$ — изменение потенциальной энергии в области повреждения.

Обшивка моделируется тонкостенной полкой оболочкой с учетом гипотез Кирхгофа–Лява. Деформации срединной поверхности оболочки и приращения кривизны определяются следующими соотношениями:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R_x} w; \quad \varepsilon_y^0 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{R_y} w; \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y};$$

$$\chi_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \chi_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \chi_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

здесь u , v и w — перемещения точек срединной поверхности оболочки в направлениях x , y и z соответственно; R_x и R_y — начальные радиусы кривизны панели вдоль соответствующих осей. Для плоской панели принимаем $R_x = R_y \approx \infty$, тогда слагаемыми, содержащими радиус начальной кривизны, можно пренебречь.

Выражение для определения погонных усилий и моментов в многослойной оболочке из ПКМ:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix},$$

где A_{ij} , D_{ij} , B_{ij} — мембранные, изгибные и смешанные коэффициенты жесткости для пакета слоев, определяемые в соответствии с работой [17], $i, j = 1, 2, 6$.

Для компактной записи обозначим матрицу коэффициентов жесткости следующим образом:

$$\mathbf{ABD} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}.$$

Функционал потенциальной энергии для участка оболочки размером $dx dy$ определяется выражением:

$$U_{об}^*(\mathbf{ABD}, u, v, w) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix}.$$

Потенциальная энергия тонкостенной обшивки находится интегрированием этого функционала по поверхности панели:

$$U_{об} = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a U_{об}^*(\mathbf{ABD}, u, v, w) dx dy.$$

В области расположения полки стрингера коэффициенты жесткости оболочки будут больше. Для моделирования местного увеличения жесткости панели вычтем интеграл потенциальной энергии обшивки в области полки и добавим интеграл потенциальной энергии оболочки с учетом полки стрингера:

$$U_{пол} = \frac{1}{2} \int_{y_{cti} - \frac{b_{ct}}{2}}^{y_{cti} + \frac{b_{ct}}{2}} \int_0^a U_{об}^*(\mathbf{ABD}_{пол}, u, v, w) dx dy,$$

где $\mathbf{ABD}_{пол}$ — матрица коэффициентов жесткости для оболочки в области полки стрингера. Данные коэффициенты определяются для пакета слоев, состоящего из слоев обшивки и слоев полки стрингера.

Ребро стрингера моделируют балкой с радиусом кривизны R . Примем, что все стрингеры направлены вдоль оси x , а жесткостью стрингера в плоскости xy пренебрегаем. Будем учитывать четыре степени свободы балки: u_i — перемещения вдоль оси x ; w_i — прогибы вдоль оси z ; φ_{xzi} — угол поворота сечения в плоскости xz ; φ_{yzi} — угол поворота сечения при кручении стрингера в плоскости yz . Тогда соотношения для деформаций принимают следующий вид:

$$\varepsilon = \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{w_i}{R}; \quad k = \frac{\partial \varphi_{xzi}}{\partial x};$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w_i}{\partial x} + \varphi_{xzi} - \frac{u_i}{R}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial \varphi_{yzi}}{\partial x},$$

где ε — деформации вдоль оси стрингера; k — изменение кривизны; γ_{xz} — сдвиговая деформация в плоскости xz ; γ_{yz} — крутильная деформация вокруг оси балки.

Для рассмотренных примеров панели принимаются плоскими, и соответственно начальная кривизна стрингера задается нулевой. Функционал потенциальной энергии для стрингера (балки):

$$U_{ст}^*(E_i, F_i, G_{xzi}, G_{yzi}, u_i, v_i, w_i, \varphi_{xzi}, \varphi_{yzi}) =$$

$$= \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} E_i F_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_i I_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_T G_{xzi} F_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{yzi} J_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix},$$

где E_i — модуль упругости материала стрингера; $G_{xz i}$, $G_{yz i}$ — модули сдвига в соответствующих плоскостях; F_i — площадь сечения стрингера; I_i — изгибный момент инерции стрингера; J_i — момент инерции кручения; i — номер стрингера; k_T — коэффициент, зависящий от распределения касательных напряжений в сечении (для прямоугольного сечения $k_T = 5/6$).

