

УДК 539.3

Методика приближенной оценки напряжений в толстостенной осесимметричной композитной конструкции

Бабайцев А.В.^{1*}, Бурцев А.Ю.², Рабинский Л.Н.¹, Соляев Ю.О.^{3,1}

¹*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия*

²*Тульский государственный университет, проспект Ленина, 92, 300012, Тула, Россия*

³*Институт прикладной механики Российской академии наук, ИПРИМ РАН, Ленинский проспект, 32А, Москва, 117334, Россия*

**e-mail: Ar77eny@gmail.com*

Статья поступила 13.08.2019

Аннотация

В работе представлен вариант методики проведения прочностного расчета для толстостенной осесимметричной конструкции, состоящей из металлического сердечника (армирующего компонента) и внешней толстостенной оболочки, выполняемой из композиционного материала. Конструкция нагружается распределенной вдоль части ее длины погонной нагрузкой, связанной с действующим внешним давлением, и инерционными силами, связанными с возникающим ускорением. Методика основана на одномерной модели составного стержня переменного сечения, приближенно учитывающей поперечные деформации, что необходимо при анализе толстостенной конструкции, работающей под давлением. В предложенном подходе геометрия изделия разбивается на участки и аппроксимируется фрагментами в форме усеченных конусов и, в частном случае,

цилиндров. В результате расчетов определяется распределение продольных нормальных напряжений растяжения/сжатия в оболочке и в армирующем стержне, а также оцениваются касательные напряжения на границе их контакта.

Ключевые слова: композитные конструкции, стержень переменного сечения, проектировочный расчет, толстостенный композит.

1. Введение

Проектировочные расчеты, основанные на одномерных приближенных моделях стержней и балок переменного сечения, могут эффективно использоваться при разработке осесимметричных конструкций большого удлинения. Подобные одномерные модели применяются к примеру, при проектировании колонн и опор, в том числе композитных, ракет, труб и т.д. [1-5]. Такие модели позволяют в первом приближении оценить прочность конструкции и определить условия нагружения ее элементов (отсеков, участков) для проведения дальнейших уточненных численных расчетов. Кроме этого, упрощенные расчеты могут быть полезны для выбора основных геометрических параметров, компоновки и конструктивно-силовой схемы проектируемых изделий. Естественно, что одномерные расчеты не являются достаточными, даже при предварительном проектировании, но их можно считать базовыми, сводящими рассматриваемую проблему к задаче, решаемой наиболее простыми методами.

В настоящей работе рассматривается задача проектирования композитного осесимметричного изделия, состоящего из расположенного в центральной части стального цилиндрического стержня (армирующего компонента) и окружающей его толстостенной оболочки, выполняемой из углепластика и имеющей внешний диаметр, изменяющийся вдоль оси изделия (рис. 1).[6] Интенсивное давление, действующее на внешнюю поверхность оболочки в задней части конструкции, приводит к большим ускорениям в осевом направлении и, соответственно, к большим значениям инерционных нагрузок [1,2]. В результате, конструкция работает в условиях сложно напряженного состояния (всестороннее обжатие в задней части, продольное сжатие в передней части, сдвиг на границе контакта оболочки со стержнем и в области изменения размеров поперечного сечения оболочки и т.д. [6-14]), которое, однако, в первом приближении может быть сведено к простому одномерному случаю нагружения составного стержня переменного сечения. Задачей расчета в такой упрощенной модели является определение напряжений растяжения/сжатия в оболочке и в стержне и определение касательных напряжений в зоне их контакта. Для оценки прочности и целостности конструкции, найденные напряжения сравниваются, соответственно, с пределом прочности материала оболочки, пределом текучести металлического стержня и пределом прочности на срез (смятие) их контактного соединения.

