

УДК 629.7.036.73, 533.932

## **Поток электронов в слабом стационарном магнитное поле**

**Канев С.В.**

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия  
e-mail: k208@mai.ru*

### **Аннотация**

Данная статья описывает особенности прохождения потока электронов через слабое магнитное поле на примере ионных двигателей, стационарных плазменных двигателей (СПД) и двигателей с анодным слоем (ДАС). Аналитическое исследование показало, что в описываемых условиях в плазме формируется дополнительная компонента скорости электронов, пропорциональная векторному магнитному потенциалу. Энергозатраты на прохождение электронов через область с магнитным полем оказываются пропорциональными квадрату векторного магнитного потенциала. Результаты расчетов по полученным формулам хорошо согласуются с экспериментом.

**Ключевые слова:** плазма, магнитное поле, электроракетный двигатель, стационарный плазменный двигатель, двигатель с анодным слоем.

## Введение

В настоящее время для описания прохождения электронов через магнитное поле обычно используют два подхода. Первый – «классический» - предполагает, что в плазме появляется дрейф электронов, перпендикулярный магнитному полю [1]. Взаимодействие дрейфового потока с магнитным полем и создает силу, препятствующую прохождению электронов. Согласно этой теории получающаяся сила торможения должна быть пропорциональна квадрату магнитной индукции. Для компенсации этой силы требуется электрическое поле и/или градиент давления электронного газа. Однако, в ряде устройств (в том числе газоразрядных камерах ионных двигателей, СПД и ДАС) значение энергозатрат на прохождение электронов через магнитное поле получается существенно (в несколько раз) меньше, чем предсказывает «классическая» теория.

Другой широко распространенный подход предполагает линейную зависимость между энергозатратами и индукцией магнитного поля. Первоначально он был предложен Бомом на основании обработки экспериментальных данных [2]. В этой же работе было выдвинуто предположение, объясняющее такую зависимость наличием колебаний в плазме. Но у этого подхода есть два существенных недостатка. Первый (устранимый) недостаток связан с тем, что теория не дает значения коэффициента в получаемых формулах. Приведенное Бомом значение относится к другим условиям. Это не является серьезным препятствием, различные полуэмпирические модели в науке и технике распространены достаточно широко. Если бы данная теория в остальном хорошо согласовалась с экспериментом, то это

не помешало бы использовать свое значение коэффициента для каждого типа устройств. Но есть и другой недостаток (неустранимый): в СПД и ДАС напряжения разряда (в основном и определяемые энергозатратами на прохождение электронами магнитного поля) примерно пропорциональны квадрату магнитной индукции. То есть подбором коэффициента проблема не решается. Такая экспериментальная зависимость также показывает, что «классический» подход имеет основания для более детального изучения применительно к рассматриваемым устройствам.

Анализ параметров газовых разрядов в ионных двигателях, СПД и ДАС выявил две особенности используемых в них магнитных полей. Во-первых, ширина области с магнитным полем сравнима с радиусом Лармора. Во-вторых, в силу разреженности плазмы столкновения электронов с тяжелыми частицами редки, то есть  $\omega\tau \gg 1$ , где  $\omega$  - циклотронная частота,  $\tau$  - среднее время между столкновениями. Из этого следует, что одно из заложенных в основу «классической» модели предположений не выполняется. Кроме того, в рассматриваемых двигателях дрейф электронов замкнут, что позволяет упростить математическую модель. Более детальный анализ механизмов формирования этого потока и позволил получить согласующиеся с экспериментом соотношения.

### **Линейное приближение**

Если глубина проникновения электронов в магнитное поле не превышает радиус Лармора, то в первом приближении можно считать, что изменение скорости определяется тем, насколько сильно успеет магнитное поле отклонить траекторию частицы. Соответствующие формулы можно вывести как из уравнений движения

частицы, так и из МГД-модели плазмы. В силу простоты задачи она, возможно, уже многократно решена. Но автору не удалось найти примеров применения такой постановки задачи применительно к электроракетным двигателям. Поэтому ниже приводятся формула из классического труда Ландау и Лифшица [3] с небольшими корректировками для приведения в систему СИ. Обобщенный импульс ( $P$ ) электрона записывается как

$$P = p - eA,$$

где  $p$  – импульс,  $e$  – элементарный заряд,  $A$  – векторный магнитный потенциал.