Потенциальная энергия ребра i -го стрингера:

$$U_{cti} = \frac{1}{2} \int_0^{L_i} U_{ct}^* (E_i, F_i, G_{xz i}, G_{yz i}, u_i, v_i, w_i, \varphi_{xz i}, \varphi_{yz i}) dx,$$

где L_i — длина стрингера.

Для обеспечения совместности деформаций стрингеров и обшивки в неповрежденной области используются упругие связи. Потенциальная энергия связи между i -й балкой и оболочкой в поперечном направлении вычисляется по формуле

$$U_{ki} = \frac{1}{2} k_w \int_0^{L_i} (w - w_i)^2 dx \Big|_{y=y_{cti}},$$

где k_w — жесткость упругой связи при поперечных прогибах стрингера.

Потенциальная энергия связи в продольном направлении:

$$U_{ksui} = \frac{1}{2} k_{su} \int_0^{L_i} \left(u - \frac{\delta_{об}}{2} \frac{\partial w}{\partial x} - u_i - \frac{h_{ct}}{2} \varphi_{xz i} \right)^2 dx \Big|_{y=y_{cti}},$$

где k_{su} — жесткость упругой связи при продольном смещении стрингера и повороте сечения в плоскости xz .

Потенциальная энергия связи, ограничивающая крутильные перемещения стрингера:

$$U_{ksvi} = \frac{1}{2} k_{sv} \int_0^{L_i} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_{yz i} \right)^2 dx \Big|_{y=y_{cti}},$$

где k_{sv} — жесткость упругой связи при кручении стрингера.

Суммарная энергия связи для стрингера определяется соотношением:

$$U_{cvi} = U_{ki} + U_{ksui} + U_{ksvi}.$$

Учет влияния дефектов на критическую нагрузку потери устойчивости композитной панели реализован с помощью изменения расчетного значения потенциальной энергии. Из суммарной энергии панели вычитаются интегралы энергии по области повреждения с заданными редуцированными характеристиками жесткости. Такой подход позволяет

моделировать локальное ослабление конструкции для определения остаточной устойчивости панели. Дефекты задаются в виде прямоугольных участков с редуцированными характеристиками. Для моделирования дефектов сложной формы в плане может быть применен подход, изложенный в работе [18], где область дефекта разделяется на ряд прямоугольных участков.

Схема повреждения в обшивке и отслоения стрингера представлена на рис. 3. Приняты следующие обозначения: X_r и Y_r — координаты центра дефекта в обшивке; a_r и b_r — размеры дефекта вдоль соответствующих осей; X_e и a_e — положение центра расслоения и его длина; y_{cte} — координата стрингера с отслоением.

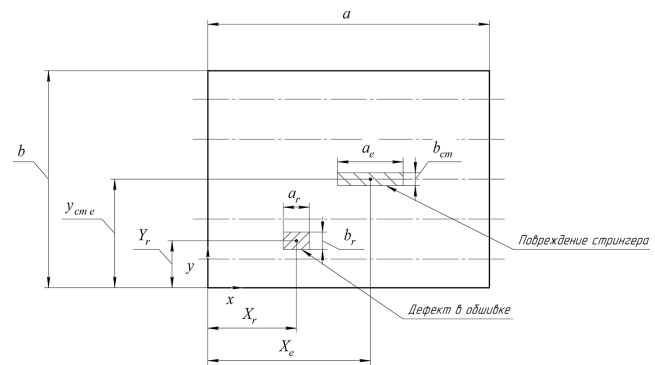


Рис. 3. Схема расположения дефектов

Потенциальная энергия в области повреждения обшивки может быть записана в следующем виде:

$$U_{обш r} = \frac{1}{2} \int_{Y_r - \frac{b_r}{2}}^{Y_r + \frac{b_r}{2}} \int_{X_r - \frac{a_r}{2}}^{X_r + \frac{a_r}{2}} U_{об}^* ([\mathbf{ABD} - \mathbf{ABD}_r], u, v, w) dx dy,$$

где $\mathbf{ABD}_r$ — матрица коэффициентов остаточной жесткости в области повреждения. Коэффициенты деградации свойств задаются в соответствии с алгоритмом, изложенным в статье [19]. По полученным редуцированным характеристикам жесткости слоев вычисляются элементы матрицы $\mathbf{ABD}_r$.

