

На правах рукописи



Ле Ван Хао

**Моделирование нестационарных
термоупругодиффузионных
колебаний балки Бернулли-Эйлера**

1.1.8. – «Механика деформируемого твердого тела»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2025

Работа выполнена в *ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ)*.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры «Прикладные программные средства и математические методы» ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ), Земсков Андрей Владимирович.

Официальные оппоненты:

Димитриенко Юрий Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана);

Ломовской Виктор Андреевич, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории «Структурообразования в дисперсных системах» Института физической химии и электрохимии имени А.Н. Фрумкина Российской академии наук.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт автоматизации проектирования Российской академии наук (ИАП РАН).

Защита состоится 29 октября 2025 г. в 15:00 часов на заседании диссертационного совета 24.2.327.07 при ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ), расположенном по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, дом 4, МАИ.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ) и на сайте:

https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT_ID=185148

Автореферат разослан «____» _____ 2025 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь
диссертационного совета,

к.т.н., доцент



Сердюк Дмитрий Олегович.

Общая характеристика работы

В связи развитием современных технологий производства конструкционных материалов, работающих в условиях взаимодействия полей различной физической природы, интерес ученых все больше привлекает вопрос о моделировании связанных физико-механических процессов в сплошных средах. Взаимодействие физических полей проявляется в форме механодиффузии, термомеханодиффузии и т. д., и часто наблюдается в технических системах. Важно отметить, что подавляющее большинство тонкостенных конструкций (авиационная, ракетно-космическая техника, судостроение и т. д.) представляют собой оболочечно-стержневые системы, состоящие из элементов в виде тонких пластин и оболочек, соединенных или усиленных стержнями. Эффекты, обусловленные взаимодействием физических полей, могут оказывать отрицательное влияние на напряженно-деформированное состояние указанных конструкций и их отдельных элементов.

Современные высокоинтенсивные технологические процессы (например, взрывное сваривание, электроискровая и лазерная обработка материалов, нанесение покрытий и т. д.) связаны не только с большими тепловыми потоками и скоростями нагрева. В большинстве таких процессов происходит быстрое внедрение или перемещение поверхностного материала или его отдельных компонентов, сопровождаемое изменением напряженно-деформированного состояния. Поэтому актуальной задачей является разработка математических моделей, способных адекватно описывать эти явления в различных механических системах как с научной, так и с практической точек зрения.

На сегодняшний день на основе известных уравнений механики сплошных сред, уравнений тепло и массопереноса, а также законов термодинамики построены модели, учитывающие взаимное влияние механических, температурных, диффузионных и пр. полей. Данная теория, представляющая собой ключевой инструмент для описания сложных физических процессов в твердых телах, является очень востребованной в настоящее время. Об этом свидетельствует большое количество современных исследований, выполненных как российскими, так и зарубежными учеными. Среди наиболее значимых для тематики данного диссертационного исследования работ следует выделить труды ряда зарубежных авторов, включая: M. Aouadi, Copetti M.I.M, Miranville A., Kumar R., Kansal T., Sherief H.H., Saleh H., Bhattacharya D., Kanoria M. и др. В отечественной научной литературе значительный вклад в данную область внесли такие исследователи, как: Еремеев В.С., Земсков

А.В., Индейцев Д.А., Келлер И.Э., Князева А.Г., Ломовской В.А., Морозов Н.Ф., Тарлаковский Д.В., Флячок В.М., Фрейдин А.Б., Швеи Р.Н. и др.

В настоящей работе представлена уточненная модель расчёта балок по теории Бернулли-Эйлера с учетом того, что напряженно-деформированное состояние связано с термодиффузионными процессами. Рассматриваются шарнирно опертые и консольно закрепленные балки, находящиеся под действием сосредоточенных и распределенных по длине изгибающих моментов и перерезывающих сил. Одновременно с этим задаются граничные и распределенные по длине балки термодиффузионные возмущения.

Актуальность работы связана с тем, что за последние годы значительно возрос интерес ученых к проблеме исследования связанных термомеханодиффузионных процессов в сплошных средах и тонкостенных элементах конструкций (балки, пластины, втулки, валы, трубопроводы и т.п.), что подтверждается большим количеством научных публикаций, как российских, так и зарубежных ученых.

С другой стороны, надо отметить, что подавляющее большинство публикаций связано с моделированием как стационарных, так и нестационарных процессов в телах канонической формы: слой или полупространство. В то же время, реальные тела имеют конечный размер. Поэтому весьма важными и актуальными являются вопросы, связанные с разработкой моделей термомеханодиффузии для балок, пластин и оболочек, которые являются основными элементами конструкций, используемых в технике.

Целью диссертационной работы является исследование взаимодействия нестационарных механических, диффузионных и температурных полей в изгибаемых балках, рассматриваемых в рамках теории Бернулли-Эйлера. Исследование включает в себя формулировку общей постановки задачи о нестационарных термоупругодиффузионных колебаниях балки и разработку методов решения начально-краевых задач, соответствующих заданным условиям нагружения и закрепления балки.

Методы исследования. Для построения замкнутой модели термомеханодиффузионных колебаний балки используется математический аппарат линейной теории упругости, законы тепломассопереноса, гипотезы балочной теории Бернулли-Эйлера и обобщенный принцип Даламбера, позволяющий перейти от общих уравнений термоупругой диффузии для сплошных сред к уравнениям, описывающим поперечные колебания балки с учётом тепломассопереноса. Метод решения основан на применении аппарата обобщенных функций, теории интегральных преобразований и рядов Фурье. Также при-

меняется метод эквивалентных граничных условий, который позволяет выразить решение одной начально-краевой задачи через известное решение другой задачи, отличающейся от исходной только набором краевых условий.

Научная новизна работы заключается в постановке и разработке численно-аналитических методов решений нового класса нестационарных задач термоупругодиффузионных колебаний балки Бернулли-Эйлера при различных сочетаниях внешних нагрузок и способов закрепления балки. В частности, были решены задачи для шарнирно опертых и консольно закреплённых балок, а также для балок на упругом основании Винклера.

Достоверность и обоснованность полученных результатов гарантируется применением устоявшихся в научной практике методов построения моделей механики деформируемого твердого тела и термодинамики, а также апробированных подходов для решения начально-краевых задач. В дополнение к этому, проведено сравнение полученных решений с известными результатами для упругих балок, а также исследованы предельные переходы к известным решениям статических задач, что подтверждает корректность предложенных в работе моделей и методов решения соответствующих начально-краевых задач.

Практическая значимость работы обусловлена тем, что при проектировании конструкций и их отдельных элементов, функционирующих в условиях многофакторных внешних воздействий, важнейшим вопросом при оценке прочности материалов является учет влияния теплового и диффузионного движения частиц в твердом теле на процессы деформирования.

Термомеханодиффузия с одной стороны может приводить к нежелательным структурным изменениям в конструкциях авиационной, ракетно-космической и транспортной техники, подвергающихся механическим и термодиффузионным нагрузкам. С другой стороны, она играет ключевую роль в технологических процессах, связанных с изготовлением новых сплавов или с обработкой уже изготовленных сплавов с целью изменения их свойств. Примерами таких технологических процессов являются: диффузионная пайка и диффузионная сварка, которые с конца XX века активно внедряются в производство летательных аппаратов. Необходимо отметить, что явление термомеханодиффузии характерно для процесса поверхностной модификации металлов, в том числе и для таких широко распространённых процессов как: цементации стали, электроискровая и лазерная обработка материалов.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

- разработка математической модели нестационарных термоупругодиффузионных колебаний балки Бернулли-Эйлера с учётом конечной скорости распространения тепловых и диффузионных потоков;

- разработка методов решения начально-краевых задач для шарнирно опёртых и консольно закреплённых балок, а также балок на упругом основании;

- расчёт нестационарных термоупругодиффузионных колебаний шарнирно опёртой балки, находящейся под действием сосредоточенных механических нагрузок и термодиффузионных возмущений, приложенных к концам балки;

- расчёт нестационарных термоупругодиффузионных колебаний балки на упругом основании, находящейся под действием распределённых поперечных сил и термодиффузионных возмущений.

