

**МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)**

На правах рукописи



**Крайнова Ирина Валерьевна**

**РАЗРАБОТКА И ИДЕНТИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ  
ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ЭКРАНО-ВАКУУМНОЙ ТЕПЛОИЗОЛЯЦИИ  
КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ**

Специальность

01.04.14 – Теплофизика и теоретическая теплотехника

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени

кандидата технических наук

**Научный руководитель:** д.т.н., профессор

Ненарокомов Алексей Владимирович

Москва – 2015

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение</b> .....	4
<b>Глава 1. Обеспечение тепловых режимов космических аппаратов в условии орбитальных полетов</b> .....	11
1.1. Внешнее тепловое воздействие на поверхность космического аппарата .....	11
1.1.1. Ориентация в пространстве.....	13
1.1.2. Определение потока солнечного излучения.....	18
1.1.3. Определение отраженного от планеты солнечного излучения.....	20
1.1.4. Определение собственного излучения планеты.....	25
1.1.5. Результаты расчетов внешнего теплового воздействия на поверхность КА.....	28
1.2. Экрано-вакуумная тепловая изоляция.....	37
1.3. Задачи исследования .....	39
Выводы по главе 1.....	40
<b>Глава 2. Математическое моделирование теплопереноса в ЭВТИ</b> .....	41
2.1 Уточненная математическая модель теплопереноса в ЭВТИ .....	41
2.1.1. Традиционная тепловая модель.....	41
2.1.2. Уточненная модель переноса тепла излучением.....	42
2.1.3. Оптические свойства полупрозрачного волокнистого разделителя.....	45
2.1.4. Расчет излучательной способности алюминиевой фольги...	48
2.1.5. Оптические характеристики кварцевого стекла и алюминия	53
2.1.6. Результаты расчетов.....	57
2.2 Оптимизация ЭВТИ путем выбора волокнистого разделителя.....	61
2.3 Конечно-разностный алгоритм.....	64
Выводы по главе 2.....	66
<b>Глава 3. Практическая апробация разрабатываемого метода моделирования</b> .....	67

3.1. Тепловые испытания образцов, моделирующих элементы ЭВТИ	67
3.1.1. Цели и задачи тепловых испытаний.....	67
3.1.2. Методика проведения тепловых испытаний.....	71
3.1.3. Тепловые испытания и анализ результатов.....	76
3.1.4. Результаты расчетов.....	86
3.2 Экспериментальное исследование многослойного теплоизоляционного покрытия.....	89
3.2.1 Методика и результаты проведения тепловых испытаний....	89
3.2.2 Результаты моделирования.....	96
Выводы по главе 3.....	102
<b>Глава 4. Идентификация математической модели теплопереноса в ЭВТИ.....</b>	<b>103</b>
4.1. Итерационный алгоритм решения задачи идентификации математической модели теплообмена .....	103
4.1.1 Метод итерационной регуляризации и структура алгоритмов решения обратных задач.....	103
4.1.2. Сопряженная краевая задача и вычисление градиента функционала невязки.....	110
4.1.3. Определение параметра спуска.....	129
4.2. Идентификация неизвестных характеристик ЭВТИ .....	132
4.2.1. Особенности алгоритма решения рассматриваемой обратной задачи теплообмена .....	132
4.2.2. Вычислительный эксперимент.....	134
4.2.3. Результаты обработки экспериментальных данных.....	137
Выводы по главе 4.....	139
<b>Заключение.....</b>	<b>140</b>
<b>Список литературы.....</b>	<b>142</b>

## Введение

### Актуальность работы

Для космических аппаратов обеспечение тепловых режимов было и остается одной из самых важных задач, определяющих основные проектно-конструкторские решения. Общая тенденция развития космической техники связана с ужесточением условий теплового нагружения различных систем, с необходимостью повышать их надежность и ресурс и одновременно снижать энерго- и материалоемкость. Для таких технических систем обеспечение тепловых режимов, основанное на применении теплоизоляции с соответствующими свойствами, является одним из важнейших этапов проектирования. В настоящее время создание таких конструкций связано с широким применением методов физического и математического моделирования.

Использование средств математического моделирования позволяет предсказывать свойства материалов уже на стадии их проектирования и разработки. Для получения как можно более точных результатов моделирования необходимо обладать достоверной информацией о характеристиках анализируемых объектов. Однако в большинстве случаев прямое измерение теплофизических и радиционно-оптических свойств конструкций (особенно сложного состава) является невозможным. В этом случае единственным путем, позволяющим определять необходимые характеристики, является не прямое измерение. Математически подобный подход обычно представляет собой решение обратной задачи: по прямым измерениям состояния системы (например, температуры) определяются свойства анализируемой системы.

Используемые в настоящее время в инженерных расчетах тепловые модели ЭВТИ описывают совокупность изотермических элементов, соответствующих экранам, и не учитывают влияния волокнистых

разделительных слоев, расположенных между экранами, на перенос тепла в ЭВТИ. В известной литературе этот вопрос не рассматривается. В то же время, в связи с повышением требований к точности расчета тепловых изоляций космических аппаратов, возникает необходимость учитывать все значимые факторы.

Последнее обстоятельство послужило основанием для данной работы, в которой специальное внимание уделено влиянию радиационных характеристик волокнистых разделителей на перенос тепла излучением. В расчетной модели учитывается также роль возможного тонкого оксидного слоя на поверхности металлических экранов. В работе также разработан алгоритм решения обратной задачи теплообмена, позволяющий определять теплофизические характеристики ЭВТИ с высокой точностью.

Изложенное выше делает задачу разработки и идентификации уточненной математической модели теплопереноса в экрано-вакуумной теплоизоляции космических аппаратов актуальной.

### **Цель работы**

Данная работа посвящена уточнению математической модели теплопереноса в экрано-вакуумной теплоизоляции космических аппаратов. В предложенной модели учитываются влияние волокнистых разделителей между экранами, а также тонкого оксидного слоя на поверхности экранов на величину интегрального потока теплового излучения через ЭВТИ. Также в работе на основании результатов экспериментального исследования производится восстановление некоторых радиационных характеристик экранов ЭВТИ.

### **Задачи работы:**

1. Разработка уточненной математической модели теплопереноса в экрано-вакуумной теплоизоляции, учитывающей наличие разделительных слоев из полупрозрачного волокнистого материала между экранами.

2. Исследование эффективности разработанной модели путем сравнения результатов математического моделирования на основе модифицированной математической модели с экспериментальными данными.
3. Разработка математической модели внешнего теплового воздействия на космический аппарат во время орбитального полета.
4. Разработка алгоритма идентификации математической модели теплопереноса в системах с сосредоточенными параметрами.
5. Применение результатов тепловых испытаний для восстановления некоторых радиационных характеристик экрано-вакуумной теплоизоляции.

### **Методы исследования**

Работа, направленная на достижение сформулированных выше задач, предполагает проведение большого объема расчетных исследований, построение вычислительных алгоритмов, связанных, прежде всего, с разработкой алгоритмов и математического обеспечения для решения обратных задач теплообмена в условиях реального теплофизического эксперимента. Для создания таких алгоритмов использован обширный опыт в решении обратных задач для систем с распределенными параметрами, распространенный на разработанную математическую модель. Большинство разработанных алгоритмов реализовано на базе уже имеющегося программного обеспечения, написанного на языке FORTRAN, которое было существенно модифицировано с учетом поставленных целей. Также для отдельных задач было разработано новое программное обеспечение.

### **Научная новизна**

Разработана уточненная математическая модель теплообмена в ЭВТИ, впервые учитывающая радиационный перенос внутри слоя разделителя, выполненных из волокнистых высокопористых полупрозрачных материалов (волокон), а также наличие тонкого оксидного слоя на металлических экранах. Разработан алгоритм решения обратной задачи теплообмена по

восстановлению зависящих от температуры теплофизических характеристик ЭВТИ, учитывающий наличие волокнистых разделительных слоев между экранами ЭВТИ.

### **Теоретическая и практическая ценность работы**

Помимо проведения исследований практическая ценность данной работы состоит в разработке прикладного алгоритмического и программного обеспечения, которое может быть использовано для определения радиационно-оптических характеристик ЭВТИ. Также разработан программный комплекс, позволяющий определять поток теплового излучения, воздействующий на элемент конструкции космического аппарата во время орбитального полета, на основе данных, известных из программы полета КА.

**Достоверность и обоснованность** работы подтверждаются результатами численного моделирования и экспериментальных тепловых исследований образцов.

### **Апробация работы**

Основные научные результаты работы докладывались на научно-технических конференциях. В частности, на V Общероссийской молодежной научно-технической конференции «Молодежь. Техника. Космос» (Санкт-Петербург, Россия, 20-22 марта 2013г.), на конференции «Проблемы газодинамики и теплообмена в энергетических установках» (Орехово-Зуево, Россия, 19-23 мая 2013г.), на 7-ом международном симпозиуме по радиационному теплообмену (7th International ICHMT Symposium on Radiative Transfer RAD-13, Кушадасы, Турция, 2-8 июня 2013г.), на 8-ой международной конференции по обратным задачам (8th International Conference on Inverse Problems in Engineering ICIPe-2014, Польша, Краков, 12-15 мая 2014), на 15-ой международной конференции по теплообмену (15th International Heat Transfer Conference IHTC-15, Киото, Япония, 10-15 августа 2014г.)

## **Публикации**

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в ряде научно-технических отчетов, 7 публикациях в научных изданиях, из них 2 научные работы опубликованы в изданиях, рекомендуемых Перечнем ВАК при Министерстве образования и науки РФ, и 1 работа опубликована в издании, цитируемом в базе данных Scopus.

## **Структура и объем работы**

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы; содержит 148 страниц основного текста, 62 рисунка, 6 таблиц, список литературы из 58 наименований.

**Во введении** обоснована актуальность выбранной темы, сформулированы цели и задачи работы. Доказана новизна, а также достоверность и обоснованность результатов диссертационной работы. Кратко охарактеризованы методы исследования. Доказана теоретическая и практическая значимость работы.

**В первой главе** диссертационной работы приведен краткий обзор используемых в настоящее время экрано-вакуумных теплоизоляций. Рассмотрены основные виды тепловых потоков, воздействующих на КА во время орбитального полета, особенности их моделирования. В результате разработана методика по определению внешнего теплового воздействия на КА, реализованная в виде программы, написанной на языке FORTRAN. Данная программа позволяет вычислять тепловые потоки без проведения дополнительных исследований, только на основании имеющихся геометрических характеристик КА и его программы полета.

**Во второй главе** рассмотрены процессы переноса излучения в элементе ЭВТИ, состоящем из двух экранов и волокнистого разделительного слоя между ними. Получено выражение для определения потока излучения через такой



элемент, учитывающее отражение и пропускание излучения высокопористого волокнистого разделителя, определяемые на основании теории независимости рассеяния и теории Ми для бесконечного однородного цилиндра, а также данных о дисперсном составе волокнистого материала. В предположении, что материалом экранов ЭВТИ является алюминий, учтено также наличие возможной оксидной пленки на его поверхности и оценено влияние такой пленки на излучательную способность алюминиевой фольги. Показано, что наличие слоя оксида приводит к значительному увеличению потока теплового излучения через слой ЭВТИ.

**В третьей главе** представлена апробация методики по определению теплового потока через слой ЭВТИ в процессе моделирования процессов теплообмена образце ЭВТИ и последующего сравнения результатов моделирования с результатами тепловых испытаний образцов, имитирующих элементы ЭВТИ. Результаты сравнения расчетных значений плотностей тепловых потоков свидетельствуют о достоверности предложенной модели. Также проанализированы данные экспериментального исследования реального образца ЭВТИ. Составлена математическая модель теплообмена в ЭВТИ, учитывающая наличие разделительных слоев между экранами. Показано, что теоретический прогноз довольно точно соответствует результатам измерений температуры, что позволяет использовать разработанную математическую модель для анализа тепловых свойств ЭВТИ.

**В четвертой главе** представлен общий алгоритм решения обратных задач для систем с сосредоточенными параметрами, который распространен на частный случай идентификации модифицированной математической модели ЭВТИ, рассмотренной во второй и третьей главах. Разработан итерационный алгоритм для решения такой задачи, получены аналитические выражения для вычисления градиента функционала невязки и составлена краевая задача для сопряженной переменной. Также получена краевая задача для вариации температуры, позволяющая вычислить линейную оценку глубины спуска. Разработанный алгоритм и результаты вычислительного эксперимента

используются для восстановления спектральной излучательной способности нагреваемой керамической ткани  $\varepsilon_{a,\lambda}$ . Показано, что предложенный алгоритм позволяет вычислять искомую величину с высокой точностью.

**В заключении** обобщены результаты диссертационного исследования и представлены выводы по работе.

## **Глава 1. Обеспечение тепловых режимов космических аппаратов в условиях орбитальных полетов**

Разработка систем обеспечения тепловых режимов космических аппаратов связана с проблемой поддержания в необходимых пределах температуры внутренних и внешних элементов конструкции. Заданные тепловые режимы могут быть обеспечены с использованием как активных, так и пассивных систем терморегулирования (СТР). В настоящей главе рассматривается внешнее тепловое воздействие на космический аппарат в условиях орбитального полета, а также некоторые реализации пассивных СТР.

### **1.1. Внешнее тепловое воздействие на поверхность космического аппарата**

Вопрос исследования внешнего теплообмена космического аппарата в условиях орбитального полета оказывается важным при решении задач теплового проектирования КА. Работы по созданию методов моделирования внешних условий полета начались вместе с развитием исследований околоземного пространства с использованием космической техники. Полученные результаты достаточно широко опубликованы [1–9].

Наиболее значимым источником внешнего теплового воздействия на КА является Солнце. Попадая на поверхность планеты, солнечная энергия частично отражается, частично поглощается и переизлучается планетой. Общие методы, позволяющие определять данные тепловые потоки, рассмотрены в указанных работах. При этом, если расчет солнечного излучения оказывается достаточно простым, то расчет теплового воздействия на КА со стороны планеты уже более сложен из-за необходимости учитывать взаимную ориентацию поверхности КА, планеты и Солнца. В частности, алгоритм расчета угловых коэффициентов между КА и планетой был разработан Залетаевым В.М. [8]. Однако, аналитические выражения позволяют находить данные тепловые

потоки только для объектов достаточно простой формы. Выражения для определения угловых коэффициентов как наиболее часто применяемых элементарных поверхностей, так и произвольных выпуклых тел наиболее полно представлены в [2].

Очевидно, учет всех особенностей внешнего теплового воздействия на КА невозможен, что приводит к использованию в расчетах различных допущений и упрощений. Среди таких допущений – применение модели планеты, основанной на осреднении ее радиационных характеристик, аппроксимация расчетных формул при определении тепловых потоков от планеты. В качестве дополнительного источника внешнего воздействия на КА обычно не учитывается тепло, выделяемое при взаимодействии КА с разреженной атмосферой при движении на низких орбитах. При моделировании отраженного от планеты солнечного излучения часто используется модель диффузного отражения и не учитывается зеркальный характер отражения при больших углах падения солнечного излучения. Максимальная погрешность при использовании таких допущений составляет всего несколько процентов от величины максимального потока на поверхность КА, но в то же время это позволяет значительно упростить проводимые расчеты.

Однако, существуют задачи, требующие как можно большего увеличения точности вычислений и соответственно учета как можно большего числа факторов. Так, модель отражения солнечного излучения от поверхности планеты может быть описана комбинацией как диффузного, так и зеркального отражения, в зависимости от угла падения солнечного излучения [3]. Внешнее тепловое воздействие со стороны атмосферы при полете КА вблизи планеты рассмотрено в [1]. При решении задач для КА реальной сложной конфигурации следует учитывать затенение некоторых поверхностей другими участками КА, а также переотражение и переизлучение в элементах конструкции [10].

Также следует отметить, что представленные в вышеперечисленных работах аналитические выражения могут оказаться не слишком удобными для практического применения, т.к. расчеты по ним подразумевают знание определенных, в общем случае неочевидных углов (например, угол между направлением на Солнце и направлением на рассматриваемую поверхность), что требует в каждом конкретном случае проводить дополнительные исследования. В связи с этим целью данной части работы было создание программного комплекса, позволяющего определять поток теплового излучения, воздействующий на элемент конструкции, произвольно расположенный на поверхности космического аппарата, на основе данных, известных из программы полета КА:

- текущая дата;
- параметры орбиты КА;
- ориентация КА во время орбитального полета;
- положение исследуемой поверхности на аппарате.

### **1.1.1. Ориентация в пространстве**

В качестве анализируемого элемента в данной работе рассматривается плоский элемент незатененной поверхности КА. Для определения величин тепловых потоков необходимо определить ориентацию исследуемого элемента поверхности КА в инерциальной системе координат.

Рассмотрим связанную с аппаратом систему координат  $X_c Y_c Z_c$ . Начало связанной системы координат  $O_c$  располагается в центре масс КА. Ось  $O_c X_c$  (продольная ось) этой системы направлена от хвостовой к носовой части КА. Ось  $O_c Y_c$  (нормальная ось) перпендикулярна  $O_c X_c$ , находится в плоскости симметрии (продольной плоскости) КА и направлена к верхней части КА или части, условно ей соответствующей. Ось  $O_c Z_c$  (поперечная ось) дополняет систему  $X_c Y_c Z_c$  до правой. На рисунке 1.1 показано возможное положение связанной системы координат.

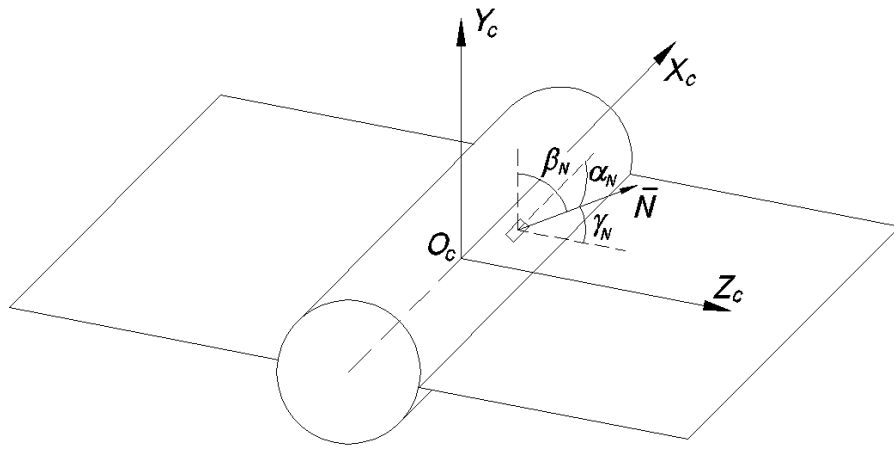


Рис. 1.1 Ориентация элемента поверхности в связанной системе координат.

