

На правах рукописи

ВОРОБЬЁВ ИЛЬЯ НИКОЛАЕВИЧ

**НЕЛИНЕЙНЫЕ ТЕРМОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ И  
УСТОЙЧИВОСТЬ ГИБКОГО ТОНКОСТЕННОГО  
СТЕРЖНЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПРИ  
СОЛНЕЧНОМ НАГРЕВЕ**

01. 02. 04 – Механика деформируемого твердого тела

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2012

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ).

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент  
**Гришанина Татьяна Витальевна**  
Официальные оппоненты: **Коровайцев Анатолий Васильевич**,  
доктор физико-математических наук,  
профессор, ФГБОУ ВПО «Московский  
авиационный институт (национальный  
исследовательский университет)» (МАИ),  
профессор.  
**Аринчев Сергей Васильевич**,  
доктор технических наук, доцент, Московский  
Государственный технический университет им.  
Н.Э. Баумана, профессор

Ведущая организация: Институт прикладной механики Российской  
Академии Наук (ИПРИМ РАН)

Защита состоится «21» декабря 2012 г. в 15.30 на заседании диссертационного совета Д 212.125.05 в ФГБОУ ВПО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ), по адресу: 125 993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке «Московского авиационного института (национального исследовательского университета)» (МАИ).

Автореферат разослан

«19» ноября 2012 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета \_\_\_\_\_ Г. В. Федотенков

## СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

### В рецензируемых научных изданиях и журналах:

1. Воробьев И. Н., Гришанина Т.В. «Нелинейная задача динамического изгиба стержня после потери устойчивости»// Труды МАИ 2012, №57, <http://www.mai.ru/science/trudy/>
2. Воробьев И. Н., Гришанина Т.В., Шклярчук. Ф. Н. «Нелинейные колебания спутника с упругим тонкостенным стержнем при солнечном нагреве»// Вестник МАИ 2012, т. 19, №3, с. 160-170.
3. Воробьев И. Н. «Динамическая неустойчивость тонкостенного трубчатого стержня при солнечном нагреве»// Труды МАИ 2012 № 59, <http://www.mai.ru/science/trudy/>

### В других научных изданиях и журналах:

4. Воробьев И. Н., Гришанина Т.В. «Нелинейная динамика упругого стержня после потери устойчивости». В сб. материалов XVIII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» (Ярополец 13-17 февраля 2012 г.). 2012, с. 74.
5. Воробьев И. Н. «Нелинейные колебания тонкостенного стержня при солнечном нагреве с учетом лучистого теплообмена». В сб. материалов Московской молодёжной научно – практической конференции «Инновации в авиации и космонавтике – 2012» (Москва, 17 – 20 апреля 2012 г.) 2012, с. 189
6. Воробьев И. Н. «Колебания и динамическая устойчивость спутника с упругим стержнем при солнечном нагреве». В сб. материалов XVII Международной научной конференции «Системный анализ, управление и навигация» (Крым, Евпатория 1 – 8 июля 2012 г.) 2012, с. 58.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### Актуальность работы

На космических аппаратах (КА) в качестве удлинителей для различных грузов и приборов, а также штанг гравитационной стабилизации, могут использоваться выдвигаемые тонкостенные стержни, образуемые из предварительно напряженной навитой на барабан металлической ленты. Такие стержни могут иметь большую длину и под воздействием солнечных лучей могут испытывать значительный термоупругий изгиб, вынужденные колебания (при изменении ориентации и освещения) и автоколебания (вследствие динамической неустойчивости, обусловленной влиянием упругих деформаций на углы падения солнечных лучей и приток тепла). Вследствие высокой гибкости таких стержней, они при солнечном нагреве могут испытывать сильный термоупругий изгиб и колебания с большими амплитудами и поэтому для решения этих задач необходимо использовать геометрически нелинейную формулировку. При термоупругом изгибе стержня, ось спутника, к которому присоединен стержень, отклоняется от заданного направления, и при переходных колебаниях и динамической неустойчивости стержня спутник раскачивается, что приводит к нарушению его функционирования и, возможно, к выходу из строя при переворачивании. Поэтому исследование нестационарных колебаний гибких стержней – удлинителей, присоединенных к КА, в геометрически нелинейной постановке и их динамической неустойчивости при солнечном нагреве представляет собой актуальную проблему.

### Цель работы

Получение в геометрически нелинейной формулировке численных решений задач термоупругого изгиба и нестационарных колебаний гибкого тонкостенного стержня, прикрепленного к КА, при солнечном нагреве с учетом влияния деформаций на углы падения солнечных лучей; исследование динамической устойчивости нагретого искривленного стержня.

### Научная новизна

1. получены уравнения нелинейных колебаний гибкого стержня с произвольными большими амплитудами на основе конечно-элементной модели.
2. получены численные решения связанной нелинейной задачи колебаний, сильного термоупругого изгиба и теплопроводности тонкостенного стержня с учетом влияния упругих деформаций на углы падения солнечных лучей.

- исследована динамическая устойчивость гибкого нагретого и изогнутого стержня в плоскости и из плоскости падения солнечных лучей с учетом влияния внешнего и внутреннего радиационного излучения, при различных вариантах покрытиях поверхностей стержня.

#### **Практическое значение работы**

Полученные в диссертации результаты могут быть использованы для решения практических задач при проектировании КА со стержнями – удлинителями и штангами гравитационной стабилизации с целью обеспечения их функционирования и устойчивости при солнечном нагреве, а также для оптимизации системы на этапе предварительного проектирования.

#### **Достоверность и обоснованность**

Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечивается применением строгих уточненных математических моделей и численных решений, а также сравнением результатов с известными точными решениями тестовых задач.

#### **Апробация работы и публикации**

Результаты диссертационной работы докладывались на:

- XVIII Международном симпозиуме «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова. (Ярополец 13-17 февраля 2012 г.),
- Московской молодёжной научно-практической конференции «Инновации в авиации и космонавтике – 2012» (Москва, 17 – 20 апреля 2012 г.),
- XVII Международной научной конференции «Системный анализ, управление и навигация» (Крым, Евпатория 1 – 8 июля 2012 г.).

Основные результаты диссертации опубликованы в шести печатных работах, в том числе трех статьях в журналах, рекомендованных ВАК РФ.

#### **Структура и объем работы**

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и содержит 101 страниц. Список используемой литературы включает 68 наименований (из них 21 на иностранном языке).

### **СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

**Во введении** приведен краткий обзор литературы, относящейся к теме диссертации. В статье Etkin B., Hughes P. C. объясняются причины возникновения аномальных термоупругих колебаний спутника с длинной упругой антенной при солнечном нагреве и дано приближенное решение задачи. Более подробное описание термоупругих колебаний флаттерного типа спутника OV1-10 со штангой гравитационной стабилизации, вызванных солнечным