- расчёт нестационарных термоупругодиффузионных колебаний консольно закреплённой балки, находящейся под действием распределённых поперечных сил, а также поперечной силы приложенной к свободному концу;

- численное исследование взаимодействия механического, температурного и диффузионных полей в изгибаемых балках.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы были представлены и обсуждены на всероссийских и международных научных конференциях, симпозиумах и семинарах:

- 11-я Всероссийская научная конференция с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» (г. Москва, ИПРИМ РАН, 23 – 25 ноября 2021 г);

- XI научно-практическая конференция «Проблемы безопасности на транспорте» (г. Гомель: БелГУТ, 2021);

- XVI Всероссийская школа «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (Дивноморское, 26–31 мая 2022 г);

- Научная конференция «Ломоносовские чтения» Секция механики (г. Москва, МГУ, 2022–2025);

- Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Калужская область, г. Кременки, 2022–2024);

- Конференция «Механика деформируемого твердого тела в проектировании конструкций» (Пермь, 2022);

- XXIII Зимняя школа по механике сплошных сред (г. Пермь, Россия, 2023);

- XXI Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 2023);
- V Международная научно-практическая конференция, посвященная 70- летию БИИЖТа-БелГУТа «Инновационное развитие транспортного и строительного комплексов» (г. Гомель, Беларусь, 2023);
- 51-я школа-конференция «Актуальные проблемы механики» памяти Д.А. Индейцева (Великий Новгород, 2024);
- 3rd International Conference on Advanced Smart Materials and Structures (ASMaS-2024) (Viet Nam, 2024)

Публикации. По теме диссертационного исследования опубликовано: 5 статей в рецензируемых журналах, 4 статьи в сборниках трудов всероссийских и международных конференций и 12 тезисов докладов. Всего – 21 публикация.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы из 114 наименований. Общий объем диссертации – 112 страницы, включая 43 рисунка.

Содержание работы

Во введении формулируются цели диссертационного исследования, обосновывается его актуальность, научная новизна и практическая значимость. Приводится основное содержание диссертационной работы и сведения об апробации результатов, полученных в работе.

В первой главе диссертации представлен обзор современного состояния исследований, выявлены существующие актуальные проблемы в области моделирования связанных процессов термомеханодиффузии.

Здесь же на основе общей модели термоупругой диффузии для сплошных сред с использованием вариационного принципа Даламбера построена модель нестационарных колебаний балки Бернулли-Эйлера с учетом теплопередачи и диффузии (в том числе с учетом наличия упругого основания). Механические нагрузки вызывают восходящий диффузионный поток (эффект Горского) и нагрев, что влияет на напряжённо-деформированное состояние. Уравнения, описывающие поперечные нестационарные колебания балки с учетом тепломассопереноса, имеют вид [1–5]:

$$\begin{aligned}
\ddot{v}'' - a\ddot{v} &= v^{IV} + c_w v + b_1 \vartheta'' + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} H_j'' + F_1, \quad a = \frac{F}{J_3}, \\
\sum_{k=0}^M \frac{(\tau_0)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \left(\dot{v} - B_1 \dot{v}'' + \sum_{q=1}^N v^{(q)} \dot{H}_q \right) &= \kappa_1 \vartheta'' + F_2, \\
\sum_{k=0}^K \frac{(\tau_q)^k}{k!} \frac{\partial^k \dot{H}_q}{\partial t^k} &= D_1^{(q)} H_q'' + \Lambda_{11}^{(q)} v^{IV} - M_1^{(q)} \vartheta'' + F_{q+2}, \quad H_{N+1} = - \sum_{q=1}^N H_q, \\
F_1 &= -\frac{q+m'}{J_3}, \quad F_2 = \frac{q^{(Q)}}{J_3}, \quad F_{q+2} = \frac{z^{(q)}}{J_3}.
\end{aligned} \tag{1}$$

В системе (1) все величины являются безразмерными и связаны с размерными аналогами следующим образом:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{x_1}{l}, \quad v = \frac{v^*}{l}, \quad \vartheta = \frac{l\vartheta^*}{T_0}, \quad \tau = \frac{Ct}{l}, \quad C_{\alpha\beta} = \frac{C_{\alpha\alpha\beta\beta}}{C_{1111}}, \quad c_w = \frac{c_w^* l^4}{J_3^* C_{1111}}, \\
C^2 &= \frac{C_{1111}}{\rho}, \quad \alpha_\alpha^{(q)} = \frac{\alpha_{\alpha\alpha}^{(q)}}{C_{1111}}, \quad b_\alpha = \frac{b_{\alpha\alpha} T_0}{C_{1111}}, \quad \kappa_\alpha = \frac{\kappa_{\alpha\alpha}}{\rho c_0 C}, \quad B_\alpha = \frac{b_{\alpha\alpha}}{\rho c_0}, \quad M_i = \frac{M_i^*}{C_{1111} l^3}, \\
\tau_0 &= \frac{C\tau_t}{l}, \quad \tau_q = \frac{C\tau^{(q)}}{l}, \quad D_\alpha^{(q)} = \frac{D_{\alpha\alpha}^{(q)}}{Cl}, \quad v^{(q)} = \rho R T_0 \frac{\ln \left(n_0^{(q)} \gamma^{(q)} \right)}{m^{(q)} \rho T_0 c_0}, \quad H_q = l H_q^*, \\
\Lambda_{\alpha\beta}^{(q)} &= \frac{m^{(q)} D_{\alpha\alpha}^{(q)} \alpha_{\beta\beta}^{(q)} n_0^{(q)}}{\rho R T_0 C l}, \quad \tilde{q} = \frac{\tilde{q}^*}{C_{1111} l}, \quad z^{(q)} = \frac{z^{*(q)}}{C l^2}, \quad q^{(Q)} = \frac{q^{*(Q)}}{C T_0 \rho c_0 l^2}, \\
m &= \frac{m^*}{C_{1111} l^2}, \quad J_3 = \frac{J_3^*}{l^4}, \quad F = \frac{F^*}{l^2}, \quad M_i^{(q)} = \frac{n_0^{(q)} D_{ij}^{(q)}}{C l} \ln \left(n_0^{(q)} \gamma^{(q)} \right), \quad Q_i = \frac{Q_i^*}{C_{1111} l^2}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь: t – время; x_i – прямоугольные декартовы координаты; v^* – прогиб балки; l – длина балки; H_q^* – линейная плотность приращения концентрации q -ой компоненты вещества в составе $N + 1$ -компонентной среды; $n_0^{(q)}$ – начальная концентрации q -го вещества; ϑ^* – линейная плотность приращения температуры среды, T_0 – начальная температура среды; C_{ijkl} – компоненты тензора упругих постоянных; ρ – плотность; κ_{ij} – компоненты тензора теплопроводности; c_0 – удельная теплоемкость; b_{ij} – температурные коэффициенты, характеризующие нагрев среды за счет деформаций; $\alpha_{ij}^{(q)}$ – коэффициенты, характеризующие объёмное изменение среды за счёт диффузии; $D_{ij}^{(q)}$ – коэффициенты диффузии; $v^{*(q)}$ – коэффициенты, характеризующие нагрев среды за счет диффузии; R – газовая постоянная; $m^{(q)}$ – молярная масса

q -го вещества; $\tau^{(q)}$ – время релаксации диффузионных потоков; τ_t – временем расширения тепловых потоков; m^* – распределённый по длине изгибающий момент; M_i^* – изгибающие моменты, приложенные к концам балки; q^* – распределённая по длине поперечная сила; Q_i^* – поперечные силы, приложенные к концам балки; $q^{*(Q)}$ – линейная плотность источников тепла; $z^{*(q)}$ – линейная плотность источников массопереноса; F^* – площадь сечения балки; J_3^* – момент инерции сечения балки.

Уравнения (1) дополняются краевыми условиями, соответствующими заданным нагружениям и способам закрепления балки. Начальные условия полагаются нулевыми.

Во второй главе рассматривается задача о нестационарных поперечных колебаниях шарнирно-опертой балки Бернулли-Эйлера, изготовленной из многокомпонентного материала, находящейся под воздействием нестационарных изгибающих моментов и термодиффузионных возмущений заданных на её концах (рисунок 1).

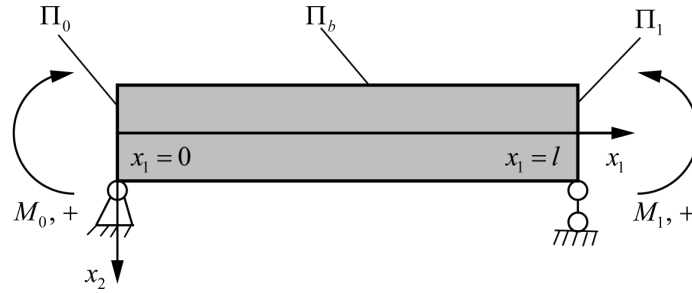


Рис. 1 Балка на упругом основании

Математическая модель нестационарных колебаний балки включает в себя уравнения (1) при $c_w = 0$, $m = 0$, $q = 0$, $q^{(Q)} = 0$ и $z^{(q)} = 0$ [4], которые дополняются краевыми условиями, соответствующими описанной схеме нагружения и закрепления.

$$\left(v'' + b_1 \vartheta + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(q)} H_j \right) \Big|_{x=0} = f_{11}, \quad \left(v'' + b_1 \vartheta + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(q)} H_j \right) \Big|_{x=1} = f_{12}, \quad (3)$$

$$v|_{x=0} = f_{21}, \quad v|_{x=1} = f_{22}, \quad \vartheta|_{x=0} = f_{31}, \quad \vartheta|_{x=1} = f_{32},$$

$$H_q|_{x=0} = f_{q+3,1}, \quad H_q|_{x=1} = f_{q+3,2}.$$

Здесь $f_{kl}(\tau)$ внешние воздействия на концах балки. Начальные условия полагаются нулевыми.