Снижение жесткости стрингера вследствие наличия повреждений ПКМ задается с помощью редуцированного коэффициента $0 < d_{rct} < 1$. Тогда модули упругости и сдвига стрингера в зоне дефекта определяются по формулам:

$$\begin{aligned} E_{id} &= d_{rct} E_i; \\ G_{xz id} &= d_{rct} G_{xz i}; \\ G_{yz id} &= d_{rct} G_{yz i}. \end{aligned}$$

Потенциальная энергия стрингера в месте повреждения:

$$U_{\text{стд}} = \frac{1}{2} \int_{X_d - \frac{a_d}{2}}^{X_d + \frac{a_d}{2}} U_{\text{ст}}^* (E_{id}, F_i, I_i, G_{xzi}, G_{yzi}, u_i, v_i, w_i, \varphi_{xzi}, \varphi_{yzi}) dx,$$

где X_d и a_d – положение центра дефекта вдоль оси стрингера и его длина.

Отрыв стрингера от обшивки моделируется исключением жесткости полки (по аналогии с дефектом в обшивке) и энергии упругой связи в области отслоения. Из энергии связи для заданного стрингера вычитается интеграл энергии по длине зоны отрыва:

$$U_{\text{свe}} = \frac{1}{2} k_w \int_{X_e - \frac{a_e}{2}}^{X_e + \frac{a_e}{2}} (w - w_i)^2 dx \Big|_{y=y_{\text{усте}}} + \\ + \frac{1}{2} k_{sv} \int_{X_e - \frac{a_e}{2}}^{X_e + \frac{a_e}{2}} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_{yzi} \right)^2 dx \Big|_{y=y_{\text{усте}}} + \\ + \frac{1}{2} k_{su} \int_{X_e - \frac{a_e}{2}}^{X_e + \frac{a_e}{2}} \left(u - \frac{\delta_{об}}{2} \frac{\partial w}{\partial x} - u_i - \frac{h_{ст}}{2} \varphi_{xzi} \right)^2 dx \Big|_{y=y_{\text{усте}}}.$$

Итоговая потенциальная энергия в области дефектов определяется суммой энергий для всех повреждений панели:

$$U_{\text{деф}} = U_{\text{общr}} + U_{\text{стд}} + U_{\text{свe}}.$$

Внешние силы задаются погонными нагрузками сжатия (растяжения) N_x и N_y вдоль соответствующих осей и сдвиговой погонной нагрузкой N_{xy} . Продольная сила $P_x = N_x b$, действующая на панель вдоль оси x , распределяется между обшивкой, полкой и ребром стрингера:

$$P_x = P_{\text{хоб}} + P_{\text{хпол}} + P_{\text{хреб}}, \quad (1)$$

где $P_{\text{хоб}}$, $P_{\text{хпол}}$, $P_{\text{хреб}}$ – нагрузка, действующая в обшивке, полке и ребре стрингера.

Уравнение совместности деформаций для элементов панели:

$$\varepsilon_{\text{хоб}} = \varepsilon_{\text{хпол}} = \varepsilon_{\text{хреб}}.$$

Из данного уравнения получим следующие соотношения для погонной нагрузки в обшивке и полке стрингера, а также силу, действующую в ребре:

$$\frac{N_{\text{хоб}}}{E_{\text{хоб}} \delta_{об}} = \frac{N_{\text{хпол}}}{E_{\text{хпол}} \delta_{пол}} = \frac{P_{\text{хреб}}}{E_{\text{хреб}} h_{ст} \delta_{ст}}, \quad (2)$$

где $E_{\text{хоб}}$, $E_{\text{хпол}}$, $E_{\text{хреб}}$ – приведенные модули упругости для обшивки, полки и ребра стрингера соответственно; $\delta_{пол}$ – толщина полки (для случая Т-образного стрингера в примере принимаем $\delta_{пол} = \delta_{ст}/2$).