### **ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ**

- Разработаны два варианта конечно-элементной модели для расчета поперечных колебаний гибкого стержня в геометрически нелинейной постановке:
  - для колебаний с умеренными поперечными перемещениями и углами поворота с учетом продольных сил;
  - для колебаний с произвольными (большими) перемещениями и углами поворота.
- Сформулирована связанная нелинейная задача для колебаний тонкостенного стержня круглого поперечного сечения при солнечном нагреве с использованием нелинейных уравнений термоупругих колебаний и уравнения нестационарной теплопроводности стержня с учетом излучения и зависимости углов падения солнечных лучей от упругих деформаций стержня.
- Получены решения нелинейной статической задачи сильного термоупругого изгиба консольного стержня при солнечном нагреве с использованием конечно-элементной модели.
- Решена задача о нестационарных нелинейных термоупругих колебаниях космического аппарата как абсолютно твердого тела с упругим стержнем (удлинителем) под воздействием солнечных лучей при выходе космического аппарата из тени. Исследовано влияние на реакцию системы её параметров и коэффициентов черноты внешней и внутренней поверхностей тонкостенного стержня.
- Получены линеаризованные уравнения термоупругих колебаний предварительно нагретого и изогнутого стержня в плоскости его кривизны на основе конечно-элементной модели для вариаций перемещений, углов поворота и температуры в узлах. Исследована динамическая неустойчивость нагретого изогнутого стержня в его плоскости.
- Получены линеаризованные уравнения термоупругих колебаний предварительно нагретого и изогнутого стержня на основе конечно-элементной модели для вариаций перемещений и углов поворота в плоскости, перпендикулярной плоскости кривизны, и температуры в узлах. Исследована динамическая неустойчивость нагретого изогнутого стержня из его плоскости.
- Показано, что при определенной ориентации стержня по отношению к солнечным лучам и при его определенных параметрах может возникнуть динамическая неустойчивость нагретого изогнутого стержня с колебаниями в плоскости падения солнечных лучей или в плоскости, перпендикулярной этой плоскости.

$A_s = 0.5$ ,  $L_0/L = 1$ ,  $100^\circ\lambda = 5 \cdot 10^3$  Вт/м,  $100^\circ\alpha = 1.1 \cdot 10^{-3}$ ,  $\varepsilon^e = \varepsilon^i = 0$ ,  $l = 100$  м.

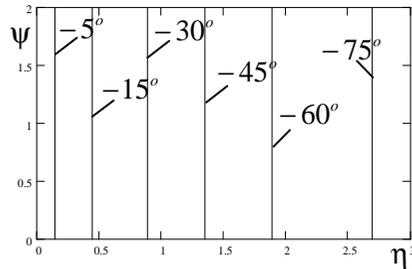


Рис. 17

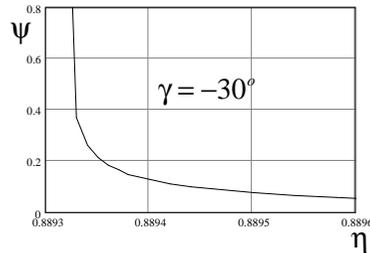


Рис. 18

На рис. 17 показаны границы устойчивости в плоскости параметров  $\psi$ ,  $\eta$  по изгибным формам, при различных углах падения солнечных лучей  $\gamma$  в диапазоне  $-75^\circ \leq \gamma \leq -5^\circ$ . Кривые  $\psi(\eta)$  практически не зависят от  $\eta$ ; они весьма слабо зависят от  $\eta$  только при малых значениях  $\psi$ , как показано на рис. 18 для  $\gamma = -30^\circ$ . Области динамической неустойчивости лежат справа от кривых  $\psi(\eta)$ .

На рис. 19 для  $\gamma = -15^\circ, -30^\circ, -45^\circ, -60^\circ, -75^\circ$  и на рис. 20 для  $\gamma = -30^\circ$  приведены границы динамической неустойчивости по изгибно-крутильным формам, на плоскости параметров  $\psi$ ,  $\eta$ . Как видно, в данном случае кривые  $\psi(\eta)$  по характеру зависимости от  $\eta$  аналогичны кривым  $\psi(\eta)$  для границ устойчивости по изгибным формам (см. рис. 17 - 18). Области динамической неустойчивости лежат справа от кривых  $\psi(\eta)$ .

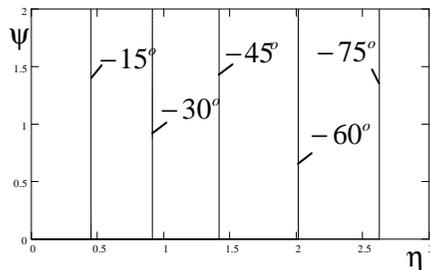


Рис. 19

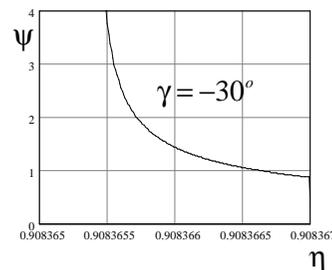


Рис. 20

нагревом на почти круговой орбите, дано в работе Connel G. M., Chobotov V. (1969).

Приближенные линейные модели и аналитические решения для расчета термоупругих колебаний и флаттера для тонкостенного стержня, соединенного со спутником, рассматривались в работах Yu Y. – Y. (1969, 1971 г.), Graham J. D. (1970 г., 1970 г.), Vigneron F. R (1970 г.), Jordan P. (1971 г.), Augusti G. (1971 г.). Во всех этих работах рассматриваются малые изгибные колебания стержня в плоскости падения солнечных лучей. Потеря тепла за счет излучения внутри кругового тонкостенного стержня учитывалась только в работе Graham J. D.

Наиболее строгая нелинейная формулировка связанной статической задачи сильного термоупругого изгиба и теплопроводности тонкостенного круглого стержня при солнечном нагреве с учетом влияния деформаций на углы падения солнечных лучей и с учетом внешнего и внутреннего излучения рассмотрена в работе Гришаниной Т.В. и Шклярчука Ф.Н. Решение этой нелинейной задачи получено с использованием метода конечных элементов и метода итераций. Эта же формулировка нестационарной задачи используется в данной диссертации.

Численные методы расчета, уравнения нелинейных колебаний стержней при больших перемещениях и углах поворота рассматривались в работах Светлицкого В.А., Левина В.Е. и Пустового Н.В., Данилина А.Н., Гришаниной Т.В. и Шклярчука Ф.Н., и многих других авторов.

**В первой главе** диссертации в геометрически нелинейной постановке рассматривается плоская стержневая система, совершающая упругие колебания с большими амплитудами в своей плоскости. С каждым конечным элементом (КЭ) связана своя подвижная система координат  $\xi\eta$ , начало которой расположено на левом конце упругой оси, а ось  $\eta$  – в плоскости поперечного сечения деформированного стержня (рис. 1.). Упругие перемещения  $\Delta u_k$ ,  $\Delta v_k$  и угол поворота  $\Delta\vartheta_k$  правого края относительно левого края  $k$ -го КЭ как консоли при растяжении, изгибе и поперечном сдвиге на основании рис. 1 выражаются через абсолютные перемещения и угол поворота:

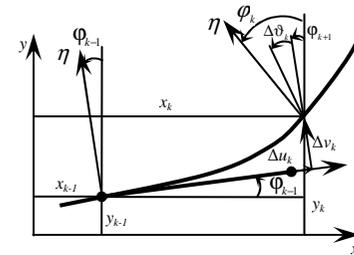


Рис. 1

С каждым конечным элементом (КЭ) связана своя подвижная система координат  $\xi\eta$ , начало которой расположено на левом конце упругой оси, а ось  $\eta$  – в плоскости поперечного сечения деформированного стержня (рис. 1.). Упругие перемещения  $\Delta u_k$ ,  $\Delta v_k$  и угол поворота  $\Delta\vartheta_k$  правого края относительно левого края  $k$ -го КЭ как консоли при растяжении, изгибе и поперечном сдвиге на основании рис. 1 выражаются через абсолютные перемещения и угол поворота:

