

Научная статья
УДК 629.7.01, 539.4
URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=183588>
EDN: <https://www.elibrary.ru/HTBRSE>



Расчет совместных изгибно-крутильных колебаний лопасти при раскрутке и торможении несущего винта вертолета в условиях ветра

Максим Владимирович Каргаев^{1, 2}

¹ Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Москва, Российская Федерация

² Национальный центр вертолетостроения им. М.Л. Миля и Н.И. Камова,
Томилино, Московская область, Российская Федерация
kargaev_mv@mail.ru

Аннотация. Излагается метод расчета совместных изгибно-крутильных колебаний лопасти несущего винта (НВ) вертолета при раскрутке и торможении несущего винта в условиях ветра. Предложенный метод позволяет рассчитывать параметры напряженно-деформированного состояния лопасти, количественно оценивать предельные скорости ветра при раскрутке и торможении несущего винта, рассчитывать прочность лопасти в наземных случаях нагружения, и в частности при резком торможении НВ и при ударе по упорам шарниров НВ. Приведены результаты расчета предельной скорости ветра при раскрутке несущего винта вертолета типа Ми-171А3.

Ключевые слова: лопасть несущего винта, ветровое нагружение, раскрутка и торможение несущего винта, метод Галеркина, метод Ньюмарка, SVD-алгоритм, напряженно-деформированное состояние

Финансирование: работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 24-79-00045, <https://rscf.ru/project/24-79-00045/>

Для цитирования: Каргаев М.В. Расчет совместных изгибно-крутильных колебаний лопасти при раскрутке и торможении несущего винта вертолета в условиях ветра // Вестник Московского авиационного института. 2024. Т. 31. № 4. С. 101–112. URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=183588>

Original article

Blade Coupled Bending-and-Torsional Oscillations Computing While the Helicopter Main Rotor Spin-Up and Deceleration under Wind Conditions

Maksim V. Kargaev^{1,2}

¹ Moscow Aviation Institute (National Research University),
Moscow, Russian Federation

² National Helicopter Center Mil & Kamov,
Tomilino, Moscow region, Russian Federation
kargaev_mv@mail.ru

Abstract

In accordance with the requirements of the helicopters airworthiness standards, besides the critical flight loads the main rotor (MR) design should as well withstand the loads originating in the ground cases, such as blade hitting the hinges arrester (limiter) while the rotor spin-up or deceleration, sharp rotor deceleration, as well as “any other

critical loading, expected during normal operation". The blades hitting the hinges arrester while the MR spin-up or deceleration are probable at the strong enough wind presence at the helicopter parking lot. Likewise, significant blades deflection occur in this case, which, at certain wind speeds, may lead to the blade hitting the helicopter tailbeam or its other structural elements. The similar problem occurs while the rotor rotation absence as well.

As far as the blades parameters are being selected mainly based on ensuring strength, aeroelastic stability, as well as acceptable level of stresses and vibrations in flight, the task for special cases consists in determining restrictions and/or setting the operation regulations, ensuring acceptable levels of at these restrictions of critical (maximum) loads and/or displacements. In the case of rotor spin-up and deceleration under wind conditions, the task consists in determining the maximum wind speeds, at which sufficient clearance is ensured between the rotor blades and the other parts of the structure to prevent the blades from hitting any part of the structure in any expected operating conditions.

The author of the article obtained the equations of coupled bending-and-torsional oscillations of the main rotor blade rotating at variable speed under non-stationary wind conditions for the case of large displacements. The approach to the numerical integration of these equations is proposed as well, which allows to quantifying the maximum wind speeds during the spin-up and deceleration of the main rotor, computing the strength of the blade in ground loading cases, and in particular, during the MR sudden deceleration and when hitting the stops of the MR hinges. The results of the maximum wind speed computing during spin-up of the main rotor of the Mi-171A3 type helicopter are presented.

Keywords: main rotor blade, wind loading, main rotor spin-up and deceleration, Galerkin method, Newmark method, SVD-algorithm, stress-strain state

Funding: the research was carried out at the expence of a grant from the Russian Science Foundation, No. 24-79-00045, <https://rscf.ru/project/24-79-00045/>

For citation: Kargaev M.V. Blade Coupled Bending-and-Torsional Oscillations Computatioin while the Helicopter Main Rotor Spin-Up and Deceleration under Wind Conditions. *Aerospace MAI Journal*, 2024, vol. 31, no. 4, pp. 101–112. (In Russ.). URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=183588>

Введение

В соответствии с требованиями норм летной годности вертолетов [1–3] конструкция несущего винта (НВ) должна выдерживать помимо критических полетных нагрузок также нагрузки, возникающие на земле в таких случаях, как удар лопасти по упорам (ограничителям) шарниров при раскрутке и торможении винта, резкое торможение винта, а также «любое другое критическое нагружение, ожидаемое при нормальной эксплуатации», например воздействие ветра на стоянке, буксировка вертолета, качка при базировании вертолета на палубе корабля. Удары лопастей по упорам шарниров при раскрутке и торможении НВ возможны при достаточно сильном ветре на стоянке вертолета. Также в таком случае возникают значительные прогибы лопастей, которые при определенных скоростях ветра могут привести к удару лопасти о хвостовую балку вертолета или другие элементы его конструкции. Аналогичная проблема имеет место и при отсутствии вращения винта [4–6], но она устраняется размещением лопастей при стоянке вертолета на азимутах, исключающих траекторное пересечение лопастей с элементами вертолета, что, однако, не решает задачу обеспечения прочности самих лопастей в условиях ветрового нагружения.

Поскольку параметры лопастей выбираются главным образом исходя из требований обеспечения прочности, аэроупругой устойчивости, а также приемлемого уровня напряжений и вибраций в полете, для особых случаев эксплуатации задача состоит в определении ограничений и (или) установлении правил эксплуатации, обеспечивающих допустимые уровни возможных при этих ограничениях критических (максимальных) нагрузок и (или) перемещений.

В случаях раскрутки и торможения винта в условиях ветра задача сводится к определению предельных скоростей ветра, при которых обеспечивается достаточный зазор между лопастями НВ и другими частями конструкции, предотвращающий удар лопастей об элементы планера вертолета в любых ожидаемых условиях эксплуатации [1–3].

В данной работе получены уравнения совместных изгибно-крутильных колебаний лопасти НВ, вращающейся с переменной скоростью в условиях нестационарного ветра для случая больших перемещений. Также предложен подход, основанный на численном интегрировании этих уравнений, позволяющий количественно оценивать предельные скорости ветра при раскрутке и торможении НВ, рассчитывать прочность лопасти в наземных

случаях нагружения, и в частности при резком торможении НВ и при ударе по упорам шарниров НВ.

Постановка задачи

Получим систему дифференциальных уравнений, описывающую совместные изгибно-крутильные колебания лопасти, вращающейся с переменной скоростью, при ветровом нагружении для общего случая больших перемещений. Лопать представим в виде балки переменного сечения. Параметры этой балки будем считать непрерывно распределенными по длине лопасти. Расчетная схема лопасти приведена на рис. 1. Схема обтекания сечений лопасти в плоскостях, перпендикулярных оси лопасти, приведена на рис. 2.

Рассмотрим равновесие элемента лопасти длиной dr , вырезанного двумя бесконечно близкими сечениями перпендикулярно к деформированной оси. Далее символом « ∂ » обозначено дифференцирование по времени t , а символом « $'$ » — по продольной координате r . На элемент dr действуют погонные нагрузки w_y, w_x, w_{ry} и w_{rx} . По концам элемента приложены силы и моменты реакции соседних участков лопасти. Силы можно разложить на составляющие по осям O_y и O_x . Силы и моменты, действующие на элемент лопасти [6–9], приведены на рис. 3.