Положение исследуемого элемента поверхности зададим направляющими углами  $\alpha_N$ ,  $\beta_N$ ,  $\gamma_N$  для вектора нормали  $\bar{N}$  (см. рисунок 1.1). Тогда вектор  $\bar{N}$  имеет координаты в связанной системе координат  $\bar{N}_C(\cos\alpha_N, \cos\beta_N, \cos\gamma_N)$ .

Фиксирование положения связанной системы координат относительно орбитальной системы координат  $nrb$  определяет ориентацию корпуса КА в пространстве (рисунок 1.2). Орбитальная система координат имеет начало в центре масс КА  $O_c$ . Ось  $O_cr$  (радиаль) направлена по радиус-вектору КА. Ось  $O_cn$  (трансверсаль) перпендикулярна  $O_cr$ , принадлежит плоскости траектории КА и направлена в сторону движения аппарата. Третья ось  $O_cb$  (нормаль) дополняет систему  $O_cnr$  до прямоугольной правой. Плоскость  $O_cnb$  является плоскостью местного горизонта.



Так как матрица  $A$  является ортогональной матрицей, то ее обратная матрица  $A^{-1}$  эквивалентна транспонированной матрице  $A^T$ :  $A^{-1} = A^T$ .

В результате преобразований получим координаты вектора  $\bar{N}$  в орбитальной системе координат:

$$\begin{aligned} N_n &= N_{x_c} \cos \vartheta \cos \psi + N_{y_c} (\sin \psi \sin \gamma - \sin \vartheta \cos \psi \cos \gamma) + N_{z_c} (\sin \psi \cos \gamma + \sin \vartheta \cos \psi \sin \gamma) \\ N_r &= N_{x_c} \sin \vartheta + N_{y_c} \cos \vartheta \cos \gamma - N_{z_c} \cos \vartheta \sin \gamma \\ N_b &= -N_{x_c} \cos \vartheta \sin \psi + N_{y_c} (\cos \psi \sin \gamma + \sin \vartheta \sin \psi \cos \gamma) + N_{z_c} (\cos \psi \cos \gamma - \sin \vartheta \sin \psi \sin \gamma) \end{aligned} \quad (1.3)$$

И наконец, можно перейти к планетоцентрической экваториальной системе координат, которую для большинства инженерных задач можно считать инерциальной.

Начало планетоцентрической системы координат  $XYZ$  (см. рисунок 1.2) совпадает с центром планеты. Основная плоскость  $OXY$  совпадает с плоскостью экватора, ось  $OZ$  направлена по оси вращения планеты. Ось  $OX$  направлена в точку весеннего равноденствия.

Для определения относительного положения экваториальной и орбитальной систем координат задаются еще три угла:

$\Omega$  (долгота восходящего узла) – угол между осью  $OX$  и осью  $OA$  – линией пересечения плоскости экватора и плоскости орбиты КА (линия узлов);

$i$  (наклонение орбиты) – угол между плоскостью экватора и плоскостью орбиты;

$u$  (аргумент широты) – угол между линией  $OA$  и текущим радиус-вектором КА.

Тогда матрица перехода от геоцентрической системы координат к орбитальной может быть записана следующим образом [11]:



$$B = \begin{vmatrix} -\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i & -\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i & \cos u \sin i \\ \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i & \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i & \sin u \sin i \\ -\sin \Omega \sin i & \cos \Omega \sin i & -\cos i \end{vmatrix}$$

Компоненты вектора  $\overline{N}$  в планетоцентрической системе координат:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} N_n \\ N_r \\ N_b \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Или после подстановки:

$$\begin{aligned} N_x &= N_n (-\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i) + N_r (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i) - N_b \sin \Omega \sin i \\ N_y &= N_n (-\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i) + N_r (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i) + N_b \cos \Omega \sin i \\ N_z &= N_n \cos u \sin i + N_r \sin u \sin i - N_b \cos i \end{aligned} \quad (1.5)$$

Таким образом, с помощью девяти заданных углов можно определить ориентацию анализируемого элемента в пространстве. Кроме того, для определения положения аппарата необходимо знать параметры его орбиты, в общем случае эллиптической. Высота апоцентра  $H_\alpha$  и перицентра  $H_\pi$  определяют геометрию орбиты, а угол  $\omega$  (аргумент перицентра) задает положение перицентра  $P$  относительно линии узлов (рисунок 1.2).

Движение аппарата по эллиптической орбите неравномерно. Связать положение спутника на орбите со временем, прошедшим после прохождения перицентра  $t_\pi$ , можно используя уравнение Кеплера [11]:

$$E - e \sin E = n(t - t_\pi), \quad (1.6)$$

где  $e$  – эксцентриситет орбиты,  $E$  – эксцентрическая аномалия,  $n$  – среднее движение спутника (рисунок 1.3). В качестве начального положения аппарата ( $t=0$ ) примем положение с нулевым аргументом широты ( $u=0$ ).

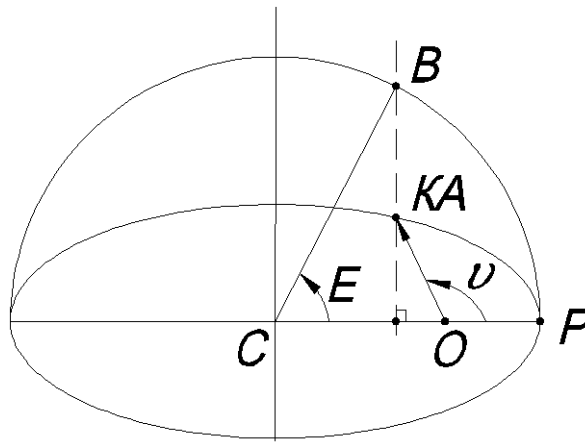


Рис. 1.3 Эллиптическая орбита.

### 1.1.2 Определение потока солнечного излучения

Расчет нагрева поверхности прямым солнечным излучением относительно прост, поскольку солнечный поток является практически параллельным. Тогда поток прямого солнечного излучения, падающий на элемент поверхности, можно определить как произведение солнечной постоянной  $S$  на единичную площадь проекции элемента поверхности на плоскость, перпендикулярную солнечным лучам [1], т.е.:

$$q_s = S \cdot \cos \gamma, \quad (1.7)$$

где

$\gamma$  – угол между нормалью к элементу поверхности  $\bar{N}$  и направлением на Солнце  $\bar{S}$ ,

$S$  – плотность потока солнечного излучения, падающего по нормали на единичную поверхность на внешней границе атмосферы на среднем расстоянии планеты от Солнца:

$$S = \frac{S_0}{L^2}, \quad (1.8)$$

где

$S_0 = 1398 \text{ Вт/м}^2$  – солнечная постоянная для Земли,

$L$  – среднее расстояние от планеты до Солнца в а.е.

Если  $\gamma > 90^\circ$  солнечное излучение не попадает на анализируемый элемент поверхности и поток  $q_s$  в этом случае равен нулю.

Для определения направления вектора  $\bar{S}$  рассмотрим орбиту движения планеты вокруг Солнца (рисунок 1.4). При этом, если орбита Земли близка к круговой, то орбита, например, Меркурия достаточно сильно вытянута, что приводит к значительным вариациям плотности солнечного излучения в течение года. Поэтому в общем случае необходимо учитывать эллиптичность орбиты планеты.

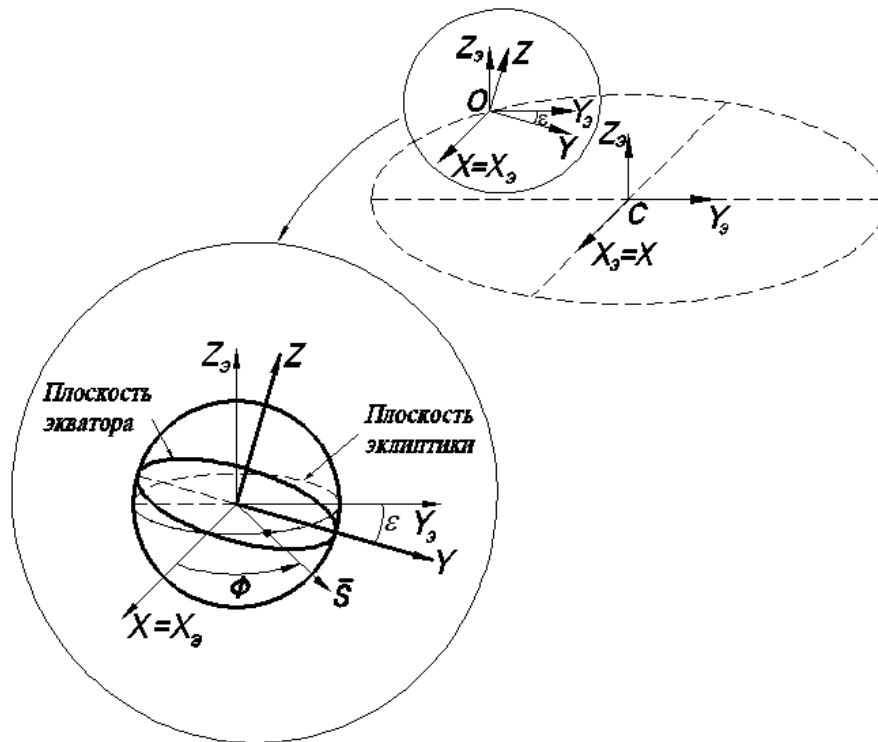


Рис. 1.4 Траектория движения планеты вокруг Солнца.

Направление на Солнце задается углом  $\Phi$ , отсчитываемым от положительного направления оси  $OX$ . Начальное значение угла  $\Phi_0=0^\circ$  соответствует точке, в которой планета находится в момент осеннего равноденствия. Вектор  $\bar{S}$  принадлежит плоскости эклиптики. Угол наклона между плоскостью экватора и плоскостью эклиптики обозначен  $\varepsilon$ .

С учетом этих двух углов можно определить координаты вектора  $\bar{S} = \{ \cos \Phi; \sin \Phi \cos \varepsilon; \sin \Phi \sin \varepsilon \}$ .

Тогда необходимое для вычисления потока солнечного излучения  $q_s$  значение  $\cos \gamma$  можно определить через скалярное произведение векторов:

$$\cos \gamma = \frac{(\bar{N} \cdot \bar{S})}{|\bar{N}| \cdot |\bar{S}|} = N_x S_x + N_y S_y + N_z S_z \quad (1.9)$$

### 1.1.3 Определение отраженного от планеты солнечного излучения

Расчет теплового потока на аппарат за счет отраженного планетой солнечного излучения достаточно сложен. Это связано с тем, что каждая точка поверхности планеты отражает солнечное излучение различным образом. Кроме того, не вся «видимая» с КА часть планеты освещена Солнцем, а также отражение на самом деле в значительной мере недиффузно и неравномерно по всей поверхности планеты. Таким образом, плотность отраженного от планеты и падающего на элемент поверхности КА потока солнечного излучения зависит от геофизических свойств поверхности планеты и атмосферы ( $A_{cp}$ ), а также от положения рассматриваемого элемента относительно направления и физической модели отражения солнечного излучения ( $\varphi_2$ ) [2]:

$$q_R = A_{cp} S \varphi_2 \quad (1.10)$$

где

$A_{cp}$  – альбедо планеты,

$\varphi_2$  – угловой комбинированный коэффициент.

Пусть система планета – Солнце – элемент поверхности характеризуется параметрами  $\theta_0$ ,  $\gamma_s$ ,  $\delta_s$ ,  $\psi_n$  (рисунок 1.5), где  $\theta_0$  – угол между вертикальным и касательным к планете направлениями из центра элемента;  $\gamma_s$  – угол между направлениями на рассматриваемую поверхность и на Солнце из центра планеты,  $0 \leq \gamma_s \leq \pi - \theta_0$ ;  $\delta_s$  – угол между вертикальной плоскостью, проходящей

через нормаль к элементу поверхности, и вертикальной плоскостью, параллельной солнечному потоку,  $0 \leq \delta_s \leq \pi$ ;  $\psi_n$  – угол между нормалью  $\vec{N}$  к рассматриваемой стороне элемента поверхности и вертикальным направлением (направлением на центр планеты),  $0 \leq \psi_n \leq \frac{\pi}{2} + \theta_0$ .

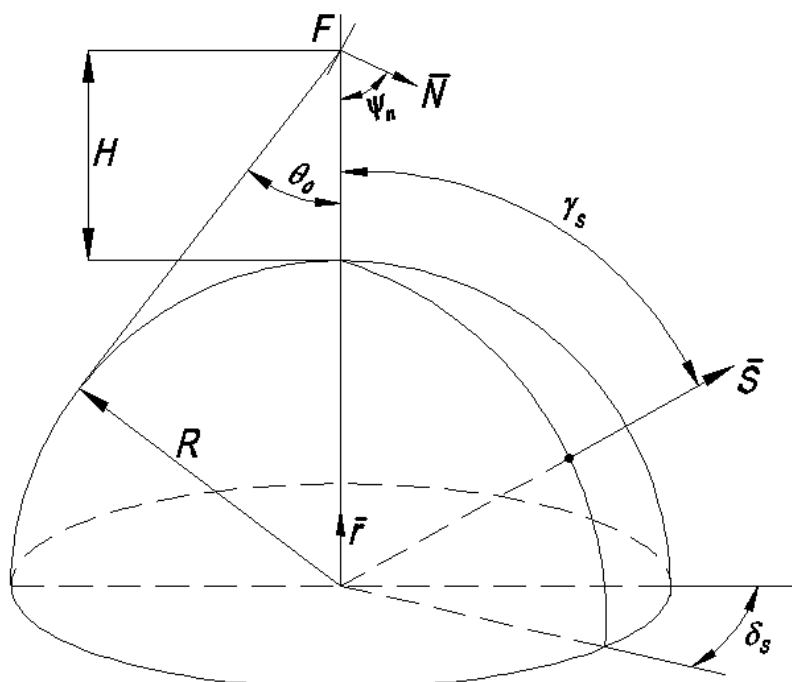


Рис. 1.5 Основные параметры для расчета угловых коэффициентов.

$$\theta_0 = \arcsin \frac{\bar{R}}{R + H}, \quad (1.11)$$

где  $\bar{R}$  – эффективный радиус планеты,  $H$  – текущая высота орбиты КА.

Значение угла  $\psi_n$  можно рассчитать, зная координаты векторов  $\vec{N}$  и  $\vec{r}$  (единичный вектор, направленный по радиус-вектору КА). Координаты вектора  $\vec{r}$  можно определить как координаты радиали  $Or$  орбитальной системы координат:

$$\begin{aligned} r_x &= \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i \\ r_y &= \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i \\ r_z &= \sin u \sin i \end{aligned} \quad (1.12)$$

Тогда значение угла  $\psi_n$  определим через скалярное произведение векторов:  $\psi_n = \pi - \arccos \frac{(\vec{N} \cdot \vec{r})}{|\vec{N}| \cdot |\vec{r}|} = \pi - \arccos(N_x r_x + N_y r_y + N_z r_z)$

Угол  $\gamma_s$  через скалярное произведение векторов равен:

$$\gamma_s = \arccos \frac{(\vec{S} \cdot \vec{r})}{|\vec{S}| \cdot |\vec{r}|} = \arccos(r_x S_x + r_y S_y + r_z S_z) \quad (1.13)$$

Т.к. угол  $\delta_s$  – это угол между двумя плоскостями, его можно определить как угол между нормальными векторами к этим плоскостям:  $\vec{N}_{Sr}$  – нормаль к вертикальной плоскости, параллельной солнечному потоку,  $\vec{N}_{Nr}$  – нормаль к вертикальной плоскости, проходящей через нормаль к элементу поверхности. Координаты и модули векторов нормалей можно определить, используя векторное произведение векторов, образующих соответствующие плоскости:

$$\begin{aligned} \vec{N}_{Sr} &= (S_y r_z - S_z r_y; S_z r_x - S_x r_z; S_x r_y - S_y r_x), \\ \vec{N}_{Nr} &= (N_y r_z - N_z r_y; N_z r_x - N_x r_z; N_x r_y - N_y r_x), \\ |\vec{N}_{Sr}| &= |\vec{S}| |\vec{r}| \sin \gamma_s = \sin \gamma_s, \\ |\vec{N}_{Nr}| &= |\vec{N}| |\vec{r}| \sin(\pi - \psi_n) = \sin \psi_n. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Тогда угол  $\delta_s$  можно вычислить по следующей формуле:

$$\delta_s = \arccos \frac{(\vec{N}_{Sr} \cdot \vec{N}_{Nr})}{|\vec{N}_{Sr}| \cdot |\vec{N}_{Nr}|} = \frac{\arccos(N_{Sr_x} N_{Nr_x} + N_{Sr_y} N_{Nr_y} + N_{Sr_z} N_{Nr_z})}{\sin \gamma_s \sin \psi_n} \quad (1.15)$$

Будем считать, что при значениях угла  $\gamma_s \leq 60^\circ$  справедлива диффузная модель отражения, т.е. отражение от планеты солнечного излучения подчиняется закону Ламберта  $q_R|_{\gamma_s \leq 60^\circ} = q_R^D$ , при  $\gamma_s > 60^\circ$  – зеркальная модель отражения, описываемая законом зеркальной оптики  $q_R|_{\gamma_s > 60^\circ} = q_R^3$ . В общем случае:

$$q_R|_{\gamma_s \in [0, \pi - \theta_0]} = q_R^D + q_R^3 \quad (1.16)$$

Для случая диффузной модели отражения  $\gamma_s \leq 60^\circ$  плотность отраженного от планеты потока солнечного излучения определяется по формуле [2]:

$$q_R^D = A_{cp} S \varphi_2 \quad (1.17)$$

Выражение для углового коэффициента  $\varphi_2$  представляется в следующей форме:

$$\varphi_2 = f_2^*(\theta_0, \psi_n) \cos \gamma_s + f_3^*(\theta_0, \psi_n) \sin \psi_n \sin \gamma_s \cos \delta_s, \quad (1.18)$$

где

$$f_2^*(\theta_0, \psi_n) \approx \frac{f_2(\theta_0)}{\sin^2 \theta_0} \varphi_1(\theta_0, \psi_n),$$

$$f_2(\theta_0) = \frac{1}{4} \left( 1 + \sin^2 \theta_0 + 2 \sin^3 \theta_0 + \frac{\cos^4 \theta_0}{2 \sin \theta_0} \ln \frac{1 - \sin \theta_0}{1 + \sin \theta_0} \right), \quad (1.19)$$

$$f_3^*(\theta_0, \psi_n) = \begin{cases} f_3(\theta_0), \text{ при } 0 \leq \psi_n \leq \frac{\pi}{2} - \theta_0, \\ f_3(\theta_0) \frac{\theta_0 + \frac{\pi}{2} - \psi_n}{2\theta_0}, \text{ при } \frac{\pi}{2} - \theta_0 \leq \psi_n \leq \frac{\pi}{2} + \theta_0. \end{cases}$$

$$f_3(\theta_0) = \frac{\cos^2 \theta_0 (3 + \sin^2 \theta_0)}{16 \sin \theta_0} \ln \frac{1 + \sin \theta_0}{1 - \sin \theta_0} - \frac{(1 - \sin \theta_0)(3 + 3 \sin \theta_0 + 2 \sin^2 \theta_0)}{8}$$

Формально при больших значениях  $\gamma_s$  и  $\delta_s > \frac{\pi}{2}$  формула для вычисления  $\varphi_2$  может дать незначительные отрицательные значения потока. В этих случаях следует принимать поток равным нулю.