сдвиге на основании рис. 1 выражаются через абсолютные перемещения и угол поворота:

$$\begin{aligned}\Delta u_k &= (x_k - x_{k-1}) \cos \varphi_{k-1} + (y_k - y_{k-1}) \sin \varphi_{k-1} - l_k; \\ \Delta v_k &= -(x_k - x_{k-1}) \sin \varphi_{k-1} + (y_k - y_{k-1}) \cos \varphi_{k-1}; \\ \Delta \vartheta_k &= \varphi_k - \varphi_{k-1},\end{aligned}\quad (1)$$

Потенциальная энергия КЭ записывается через абсолютные перемещения в виде:

$$\Pi_k = \frac{1}{2} \frac{12EI_k}{l_k^3} \kappa_k \left[ \Delta v_k^2 - l_k \Delta v_k \Delta \vartheta_k + \frac{1+3\kappa_k}{12\kappa_k} l_k^2 \Delta \vartheta_k^2 \right] + \frac{1}{2} \frac{N_k^2 l_k}{EF_k}, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned}N_k &= \frac{EF_k}{l_k} \left[ \Delta u_k + \frac{1}{2l_k} \left( 1 + \frac{\kappa_k^2}{5} \right) \Delta v_k^2 - \frac{\kappa_k^2}{10} \Delta v_k \Delta \vartheta_k + \frac{l_k}{24} \left( 1 + \frac{3}{5} \kappa_k^2 \right) \Delta \vartheta_k^2 \right]; \\ \kappa_k &= \left( 1 + \frac{12}{l_k^2} \frac{EI_k}{GF_{c,k}} \right)^{-1}.\end{aligned}\quad (3)$$

$EF_k, EI_k, GF_{c,k}$  – осредненные в пределах длины  $k$ -го КЭ жесткости на растяжение, изгиб и сдвиг.

Потенциальная энергия системы  $p$  КЭ получается путем суммирования как  $\Pi = \sum_{k=0}^p \Pi_k$ .

Кинетическую энергию системы и вариацию работы внешних нагрузок будем определять по методу сосредоточенных масс и сил:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^p [m_k (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2) + J_k \dot{\varphi}_k^2]; \quad \delta A_p = \sum_{k=0}^p [P_{x,k} \delta x_k + P_{y,k} \delta y_k + M_k \delta \varphi_k], \quad (4)$$

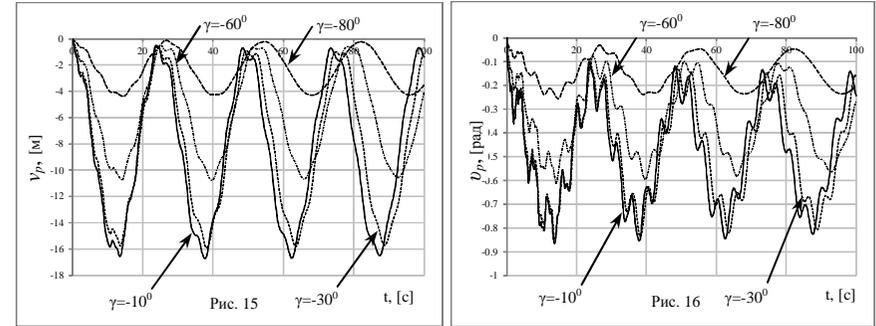
где  $m_k$  и  $J_k$  – сосредоточенная масса и массовый момент инерции, приведенные к  $k$ -му узлу;  $P_{x,k}(t), P_{y,k}(t), M_k(t)$  – внешние силы и момент, приведенные к  $k$ -му узлу.

Нелинейные уравнения колебаний в обобщенных координатах для больших перемещений и углов поворота  $x_k, y_k, \varphi_k$  ( $k = 0, 1, \dots, p$ ) с учетом (1) – (4) записываются в виде:

$$\begin{aligned}m_k \ddot{x}_k + N_k \cos \varphi_{k-1} - N_{k+1} \cos \varphi_k - Q_k \sin \varphi_{k-1} + Q_{k+1} \sin \varphi_k &= P_{x,k}; \\ m_k \ddot{y}_k + N_k \sin \varphi_{k-1} - N_{k+1} \sin \varphi_k + Q_k \cos \varphi_{k-1} - Q_{k+1} \cos \varphi_k &= P_{y,k}; \\ J_k \ddot{\varphi}_k + N_{k+1} v_{k+1} - Q_{k+1} (l_{k+1} + u_{k+1}) + L_k - L_{k+1} &= M_k;\end{aligned}\quad (5)$$

$(k = 0, 1, \dots, p).$

В качестве примера применения МКЭ, была решена задача о термоупругих колебаниях и динамической устойчивости стержня в плоскости и из плоскости падения солнечных лучей (рис. 14). Расчеты проводились при следующих значениях параметров:  $l = 35$  м (длина стержня),  $r = 0,025$  м (радиус поперечного сечения стержня),  $h = 0,0001$  м (толщина стенки стержня), материал стержня алюминиевый сплав,  $A_S = 0,5$ ,  $L_0 / L = 1$ ,  $100^\circ \lambda = 5 \cdot 10^3$  Вт/м,  $100^\circ \alpha = 1,1 \cdot 10^{-3}$ ,  $\varepsilon^e = \varepsilon^i = 0,025$ ,  $\gamma = -10^\circ, -30^\circ, -60^\circ, -80^\circ$ .



На рис. 15 – 16 приведены графики изменения поперечного прогиба и угла поворота  $v_p(t), \vartheta_p(t)$  при различных углах падения солнечных лучей.

Таблица 3

$v$	$\gamma = -10^\circ$	$\gamma = -30^\circ$
1	11654417.53	16175014.97
2	11276832.18	0.035 + 2068i
3	8489056.44	3.06e-06 + 2095i
4	2.9e-07 + 1993i	8.3e-05 + 2107i
5	4.7e-06 + 2038i	1.76e-04 + 2118i

Расчеты на устойчивость колебаний стержня в плоскости падения солнечных лучей показали, что явления динамической неустойчивости возникают при углах падения солнечных лучей  $\gamma = -10^\circ$  и  $\gamma = -30^\circ$ . При углах падения  $\gamma = -60^\circ, -80^\circ$  колебания стержня устойчивы. В таблице 3 приведены собственные значения соответствующие 5-ти формам колебаний  $Z_v$ , по которым происходит потеря устойчивости.

Также были выполнены расчеты границ динамической неустойчивости на основе двухстепенной модели для длинного тонкостенного стержня при солнечном нагреве при следующих параметрах:  $r = 25$  мм,  $h = 0,1$  мм,

$$\mathbf{S}_k = \frac{4\alpha 100^\circ EI}{r\bar{R}_k^2(1+\lambda)^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(-1+c_k)}{\Delta\vartheta_k^0} & 0 & \frac{-(-1+c_k+s_k\Delta\vartheta_k^0)}{\Delta\vartheta_k^0} \\ 0 & \frac{(\Delta\vartheta_k^0-s_k)}{\Delta\vartheta_k^0} & 0 & \frac{(-c_k\Delta\vartheta_k^0+s_k)}{\Delta\vartheta_k^0} \end{bmatrix}. \quad (44)$$

При  $\varepsilon^e = \varepsilon^i = 0$ ,  $\mathbf{P}_k = \mathbf{0}$ .

$$\mathbf{N}_k = \begin{bmatrix} 0 & \frac{g_0 q_*}{cph100^\circ} \sin(\gamma - \vartheta_k^0) & \frac{g_0 q_*}{cph100^\circ} \cos(\gamma - \vartheta_k^0) \\ 0 & \frac{g_1 q_*}{cph100^\circ} \sin(\gamma - \vartheta_k^0) & \frac{g_1 q_*}{cph100^\circ} \cos(\gamma - \vartheta_k^0) \end{bmatrix}, \quad (45)$$

Для исследования устойчивости системы однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (22), (35), они преобразовывались к системе уравнений первого порядка:

$$\mathbf{A} \frac{dz}{dt} + \mathbf{Cz} = \mathbf{0}, \quad (46)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{K} & -\mathbf{S} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{N} & \mathbf{0} & \mathbf{P} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} = \mathbf{Z} \cdot e^{\lambda t}. \quad (47)$$

Здесь  $\mathbf{E}$  – единичная матрица.