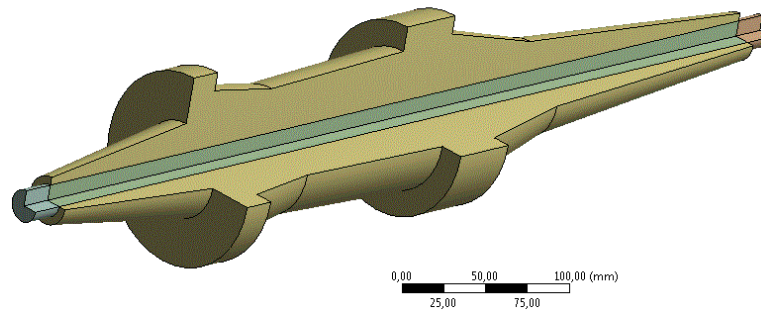


Рис. 1. Составная осесимметричная композитная конструкция, состоящая из внутреннего сердечника (армирующего компонента) и внешней толстостенной оболочки переменного сечения

Особенностью проводимых расчетов является относительно малое удлинение рассматриваемых изделий и наличие существенного внешнего давления. В этом случае пренебрежение поперечными деформациями композитной оболочки в радиальном и окружном направлениях, приводит к значительным погрешностям расчетов. Для учета этих деформаций используется методика, в которой в первом приближении используется предположение, что радиальные и окружные нормальные напряжения равны заданному внешнему давлению. Методика реализована на случай произвольного числа последовательно-расположенных отсеков заданной конической или цилиндрической формы, для которых решение строится аналитически с учетом условий сопряжения на границах их контакта. Оценка точности предложенной методики проектировочных расчетов проверяется

на примере типовой геометрии рассматриваемого изделия, для которой проводятся уточненные численные расчеты методом конечных элементов.

Отметим, что в применяемой модели присутствуют только продольные характеристики материалов изделия, поэтому, в общем случае методика оказывается справедливой, как для изотропных, так и для анизотропных композитных материалов оболочки. Технология изготовления оболочки также оказывается несущественной, и она может быть выполнена, например, в виде толстостенного слоистого композита или намоткой и т.д.[16-20]

2. Материалы и методы

Рассматриваем осесимметричную составную конструкцию в виде цилиндрического стального стержня и внешней композитной оболочки переменного сечения (Рис. 1). Конструкция нагружается внешним давлением p , действующим на поверхности задней конической части оболочки (Рис. 3а). Давление приводит к всестороннему обжатию задней части изделия, а его проекция на центральную ось приводит к возникновению ускорения конструкции в продольном направлении a и соответствующим инерционным нагрузкам. При условии, что стержень может быть незначительно длиннее оболочки это можно учесть путем присоединения на переднем и заднем концах стержня массы m_0 и m_1 .

2.1. Ускорение изделия и средние касательные напряжения на резьбе

Во-первых, определим ускорение изделия при заданной величине давления. Зная массу изделия целиком m (оболочка, стержень и при наличии присоединенные

массы) и площадь максимального поперечного сечения задней части изделия S , на которую действует давление, находим:

$$a = pS/m \quad (1)$$

Далее в «нулевом» приближении оценим перерезывающее погонное усилие, действующие в направлении оси стержня в области резьбового контакта с оболочкой. Заменяем воздействие оболочки на стержень распределенным погонным усилием \bar{T} , постоянным по величине (это главное упрощение на данном этапе расчета «нулевого» приближения) и действующим в продольном направлении. Записывая уравнение равновесия для стержня, как твердого тела, найдем:

$$m_c a = pS_c + \bar{T} L,$$

где m_c – масса стержня, $S_c = \pi d_c^2 / 4$ – площадь поперечного сечения стержня, ρ_c – плотность материала стержня, L – длина стержня и $d_c = 2R_c$ – диаметр стержня.

Тогда перерезывающее погонное усилие определяется из следующего выражения:

$$\bar{T} = (m_c a - pS_c) / L$$

Средние касательные напряжения на резьбе определяются из соотношения:

$$\bar{\tau} = \frac{\bar{T}}{2\pi R_c} \quad (2)$$

2.2. Модель составного композитного стержня

Для построения решения в первом приближении будем строить решение в одномерной постановке, рассматривая равновесие изделия только в направлении его

оси симметрии. Для этого все действующие нагрузки интегрируем по сечению и по внешней поверхности изделия и сносим их на центральную ось. В первом приближении предполагаем, что все напряжения постоянны по сечению оболочки и стержня. Такой подход позволяет оценить нормальные напряжения растяжения/сжатия во внешней оболочке $\sigma_0(z)$ и в стержне $\sigma_c(z)$, а также касательные напряжения на границе их контакта $\tau(z)$. Внешний контур реального изделия приближаем кусочно линейными участками, то есть осесимметричная геометрия оболочки аппроксимируется участками в виде усеченных конусов и цилиндров. Стержень моделируется в виде цилиндра. Предполагается идеальный контакт между стержнем и оболочкой.