Из соотношений (1) и (2) получим выражение, связывающее суммарную нагрузку на панель с нагрузкой в обшивке:

$$N_x = N_{\text{хоб}} + N_{\text{хоб}} \frac{E_{\text{хпол}} \delta_{пол} b_{пол}}{E_{\text{хоб}} \delta_{об} b} + N_{\text{хоб}} \frac{E_{\text{хреб}} h_{ст} \delta_{ст}}{E_{\text{хоб}} \delta_{об} b} = \\ = N_{\text{хоб}} (1 + K_{пол} + K_{реб}).$$

Тогда погонная нагрузка в обшивке и полке, а также усилия, действующие в ребре стрингера, находятся по следующим формулам:

$$N_{\text{хоб}} = \frac{N_x}{1 + K_{пол} + K_{реб}}; \\ N_{\text{хпол}} = N_x K_{пол} \frac{b}{b_{пол}}; \\ P_{\text{хреб}} = N_{\text{хоб}} K_{реб} b.$$

Работа внешних сил, действующих на панель:

$$A = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left[N_{\text{хоб}} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2 N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{ст}} \int_{y_{стi} - \frac{b_{ст}}{2}}^{y_{стi} + \frac{b_{ст}}{2}} \int_0^{L_i} N_{\text{хпол}} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{ст}} \int_0^{L_i} P_{\text{хреб}} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \Big|_{y=y_{стi}}.$$

Полную энергию композитной панели с дефектами запишем в следующем виде:

$$\Pi = U_{\text{пан}} - A.$$

Применение специальных локальных функций в области дефектов

Применяя вариационный метод Рэлея–Ритца, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов C_{mn} для членов ряда функций, аппроксимирующих прогибы. Решение задачи потери устойчивости осуществляется поиском наименьших собственных значений [18].

Перемещения срединной поверхности обшивки задаются двойными тригонометрическими рядами. Для случая шарнирного опирания по всем четырем

сторонам функции, аппроксимирующие прогибы, могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N C_{mnu} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right); \\ v &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N C_{mnv} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right); \\ w &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N C_{mnw} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \end{aligned}$$

где C_{mnw} , C_{mnu} , C_{mnv} — неизвестные постоянные коэффициенты в ряде функций, аппроксимирующих прогибы оболочки; M , N — заданное число функций ряда в направлениях x и y .

Функции, аппроксимирующие перемещения стрингеров, задаются одиночными тригонометрическими рядами:

$$\begin{aligned} u_i &= \sum_{m=1}^M C_{mui} \cos\left(\frac{m\pi x}{L_i}\right); \\ w_i &= \sum_{m=1}^M C_{mwi} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_i}\right); \\ \varphi_{xzi} &= \sum_{m=1}^M C_{m\varphi xi} \cos\left(\frac{m\pi x}{L_i}\right); \\ \varphi_{yzi} &= \sum_{m=1}^M C_{m\varphi yi} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_i}\right), \end{aligned}$$

где C_{mui} , C_{mwi} , $C_{m\varphi xi}$, $C_{m\varphi yi}$ — неизвестные коэффициенты функций прогибов стрингера.

Для обеспечения лучшей сходимости расчета ряд глобальных аппроксимирующих функций дополнен локальными функциями [20]. Данные специальные функции равны нулю вне области повреждения и имеют определенную форму внутри области. Применяемые в настоящей работе специальные функции имеют следующий вид (*), где X_k и Y_k — положение центра дефекта; a_k и b_k — размеры дефекта.

$$\begin{aligned} w_k &= \begin{cases} \cos^2\left[\frac{\pi(x-X_k)}{a_k}\right] \cos^2\left[\frac{\pi(y-Y_k)}{b_k}\right] & \text{— в области дефекта;} \\ 0 & \text{— вне области дефекта;} \end{cases} \\ u_k &= \begin{cases} \sin\left[\frac{\pi(x-X_k)}{a_k}\right] \cos\left[\frac{\pi(x-X_k)}{a_k}\right] \cos^2\left[\frac{\pi(y-Y_k)}{b_k}\right] & \text{— в области дефекта;} \\ 0 & \text{— вне области дефекта;} \end{cases} \\ v_k &= \begin{cases} \cos^2\left[\frac{\pi(x-X_k)}{a_k}\right] \sin\left[\frac{\pi(y-Y_k)}{b_k}\right] \cos\left[\frac{\pi(y-Y_k)}{b_k}\right] & \text{— в области дефекта;} \\ 0 & \text{— вне области дефекта.} \end{cases} \end{aligned} \quad (*)$$

Результаты расчетов устойчивости композитных панелей с дефектами

Проведены расчеты модельной задачи устойчивости однострингерной композитной панели. Габаритные размеры панели в плане $a = b = 500$ мм. Для монослоя из ПКМ приняты следующие жесткостные характеристики: $E_{11} = 43000$ МПа; $E_{22} = 8900$ МПа; $G_{12} = 4500$ МПа; $\nu_{12} = 0,27$; толщина монослоя $h = 0,25$ мм. Задана схема расположения слоев: в обшивке — $[0_6/90_6]_s$, в ребре стрингера — $[0_8/90_4]_s$. Укладка в полке для Т-образного стрингера принимается как половина слоев ребра стрингера. Ширина полки составляет 100 мм, а высота ребра $h_{ст}$ в ряде расчетов является варьируемым параметром.