Решения уравнений (1), (3) представляется в виде ($q = \overline{1, N}$):

$$\begin{pmatrix} v(x, \tau) \\ \vartheta(x, \tau) \\ H_q(x, \tau) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{N+3} \int_0^\tau \begin{pmatrix} G_{1k}(x, \tau-t) f_{k1}(t) + G_{1k}(1-x, \tau-t) f_{k2}(t) \\ G_{2k}(x, \tau-t) f_{k1}(t) + G_{2k}(1-x, \tau-t) f_{k2}(t) \\ G_{q+2,k}(x, \tau-t) f_{k1}(t) + G_{q+2,k}(1-x, \tau-t) f_{k2}(t) \end{pmatrix} dt, \quad (4)$$

где $G_{mk}(x, \tau)$ – функции Грина, которые удовлетворяют следующей краевой задаче

$$\begin{aligned} \ddot{G}_{1k}'' - a\ddot{G}_{1k} &= G_{1k}^{IV} + b_1 G_{2k}'' + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+2,k}'', \\ \sum_{k=0}^M \frac{(\tau_0)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \tau^k} \left(\dot{G}_{2k} - B_1 \dot{G}_{1k}'' + \sum_{q=1}^N v^{(q)} \dot{G}_{q+2,k} \right) &= \kappa_1 G_{2k}'', \\ \sum_{k=0}^K \frac{(\tau_q)^k}{k!} \frac{\partial^k \dot{G}_{q+2,k}}{\partial \tau^k} &= D_1^{(q)} G_{q+2,k}'' + \Lambda_{11}^{(q)} G_{1k}^{IV} - M_1^{(q)} G_{2k}'', \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \left(G_{1k}'' + b_1 G_{2k} + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+2,k} \right) \Big|_{x=0} &= \delta_{1k} \delta(\tau), \quad G_{1k}|_{x=0} = \delta_{2k} \delta(\tau), \\ \left(G_{1k}'' + b_1 G_{2k} + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+2,k} \right) \Big|_{x=1} &= 0, \quad G_{q+2,k}|_{x=0} = \delta_{q+3,k} \delta(\tau), \\ G_{1k}|_{x=1} &= 0, \quad G_{2k}|_{x=0} = \delta_{3k} \delta(\tau), \quad G_{2k}|_{x=1} = 0, \quad G_{q+2,k}|_{x=1} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Алгоритм нахождения функций Грина осуществляется следующим образом: сначала к уравнениям (5), (6) применяется преобразование Лапласа. Затем каждое уравнение умножается на $\sin \lambda_n x$ ($\lambda_n = \pi n$) и интегрируется по промежутку $[0, 1]$, в результате чего получаем систему линейных алгебраических уравнений. Решая эту систему, находим трансформанты Лапласа функций Грина. Оригиналы Лапласа этих функций определяются с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления.

В качестве объекта для численного исследования здесь и далее рассматривается балка длиной $l = 0,01$ м, прямоугольного сечения $h \times b = 0,05l \times 0,05l$ из дюралюминия. Независимыми компонентами являются цинк (компонент 1) и медь (компонент 2), которые диффундируют в алюминии. Физические характеристики материала следующие:

$$\begin{aligned}
C_{1122} &= 6.93 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{М}^2}, \quad C_{1212} = 2.56 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{М}^2}, \quad b_{11} = 4.94 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{М}^2 \cdot \text{К}}, \\
D_{11}^{(1)} &= 7.74 \cdot 10^{-14} \frac{\text{М}^2}{\text{с}}, \quad D_{11}^{(2)} = 6.67 \cdot 10^{-14} \frac{\text{М}^2}{\text{с}}, \quad \kappa_{11} = 240 \frac{\text{Вт}}{\text{М} \cdot \text{К}}, \quad T_0 = 700 \text{ К}, \\
\alpha_{11}^{(1)} &= 1.55 \cdot 10^7 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}, \quad \alpha_{11}^{(2)} = 6.14 \cdot 10^7 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}, \quad \rho = 2780 \frac{\text{кг}}{\text{М}^3}, \quad c_0 = 920 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}, \\
m^{(1)} &= 0.027 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}, \quad m^{(2)} = 0.064 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}, \quad n_0^{(1)} = 0.935, \quad n_0^{(2)} = 0.045.
\end{aligned} \tag{7}$$

Пример 1. Рассматривается балка, к концам которой приложены изгибающие моменты, заданные следующим образом:

$$f_{11}(\tau) = -\frac{M_0(\tau)}{J_3} = H(\tau), \quad f_{12}(\tau) = -\frac{M_1(\tau)}{J_3} = H(\tau), \tag{8}$$

Результаты расчетов представлены на рисунках 2–7, где показаны прогибы балки (в том числе и при статической нагрузке), температурное и диффузионные поля в различные моменты времени. На рисунках 4, 5 сравниваются упругие и термоупругодиффузионные колебания, а на рисунке 7 сравниваются диффузионные поля при наличии и отсутствии релаксации диффузионных потоков.

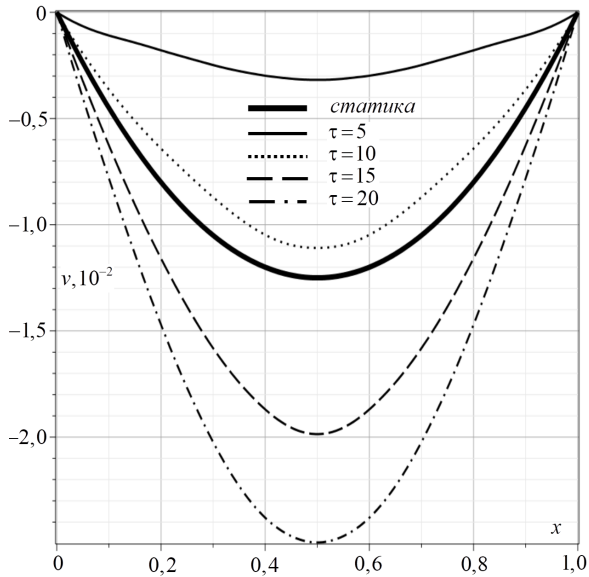


Рис. 2 Прогибы балки $v(x, \tau)$.

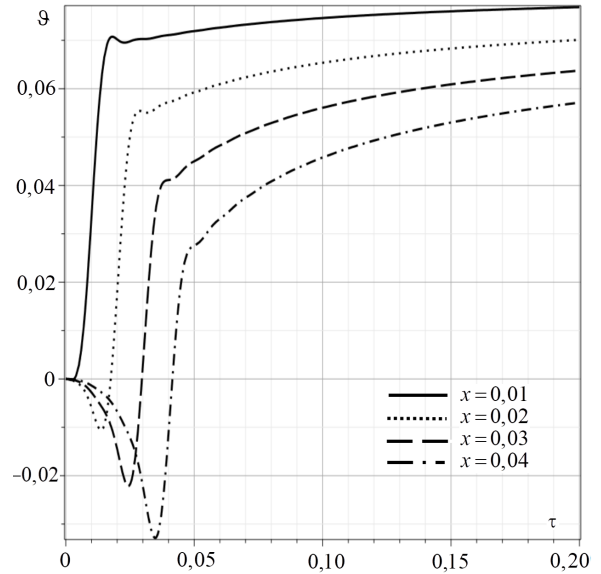


Рис. 3 Линейная плотность приращения температуры $\vartheta(x, \tau)$.

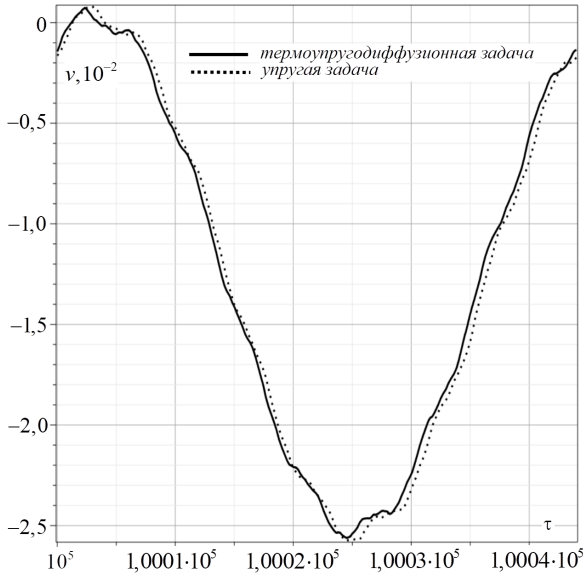


Рис. 4 Прогибы балки $v(x, \tau)$. Сравнение термоупругодиффузионной модели и упругой.