Для построения решения рассмотрим отсеченную часть фрагмента изделия, представленную на Рис. 2. На этом рисунке показаны внешние нагрузки и внутренние напряжения, действующие на вырезанный фрагмент оболочки и стержня (показаны штриховкой). Запишем уравнения равновесия и условия совместности деформаций для i -го фрагмента изделия, в пределах которого осевая координата изменяется в диапазоне $z_{i-1} \leq z \leq z_i$. Получаем следующие соотношения:

1) Условие равновесия элемента внешней оболочки:

$$\sigma_0(z)S_i(z) = \sigma_0(z_{i-1})S_i(z_{i-1}) + \rho_0 a V_i(z) + T(z) - p(S_i(z) - S_i(z_{i-1})), \quad (3)$$

где $S_i(z) = \pi(R_i^2(z) - R_p^2)$ – площадь поперечного сечения рассматриваемого i -го элемента оболочки в данной точке z , $R_i(z) = R_i(0) + (z - z_{i-1}) \tan \alpha_i$ – радиус поперечного сечения фрагмента в данной точке, $R_i(0)$ – радиус начального сечения фрагмента, α_i – угол конусности фрагмента (для цилиндрических фрагментов $\alpha_i = 0$), $\sigma_0(z)$ –

напряжения в текущем сечении фрагмента оболочки, $\sigma_0(z_{i-1})$ – напряжения, действующие на левой границе рассматриваемого фрагмента оболочки (в начальной точке $z = 0$ эти напряжения равны действующему давлению p , а далее определяются на основании решения на предыдущем участке изделия),

$V_i(z) = \frac{1}{3} \pi (z - z_{i-1}) (R_i^2(0) + R_i(0)R_i(z) + R_i^2(z)) - V_c(z)$ – объем фрагмента оболочки,

$V_c(z) = \pi R_p^2 (z - z_{i-1})$ – объем фрагмента стержня, $T(z) = 2\pi R_c \int_{z_{i-1}}^z \tau(x) dx$ –

равнодействующая касательных напряжений, действующих на контакте фрагмента оболочки и стержня.

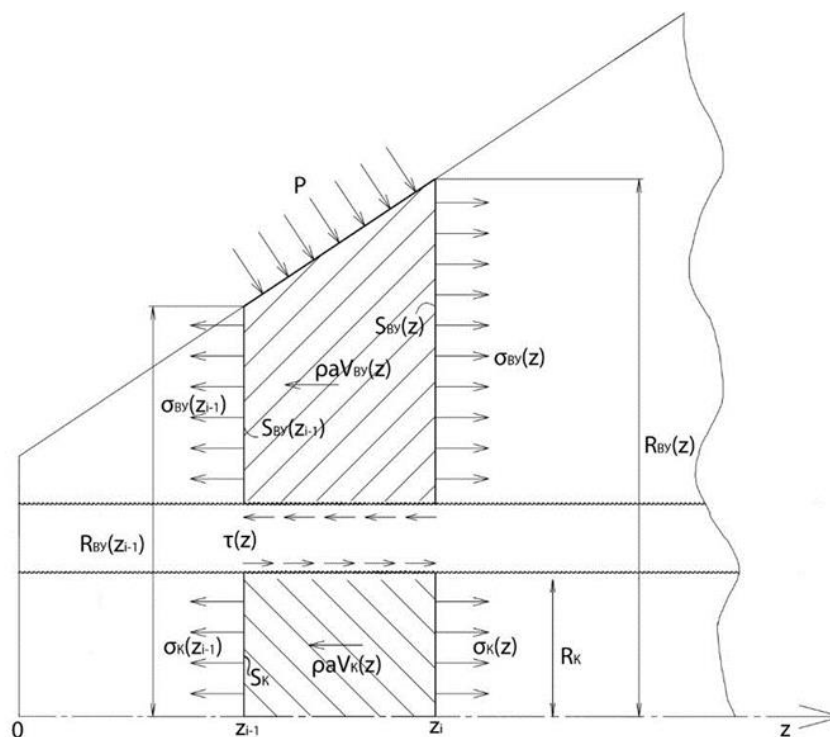


Рис. 2. Фрагмент стержня и внешней оболочки, и действующие на них нагрузки

2) Условие равновесия элемента стержня:

