

*На правах рукописи*



**ХОА ВАН ДОНГ**

**ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ЭЛЕМЕНТАХ ТОНКОСТЕННЫХ  
КОНСТРУКЦИЙ ИЗ СЛОИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ**

Специальность: 1.1.8. – Механика деформируемого твердого тела

**Автореферат**

диссертации на соискание учёной степени  
кандидата технических наук

Москва - 2024

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

**Научный руководитель:** **Миронова Любовь Ивановна**, доктор технических наук, доцент, профессор кафедры «Проектирование сложных технических систем» Московского авиационного института

**Официальные оппоненты:** **Москвитин Геннадий Викторович**, доктор технических наук, профессор, заведующий лабораторией надежности и долговечности при термомеханических циклических воздействиях ФГБУН «Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук»

**Коровайцева Екатерина Анатольевна**, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории динамических испытаний Научно-исследовательского института механики ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

**Ведущая организация:** Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет транспорта»

Защита диссертации состоится 25 декабря 2024 г. в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета 24.2.327.07 при федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4 и на сайте:

[https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT\\_ID=182710#](https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT_ID=182710#)

Автореферат разослан « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2024 г.

Учёный секретарь  
диссертационного совета



Сердюк Д.О.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы исследования.** Актуальность темы исследования. Одним из приоритетных направлений создания новой авиационной техники является разработка и внедрение в производство конструкций из перспективных материалов, удельные массовые и прочностные показатели которых при требуемой надежности существенно снижают металлоемкость изделий. Такими преимуществами обладают, несомненно, композиционные материалы, состоящие из композитов различных структур: волокнистых, слоистых, включающих как металлические, так и неметаллические, в том числе полимерные составляющие.

Вместе с этим не малый интерес у специалистов вызывают слоистые материалы с функционально изменяемым составом, характеризующиеся многослойной структурой, где каждый слой, например, меняющийся от хрупкой керамики до пластичного металла, выполняет заранее заданную функцию. Наружные слои такой структуры способны противостоять нагреву до высокой температуры и воздействию окислительной среды, а внутренние слои интенсивно охлаждаться.

В производстве режущих инструментов с совершенствованием технологий получения инструментальных материалов широко применяются режущие пластины, имеющие многослойные покрытия, толщиной в несколько нанометров. По структуре такие конструкции являются слоистыми, в которых каждый слой характеризуется определенными поверхностными свойствами (микротвердостью, теплостойкостью, физико-химической пассивностью к обрабатываемому материалу и пр.). Нанесение износостойких покрытий на твердосплавный режущий инструмент существенно повышает эксплуатационные показатели инструмента.

В процессе эксплуатации под силовым воздействием конструкции из слоистых материалов испытывают неравномерное напряженно-деформированное состояние (НДС), особенно по границам слоев, имеющих разные физико-механические свойства. Возникающие при этом деформации и напряжения могут достигать предельных значений, приводящих к расслаиванию материала, а в некоторых случаях, его разрушению.

Весьма важным здесь является разработка методов исследования НДС с учетом тщательного анализа условий эксплуатации и комплекса воздействующих факторов, что указывает на необходимость детального анализа поведения конструкции, например, при действии перепадов температур.

Несмотря на значительное количество разработанных уточненных методов расчета в постановке теории пластин и оболочек приоритетной задачей является возможность получения решения для исходных уравнений теории упругости, в меньшей степени ограниченного упрощающими гипотезами.

Наличие в структуре материала слоистых составляющих с существенно различными свойствами, ставит задачу подробного изучения полей напряжений, воздействующих как на компоненты материала, так и на состояние связей между ними. Особенно значимым является исследование НДС в узких краевых зонах и областях иных сингулярностей, где возможны (или проявляются) резкие изменения значений напряжений. Обычное для теории тонкостенных конструкций усредненное рассмотрение, выражающееся в применении интегральных силовых факторов (усилий, моментов), влияет на точность выполнения граничных условий, что сказывается на результате не только вблизи сингулярностей, но также способно отразиться на расчете и основного напряженного состояния (во внутренней области).

Следует отметить, что одной из качественных проблем, сдерживающих эффективность построения решения многих задач механики, является наложение упрощающих интуитивных гипотез, существенно снижающих информативность и точность получения результата. Наивысшей точкой достижения качественной картины НДС любой конструкции без принятых искусственных влияний и, может быть, искажений, допущений и ограничений является стремление специалистов к получению конечного решения в аналитическом виде.

Поэтому разработка расчетных моделей и математического аппарата, нацеленных на решение указанных выше задач, на основе развивающегося нового итерационно-асимптотического метода, названного в литературе методом Сен-Венана–Пикара–Банаха, определяет **актуальность** выполненного исследования. Такой подход повышает точность определения температурных напряжений в элементах тонкостенных конструкций из слоистых материалов при сложном нагружении и позволяет провести исследования, важных для практики, как на макроуровне в слоях с толщиной более 100 микрон, так и на микроуровне, когда сформированные слои имеют малую величину в пределах десятков нанометров.

**Объект диссертационного исследования** – тонкостенные элементы конструкций из изотропных и многослойных материалов, моделями которых служат узкая полоса и пластина, при воздействии на них механической нагрузки и поля температуры.

**Предметом исследования** является метод расчета компонент напряженно-деформированного состояния тонкостенных элементов конструкций из слоистых материалов.

**Целью диссертационной работы** является разработка методики постановки и решения задач теории упругости для тонкостенных конструкций при заданном распределении температуры, ценность которой заключается в ее аналитичности и новизне, дающих полную картину работы слоистого материала в изделии с учетом температурного воздействия. Строгие аналитические решения в механике для тонкостенных элементов из слоистого материала в литературе отсутствуют.

**Задачами настоящей работы** являются:

- построение сходящейся асимптотической по малому параметру тонкостенности итерационной процедуры интегрирования уравнений теории упругости полосы/балки и пластины без каких-либо априорных гипотез и предположений;

- сведение исходной системы дифференциальных уравнений термоупругости к итерационной последовательности интегральных уравнений типа Пикара относительно поперечной координаты с асимптотическими оценками всех неизвестных;

- выполнение граничных условий на длинных сторонах полосы/балки и лицевых сторонах пластины, и разделение уравнений для медленно меняющихся и быстро меняющихся (типа краевого эффекта) элементарных компонент неизвестных;

- построение формул для всех неизвестных в виде асимптотического ряда по малому параметру, коэффициентами которого являются степенные ряды по степеням поперечной координаты и интегрирование уравнений для коэффициентов асимптотического ряда;

- выполнение всех граничных условий на торцевых поверхностях;

- апробация заявленной методики в исследовании напряженно-деформированного состояния реальных тонкостенных конструкций из изотропных и слоистых материалов, моделями которых служат узкая полоса и пластина, при воздействии на них механической нагрузки и поля температуры.

**Методы исследования.** В диссертационной работе для решения сформулированных задач использованы следующие методы исследования:

- метод асимптотических разделения исходных сложных уравнений в частных производных на итерационные последовательности для определения

медленно меняющихся и быстро меняющихся компонент общего решения на основе их асимптотических оценок по степеням малого параметра ;

– аналитический метод решения систем дифференциальных уравнений в частных производных путем сведения их к итерационной последовательности интегральных уравнений типа Пикара относительно поперечной координаты.

**Достоверность и обоснованность результатов и выводов** гарантируется применением теоретически обоснованного математического аппарата, а также сравнением результатов расчета полученных по разработанной в диссертации асимптотических теорий с аналогичными данными классической теории.

**Научная новизна.** В диссертации получены следующие новые научные результаты, выносимые на защиту:

1. Предложена и реализована методика постановки и решения задач теории упругости, позволившая расширить границы применимости метода Сен-Венана – Пикара – Банаха для исследования термонапряженного состояния тонкостенных конструкций слоистой структуры при различных видах термонагружения.