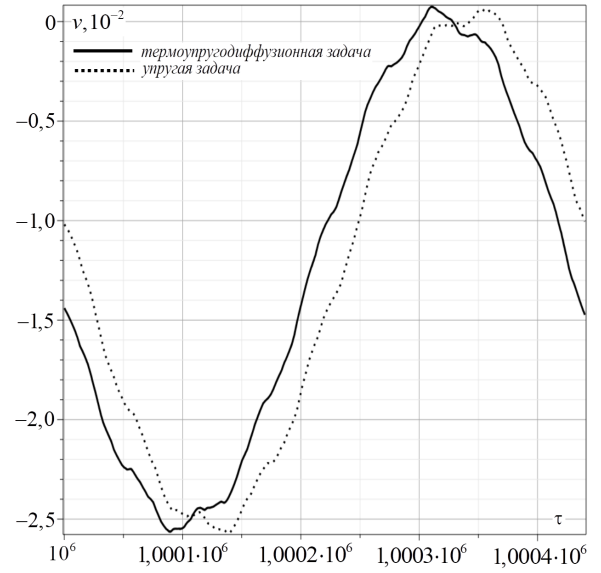


Рис. 5 Прогибы балки $v(x, \tau)$. Сравнение термоупругодиффузионной модели и упругой.

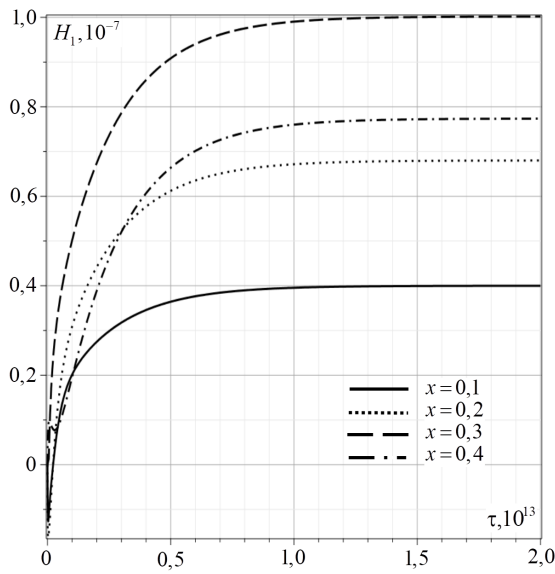


Рис. 6 Линейная плотность приращения концентрации цинка $H_1(x, \tau)$.

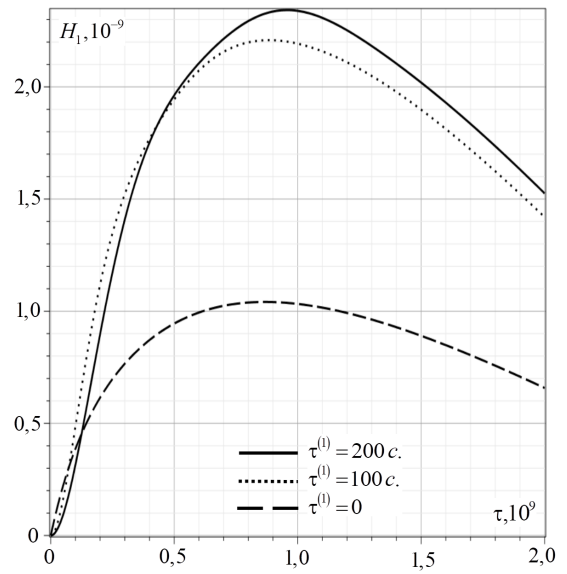


Рис. 7 Линейная плотность приращения концентрации цинка $H_1(0.1, \tau)$.

Пример 2. Рассматривается шарнирно опертая балка с заданным температурным режимом на концах:

$$f_{31}(\tau) = \vartheta_0(\tau) = H(\tau), f_{32}(\tau) = \vartheta_1(\tau) = H(\tau). \quad (9)$$

На рисунках 8, 9 показано температурное поле стержня. На рисунке 8 можно видеть фронты температурных волн (сплошная и пунктирная линии).

Заданный температурный режим инициирует диффузионные потоки цинка и меди (рисунки 10 и 11), а также деформации (рисунки 12 и 13 – прогибы балки). На рисунке 13 сравниваются прогибы балки с учетом (сплошная и пунктирная линии) и без учета (штриховая линия) релаксации температурных и диффузионных потоков.

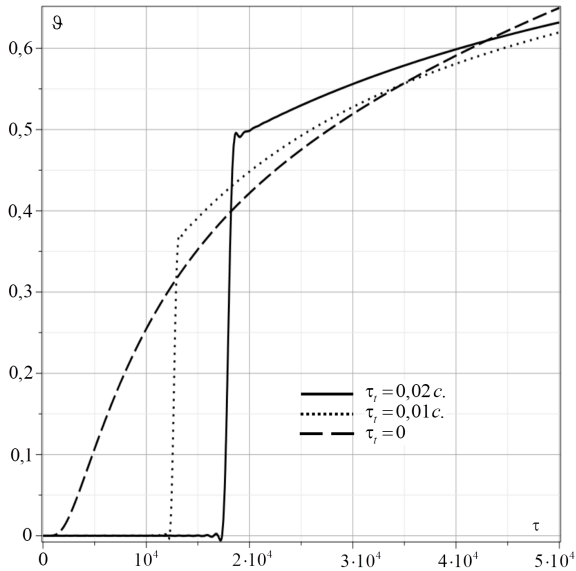


Рис. 8 Линейная плотность приращения температуры $\vartheta(x, \tau)$.

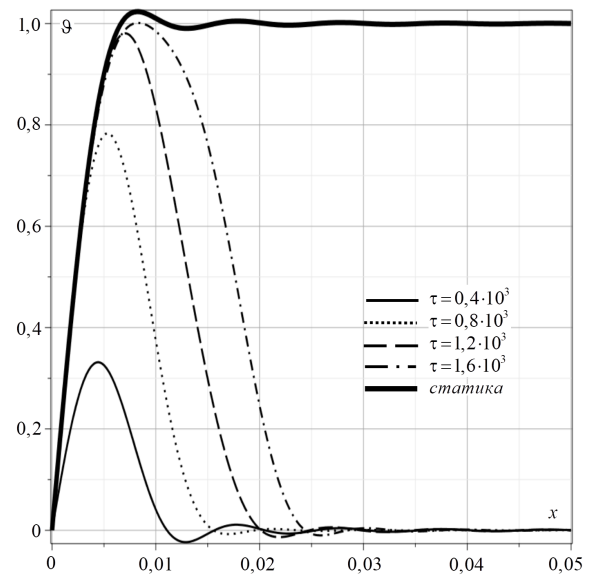


Рис. 9 Линейная плотность приращения температуры $\vartheta(x, \tau)$.

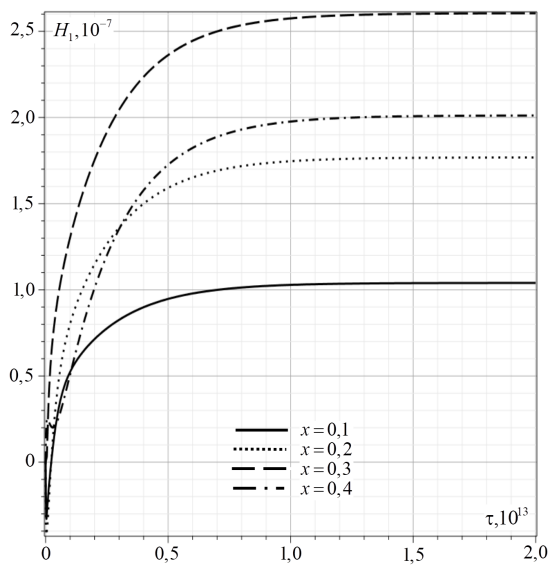


Рис. 10 Линейная плотность приращения концентрации цинка $H_1(x, \tau)$.