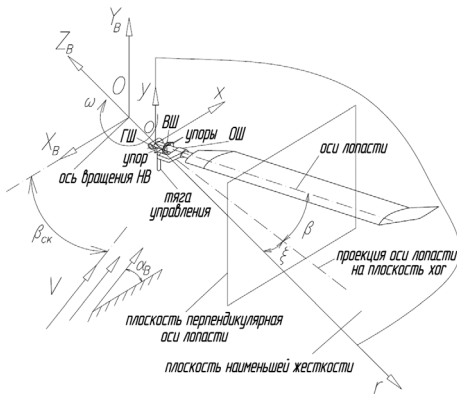


Рис. 1. Расчетная схема лопасти при раскрутке и торможении несущего винта

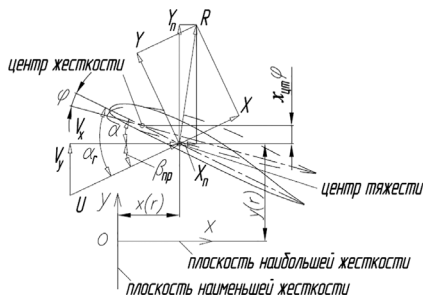
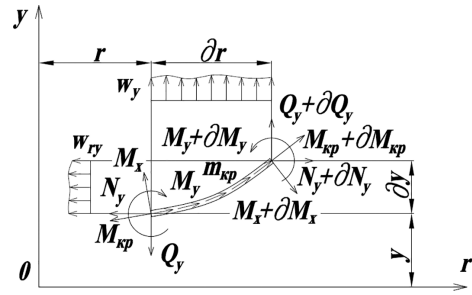
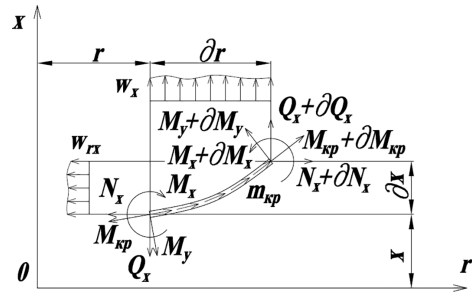


Рис. 2. Схема обтекания сечений лопасти



а



б

Рис. 3. Силы и моменты, действующие на элемент лопасти: а – плоскость наименьшей жесткости; б – плоскость наибольшей жесткости

Сумма проекций всех сил на оси O_y и O_x соответственно: $\partial Q_y = -w_y dr$ и $\partial Q_x = -w_x dr$, откуда

$$Q_y = -\int_r^l w_y dr \text{ и } Q_x = -\int_r^l w_x dr \quad (1)$$

сумма проекций всех сил на ось O_r : $\partial N_y = w_{ry} dr$ и $\partial N_x = w_{rx} dr$ откуда

$$N_y = \int_r^l w_{ry} dr; \quad N_x = \int_r^l w_{rx} dr. \quad (2)$$

Здесь

$$w_y = Y_n \left(1 - \frac{y'^2}{2} \right) - mg - m\ddot{y} + mx_{\text{цт}} \ddot{\phi} - \omega^2 (mx_{\text{цт}} r \phi)';$$

$$w_x = X_n \left(1 - \frac{x'^2}{2} \right) - m\ddot{x} + \omega^2 mx; \quad (3)$$

$$w_{ry} = Y_n y' + m\omega^2 r + 2\omega \dot{x} m;$$

$$w_{rx} = X_n x' + m\omega^2 r + 2\omega \dot{x} m,$$

где g – ускорение свободного падения; m – погонная масса лопасти; ω – угловая скорость вращения несущего винта; x – перемещения элементов лопасти в плоскости наибольшей жесткости; y – перемещения элементов лопасти в плоскости наименьшей жесткости; r – расстояние от оси вращения до рассматриваемого сечения лопасти; $x_{\text{цт}}$ – расстояния от центра жесткости до центра тяжести в сечениях

лопасти (положительным считается смещение центра тяжести к задней кромке лопасти).

Погонные аэродинамические силы и момент, действующие на лопасть при косоугольной обдувке, определяются выражениями [7]:

$$Y_n = \frac{1}{2} \rho b (c_y V_x + c_x V_y) U + \pi \rho b \left(\frac{3}{4} b - x_0 \right) U \dot{\varphi};$$

$$X_n = \frac{1}{2} \rho b (c_x V_x - c_y V_y) U - \pi \rho b \left(\frac{3}{4} b - x_0 \right) U \dot{\varphi};$$

$$M_{\text{аэп}} = x_0 Y_n + \frac{1}{2} \rho b \left(m_z b U - \frac{\pi}{8} b^2 \dot{\varphi} \right) U,$$

где φ – угол упругой закрутки рассматриваемого сечения лопасти; x_0 – расстояние от передней кромки до оси жесткости лопасти; ρ – плотность воздуха; b – хорда лопасти в рассматриваемом сечении; c_y, c_x, m_z – аэродинамические коэффициенты подъемной силы, силы сопротивления и крутящего момента; V_x, V_y и U – взаимно перпендикулярные составляющие относительной скорости потока, лежащие в плоскости, нормальной к оси лопасти (причем V_x параллельна плоскости наибольшей жесткости лопасти, а V_y перпендикулярна V_x), и суммарная относительная скорость потока, обтекающего рассматриваемый профиль в плоскости, нормальной к упругой оси лопасти.

Относительная скорость U может быть определена через ее составляющие:

$$U = \sqrt{V_x^2 + V_y^2},$$

где

$$V_x = V \cos \alpha_B \sin (\beta_{\text{СК}} + \psi + \xi - \chi_{\text{Л}}) + \omega (r \cos \beta + r_{\text{ГШ}});$$

$$V_y = V \sin \alpha_B \cos (\beta + \beta_0) - V \cos \alpha_B \times \cos (\beta_{\text{СК}} + \psi + \xi - \chi_{\text{Л}}) \sin (\beta + \beta_0) - V \cos \alpha_B \gamma \cos \psi \cos (\beta + \beta_0) + v_{\text{инд}} - \dot{y}.$$

Здесь V – скорость ветра; α_B – угол атаки ветра, то есть угол между вектором скорости ветра и плоскостью наибольшей жесткости лопасти; ψ – азимут лопасти; $\beta_{\text{СК}}$ – угол между горизонтальной проекцией вектора скорости и продольной плоскостью вертолета; β_0 – угол наклона упора горизонтального шарнира (ГШ); $\beta = y'(0)$ – угол взмаха лопасти; $\xi = x'(0)$ – угол качания лопасти; $\chi_{\text{Л}}$ – стреловидность лопасти по передней кромке; $r_{\text{ГШ}}$ – расстояние от оси вращения несущего винта до оси горизонтального шарнира; $v_{\text{инд}}$ – индуктивная скорость в рассматриваемом сечении лопасти; γ – продольный угол заклинивания вала несущего винта.