2. В рамках единого подхода методом Сен-Венана – Пикара – Банаха интегрирования уравнений теории упругости тонкостенных систем для полосы и пластины из изотропного и слоистого материала в пространственной постановке получены последовательным приближением соотношения, выражающие компоненты напряженно-деформированного состояния через новые основные неизвестные функции меньшей размерности с учетом температурных деформаций. Соотношения, полученные без каких-либо априорных гипотез и предположений, имеют вид асимптотических рядов по малому параметру тонкостенности. Способ построения имеет характер итерационной процедуры, включающей интегральные уравнения типа Пикара относительно поперечной координаты.

3. Путем выполнения всех граничных условий на длинных сторонах полосы/балки и лицевых сторонах пластины получены разрешающие соотношения для основных неизвестных применительно к задаче о действии поверхностной механической нагрузки и поля температуры внутри тела. На этих соотношениях для полосы из изотропного и слоистого материала найдены аналитически решения и вычислены выполнением всех граничных условий на торцевых поверхностях константы интегрирования (для случая начального приближения – аналитически, для последующего – численно). По найденным решениям для основных неизвестных определены все компоненты напряженно-деформированного состояния.

4. Решение построено аналитически с учетом медленно меняющихся составляющих (основное решение для внутренней области) и быстро меняющихся (типа краевого эффекта). Получены их относительные асимптотические оценки. Показаны области локализации наибольших напряжений, в том числе поперечных касательных и нормальных, способных оказаться опасными для структуры слоистого материала.

5. Для задачи о термомеханическом воздействии на полосу из изотропного материала получены новые решения: для начального приближения – с применением аппарата асимптотик, для следующего приближения – с использованием прямых подстановок в процессе преобразования уравнений. Проведено сопоставление результатов. Сделаны выводы о наиболее эффективном применении рассмотренных подходов.

**Практическая значимость диссертационной работы.** Метод расчета тонкостенных конструкций, основанный на методе простых итераций и асимптотическом подходе, может быть использован в прочностных расчетах разрабатываемых изделий из перспективных материалов слоистой структуры и с функционально изменяемым составом, применяемых в самолетостроении, двигателестроении, ракетостроении, строительстве, а также других отраслях промышленности.

**Личный вклад автора.** Основные положения диссертации получены лично автором, либо при непосредственном его участии, что подтверждено публикациями.

**Апробация результатов работы.** Основные положения и результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

– XLIX Международной молодежной научной конференции «Гагаринские чтения» 11-14 апреля, 2023 г., Москва;

– 22-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика», 22-24 ноября 2023 г., Москва;

– 21-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика», 21-25 ноября 2022, Москва;

– XLVIII Международной молодежной научной конференции «Гагаринские чтения», 12-15 апреля 2022 г., Москва;

– XXXIII Международной инновационной конференции молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения (МИКМУС-2021), 30 ноября-2 декабря 2021 г., Москва;

– 20-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика», 22-26 ноября 2021 г., Москва.

**Публикации.** Основное содержание диссертационной работы и ее результатов полностью отражено в 13-ти публикациях автора, в том числе в четырех статьях в журналах, включенных в перечень ВАК РФ, одной статье журнала, индексируемого в Scopus, шести публикациях других изданий и журналов.

**Структура и объем.** Диссертационная работа состоит из введения, 5 глав, заключения, списка литературы. Работа содержит 196 страниц, 81 рисунок. Список литературы содержит 205 наименования.

### ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** изложена актуальность темы диссертации, поставлена цель и определены задачи исследования, сформулированы научная новизна, теоретическая и практическая значимость полученных результатов, обоснована их достоверность, приведены сведения об общей структуре и объеме диссертационной работы.

**В первой главе** проведен обзор литературы по тематике диссертации, касающийся основных аспектов решаемой задачи. Кратко рассмотрены особенности подходов и методов, применяемых к расчетам тонкостенных конструкций из слоистых материалов. В качестве пути решения выбран метод Сен-Венана – Пикара – Банаха (SVPB), согласно которому интегрирование уравнений теории упругости осуществляется без введения обычных допущений, ограничивающих форму решения. Также направленностью метода является получение решения аналитически. Изложена суть выбранного метода, заключающаяся в преобразовании уравнений теории упругости к виду последовательности, в которой каждое из уравнений определяет одну из искомых величин через комбинацию остальных, и эта величина, будучи найденной, подставляется в последующие как известная. Отмечено, что цепочка подстановок может выполняться циклически, образуя итерационный процесс. Образующие при этом выражения для неизвестных задачи имеют вид асимптотических рядов по малому параметру тонкостенности. Операторы интегрирования имеют характер операторов Пикара метода решения дифференциальных уравнений первого порядка

$$y(x) = \int_{x_0}^x f[t, (y(t))] dt + y_0, \quad (1)$$

разрешенных относительно производной, путем последовательных приближений. Существование и единственность решения определяются



принципом сжатых отображений. Для решения (1) предложено построить итерационный процесс по следующей схеме

$$y_{(n+1)}(x) = \int_{x_0}^x f \left[ t, \left( y_{(n)}(t) \right) \right] dt + y_0. \quad (2)$$

Такой подход позволяет построить последовательность гладких функций  $y_{(n)}(t)$ , сходящихся к решению уравнения (2).

Построен итерационный процесс для узкой полосы, деформируемой с учетом действия поля температуры. Рассматривается прямоугольная полоса длины  $l$  и высоты  $2h$ , отнесенная к прямоугольной системе координат  $x^*, z^*$ , так что  $0 \leq x^* \leq l$ ,  $-h \leq z^* \leq h$ . Длинные стороны полосы воспринимают некоторую произвольную нагрузку, короткие стороны полосы могут быть закреплены или свободными, или нагружены. Для модели приведены известные уравнения равновесия, соотношения упругости и формулы, связывающие компоненты деформации и перемещения, в безразмерных параметрах. Уравнения преобразуются к виду последовательности таким образом, что при выборе некоторых функций  $w_{(0)}=w_0(x, y)$  и  $\tau_{(0)}=\tau_0(x, y)$  в качестве начальных величин можно было последовательно вычислить все остальные искомые неизвестные методом последовательных приближений, заменив дифференциальные уравнения интегральными, в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{(0)}}{\partial z} &= -\varepsilon w_0' + 2(1+\nu)\tau_0, \quad \varepsilon_{x(0)} = \varepsilon u_{(0)}' + \alpha T, \quad \frac{\partial \sigma_{z(0)}}{\partial z} = -\varepsilon \tau_0', \\ \sigma_{x(0)} &= \varepsilon_{x(0)} + \nu \sigma_{z(0)}, \quad \varepsilon_{z(0)} = (1-\nu^2)\sigma_{z(0)} - \nu \varepsilon_{x(0)} + \alpha T, \\ \frac{\partial w_{(1)}}{\partial z} &= \varepsilon_{z(0)}, \quad \frac{\partial \tau_{(1)}}{\partial z} = -\varepsilon \sigma_{x(0)}', \quad \frac{\partial u_{(1)}}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial w_{(1)}}{\partial x} + 2(1+\nu)\tau_{(1)} \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $u, w, \sigma_x, \sigma_z, \tau, \varepsilon_x, \varepsilon_z$  – компоненты перемещений, напряжений и деформаций соответственно;  $\alpha$  – коэффициент линейного теплового расширения материала полосы,  $T$  – температура, взятая относительно некоторой нулевой температуры, при которой температурные деформации считаются отсутствующими. В скобках обозначен номер приближения. Штрих означает дифференцирование по координате  $x$ .