Решение уравнения (46) имеет вид  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{Z}e^{\lambda t}$  и сводится к проблеме собственных значений пары матриц  $[\lambda\mathbf{A} + \mathbf{C}]\mathbf{Z} = \mathbf{0}$ , которая может быть решена с помощью стандартных компьютерных программ.

Собственные значения действительные числа  $\lambda_v = \alpha_v$  или комплексно-

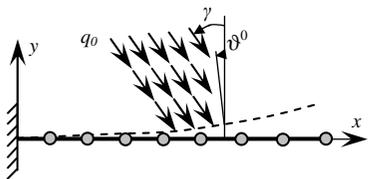


Рис. 14

сопряженные  $\lambda_v = \alpha_v + i\omega_v$ ,  $\bar{\lambda}_v = \alpha_v - i\omega_v$ .

Если хотя бы одно собственное значение имеет положительную действительную часть  $\alpha_v > 0$ , то система неустойчива по форме  $\mathbf{Z}_v$ . При  $\alpha_v > 0$  и  $\omega_v \neq 0$  имеет место динамическая неустойчивость. На границе динамической неустойчивости  $\alpha_v = 0$

и  $\omega_v \neq 0$ , т.е.  $\lambda_v = +i\omega_v$ ,  $\bar{\lambda}_v = -i\omega_v$ .

где

$$Q_k = b_k \Delta v_k - c_k \Delta \vartheta_k; \quad L_k = -c_k \Delta v_k + d_k \Delta \vartheta_k, \quad (6)$$

$$b_k = \frac{12\kappa_k EI_k}{l_k^3} + \frac{N_k}{l_k} \left( 1 + \frac{\kappa_k^2}{5} \right); \quad c_k = \frac{6\kappa_k EI_k}{l_k^2} + N_k \frac{\kappa_k^2}{10}; \quad (7)$$

$$d_k = \frac{(1+3\kappa_k)EI_k}{l_k} + N_k \frac{l_k}{12} \left( 1 + \frac{3}{5} \kappa_k^2 \right).$$

Для умеренных перемещений и углов поворота в качестве обобщенных координат в  $k$ -ом узле рассматриваются продольные перемещения  $u_k$ , поперечные перемещения  $v_k$  и угол поворота  $\vartheta_k$  в узлах ( $k = 0, 1, 2, \dots, p$ ), при этом угол поворота считается умеренным при  $\sin \vartheta_k = \vartheta_k$ ,  $\cos \vartheta_k = 1 - \frac{\vartheta_k^2}{2}$ .

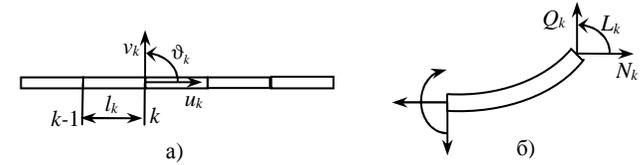


Рис. 2

В этом случае по сравнению с (1) надо считать:  $\varphi_k = 0$ ,  $\sin \varphi_k = 0$ ,  $\cos \varphi_k = 1$ ;  $\dot{x}_k = \dot{u}_k$ ,  $\dot{y}_k = \dot{v}_k$ ,  $\dot{\varphi}_k = \dot{\vartheta}_k$ ;  $\delta x_k = \delta u_k$ ,  $\delta y_k = \delta v_k$ ,  $\delta \varphi_k = \delta \vartheta_k$ .

$$\Delta u_k = u_k - u_{k-1}; \quad \Delta v_k = v_k - v_{k-1} - l_k \vartheta_{k-1}; \quad \Delta \vartheta_k = \vartheta_k - \vartheta_{k-1} \quad (8)$$

С учетом этих выражений на основании (2) – (4) получаются уравнения

$$\begin{aligned} m_k \ddot{u}_k + N_k - N_{k+1} &= P_{x,k}; \\ m_k \ddot{v}_k + Q_k - Q_{k+1} &= P_{y,k}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$J_k \ddot{\vartheta}_k + N_{k+1}(v_{k+1} - v_k) - Y_{k+1} l_{k+1} + L_k - L_{k+1} = M_k; \quad (k = 0, 1, \dots, p).$$

где

$$\begin{aligned} Q_k &= b_k (v_k - v_{k-1}) - c_k \vartheta_{k-1} - c_k \vartheta_k; \\ L_k &= -c_k (v_k - v_{k-1}) + e_k \vartheta_{k-1} + d_k \vartheta_k, \end{aligned} \quad (10)$$

коэффициенты  $b_k$ ,  $c_k$ ,  $d_k$  определяются по формулам (7),  $e_k = c_k l_k - d_k$ . Продольное усилие  $N_k$  при конечных деформациях свободного КЭ (рис. 2, б) в отличие от (3) для консольного КЭ с учетом (8) определяется как

$$N_k \rightarrow N_k + \frac{EF_k}{l_k} \left( (v_k - v_{k-1})\vartheta_k + \frac{l_k}{2} \vartheta_k^2 \right) \quad (11)$$

С учетом (3), (7), (8) и (11) в первом уравнении (9) нелинейные члены будут квадратичными, а во втором и третьем – квадратичными и кубическими (третьей степени).

Если продольные силы  $N_k$  пренебрежимо малы (например, в случае статически определимого консольного стержня при отсутствии продольных сил  $P_{x,k} = 0$ ) и пренебрежении продольными инерционными силами  $m_k \ddot{u}_k \approx 0$ , уравнения (9) будут линейными.

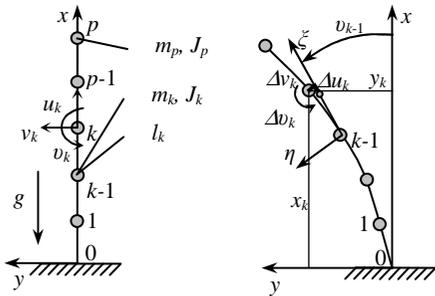


Рис. 3

В качестве примера рассмотрено динамическое поведение стержня после потери устойчивости, находящегося под действием силы тяжести  $g$  (рис. 3). Поперечное сечение стержня имеет прямоугольную форму  $b \times h$ :  $b = 0.06$  м,  $h = 0.02$  м. Материал стержня алюминий. Длина КЭ стержня  $l = 1$  м,  $p = 5$ . В расчетах

принималось  $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 4$  кг,  $J_1 = J_2 = J_3 = J_4 = 0.25$  кг·м<sup>2</sup>,  $m_5 = 28$  кг,  $J_5 = 1.5$  кг·м<sup>2</sup>,  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Расчет выполнен для начального условия, при котором 5-ый КЭ, как консоль, закрепленная в сечении 4, был изогнут без растяжения его оси поперечной силой, приложенной к узлу 5, при различных значениях массы  $m_5$  на конце стержня.