$$\sigma_c(z)S_c = \sigma_c(z_{i-1})S_c + \rho_c a V_c(z) - T(z), \quad (4)$$

где $S_c = \pi R_c^2$ – площадь сечения стержня; и в начальной точке напряжения вычисляются с учетом действующего давления и присоединенной массы:

$$\sigma_c(0) = \frac{m_0 a}{S_c} - p$$

3) Условия совместности деформаций с приближенным учетом действующего давления записываются следующим образом:

$$\sigma_0(z) = \frac{E_0}{E_c} (\sigma_c(z) + 2\nu_c p) - 2\nu_0 p, \quad (5)$$

где E_c , E_0 , ν_c , ν_0 – модули упругости и коэффициенты Пуассона материалов стержня и оболочки, соответственно.

Для фрагментов оболочки, на которых не действует давление, условие (3) сводится к более простому соотношению $E_c \sigma_0 = E_0 \sigma_c$, которое определяет равенство продольных деформаций в стержней и в оболочке. Учет обжатия конструкции в (5), фактически, сводится к использованию трехмерного закона Гука и предположению, что окружные и радиальные напряжения примерно равны заданному давлению, что вообще говоря является сильным упрощением из-за возникающей концентрации напряжений [6].

Из записанных трех уравнений (3)-(5) определяются три неизвестные функции: $\sigma_0(z)$, $\sigma_c(z)$, $T(z)$. Касательные напряжения на контакте стержня и

оболочки определяются из соотношения: $\tau(z) = \frac{d}{dz} \left(\int_{z_{i-1}}^z \tau(x) dx \right) = \frac{1}{2\pi R_c} \frac{dT(z)}{dz}$. Эти

напряжения, в отличие от решения «нулевого» приближения (2), оказываются

переменными по длине стержня. Найденные значения напряжений сравниваются с соответствующими предельно допустимыми напряжениями для материалов оболочки, стержня и их резьбового соединения.

3. Результаты и обсуждение

3.1. Исходные данные.

Рассматриваем пример геометрии изделия, представленный на Рис. 3. Общая длина изделия составляет 580 мм. Максимальный диаметр поперечного сечения составляет $d_{max} = 120$ мм, а его площадь, соответственно, $S = \frac{\pi \cdot d_{max}^2}{4}$. Диаметр армирующего стержня 20 мм. Действующее давление $p = 350$ МПа. Материал стержня – сталь со свойствами $\rho_c = 7850$ кг/м³, $E_c = 200$ ГПа, $\nu_c = 0.3$. Материал композитной оболочки – слоистый углепластик с плотностью $\rho_o = 1500$ кг/м³ и с характеристиками в направлении оси изделия $E_o = 60$ ГПа, $\nu_o = 0.35$. Выступающие части стержня моделируются в виде присоединённых масс. Присоединенные массы на концах стержня равны $m = 0,9 \cdot 2 = 1,8$ кг. Полная масса конструкции составляет $m = 7.3$ кг.

На основании (1) находим ускорение изделия для заданных условий задачи $a = 5.423$ м/с². Это ускорение является достаточно большим, однако, оно меньше скорости звука в рассматриваемых материалах, поэтому в первом приближении все расчеты, включая численные, могут проводиться в квази-статической постановке. Среднее касательное напряжение на срез определяется из (2). Таким образом, из простого проектировочного расчета «нулевого» приближения следует, что запас прочности соединения в заданных условиях нагружения может быть достаточно

большим, в том случае, если за счет оптимального выбора геометрии изделия удастся реализовать примерно постоянное усилие сдвига вдоль длины стержня. Нарушение прочности может произойти только вследствие неравномерного распределения усилия сдвига, то есть наличия концентрации напряжений сдвига, которая может быть связана, например, с резким изменением размеров поперечного сечения внешней толстостенной оболочки.