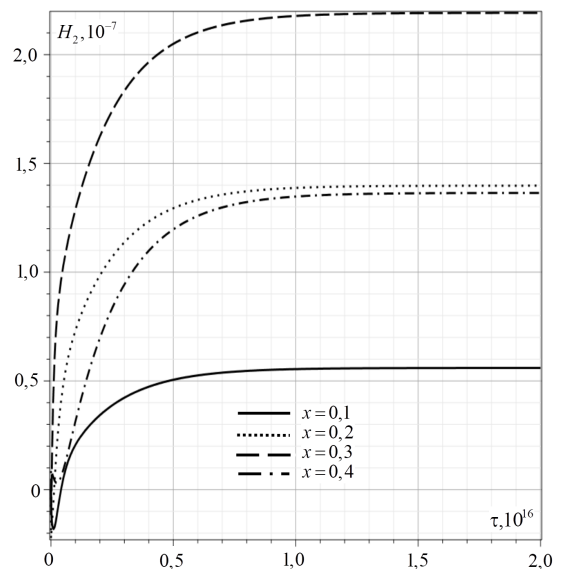
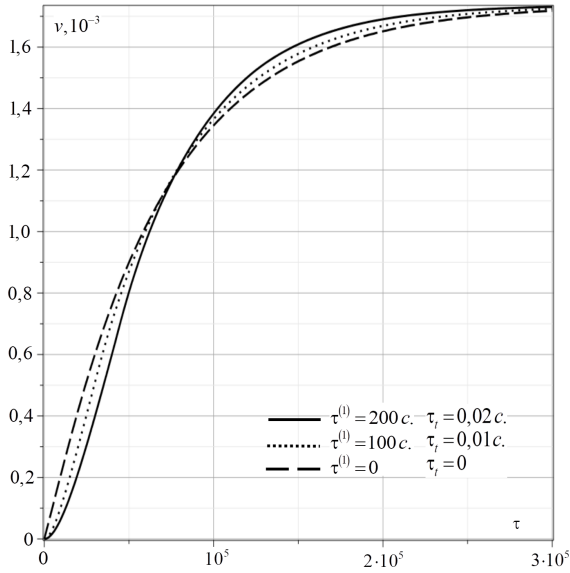
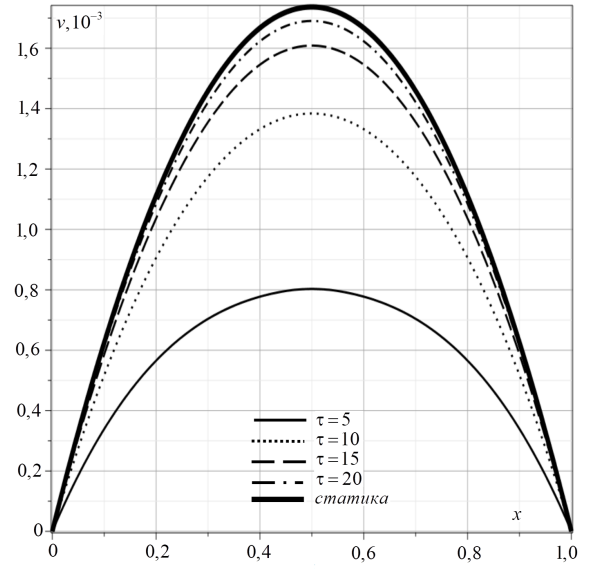


Рис. 11 Линейная плотность приращения концентрации меди $H_2(x, \tau)$.

Рис. 12 Прогибы балки $v(x, \tau)$.Рис. 13 Прогибы балки $v(x, \tau)$.

В третьей главе Рассматривается задача нестационарных колебаний балки Бернулли-Эйлера на упругом основании Винклера с учетом возникающих за счет деформаций температурного и диффузионного полей [3,5]. Схема закрепления и приложенных внешних воздействий показана на рисунке 14

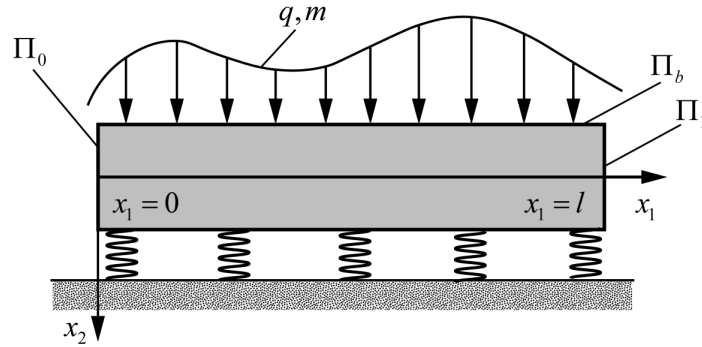


Рис. 14 Балка на упругом основании

Математическая модель содержит уравнения (1), которые дополняются краевыми условиями

$$\begin{aligned} \left(v'' + b_1 \vartheta + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(q)} H_j \right) \Big|_{x=0} &= 0, \quad v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=1} = 0, \quad H_q|_{x=0} = 0, \\ \left(v'' + b_1 \vartheta + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(q)} H_j \right) \Big|_{x=1} &= 0, \quad \vartheta|_{x=0} = 0, \quad \vartheta|_{x=1} = 0, \quad H_q|_{x=1} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Начальные условия полагаются нулевыми. Метод решения аналогичен изложенному в главе 2.

Пример 3. Для расчётов принимается балка с характеристиками, представленными в главе 2. Коэффициент основания и распределённая нагрузка заданы следующим образом.

$$c_w^* = 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{м}}, \quad F_1(x, \tau) = H(\tau) H(x), \quad F_{q+2}(x, \tau) = 0.$$

Результаты расчетов представлены на рисунках 15-18

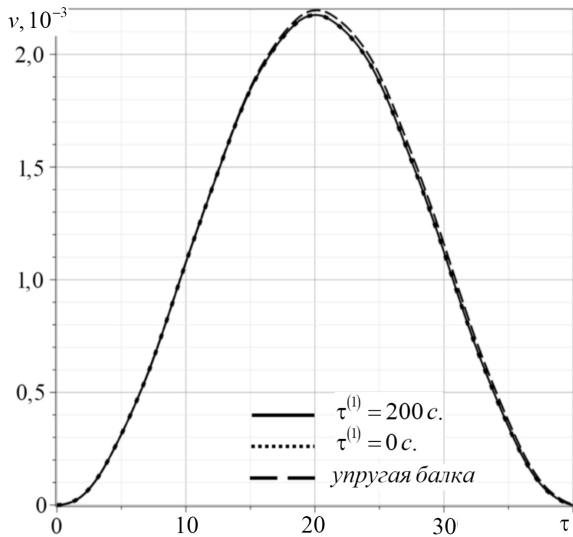


Рис. 15 Сравнение прогибов балки с учетом тепломассопереноса и без (начальные моменты времени)

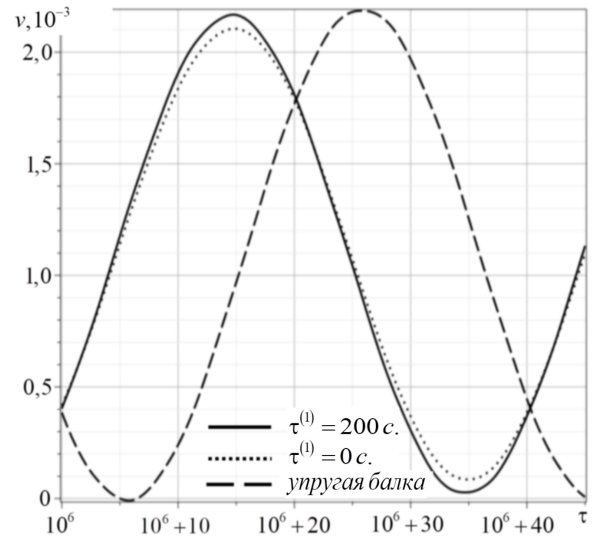


Рис. 16 Сравнение прогибов балки с учетом тепломассопереноса и без (развитие процесса)

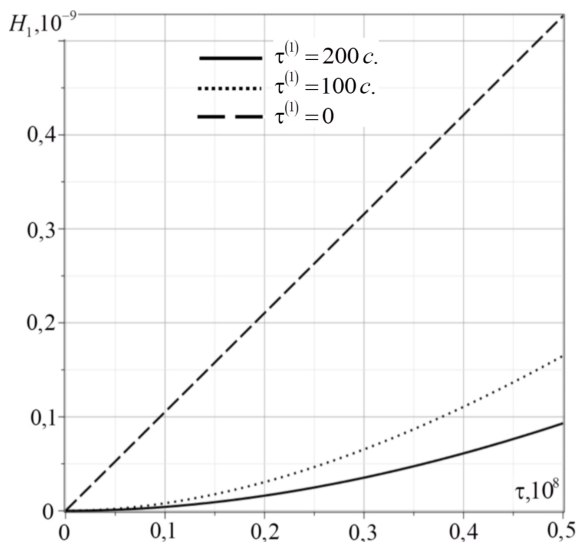


Рис. 17 Плотность приращения концентрации первой компоненты (цинк) с учетом релаксации и без