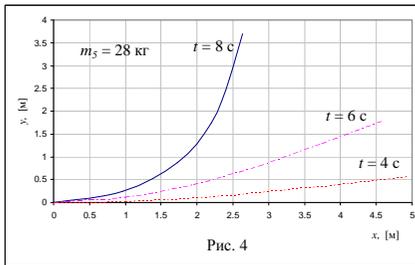


Рис. 4

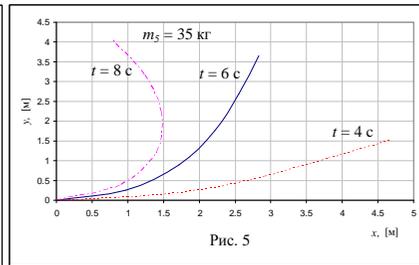


Рис. 5

На рис.4-5 приведены графики деформированного состояния стержня при  $m_5 = 28$  кг и 35 кг в различные моменты времени  $t$ .

где

$$\mathbf{K}_k^k = \frac{4}{(1+\lambda)^2} \frac{1}{R_k^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & GJ_k \frac{(1+\lambda)^2}{2} \theta_k & 0 & 0 & \begin{pmatrix} -GJ_k \lambda(1+\lambda) \\ (1-c_k) \end{pmatrix} & -GJ_k \lambda(1+\lambda) s_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} -GJ_k \lambda(1+\lambda) \\ (1-c_k) \end{pmatrix} & 0 & 0 & \begin{pmatrix} EI_y (\theta_k + s_k c_k) + \\ GJ_k \lambda^2 (\theta_k - s_k c_k) \end{pmatrix} & -EI_y s_k^2 + GJ_k \lambda^2 s_k^2 \\ 0 & -GJ_k \lambda(1+\lambda) s_k & 0 & 0 & -EI_y s_k^2 + GJ_k \lambda^2 s_k^2 & \begin{pmatrix} EI_y (\theta_k - s_k c_k) + \\ GJ_k \lambda^2 (\theta_k + s_k c_k) \end{pmatrix} \end{bmatrix}, \quad (40)$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_k} & -\frac{1}{R_k} & 0 & 0 & -\frac{1}{R_k} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_k} & \left( \frac{2\lambda}{1+\lambda} \right) \frac{1}{R_k} & 0 \\ 1 & \theta_k & \sin \theta_k & \cos \theta_k & \theta_k \sin \theta_k & \theta_k \cos \theta_k \\ 0 & -\frac{1}{R_k} & -\frac{1}{R_k} \cos \theta_k & -\frac{1}{R_k} \sin \theta_k & -\frac{1}{R_k} \begin{pmatrix} \sin \theta_k + \\ \theta_k \cos \theta_k \end{pmatrix} & -\frac{1}{R_k} \begin{pmatrix} \cos \theta_k - \\ \theta_k \sin \theta_k \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_k} \sin \theta_k & -\frac{1}{R_k} \cos \theta_k & -\frac{1}{R_k} \begin{pmatrix} \left( \frac{2\lambda}{1+\lambda} \right) \cos \theta_k - \\ \theta_k \sin \theta_k \end{pmatrix} & -\frac{1}{R_k} \begin{pmatrix} \left( \frac{2\lambda}{1+\lambda} \right) \sin \theta_k + \\ \theta_k \cos \theta_k \end{pmatrix} \end{bmatrix}, \quad (41)$$

Матрица жесткости искривленного стержня составляется из матриц  $\mathbf{K}_k$ .

Матрица инерции получается из выражения для кинетической энергии системы записанной в форме метода сосредоточенных масс, учитывая дополнительно приведенные к узлам моменты инерции:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^p [m_k \dot{w}_k^2 + J_{k,s} \dot{\phi}_k^2 + J_{k,y} \dot{\psi}_k^2] \quad (42)$$

где  $m_k$ ,  $J_{k,s}$ ,  $J_{k,y}$  - приведенные к  $k$ -му сечению сосредоточенная масса, массовые моменты инерции.

Далее были получены линеаризованные уравнения теплопроводности в возмущениях для  $k$ -го сечения, с учетом приращения теплового потока в возмущенном движении без учета излучения:

$$\ddot{\tau}_{n,k}^1 + \frac{n^2 \lambda}{r^2 c \rho} \tau_{n,k}^1 = \frac{g_n q_*}{c \rho h 100^\circ} \left( \psi^1 \sin(\gamma - \vartheta^0) - \phi^1 \cos(\gamma - \vartheta^0) \right) \quad (43)$$

$(n = 0, 1, k = 1, \dots, p).$

Эти уравнения решались совместно с линеаризованными уравнениями колебаний стержня, которые получаются на основе уравнения Лагранжа в обобщенных координатах.

Также как и для колебаний стержня в плоскости задача сводится к уравнениям (35), но с другими матрицами. В данном случае

Эти уравнения решались совместно с линеаризованными уравнениями колебаний стержня, которые получаются на основе уравнения Лагранжа в обобщенных координатах.

Таким образом, связанная задача термоупругих колебаний стержня описывается системой уравнений для векторов  $\mathbf{q} = [u_1 v_1 \vartheta_1 u_2 v_2 \vartheta_2 \dots u_p v_p \vartheta_p]^T$  и  $\boldsymbol{\tau} = [\tau_{0,1}^1 \tau_{1,1}^1 \tau_{0,2}^1 \tau_{1,2}^1 \dots \tau_{0,p}^1 \tau_{1,p}^1]^T$ :

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{S}\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}; \\ \dot{\boldsymbol{\tau}} + \mathbf{P}\boldsymbol{\tau} - \mathbf{N}\mathbf{q} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (35)$$

где  $\mathbf{D}$  - матрица демпфирования, введена пропорционально матрице жесткости  $\mathbf{K}$ , по теореме Фойхта. Матрицы  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{N}$  формируются из соответствующих матриц для КЭ  $\mathbf{M}_k$ ,  $\mathbf{K}_k$ ,  $\mathbf{S}_k$ ,  $\mathbf{P}_k$  и  $\mathbf{N}_k$ .

$$\mathbf{S}_k = \frac{\alpha 100^\circ EI}{rR_k^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \Delta \vartheta_k^0 & 0 & \frac{1}{2} \Delta \vartheta_k^0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2(\Delta \vartheta_k^0 - s_k)}{\Delta \vartheta_k^0} & 0 & \frac{-2(c \Delta \vartheta_k^0 - s_k)}{\Delta \vartheta_k^0} \\ 0 & \frac{-2(-1 + c_k)}{\Delta \vartheta_k^0} & 0 & \frac{-2(-1 + c_k + s_k \Delta \vartheta_k^0)}{\Delta \vartheta_k^0} \end{bmatrix}, \quad (36)$$

$$c_k = \cos(\theta_k), \quad s_k = \sin(\theta_k), \quad \Delta \vartheta_k^0 = \vartheta_k^0 - \vartheta_{k-1}^0.$$

$$\mathbf{P}_k = \frac{c_0}{cph100^\circ} \begin{bmatrix} (4\tau_{0,k}^0{}^3 + 6\tau_{0,k}^0 \tau_{1,k}^0{}^2) \varepsilon^\varepsilon & \left( \frac{3}{2} \tau_{1,k}^0{}^3 + 6\tau_{0,k}^0 \tau_{1,k}^0{}^2 \right) \varepsilon^\varepsilon \\ \left( \varepsilon^\varepsilon + \frac{4\varepsilon^i}{4-4\varepsilon^i} \right) (3\tau_{1,k}^0{}^3 + 12\tau_{0,k}^0 \tau_{1,k}^0{}^2) & \frac{h\lambda 100^\circ}{c_0 r^2} + \left( \varepsilon^\varepsilon + \frac{4\varepsilon^i}{4-4\varepsilon^i} \right) (3\tau_{1,k}^0{}^3 + 12\tau_{0,k}^0 \tau_{1,k}^0{}^2) \end{bmatrix}, \quad (37)$$

$$\mathbf{N}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{g_0 q_*}{cph100^\circ} \sin(\gamma - \vartheta_k^0) \\ 0 & 0 & \frac{g_1 q_*}{cph100^\circ} \sin(\gamma - \vartheta_k^0) \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Задача динамической устойчивости стержня с использованием МКЭ, из плоскости падения солнечных лучей, математически аналогична задаче колебаний стержня в плоскости (рис. 13).