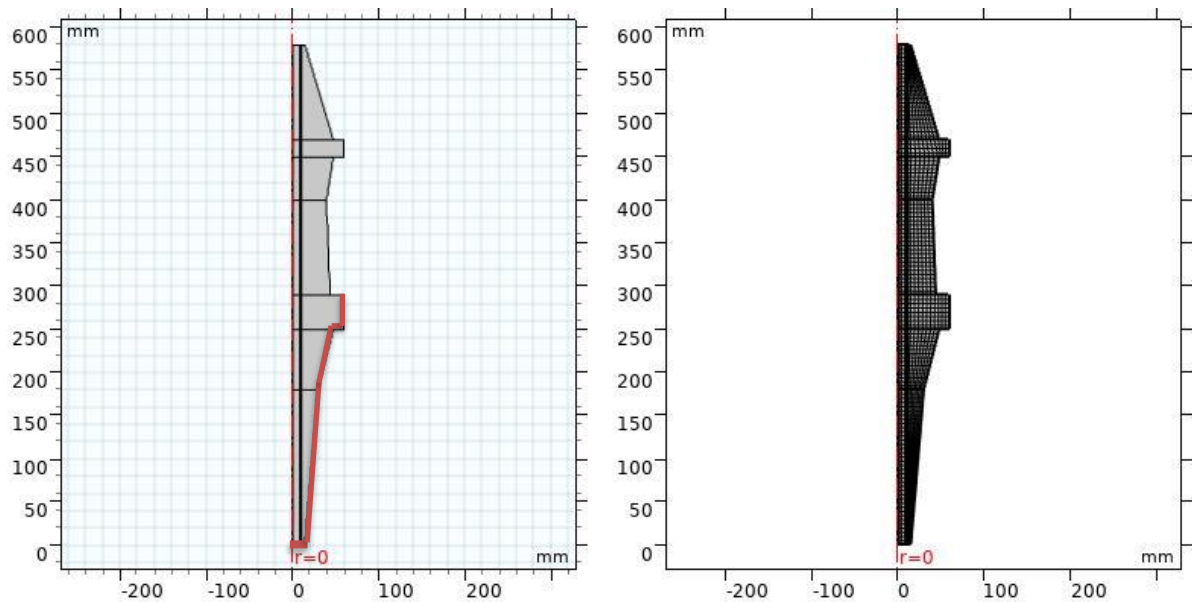


Рис. 3. Пример рассматриваемой геометрии изделия и его конечно-элементная модель. Цветом показана зона действия внешнего давления.

3.2. Численное моделирование

Для проверки результатов проектировочных расчетов проводится численное моделирование методом конечных элементов с использованием ПО COMSOL Multiphysics, учитывая осевую симметрию задачи. Пример конечно-элементной модели изделия представлен на Рис. 3. Средний размер элементов составляет ~1 мм, общее число элементов в модели ~28296. Давление задается в области задней части изделия (на границе, выделенной цветом, на рис. 3) и уравнивается инерционными силами, связанными с ускорением в продольном направлении изделия. Резьбовое соединение не прорисовывается – задается идеальный контакт между стержнем и оболочкой по гладкой границе, удаленной от центральной оси на расстояние, равное радиусу стержня. Расчет проводится в линейно упругой постановке в предположении малых деформаций, в квази-статическом приближении. Результаты численного моделирования представлены на Рис. 4. Здесь показано распределение нормальных напряжений в продольном направлении и касательных напряжений в плоскости сечения модели (zr).