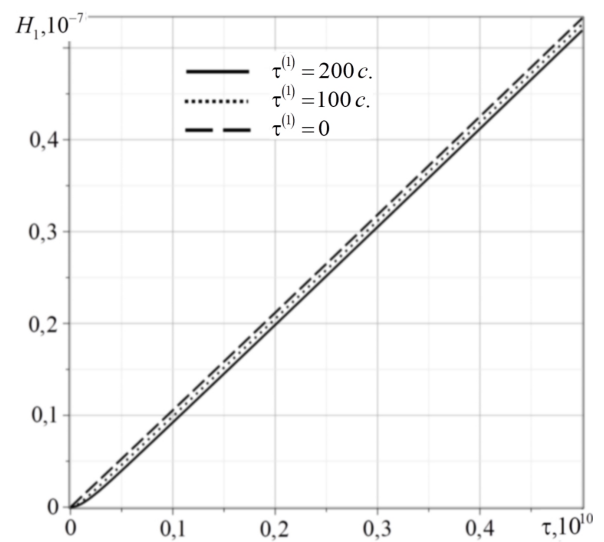


Рис. 18 Плотность приращения концентрации первой компоненты (цинк) с учетом релаксации и без

В четвертой главе исследуются термомехано-диффузионные процессы, возникающие при изгибе консольно-закрепленной балки Бернулли-Эйлера под действием нестационарной поперечной механической нагрузки [1, 2]. Рассматриваются как распределённые по длине балке нагрузки, так и нагрузки, приложенные к свободному концу балки (рисунок 19).

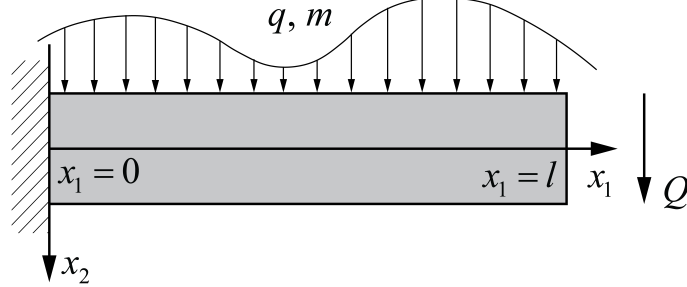


Рис. 19 Консольно закреплённая балка

Для описания физико-механических процессов в изгибаемой консоли используются уравнение (1) при $c_w = 0$ совместно с краевыми условиями

$$\begin{aligned} \left(v'' + b_1 \vartheta + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} H_j \right) \Big|_{x=1} &= 0, \quad v'|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=0} = 0, \quad H_q|_{x=0} = 0, \\ \left(v''' + b_1 \vartheta' + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} H'_j - \ddot{v}' \right) \Big|_{x=1} &= f_3 = \frac{-Q + m|_{x=1}}{J_3}, \\ \left(\Lambda_{11}^{(q)} v''' - M_1^{(q)} \vartheta' + D_1^{(q)} H'_q \right) \Big|_{x=1} &= 0, \quad \vartheta|_{x=0} = 0, \quad \vartheta'|_{x=1} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь основная сложность заключается в невозможности построения решения задачи (1), (11) в виде рядов Фурье, что осложняет обращение преобразования Лапласа, которое также используется при решении этой задачи. Для преодоления указанной проблемы используется метод эквивалентных граничных условий, который заключается в том, что вначале вместо исходной задачи рассматривается вспомогательная задача, включающая уравнение (1) и следующие граничные условия

$$\begin{aligned} \left(v'' + b_1 \vartheta + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} H_j \right) \Big|_{x=0} &= f_1(\tau), \quad v|_{x=0} = 0, \quad v'|_{x=1} = f_2(\tau), \\ \left(v''' + b_1 \vartheta' + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} H'_j - \ddot{v}' \right) \Big|_{x=1} &= f_3 = \frac{-Q + m|_{x=1}}{J_3}, \quad H_q|_{x=0} = 0, \\ \left(\Lambda_{11}^{(q)} v''' - M_1^{(q)} \vartheta' + D_1^{(q)} H'_q \right) \Big|_{x=1} &= 0, \quad \vartheta|_{x=0} = 0, \quad \vartheta'|_{x=1} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

где функции $f_1(\tau)$ и $f_2(\tau)$ подлежат определению.

Решение задачи (1), (12) записывается следующим образом

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} v(x, \tau) \\ \vartheta(x, \tau) \\ H_q(x, \tau) \end{array} \right\} &= \int_0^\tau \sum_{k=1}^3 \left\{ \begin{array}{c} G_{1k}(x, \tau-t) \\ G_{2k}(x, \tau-t) \\ G_{q+2,k}(x, \tau-t) \end{array} \right\} f_k(t) dt + \\ &+ \int_0^\tau \int_0^1 \left\{ \begin{array}{c} G_{14}(x, \xi, \tau-t) \\ G_{24}(x, \xi, \tau-t) \\ G_{q+2,4}(x, \xi, \tau-t) \end{array} \right\} f_4(\xi, t) d\xi dt, \quad f_4 = F_1 = -\frac{q+m'}{J_3}. \end{aligned} \quad (13)$$

где для нахождения функций Грина используется методика, изложенная в Главе 2.

Следующий этап решения заключается в построении соотношений, связывающих правые части граничных условий исходной и вспомогательной задач, которые получаются путем подстановки решений (13) в граничные условия (11). В результате, приходим к следующим интегральным уравнениям

$$\sum_{j=1}^2 \int_0^\tau A_{ij}(\tau-t) \frac{\partial f_j(t)}{\partial t} dt = \varphi_i(\tau), \quad A_{ij}(\tau) = \int_0^\tau a_{ij}(t) dt \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11}(\tau) &= G'_{11}(0, \tau), \quad a_{21}(\tau) = G''_{11}(1, \tau) + b_1 G_{21}(1, \tau) + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+2,1}(1, \tau), \\ a_{12}(\tau) &= G'_{12}(0, \tau), \quad a_{22}(\tau) = G''_{12}(1, \tau) + b_1 G_{22}(1, \tau) + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+2,2}(1, \tau), \\ \varphi_1(\tau) &= - \int_0^\tau G'_{13}(0, \tau-t) f_3(t) dt - \int_0^\tau \int_0^1 G'_{14}(0, \xi, \tau-t) f_4(\xi, t) d\xi dt, \\ \varphi_2(\tau) &= - \int_0^\tau \left[G''_{13}(1, \tau-t) + b_1 G_{23}(1, \tau-t) + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+1,3}(1, \tau-t) \right] f_3(t) dt - \\ &- \int_0^\tau \int_0^1 \left[G''_{14}(1, \xi, \tau-t) + b_1 G_{24}(1, \xi, \tau-t) + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+1,4}(1, \xi, \tau-t) \right] f_4(\xi, t) d\xi dt. \end{aligned}$$

Интегральное уравнение (14) решается численно, с помощью квадратурных формул прямоугольников. Полученные таким образом сеточные представления функций $f_1(\tau)$ и $f_2(\tau)$ подставляются в свёртки (13), которые вычисляются численно, что в результате даёт решение исходной задачи (1), (11).

Пример 4. Рассматривается стержень с поперечной нагрузкой на свободном конце $x = 1$ заданной следующим образом

$$f_3(\tau) = -\frac{Q}{J_3} = H(\tau), \quad f_4(x, \tau) = 0.$$

Результаты расчетов представлены на рисунках 20–25

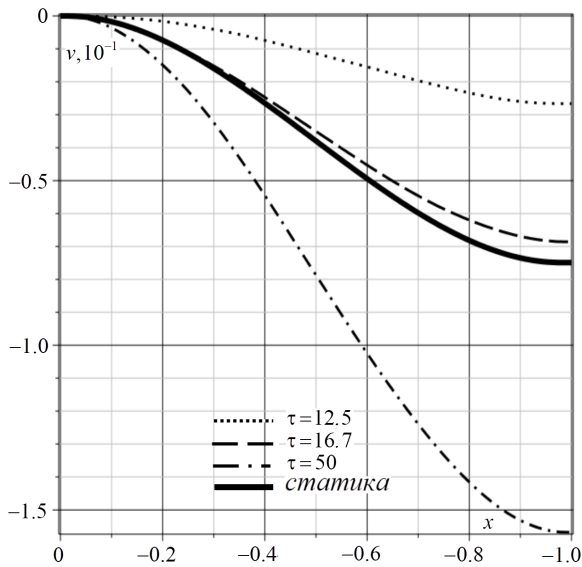


Рис. 20 Прогибы балки.