Если выполняется условие  $\gamma_s > 60^\circ$  расчет отраженного потока  $\varphi_2$  осуществляется по формуле [3]:

$$q_R^3 = A_{cp} \cdot S \cdot F^R \cdot k, \quad (1.20)$$

где

$F^R$  – единичная площадь миделя участка поверхности КА, вычисленная по направлению распространения зеркально отраженного излучения (рисунок 1.8):

$$F^R = \cos(\psi_n - (2\beta - \gamma_s)); \quad (1.21)$$

$k$  – коэффициент рассеяния однородного потока лучистой энергии при зеркальном отражении от сферической поверхности:

$$k = \frac{b_0^2 \sin 2\beta}{2 \sin \gamma_s [2 \cos(2\beta - \gamma_s) - b_0 \cos \beta]}, \quad (1.22)$$

здесь

$$b_0 = \frac{\bar{R}}{\bar{R} + H},$$

$\beta$  – угол отражения падающего излучения от поверхности планеты.

Углы  $\beta$  и  $\gamma_s$ , показанные на рисунок 1.6, связаны следующим соотношением:

$$b_0 \sin \beta = \sin(2\beta - \gamma_s), \quad (1.23)$$

разрешение которого относительно  $\beta$  при известном значении  $\gamma_s$  возможно лишь численно.

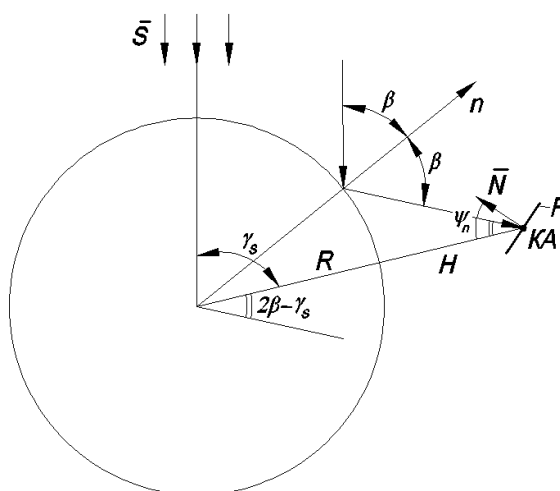


Рис. 1.6 Схема расчета зеркального отражения солнечного излучения от поверхности планеты.

Космический аппарат, двигаясь по стационарной орбите у планеты, в общем случае периодически будет попадать в ее тень. Время такого пребывания в тени зависит от наклона орбиты аппарата по отношению к плоскости эклиптики, высоты полета аппарата и времени года. Солнце создает



за планетой теневой конус. Так как оно имеет вид не точечного источника, а тела, видимого под определенным углом (рисунок 1.7), то при обращении аппарата вокруг планеты возникает переходная (сумеречная) зона. Однако так как угол  $\delta$  мал, то и длина этой части орбиты  $ab$  и  $cd$  для близких к планете орбит мала, и ее можно не учитывать [4].

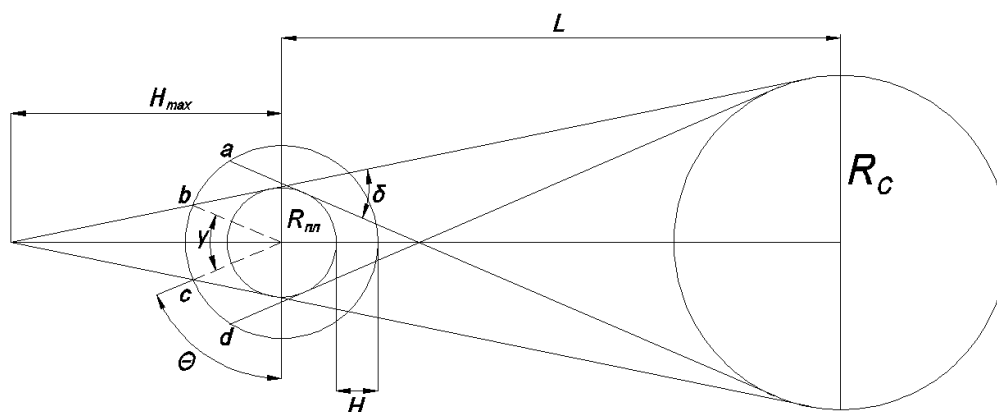


Рис. 1.7 Теневая и сумеречная области орбиты.

При заходе КА в тень планеты потоки  $q_s$  и  $q_R$  обращаются в нуль. Условием нахождения КА в тени является:

$$\gamma_s > (\pi - \theta_0) \quad (1.24)$$

#### 1.1.4 Определение собственного излучения планеты

Плотность потока падающего на КА излучения от планеты является функцией радиационных характеристик видимой с поверхности КА области планеты.

Радиационные характеристики планеты зависят от свойств ее поверхности и атмосферы, если она существует. Вследствие того, что в каждый момент времени на КА падает излучение с относительно большой области планеты, а также вследствие тепловой инерционности КА локальная неравномерность радиационных характеристик планеты слабо влияет на его температурный режим. Поэтому в основу расчета и моделирования падающего

на КА излучения от планеты положена простейшая модель планеты, основанная на осреднении ее радиационных характеристик по поверхности. При этом планета рассматривается как диффузно излучающее сферическое тело эффективного радиуса  $\bar{R}$ . Эффективный радиус планеты вводится для учета излучения атмосферы:  $\bar{R} = R_0 + H_a$ , где  $R_0$  – средний радиус планеты,  $H_a$  – верхняя граница эффективно излучающего слоя атмосферы.

Плотность собственного излучения для различных планет аппроксимируется различным образом. В зависимости от характера распределения по поверхности планет плотности собственного излучения все планеты делятся на три типа [2].

**К первому типу** относятся планеты с наиболее равномерным распределением плотности собственного излучения. Для них она принимается постоянной по поверхности:

$$q_e = \frac{1 - A_{cp}}{4} S \varphi_1, \quad (1.25)$$

где

$\varphi_1$  – угловой коэффициент между элементом поверхности КА и планетой, который можно вычислить, используя следующее выражение:

$$\varphi_1 = \begin{cases} \cos \psi_n \sin^2 \theta_0, \text{ при } 0 \leq \psi_n \leq \frac{\pi}{2} - \theta_0, \\ \frac{\cos \psi_n \sin^2 \theta_0}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} + \arcsin(\operatorname{ctg} \theta_0 \operatorname{ctg} \psi_n) \right] + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_0 - \cos^2 \psi_n}}{\sin \psi_n} - \\ - \frac{1}{\pi} \cos \theta_0 \sqrt{\sin^2 \theta_0 - \cos^2 \psi_n}, \text{ при } \frac{\pi}{2} - \theta_0 \leq \psi_n \leq \frac{\pi}{2} + \theta_0, \\ 0, \text{ при } \frac{\pi}{2} + \theta_0 \leq \psi_n \leq \pi. \end{cases} \quad (1.26)$$

**Ко второму типу** относятся планеты с ярко выраженной неравномерностью по поверхности плотности собственного излучения, обусловленной главным образом разреженностью атмосферы или полным ее отсутствием, а также относительно большим периодом обращения вокруг

собственной оси. Для них плотность излучаемого теплового потока, как и плотность отраженного солнечного, принимается пропорциональной плотности падающего солнечного потока:

$$q_e = (1 - A_{cp})S\varphi_2, \quad (1.27)$$

где  $\varphi_2$  – вычисленный выше угловой комбинированный коэффициент.

**К третьему типу** относятся планеты, занимающие по характеру распределения по поверхности плотности собственного излучения промежуточное положение между двумя указанными выше. На освещенной Солнцем стороне этих планет плотность собственного излучения зависит от зенитного расстояния Солнца, а на теневой – практически постоянна по поверхности планеты и существенно ниже максимального значения на освещенной стороне. Математически плотность собственного излучения этих планет удовлетворительно описывается выражением:

$$q_e = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2, \quad (1.28)$$

где  $C_1$  и  $(C_1+C_2)$  – соответственно плотность излучения с теневой области и с области планеты с нулевым зенитным расстоянием Солнца.

К планетам первого типа относятся Земля и Венера. Вторая модель применима для расчета теплового воздействия Луны на КА. Меркурий также следует отнести к планетам второго типа, т.к. он имеет достаточно большой период обращения вокруг собственной оси (59 суток). Третья модель используется для моделирования теплового воздействия Марса на КА.

Необходимые для расчета воздействующего на КА потока теплового излучения параметры планет каждого типа представлены в таблице 1.1.

Таблица 1.1. Характеристики планет

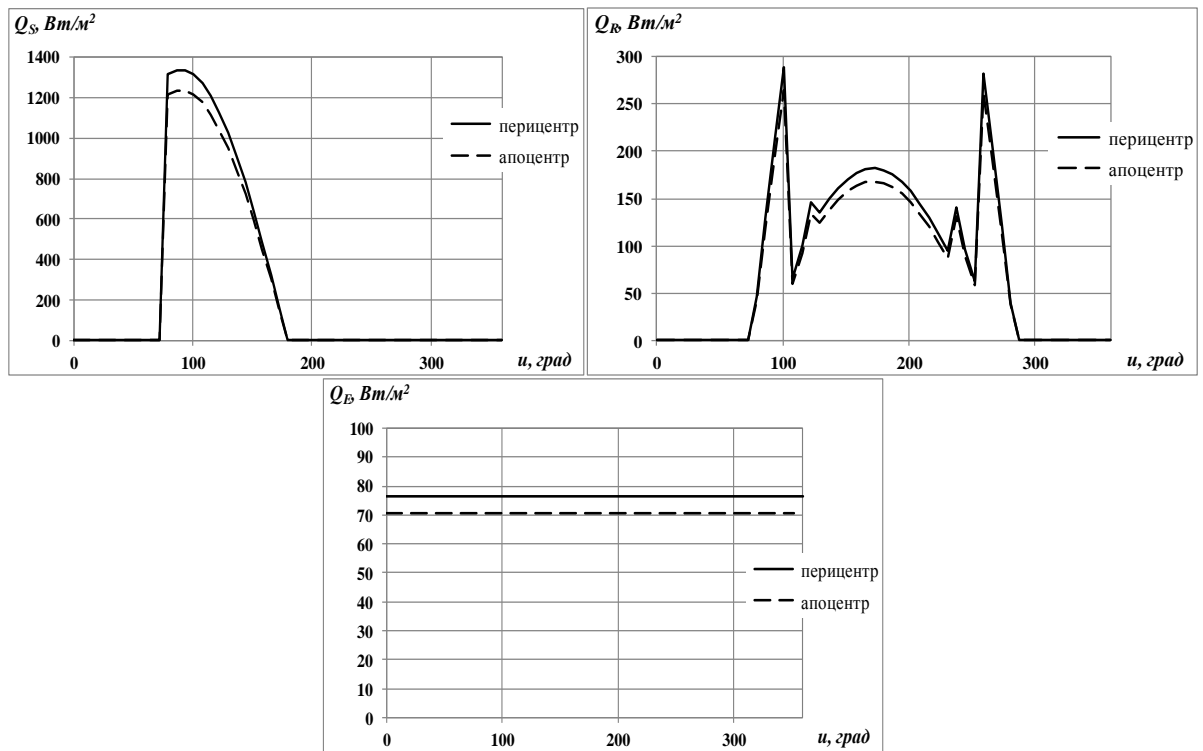
Планета	Земля	Венера	Меркурий	Марс
Тип планеты по характеру собственного излучения	1	1	2	3
Альбеда, $A_{cp}$	0.39	0.65	0.07	0.17 $C_1=46, C_2=310$ $Вт/м^2$
Радиус планеты, $R$ , км	6371 $H_a=12$ км	6052 $H_a=60$ км	2440	3390
Масса планеты, $M$ , кг	$5.976 \times 10^{24}$	$4.869 \times 10^{24}$	$3.33 \times 10^{23}$	$6.419 \times 10^{23}$
Расстояние до Солнца в апоцентре $L_\alpha$ , и перицентре $L_\pi$ , а.е.	$L_\alpha = 1.02$ $L_\pi = 0.98$	$L_\alpha = 0.73$ $L_\pi = 0.72$	$L_\alpha = 0.47$ $L_\pi = 0.31$	$L_\alpha = 1.67$ $L_\pi = 1.38$
Наклон оси планеты, $\varepsilon$	$23.4^\circ$	$177.4^\circ$	$0.01^\circ$	$25.2^\circ$
Период обращения вокруг Солнца, $T$ , сут	365.24	224.7	87.97	687

### 1.1.5 Результаты расчетов внешнего теплового воздействия на поверхность КА

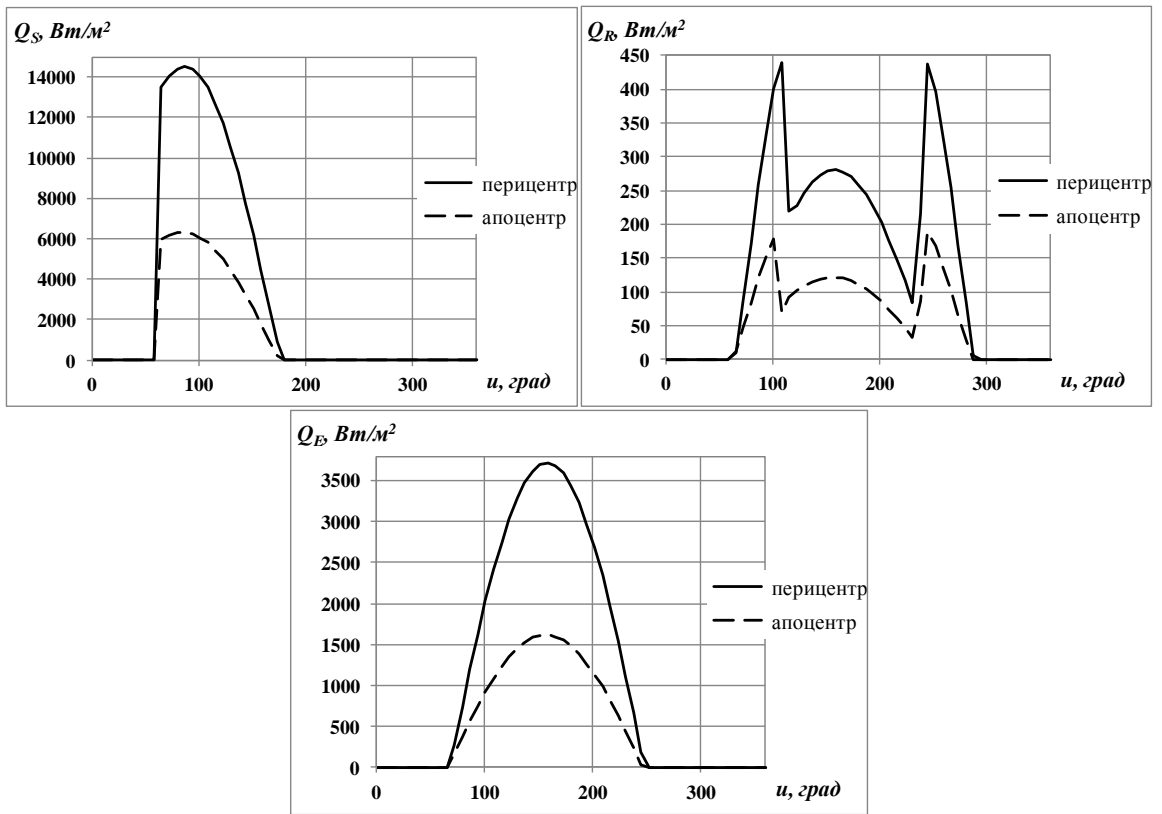
Данная методика была использована для расчета потоков теплового излучения, воздействующих на элемент поверхности космического аппарата, находящегося на орбите планет каждого из трех типов. Результаты расчетов отдельно для каждого вида внешнего воздействия в зависимости от углового положения аппарата за один виток своей орбиты ( $u = 360^\circ$ ) представлены ниже. Для всех случаев  $\vartheta = 0$ ,  $\psi = 0$ ,  $\gamma = 0$ ,  $\alpha_N = 0$ ,  $\beta_N = 90^\circ$ ,  $\gamma_N = 90^\circ$  (исследуемый элемент поверхности направлен по радиус-вектору планеты перпендикулярно плоскости орбиты КА, нормаль к элементу поверхности направлена в сторону движения КА).