Принимая в (3) функции начального приближения, не зависящими от координаты  $z$ , процесс вычислений записан в квадратурах по  $z$  таким образом, чтобы сжатие по Банаху было обеспечено за счет малого параметра  $\varepsilon$ , как множителя в правой части интегральных операторов Пикара. Вычисленная в

первом приближении величина приобретает множитель  $\varepsilon^2$  относительно величины нулевого приближения

$$\begin{aligned}
u_{(0)} &= \left[ -\varepsilon w_0' + 2(1+\nu)\tau_0 \right] z + u_0, \quad \sigma_{z(0)} = -\varepsilon\tau_0' z + \sigma_{z_0}, \\
\sigma_{x(0)} &= \left[ -\varepsilon^2 w_0'' + \varepsilon(2+\nu)\tau_0' \right] z + \varepsilon u_0' + \nu\sigma_{z_0} + \alpha T, \\
\varepsilon_{z(0)} &= \left[ \varepsilon^2 \nu w_0'' - (\nu+1)^2 \varepsilon\tau_0' \right] z - \varepsilon \nu u_0' + (1-\nu^2)\sigma_{z_0} + \alpha T, \\
\tau_{(1)} &= \left[ \varepsilon^3 w_0''' - (2+\nu)\varepsilon^2 \tau_0'' \right] \frac{z^2}{2} - \left( \varepsilon^2 u_0'' + \varepsilon \nu \sigma_{z_0}' \right) z + \tau_0 - \varepsilon \int_0^z (\alpha T)' dz, \\
w_{(1)} &= \left[ \varepsilon^2 \nu w_0'' - (\nu+1)^2 \varepsilon\tau_0' \right] \frac{z^2}{2} - \left[ \varepsilon \nu u_0' z - (1-\nu^2)\sigma_{z_0} \right] z + \int_0^z (\alpha T) dz + w_0, \\
\sigma_{z(1)} &= \left[ -\varepsilon^4 w_0'''' + (2+\nu)\varepsilon^3 \tau_0''' \right] \frac{z^3}{6} + \left( \varepsilon^3 u_0''' + \varepsilon^2 \nu \sigma_{z_0}'' \right) \frac{z^2}{2} - \varepsilon\tau_0' z + \\
&\quad + \sigma_{z_0} + \varepsilon^2 \int_0^z (\alpha T)'' dz dz. \quad (4)
\end{aligned}$$

Здесь  $w_0(x)$ ,  $\tau_0(x)$ ,  $u_0(x)$ ,  $\sigma_{z_0}(x)$  – новые основные неизвестные задачи, имеющие характер произволов интегрирования. Очевидно, что все искомые неизвестные выражаются через четыре основные неизвестные  $u_0(x)$ ,  $\sigma_{z_0}(x)$ ,  $w_0(x)$ ,  $\tau_0(x)$ , которые при вычислении интегралов умножаются на  $z$  с соответствующим степенным показателем. Итерационный процесс может быть продолжен, получая, формулы для неизвестных в любом приближении.

На полученных приближениях исходных неизвестных выполняются граничные условия задачи: на длинных сторонах пластины, соответствующие условиям нагружения (5), на коротких – условиям закрепления (6)

$$\sigma_z = Z_+, \quad \tau = X_+, \quad \text{при } z = 1; \quad \sigma_z = Z_-, \quad \tau = X_- \quad \text{при } z = -1; \quad (5)$$

$$u = 0, \quad w = 0 \quad \text{при } x = 0; 1, \quad \sigma_x = \tau = 0. \quad (6)$$

Условия на продольных сторонах (вдоль оси  $x$ ), выполненные величинами первого приближения, приводят к разрешающим соотношениям для основных неизвестных. Соответствующие константы интегрирования находятся при выполнении условий на коротких сторонах. Полученные зависимости содержат медленно меняющиеся (степенные) и быстро меняющиеся (экспоненциальные и гармонические) компоненты, с помощью которых может быть описано как основное напряженно-деформированное состояние, так и краевой эффект.

Приведено решение для защемленной по краям полосы, полученное вычислением уравнений (4) способом прямых подстановок. На рис. 1, 2 показаны распределения нормальных касательных напряжений для случая

жесткой заделки стальной полосы со следующими исходными данными:  $E=2,1 \cdot 10^{11}$  Па;  $\nu=0,3$ ;  $\alpha=1,2 \cdot 10^{-5}$   $^{\circ}\text{C}^{-1}$ ;  $l=1\text{м}$ ;  $2h=0,1\text{м}$ ; перепад температуры между точками, расположенными на оси  $Ox$  и поверхностью  $\pm^{\circ}\text{C}$  (верхняя сторона нагрета, нижняя охлаждена; температура на оси  $Ox$  считается начальной, не вызывающей температурной деформации).

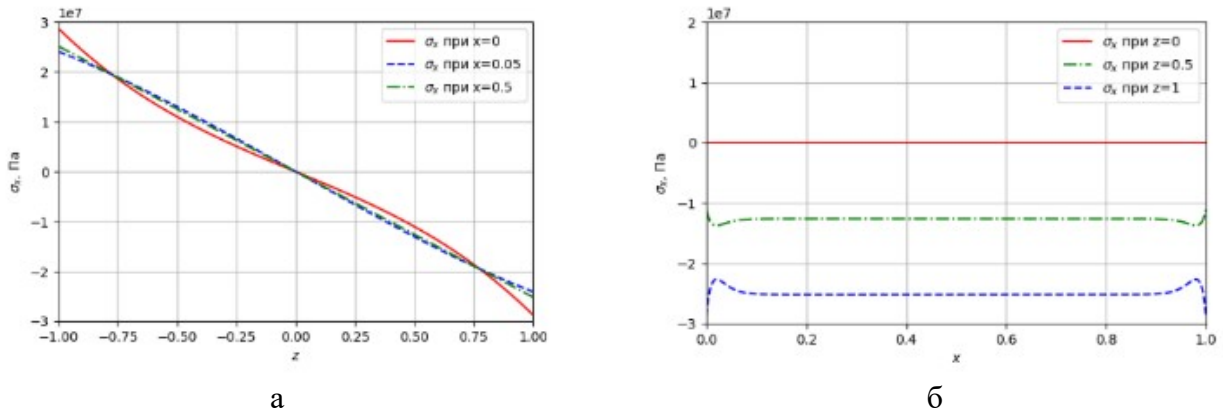


Рис. 1. Компоненты напряжений, вычисленные в первом приближении: а – продольные нормальные напряжения  $\sigma_{x(1)}$  в поперечных сечениях; б – продольные нормальные напряжения  $\sigma_{x(1)}$  в продольных сечениях