Эту величину часто используют для того, чтобы показать насколько изменится импульс частицы при внезапном выключении магнитного поля (эффект Ааронова-Бома). В электроракетных двигателях интерес представляет обратная задача: электрон влетает в магнитное поле. Из условия сохранения обобщенного импульса видно, что создаваемая магнитным полем компонента импульса равна  $eA$  (для краткости в последующем тексте она называется «дрейфом»). Отсюда легко получается линейная зависимость между скоростью дрейфа ( $u_d$ ) и векторным магнитным потенциалом:

$$u_d = \frac{e}{m} A,$$

где  $m$  – масса электрона.

Тут следует заметить, что векторный магнитный потенциал определяется с точностью до градиента скалярной функции. Для электроракетных двигателей

можно считать задачу осесимметричной, а векторный магнитный потенциал имеющим только азимутальную составляющую. Для таких задач подходит широко распространенная кулоновская калибровка векторного магнитного потенциала (дивергенция равна нулю). Она реализована в самых популярных программных пакетах для расчета магнитного поля (ANSYS Maxwell, ELCUT, COMSOL Multiphysics). Для произвольной геометрии с целью упрощения дальнейших выкладок удобнее использовать другую калибровку. Магнитное поле не должно изменять модуль скорости частицы. Следовательно, летящая вдоль линии тока векторного магнитного потенциала частица не должна ускоряться в направлении своего движения. С учетом найденного уравнения для скорости дрейфа получаем условие калибровки векторного магнитного потенциала:

$$(A \cdot \nabla)A = 0$$

Дрейф дает еще одну компоненту силы Лоренца, действующую на каждый электрон. В стационарном случае имеем:

$$eu_d \times B = e \frac{e}{m} A \times B = e \frac{e}{m} A \times \text{rot}A = e \frac{e}{m} \left( \nabla \frac{A^2}{2} - (A \cdot \nabla)A \right) = e \frac{e}{m} \nabla \frac{A^2}{2}$$

Интегрируя это выражение получаем энергозатраты на прохождение электронами магнитного поля.

$$\varepsilon = e \frac{e}{m} \frac{A^2}{2}$$

Можно убедиться, что использовавшаяся калибровка векторного магнитного потенциала дала требуемый результат - полученная энергия соответствует кинетической энергии дрейфа:

$$\varepsilon = \frac{m u_d^2}{2}$$

В ГРК ионных двигателей ее значение достигает порядка десяти электрон-вольт, в СПД – сотни, а в ДАС – тысячи. Для прохождения потока электронов через магнитное поле эти потери энергии необходимо компенсировать из других источников, например, за счет электрического поля или градиента давления, что записывается формулой:

$$\nabla(nkT) = en \nabla \left( \varphi - \frac{e A^2}{m 2} \right),$$

где  $n$  – концентрация, а  $T$  – температура электронов,  $\varphi$  – электрический потенциал.

Это можно интерпретировать как наличие потенциала электромагнитного поля равного:

$$\varphi - \frac{e A^2}{m 2}$$

По аналогии с известной экспоненциальной зависимостью концентрации электронов от электрического потенциала в плазме для случая с магнитным полем шириной менее радиуса Лармора при тех же прочих предположениях получаем формулу:

$$n = n_0 \exp \left( \frac{e \left( \varphi - \frac{e A^2}{m 2} \right)}{kT} \right)$$

В ГРК ионного двигателя изменения электрического потенциала остаются сопоставимыми с теми, что были бы без магнитного поля, но в магнитном поле примерно на порядок падает концентрация электронов. В двигателях с замкнутым дрейфом электронов наоборот: в области с магнитным полем концентрация меняется незначительно, а электрический потенциал меняется примерно в соответствии с величиной энергозатрат на прохождение электронов сквозь магнитное поле.