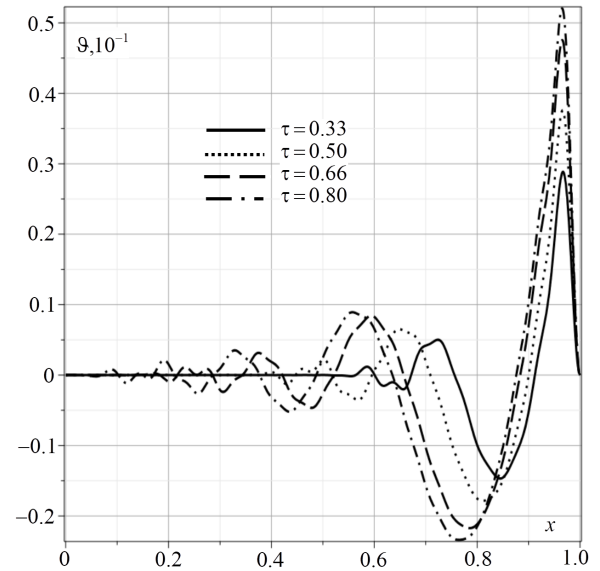


Рис. 21 Линейная плотность приращения температуры

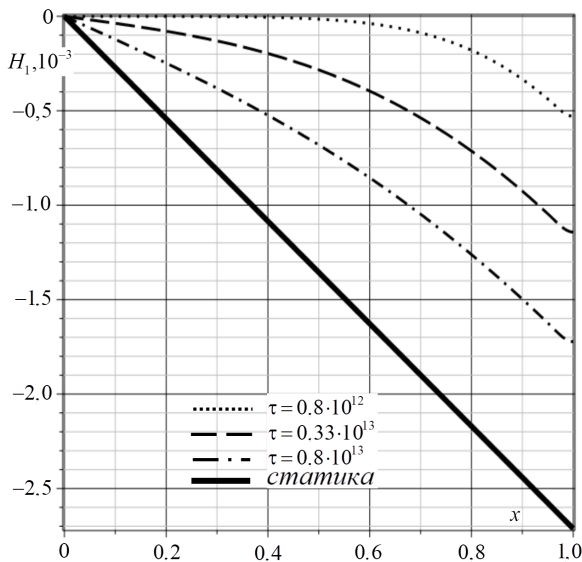


Рис. 22 Линейная плотность приращения концентрации цинка

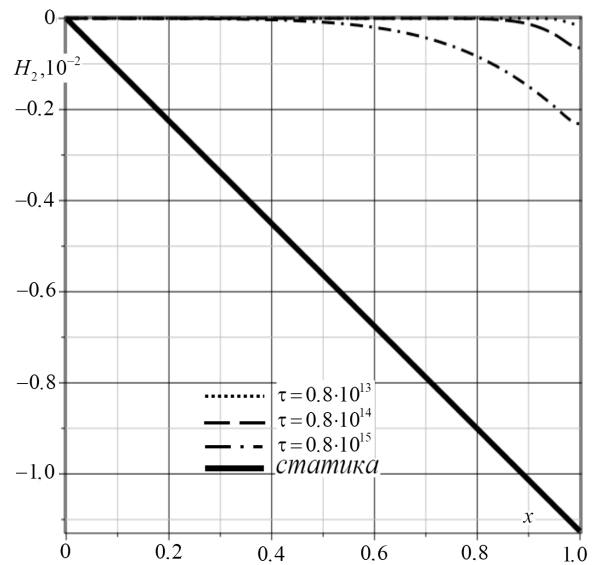


Рис. 23 Линейная плотность приращения концентрации меди

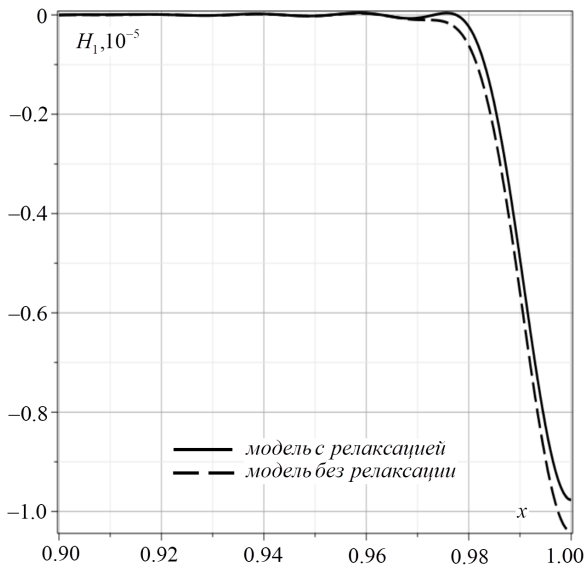


Рис. 24 Линейная плотность приращения концентрации цинка в момент времени $\tau = 10^9$

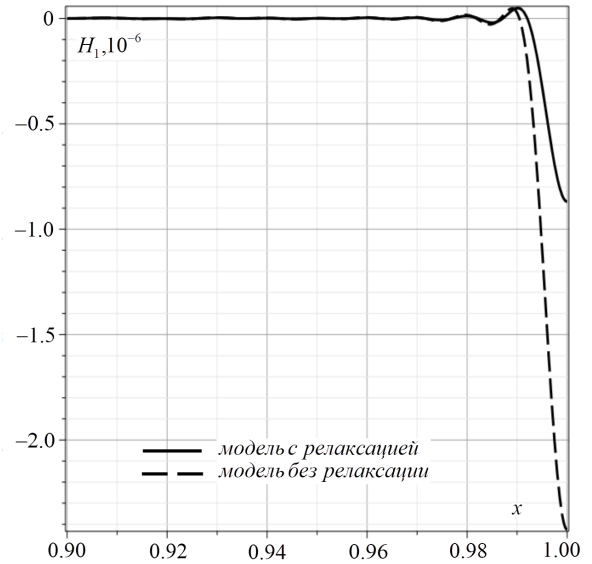


Рис. 25 Линейная плотность приращения концентрации цинка в момент времени $\tau = 10^8$

На рисунке 20 показаны прогибы балки в различные моменты времени и прогиб балки при статической нагрузке (жирная линия). Сравнение результатов для термомеханодиффузионной и упругой (при $\alpha_1^{(q)} = 0$ и $b_1 = 0$) моделей показывает, что влияние тепломассопереноса на механическое поле изгибаемой консольно-закрепленной балки Бернулли-Эйлера на рассматриваемом промежутке времени пренебрежимо мало (графики совпадают).

Графики на рисунках 22 и 23 демонстрируют плотности приращений концентраций цинка и меди при динамической и статической нагрузках. На рисунках 21 изображена плотность приращения температуры при динамических нагрузках.

Приведённые здесь результаты показывают, что релаксационные эффекты, обуславливающие конечную скорость распространения тепловых и диффузионных потоков, существенно проявляются в начальных моментах времени. Графики, представленные на рисунках 10, 11, 22 и 23 одинаково подходят как для классической модели тепломассопереноса, так и для модели с конечной скоростью распространения тепловых и диффузионных потоков. Примерный момент времени, когда обе модели дают уже достаточно близкие результаты, показан на рисунках 18 и 24. Однако на более ранних стадиях развития процесса наблюдаются существенные различия в результатах, полученных по разным моделям (рисунки 17, 25).

Термодиффузионные процессы хоть и незначительно, но влияют на поле перемещений. На рисунке 15 можно видеть, что упругие колебания (штрихо-

вая линия) в момент времени $\tau \sim 10^6$ имеют заметный фазовый сдвиг относительно термоупругодиффузионных колебаний. Однако, на более ранних стадиях развития процесса ($\tau \sim 10^1$) графики практически совпадают (рисунок 16). При этом амплитуды упругих и термоупругодиффузионных колебаний на протяжении рассматриваемого промежутка времени остаются примерно равными. Тот же самый результат имеет место для балки, изгибаемой под действием моментов, приложенным к её концам (рис. 4 и 5).