Значения c_y, c_x, m_z определяются по результатам круговых продувок профилей при соответствующих

числах Маха $M = U/a_{\text{зв}}$ и углах атаки сечений лопасти α_r , определяемых по формуле $\alpha_r = \alpha + \beta_{\text{пр}}$, где

$$\alpha = \theta_0 - \theta_1 \sin \psi - \theta_2 \cos \psi - k\beta + \Delta\varphi_{\text{кр}} + \varphi + \frac{M_{\text{кр}}(r_{\text{упр}})}{C_{\text{упр}}};$$

$$\beta_{\text{пр}} = \arctg \frac{V_y}{V_x} = \frac{V_y}{V_x}, V_x > 0;$$

$$\beta_{\text{пр}} = \pi + \arctg \frac{V_y}{V_x} = \pi + \frac{V_y}{V_x}, V_x < 0.$$

Здесь α – геометрический угол атаки рассматриваемого сечения лопасти; $\beta_{\text{пр}}$ – угол притекания потока; θ_0 – угол «общего шага»; θ_1 и θ_2 – углы циклического управления углом установки лопасти, создаваемые наклоном тарелки автомата перекоса; k – коэффициент компенсатора взмаха; $\Delta\varphi_{\text{кр}}$ – угол геометрической закрутки рассматриваемого сечения лопасти; $M_{\text{кр}}(r_{\text{упр}})$ – крутящий момент в сечении крепления тяги системы управления; $r_{\text{упр}}$ – продольная координата крепления тяги системы управления; $C_{\text{упр}}$ – жесткость системы управления.

Записав сумму моментов всех сил относительно левого конца элемента лопасти и сохранив только члены первого порядка малости, получим для изгиба в плоскостях наименьшей, наибольшей жесткости и для кручения:

$$\frac{\partial M_y}{\partial r} - N_y \frac{\partial y}{\partial r} + Q_y = 0;$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial r} - N_x \frac{\partial x}{\partial r} + Q_x = 0;$$

$$\frac{\partial M_{\text{кр}}}{\partial r} + m_{\text{кр}} = 0.$$

Продифференцировав уравнения изгиба (4) по r , получим

$$M_y'' - (N_y y')' + Q_y' = 0;$$

$$M_x'' - (N_x x')' + Q_x' = 0.$$

Тогда с учетом (1), (2) и (3) уравнения (5) примут вид:

$$M_y'' - (T_y y' + N_{\text{цб}} y' + N y')' - Y_n \left(1 - \frac{y'^2}{2} \right) + mg + m\ddot{y} - m x_{\text{цт}} \ddot{\varphi} + \omega^2 (m x_{\text{цт}} r \varphi)' = 0;$$

$$M_x'' - (T_x x' + N_{\text{цб}} x' + N x')' - X_n \left(1 - \frac{x'^2}{2} \right) + m\ddot{x} - \omega^2 m x = 0,$$

где $T_y = \int_r^l Y_n y' dr$, $T_x = \int_r^l X_n x' dr$, $N = \int_r^l 2\omega x m dr$;

$N_{цб} = \int_r^l m \omega^2 r dr$ – центробежная сила, действующая в сечениях лопасти.

Связь между изгибающими моментами M_y'' , M_x'' и перемещениями y , x оси лопасти, согласно [6], определяется выражениями:

$$\begin{aligned} M_y'' &= (EI_x y'')'' + \frac{3}{2} (EI_x y'' y'^2)''; \\ M_x'' &= (EI_y x'')'' + \frac{3}{2} (EI_y x'' x'^2)''; \end{aligned} \quad (7)$$

где EI_x – жесткость лопасти в плоскости наименьшей жесткости; EI_y – жесткость лопасти в плоскости наибольшей жесткости.

После подстановки (7) в (6) получим искомые дифференциальные уравнения изгиба лопасти:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + (EI_x y'')'' + \frac{3}{2} (EI_x y'' y'^2)'' - (T_y y')' - (N_{цб} y')' - \\ - (Ny')' - Y_n \left(1 - \frac{y'^2}{2}\right) + mg - mx_{цт} \ddot{\phi} + \omega^2 (mx_{цт} r \phi)' = 0; \\ m\ddot{x} + (EI_y x'')'' + \frac{3}{2} (EI_y x'' x'^2)'' - (T_x x')' - (N_{цб} x')' - \\ - (Nx')' - X_n \left(1 - \frac{x'^2}{2}\right) - \omega^2 mx = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Граничные условия для уравнений (8) определяются выражениями [6, 10]:

$$\begin{aligned} y_{r=0} = 0 \text{ и } y'_{r=0} = 0; \\ y_{r=0} = 0 \text{ и } (EI_x y'')_{r=0} = 0; \\ (EI_x y'')_{r=l} = 0 \text{ и } (EI_x y'')'_{r=l} = 0; \\ x_{r=r_{вш}} = 0 \text{ и } x'_{r=r_{вш}} = 0; \\ x_{r=r_{вш}} = 0 \text{ и } (EI_y x'')_{r=r_{вш}} = 0; \\ (EI_y x'')_{r=l} = 0 \text{ и } (EI_y x'')'_{r=l} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

– при условии нахождения лопасти на упоре ГШ/ВШ; при условии отхода лопасти от упора ГШ/ВШ или при убранном упоре; для свободного конца лопасти соответственно; в (9) $r_{вш}$ – расстояние от оси вращения несущего винта до оси вертикального шарнира (ВШ).

Составим уравнение крутильных колебаний лопасти. Согласно [11], связь между углами закручивания лопасти ϕ и действующими в ее сечениях крутящими моментами $M_{кр}$ определяется выражением

$$d\phi = \frac{M_{кр}}{GI_{кр}} dr, \quad (10)$$

где $GI_{кр}$ – жесткость лопасти на кручение.

Подставим значение крутящего момента (5) в (10), тогда дифференциальное уравнение крутильных колебаний лопасти может быть записано в форме

$$[GI_{кр} \phi']' + m_{кр} = 0. \quad (11)$$

Погонный крутящий момент для рассматриваемого случая нагружения, с учетом момента от аэродинамических сил, определяется выражением [7]

$$\begin{aligned} m_{кр} &= -I_m \ddot{\phi} - \omega^2 (I_{my} - I_{mx}) \phi + \\ &+ \omega^2 mx_{цт} r [y + x_{цт} \phi]' + mx_{цт} \ddot{y} + M_{аэр}. \end{aligned} \quad (12)$$

где I_{mx} и I_{my} – моменты инерции сечений лопасти относительно ее главных осей инерции; I_m – момент инерции сечений лопасти относительно оси, проходящей через линию центров жесткости сечений.

Подставив (12) в (11), окончательно получим уравнение крутильных колебаний лопасти при раскрутке и торможении несущего винта в условиях ветра:

$$\begin{aligned} I_m \ddot{\phi} - [GI_{кр} \phi']' + \omega^2 (I_{my} - I_{mx}) \phi - \\ - \omega^2 mx_{цт} r [y + x_{цт} \phi]' - mx_{цт} \ddot{y} - M_{аэр} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Граничные условия для уравнения (13) определяются выражениями [10]:

$$(GI_{кр} \phi')_{r=r_{упр}} = C_{упр} \phi_0; (GI_{кр} \phi')_{r=l} = 0, \quad (14)$$

где $\phi_0 = M_{кр}(r_{упр})/C_{упр}$ – угол поворота лопасти в осевом шарнире вследствие деформаций системы управления НВ; $r_{упр}$ – продольная координата сечения, в котором крепится тяга поворота лопасти.

Таким образом, полная система уравнений совместных изгибно-крутильных колебаний лопасти при раскрутке и торможении несущего винта в условиях ветра состоит из уравнений (8) и (13), а также граничных условий (9) и (14).

Метод расчета совместных колебаний

Для расчета совместных изгибно-крутильных колебаний, отыскания деформаций и внутренних усилий (моментов и напряжений) применим метод Б.Г. Галеркина [6, 7]. Решение уравнений (8) и (13) представим в виде разложений в ряд по собственным формам изгибных и крутильных колебаний лопасти соответственно:

$$y = \sum_{j=0}^n \delta_j y_j; \quad x = \sum_{j=0}^q \vartheta_j x_j; \quad \varphi = \sum_{j=1}^p \eta_j \varphi_j, \quad (15)$$

где n , q и p – номера высших форм собственных изгибных и крутильных колебаний лопасти соответственно, учитываемых в решении; y_j , x_j , и φ_j – нормированные [6, 7] формы j -х тонов собственных изгибных и крутильных колебаний лопасти соответственно (крутильные собственные формы определяются для случая жесткой заделки при $C_{\text{упр}} \rightarrow \infty$); δ_j , ϑ_j , и η_j – некоторые функции времени (коэффициенты деформации лопасти), которые в настоящем методе приняты за обобщенные координаты системы. Определение законов изменения δ_j , ϑ_j , и η_j во времени и составляет содержание расчета.