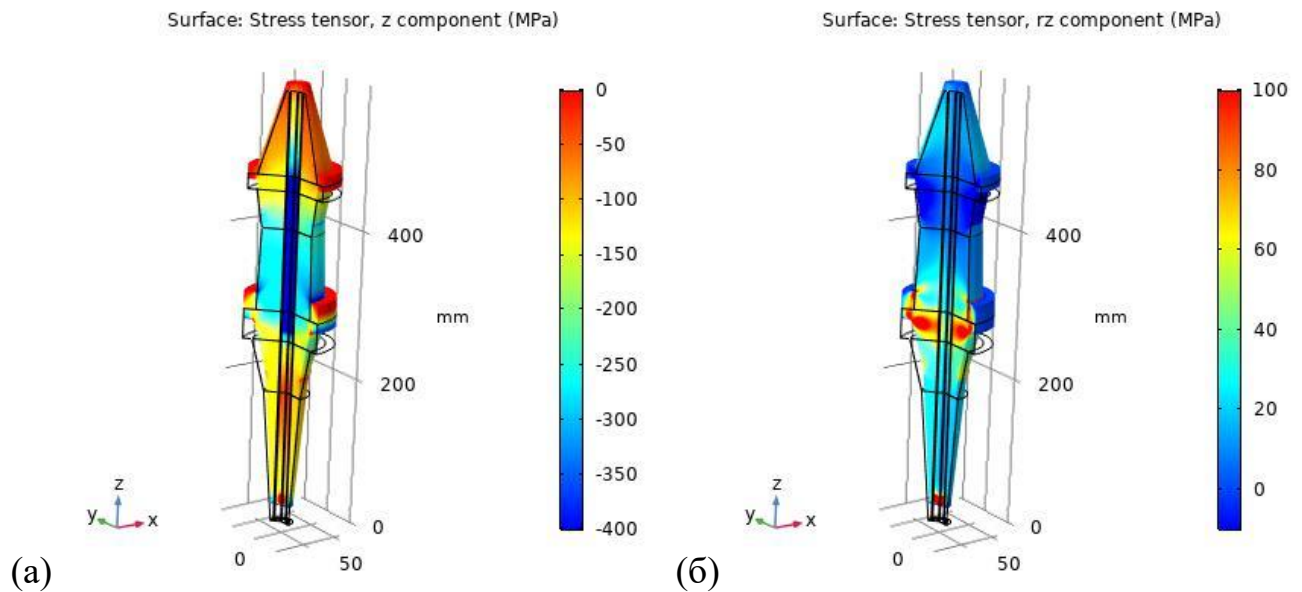


Рис. 4. Результаты конечно-элементного моделирования, а: продольные нормальные напряжения, б: касательные напряжения

3.3. Сопоставление аналитических и численных расчетов

На рисунке 5 показано сопоставление результатов расчетов по предложенной аналитической методике, изложенной в разделе 2.2., с результатами численного моделирования, представленными в разделе 3.2. Здесь показано распределение нормальных напряжений в продольном направлении в стержне (на центральной оси) и в оболочке (на расстоянии 1 мм от резьбы). Распределение касательных напряжений на границе контакта оболочки и стержня показано на Рис. 5в.