На рисунке 1.8 показано сравнение плотностей потоков теплового излучения в моменты, когда планета находится в перицентре и апоцентре своей орбиты (орбита аппарата круговая  $H=200$ км,  $i=0^\circ$ ). Текущее положение планеты оказывает самое большое влияние на тепловые потоки для Меркурия, так как орбита у него наиболее вытянута и он находится наиболее близко к Солнцу. На

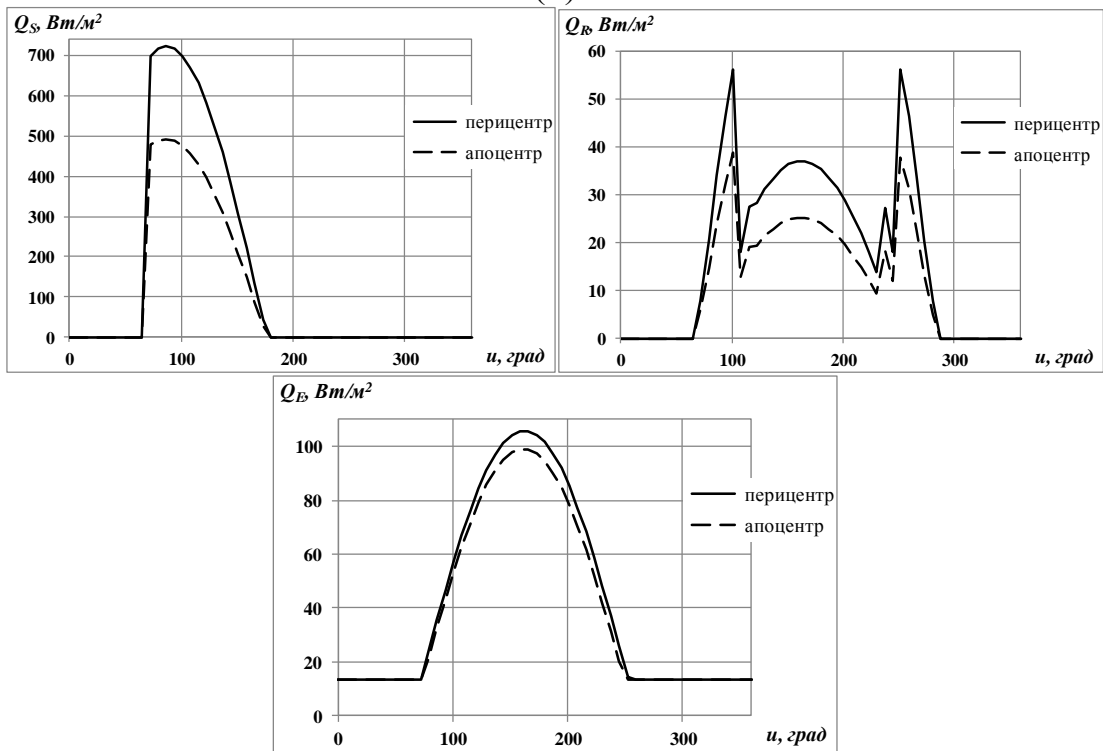
графике плотности потока отраженного от планеты излучения  $Q_R$  видны области, когда аппарат находится в теневой ( $Q_R=0$ ) и освещенной части своей орбиты. Центральная часть графика ( $130^\circ \leq u \leq 230^\circ$ ) соответствует диффузному отражению. При увеличении угла  $\gamma_s$  происходит переход к зеркальному отражению и плотность потока скачкообразно увеличивается. На графике плотности потока солнечного излучения  $Q_S$  кроме теневой зоны наблюдается еще и область, в которой солнечное излучение не попадает на исследуемый элемент поверхности и плотность потока также равна нулю.



(a)



(б)

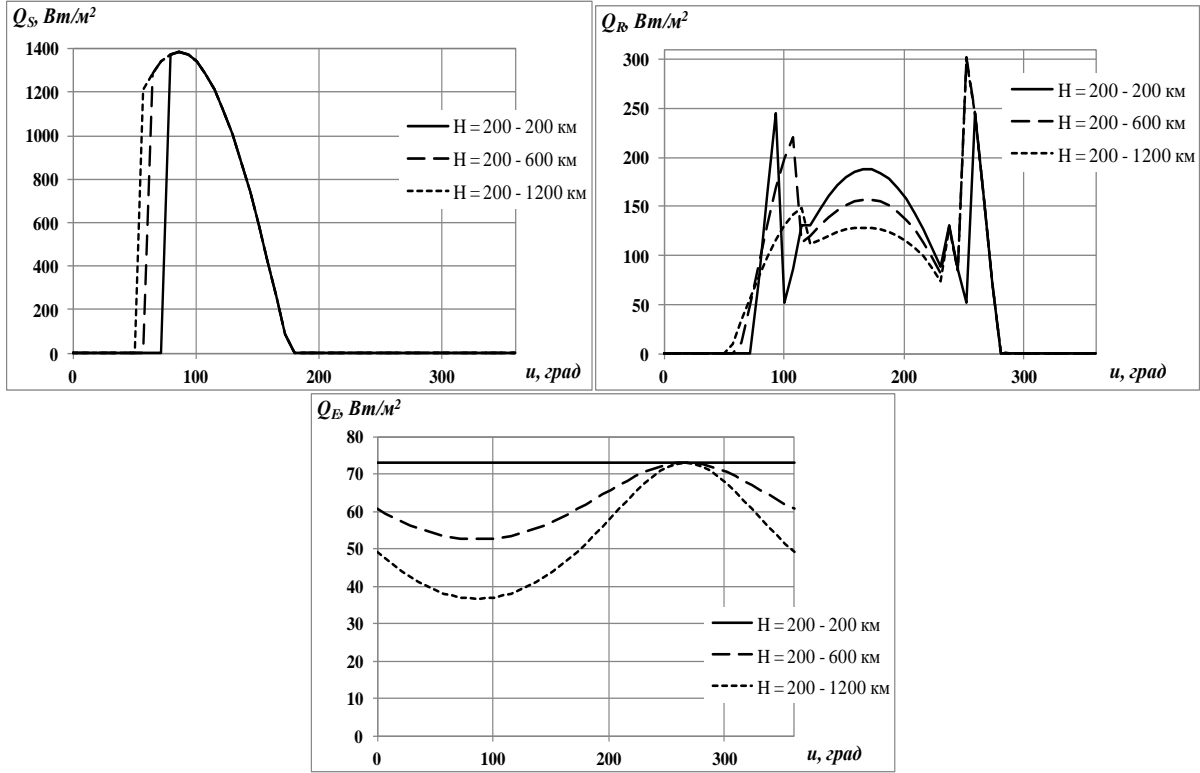


(в)

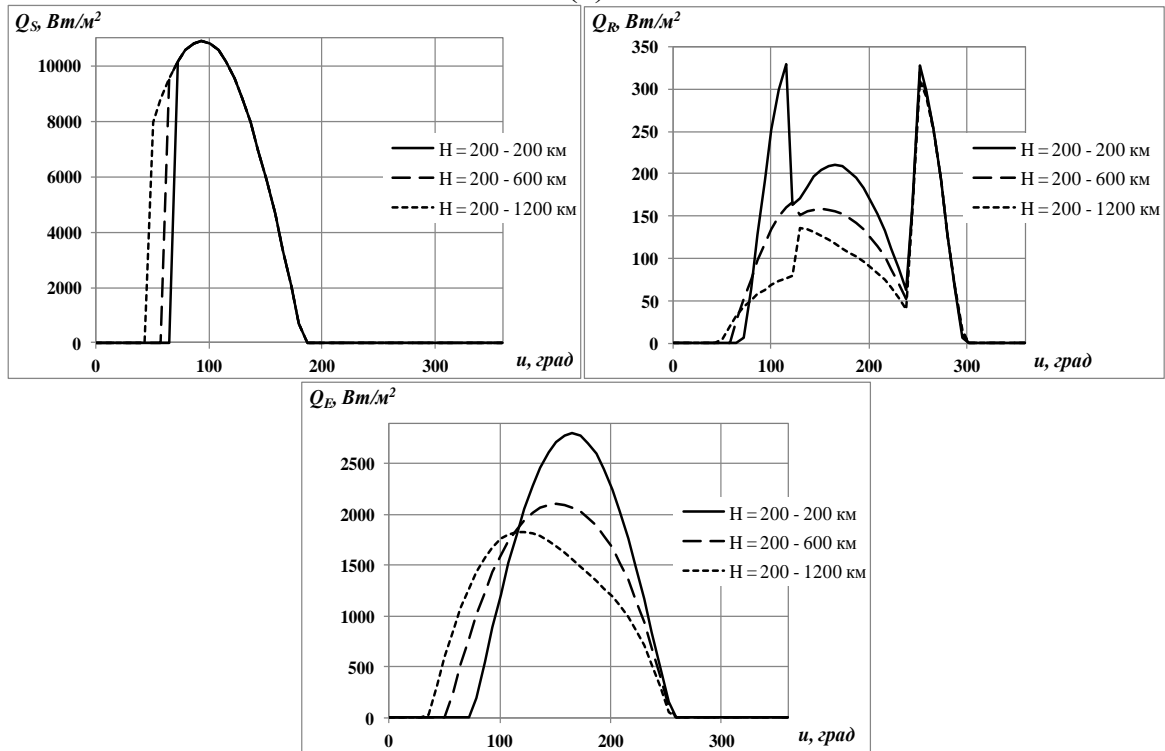
Рис. 1.8 Плотности тепловых потоков в зависимости от положения планеты: а – Земля, б – Меркурий, в – Марс.

На рисунке 1.9 показано влияние эллиптичности орбиты КА на плотности потоков теплового излучения ( $i = 0^\circ$ ,  $\Phi = 0^\circ$ , Солнце светит в плоскости орбиты КА). Расчеты произведены для круговой орбиты высотой  $H = 200\text{км}$  и для

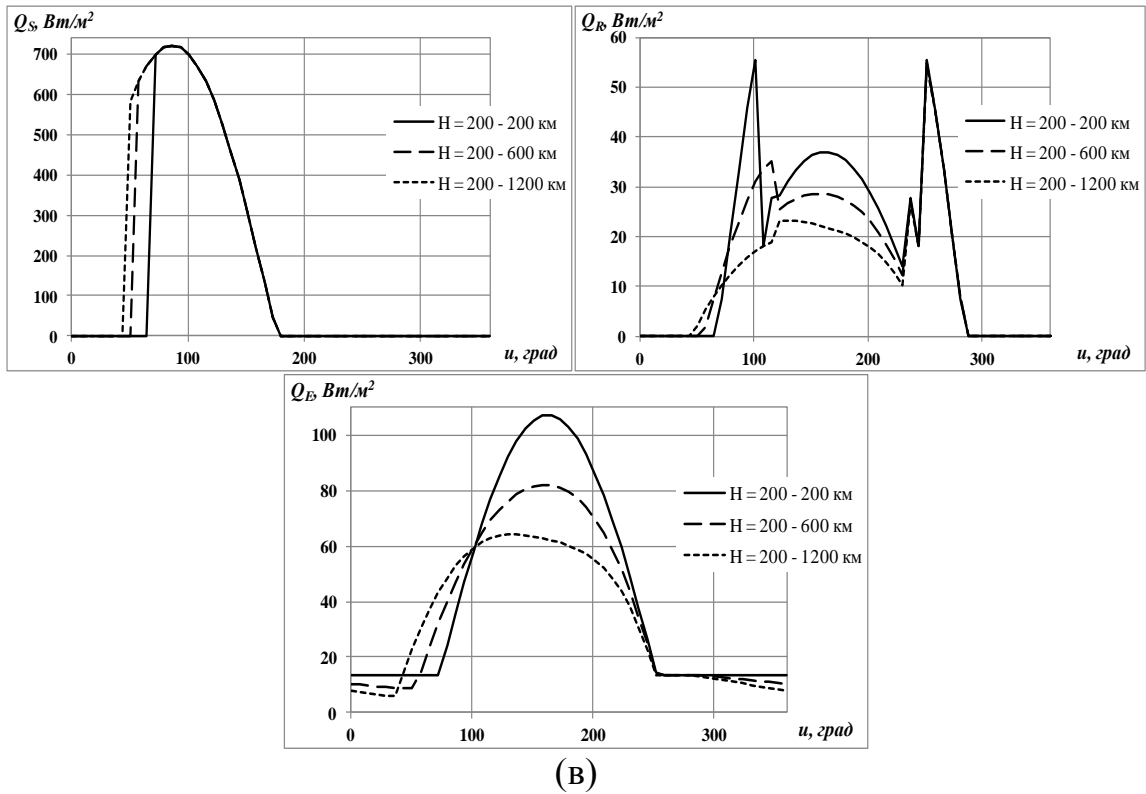
эллиптических орбит с высотой перигея  $H_{\pi} = 200$  км и высотами апоцентра  $H_{\alpha} = 600$  км и  $H_{\alpha} = 1200$  км. Как видно из графиков, увеличение высоты апоцентра приводит к увеличению освещенного участка орбиты.



(а)

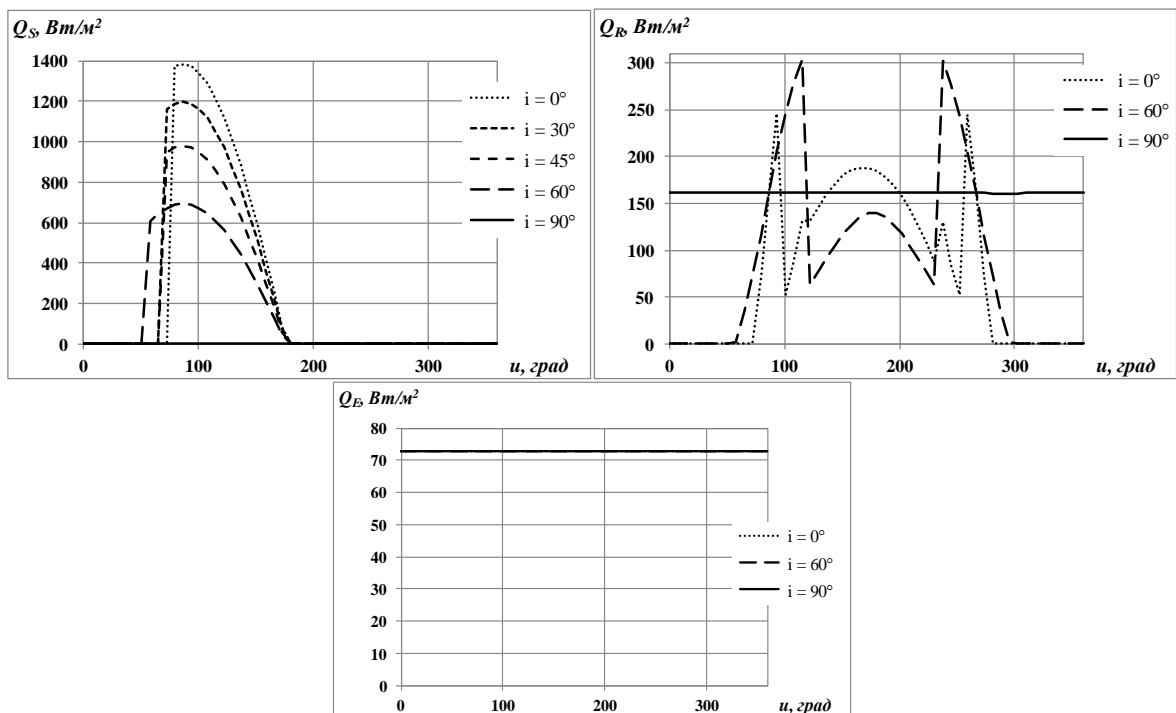


(б)



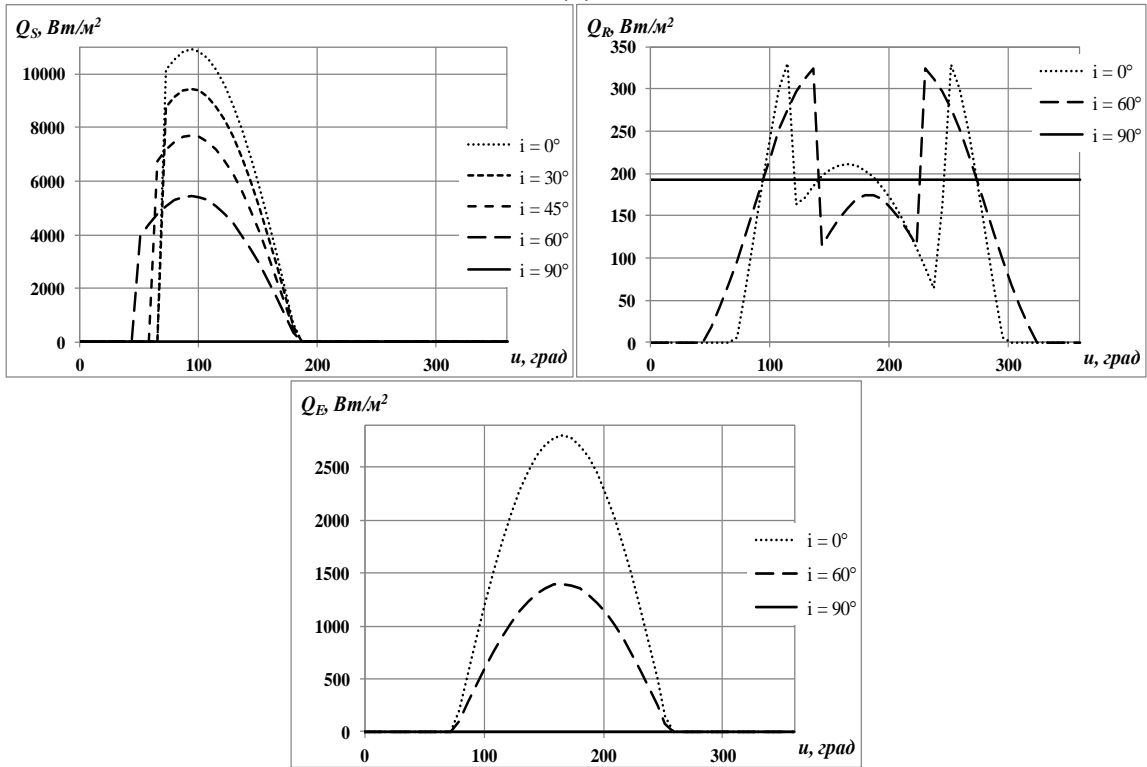
(В)  
Рис.1.9 Влияние эллиптичности орбиты КА на внешнее тепловое воздействие: а – Земля, б – Меркурий, в – Марс.