Последнюю формулу можно также переписать в виде:

$$\frac{e A^2}{m \omega^2} = \varphi - \frac{kT}{e} \ln \left( \frac{n}{n_0} \right)$$

То, что стоит в правой части полученного уравнения, Морозов [4] называл «термализованным потенциалом», который не меняется вдоль магнитной силовой линии. К сожалению, явного выражения для изменения этого потенциала поперек магнитного поля он не приводил. Предлагаемая теория утверждает, что «термализованный потенциал» остается неизменным не вдоль магнитных силовых линий, а вдоль эквипотенциалей векторного магнитного потенциала. Разница между этими понятиями должна существенно сказываться вблизи оси. И хотя в СПД и ДАС ширина канала в несколько раз превышает его расстояние от оси, отличия все же могут сказаться на результатах. В еще большей степени это проявляется в конструкциях ГРК ионных двигателей с расходящимся магнитным полем.

### **Нелинейное приближение**

Описанная выше модель с линейной зависимостью между скоростью дрейфа от векторного магнитного потенциала хорошо описывает процессы в ГРК ионных двигателей, СПД и ДАС (подробнее об этом ниже). Но желательно иметь аналитические оценки ее погрешности и уточнить область применимости. С этой целью была рассмотрена модельная задача с более подробным описанием физических процессов, но позволяющая получить аналитическое решение. Схематично постановка задачи представлена на рис. 1.