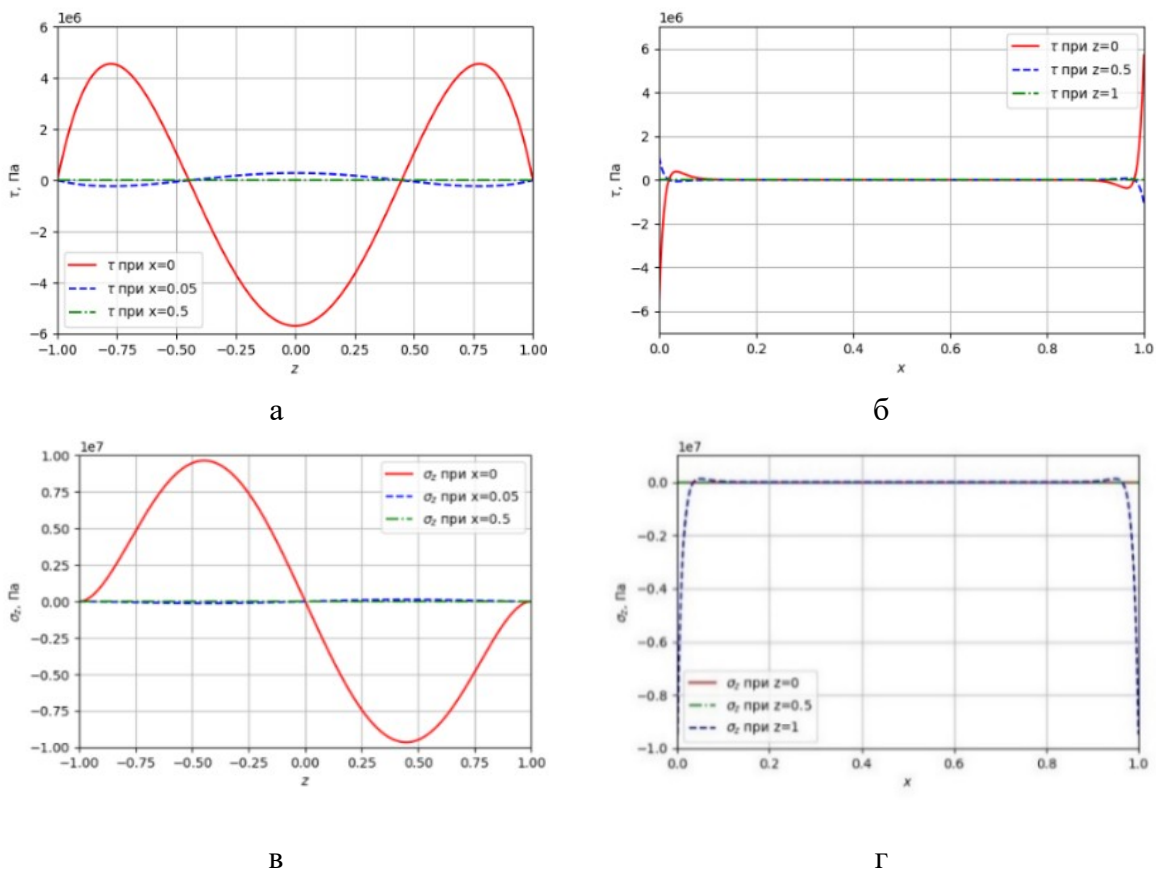


Рис. 2. Компоненты напряжений, вычисленные во втором приближении: а – касательные напряжения  $\tau_{(2)}$  в поперечных сечениях; б – касательные напряжения  $\tau_{(2)}$  в продольных сечениях; в – поперечные нормальные напряжения  $\sigma_{z(2)}$  в поперечных сечениях; г – поперечные нормальные напряжения  $\sigma_{z(2)}$  в продольных сечениях

Используются соотношения (4), дополненные уравнениями для вычислений второго вычисления. Приведен сравнительный анализ результатов вычислений, полученных в первом и втором приближениях с учетом того, что асимптотические оценки везде остаются верными. Наиболее важными в прикладном плане являются результаты, показывающие пространственную локализацию наибольших значений напряжений, в том числе поперечных касательных и нормальных не учитываемых классической теорией, способных отразиться на работоспособности элементов конструкций.

**Во второй главе** исследуется аспект решения задачи о напряженно-деформированном состоянии, связанный со структурой материала конструкции – его слоистостью. Решение рассматривается как включающее медленно и быстро меняющиеся составляющие, отвечающие внутренней области и зонам сингулярностей (типа краевого эффекта). С учетом этого, а также малости параметра тонкостенности, получены разрешающие соотношения для полосы, состоящей из материала, содержащего произвольное количество слоев, асимптотические оценки компонент решения, а также аналитические выражения для них в конечной форме для рассмотренных случаев. Для получения разрешающих соотношений применен аппарат асимптотик.

Рассмотрена длинная прямоугольная полоса, состоящая из произвольного количества слоев. Условия ее нагружения остаются прежними. Слоистая структура характеризуется безразмерными ступенчатыми функциями  $E(z)$  и  $\nu(z)$ . Первая из них принималась равнозначной соотношению  $E(z) \sim \varepsilon^0$ . Следуя подходу, изложенному в первой главе, была построена схема для вычисления последовательных приближений искомых величин задачи, где начальным приближением выбраны неизвестные функции  $w_{(0)}=w_0(x)$ ,  $\tau_{(0)}=\tau_0(x)$ . Приведены интегральные уравнения для вычисления неизвестных функций  $u_0(x)$ ,  $\sigma_{z0}(x)$ ,  $w_0(x)$ ,  $\tau_0(x)$  в виде последовательности, позволяющей найти искомые неизвестные методом последовательных приближений.

Выполнением граничных условий (5) на длинных сторонах полосы/балки величинами нулевого и первого приближений получены дифференциальные уравнения для основных неизвестных задачи  $u_0(x)$ ,  $\sigma_{z0}(x)$ ,  $w_0(x)$ ,  $\tau_0(x)$ , в которых информация о слоистой структуре обобщена в интегральных коэффициентах – аналогах обобщенных коэффициентов жесткости в прикладной теории упругости.

Приведены решения задач для различных случаев числа и расположения слоев пластины. В частности, для двухслойной полосы со слоями одинаковой толщины, (рис. 3) и принятыми параметрами  $E(z) = E_1$  при  $0 \leq z \leq 1$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,

$E(z) = E_2$  при  $0 \leq z \leq -1$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $E_1, E_2 \sim \varepsilon^0$ , разрешающие соотношения имеют вид

$$\begin{aligned}
 & -(2 + \nu)\varepsilon^2\tau_0^{q''} + 2\tau_0^q = 0, \quad (2 + \nu)\varepsilon^3\tau_0^{q'''} - 6\varepsilon\tau_0^{q'} = 0; \\
 & \varepsilon^4 \frac{1}{3}(E_1 + E_2) \left[ 1 - \frac{3(E_1 - E_2)^2}{4(E_1 + E_2)^2} \right] w_0^{s''''} = Z_+ - Z_- + \varepsilon(X_+' + X_-'') - \\
 & \qquad \qquad \qquad - \varepsilon \frac{E_1 - E_2}{2(E_1 + E_2)} (X_+' - X_-''), \\
 & \varepsilon^2 u_0^{s'''} (E_1 + E_2) = \varepsilon^3 w_0^{s''''} \frac{1}{2}(E_1 - E_2) - (X_+ - X_-), \\
 & 2\sigma_{z_0}^s = Z_+ + Z_- + \varepsilon^4 w_0^{s''''} \frac{1}{6}(E_1 - E_2) - \frac{1}{2}\varepsilon^3 u_0^{s'''} (E_1 + E_2), \\
 & 2\tau_0^s = X_+ + X_- - \varepsilon^3 w_0^{s''''} \frac{1}{2}(E_1 + E_2) + \varepsilon^2 u_0^{s''} (E_1 - E_2).
 \end{aligned}$$

Здесь индексом «q» и «s» обозначены быстро и медленно меняющиеся величины соответственно. Из выполнения граничных условий на коротких сторонах полосы (6), с учетом того, что верхний край  $z=1$  несет только равномерно распределенную нагрузку  $Z_+ = p$ , получены решения для медленно меняющихся и быстроменяющихся составляющих.

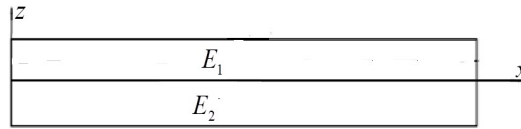


Рис. 3. Полоса из двух слоев одинаковой толщины

Вытекающие из этого асимптотические оценки искомых величин имеют вид

$$w_0^s \sim \varepsilon^{-4} Z, \quad u_0^s \sim \varepsilon w_0^s \wedge \varepsilon^{-3} Z, \quad \sigma_{z_0}^s \sim Z, \quad \tau_0^s \sim \varepsilon^3 w_0^{s''''}, \quad \tau_0^q \sim \varepsilon^{-2} p.$$

Получены аналитически решения, включая константы интегрирования, при различных граничных условиях для пластины, состоящей от двух до четырех слоев.

**В третьей главе** рассматривается задача о воздействии распределенного температурного поля на длинную упругую полосу из многослойного материала. Техника решения аналогична предыдущей задаче. Получение искомых величин в аналитическом виде и их асимптотических оценок компонент основных неизвестных обобщается до случая учета воздействия распределенного поля температуры.

Найдены с точностью до констант интегрирования формы медленно меняющихся (основное решение) и быстро меняющихся (типа краевого эффекта) составляющих основных неизвестных. Последовательно рассмотрены случаи полосы с двумя и более слоев. Константы интегрирования для граничных условий на коротких сторонах полосы вычислены аналитически. В качестве иллюстрации приведены численные результаты.