Подставим выражения (15) в уравнения (8) и (13). Далее после некоторых преобразований, с учетом сил трения в лопасти, моделируемых введением линейных затуханий $2\varepsilon_y \dot{\delta}_j$, $2\varepsilon_x \dot{\vartheta}_j$ и $2\varepsilon_\varphi \dot{\eta}_j$ [6, 12], получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} & A_{j,i}^y \ddot{\delta}_j + 2\varepsilon_y \dot{\delta}_j + B_{j,i}^y \delta_j + C_{j,i}^y \delta_j^2 + \\ & + D_{j,i}^y \delta_j^3 + E_{j,i}^y + F_{j,i}^y \dot{\eta}_j + G_{j,i}^y \eta_j = 0; \\ & A_{j,i}^x \ddot{\vartheta}_j + 2\varepsilon_x \dot{\vartheta}_j + B_{j,i}^x \vartheta_j + C_{j,i}^x \vartheta_j^2 + D_{j,i}^x \vartheta_j^3 + E_{j,i}^x = 0; \\ & E_{j,i}^\varphi \ddot{\delta}_j + D_{j,i}^\varphi \delta_j + A_{j,i}^\varphi \ddot{\eta}_j + 2\varepsilon_\varphi \dot{\eta}_j + B_{j,i}^\varphi \eta_j + C_{j,i}^\varphi = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь

$$\begin{aligned} & A_{j,i}^y = \int_0^l m \sum_{j=0}^n y_j y_i dr; \\ & C_{j,i}^y = \frac{1}{2} \int_0^l Y_n \sum_{j=0}^n y_j^2 y_i dr \\ & D_{j,i}^y = \frac{3}{2} \int_0^l EI_x \sum_{j=0}^n y_j'' \sum_{j=0}^n y_j^2 y_i'' dr; \\ & B_{j,i}^y = \int_0^l EI_x \sum_{j=0}^n y_j'' y_i'' dr + \int_0^l T_y \sum_{j=0}^n y_j' y_i' dr + \\ & + \int_0^l N_{\text{цб}} \sum_{j=0}^n y_j' y_i' dr + \int_0^l N \sum_{j=0}^n y_j' y_i' dr; \\ & E_{j,i}^y = - \int_0^l Y_n y_i dr + \int_0^l m g y_i dr; \\ & F_{j,i}^y = - \int_0^l m x_{\text{цт}} \sum_{j=0}^m \varphi_j y_i dr; \\ & G_{j,i}^y = \int_0^l \omega^2 (m x_{\text{цт}} r \sum_{j=0}^m \varphi_j)' y_i' dr; \end{aligned}$$

$$A_{j,i}^x = \int_0^l m \sum_{j=0}^q x_j x_i dr;$$

$$C_{j,i}^x = \frac{1}{2} \int_0^l X_n \sum_{j=0}^q x_j'^2 x_i dr;$$

$$D_{j,i}^x = \frac{3}{2} \int_0^l EI_y \sum_{j=0}^q x_j'' \sum_{j=0}^q x_j'^2 x_i'' dr;$$

$$E_{j,i}^x = - \int_0^l X_n x_i dr;$$

$$\begin{aligned} B_{j,i}^x &= \int_0^l EI_y \sum_{j=0}^q x_j'' x_i'' dr + \int_0^l T_x \sum_{j=0}^q x_j' x_i' dr + \int_0^l N_{\text{цб}} \sum_{j=0}^q x_j' x_i' dr + \\ & + \int_0^l N \sum_{j=0}^q x_j' x_i' dr - \int_0^l \omega^2 m \sum_{j=0}^q x_j x_i dr; \end{aligned}$$

$$A_{j,i}^\varphi = \int_0^l I_m \sum_{j=1}^p \varphi_j \varphi_i dr; \quad D_{j,i}^\varphi = - \int_0^l \omega^2 m x_{\text{цт}} r \sum_{j=0}^n y_j' \varphi_i dr;$$

$$C_{j,i}^\varphi = - \int_0^l M_{\text{аэп}} \varphi_i dr; \quad E_{j,i}^\varphi = - \int_0^l m x_{\text{цт}} \sum_{j=0}^n y_j \varphi_i dr;$$

$$\begin{aligned} B_{j,i}^\varphi &= - \int_0^l GI_{\text{кр}} \sum_{j=1}^p \varphi_j' \varphi_i' dr + \int_0^l \omega^2 (I_{\text{мy}} - I_{\text{мx}}) \sum_{j=1}^p \varphi_j \varphi_i dr - \\ & - \int_0^l \omega^2 m x_{\text{цт}} r \left(x_{\text{цт}}' \sum_{j=1}^p \varphi_j \varphi_i + x_{\text{цт}} \sum_{j=1}^p \varphi_j' \varphi_i \right) dr. \end{aligned}$$

Для численного интегрирования уравнений (16) будем использовать неявный метод Ньюмарка [13]. Перейдем к рассмотрению процесса нагружения на одном шаге интегрирования. Пусть в момент времени t_h все кинематические параметры и все компоненты уравнений (16) известны, и нужно определить их значения в момент времени $t_{h+1} = t_h + \Delta t_h$. Поскольку величины $\ddot{\delta}_{j,h}$, $\ddot{\vartheta}_{j,h}$ и $\ddot{\eta}_{j,h}$ не известны заранее, решение необходимо отыскивать, прибегая на каждом шаге к итерациям. Итерации также необходимы для учета изменения аэродинамических сил и упругих деформаций лопасти за шаг интегрирования. Ниже приведены рекуррентные соотношения для определения коэффициентов деформации и их первых производных на k -й итерации на h -м шаге:

$$\begin{aligned} (\delta_{j,h})_k &= \delta_{j,h-1} + \ddot{\delta}_{j,h-1} \frac{\Delta t_h}{2} + (\ddot{\delta}_{j,h})_{k-1} \frac{\Delta t_h}{2}; \\ (\dot{\delta}_{j,h})_k &= \dot{\delta}_{j,h-1} + \ddot{\delta}_{j,h-1} \frac{\Delta t_h}{2} + (\ddot{\delta}_{j,h})_{k-1} \frac{\Delta t_h}{2}; \\ (\ddot{\delta}_{j,h})_k &= \ddot{\delta}_{j,h-1} + \ddot{\eta}_{j,h-1} \frac{\Delta t_h}{2} + (\ddot{\eta}_{j,h})_{k-1} \frac{\Delta t_h}{2}, \quad k > 1; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
 (\delta_{j,h})_k &= \delta_{j,h-1} + \dot{\delta}_{j,h-1} \frac{\Delta t_h}{2} + (\ddot{\delta}_{j,h})_k \frac{\Delta t_h}{2}; \\
 (\vartheta_{j,h})_k &= \vartheta_{j,h-1} + \dot{\vartheta}_{j,h-1} \frac{\Delta t_h}{2} + (\ddot{\vartheta}_{j,h})_k \frac{\Delta t_h}{2}; \quad (18) \\
 (\eta_{j,h})_k &= \eta_{j,h-1} + \dot{\eta}_{j,h-1} \frac{\Delta t_h}{2} + (\ddot{\eta}_{j,h})_k \frac{\Delta t_h}{2}.
 \end{aligned}$$