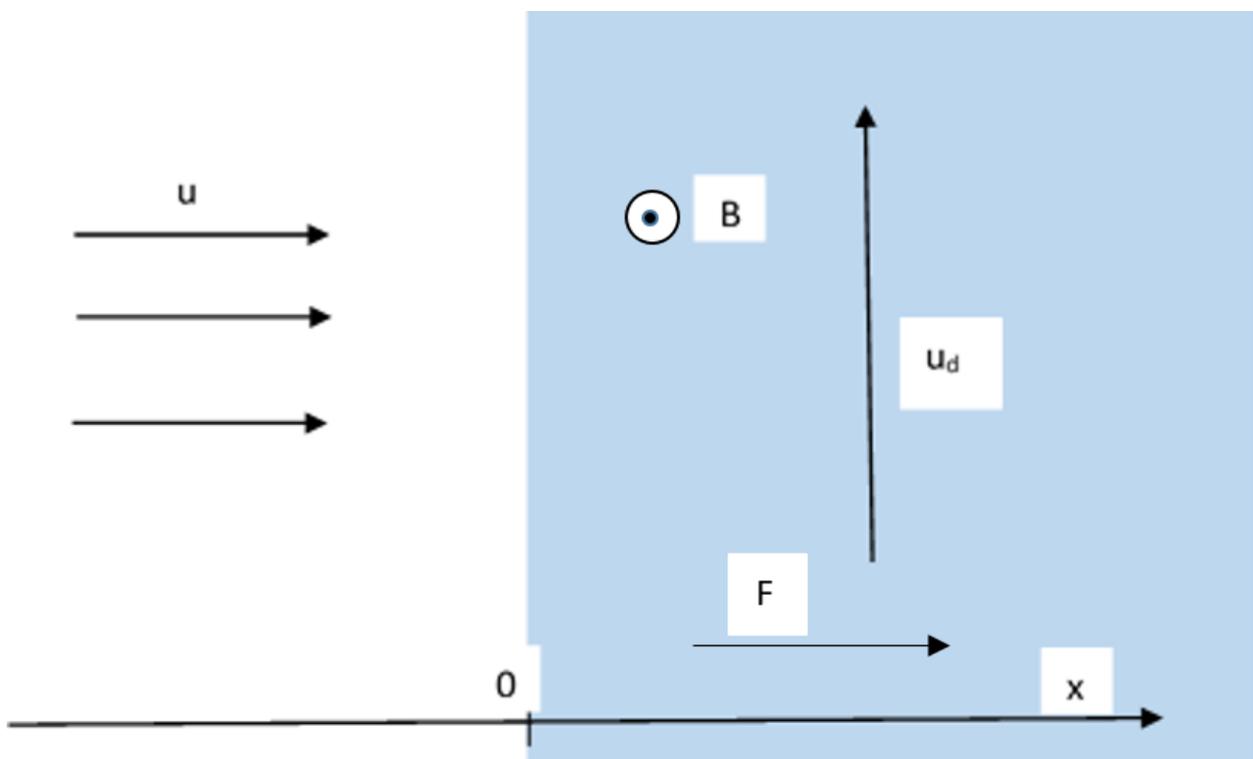


Рис. 1. Постановка модельной задачи

В плазме рассматривается поток электронов входящий со скоростью  $u$  в область магнитного поля индукцией  $B$  и сохраняющий свою скорость. Ионизация не учитывается. Взаимодействие первичного потока электронов с магнитным полем формирует перпендикулярный исходному поток («дрейф»), который аналогичным образом создает силу, направленную против оси  $X$ . Чтобы компенсировать

получающееся из-за этого торможение исходного потока в задачу вводится сила  $F$ . Ее природа не имеет принципиального значения, в двигателях для ее формирования используется электрическое поле. Работу этой силы (потенциал электрического поля) можно использовать для оценки энергозатрат на прохождение потока электронов через рассматриваемую область.

Скорость дрейфа монотонно возрастает с увеличением координаты  $x$  до достижения своего максимального значения. В классической модели максимальная скорость пропорциональна индукции магнитного поля, а скорости потока и дрейфа связаны соотношением:

$$u_{dmax} = u\omega\tau$$

При больших значениях параметра Холла эффективная скорость дрейфа оказывается меньше, перестает зависеть от индукции магнитного поля и начинает определяться колебаниями электрического поля (бомовская проводимость), а соотношение скоростей задается выражением:

$$u_{dmax} = 16u$$

Впрочем, значение коэффициента может быть иным, а более поздние эксперименты [5] дают величины от 13 до 40. Появились также публикации [6], аналитически предсказывающие возможность существования случая, где скорость дрейфа пропорциональна корню из магнитной индукции. Однако, данных об экспериментальном подтверждении подобного эффекта пока не поступало.

Во всех случаях скорость дрейфа выходит на свое максимальное значение на расстоянии порядка радиуса Лармора, посчитанного по этой максимальной скорости. Уравнение сохранения импульса электронов приводится для дрейфовой компоненты к следующему виду:

$$\frac{du_d}{dx} = \frac{eB}{m} \left( 1 - \frac{u_d}{u_{dmax}} \right)$$

В результате решения этого уравнения получаем нелинейную зависимость скорости дрейфа от векторного магнитного потенциала:

$$u_d = u_{dmax} \left( 1 - \exp \left( - \frac{eA}{mu_{dmax}} \right) \right)$$

Энергозатраты на продвижение электрона при этом составят

$$\varepsilon = \int_0^x eBu_d dx = eAu_{dmax} + mu_{dmax}^2 \left( \exp \left( - \frac{eA}{mu_{dmax}} \right) - 1 \right)$$

Обычно, при описании проводимости плазмы учитывают только первый член, но при моделировании разряда электроракетных двигателей необходимо учитывать все. Полученная формула позволяет оценить погрешность описанной выше линейной модели. Сравнение результатов обеих моделей в безразмерном виде приведено на рис. 2. Так как в модельной задаче индукция магнитного поля принималась постоянной, то отложенный по горизонтальной оси безразмерный векторный магнитный потенциал численно равен отношению координаты  $x$  к радиусу Лармора. Из рисунка видно, что для расстояний меньших радиуса Лармора оба решения дают очень близкие результаты. При значении безразмерного

векторного магнитного потенциала равного 1 погрешность линейной модели составляет примерно 26%, что вполне приемлемо для ряда задач.