Так, например, для случая пластины из двух слоев равной толщины под действием заданного линейно температурного поля

$$\alpha T = \begin{cases} \alpha_2 t_2 z, & \text{при } z \geq 0 \\ \alpha_1 t_1 z, & \text{при } z < 0 \end{cases},$$

получены следующие асимптотические оценки для основных неизвестных

$$w_0^s \sim \varepsilon^{-2} \alpha T, u_0^s \sim \varepsilon w_0^s \wedge \varepsilon^{-1} \alpha T, \sigma_{z0}^s \sim \varepsilon^2 \alpha T, \tau_0^s \sim \varepsilon \alpha T.$$

Здесь  $t_1$  и  $t_2$  – температура 1-го и 2-го слоев, причем  $t_1 = \text{const}$ ,  $t_2 = \text{const}$ , коэффициент Пуассона материала слоев считается достаточно близким. В условиях жестко заземленных обоих краев при  $x = 0; 1$  получено решение

$$w_0^s(x) = C_{w1}(x - x^2), C_{w1} = \varepsilon^{-1} \frac{2(1+\nu)\alpha_1 t_1}{4\nu\varepsilon - k(\nu+1)}, \tau_0^s = 0, u_0^s(x) \cong 0, \sigma_{z0}^s(x) \cong 0,$$

$$\tau_0^q = \begin{cases} C_{\tau 0} \exp(-kx/\varepsilon) & \text{при } x \geq 0 \\ C_{\tau 1} \exp(-k(1-x)/\varepsilon) & \text{при } x \leq 1 \end{cases}, k^2 = 2/(2+\nu),$$

$$C_{\tau 0}^+ = -C_{\tau 1}^+ = \frac{E_1 \alpha_1 t_1}{4\nu\varepsilon - k(\nu+1)} \text{ при } z \geq 0, C_{\tau 0}^- = -C_{\tau 1}^- = \frac{E_2 \alpha_1 t_1}{4\nu\varepsilon - k(\nu+1)} \text{ при } z \leq 0.$$

Приведено решение для полосы со следующими исходными данными: Верхний слой – сталь,  $h_1=0,05\text{м}$ ,  $l_1= 1\text{м}$ , модуль упругости  $E^*_1=2,1*10^{11}$  Па,  $E_1=1,3125$ ,  $\alpha_1=1,2*10^{-5}$   $^{\circ}\text{C}^{-1}$ ,  $t_1=32^{\circ}\text{C}$ . Нижний слой – медный сплав,  $h_2=0,05\text{м}$ ,  $l_2= 1\text{м}$ ,  $E^*_2=1,1*10^{11}$  Па,  $E_2=1,3125$ ,  $\alpha_1=1,8*10^{-5}$   $^{\circ}\text{C}^{-1}$ ,  $t_2=18^{\circ}\text{C}$ . Для обоих слоев принимается  $\nu=0,3$ . Ниже приведены графики распределений вычисленных величин рис. 4–6. Температура, при которой тепловые деформации отсутствуют, равна  $14,7^{\circ}\text{C}$ .

Краевой эффект в рассматриваемых зависимостях проявляется через быстро меняющуюся элементную составляющую решения, присутствующую в функции  $\tau_0$ , рис. 4-г (при  $z=0$ ). Условие равенства нулю касательных напряжений на лицевых сторонах для соотношений рассматриваемого приближения выполнено асимптотически – на некотором удалении от «особых» угловых точек, рис. 4-г. Графики нормальных продольных напряжений (рис. 7) и продольных перемещений (рис. 5) соответствуют

общему представлению о поведении балки при изгибе с добавлением к ним краевого эффекта и учетом различия упругих свойств слоев.

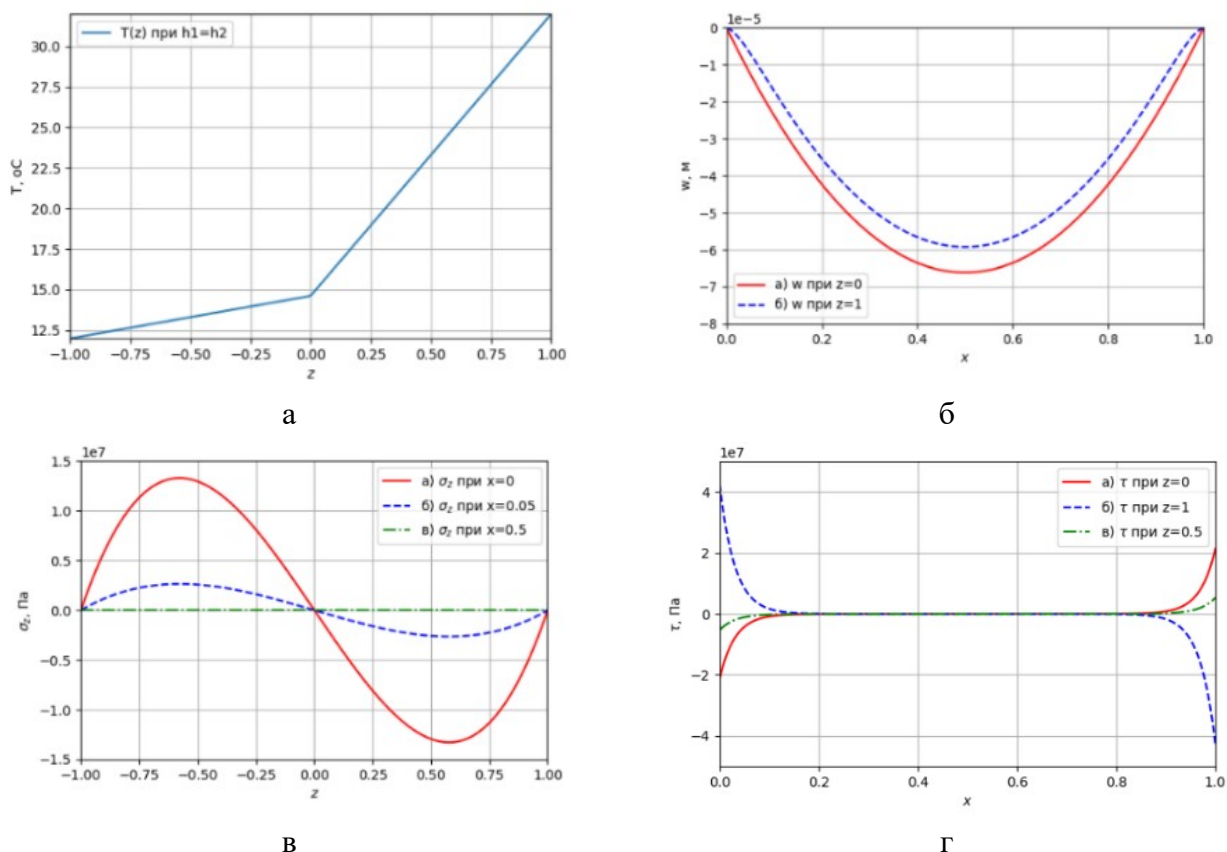


Рис. 4. Распределение искомых функций: а – распределение температуры по безразмерной ширине полосы; б – вертикальные перемещения [м] в продольных сечениях; в – нормальные поперечные напряжения [Па] в поперечных сечениях; г – касательные напряжения [Па] в продольных сечениях при  $z=0, z=1, z=0,5$

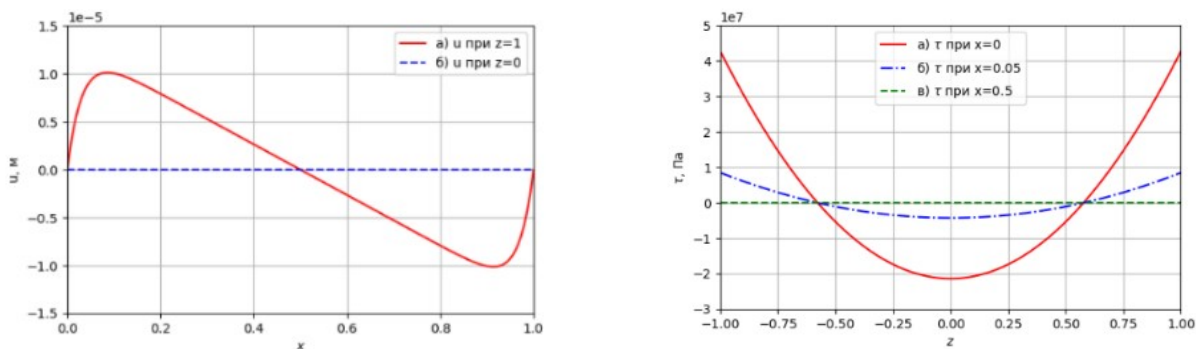


Рис. 5. Продольные перемещения [м] в продольных сечениях

Рис. 6. Касательные напряжения [Па] в поперечных сечениях: а – в левой заделке; б – на удалении 0,05 от нее; в – посередине полосы

Нормальные поперечные напряжения в области общего решения интегрально равны нулю. Условие отсутствия поперечных нормальных напряжений на продольных сторонах полученным решением выполнено точно.