Матрица жесткости для КЭ записывается в виде:

$$\mathbf{K}_k = (\mathbf{B}_1^{-1})^T \mathbf{K}_\beta^{(k)} \mathbf{B}_1^{-1}, \quad (39)$$

Из графиков видно, что перемещения стержня являются большими (порядка его длины), что соответствует геометрически нелинейной постановке задачи.

**Во второй главе** диссертации сформулирована связанная задача теплопроводности, термоупругого изгиба и колебаний стержня при солнечном нагреве. Рассматривается тонкостенный стержень кругового поперечного сечения, который неподвижно закреплен на одном конце, и его ось в недеформированном состоянии совпадает с осью  $x$ . Под действием солнечного нагрева стержень искривляется в плоскости падения солнечных лучей  $Oxy$  и его поперечные сечения поворачиваются на углы  $\vartheta(s)$ , рис. 6. Искривлением кругового контура поперечных сечений будем пренебрегать.

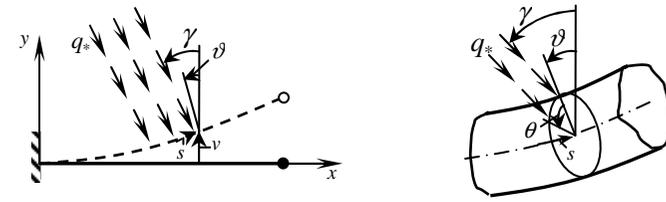


Рис. 6

Для записи уравнения теплопроводности определялись:

- поток от прямого солнечного излучения на единицу внешней поверхности оболочки, представленный в виде разложения в ряд Фурье

$$q^s = \sum_{n=0}^{\infty} q_n^s \cos n\theta, \quad q_n^s = g_n q_0 \cos(\gamma - \vartheta), \quad (12)$$

$$g_0 = \frac{1}{\pi}, \quad g_1 = \frac{1}{2}, \quad g_n = -\frac{2}{(n^2 - 1)\pi} \cos \frac{n\pi}{2} \quad \text{при } n \geq 2;$$

- плотность теплового потока, теряемого за счет внешнего излучения в космическое пространство, представленная в виде разложения в ряд Фурье

$$q^e = \sum_{n=0}^{\infty} q_n^e \cos n\theta,$$

$$q_0^e = \frac{\varepsilon^e}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_0(\theta) d\theta, \quad q_n^e = \frac{\varepsilon^e}{\pi} \int_0^{2\pi} E_0(\theta) \cos n\theta d\theta \quad \text{при } n \geq 1, \quad (13)$$

$$E_0 = c_0 \tau^4, \quad \tau = T/100^\circ.$$

$c_0 = 5.77 \text{ Вт/м}^2$ ,  $T(\theta, s)$  - температура стержня в градусах Кельвина.

- теряемый тепловой поток за счет лучистого теплообмена на внутренней поверхности цилиндрической оболочки при плоской радиации, представ-

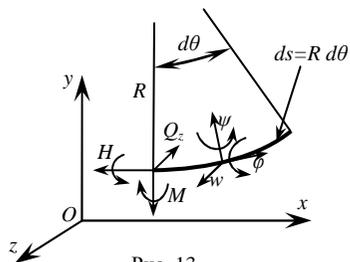


Рис. 13

вается в виде:

ленный в виде разложения в ряд Фурье

$$q^i = \sum_{n=0}^{\infty} q_n^i \cos n\theta ; \quad (14)$$

$$q_0^i = 0, \quad q_n^i = \frac{1}{\pi} \frac{4n^2 \varepsilon^i}{4n^2 - \varepsilon^i} \int_0^{2\pi} E_0(\theta) \cos n\theta d\theta \quad \text{при } n \geq 1.$$

Из уравнения неустановившейся теплопроводности в окружном направлении тонкой круговой оболочки при солнечном нагреве с учетом внешнего и внутреннего излучения, выражений (12)-(14) с учетом разложения температуры в ряд Фурье  $\tau = \sum_{n=0}^N \tau_n \cos n\theta$ , получается система уравнений теплопроводности с учетом внешнего и внутреннего излучения, для коэффициентов  $\tau_0, \dots, \tau_N$ .

$$c\rho h 100^\circ \dot{\tau}_n + \frac{n^2 h \lambda 100^\circ}{r^2} \tau_n + c_0 \left( \varepsilon^e + \frac{4n^2 \varepsilon^i}{4n^2 - \varepsilon^i} \right) F_n = g_n q_* \cos(\gamma - \vartheta), \quad (15)$$

$$(n = 0, 1, \dots, N).$$

где  $F_n$  – нелинейные функции, зависящие от  $\tau_0, \dots, \tau_N$ ;  $\rho, c, \lambda$  – плотность, удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности материала оболочки;  $r, h$  – радиус и толщина оболочки;  $q_* = A_s S_0 L_0^2 / L^2$ ,  $A_s$  – коэффициент поглощения внешней поверхности стержня;  $S_0 = 1400$  Вт/м<sup>2</sup>;  $L_0 = 149 \cdot 10^6$  км – среднее расстояние от Земли до Солнца;  $L$  [км] – расстояние от объекта до Солнца.

Уравнения термоупругого изгиба для консольного стержня записываются в виде:

$$\vartheta = -\frac{100^\circ \alpha}{r} \int_0^s \tau_1 ds. \quad (16)$$

Это уравнение совместно с (15) дает замкнутую систему уравнений для связанной статической задачи термоупругого изгиба и теплопроводности тонкостенного стержня при солнечном нагреве с излучением и решается методом итераций.

Также для решения этой задачи на основе МКЭ строилась математическая модель колебаний, термоупругого изгиба и теплопроводности стержня (17) в нелинейной (умеренно-нелинейной и линейной) постановке, которая решалась методом установления (путем интегрирования системы дифференциальных уравнений по времени).

Система уравнений в нелинейной постановке:

где

$$\mathbf{K}_\alpha^k = 2 \frac{EI}{R_k^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\theta_k}{2} & 0 & 0 & 1+c_k & -s_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+c_k & 0 & 0 & \theta_k - s_k c_k & s_k^2 \\ 0 & -s_k & 0 & 0 & s_k^2 & \theta_k + s_k c_k \end{bmatrix}, \quad (30)$$

$$c_k = \cos(\theta_k), s_k = \sin(\theta_k), \bar{R}_k = \frac{1}{2}(R_{k-1} + R_k) = \text{const}$$

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{R_{k-1}} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{R_{k-1}} & 0 \\ 1 & \theta_k & \sin \theta_k & \cos \theta_k & \theta_k \sin \theta_k & \theta_k \cos \theta_k \\ 0 & 1 & \cos \theta_k & -\sin \theta_k & \sin \theta_k + \theta_k \cos \theta_k & \cos \theta_k - \theta_k \sin \theta_k \\ \frac{1}{R_k} & \frac{\theta_k}{R_k} & 0 & 0 & \frac{2}{R_k} \cos \theta_k & -\frac{2}{R_k} \sin \theta_k \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Матрица жесткости искривленного стержня составляется из матриц  $\mathbf{K}_k$ .