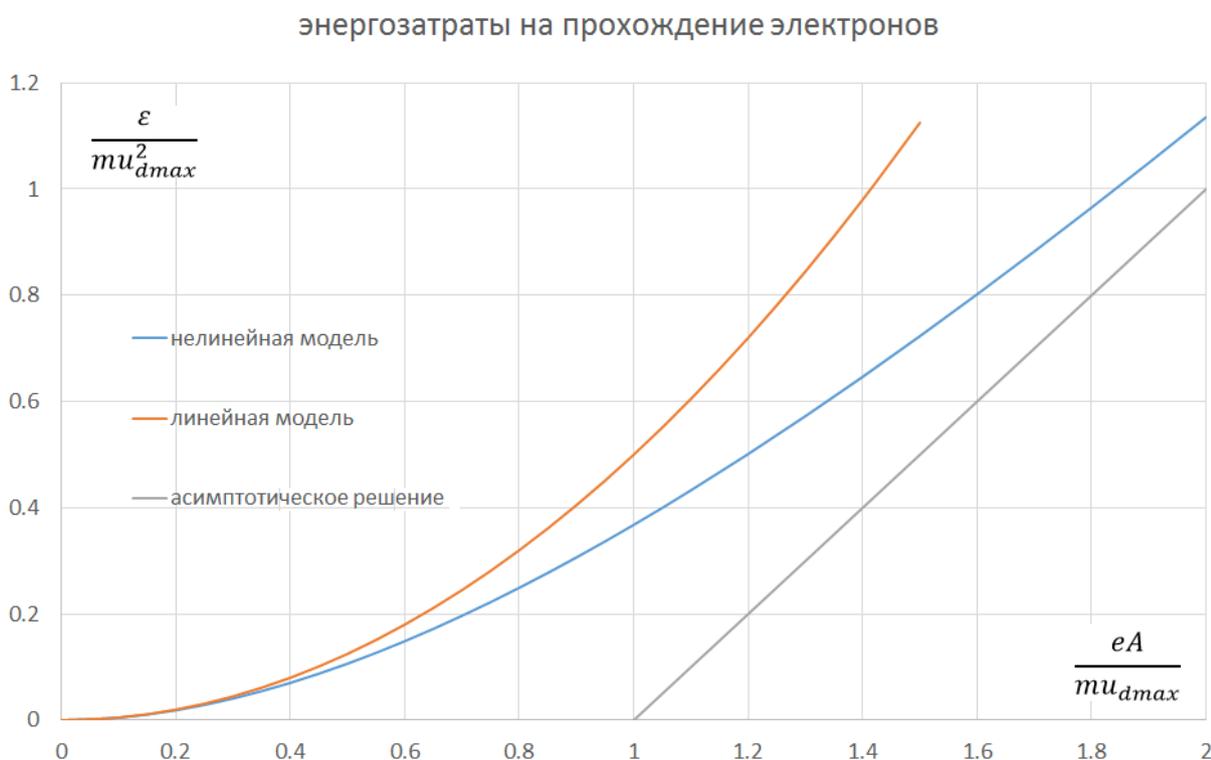


Рис. 2. Сравнение моделей энергозатрат на прохождение электронов через магнитное поле.