Для оценки точности полученного решения проведено сравнение с результатами по МКЭ. Расчеты проведены в программе Simcenter Femap с решателем Nastran. В модели использованы конечные элементы типа Plate Laminate при их общем количестве ~ 3500 . Распределенная нагрузка прикладывалась к обшивке, граничные условия на кромках соответствуют шарнирному опиранию. Ребро стрингера не закреплялось и на него не действует внешняя нагрузка.

Результаты расчетов критической нагрузки потери устойчивости при сжатии $N_{x\text{кр}}$ и сдвиге $N_{xy\text{кр}}$ по предложенному методу и МКЭ приведены в табл. 1 и 2. Разница результатов расчета определяется по формуле:

$$\Delta = \frac{N_{\text{МКЭ}} - N_{\text{пр}}}{N_{\text{МКЭ}}} \cdot 100\%,$$

где $N_{\text{МКЭ}}$ — критическая нагрузка, определенная по МКЭ; $N_{\text{пр}}$ — критическая нагрузка, определенная по предложенному методу.

Для всех расчетных случаев разница результатов составляет не более 5%.

Проведены расчеты устойчивости композитной панели с дефектом, моделирующим отрыв стрингера от обшивки. Центр дефекта расположен в середине панели, а его длина определяется без-

Таблица 1. Результаты расчета устойчивости панели при сжатии

$h_{ст}, \text{мм}$	$N_{ху\text{кр}}, \text{Н/мм}$		$\Delta, \%$
	Представленный метод	МКЭ	
0	7,35	7,32	0,4
10	8,11	7,99	1,5
20	12,71	12,78	-0,5
25	17,02	17,39	-2,1
30	22,62	23,38	-3,2
35	29,38	29,12	0,9
50	29,85	29,55	1,1
75	30,13	30,09	0,1

Таблица 2. Результаты расчета устойчивости панели при сдвиге

$h_{ст}, \text{мм}$	$N_{ху\text{кр}}, \text{Н/мм}$		$\Delta, \%$
	Представленный метод	МКЭ	
0	12,54	12,55	-0,1
10	13,72	13,75	-0,2
20	18,53	18,71	-0,9
25	21,57	21,75	-0,8
30	24,39	24,51	-0,4
35	26,71	26,66	0,2
50	29,79	29,15	2,2
75	30,54	29,95	1,9

размерным параметром $\gamma_{отр} = a_e/a$ (относительная длина отрыва стрингера от обшивки). Высота стрингера в данном примере $h_{ст} = 50 \text{ мм}$. Зависимость критической нагрузки потери устойчивости при сжатии от относительной длины отрыва представлена на рис. 4.

По графикам рис. 4 видно, что предложенный метод дает значения критической нагрузки, близкие к результату, полученному по МКЭ. Применение специальных функций, аппроксимирующих перемещения панели, позволяет обеспечить лучшую сходимость при реализации локальной формы потери устойчивости в области повреждения.

При небольшой относительной длине отрыва стрингера от обшивки происходит незначительное снижение критической нагрузки, форма потери устойчивости при этом практически не меняется. Уменьшение критических значений нагрузки потери устойчивости происходит в основном за счет

того, что не обеспечивается условие совместности деформаций между полкой стрингера и обшивкой. Начиная с определенной длины дефекта, происходит изменение формы потери устойчивости и существенное снижение критической нагрузки. Таким образом, по данной расчетной модели может быть определен максимальный шаг подкрепления стрингера, необходимый для предотвращения выпучивания обшивки в области расслоения. В рассмотренном примере это расстояние должно быть не более 250 мм.