Матрица инерции получается из выражения для кинетической энергии системы записанной в форме метода сосредоточенных масс, учитывая дополнительно приведенные к узлам моменты инерции:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n [m_k (\dot{u}_k^2 + \dot{v}_k^2) + J_k \dot{\vartheta}_k^2 + 2S_{x,k} \dot{u}_k \dot{\vartheta}_k + 2S_{y,k} \dot{v}_k \dot{\vartheta}_k] \quad (32)$$

где  $m_k, S_{x,k}, S_{y,k}, J_k$  – приведенные к  $k$ -му сечению сосредоточенная масса, статические моменты относительно оси  $x$  и  $y$  и массовый момент инерции.

Далее были получены линеаризованные уравнения теплопроводности в возмущениях для  $k$ -го сечения с учетом внутреннего и внешнего теплоизлучения:

$$\dot{\tau}_{n,k}^1 + \frac{n^2 \lambda}{r^2 c\rho} \tau_{n,k}^1 + \frac{c_0}{c\rho h 100^\circ} \left( \varepsilon^e + \frac{4n^2 \varepsilon^i}{4n^2 - \varepsilon^i} \right) (\bar{F}_{n0,k}^1 \tau_{0,k}^1 + \bar{F}_{n1,k}^1 \tau_{1,k}^1) = \frac{g_n q_*}{c\rho h 100^\circ} \langle \cos(\gamma - \vartheta_k^0) + \vartheta^1 \sin(\gamma - \vartheta_k^0) \rangle, \quad (n = 0, 1; k = 1, \dots, p),$$

где

$$\bar{F}_{00,k}^1 = 4\tau_{0,k}^0{}^3 + 6\tau_{0,k}^0 \tau_{1,k}^0{}^2; \quad \bar{F}_{01,k}^1 = \frac{3}{2} \tau_{1,k}^0{}^3 + 6\tau_{0,k}^0{}^2 \tau_{1,k}^0; \quad (34)$$

$$\bar{F}_{10,k}^1 = 3\tau_{1,k}^0{}^3 + 12\tau_{0,k}^0{}^2 \tau_{1,k}^0; \quad \bar{F}_{11,k}^1 = 4\tau_{0,k}^0{}^3 + 9\tau_{0,k}^0 \tau_{1,k}^0{}^2.$$

$$q^s = q_* [\Psi^1 \sin(\gamma - \vartheta^0) - \Phi^1 \cos(\gamma - \vartheta^0)] \sin \theta \quad \text{при} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; \quad (23)$$

$$q^s = 0 \quad \text{при} \quad -\frac{\pi}{2} > \theta > \frac{\pi}{2}.$$

Линеаризованное уравнение теплопроводности без учета излучения ( $\varepsilon^e = \varepsilon^i = 0$ ) для гармоники  $n = 1$  с учетом (23) имеет вид

$$c\rho h 100^\circ \dot{\tau}_1 + \frac{\lambda h}{r^2} 100^\circ \tau_1 = \frac{1}{2} q_* [\Psi^1 \sin(\gamma - \vartheta^0) - \Phi^1 \cos(\gamma - \vartheta^0)]. \quad (24)$$

Принцип возможных перемещений для изгибно-крутильных колебаний искривленного стержня с учетом изменений температуры в возмущенном движении записывается в виде

$$\int_0^l [M^1 \delta(\frac{\partial^2 w^1}{\partial s^2} - \kappa^0 \Phi^1) + H^1 \delta(\frac{\partial \Phi^1}{\partial s} + \kappa^0 \frac{\partial w^1}{\partial s}) + m \ddot{w}^1 \delta w^1 + J \ddot{\Phi}^1 \delta \Phi^1] ds = 0, \quad (25)$$

где изгибающий и крутящий моменты записываются в виде:

$$M^1 = EI [(\frac{\partial^2 w^1}{\partial s^2} - \kappa^0 \Phi^1) + \frac{100^\circ \alpha}{r} \tau_1^1], \quad H^1 = GJ_k (\frac{\partial \Phi^1}{\partial s} + \kappa^0 \frac{\partial w^1}{\partial s}) \quad (26)$$

Перемещение и угол закручивания стержня представим по методу Ритца в виде разложений

$$w^1(\bar{s}, \bar{t}) = r \sum_i q_i(\bar{t}) \chi_i(\bar{s}), \quad \Phi^1(\bar{s}, \bar{t}) = \sum_i q_i(\bar{t}) \omega_i(\bar{s}), \quad (27)$$

где  $\bar{s} = s/l$ ,  $\bar{t} = t \sqrt{EI/m_0 l^4}$ ;  $\chi_i(\bar{s})$ ,  $\omega_i(\bar{s})$  – заданные функции, удовлетворяющие граничным условиям  $\chi_i = 0$ ,  $\chi_i' = 0$ ,  $\omega_i = 0$  при  $\bar{s} = 0$ .

Также как и для симметричных колебаний задача сводится к уравнениям (22), но с другими коэффициентами; в данном случае неизвестные параметры  $r_i$  вводятся как

$$r_i = 100^\circ \alpha \frac{l}{r} \int_0^1 \tau_1^1 (\chi_i'' - l \kappa^0 \omega_i) d\bar{s}. \quad (28)$$

При рассмотрении задачи динамической устойчивости стержня с использованием МКЭ, изогнутый в плоскости падения солнечных лучей и нагретый стержень в невозмущенном статическом состоянии делился на КЭ в виде дуг окружностей, плавно соединенных между собой в узлах. Сначала были получена матрица

$$\mathbf{K}_k = (\mathbf{A}_k^{-1})^T \mathbf{K}_\alpha^{(k)} \mathbf{A}_k^{-1} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} m_k \ddot{x}_k + N_k \cos \Phi_{k-1} - N_{k+1} \cos \Phi_k - Q_k \sin \Phi_{k-1} + Q_{k+1} \sin \Phi_k &= P_{x,k}; \\ m_k \ddot{y}_k + N_k \sin \Phi_{k-1} - N_{k+1} \sin \Phi_k + Q_k \cos \Phi_{k-1} - Q_{k+1} \cos \Phi_k &= P_{y,k}; \\ J_k \ddot{\Phi}_k + N_{k+1} v_{k+1} - Q_{k+1} (l_{k+1} + u_{k+1}) + L_k - L_{k+1} &= M_k; \end{aligned} \quad (17)$$

$$c\rho h 100^\circ \dot{\tau}_{k,n} + \frac{n^2 h \lambda 100^\circ}{r^2} \tau_{k,n} + c_0 \left( \varepsilon^e + \frac{4n^2 \varepsilon^i}{4n^2 - \varepsilon^i} \right) F_{k,n} = g_n q_* \cos(\gamma - \vartheta);$$

$$(k = 0, 1, \dots, p; n = 0, 1, \dots, N).$$

Системы уравнений в умеренно-нелинейной и линейной постановке, отличаются от (17) только первыми тремя уравнениями колебаний, которые были получены в первой главе диссертации.

В качестве примера рассмотрен тонкостенный стержень (рис. 7), находящийся под действием теплового потока при выходе КА из тени Земли. Стержень жестко прикреплен к симметричному относительно оси  $x$  абсолютно жесткому телу (спутнику), которое может поворачиваться относительно своего центра тяжести. Вычисления выполнены при следующих значениях параметров:  $r = 25$  мм,  $h = 0.1$  мм,  $A_s = 0.5$ ,  $L_0/L = 1$ ,  $100^\circ \lambda = 5 \cdot 10^3$  Вт/м,  $100^\circ \alpha = 1.1 \cdot 10^{-3}$ ,  $\varepsilon^e = \varepsilon^i = 0.56$ . В качестве абсолютно жесткого тела рассмотрен шар радиуса  $r_0 = 0.5$  м, плотность материала шара равна плотности материала стержня  $\rho = 2700$  кг/м<sup>3</sup>, длина стержня равна  $L = 30$  м, угол  $\Phi_0$  в начальный момент времени равен нулю. Угол падения солнечных лучей  $\gamma = -30^\circ$ .