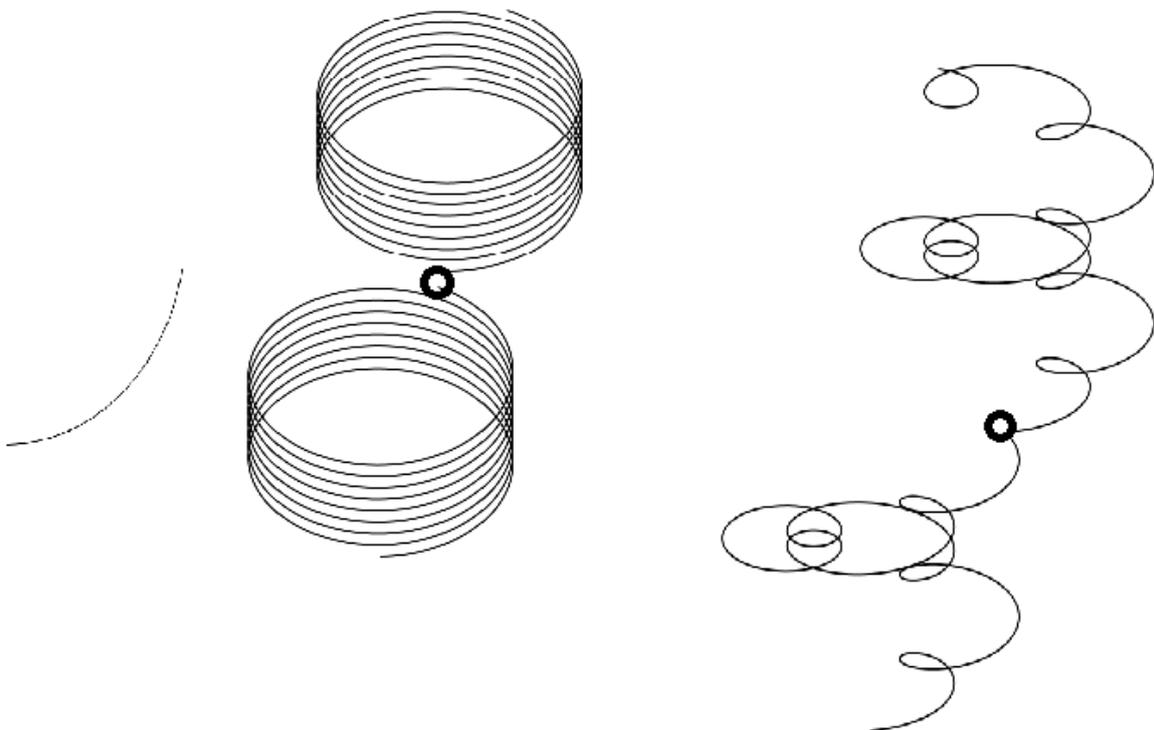
На рис.2 также показано асимптотическое решение для нелинейной модели для случая  $x \rightarrow \infty$ . При этом получается классическое решение сдвинутое на радиус Лармора (то есть на расстояние, на котором формируется дрейфовый поток). Как видно из рисунка линейная модель представляет собой первый член в разложении более точного решения в ряд Тейлора.

Из использованного на рис. 2 обезразмеривания также можно получить иную формулировку одного из ограничений применимости линейной модели. Ранее использовалось предположение, что ширина области с магнитным полем сравнима с

радиусом Лармора. В реальных устройствах магнитное поле меняется по ходу потока электронов, при этом меняется и радиус Лармора. Поэтому соответствующее предположение можно переформулировать как:

$$\frac{eA}{m u_{dmax}} \leq 1$$

Как это часто бывает, предложенные модели могут иметь различные интерпретации. Поэтому для наглядности ниже представлены рисунки, поясняющие основные механизмы движения электронов в магнитном поле. На рис. 3 показаны траектории движения электрона для рассматриваемой модели, а также классической и боровской моделей проводимости.



а

б

в

Рис. 3. Траектории движения электронов для разных типов проводимости: а – ширина области магнитного поля меньше радиуса Лармора, б – классическая проводимость, в – бомовская проводимость.

Если ширина области с магнитным полем меньше радиуса Лармора, то электроны преодолевают ее лишь искривив свою траекторию. Столкновения при этом не играют существенной роли. В классической модели проводимости скорость дрейфа пропорциональна индукции магнитного поля, а диффузия происходит за счет столкновения с другими частицами. В работе Бома [2] кинетическая энергия дрейфа примерно соответствовала энергии электронов, то есть увеличение скорости дрейфа при усилении магнитного поля было возможно только при увеличении энергии электронов, что в ряде случаев невозможно. В результате скорость дрейфа ограничена (не зависит от магнитного поля), а проводимость обратна пропорциональна индукции магнитного поля. Бом в своей статье пишет об исследовании ряда возможных причин отличия экспериментальной проводимости от классической и останавливается на предположении о колебаниях. Колебания увеличивают величину сдвига траектории при соударении с тяжелой частицей, что и показано на рис. 3в.