Если материал слоев рассматривать как спроектированный в первую очередь для восприятия продольных усилий, то наиболее опасными можно

считать краевые расслаивающие нормальные напряжения внутри охлажденного слоя и сдвиговые напряжения между слоями у торцов полосы.

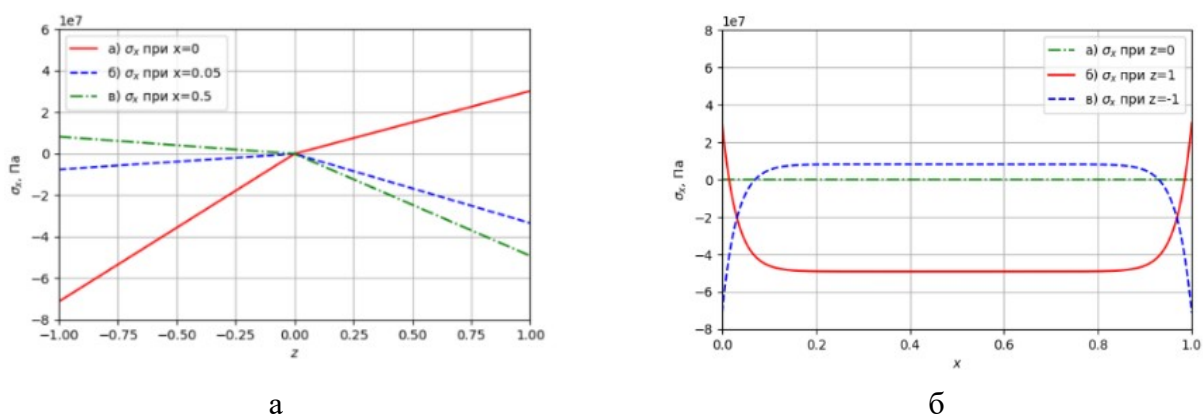


Рис. 7. Распределение напряжений: а – нормальные продольные напряжения [Па] в поперечных сечениях; б – нормальные продольные напряжения [Па] в продольных сечениях

Далее в главе приводятся решения для полосы со слоями, отличными по толщине, количеству слоев и физико-механическим характеристикам. Условия термонагружения и закрепления также разнообразны.

**В четвертой главе** на уравнениях теории упругости исследуется пространственная задача о термомеханическом деформировании прямоугольной пластины, в том числе для случая слоистого материала. Решение строится аналитически, как обобщение развиваемого метода, на составлении последовательности выражений, дающих последовательные приближения для исходных неизвестных задачи.

Рассмотрен случай изотропной пластины при механическом и температурном нагружении. Разрешающие соотношения для основных неизвестных, обладающих меньшей размерностью в сравнении с исходными, получены выполнением граничных условий на внешних лицевых сторонах пластины под действием распределенной нагрузки (7)

$$\begin{aligned} \sigma_z = Z_+(x, y), \quad \tau_{xz} = X_+(x, y), \quad \tau_{yz} = Y_+(x, y), \quad \text{при } z = 1, \\ \sigma_z = Z_-(x, y), \quad \tau_{xz} = X_-(x, y), \quad \tau_{yz} = Y_-(x, y), \quad \text{при } z = -1, \end{aligned} \quad (7)$$

в виде уравнений в частных производных (от двух координат в плоскости пластины) – отдельно для медленно меняющихся и быстро меняющихся (типа краевого эффекта) составляющих. Система разделяется на плоскую и антиплоскую задачи.

Выполнение граничных условий на торцевых поверхностях пластины (8),

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(y, z) = \sigma_x(y, z) = \tau_{xz}(y, z) = 0, \quad \text{при } x = \{0; 1\}, \\ \tau_{xy}(x, z) = \sigma_y(x, z) = \tau_{yz}(x, z) = 0, \quad \text{при } y = \{0; 1\}, \end{aligned} \quad (8)$$

когда поверхностная нагрузка отсутствует,  $\alpha = \text{const}$ , температура изменяется по



толщине пластины линейно, позволило сделать дополнительные асимптотические оценки, способствующие полному решению задачи (включая требуемые константы). После проведенных преобразований получено 6 условий на торцевых поверхностях пластины по  $x=0;1$  и 6 условий по  $y=0;1$ , имеющих аналогичную форму. Решение дает следующий результат

$$w_0(x, y) = \frac{1}{2} \varepsilon^{-2} \alpha t_0 (x - x^2 + y - y^2), \quad \tau_{yz0}(x, y) = 0, \quad \tau_{xz0}(x, y) = 0, \\ \sigma_{z0}(x, y) = 0, \quad v_0(x, y) = 0, \quad u_0(x, y) = 0.$$

Рассмотрена задача температурного нагружения стальной пластины толщиной  $2h=0,1$  м, с размерами  $a=b=1$  м и параметрами  $\alpha=1,2 \cdot 10^{-5} \text{ C}^{-1}$ ,  $\nu=0,3$ . Температурное поле изменяется по толщине линейно, рис 8-а.

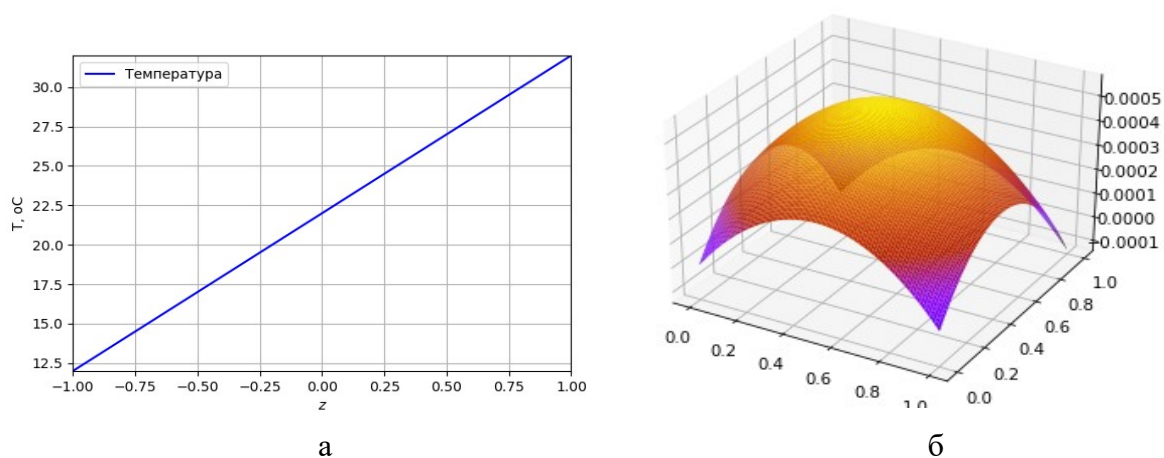


Рис. 8. Решение задачи о температурном нагружении изотропной пластины: а – заданное распределение поля температуры; б – вертикальные перемещения точек срединной поверхности пластины, м, в зависимости от безразмерных координат  $x, y$

Картина прогибов показана на рис. 8-б. В качестве температуры, при которой тепловые деформации отсутствуют, принято значение  $22^\circ\text{C}$  при  $z=0$ . Результат укладывается в классическое представление о температурном короблении свободной незакрепленной пластины.

Приведены решения для пластины из двух и более слоев. Для двухслойной пластины получены разрешающие соотношения, позволяющие определить отдельно некоторые из основных неизвестных (функции, определяющие поперечные перемещения и поперечные нормальные напряжения на равном расстоянии от лицевых поверхностей). Для случая более двух слоев ввиду известной сложности пространственной задачи решение для основных неизвестных в компактной форме получено частично.

**Пятая глава** посвящена апробации построенных расчетных моделей в исследовании технических конструкций из материалов с функционально изменяемым составом на примерах плакированной мембранной панели печи

мусоросжигательной установки и режущей твердосплавной пластины с нанесенным покрытием.