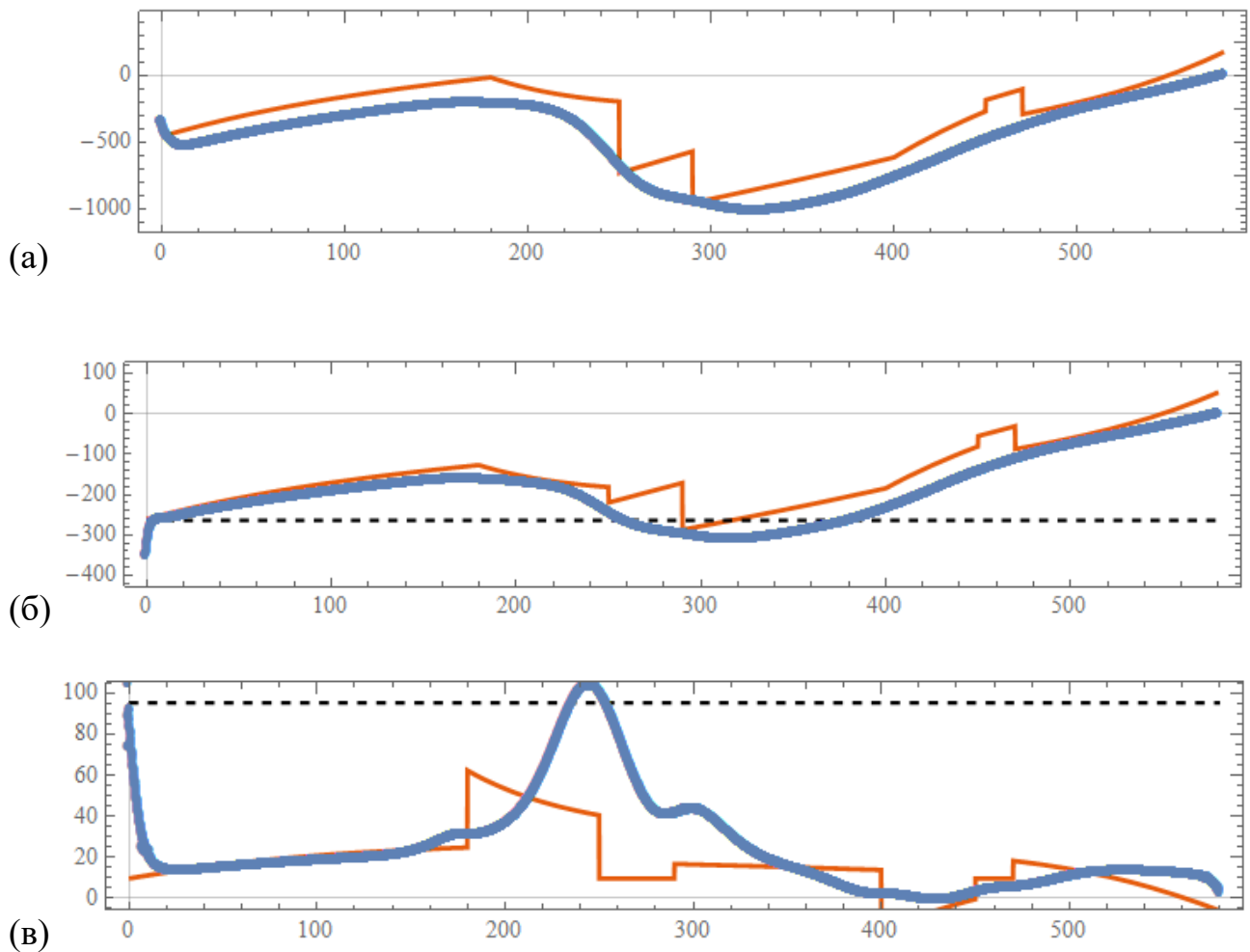


Рис. 5. Сопоставление результатов аналитического (сплошные линии) и численного (точки) моделирования, а: продольные напряжения в стержне $\sigma_c(z)$ [МПа], б: продольные напряжения в оболочке $\sigma_0(z)$ [МПа], в: касательные напряжения на контакте $\tau(z)$ [МПа]. Пунктиром показаны соответствующие пределы прочности.

Получаемое аналитическое решение для нормальных напряжений (рис. 5 а, б) оказывается достаточно близким к результатам численного моделирования. Нормальные напряжения оказываются отрицательными по всей длине изделия. Для выбранных параметров расчета эти напряжения превышают заданные предельно допустимые значения, что, соответственно, требует изменения геометрии изделия, либо параметров ее нагружения. Таким образом, получаемое приближенное

решение может быть использовано для предварительного проектирования и для выбора геометрии внешней оболочки, которая обеспечивает прочность стержня и оболочки на растяжение-сжатие без учета концентрации, связанной с неравномерным распределением напряжений по сечению оболочки.

Получаемые оценки для касательных напряжений (рис. 5в), содержат достаточно большие погрешности, хотя определяемое аналитическое решение приблизительно коррелирует с численным и может быть в первом приближении использовано для оценки уровня действующих напряжений, которые могут приводить к срезу резьбового соединения. Из результатов численных расчетов следует, что концентрация касательных напряжений реализуется в областях резкого изменения геометрии, где происходит уменьшение или увеличения радиуса внешней композитной оболочки. В этих местах может начинаться срез резьбового соединения. Исключить это можно усилением указанных областей с использованием соответствующих конструктивных решений. При дальнейшем проектировании изделия необходим полноценный трехмерный расчет и использование критериев пластичности/прочности, учитывающих сложнапряженное состояние [16-19].

Уточненные аналитические оценки для касательных напряжений могут быть получены путем более аккуратного моделирования концентрации напряжений на границе контакта металлического сердечника и внешней оболочкой. Для этого, вообще говоря, необходимо решать задачу об осесимметричных деформациях тела в

форме усеченного тела под действием внешнего давления и осесимметричной нагрузки [6-14], что является задачей для будущей работы авторов.

Выводы

1. Предложена методика расчета толстостенной осесимметричной конструкции, состоящей из внутреннего армирующего сердечника и внешней толстостенной оболочки.
2. Рассмотрен вариант одномерной модели составного стержня переменного сечения, приближенно учитывающей поперечные деформации. В результате расчетов определяется распределение нормальных напряжений растяжения/сжатия в оболочке и в армирующем стержне, а также касательные напряжения на границе их контакте.
3. В результате тестовых расчетов показана достаточно хорошая согласованность результатов расчетов по предложенной одномерной модели с уточненным конечно-элементным моделированием в отношении нормальных напряжений.

Библиографический список

1. Моссаковский В.И. Прочность ракетных конструкций. – М.: Высшая школа, 1990. – 359 с.
2. Волчков О.Д. Прочность ракет-носителей. - М.: Изд-во МАИ, 2007. Ч.1. - 784 с.