Вторые производные коэффициентов деформации на k -й итерации на h -м шаге определяются из решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$M_k v_k = f_k. \quad (19)$$

Здесь $M_k = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 & M_{13} \\ 0 & M_{22} & 0 \\ M_{31} & 0 & M_{33} \end{pmatrix};$

$$v_k = \begin{pmatrix} \Delta_k \\ Z_k \\ H_k \end{pmatrix}; \quad f_k = \begin{pmatrix} F_{1,k} \\ F_{2,k} \\ F_{3,k} \end{pmatrix},$$

где $M_{11}, M_{22}, M_{33}, M_{13}$ и M_{31} – матрицы коэффициентов при соответствующих вторых производных коэффициентов деформации;

$$\Delta_k = \begin{pmatrix} (\ddot{\delta}_{0,h})_k \\ \dots \\ (\ddot{\delta}_{j,h})_k \\ \dots \\ (\ddot{\delta}_{n,h})_k \end{pmatrix}; \quad Z_k = \begin{pmatrix} (\ddot{\vartheta}_{0,h})_k \\ \dots \\ (\ddot{\vartheta}_{j,h})_k \\ \dots \\ (\ddot{\vartheta}_{q,h})_k \end{pmatrix}; \quad H_k = \begin{pmatrix} (\ddot{\eta}_{1,h})_k \\ \dots \\ (\ddot{\eta}_{j,h})_k \\ \dots \\ (\ddot{\eta}_{p,h})_k \end{pmatrix} -$$

векторы искомого вторых производных коэффициентов деформации $(\ddot{\delta}_{j,h})_k, (\ddot{\vartheta}_{j,h})_k$ и $(\ddot{\eta}_{j,h})_k, q$ qweeq

$$\begin{aligned}
 F_{1,k} &= \begin{pmatrix} f_1(t_h, (\delta_{0,h})_k, (\dot{\delta}_{0,h})_k, (\eta_{1,h})_k) \\ \dots \\ f_1(t_h, (\delta_{j,h})_k, (\dot{\delta}_{j,h})_k, (\eta_{j,h})_k) \\ \dots \\ f_1(t_h, (\delta_{n,h})_k, (\dot{\delta}_{n,h})_k, (\eta_{p,h})_k) \end{pmatrix}; \\
 F_{2,k} &= \begin{pmatrix} f_2(t_h, (\vartheta_{0,h})_k, (\dot{\vartheta}_{0,h})_k) \\ \dots \\ f_2(t_h, (\vartheta_{j,h})_k, (\dot{\vartheta}_{j,h})_k) \\ \dots \\ f_2(t_h, (\vartheta_{q,h})_k, (\dot{\vartheta}_{q,h})_k) \end{pmatrix}; \\
 F_{3,k} &= \begin{pmatrix} f_3(t_h, (\delta_{0,h})_k, (\dot{\delta}_{0,h})_k, (\eta_{1,h})_k, (\dot{\eta}_{1,h})_k) \\ \dots \\ f_3(t_h, (\delta_{j,h})_k, (\dot{\delta}_{j,h})_k, (\eta_{j,h})_k, (\dot{\eta}_{j,h})_k) \\ \dots \\ f_3(t_h, (\delta_{n,h})_k, (\dot{\delta}_{n,h})_k, (\eta_{p,h})_k, (\dot{\eta}_{p,h})_k) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

– векторы правых частей.

Для решения СЛАУ (19) по причине итерационного характера нахождения коэффициентов уравнений и возможности получения плохо обусловленной матрицы M_k [14, 15] целесообразно использовать метод сингулярного разложения матрицы – SVD-алгоритм, для построения псевдорешения v_k^+ на каждой k -й итерации на h -м шаге. СЛАУ с плохо обусловленной матрицей относится к классу некорректно поставленных задач по Тихонову [16 – 18]. Сингулярным разложением матрицы M_k (SVD-разложением) называется представление [18, 19]

$$M_k = S \Lambda D^T,$$

где Λ – диагональная матрица сингулярных чисел; S и D – матрицы, сформированные из ортонормированных собственных векторов матриц $M_k M_k^T$ и $M_k^T M_k$ соответственно.

Псевдорешение v_k^+ при точной правой части f_k представимо в виде [18, 19]:

$$v_k^+ = D \Lambda^+ S^T f_k, \quad (20)$$

где матрица Λ^+ получается из матрицы Λ путем возведения в степень «-1» всех ненулевых элементов ее главной диагонали и замены на ноль элементов достаточно близких к нему (порядка $10^{-10} \dots 10^{-8}$).

Таким образом, решение начинается с определения начального ускорения (в момент времени $t = 0$) из СЛАУ (19):

$$M_0 v_0 = f_0. \quad (21)$$

Определив $\ddot{\delta}_{j,0}, \ddot{\vartheta}_{j,0}$ и $\ddot{\eta}_{j,0}$ из (21), можно начать вычислять итерацию для первого шага, находя приближенные выражения для $\delta_{j,1}, \dot{\vartheta}_{j,1}$ и $\dot{\eta}_{j,1}$ с помощью формулы Эйлера [13]:

$$\begin{aligned}
 (\delta_{j,1})_1 &= \delta_{j,0} + \ddot{\delta}_{j,0} \Delta t_1; \\
 (\dot{\vartheta}_{j,1})_1 &= \dot{\vartheta}_{j,0} + \ddot{\vartheta}_{j,0} \Delta t_1; \\
 (\dot{\eta}_{j,1})_1 &= \dot{\eta}_{j,0} + \ddot{\eta}_{j,0} \Delta t_1,
 \end{aligned}$$

Тогда первые приближения для $\delta_{j,1}, \ddot{\delta}_{j,0}, \vartheta_{j,1}, \ddot{\vartheta}_{j,0}$ и $\eta_{j,1}, \ddot{\eta}_{j,0}$ находятся по формулам (17) и (18). Все последующие итерации на первом шаге по времени и далее состоят в повторном использовании формул (17), (18) и решении СЛАУ (19) в виде (20). При этом на каждой итерации вычисляются аэродинамические силы и моменты, а также изгибные и крутильные деформации лопасти.

В качестве критериев остановки процесса итераций и перехода на следующий временной интервал будем использовать выражения

$$\begin{aligned} |(\delta_{j,i})_k - (\delta_{j,i})_{k-1}| &< \varepsilon_1; \\ |(\vartheta_{j,i})_k - (\vartheta_{j,i})_{k-1}| &< \varepsilon_2; \\ |(\eta_{j,i})_k - (\eta_{j,i})_{k-1}| &< \varepsilon_3, \end{aligned}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и ε_3 – заданные малые величины.

При движении лопасти, в зависимости от того, находится ли лопасть на упоре ГШ/ВШ или отошла от него, в выражениях (15) должны использоваться консольные (при $M_x(0) \neq 0$ и $y'(0) = 0$ / при $M_y(0) \neq 0$ и $x'(r_{ВШ}) = 0$) или шарнирные (при $M_x(0) = 0$ и $y'(0) \neq 0$ / при $M_y(0) = 0$ и $x'(r_{ВШ}) \neq 0$) формы собственных колебаний лопасти. Коэффициенты деформаций, определяемые из системы дифференциальных уравнений (16), также должны соответствовать шарнирным или консольным формам. Формулы пересчета для перемещений, скоростей и ускорений элементов лопасти получаются из условия сопряжения решений, в момент изменения консольных форм y_j^k / x_j^k на шарнирные $y_j^{ш} / x_j^{ш}$ и наоборот.