Приведены результаты расчетов температурной деформации металлической панели, выполненной сваркой с последующей наплавкой ее лицевых поверхностей. В качестве основного металла использовалась малоуглеродистая сталь, в качестве наплавки – легированные хромоникелевые сплавы. Образованный таким способом защитный слой является жаропрочным и коррозионностойким к воздействиям среды. Рассматривался температурный режим технологии правки свободного края панели путем равномерного нагрева поверхностного слоя до температуры 250°C. Для оценки температурных деформаций принималась модель в виде двухслойной панели. Форма панели и расчетная модель приведены на рис. 9.

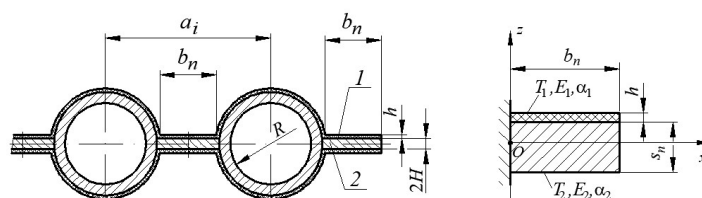


Рис. 9. Плакированная панель. Расчетная схема

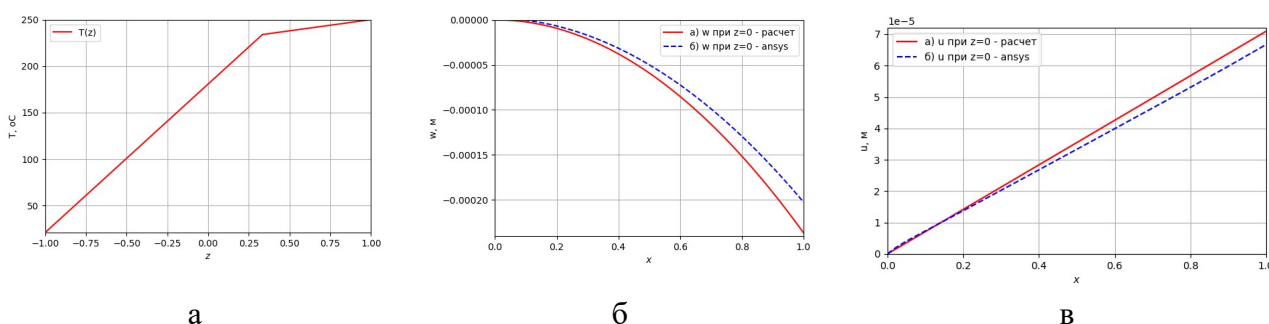


Рис. 10. Оценка температурных деформаций панели: а – распределение температуры (°C) по безразмерной толщине полосы; б – поперечные перемещения [м] при  $z=0$ ; в – продольные перемещения [м] при  $z=0$  (аналитическое решение – красный цвет; численное решение – синий цвет)

В расчетах использовались следующие исходные данные:  $h_n = 3 \cdot 10^{-3}$  м;  $s_n = 6 \cdot 10^{-3}$  м;  $b_n = 3 \cdot 10^{-2}$  м;  $L = 6$  м;  $T_1 = 250^\circ\text{C}$ ;  $T_2 = 21^\circ\text{C}$ ;  $E_1 = 2,0 \cdot 10^6$  МПа;  $E_2 = 2,0 \cdot 10^5$  МПа;  $\alpha_1 = 14,8 \cdot 10^{-6}$  1/град;  $\alpha_2 = 11,3 \cdot 10^{-6}$  1/град. Начальная температура, при которой отсутствует деформация, – считается  $21^\circ\text{C}$ . Распределение продольных и поперечных деформаций приведено на рис. 10.

Проведено исследование термонапряженного состояния режущей пластины с нанесенным покрытием в условиях термомеханического нагружения. Расчетная схема показана на рис. 11. В расчетах использовались следующие исходные данные:  $a = 20$  мм;  $b = 4$  мм;  $h = 4$  мм;  $h_1 = 0,001$  мм;  $t = 0,1$  мм; характеристики материала основного слоя титановольфрамовой

группы:  $E_1 = 4,1 \cdot 10^5$  МПа;  $\alpha_1 = 5,2 \cdot 10^{-6}$  1/град; характеристики материала слоя покрытия системы карбонитридов:  $E_2 = 1,03 \cdot 10^5$  МПа;  $\alpha_2 = 8,5 \cdot 10^{-6}$  1/град.

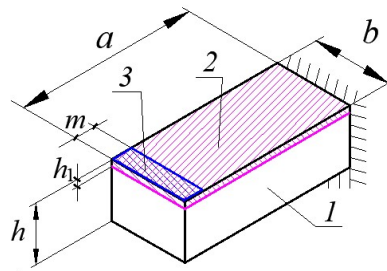


Рис. 11. Режущая вставка: 1 – основа твердосплавной пластины; 2 – покрытие; 3 – область приложения нагрузки

Нагрузка в зоне резания составляет  $P_x = 117,72 H$ ,  $P_z = 98,1 H$ . При этом учитывалось, что зона резания охлаждалась путем применения охлаждающей жидкости. Модель была адаптирована для получения аналитического решения. Нагрузка  $P_x, P_z$ , сконцентрированная в малой области, имеющая характер быстро изменяющейся, перенесена на торцевую поверхность и заменена медленно меняющимися функциями типа полиномов. Правый торец режущего элемента зафиксирован и полагается жестко заземленным. Поле температуры задано функцией:  $T = (275 + T_0) + 5z$  (°C); начальная температура –  $T_0 = 21^\circ\text{C}$ . Способ приложения нагрузки и его преобразование в расчетной модели показаны на рис. 12.

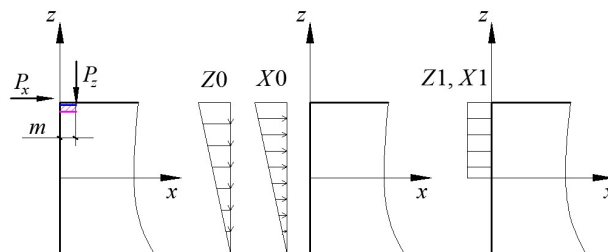


Рис. 12. Преобразование модели приложения нагрузки. Слева – исходная схема. В центре – схема, применяемая в аналитических расчетах. Справа – сопоставимая нагрузка в численном эксперименте

Приведены результаты исследования в сопоставлении с численным решением задачи, реализованным методом МКЭ в программном комплексе ANSYS и программной среде FreeCAD. Некоторые из них приведены на рис. 13. Расчетные модели адекватно характеризуют натурные конструкции, работающие в разных условиях термомеханического нагружения. Геометрические размеры конструкций имеют величины различных порядков. Полученные численные результаты в достаточной степени близки к решениям такого класса задач других авторов.

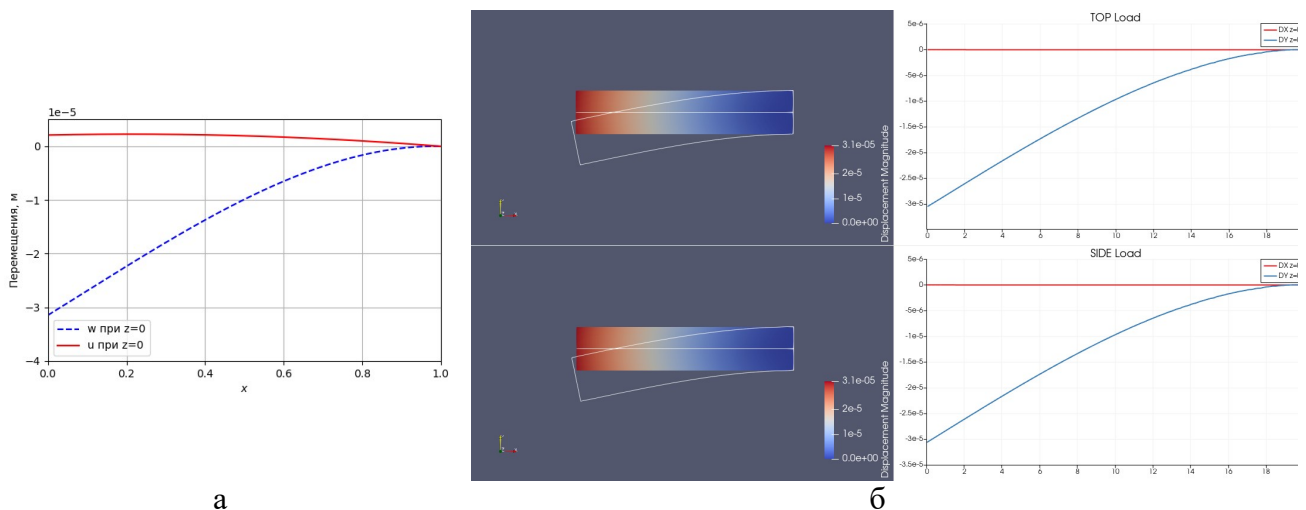


Рис. 13. Перемещения точек полосы в среднем продольном сечении: а – аналитическое решение; б – численное решение, полученное для моделей МКЭ1(вверху) и МКЭ2(внизу) с разными условиями закрепления