На рисунке 1.10 показано влияние наклона орбиты КА на плотности потоков теплового излучения ( $\Omega = 90^\circ$ ,  $\Phi = 0^\circ$ ,  $H = 200$ км). На рисунке 1.11 показано влияние долготы восходящего узла  $\Omega$  на плотности потоков теплового излучения ( $i = 90^\circ$ ,  $\Phi = 0^\circ$ ,  $H = 200$ км)

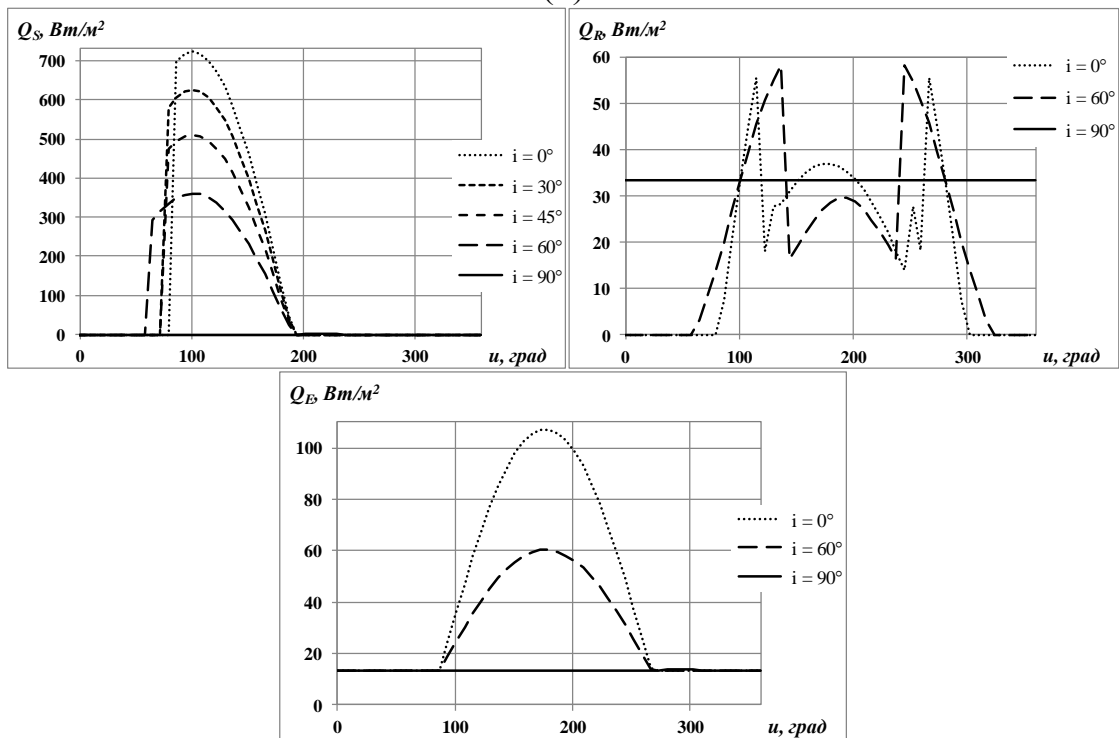




(a)

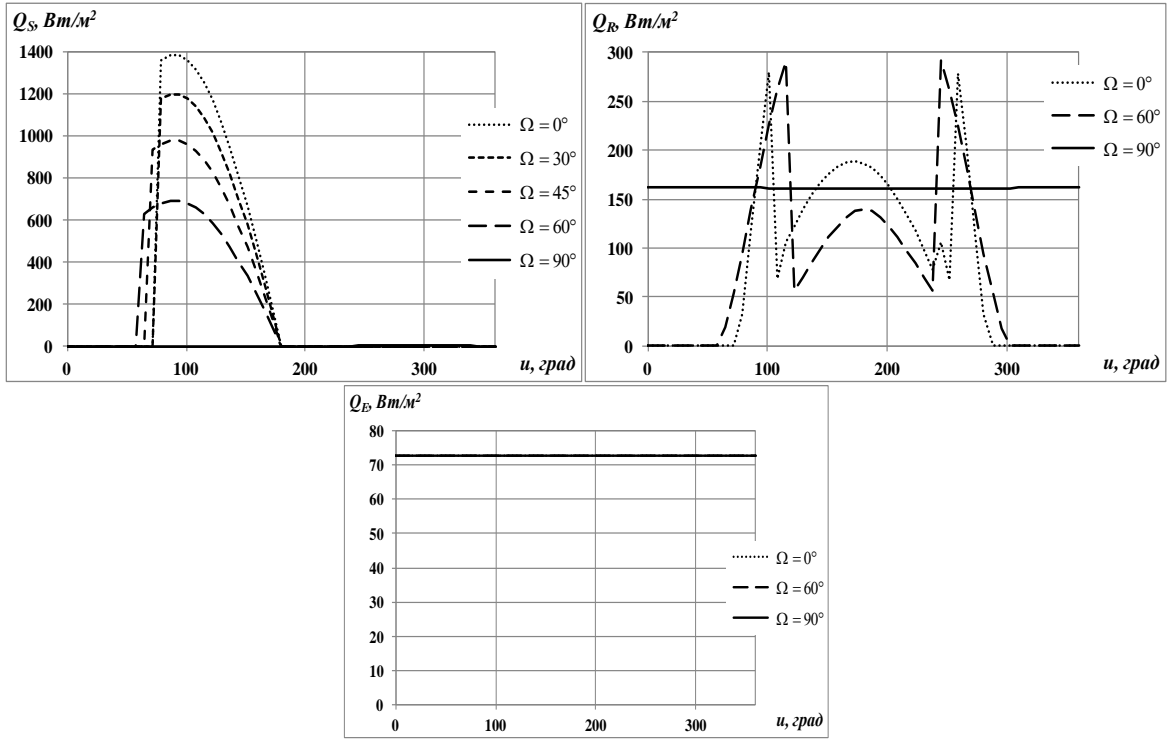


(б)

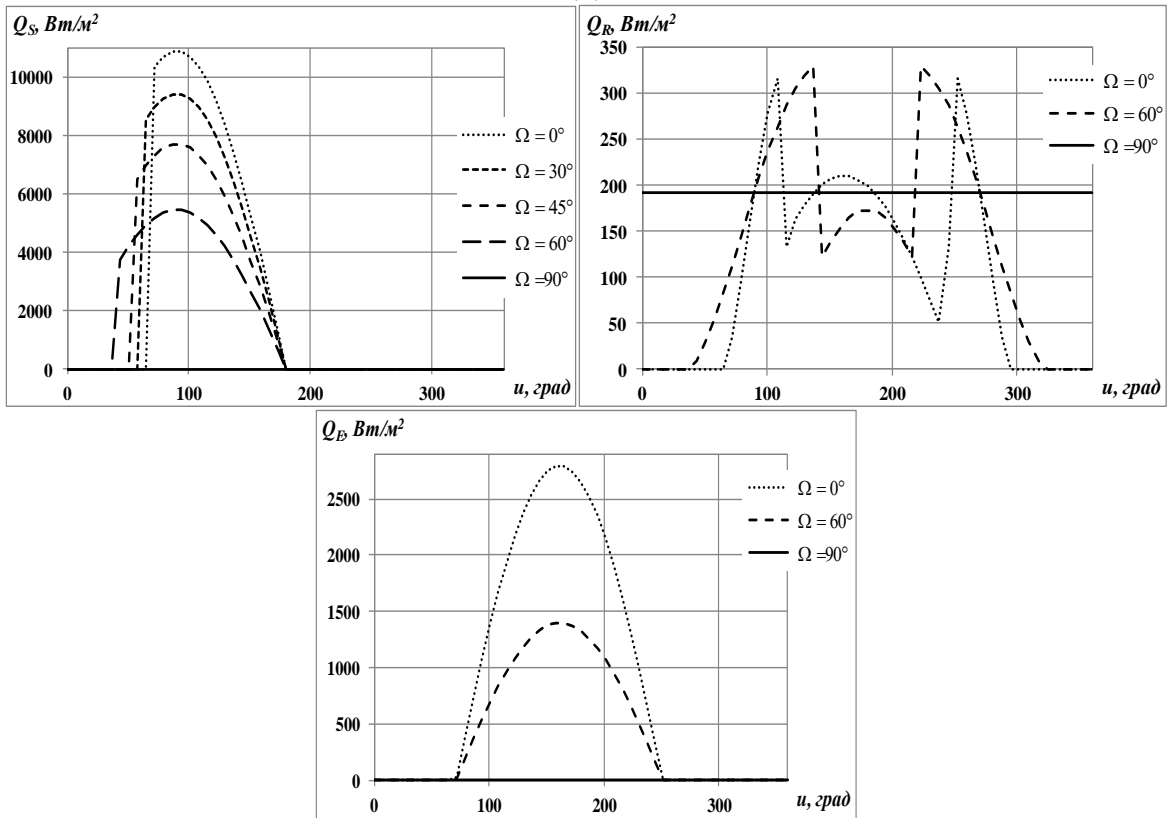


(в)

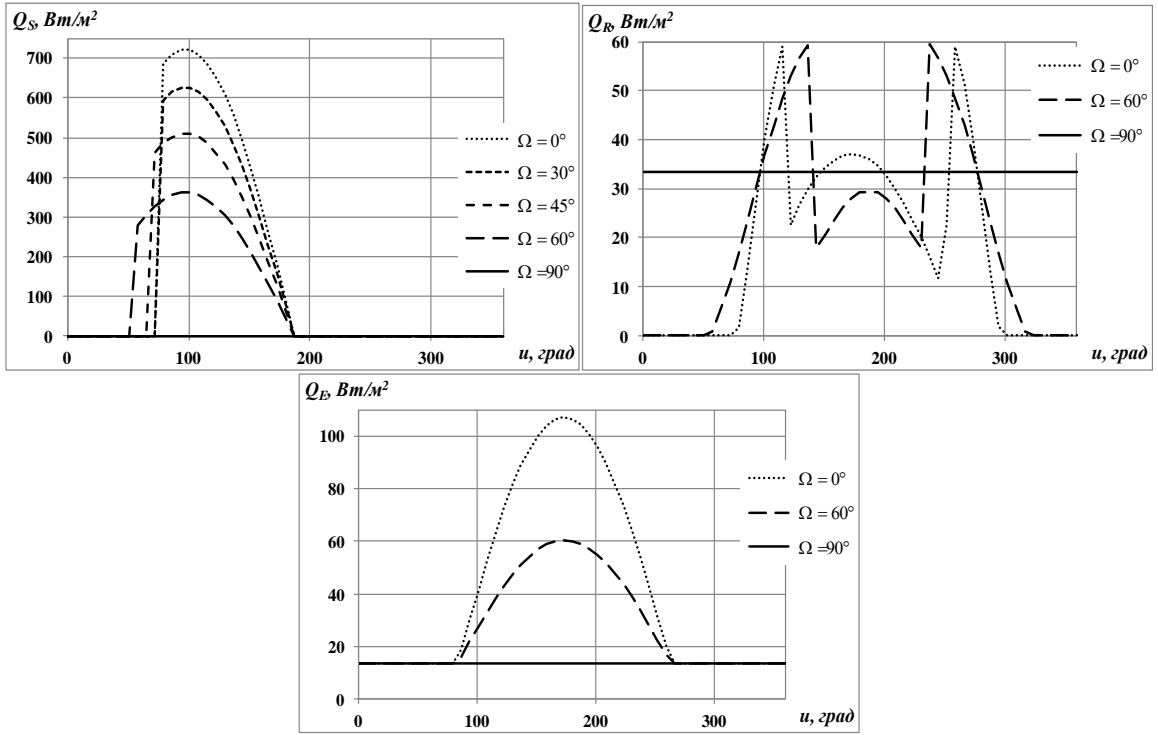
Рис.1.10 Влияние наклона орбиты КА на внешнее тепловое воздействие:  
а – Земля, б – Меркурий, в – Марс.



(a)



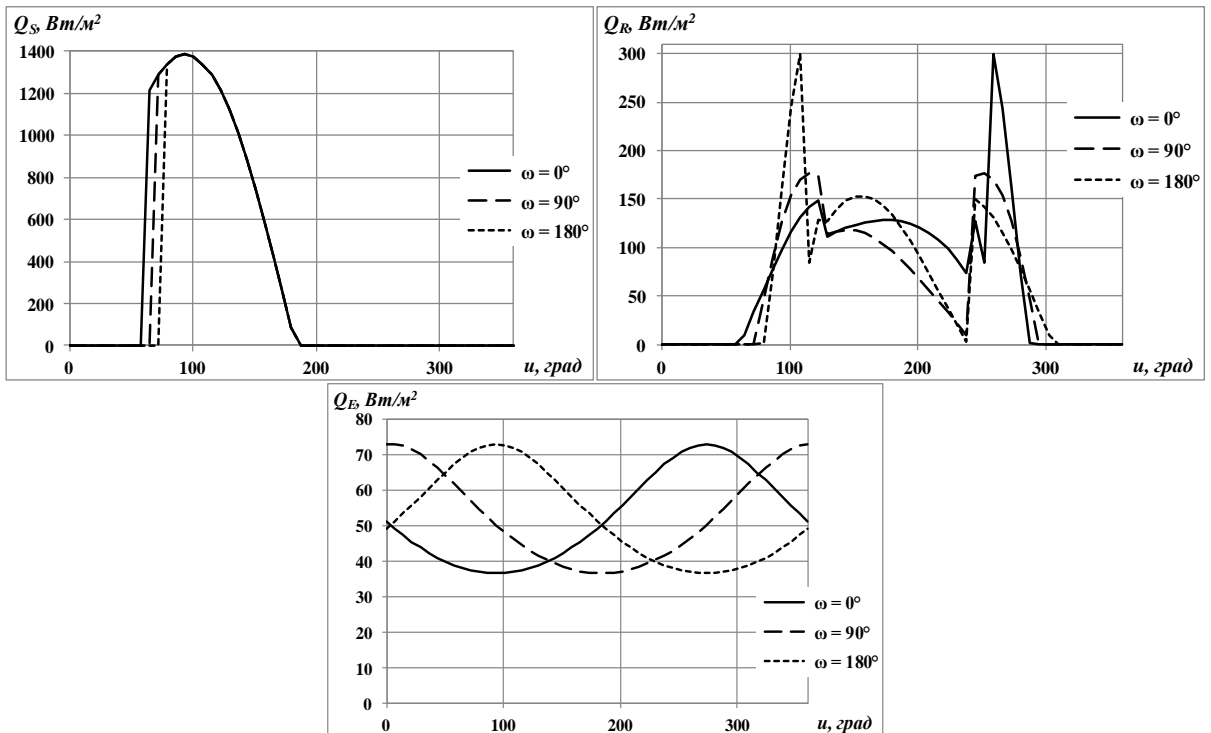
(b)



(в)

Рис. 1.11 Влияние долготы восходящего узла на внешнее тепловое воздействие на КА: а – Земля, б – Меркурий, в – Марс.

На рисунке 1.12 показано влияние положения перицентра эллиптической орбиты КА на плотности потоков теплового излучения ( $i = 0^\circ$ ,  $\Phi = 0^\circ$ ,  $H_\pi = 200\text{км}$ ,  $H_\alpha = 1200\text{км}$ ).



(а)

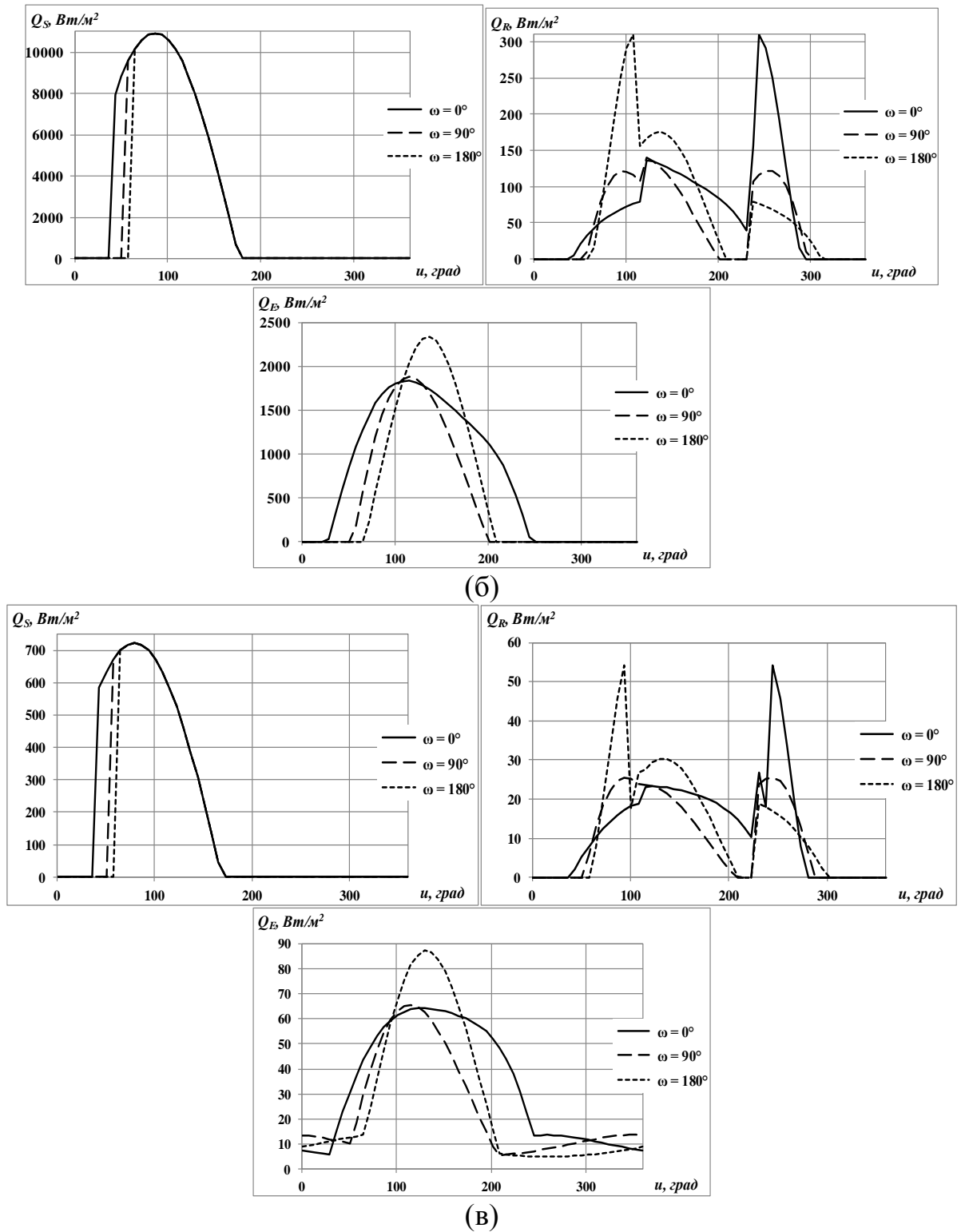
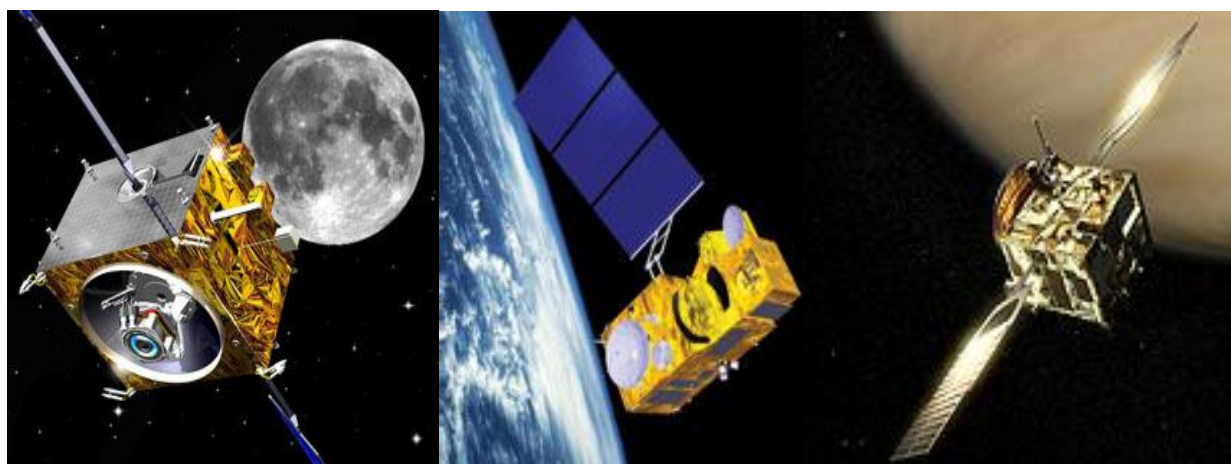