Точность определения деформаций зависит от числа форм собственных колебаний, учитываемых в расчете. Если известны коэффициенты деформаций $\delta_j, \vartheta_j, \eta_j$, то нетрудно определить изгибающие и крутящие моменты и соответствующие им напряжения в лопасти. Они определяются по формулам:

$$\begin{aligned} M_y &= \sum_{j=0}^n \delta_j M_{y,j}; \sigma_y = \sum_{j=0}^n \delta_j \sigma_{y,j}; \\ M_x &= \sum_{j=0}^q \vartheta_j M_{x,j}; \sigma_x = \sum_{j=0}^q \vartheta_j \sigma_{x,j}; \\ M_{кр} &= \sum_{j=1}^p \eta_j M_{кр,j}; \tau = \sum_{j=1}^p \eta_j \tau_j. \end{aligned}$$

где $M_{y,j}, M_{x,j}, M_{кр,j}$ и $\sigma_{y,j}, \sigma_{x,j}, \tau_j$ – формы распределенных изгибающих и крутящих моментов и соответствующих им напряжений при нормированных деформациях лопасти по тонам ее собственных колебаний.

Результаты численных расчетов

В соответствии с описанным методом на языке программирования Maple составлена программа расчета совместных изгибно-крутильных колебаний лопасти НВ вертолета при раскрутке или торможении НВ в условиях ветра на стоянке.

Для оценки достоверности результатов расчетов по предлагаемой модели изгибно-крутильных колебаний лопасти была выполнена их валидация [20] путем сравнения с экспериментальными данными, полученными в условиях умеренного ветра при испытаниях вертолета типа Ми-171А3. В среднем для вертолетов раскрутка до режима «малый газ»

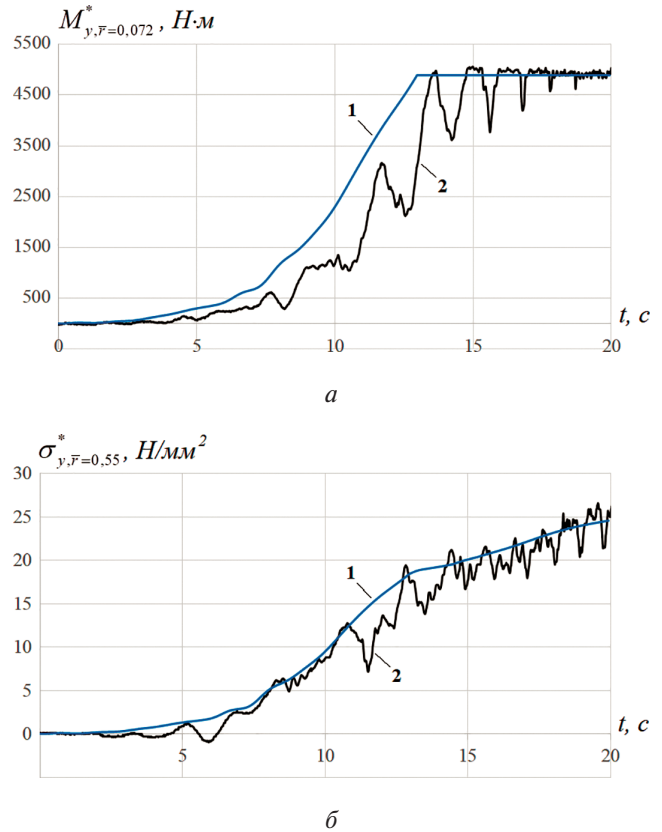


Рис. 4. Зависимости изгибающих моментов и напряжений в плоскости наименьшей жесткости лопасти при раскрутке НВ в условиях умеренного ветра:
 а – относительное сечение $\bar{r} = 0,072$;
 б – относительное сечение $\bar{r} = 0,55$
 (1 – расчет (без ветра); 2 – эксперимент)

занимает порядка 60 с. Поскольку значительные перемещения конца лопасти оказываются возможными при малой величине центробежных сил, увеличивающих жесткость лопасти, то для оценки предельных скоростей ветра обычно достаточно рассмотреть первые 20 с процесса раскрутки НВ. Зависимости расчетных и полученных в эксперименте изгибающих моментов $M_{y, \bar{r}=0,072}^*$ и напряжений $\sigma_{y, \bar{r}=0,55}^*$ за вычетом статических составляющих, возникающих при изгибе лопасти под действием собственного веса, приведены на рис. 4, а и б.

Из рис. 4, а и б видно, что имеет место хорошее совпадение расчетных и экспериментальных значений изгибающих моментов и напряжений в контрольных сечениях лопасти, что позволяет использовать предлагаемую модель для определения предельных скоростей ветра в практических расчетах, выполняемых в опытно-конструкторских бюро, занимающихся разработкой вертолетов.

Результаты расчетов перемещений конца лопасти при раскрутке НВ в условиях «ступенчатого» порыва ветра с максимальными скоростями

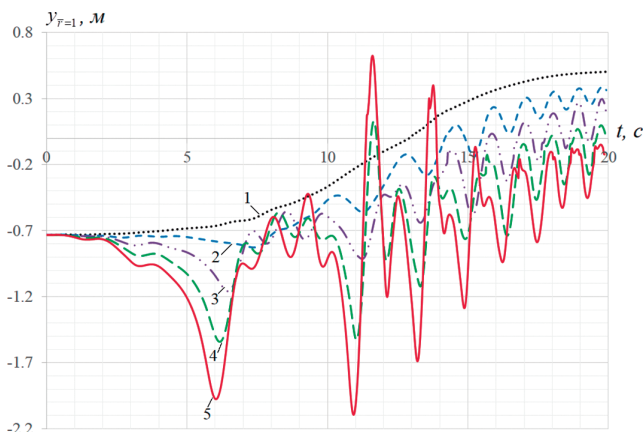


Рис. 5. Зависимости изменения прогибов конца лопасти от времени для заданных расчетных случаев

$V_{max} = 0, 5, 10, 15, 20$ м/с, действующего на протяжении всего времени раскрутки винта, при угле ветра к горизонту $\alpha_b = -15^\circ$, угле общего шага $\theta_0 = 4^\circ$, при нейтральном положении кольца автомата перекося, во временной зависимости приведены на рис. 5, где обозначения кривых соответствуют расчетным случаям: 1 – $\psi_0 = 0^\circ$, раскрутка без ветра; 2 – $\psi_0 \approx -191^\circ$, ветер с $V_{max} = 5$ м/с в направлении $\beta_{ск} = 191^\circ$; 3 – $\psi_0 \approx -140^\circ$, ветер с $V_{max} = 10$ м/с в направлении $\beta_{ск} = 140^\circ$; 4 – $\psi_0 \approx -126^\circ$, ветер с $V_{max} = 15$ м/с в направлении $\beta_{ск} = 126^\circ$; 5 – $\psi_0 \approx -178^\circ$, ветер с $V_{max} = 20$ м/с в направлении $\beta_{ск} = 178^\circ$. Направления ветра $\beta_{ск}$ и начальные азимутальные положения лопасти ψ_0 определены по результатам численных экспериментов исходя из достижения максимальных перемещений конца лопасти на участке ее траектории, соответствующем азимутальному положению хвостовой балки вертолета. Те же зависимости (обозначения сохранены) в боковой проекции, соответствующей виду на вертолет сзади, приведены на рис. 6.

Из зависимостей, приведенных на рис. 5, можно сделать вывод о том, что до определенной скорости порыва ветра наибольшее перемещение конца лопасти достигается при первом обороте несущего винта. И далее, после ее превышения, наибольшее перемещение конца лопасти достигается уже при втором обороте несущего винта.