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработана методика постановки и решения задач теории упругости для тонкостенных конструкций при заданном распределении температуры, ценность которой заключается в ее аналитичности и новизне, дающих полную картину работы слоистого материала в изделии с учетом температурного воздействия.

2. Дано развитие и расширены границы применения метода Сен-Венана – Пикара – Банаха в интегрировании уравнений теории упругости для тонкостенных моделей слоистой структуры в условиях механического нагружения и действия поля температуры. Единый подход применен последовательно к решению плоской задачи для прямоугольной полосы и прямоугольной пластины в пространственной постановке. Задача, сформулированная для однородного материала, развита на случай произвольного количества слоев.

3. В концепции метода преобразована исходная система уравнений задачи к виду последовательности, в которой найденные величины подставляются в последующие соотношения как известные. Операторы дифференцирования по координате толщины исключаются прямым интегрированием в содержащих их уравнениях. Сведение исходной задачи к задаче меньшей размерности следует из выбора произволов интегрирования (неизвестных функций) как новых основных неизвестных, а части из них – в качестве начального приближения.

4. Построены выражения для компонент НДС, как функций новых основных неизвестных, путем последовательных приближений в виде полиномиальных рядов по поперечной координате и одновременно асимптотических рядов по

малому параметру тонкостенности. Коэффициенты ряда представляют собой дифференциальные выражения от основных неизвестных.

5. Найдены разрешающие соотношения путем выполнения граничных условий на длинных сторонах полосы (а для пластины – на продольных сторонах) на соотношениях нулевого и первого приближения – с использованием аппарата асимптотик, а также на соотношениях первого и второго приближений – путем прямых подстановок. При таком подходе условие сшивки границ слоев отдельно не рассматривается. Информация о геометрии слоев и физических свойствах материала учитывается в интегральных коэффициентах, входящих в разрешающие соотношения. Благодаря структуре уравнений получение решения аналитически (с точностью до констант) для всех компонент оказалось возможно во всех рассмотренных случаях для полосы, а для пластины – при однородном изотропном материале. Во всех этих случаях граничные условия выполнены полностью, включая условия на узких сторонах. При этом константы интегрирования определены аналитически, а для выражений второго приближения — численно.

6. Проведено сопоставление полученных результатов, показывающее, что асимптотический подход даже на начальном приближении способен выявить как медленно меняющиеся компоненты основного решения, так и быстро меняющееся типа краевого эффекта. Путь решения способом прямых подстановок, примененный к соотношениям следующего приближения, позволил формально более точно удовлетворить граничным условиям, что оказало влияние и на внутреннюю область.

7. Обоснована сущность применения отработанных инструментов аппарата асимптотик, направленного на получение аналитического результата, эффективного своей оценочной стороной. Способ прямых подстановок при получении решения (с точностью до констант интегрирования) связан с количественно объемными выкладками, реализуемыми в современных условиях программными средствами символьных вычислений. Достигаемые им количественные поправки на соотношениях следующего приближения также ориентированы на компьютерный счет. Результат, получаемый обоими путями, дает возможность анализа локального влияния компонент напряжений и их сочетаний на составляющие структуры слоистых тонкостенных конструкций.

8. Проведено апробирование разработанных расчетных моделей в исследовании термонапряженного состояния технических тонкостенных конструкций из материалов с функционально изменяемым составом. Полученные результаты аналитически и численно в программном комплексе

ANSYS и программной среде FreeCAD имеют хорошую сходимость. В целом, отклонения не превышают 8%.

## **СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

### **Научные статьи в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях, входящих в Перечень Высшей аттестационной комиссии Российской Федерации**

1. Хоа В.Д., Зверяев Е.М., Пыхтин А.В. Напряженно-деформированное состояние тонкой прямоугольной полосы при температурном воздействии // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2024. – № 134. К1. <https://trudymai.ru/published.php?ID=178462>.

2. Хоа Ван Донг, Во Ань Хиеу. Температурная деформация тонкой упругой пластины // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. – 2024. – № 25. – С. 22-33.

3. Хоа В.Д., Зверяев Е.М. Аналитическое решение для термонапряженной двухслойной упругой полосы // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2023. – № 133. К1. <https://trudymai.ru/published.php?ID=177653>.

4. Хоа Ван Донг, Зверяев Е.М. Температурная деформация тонкой многослойной упругой полосы // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. – 2023. – № 23. – С. 50-60.

### **Публикации в журналах, входящих в мировую базу данных научного цитирования Scopus**

1. Hoa Van Dong, Zveryaev E.M., Pykhtin A.V. Refined equations of thermal stress–Strain state of composite material beam // AIP Conference Proceedings. AIP Publishing, 2023. Vol. 2697, Issue 1. <https://doi.org/10.1063/5.0113313>.

### **Публикации в других изданиях и журналах**

1. Зверяев Е.М., Рынковская М.И., Хоа В.Д. Построение решения уравнений теории упругости слоистой полосы на основе принципа сжатых отображений // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2023. – Т. 19. – № 5. – С. 421-449. К1.

2. Hoa V.D., Zveryaev E.M. Development of solution of thermal stress-strain state problem of a layered strip by SVPB method // Сборник тезисов работ XLIX Международной молодежной научной конференции «Гагаринские чтения» 11-14 апреля, 2023 г., Москва. – М.: Перо, 2023. – С. 896–897.

3. Хоа В.Д., Зверяев Е.М., Пыхтин А.В. Дополненное аналитическое решение задачи о термонапряженно-деформированном состоянии упругой пластины методом SVPB // Сборник тезисов работ 22-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика», 22-24 ноября 2023 г., Москва. – М.: Перо, 2023. – С. 276–277.

4. Хоа В.Д., Зверяев Е.М., Пыхтин А.В. Аналитическое решение для термонапряженной двуслойной упругой полосы // Сборник тезисов работ 21-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика», 21-25 ноября 2022, Москва. – М.: Перо, 2022. – С. 433–434.

5. Хоа В.Д. Зверяев Е.М. Дополненное решение задачи о температурной деформации упругой полосы. Сборник тезисов работ XLVIII Международной молодёжной научной конференции «Гагаринские чтения», 12-15 апреля 2022 г., Москва. – М.: Перо, 2022. – С. 465-466.

6. Хоа В.Д., Зверяев Е.М., Пыхтин А.В. Уточненные уравнения термонапряженно-деформированного состояния балки из композиционного материала // Сборник научных трудов по материалам XXXIII Международной инновационной конференции молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения (МИКМУС-2021), 30 ноября-2 декабря 2021 г., Москва. – М.: Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, 2021. – С. 89-96.

7. Хоа В.Д., Зверяев Е.М., Пыхтин А.В. Пространственная задача о термонапряженно-деформированном состоянии упругой пластины // Сборник тезисов работ 20-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика», 22-26 ноября 2021 г., Москва. – М.: Перо, 2021. – С. 470-471.

8. Зверяев Е.М., Пыхтин А.В., Хоа В.Д. Пространственная задача для прямоугольной упругой пластины // Строительная механика и расчет сооружений. – 2021. – № 4. – С. 2–11.