Проведены расчеты устойчивости композитных панелей с различными видами повреждений. Характеристики материала и геометрические параметры панели представлены в работе [5]. Рассмотрены четыре расчетных случая:

- 1) панель без повреждения;
- 2) панель с ударным повреждением по оси стрингера размером $25 \times 50 \text{ мм}$ [5];

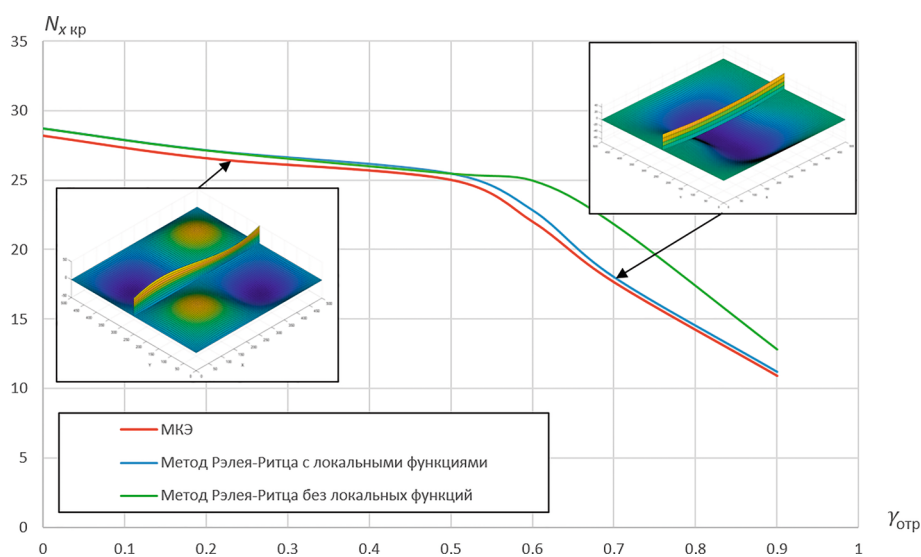


Рис. 4. Критическая нагрузка потери устойчивости панели с отрывом стрингера

3) панель с ударным повреждением обшивки в межстрингерной зоне, размеры повреждения 40×40 мм [5];

4) панель со сквозным повреждением стрингера и обшивки типа «пропил».

Разрушение панелей сопровождалось общей потерей устойчивости с последующим отрывом стрингеров от обшивки для первых трех случаев. В последнем варианте наблюдалась ранняя потеря устойчивости в зоне «пропила» с последующим развитием трещины на соседние стрингеры и их разрушением [5].

При расчете устойчивости предложенным методом ударные повреждения задавались прямоугольным участком с размерами, соответствующими максимальным полученным в результате неразрушающего контроля. Принято одинаковое значение коэффициента деградации свойств для всех слоев (0.1). Сквозное повреждение стрингера моделировалось локальным снижением жесткости ребра до 0 на небольшом участке. Результаты расчета критических напряжений потери устойчивости $\sigma_{сж}$ [МПа] приведены в табл. 3.

Таблица 3. Сравнение результатов расчета с экспериментом [5]

Расчетный случай	$\sigma_{сж}$	$\sigma_{сж}$ [5] расчет	$\sigma_{сж}$ [5] эксперимент
№ 1	207	196	194
№ 2	205	192	190
№ 3	202	190	185
№ 4	101,6	166 (95*)	150 (80–90*)
* напряжения, при которых начинается потеря устойчивости панели			

Результаты расчета по предложенному методу удовлетворительно согласуются с результатами эксперимента и расчета по МКЭ из работы [5]. Для расчетных случаев № 2 и № 3 наблюдается незначительное снижение критической нагрузки. Ударные повреждения такого типа мало влияют на общую

форму потери устойчивости, в связи с чем значение критической нагрузки практически не изменяется. Перестроение формы потери устойчивости также не происходит, но в области повреждения относительные деформации увеличиваются. Повреждение стрингера (расчетный случай № 4) даже на небольшом участке приводит к существенному снижению остаточной прочности и устойчивости панели.

Выводы

Предложен приближенный численный метод расчета устойчивости подкрепленных композитных панелей с дефектами. Применен метод Рэлея–Ритца с использованием специальных локальных функций в области дефектов. На примерах показано соответствие результатов, полученных данным методом, с результатами МКЭ. Предложенный метод не требует больших вычислительных затрат и ресурсов ЭВМ. Он может применяться на начальных этапах проектирования при проведении параметрических исследований.