Зависимость максимального за раскрутку несущего винта перемещения конца лопасти на участке ее траектории, соответствующем азимутальному положению хвостовой балки вертолета, от скорости порыва ветра V_{max} , действующего на протяжении всего времени раскрутки винта, для рассматриваемых «наихудших» расчетных случаев, приведена на рис. 7. Предельной является скорость ветра, при которой перемещение конца лопасти становится рав-

ным расстоянию от плоскости вращения несущего винта до ближайшего элемента планера вертолета, в данном случае до хвостовой балки. Как видно из рис. 7, предельная скорость ветра составляет для рассматриваемого вертолета значение порядка 18,5 м/с. Данное значение предельной скорости ветра после ее уточнения в части обеспечения необходимого запаса по зазору до хвостовой балки может быть внесено в качестве ограничения в руководство по летной эксплуатации вертолета.

Выводы

1. Получена система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая изгибно-крутильные колебания лопасти при раскрутке и торможении НВ в условиях нестационарного воздействия ветра.

2. Предложен метод расчета совместных изгибно-крутильных колебаний лопасти НВ вертолета при раскрутке и торможении НВ в условиях ветра.

3. Сравнительные расчеты изгибающих моментов и напряжений в контрольных сечениях лопасти при раскрутке НВ в условиях отсутствия ветра показали хорошую сходимость с экспериментальными данными, полученными в условиях умеренного ветра при испытаниях вертолета типа Ми-171А3.

4. Определены предельные скорости ветра при раскрутке НВ вертолета типа Ми-171А3.

Список источников

1. Нормы летной годности гражданских вертолетов СССР. – 2-е изд. – М.: Междоуведомственная комиссия по нормам летной годности гражданских самолетов и вертолетов СССР, 1987. – 411 с.
2. Межгосударственный авиационный комитет. Авиационные правила. Ч. 29. Нормы летной годности винтокрылых аппаратов транспортной категории. – М.: Авиаиздат, 2018. – 185 с.
3. Нормы летной годности винтокрылых аппаратов транспортной категории НЛГ-29. – М.: ЦЕНТРМАГ, 2024. – 252 с.
4. Каргаев М.В., Мироненко Л.А. Расчет изгибных напряжений в незашвартованной лопасти вертолета, обдуваемой ветровым потоком // Вестник Московского авиационного института. 2018. Т. 25. № 3. С. 34–43.
5. Каргаев М.В. Расчет напряжений в лопасти несущего винта вертолета на базе нелинейной модели нагружения при статическом воздействии ветра // Вестник Московского авиационного института. 2019. Т. 26. № 2. С. 34–42.
6. Каргаев М.В. Расчет динамических напряжений в лопасти несущего винта вертолета на базе нелинейной модели нагружения при нестационарном воздействии ветра // Полет. Общероссийский научно-технический журнал. 2020. № 4. С. 52–60.

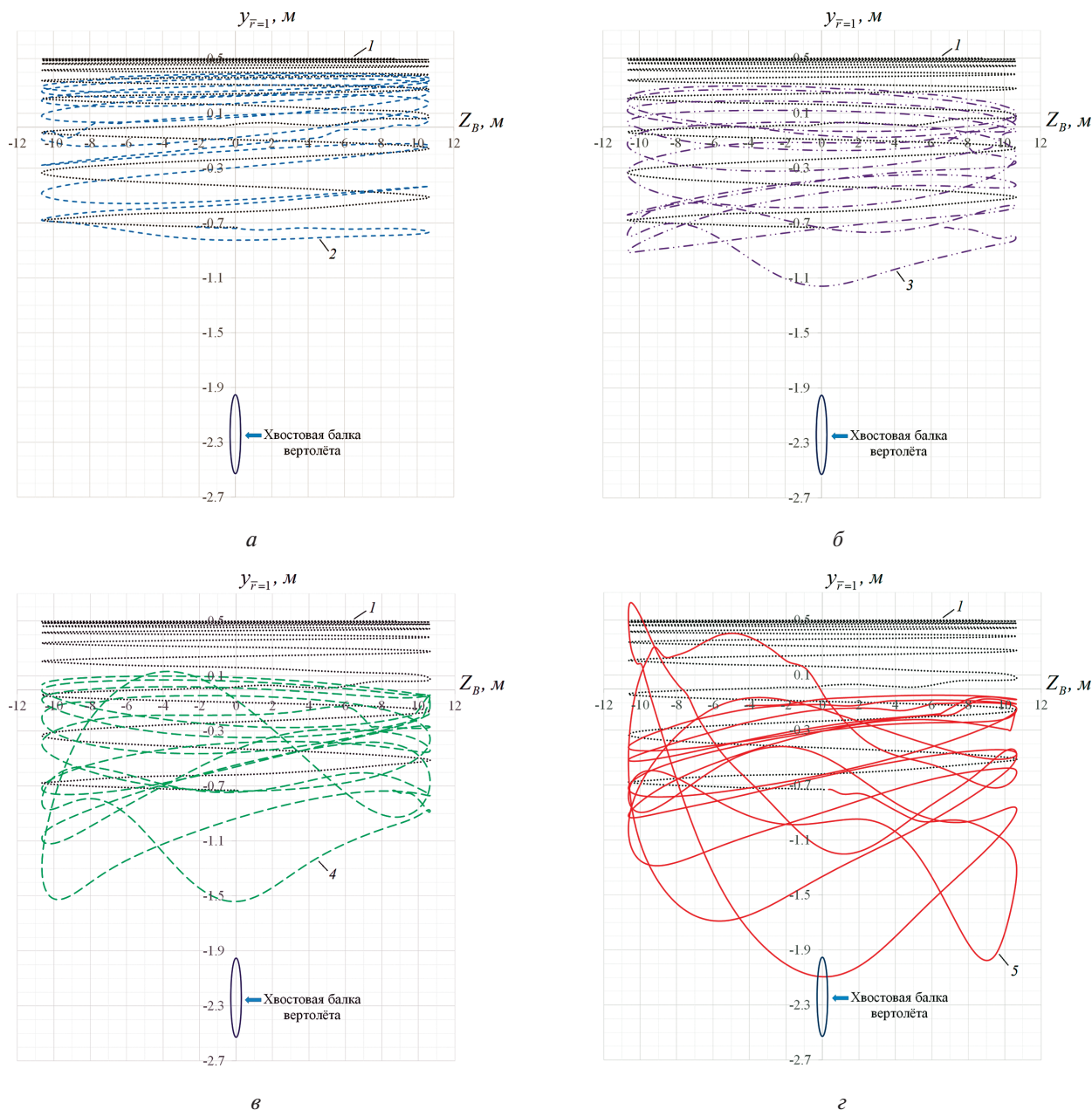


Рис. 6. Зависимости изменения прогибов конца лопасти от времени в боковой проекции, соответствующей виду на вертолѐт сзади, для заданных расчетных случаев: *a* - $1 - V_{max} = 0$ м/с; $2 - V_{max} = 5$ м/с; *б* - $1 - V_{max} = 0$ м/с; $3 - V_{max} = 10$ м/с; *в* - $1 - V_{max} = 0$ м/с; $4 - V_{max} = 15$ м/с; *г* - $1 - V_{max} = 0$ м/с; $5 - V_{max} = 20$ м/с

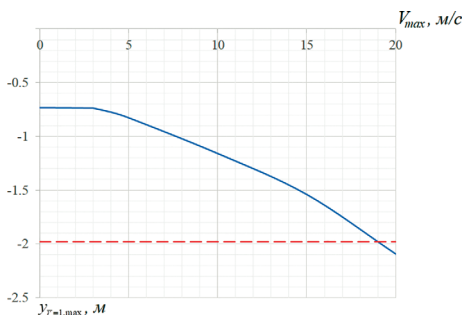


Рис. 7. Зависимость максимальных за раскрутку НВ перемещений конца лопасти от скорости порыва ветра V_{max} для заданных расчетных случаев: $1 - y_{F=1,max}$; $2 -$ расстояние от плоскости вращения НВ до хвостовой балки