Рис. 1.12 Влияние положения перигелия орбиты КА на внешнее тепловое воздействие: а – Земля, б – Меркурий, в – Марс.

## 1.2. Экрано-вакуумная тепловая изоляция

Специфический характер внешних тепловых нагрузок в условиях космического полета, а также глубокий вакуум позволяют рассматривать варианты пассивной СТР, основанной на экранировании поверхности аппарата от внешнего излучения (имеются в виду прямое солнечное излучение, солнечное излучение, отраженное планетами, а также собственное тепловое излучение близко расположенных планет). С этой целью используется так называемая экрано-вакуумная тепловая изоляция (ЭВТИ), которая является одним из наиболее распространенных и надежных средств пассивного терморегулирования и обладает целым рядом положительных свойств, таких как высокое термическое сопротивление при относительно малой плотности, надежность и сравнительная простота установки на поверхности сложной конфигурации [3, 12]. Впервые ЭВТИ была применена на космическом аппарате “Восток”, после чего применялась на всех российских космических аппаратах. Примеры применения ЭВТИ на космических аппаратах представлены на рисунке 1.13.



(a)

(б)

(в)

Рис. 1.13 Примеры космических аппаратов с ЭВТИ: а – Исследовательский зонд SMART-1 (ESA), б – Радионавигационный спутник GALILEO (ESA), в – КА VENUS EXPRESS (ESA)

Типичный образец ЭВТИ представляет собой набор из тонких непрозрачных экранов толщиной 0.5–0.9 мкм с разделительными слоями между ними, предотвращающими контакт между экранами. Для обеспечения благоприятных условий вакуумирования ЭВТИ экраны перфорируют отверстиями по специальной схеме. Также экраны могут иметь выпуклости (пуклевки), служащие для уменьшения контакта экранов и разделительных слоев. В условиях вакуума теплопередача через такое покрытие осуществляется за счет излучения и может быть снижена до весьма малых значений. Простые оценки показывают, что даже незначительное увеличение количества слоев (экранов с разделителями) приводит к существенному снижению теплового потока к защищаемой конструкции. Обычно используются ЭВТИ с 10-30 экранирующими слоями. Возможный вариант исполнения многослойной ЭВТИ представлен на рисунке 1.14. Внешний и внутренний слои придают изделию необходимую прочность, а также выполняют теплозащитную функцию. Между ними располагаются два набора слоев, работающих при различных температурах.

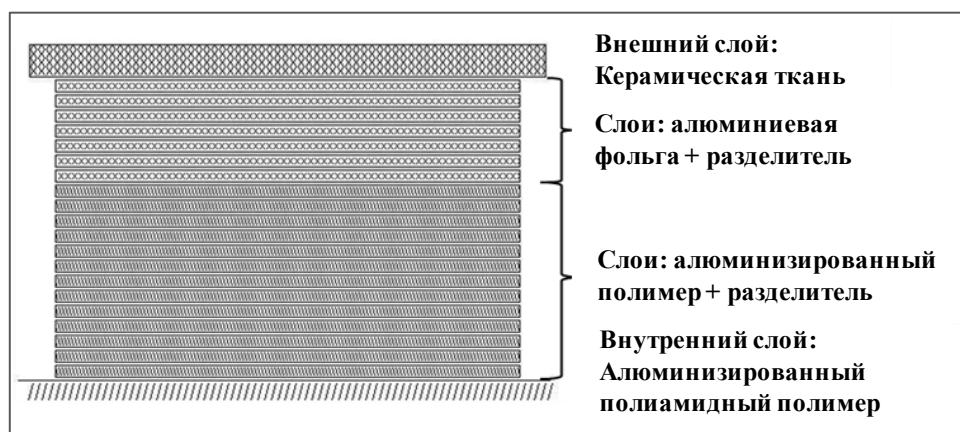


Рис. 1.14. Типичное многослойное теплоизоляционное покрытие.

Материалы, применяемые для изготовления слоев ЭВТИ и разделителей, могут быть самыми различными, поскольку они выбираются в зависимости от ожидаемого уровня температуры. При рабочей температуре ЭВТИ до 423К для экранов обычно применяют полиэтилентерефталатную пленку с напылением с одной или двух сторон алюминия, серебра или золота. При температуре до

723К применяется алюминиевая фольга с разделителями из стекловолокна. При температуре свыше 723К для изготовления экранов используется фольга из меди, никеля или стали с кварцевым волокном в качестве материала разделителей. Поверхностная плотность десяти экранов из полиэтилентерефталатной пленки составляет 0.2–0.3 кг/м<sup>2</sup>, а из металлической фольги – около 1 кг/м<sup>2</sup> [1]. Экраны из полимерных материалов бывают гладкие и рифленые. С целью уменьшения степени черноты экранов на полимерные пленки с одной или двух сторон напыляют тончайший металлический слой, например, осуществляют вакуумное напыление пленки алюминия.

### 1.3 Задачи исследования

1. Разработка математической модели внешнего теплового воздействия на космический аппарат во время орбитального полета.
2. Разработка уточненной математической модели теплопереноса в экрано-вакуумной теплоизоляции, учитывающей наличие разделительного слоя из полупрозрачного волокнистого материала между экранами, а также влияние возможного оксидного слоя на поверхности алюминиевой фольги.
3. Исследование эффективности разработанной модели путем сравнения результатов математического моделирования на основе модифицированной математической модели с экспериментальными данными.
4. Разработка алгоритма идентификации математической модели теплопереноса в системах с сосредоточенными параметрами.
5. Проведение экспериментального исследования по определению температурного поля образца ЭВТИ.
6. Применение результатов тепловых испытаний для восстановления некоторых радиационных характеристик экрано-вакуумной теплоизоляции.

## **Выводы по главе 1**

Приведен краткий обзор используемых в настоящее время экрано-вакуумных теплоизоляций. Рассмотрены основные виды тепловых потоков, воздействующих на космический аппарат во время орбитального полета, особенности их моделирования. В результате разработана методика по определению внешнего теплового воздействия на КА, реализованная в виде программы, написанной на языке FORTRAN. Данная программа позволяет вычислять тепловые потоки без проведения дополнительных исследований, только на основании имеющихся геометрических характеристик КА и его программы полета.



## Глава 2. Математическое моделирование теплопереноса в ЭВТИ

### 2.1. Уточненная математическая модель теплопереноса в ЭВТИ

Уточненная теоретическая модель переноса тепла в экрано-вакуумной тепловой изоляции (ЭВТИ) разработана в соавторстве с Домбровским Л.А. и Ненарокомовым А.В. и опубликована ранее в [13]. В предложенной модели учитываются влияние волокнистых разделителей между экранами и тонкого оксидного слоя на поверхности экранов на величину интегрального потока теплового излучения через ЭВТИ.

#### 2.1.1. Традиционная тепловая модель

Исследование тепловых свойств экрано-вакуумных тепловых изоляций началось еще в 60-х годах прошлого века. С тех пор различные работы проводились и публиковались многими авторами [1, 12, 14-18]. При расчетном анализе многослойной ЭВТИ в качестве вычислительной тепловой модели обычно рассматривают совокупность  $L$  изотермических элементов (соответствующих экранам) [1]. Рассматривается передача тепла от элемента с номером  $l$  только к соседним элементам ( $l-1$  и  $l+1$   $l = \overline{2, L-1}$ ), 1-ый элемент (слой) взаимодействует с 2-ым и окружающей средой, а  $L$ -ый с  $(L-1)$ -ым и внутренней конструкцией. При этом в традиционной тепловой модели разделители между экранами не рассматриваются как отдельные элементы ЭВТИ и их влияние на перенос тепла между экранами не учитывается [19-21]. Более того, для теплового излучения используется так называемая серая модель, не учитывающая спектральные характеристики поверхностей.

В этом случае математическая модель теплообмена имеет вид системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\rho_1 c_1(T) \delta_1 \frac{dT_1}{d\tau} &= A_s(T_1) [q_s(\tau) + q_R(\tau)] + \varepsilon_1(T_1) q_\varepsilon(\tau) - \varepsilon_1(T) \sigma T_1^4 + \\
&+ \varepsilon_{1,2}^{eff} \sigma (T_2^4 - T_1^4) + k_{1,2} (T_2 - T_1) \\
\rho_l c_l(T) \delta_l \frac{dT_l}{d\tau} &= \varepsilon_{l-1,l}^{eff} \sigma (T_{l-1}^4 - T_l^4) + k_{l-1,l} (T_{l-1} - T_l) + \\
&+ \varepsilon_{l,l+1}^{eff} \sigma (T_{l+1}^4 - T_l^4) + k_{l,l+1} (T_{l+1} - T_l) \\
l &= \overline{2, L-1}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}
\rho_L c_L(T) d_L \frac{dT_L}{d\tau} &= \varepsilon_{L-1,L}^{eff} \sigma (T_{L-1}^4 - T_L^4) + k_{L-1,L} (T_{L-1}, T_L) + k_{in} (T_{in} - T_L) \\
\tau &\in (\tau_{min}, \tau_{max}]
\end{aligned}$$

$$\text{где } \varepsilon_{l-1,l}^{eff} = \frac{\varepsilon_{l-1}(T_{l-1}) \varepsilon_l(T_l)}{\varepsilon_{l-1}(T_{l-1}) + \varepsilon_l(T_l) - \varepsilon_{l-1}(T_{l-1}) \varepsilon_l(T_l)}$$

$T_l$  – температура  $l$ -го слоя,  $c_l$  – удельная теплоемкость материала  $l$ -го слоя,  $\delta_l$  – толщина  $l$ -го слоя,  $\rho_l$  – плотность материала  $l$ -го слоя,  $k_{l-1,l}$  – коэффициент теплопередачи между элементами  $l$  и  $l-1$ ,  $\varepsilon_l$  – интегральная полусферическая излучательная способность экрана с номером  $l$ ,  $\varepsilon_{l-1,l}^{eff}$  – приведенная интегральная полусферическая излучательная способность системы слоев  $l$  и  $l-1$ ,  $q_s$  – интегральный (по спектру) поток солнечного излучения,  $q_R$  – интегральный поток отраженного от планеты солнечного излучения,  $q_\varepsilon$  – интегральный поток собственного излучения планеты,  $A_s$  – некоторый средний (по спектру) коэффициент поглощения солнечного излучения,  $k_{in}$  – коэффициент теплопередачи между  $L$ -ым элементом и конструкцией.

### 2.1.2. Уточненная модель переноса тепла излучением

Рассмотрим элемент ЭВТИ, состоящий из двух экранов, между которыми располагается разделительный слой из полупрозрачного волокнистого материала (см. рисунок 2.1).

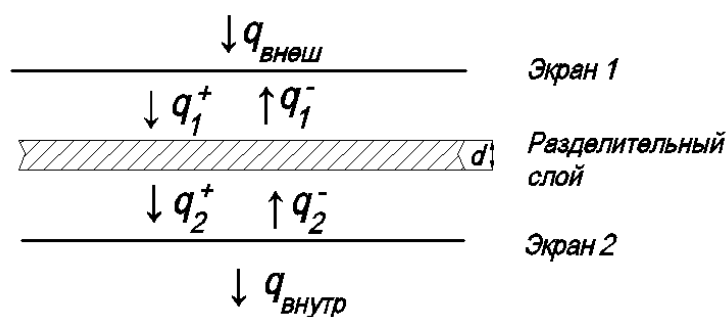


Рис. 2.1 Схема рассматриваемой задачи.

На рисунке 2.2 представлен типичный волокнистый материал, используемый для разделителей в ЭВТИ.

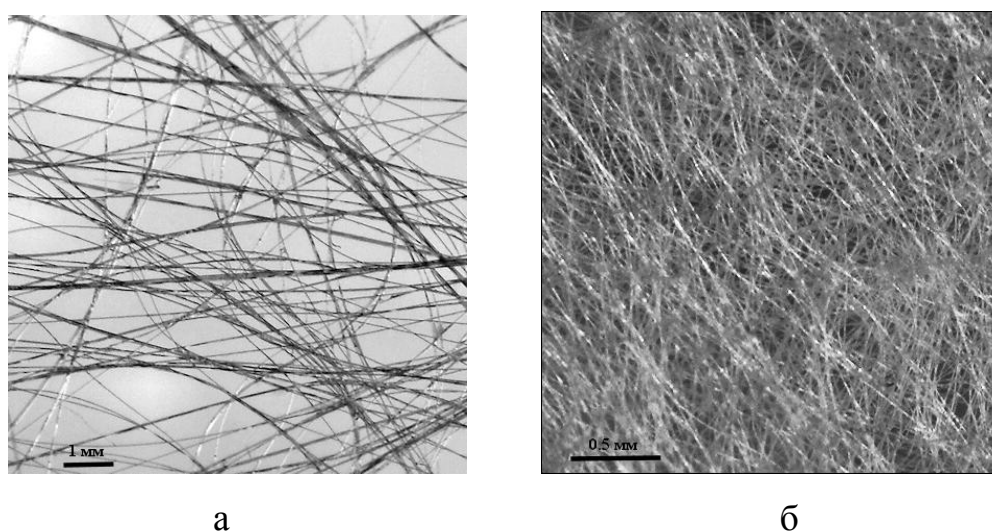


Рис. 2.2 Фотографии типичных материалов, используемых для разделителя в ЭВТИ:

а – материал низкой плотности, б – относительно плотный материал.

При расчете переноса излучения принимаются следующие основные допущения:

- Перенос тепла происходит только в направлении нормали к поверхности ЭВТИ. Продольный перенос тепла пренебрежимо мал.
- Тепловой контакт между слоем разделительного материала и экранами отсутствует. Перенос тепла в имеющихся зазорах происходит только благодаря тепловому излучению.

– Перенос излучения в направлении нормали к поверхности является определяющим, и эффекты, связанные с угловыми зависимостями радиационных характеристик слоев, можно не принимать во внимание.

Принятые допущения позволяют использовать сравнительно простую тепловую модель, которая описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}\rho_1 c_1 \delta_1 \frac{dT_1}{d\tau} &= q_{\text{внеш}} + q_1^- - q_1^+ \\ \rho_{sp} c_{sp} \delta_{sp} \frac{dT_{sp}}{d\tau} &= q_1^+ - q_1^- - (q_2^+ - q_2^-) \\ \rho_2 c_2 \delta_2 \frac{dT_2}{d\tau} &= q_2^+ - q_2^- - q_{in}\end{aligned}\tag{2.2}$$

Поскольку теплоемкость каждого из слоев ЭВТИ очень мала, а изменение внешних условий теплообмена, как правило, происходит сравнительно медленно, можно принять, что реализуется квазистационарный режим теплообмена. Такое предположение справедливо в большинстве практически важных случаев и существенно упрощает решение задачи. Действительно, в квазистационарных условиях тепловой поток через ЭВТИ в каждый момент времени может быть определен на основе решения стационарной задачи. Уравнения баланса спектральных потоков излучения в зазорах между слоями фольги и разделителя можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}q_{1,\lambda}^+ &= \varepsilon_{1,\lambda} f_{1,\lambda} + (1 - \varepsilon_{1,\lambda}) q_{1,\lambda}^- \\ q_{1,\lambda}^- &= \varepsilon_{sp,\lambda} f_{sp,\lambda} + R_\lambda q_{1,\lambda}^+ + T_\lambda q_{2,\lambda}^- \\ q_{2,\lambda}^+ &= \varepsilon_{sp,\lambda} f_{sp,\lambda} + R_\lambda q_{2,\lambda}^- + T_\lambda q_{1,\lambda}^+ \\ q_{2,\lambda}^- &= \varepsilon_{2,\lambda} f_{2,\lambda} + (1 - \varepsilon_{2,\lambda}) q_{2,\lambda}^+\end{aligned}\tag{2.3}$$

Здесь  $q_i^\pm$  – спектральные потоки излучения в зазоре с номером  $i$  в переднюю и заднюю полусферы,  $\varepsilon_{1,\lambda}, \varepsilon_{2,\lambda}$  – спектральные полусферические излучательные способности экранов при температурах  $T_1$  и  $T_2$ ,  $f_\lambda = \pi B_\lambda(T)$  – спектральный поток излучения абсолютно черного тела с температурой  $T$ ,

$B_\lambda(T)$  – функция Планка,  $R_\lambda$  и  $T_\lambda$  – спектральные полусферические отражательная и пропускательная способности разделителя. Согласно закону Кирхгофа, спектральная полусферическая излучательная способность разделителя может быть записана как  $\varepsilon_{sp,\lambda} = 1 - R_\lambda - T_\lambda$ .