### **Проверка адекватности модели**

К сожалению, на момент написания данной работы не удалось провести сравнение предложенной теории с экспериментом в достаточно чистой постановке задачи. Тем не менее, ряд косвенных сопоставлений для линейной модели выполнить удалось. Так, например, в работе [7] приводится эмпирическая формула,

связывающая ширину зоны распыления в СПД с напряжением разряда и индукцией магнитного поля на срединной поверхности ускорительного канала:

$$l_c = 5 \sqrt{\frac{mU_p}{eB_{max}^2}},$$

где  $U_p$  – напряжение разряда.

Выразив из нее напряжение разряда получаем

$$U_p = \frac{e}{m} \left( \frac{l_c B_{max}}{5} \right)^2$$

Считая напряжение разряда примерно равным  $\varepsilon/e$  получаем, что данные экспериментов согласуются с предложенной линейной моделью в предположении

$$A_{max} \approx 0.28 l_c B_{max}$$

В работе [8] приводится оценка толщины слоя ионизации:

$$l_a = \sqrt{\frac{mU_p \nu_e}{eB^2 \nu_i}},$$

где  $\nu_e$  – частота упругих соударений электронов с тяжелыми частицами,  $\nu_i$  – частота приводящих к ионизации столкновений.

Выражая отсюда напряжение разряда получаем:

$$U_p = \frac{e}{m} (l_a B)^2 \frac{\nu_i}{\nu_e}$$

что согласуется с линейной теорией в предположении:

$$A_{max} \approx l_a B \sqrt{2 \frac{\nu_i}{\nu_e}}$$

В той же работе отмечалось что исследование стоящего под корнем соотношение частоты приводящих к ионизации столкновений к частоте столкновений электронов с атомами зависит от многих факторов и «является сложной и незавершенной до настоящего времени» задачей. «Можно лишь предположить, что она не зависит или слабо зависит от масштаба двигателя».

Полученные формулы позволяют создавать не требовательные к вычислительным ресурсам математические модели плазмы газового разряда в электроракетных двигателях. Это позволит в значительной степени численно решать те задачи, которые ранее решались экспериментально, например [9].

### **Выводы**

Предложена простая модель, позволяющая оценивать влияние слабого стационарного магнитного поля на поток электронов. Проведена оценка погрешности предлагаемой модели и определена область ее применимости.

### **Библиографический список**

1. Райзер Ю.П. Физика газового разряда. - М.: Наука, 1992. - 536 с.
2. Bohm, D. The characteristics of electrical discharges in magnetic fields, A. Guthrie and R. K. Wakerling (eds.), New York, McGraw-Hill, 1949, 389 p.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Том 2. - М.: Наука, 1988. - 510 с.
4. Морозов А.И. Введение в плазмодинамику. – М.: Физматлит, 2006. - 572 с.

5. Lee, Kwan Chul (2015). Analysis of Bohm Diffusions Based on the Ion-Neutral Collisions // IEEE Transactions on Plasma Science. 2015. no. 43(2), pp. 494-500.
6. Hsu Jang-Yu, Wu Kaibang, Agarwal Sujeet Kumar, Ryu Chang-Mo. The  $B^{-3/2}$  diffusion in magnetized plasma // Physics of Plasmas, 2013, no. 20(6), 9 p.
7. Хартов С.А. Расчет элементов двигательной установки со стационарным плазменным двигателем. - М.: Изд-во МАИ, 2009. - 85 с.
8. Архипов А.С., Ким В.П., Сидоренко Е.К. Стационарные плазменные двигатели Морозова. - М.: Изд-во МАИ, 2012. - 292 с.
9. Потапенко М.Ю. Разработка и исследование стационарного плазменного двигателя с полым магнитным анодом малой мощности // Труды МАИ. 2014. №74.  
URL: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=49261>