Если несущая способность панели определяется общей формой потери устойчивости, малоразмерные ударные повреждения в обшивке практически не влияют на остаточную прочность и устойчивость. При этом повреждение стрингера для таких панелей может привести к существенному снижению несущей способности [5]. Отметим, что для панелей с толстой обшивкой механизм разрушения при наличии повреждений может значительно отличаться, и влияние дефектов должно быть оценено отдельно.

Отрыв стрингера от обшивки для тонкостенных панелей при достижении определенных размеров сопровождается местным выпучиванием обшивки. С целью предотвращения дальнейшего роста дефекта необходимо усиливать место соединения. По результатам представленных расчетов может быть определен наибольший допустимый шаг механических соединений между обшивкой и полкой стрингера для предотвращения местной потери устойчивости.

Конфликт интересов / Conflict of Interests

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no relevant conflict of interests

Список источников / References

- Бадрухин Ю.И., Терехова Е.С. Рациональное проектирование тонкостенных несущих панелей из слоистого композита при комбинированном нагружении // Вестник Московского авиационного института. 2023. Т. 30. № 4. С. 130–139. URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=177614>
Badrukhin YuI, Terekhova ES. Rational design of thin-walled load-bearing laminated composite panels under combined loading. *Aerospace MAI Journal*. 2023;30(4):130–139. (In Russ.). URL: <https://vestnikmai.ru/eng/publications.php?ID=177614>

2. Беззаметнов О.Н., Митряйкин В.И., Халиулин В.И. и др. Оценка влияния ударных повреждений на прочность интегральных панелей из полимерных композиционных материалов при сжатии // Вестник Московского авиационного института. 2021. Т. 28. № 4. С. 78-91. DOI: 10.34759/vst-2021-4-78-91
Bezzametnov ON, Mitryaikin VI, Khaliulin VI, et al. Impact damages effect assessment on compressive strength of integral panels from polymer composite materials. *Aerospace MAI Journal*. 2021;28(4):78-91. (In Russ.).
3. Белоусов И.С., Железнов Л.П., Бурнышева Т.В. Моделирование испытаний на сжатие слоистых композитов с дефектами в виде расслоения // Вестник Московского авиационного института. 2024. Т. 31. № 1. С. 93-104. URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=179111>
Belousov IS, Zheleznov LP, Burnysheva TV. Compression Test Simulation of Layered Composites with Delamination. *Aerospace MAI Journal*. 2024;31(1):93-104. (In Russ.). URL: <https://vestnikmai.ru/eng/publications.php?ID=179111>
4. Беззаметнов О.Н., Митряйкин В.И., Халиулин В.И. и др. Исследование стойкости к ударным воздействиям многослойных композиционных конструкций с сотовым наполнителем // Вестник Московского авиационного института. 2020. Т. 27. № 3. С. 111-125. DOI: 10.34759/vst-2020-3-111-125
Bezzametnov ON, Mitryaikin VI, Khaliulin VI, et al. Developing technique for impact action resistance determining of the aircraft parts from composites with honeycomb filler. *Aerospace MAI Journal*. 2020;27(3):111-125. (In Russ.).
5. Голован В.И., Дударков Ю.И., Левченко Е.А. и др. Несущая способность панелей из композиционных материалов при наличии эксплуатационных повреждений // Труды МАИ. 2020. № 110. DOI: 10.34759/trd-2020-110-5
Golovan VI, Dudarkov YuI, Levchenko EA, et al. Load bearing capacity of composite panels with in-service damages. *Trudy MAI*. 2020(110). (In Russ.).
6. Feng Y, Zhang H, Tan X, et al. Effect of impact damage positions on the buckling and post-buckling behaviors of stiffened composite panel. *Composite Structures*. 2016;155:184-196. DOI: 10.1016/j.compstruct.2016.08.012
7. Grotto F, Bouvet C, Castanié B, et al. Design and Testing of Impacted Stiffened CFRP Panels under Compression with the VERTEX Test Rig. *Aerospace*. 2023;10(4):327. DOI: 10.3390/aerospace10040327
8. Tan R, Xu J, Guan Z, et al. Experimental study on effect of impact locations on damage formation and compression behavior of stiffened composite panels with L-shaped stiffener. *Thin-Walled Structures*. 2020;150:106707. DOI: 10.1016/j.tws.2020.106707
9. Sun W, Guan Z, Li Z, et al. Modelling and simulating of the compressive behavior of T-stiffened composite panel subjected to stiffener impact. *Composite Structures*. 2018(186):221-232. DOI: 10.1016/j.compstruct.2017.11.079
10. Yap WH, Scott ML, Thomson RS, et al. The analysis of skin-to-stiffener debonding in composite aerospace structure. *Composite Structure*. 2002;57(1-4):425-435. DOI: 10.1016/S0263-8223(02)00110-1
11. Zhao L, Wang K, Ding F, et al. A post-buckling compressive failure analysis framework for composite stiffened panels considering intra-, inter-laminar damage and stiffener debonding. *Results in Physics*. 2019(13):102205. DOI: 10.1016/j.rinp.2019.102205
12. van den Akker BPH, Donadon MV, Loendersloot R, et al. The influence of hygrothermal aging on the fatigue behavior and residual strength of post-buckled co-bonded stiffened panels subjected to compressive loading. *Composites Part B: Engineering*. 2020;194(3):108023. DOI: 10.1016/j.compositesb.2020.108023
13. Castro SGP, Donadon MV. Assembly of semi-analytical models to address linear buckling and vibration of stiffened composite panels with debonding defect. *Composite Structures*. 2017;160(4):232-247. DOI: 10.1016/j.compstruct.2016.10.026
14. Conrado da Silva D. A semi-analytical model for shear buckling analysis of stiffened composite panel with debonding defect. *Thin-Walled Structures*. 2022;171(1):108636. DOI: 10.1016/j.tws.2021.108636
15. Cosentino E, Weaver PM. Approximate Nonlinear Analysis Method for Debonding of Skin/Stringer Composite Assemblies. *AIAA Journal*. 2008;46(5):1144-1159. DOI: 10.2514/1.31914
16. Турбин Н.В., Кононов Н.О. Комплексный анализ роста ударных повреждений в композитном элементе конструкции при циклическом сжатии // Вестник Московского авиационного института. 2025. Т. 32. № 2. С. 108-117. URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=184996>
Turbin NV, Kononov NO. Complex Analysis of the Impact Damages Growth in the Composite Element Under Cyclic Compression. *Aerospace MAI Journal*. 2025;32(2):108-117. (In Russ.). URL: <https://vestnikmai.ru/eng/publications.php?ID=184996>
17. Reddy JN. *Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and Analysis*. 2nd ed. CRC Press LLC, 2003. 858 p.
18. Гарифуллин М.Ф., Казаков И.А., Киреев В.А. Приближенный метод анализа устойчивости композитных пластин с малоразмерными вырезами // Ученые записки ЦАГИ. 2024. Т. LV. № 5. С. 81-89. URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=186675>
Garifullin MF, Kazakov IA, Kireev VA. An approximate method for buckling analysis of composite plates with small-sized cutouts. *Uchenye zapiski TSAGI*. 2024;LV(5):81-89. (In Russ.). URL: <https://vestnikmai.ru/eng/publications.php?ID=186675>