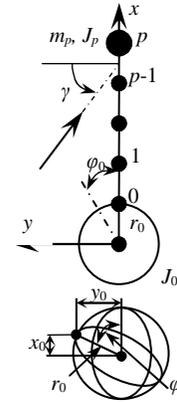


Рис. 7

Расчет был проведен для двух вариантов масс груза в узле  $p$  на конце стержня. В первом варианте  $m_p = m$ , а во втором  $m_p = 20m$ . В данном случае  $m = 0.0254$  кг ( $p = 50$ ).

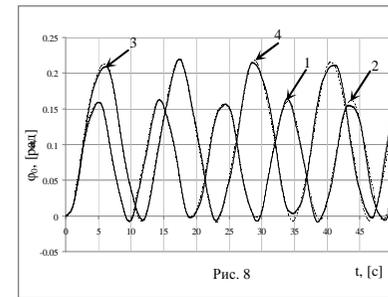


Рис. 8

В первом варианте  $m_p = m$ , а во втором  $m_p = 20m$ . В данном случае  $m = 0.0254$  кг ( $p = 50$ ).

На рис. 8 – 10 приведены графики изменения угла поворота  $\Phi_0$  для узла при  $k = 0$ , горизонтального перемещения  $v_p(t)$ , для узла при  $k = p$  и изменения температуры  $\tau(x)$  по длине стержня, при различных значениях массы  $m_p$ . 1 – сплошная линия, задача решена в нелинейной постановке при  $m_p = m$ ; 2 –

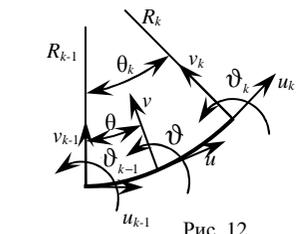
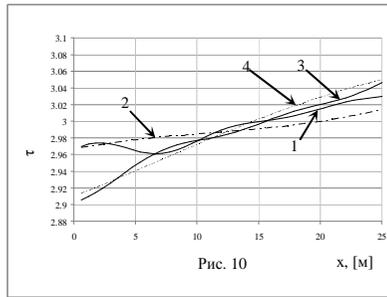
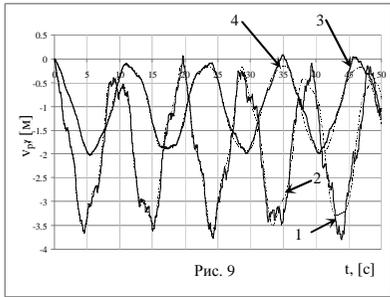


Рис. 12

жесткости  $k$ -го КЭ стержня для задачи плоского изгиба (рис. 12).

пунктирная линия, задача решена в линейной постановке при  $m_p = m$ ; 3 – сплошная линия, задача решена в нелинейной постановке при  $m_p = 20m$ ; 4 – пунктирная линия, задача решена в линейной постановке при  $m_p = 20m$ .



Как видно из графиков температурный нагрев оказывает существенное влияние на динамическое поведение штанги гравитационной стабилизации, что приводит к значительным термоупругим колебаниям, большим перемещениям и углам поворота, как штанги, так и самого КА.

В третьей главе диссертации решена задача о динамической устойчивости трубчатого тонкостенного стержня при солнечном нагреве в плоскости и из плоскости падения солнечных лучей. Для построения математических моделей использовался принцип возможных перемещений и МКЭ.

При рассмотрении динамической устойчивости искривленного нагретого стержня относительно невозмущенного положения равновесия, по изгибным формам колебаний в его плоскости с использованием принципа возможных перемещений, линеаризованное уравнение теплопроводности (сначала без учета излучения  $\epsilon^e = \epsilon^i = 0$ ) записывалось в виде (верхним индексом «0» и «1» обозначались невозмущенное состояние и возмущенное движение):

$$c\rho h 100^\circ \tau_1^1 + \frac{h\lambda 100^\circ}{r^2} \tau_1^1 = \frac{1}{2} q_* \sin(\gamma - \vartheta^0) \cdot \vartheta^1. \quad (18)$$

Принцип возможных перемещений для возмущенного движения:

$$\int_0^l [M^1 \delta \kappa^1 + m(\ddot{u}^1 \delta u^1 + \ddot{v}^1 \delta v^1)] ds = 0, \quad (19)$$

Перемещения стержня представлялись по методу Ритца в виде разложений:

$$v^1(\bar{s}, \bar{t}) = r \sum_i q_i(\bar{t}) \varphi_i(\bar{s}), \quad u^1(\bar{s}, \bar{t}) = r \sum_i q_i(\bar{t}) \psi_i(\bar{s}), \quad (20)$$

где  $\varphi_i(\bar{s})$  – заданные функции, удовлетворяющие граничным условиям  $\varphi_i = 0, \varphi_i' = 0$  при  $\bar{s} = 0, \bar{s} = \frac{s}{l}, \bar{t} = t \sqrt{\frac{EI}{m_0 l^4}}$ ; функции  $\psi_i$  выражаются через заданные функции  $\varphi_i(\bar{s})$ , считая стержень в возмущенном движении нерастяжимым:

$$\psi_i(\bar{s}) = -\eta \int_0^{\bar{s}} \cos(\gamma - \vartheta^0) \varphi_i d\bar{s}. \quad (21)$$

где  $\eta = q_* \alpha r l / 2\lambda h, l$  – длина стержня.

На основании (19) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений термоупругих колебаний для обобщенных координат  $q_i(\bar{t})$ . Удовлетворяя уравнение теплопроводности (18) по методу Бубнова – Галеркина на совокупности функций  $\theta_i' = (\varphi_i' - \eta \psi_i \cos(\gamma - \vartheta^0))'$  получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для параметров  $r_i(\bar{t})$ . Эти две связанные системы уравнений после приведения к безразмерному виду записываются как

$$\begin{cases} \sum_j (\mu_{ij} \frac{d^2 q_j}{d\bar{t}^2} + \kappa_{ij} q_j) + r_i = 0, \\ -\sum_j \gamma_{ij} q_j + \psi \frac{dr_i}{d\bar{t}} + r_i = 0, \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots). \quad (22)$$

$$\text{где } r_i = \alpha \frac{l^2}{r^2} \int_0^1 T_1^1 \theta_i' d\bar{s}, \quad \psi = \frac{r^2}{l^2} \frac{c\rho}{\lambda} \sqrt{\frac{EI}{m_0}}.$$

При исследовании динамической устойчивости искривленного в невозмущенном состоянии стержня по изгибно-крутильным формам, движение характеризуется в возмущенном движении перемещением  $w^1(s, t)$  в направлении оси  $z$  и углом закручивания  $\varphi^1(s, t)$  относительно искривленной оси  $s$ , рис. 11.

Приращение теплового потока в возмущенном движении без учета излучения:

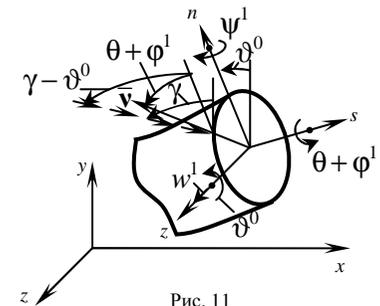


Рис. 11