В заключении приведены основные результаты диссертационной работы:

1. Разработана математическая модель термомеханодиффузионных нестационарных колебаний балки Бернулли-Эйлера. Модель описывает взаимодействие механических, температурных и диффузионных полей в изгибаемых балках и позволяет учитывать конечную скорость распространения температурных и диффузионных возмущений.
2. В задачах об изгибе шарнирно опертой балки, а также для балки на упругом основании, предложен алгоритм решения, основанный на использовании преобразования Лапласа и разложения в тригонометрические ряды Фурье. Этот подход позволяет находить фундаментальное решение задачи в явной форме и моделировать термомеханодиффузионные колебания шарнирно опертых балок при различных режимах нагружения.
3. Разработан метод решения задачи о термомеханодиффузионных колебаниях консольно закрепленной ортотропной балки, основанный на использовании метода эквивалентных граничных условий. Этот метод позволил расширить класс решаемых задач о нестационарных колебаниях балок с учетом тепломассопереноса, в случаях, когда получить решение методом разделения переменных не представляется возможным.
4. Изучены переходы от термомеханодиффузионной модели изгиба балки к классическим моделям теории упругости, что позволило оценить степень взаимодействия физических полей в изгибаемой балке. Кроме того, исследованы предельные переходы к статическим задачам, решения которых хорошо известны.
5. Выполнено численное исследование взаимного влияния друг на друга механических, температурных и диффузионных полей в изгибаемой

балке при различных видах внешних воздействий (статических и динамических), с учетом и без учёта конечной скорости распространения тепловых и диффузионных потоков.

Публикации по теме диссертации в журналах из Перечня ВАК

1. Земсков А.В., Ле Ван Хао Изгиб ортотропной консольно-закреплённой балки Бернулли-Эйлера под действием распределенной нестационарной нагрузки с учетом тепломассопереноса // Труды МАИ. – 2025. – № 140. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=184058>.
2. Земсков А.В., Ле В.Х., Сердюк Д.О. Модель изгиба ортотропной консольнозакрепленной балки Бернулли-Эйлера под действием нестационарных термомеханодиффузионных нагрузок // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2024. – Т. 28, № 4. – С. 680-700. <https://doi.org/10.14498/vsgtu2112>.
3. Земсков А.В., Ле Ван Хао Нестационарные термоупругодиффузионные колебания балки Бернулли – Эйлера под действием распределенной поперечной нагрузки // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 3. – С. 75–85. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2023.3.07>
4. Zemskov A.V., Le Van Hao, Tarlakovskii D.V. Bernoulli-Euler Beam Unsteady Bending Model with Consideration of Heat and Mass Transfer // Journal of Applied and Computational Mechanics. – 2023. – Т. 9, № 1. – С. 168–180. <https://doi.org/10.22055/jacm.2022.40752.3649>
5. Zemskov A.V., Le Van Hao. Unsteady Thermoelastic-diffusive Vibrations of a Bernoulli-Euler Beam on an Elastic Foundation // European Journal of Mechanics A / Solids. – 2025. – Vol. 113. – 105707. doi: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2025.105707>

Публикации в других изданиях

6. Земсков А.В., Ле Ван Хао, Сердюк Д.О. Моделирование термомеханодиффузионных нестационарных колебаний консольно закреплённой балки Бернулли-Эйлера // Ломоносовские чтения. Секция механики: Ежегодная научная конференция, 20 марта – 4 апреля 2024 г., Механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский

институт механики МГУ имени М. В. Ломоносова: тезисы докладов. – М.: Издательство Московского университета, 2024. – с. 69.

7. Земсков А.В., Ле Ван Хао, Сердюк Д.О. Нестационарные колебания с учетом тепломассопереноса консольно закреплённой балки Бернулли-Эйлера под действием сосредоточенной нагрузки на свободном конце // Материалы 51-й школы-конференция «Актуальные проблемы механики» памяти Д.А. Индейцева: сборник аннотаций, 19-21 июня, 2024 г. – Великий Новгород, 2024. – с. 89-90.
8. Земсков А.В., Ле Ван Хао, Сердюк Д.О. Нестационарные термоупруго-диффузионные колебания консольно закреплённой балки Бернулли-Эйлера под действием сосредоточенной нагрузки на свободном конце балки // Материалы XXX Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.2. – М.: ООО "ТРП 2024. – с. 113-118.
9. Земсков А.В., Ле Ван Хао Моделирование термомеханодиффузионных нестационарных колебаний балки Бернулли-Эйлера на упругом основании // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. 4–23 апреля 2023 года. Тезисы докладов. – Москва: Издательство Московского университета, 2023. – С. 76-77.
10. Земсков А.В., Ле Ван Хао, Сердюк Д.О. Модель изгиба ортотропной консольно-закреплённой балки Бернулли-Эйлера под действием нестационарных термомеханодиффузионных нагрузок // Инновационное развитие транспортного и строительного комплексов: материалы Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 70-летию БелИИЖТа – БелГУТа (Гомель, 16–17 ноября 2023 г.): в 2 ч. Ч. 2 / М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Бел. ж. д., Белорус. гос. ун-т трансп.; под общ. ред. Ю. И. Кулаженко. – Гомель: БелГУТ, 2023. – с. 90–92.
11. Земсков А.В., Ле Ван Хао Модель изгиба ортотропной консольно-закреплённой балки Бернулли-Эйлера под действием нестационарных термомеханодиффузионных нагрузок // Современные проблемы механики сплошной среды: тезисы докладов XXI Международной конференции (Ростов-на-Дону, 11-13 октября 2023 г.) / ред.: А.О.Ватульян, М.И.Карякин, Р.М.Мнухин, А.В.Попов; Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону; Таганрог: Издательство ЮФУ, 2023. – с. 48-49.
12. Земсков А.В., Ле Ван Хао, Яганов В.М. Нестационарные термоупруго-диффузионные колебания балки Бернулли-Эйлера на упругом основании // Материалы XXIX Международного симпозиума «Динамические и тех-

- нологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Кремёнки, 15 – 19 мая 2023 г.). Т.2. – М.: ООО «ТРП», 2023. – с. 89-94.
13. *Земсков А.В., Ле Ван Хао* Нестационарные термомеханодиффузионные колебания балки Бернулли-Эйлера на винклеровском основании // XVIII Зимняя школа по механике сплошных сред Пермь, 13 – 17 февраля 2023г. Тезисы докладов. – Пермь: ПФИЦ УрО РАН, 2023г. – с 125-126.
 14. *Земсков А.В., Ле Ван Хао* Нестационарные термоупругодиффузионные колебания балки Бернулли-Эйлера // Материалы XXVIII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т. 2. – М.: ООО «ТРП», 2022. – с. 176-181.
 15. *Земсков А.В., Ле Ван Хао* Моделирование нестационарных колебаний балки Бернулли-Эйлера с учетом тепломассопереноса // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. 18–22 апреля 2022 года. Тезисы докладов. – Москва: Издательство Московского университета, 2022. – С. 80.
 16. *Земсков А.В., Ле Ван Хао* Нестационарные термоупругодиффузионные колебания балки Бернулли-Эйлера под действием распределенной поперечной нагрузки // Механика деформируемого твердого тела в проектировании конструкций. Пермь, 10 – 12 октября 2022г. Программа и тезисы докладов /ПФИЦ УрО РАН. – Пермь, 2022. – с. 84.
 17. *Земсков А.В., Ле Ван Хао* Нестационарная механика и термодиффузия изгибаемых балок // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете: тезисы докладов XVI Всероссийской школы (пос. Дивноморское, 26 мая – 31 мая 2022 г.) / ред.: А.О. Ватульян, М.И. Карякин, А.В. Попов, Р.М. Мнухин. – Ростов-на-Дону; Таганрог: Издательство Южного федерального университета, 2022. – с. 35.
 18. *Земсков А.В., Ле Ван Хао* Постановка задачи о нестационарных термоупругодиффузионных колебаниях балки Бернулли-Эйлера // Проблемы безопасности на транспорте: матер. XI Междунар. научн.-практ. конф.: в 2 ч., Гомель, 25–26 ноябр. 2021 г. / М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Бел. ж. д., Белорус. гос. ун-т трансп.; под общ. ред. Ю. И. Кулаженко. – Гомель: БелГУТ, 2021. – Ч. 2. – С. 139–141.
 19. *Земсков А.В., Ле Ван Хао* Модель нестационарного изгиба балки Бернулли-Эйлера с учетом тепломассопереноса // В книге «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред».

Сборник трудов 11-й Всероссийской научной конференции с международным участием. Москва, 23 – 25 ноября 2021 г. – М.: ООО «Сам Полиграфист», 2021. – С. 280-289. https://doi.org/10.33113/conf.mkmk.ras.2021.280_289.35

20. *Zemskov A.V., Le Van Hao* Modeling of Unsteady Vibrations of a Bernoulli Euler Beam on an Winkler Foundation with Considering Heat and Mass Transfer // Collection of the 3rd International Conference on Advanced Smart Materials and Structures (ASMaS-2024, 03-05 July 2024), 2024. – С. 46–48.
21. *Zemskov A.V., Le Van Hao, Serdyuk D.O.* Unsteady thermoelastic-diffusion vibrations of a Bernoulli-Euler beam on an elastic foundation // Collection of the 3rd International Conference on Advanced Smart Materials and Structures (ASMaS-2024, 03-05 July 2024), 2024. – С. 31–32.