7. Миль М.Л., Некрасов А.В., Браверман А.С. и др. Вертолеты, расчет и проектирование: в 2 томах. — М.: Машиностроение, 1966/1967. — (457+424) с.
8. Johnson W. *Rotorcraft Aeromechanics*. — NY: Cambridge University Press, 2013. — 949 p.
9. Bielawa R.L. *Rotary Wing Structural Dynamics and Aeroelasticity*. — 2nd edition. Washington, DC: AIAA, 2006. — 584 p.
10. Ивчин В.А., Аверьянов И.О. Разработка метода расчета деформаций упругой лопасти несущего винта вертолета в плоскостях тяги вращения и кручения путем прямого интегрирования // Научный вестник МГТУ ГА. 2011. №172. С. 80–87.
11. Гришанина Т.В., Русских С.В. Колебания вращающейся лопасти несущего винта вертолета: Учеб. пособие. — М.: Изд-во МАИ, 2016. — 54 с.
12. Каргаев М.В. Динамическая устойчивость лопасти несущего винта вертолета при гармоническом воздействии ветра // Полет. Общероссийский научно-технический журнал. 2020. № 11. С. 21–31.
13. Юдаков А.А., Бойков В.Г. Численные методы интегрирования уравнений движения многокомпонентных механических систем, основанные на методах прямого интегрирования уравнений динамики метода конечных элементов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. № 1. С. 131–144.
14. Horn R.A., Johnson C.R. *Matrix analysis*.— 2nd ed. — NY: Cambridge University Press, 2012. — 662 p.
15. Воскобойников Ю.Е., Мицель А.А. Современные проблемы прикладной математики: Учеб. пособие. Часть 1. Лекционный курс. — Томск: ТУСУР, 2015. — 136 с.
16. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Theory of Linear Ill-Posed Problems and its Applications*. - Utrecht, Boston, Koln, Tokyo: VSP, 2002. — 281 p.
17. Каргаев М.В., Савина Д.Б. Метод расчета напряжений в обшивке хвостовых отсеков невращающихся лопастей несущего винта под действием ветра на стоянке вертолета // Вестник Московского авиационного института. 2023. Т. 30. № 3. С. 17–25.
18. Тихонов А.Н., Гончаровский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1990. — 229 с.
19. Брантон С.Л., Куц Дж.Н. Анализ данных в науке и технике / Пер. с англ. А.А. Слинкина. — М.: ДМК Пресс, 2021. — 542 с.
20. Осипов К.А. Особенности построения расчетных сеток в задачах вычислительной аэрогидродинамики // Труды ЦАГИ. Выпуск 2791. 2019. С. 1–27.

References

1. *Normy letnoi godnosti grazhdanskikh vertoletov SSSR* (Airworthiness standards of civil helicopters of the USSR). 2nd ed. Moscow: Mezhdovedomstvennaya komissiya po normam letnoi godnosti grazhdanskikh samoletov i vertoletov SSSR; 1987. 411 p. (In Russ.).
2. *Mezhhgosudarstvennyi aviatsionnyi komitet. Aviatsionnye pravila. Ch. 29. Normy letnoi godnosti vintokrylykh apparatov transportnoi kategorii* (Interdepartmental Aviation Committee. Civil Aviation Safety Regulations. Part 29. Airworthiness standards for rotorcraft in the transport category). Moscow: Aviaizdat; 2018. 185 p. (In Russ.).
3. *Normy letnoi godnosti vintokrylykh apparatov transportnoi kategorii NLG-29* (Airworthiness standards of rotorcraft NLG-29 transport category). Moscow: TSENTRMAG; 2024. 252 p. (In Russ.).
4. Kargaev MV., Mironenko LA. Bending stresses computation in a helicopter unmoored rotor blade blown about by the wind flow. *Aerospace MAI Journal*. 2018;25(3):34-43. (In Russ.).
5. Kargaev MV. Stresses computing in the main rotor blade based on the nonlinear loading model under static wind impact. *Aerospace MAI Journal*. 2019;26(2):34-42. (In Russ.).
6. Kargaev MV. Dynamic stresses computing in the main rotor blade based on the non-linear loading model under unsteady wind impact. *Polet. Obshcherossiiskii nauchno-tekhnicheskii zhurnal*. 2020;(4):52–60. (In Russ.).
7. Mil' ML, Nekrasov AV, Braverman AS. et al. *Vertolety, raschet i proektirovanie: v 2 tomakh* (Helicopters, calculation and design: in 2 vls). Moscow: Mashinostroenie; 1966/1967. (457+424) p. (In Russ.).
8. Johnson W. *Rotorcraft Aeromechanics*. NY: Cambridge University Press; 2013. 949 p.
9. Bielawa RL. *Rotary Wing Structural Dynamics and Aeroelasticity*. 2nd ed. Washington: DC, AIAA; 2006. 584 p.
10. Ivchin VA, Aver'yanov IO. Development of a method for calculating deformations of the elastic rotor blade of a helicopter in the planes of thrust rotation and torsion by direct integration. *Nauchnyi Vestnik MGTU GA*. 2011;(172):80–87. (In Russ.).
11. Grishanina TV, Russkikh SV. *Kolebaniya vrashchayushcheysoy lopasti nesushchego vinta vertoleta* (Oscillations of the rotating main rotor blade of the helicopter). Moscow: MAI; 2016. 54 p. (In Russ.).
12. Kargaev MV. Dynamic stability of the helicopter main rotor blade under the harmonic influence of wind. *Polet. Obshcherossiiskii nauchno-tekhnicheskii zhurnal*. 2020(11):21–31. (In Russ.).
13. Yudakov AA, Boikov VG. Numerical methods of multibody mechanical system's dynamic equations integration, based on methods of direct integration of finite element method's dynamic equations. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki*. 2013;(1): 31-144. (In Russ.).
14. Horn RA, Johnson CR. *Matrix analysis*. 2nd ed. NY: Cambridge University Press; 2012. 662 p.

15. Voskoboinikov YuE, Mitsel' AA. *Sovremennye problemy prikladnoi matematiki. Chast' 1. Lektsionnyi kurs* (Modern problems of applied mathematics. Part 1. Lecture course). Tomsk: TUSUR; 2015. 136 p. (In Russ.).
16. Ivanov VK, Vasin VV, Tanana VP. *Theory of Linear Ill-Posed Problems and its Applications*. Utrecht, Boston, Koln, Tokyo: VSP; 2002. 281 p. (In Russ.).
17. Kargaev MV, Savina DB. Stresses computation method in the skin of non-rotating main rotor blades tail sections under the impact of the wind at the helicopter parking lot. *Aerospace MAI Journal*. 2023;30(3):17-25. (In Russ.).
18. Tikhonov AN, Goncharovskii AV, Stepanov VV, Yagola AG. *Chislennye metody resheniya nekorrektnykh zadach* (Regularizing algorithms and a priori information). Moscow: Nauka; 1990. 229 p. (In Russ.).
19. Brunton SL., Kutz JN. *Data-Driven Science and Engineering*. 2nd ed. Cambridge University Press; 2022. 614 p.
20. Osipov KA. Computational mesh generation in computational aero-hydrodynamics problems. *Trudy TsAGI*. 2019;(2791): 1-27. (In Russ.).

Статья поступила в редакцию 19.09.2024; одобрена после рецензирования 07.10.2024; принята к публикации 22.10.2024.
The article was submitted on 19.09.2024; approved after reviewing on 07.10.2024; accepted for publication on 22.10.2024.