19. Гарифуллин М.Ф., Казаков И.А., Киреев В.А. Приближенный метод оценки остаточной прочности композитных тонкостенных элементов конструкции ЛА при наличии низкоскоростного ударного повреждения // Вестник Московского авиационного института. 2025. Т. 32. № 4. С. 137-146. URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=186675>
Garifullin MF, Kazakov IA, Kireev VA. Approximate Method for the Residual Strength Assessing of the Aircraft Composite Thin-Walled Structural Elements in the Presence of Low-Velocity Impact Damage. *Aerospace MAI Journal*. 2025;32(4):137-146. (In Russ.). URL: <https://vestnikmai.ru/eng/publications.php?ID=186675>
20. Гарифуллин М.Ф., Казаков И.А., Киреев В.А. Применение специальных функций в расчете устойчивости многослойной балки с расслоением методом Рэлея-Ритца // Ученые записки ЦАГИ. 2026. Т. LVII. № 1. С. 74–84.
Garifullin MF, Kazakov IA, Kireev VA. Application of special functions in calculating the stability of a multilayer beam with rayleigh-ritz method. *Uchenye zapiski TSAGI*. 2026; LVII(1):74–84. (In Russ.).

Статья поступила в редакцию / Received 20.04.2026
Одобрена после рецензирования / Revised 29.06.2026
Принята к публикации / Accepted 01.07.2026