Условие стационарности процесса означает равенство результирующих потоков излучения в двух зазорах:

$$q_\lambda = q_{1,\lambda}^+ - q_{1,\lambda}^- = q_{2,\lambda}^+ - q_{2,\lambda}^- \quad (2.4)$$

С учетом этого из системы уравнений (3) можно получить следующее выражение:

$$q_\lambda = \frac{f_{1,\lambda} - f_{2,\lambda}}{\frac{1}{\varepsilon_{1,\lambda}} + \frac{1}{\varepsilon_{2,\lambda}} + \frac{2}{1 + T_\lambda - R_\lambda} - 2} \quad (2.5)$$

Переходя к интегральному потоку теплового излучения, получим:

$$q = \int_0^\infty q_\lambda d\lambda \quad (2.6)$$

### 2.1.3. Оптические свойства полупрозрачного волокнистого разделителя

Отражательную и пропускательную способности высокопористого волокнистого разделителя можно определить на основании теории независимости рассеяния и теории Ми для бесконечного однородного цилиндра [22, 23]. Как видно из рисунка 2.2, типичный волокнистый материал, используемый для разделителей ЭВТИ, изготовлен из волокон, произвольно ориентированных в плоскости слоя материала.

При оценке отражения и пропускания излучения слоем волокнистого материала принимаются следующие предположения:

- Слой материала настолько тонок, что многократным рассеянием излучения волокнами можно пренебречь.
- Каждое волокно поглощает и рассеивает излучение так, как если бы других волокон не было.
- Благодаря тому, что волокна хаотически ориентированы в плоскости слоя материала, можно пренебречь интерференцией излучения, рассеянного различными волокнами.
- Эффекты, связанные с частичной поляризацией излучения, пренебрежимо малы.

Величины транспортного фактора эффективности ослабления  $Q_{tr}$ , фактора эффективности рассеяния  $Q_s$  и фактора эффективности поглощения  $Q_a$  при произвольном направлении освещения цилиндрических частиц вычисляются по известным соотношениям теории Ми [23].

$$Q_{tr}^E = \frac{2}{x} \operatorname{Re} \left\{ b_0^E + 2 \sum_{k=1}^{\infty} b_k^E \right\} \quad Q_{tr}^H = \frac{2}{x} \operatorname{Re} \left\{ a_0^H + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^H \right\} \quad (2.7)$$

$$Q_a^E = Q_{tr}^E - Q_s^E \quad Q_a^H = Q_{tr}^H - Q_s^H \quad (2.8)$$

$$Q_s^E = \frac{2}{x} \operatorname{Re} \left\{ |b_0^E|^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (|b_k^E|^2 + |a_k^E|^2) \right\} \quad (2.9)$$

$$Q_s^H = \frac{2}{x} \operatorname{Re} \left\{ |a_0^H|^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k^H|^2 + |b_k^H|^2) \right\}$$

Здесь “E” и “H” – поляризация падающей плоской электромагнитной волны.

В случае хаотически поляризованного (неполяризованного) падающего излучения, факторы эффективности для отдельных частиц при различных углах падения могут быть определены по очевидным формулам:

$$Q_s = (Q_s^E + Q_s^H)/2 \quad Q_{tr} = (Q_{tr}^E + Q_{tr}^H)/2 \quad Q_a = (Q_a^E + Q_a^H)/2 = Q_{tr} - Q_s \dots \quad (2.10)$$

Коэффициенты Ми  $a_k$ ,  $b_k$  определяются по формулам:

$$\begin{aligned}
a_k^E &= \frac{iD_k R_k [B_k(1) - A_k(1)]}{\Delta_k} & b_k^E &= \frac{R_k [A_k(1)B_k(m) - D_k^2]}{\Delta_k} \\
a_k^H &= \frac{R_k [A_k(m)B_k(1) - D_k^2]}{\Delta_k} & b_k^H &= -a_k^E
\end{aligned} \tag{2.11}$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta_k &= A_k(m)A_k(1) - D_k^2 & s &= \frac{1}{u^2} - \frac{1}{v^2} \\
D_k &= k s \sin \alpha & R_k &= \frac{J_k(v)}{H_k^{(2)}(v)} \\
A_k(\xi) &= \frac{[H_k^{(2)}(v)]}{[vH_k^{(2)}(v)]} - \xi^2 \frac{J_k'(u)}{[uJ_k(u)]} & B_k(\xi) &= \frac{J_k'(v)}{[vJ_k(v)]} - \xi^2 \frac{J_k'(u)}{[uJ_k(u)]} \\
u &= x\sqrt{m^2 - \sin^2 \alpha} & v &= x \cos \alpha \\
x &= \frac{2\pi\alpha}{\lambda} & m &= n - ik
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Здесь  $x$  – параметр дифракции частицы,  $m$  – комплексный показатель преломления вещества частицы,  $J_k$  – функция Бесселя,  $H_k^{(2)}$  – функция Ханкеля второго рода.

В случае трансверсально изотропной системы, когда волокна хаотически ориентированы в параллельных слоях, удобно использовать факторы эффективности, усредненные по направлениям [23-25]:

$$\tilde{Q}_a = \int_0^{\pi/2} \bar{Q}_a(\theta) \sin(\theta) d\theta \quad \tilde{Q}_{tr} = 3 \int_0^{\pi/2} \bar{Q}_{tr}(\theta) \cos^2(\theta) d\theta \quad \tilde{Q}_s^tr = \tilde{Q}_{tr} - \tilde{Q}_a \tag{2.13}$$

$$\text{где } \{\bar{Q}_{tr}(\theta), \bar{Q}_s^tr(\theta), \bar{Q}_a(\theta)\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{Q_{tr}(\alpha), Q_s^tr(\alpha), Q_a(\alpha)\} d\psi \tag{2.14}$$

$\alpha = |\arcsin(\sin(\theta)\sin(\psi))|$  – угол падения излучения для отдельного волокна  $f$ ,  $\theta$  – угол падения для плоскости волокон  $P$ ,  $\psi$  – угол между плоскостью падения  $I$  и плоскостью, нормальной к плоскости волокон  $N$  (см. рисунок 2.3).

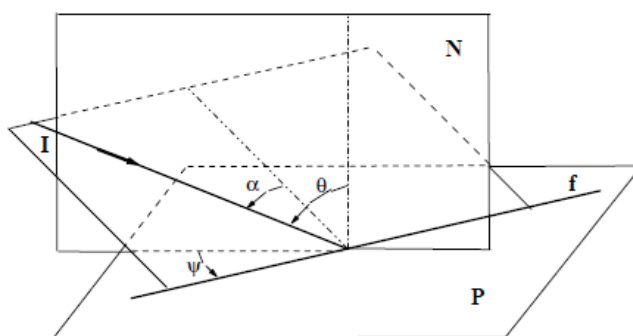


Рис.2.3 Схема определения углов для трансверсально изотропного волокнистого материала.

При однократном рассеянии излучения справедливы следующие соотношения для поглощательной и отражательной способности монодисперсного слоя волокон [23]:

$$A_{\lambda} = \frac{4}{\pi}(1-p)\tilde{Q}_a \quad R_{\lambda} = \frac{4}{\pi}(1-p)\tilde{Q}_s^b \quad (2.15)$$

где  $p$  – поверхностная пористость слоя волокон,  $\tilde{Q}_s^b = \tilde{Q}_s^{tr}/2$  – фактор эффективности обратного рассеяния. С учетом того, что  $A_{\lambda} = 1 - R_{\lambda} - T_{\lambda}$ , можно получить следующее выражение для величины  $U_{\lambda} = T_{\lambda} - R_{\lambda}$ :

$$U_{\lambda} = 1 - A_{\lambda} - 2R_{\lambda} = 1 - \frac{4}{\pi}(1-p)\tilde{Q}_{tr} \quad (2.16)$$

#### 2.1.4. Расчет излучательной способности алюминиевой фольги

Часто используемым материалом для изготовления экранов ЭВТИ является алюминий. Поэтому в данной работе для определенности будем считать, что экраны изготовлены из алюминия. Известно, что поверхность алюминия при обычных атмосферных условиях быстро покрывается тонкой пленкой оксида, защищающей алюминий от последующего окисления. При попадании в атмосферу, на поверхности алюминиевого образца в течение двух часов образуется пленка оксида толщиной 1 нм. При использовании 99.98%



алюминия слой оксида толщиной 4.5 нм образуется в течение трех месяцев. Естественный слой оксида алюминия на поверхности составляет 5 нм. Для промышленного алюминия толщина слоя оксида на его поверхности может достигать со временем 10 нм [26].

Для расчета характеристик окисленной с поверхности алюминиевой фольги рассматривается система, представляющая собой пленку оксида на металлической подложке, как показано на рисунке 2.4.

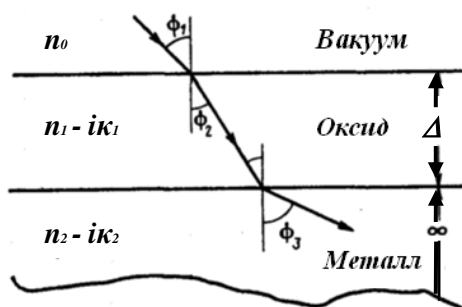


Рис. 2.4 Схема для расчета излучательной способности алюминиевой фольги, покрытой пленкой оксида.

Излучательная способность системы Al-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> вычисляется так, как это предложено в работе [27]. Теоретическое определение радиационных свойств оксидных пленок на металлической подложке основано на использовании формул Френеля и описано в работе Хивенса [28]. В этих формулах отражение излучения и пропускание его через поглощающие нерассеивающие (гомогенные) пленки с оптически гладкими поверхностями выражены через комплексные коэффициенты отражения и пропускания. Хивенс приводит также выражение для отражательной способности поглощающей пленки на поглощающей подложке, в котором фигурируют лишь действительные величины. Это выражение использовано в настоящей работе.

Френель получил формулы для отражения и пропускания энергии излучения на границе раздела двух сред (обозначенных индексами 0 и 1). Эти формулы для амплитуд векторов пропускания и отражения для непоглощающей (прозрачной) изотропной среды имеют вид [28]

$$\begin{aligned}
r_{1p} &= \frac{n_0 \cos \varphi_1 - n_1 \cos \varphi_0}{n_0 \cos \varphi_1 + n_1 \cos \varphi_0}, & r_{1s} &= \frac{n_0 \cos \varphi_0 - n_1 \cos \varphi_1}{n_0 \cos \varphi_0 + n_1 \cos \varphi_1}, \\
t_{1p} &= \frac{2n_0 \cos \varphi_0}{n_0 \cos \varphi_1 + n_1 \cos \varphi_0}, & t_{1s} &= \frac{2n_0 \cos \varphi_0}{n_0 \cos \varphi_0 + n_1 \cos \varphi_1},
\end{aligned} \tag{2.17}$$

где  $r_{1p}$  и  $r_{1s}$  – коэффициенты отражения, а  $t_{1p}$  и  $t_{1s}$  – коэффициенты пропускания Френеля. Индексом  $p$  обозначены составляющие векторов отраженного и прошедшего излучения, поляризованного параллельно плоскости падения, а индексом  $s$  – нормально плоскости падения.

Пучок лучей, падающих на пленку, делится на две части: отраженное и прошедшее излучение. Такое разделение происходит каждый раз, когда пучок попадает на границу раздела, поэтому прошедшее и отраженное излучение в общем случае складывается из многократно отраженных и многократно прошедших лучей. Для одиночного слоя такое суммирование провести довольно просто и можно показать, что суммарная отражательная способность системы  $R$  будет равна:

$$R = \frac{r_1^2 + 2r_1r_2 \cos 2\delta_1 + r_2^2}{1 + 2r_1r_2 \cos 2\delta_1 + r_1^2r_2^2}, \tag{2.18}$$

где для  $r_1$  и  $r_2$  можно использовать представленные выше выражения (26).

В случае нормального падения:

$$r_1 = \frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1}, \quad r_2 = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \tag{2.19}$$

Тогда  $R$  можно выразить через показатели преломления:

$$R_n = \frac{(n_0^2 + n_1^2)(n_1^2 + n_2^2) - 4n_0n_1n_2^2 + (n_0^2 - n_1^2)(n_1^2 - n_2^2) \cos 2\delta_1}{(n_0^2 + n_1^2)(n_1^2 + n_2^2) + 4n_0n_1n_2^2 + (n_0^2 - n_1^2)(n_1^2 - n_2^2) \cos 2\delta_1} \tag{2.20}$$

Для непоглощающих сред легко произвести оценку по этому выражению. Если пленка или подложка, или то и другое, поглощают излучение, то

величины  $n_1$  и  $n_2$  необходимо заменить на комплексный показатель преломления  $\tilde{n} = n - ik$ .

Для рассматриваемой нами системы суммарная отражательная способность [27]:

$$R_{n,\lambda} = \frac{(g_1^2 + h_1^2)e^{2\mu_1} + (g_2^2 + h_2^2)e^{-2\mu_1} + A \cos 2\gamma_1 + B \sin 2\gamma_1}{e^{2\mu_1} + (g_1^2 + h_1^2)(g_2^2 + h_2^2)e^{-2\mu_1} + E \cos 2\gamma_1 + D \sin 2\gamma_1}, \quad (2.21)$$

где

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{n_0^2 - n_1^2 - \kappa_1^2}{(n_0 + n_1)^2 + \kappa_1^2}, & h_1 &= \frac{2n_0\kappa_1}{(n_0 + n_1)^2 + \kappa_1^2}, \\ g_2 &= \frac{n_1^2 - n_2^2 - \kappa_1^2 - \kappa_2^2}{(n_1 + n_2)^2 + (\kappa_1 + \kappa_2)^2}, & h_2 &= \frac{2(n_1\kappa_2 - n_2\kappa_1)}{(n_1 + n_2)^2 + (\kappa_1 + \kappa_2)^2}, \\ \mu_1 &= \frac{2\pi\kappa_1\Delta}{\lambda}, & \gamma_1 &= \frac{2\pi n_1\Delta}{\lambda}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$A = 2(g_1g_2 + h_1h_2), \quad B = 2(g_1h_2 - g_2h_1),$$

$$E = 2(g_1g_2 - h_1h_2), \quad D = 2(g_1h_2 + g_2h_1).$$

Согласно закону Кирхгофа, монохроматическая нормальная излучательная способность при отсутствии пропускания связана очевидным соотношением с нормальной отражательной способностью:

$$\varepsilon_{n,\lambda} = 1 - R_{n,\lambda} \quad (2.23)$$

Направленная излучательная способность может быть определена как отношение интенсивности излучения, испускаемого в заданном направлении, к интенсивности излучения черного тела при той же температуре [27]. В общем случае при произвольных условиях на поверхности распределение интенсивности испускаемого излучения  $i$  зависит от двух углов  $\theta$  и  $\varphi$ . Излучение же черного тела изотропно.

Тогда

$$\varepsilon(\theta, \varphi) = \frac{i(\theta, \varphi)}{i_b}, \quad (2.24)$$

где  $i_b$  – интенсивность излучения абсолютно черного тела.

Для изотропных поверхностей (а мы предполагаем, что исследуемые поверхности являются таковыми) отсутствует зависимость излучения от угла  $\theta$  и, следовательно,  $\varepsilon = \varepsilon(\varphi)$ . Для случая нормального излучения  $\varphi = 0^\circ$  и  $\varepsilon = \varepsilon_n$

Тогда

$$\varepsilon_n = \frac{i(0^\circ)}{i_b} = \frac{i_n}{i_b} \quad (2.25)$$

Интегральная излучательная способность для системы Al-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> в направлении нормали к поверхности рассчитывается по формуле:

$$\varepsilon_n = \frac{\int_0^\infty \varepsilon_{n,\lambda} e_{b,\lambda} d\lambda}{\sigma T^4} \quad (2.26)$$

Для каждой длины волны  $\lambda$  находится произведение  $\varepsilon_{n\lambda}$  на спектральную плотность энергии черного излучения  $e_{b\lambda}$ , соответствующую температуре поверхности  $T$ . Значение  $\varepsilon_{n\lambda}$  определялось по уравнению (32), а  $e_{b\lambda}$  рассчитывалось по формуле Планка:

$$e_{b\lambda} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \quad (2.27)$$

Затем численным интегрированием в интервале длин волн 1 – 20 мкм определялась интегральная излучательная способность для нормального излучения  $\varepsilon_n$ .

Для полированных металлов, когда  $\varepsilon_n < 0.5$ , полусферическая излучательная способность несколько больше нормальной излучательной способности [29]. Следует отметить, что окисление металлической фольги приводит к менее выраженной угловой зависимости излучательной способности поверхности. Для упрощения расчетной модели, учитывающей

влияние оксидной пленки, мы будем пользоваться следующим приближенным соотношением:

$$\varepsilon_{\lambda}(\Delta) = \varepsilon_{n,\lambda}(\Delta) \frac{\varepsilon_{\lambda}(0)}{\varepsilon_{n,\lambda}(0)} \quad (2.28)$$

где  $\varepsilon_{n,\lambda}(0)$  и  $\varepsilon_{\lambda}(0)$  – нормальная и полусферическая излучательные способности неокисленной фольги (при нулевой толщине оксидной пленки). Отношение величин  $\varepsilon_{\lambda}(0)/\varepsilon_{n,\lambda}(0)$  определяется по [29] в зависимости от значения  $\varepsilon_{n,\lambda}(0)$ .