3. Дудченко А.А., Лурье С.А., Соляев Ю.О. и др. Расчет, проектирование и технология изготовления термостабильного композитного стержня // Конструкции из композиционных материалов. 2016. № 1 (141). С. 3 - 11.
4. Бабайцев А.В., Зотов А.А. Проектирование и расчет прессованных профилей неоднородного состава // Технология металлов. 2018. № 11. С. 16 - 20. DOI: 10.31044/1684-2499-2018-11-16-20
5. Добрянский В.Н., Рабинский Л.Н., Радченко В.П., Соляев Ю.О. Оценка ширины зоны контакта между плоскоовальными каналами охлаждения и корпусом приёмо-передающего модуля активной фазированной антенной решётки // Труды МАИ. 2018. № 101. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=98252>
6. Vaysfeld N.D. Reut A.V. The axisymmetrical mixed problem of elasticity for the truncated circular cone with edge with regard of its proper weight // Vestnik Odesskogo Universiteta. Matematika i Mechanica, 2012, vol. 17, no. 3, pp. 99 - 107.
7. Khomsuridze N.G. The thermoelastic equilibrium of the conical bodies // Prikladnaya matematika i mechanica, 2003, vol. 67, no. 3, pp. 124 - 133.
8. Klemm J.L., Fernandes R. The Three-Dimensional Hollow or Solid Truncated Cone Under Axisymmetric Torsionless End Loading // Journal of Applied Mechanics, 1976, vol. 43 (1), pp. 59 - 63. Doi:10.1115/1.3423796
9. Uspenskii A.A. State of stress of an anisotropic cone under an axisymmetric load // Soviet Applied Mechanics, 1977, vol. 13, no. 5, pp. 436 - 440. Doi:10.1007/bf00901796
10. Vaisfel'd N.D., Popov G.Ya., Reut V.V. The axisymmetric mixed problem of elasticity theory for a cone clamped along its side surface with an attached spherical

segment // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2013, vol. 77, no. 1, pp. 70 – 78, <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2013.04.009>

11. Вайсфельд Н.Д., Реут А.В. Осесимметричная смешанная задача теории упругости для полого дважды усеченного конуса // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математическіе науки. 2013. № 3. С. 93 - 97.

12. Reut A.V. The axisymmetrical problem on the stress state of the truncated hollow cone under the external loading // Вісник Одеського національного університету. Математика. Механіка. 2013. Vol. 18. № 3, pp. 102 - 108.

13. Kamran A., Manouchehr S., Mehdi A. Elastic solution of a two-dimensional functionally graded thick truncated cone with finite length under hydrostatic combined loads // Acta Mechanica, 2011, vol. 217, no. 1 - 2, pp. 119 – 134.

14. Kamran A., Manouchehr S., Mehdi A. Dynamic analysis of a functionally graded thick truncated cone with finite length // International Journal of Mechanics and Materials in Design, 2010, vol. 6, no. 4, pp. 367 – 378.

15. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2. - М.: Наука, 1970. - 492 с.

16. Нуштаев Д.В., Жаворонок С.И., Клышников К.Ю., Овчаренко Е.А. Численно-экспериментальное исследование деформирования и устойчивости цилиндрической оболочки ячеистой структуры при осевом сжатии // Труды МАИ. 2015. № 82. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=58589>

17. Афанасьев А.В., Дудченко А.А., Рабинский Л.Н. Влияние тканых слоев на остаточное напряженно-деформированное состояние изделий из полимерных

композиционных материалов // Труды МАИ. 2010. № 37. URL:
<http://trudymai.ru/published.php?ID=13425>

18. Christensen R.M. 2013 Timoshenko Medal Award Paper - Completion and Closure on Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composite Materials // Journal of Applied Mechanics, 2013, vol. 81 (1). Doi.org/10.1115/1.4025177.

19. Bazle A Gama, John W Gillespie Jr, Hassan Mahfuz, Roshan P Raines, Anwarul Haque, Shaik Jeelani, Travis A Bogetti, Bruce K Fink High Strain-Rate Behavior of Plain-Weave S-2 Glass/Vinyl Ester Composites // Journal of Composite Materials, 2001, vol. 35 (13), pp. 1201 – 1228: <http://doi.org/10.1106/13MY-YTGH-QE7E-6V8D>.

20 Барашков В.Н. Численное моделирование трехмерного упругопластического деформирования секторов ведущего устройства // Известия Томского политехнического университета. 2004. Т. 307. № 4. С. 22 – 27.