Следует отметить, что технология изготовления ЭВТИ при нормальных атмосферных условиях такова, что толщина оксидной пленки на обеих поверхностях алюминиевой фольги одинакова. При последующей эксплуатации в космосе в условиях вакуума нагрев алюминиевой фольги не может приводить к увеличению толщины оксидной пленки.

### 2.1.5. Оптические характеристики кварцевого стекла и алюминия

Для определенности, будем рассматривать случай, когда разделитель изготовлен из кварцевых волокон. Спектральные оптические постоянные кварцевого стекла достаточно полно исследованы и представлены в литературе. При комнатной температуре показатель преломления  $n_{\lambda}$  для диапазона длин волн  $0.2 \leq \lambda \leq 3.7$  мкм был измерен в работе [30]. Он хорошо описывается с помощью выражения, предложенного Малитсоном [30]:

$$n_0^2 - 1 = \frac{0.6962 \lambda^2}{\lambda^2 - 0.004679} + \frac{0.4079 \lambda^2}{\lambda^2 - 0.01351} + \frac{0.8975 \lambda^2}{\lambda^2 - 97.93} \quad (2.29)$$

где  $\lambda$  – длина волны, выраженная в микронах.

В данных Петрова [31] содержится также температурная зависимость, которая может быть приблизительно выражена следующим образом:

$$n(\lambda, T) = n_0(\lambda)(1 + 8 \cdot 10^{-6}(T - 293)) \quad (2.30)$$

где температура  $T$  выражена в Кельвинах. Данная формула справедлива для температур  $T < 1673\text{K}$ .

Для диапазона длин волн  $7.6 \leq \lambda \leq 12$  мкм можно использовать следующее приближение для расчета показателей преломления и поглощения [23]:

$$k = \frac{\lambda}{4\pi} 10^{\gamma-6}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda < 8: \quad \gamma = (\lambda^2 + 20)/14 \\ 8 < \lambda < 9: \quad \gamma = 6 + 0.6(\lambda - 8) \end{array} \right\} n = 0.35 + \frac{65}{49}(\lambda - 8.3)^2 \quad (2.31)$$

$$\left. \begin{array}{l} 9 < \lambda < 9.5: \quad n = 1 + 4(\lambda - 9) \\ 9.5 < \lambda < 10: \quad n = 3 - 0.8(\lambda - 9.5) \end{array} \right\} \gamma = 6.6 - 1.6(\lambda - 9)$$

$$\lambda > 10: \quad n = 2.6 - (\lambda - 10)/2 \quad \gamma = 5 - 6(\lambda - 10)/25$$

В данных формулах длина волны выражена в микронах.

Измерения показателя преломления в зависимости от температуры проводились в работах [33] для температур до  $370\text{K}$  в диапазоне длин волн  $3 \leq \lambda \leq 6.7$  мкм, [34] для температур  $295 \leq T \leq 1773\text{K}$  в диапазоне длин волн  $1.7 \leq \lambda \leq 4$  мкм. Показатель преломления в зависимости от длины волны в диапазоне  $0.23 \leq \lambda \leq 3.37$  мкм при значениях температуры  $299, 744$  и  $1101\text{K}$  был определен в работе [35]. Данные по спектральным оптическим постоянным различных авторов приведены также в справочнике [36]. Показатели преломления и поглощения для более широкого диапазона длин волн были определены в работах [37] ( $2 \leq \lambda \leq 30$  мкм,  $T = 295, 573, 773\text{K}$ ) и [31] ( $1.2 \leq \lambda \leq 11.7$  мкм,  $295 \leq T \leq 1473\text{K}$ ). Данные различных авторов хорошо согласуются между собой. Используемые в данной работе спектральные зависимости оптических постоянных кварцевого стекла для нескольких значений температуры показаны на рис. 2.7 и 2.8.

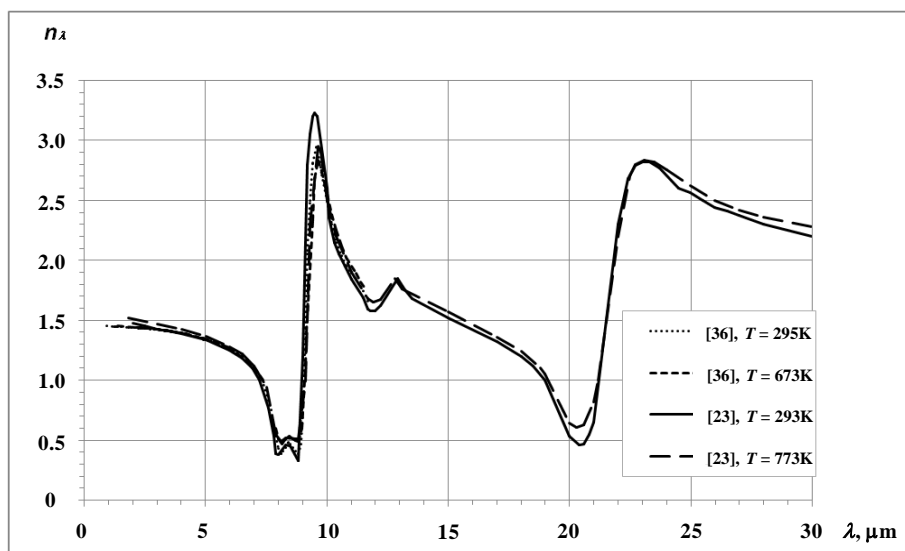


Рис. 2.7 Показатель преломления кварцевого стекла.

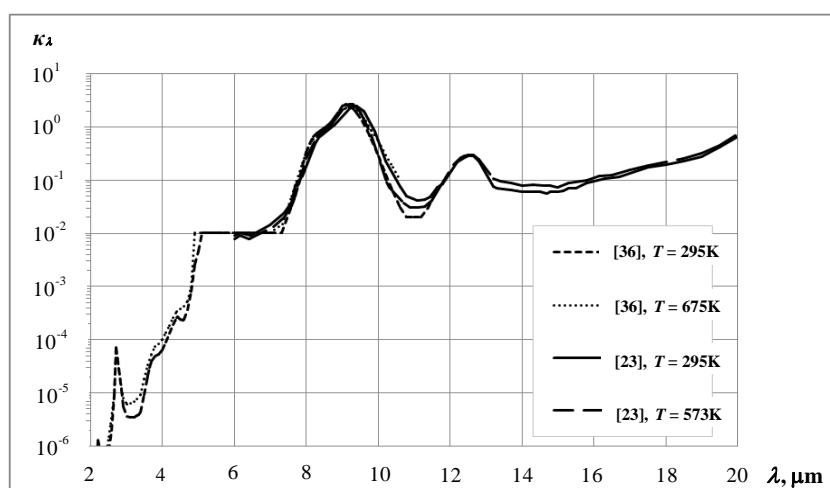


Рис. 2.8 Показатель поглощения кварцевого стекла.

По данным рис. 2.8 видно, что кварцевое стекло обладает слабым поглощением в ближней инфракрасной части спектра примерно до длин волн  $\lambda = 4$  мкм. В среднем и дальнем инфракрасных диапазонах кварцевое стекло является непрозрачным. Две основные полосы поглощения расположены на длинах волн  $\lambda = 9.5$  мкм и  $\lambda = 12.5$  мкм. Зависимость оптических постоянных кварцевого стекла от температуры незначительна. С ростом температуры показатели поглощения и преломления несколько увеличиваются почти по всему спектру, за исключением спектральных областей вблизи максимумов поглощения.

Спектральные зависимости оптических постоянных алюминия и оксида алюминия представлены в ряде работ. Измерения показателя преломления  $n_\lambda$  и показателя поглощения  $\kappa_\lambda$  в зависимости от температуры в видимой, а также ближней и средней областях спектра проводились в работах [37-39]. Данные по спектральным оптическим постоянным различных авторов приведены также в работе [40]. Используемые при расчетах спектральные зависимости оптических постоянных алюминия (по данным [27]) и оксида алюминия (по данным [40]) приведены на рис. 2.9–2.11.

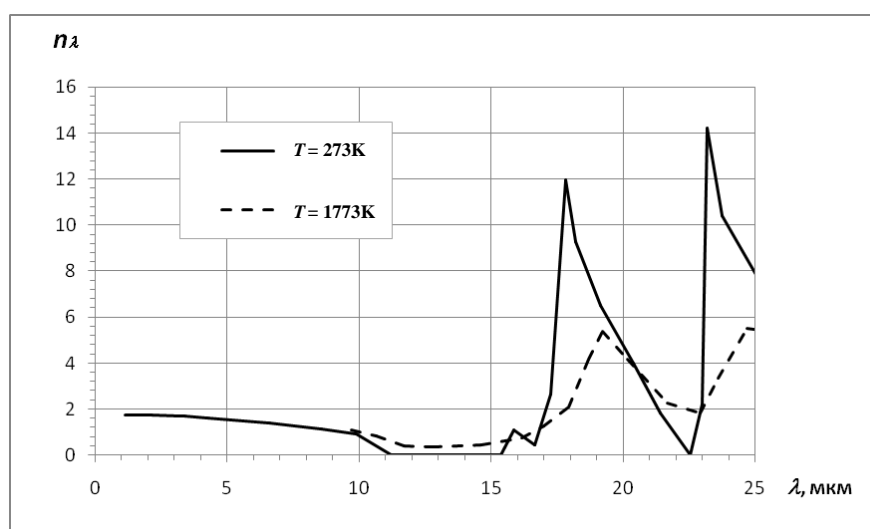


Рис. 2.9 Показатель преломления оксида алюминия.

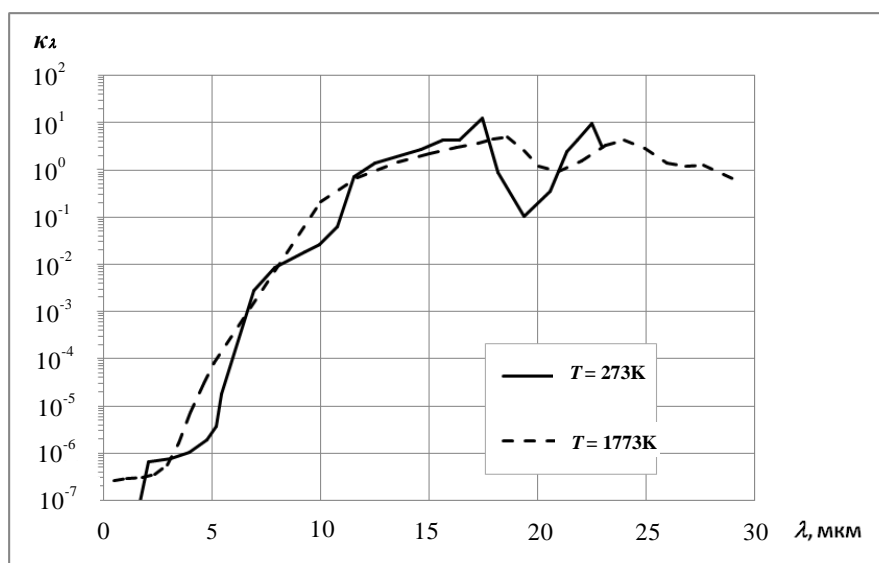


Рис. 2.10 Показатель поглощения оксида алюминия.



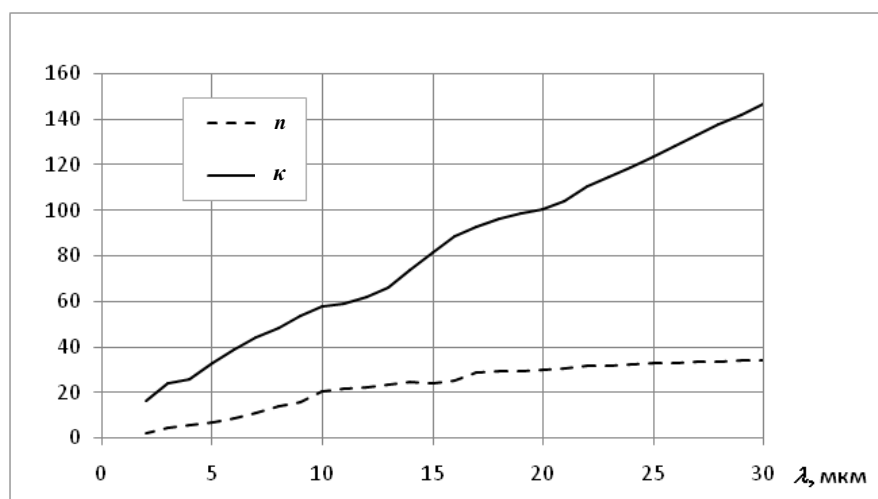


Рис. 2.11 Показатели преломления и поглощения алюминия.

Показатель преломления  $n_\lambda$  оксида алюминия слабо зависит от температуры и его спектральное изменение в ближней инфракрасной области спектра незначительно. В этом же диапазоне показатель поглощения  $\kappa_\lambda$  примерно линейно возрастает с длиной волны. В дальней инфракрасной области спектра наблюдаются две полосы поглощения при  $\lambda = 18$  мкм и  $\lambda = 23$  мкм, которые становятся менее выраженными с увеличением температуры.

Оптические постоянные алюминия почти линейно возрастают с длиной волны, что типично для металлов данной группы [35, 41]. Зависимость оптических постоянных от температуры незначительна, и поэтому в данной работе не учитывается.

### 2.1.6. Результаты расчетов

Расчетные значения спектрального транспортного фактора эффективности ослабления для монодисперсных кварцевых волокон, хаотически ориентированных в плоскости, нормальной падающему излучению, представлены на рис. 2.12.

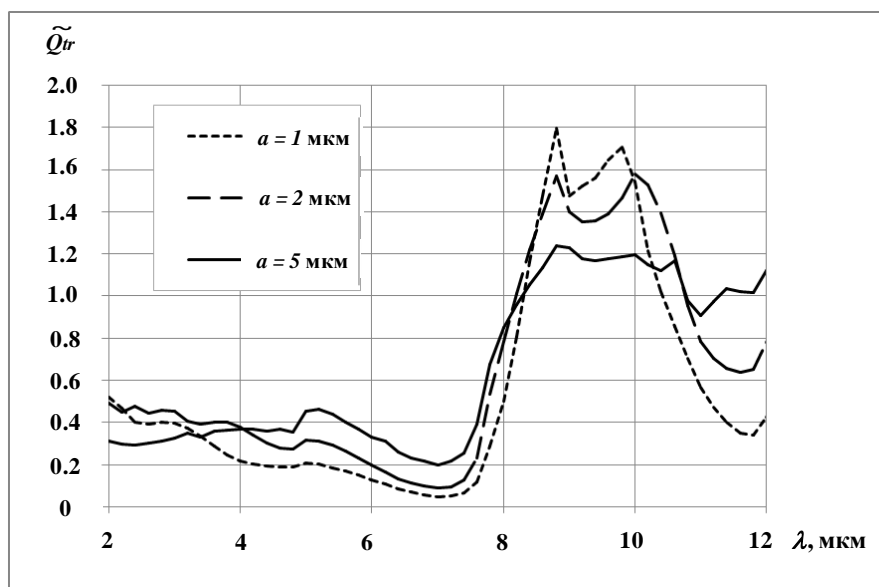


Рис. 2.12 Транспортный фактор эффективности ослабления для кварцевых волокон.

Видно, что влияние радиуса волокон, в среднем по спектру, не очень велико, и для не очень тонких волокон можно выделить две спектральные полосы со значительно отличающимся уровнем прозрачности слоя волокон:  $2 < \lambda < 8$  мкм и  $8 < \lambda < 12$  мкм.

На рис. 2.12 представлены результаты расчетов потока теплового излучения в зависимости от поверхностной пористости волокнистого материала при  $T_1 = 500$  К,  $T_2 = 300$  К,  $T_{sp} = 400$  К для нескольких значений радиуса монодисперсных волокон. Толщина пленки оксида алюминия на поверхности алюминиевой фольги принималась равной  $\Delta = 10$  нм. При интегрировании по спектру учитывался диапазон длин волн  $1 < \lambda < 20$  мкм, дающий основной вклад в интегральный поток теплового излучения.

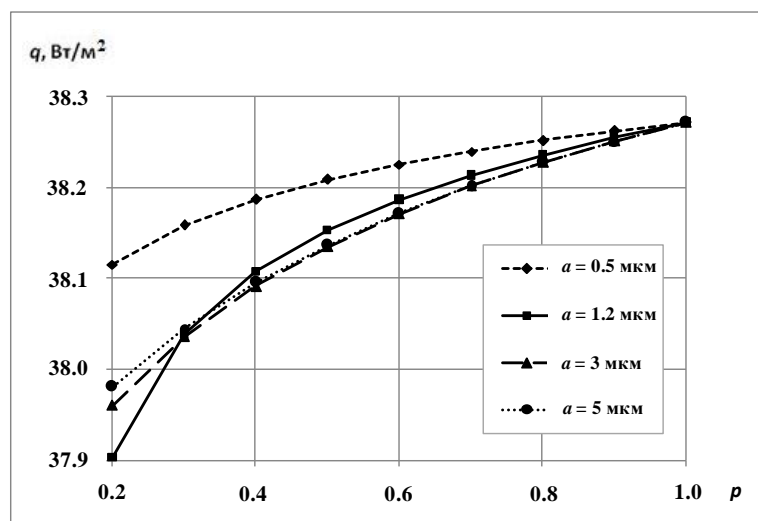


Рис. 2.13 Интегральный поток теплового излучения через слой ЭВТИ в зависимости от поверхностной пористости волокнистого материала.

Как видно на рис. 2.13, использование более плотного разделителя (с меньшими значениями поверхностной пористости) приводит к небольшому (до 0.8%) снижению интегрального потока теплового излучения через слой ЭВТИ. При этом пористость оказывается более значительным фактором для сравнительно толстых волокон. Разумеется, при  $p=1$  графики сходятся к одному значению, что соответствует случаю, когда волокнистая разделитель отсутствует.

Аналогичные данные, но в другой форме, представлены на рис. 2.14. Видно, что в случае наиболее плотного разделителя наблюдается отчетливо выраженный минимум интегрального потока излучения при радиусе волокон  $a=1.2$  мкм. Этот минимум объясняется максимальным ослаблением теплового излучения волокнами данного радиуса.

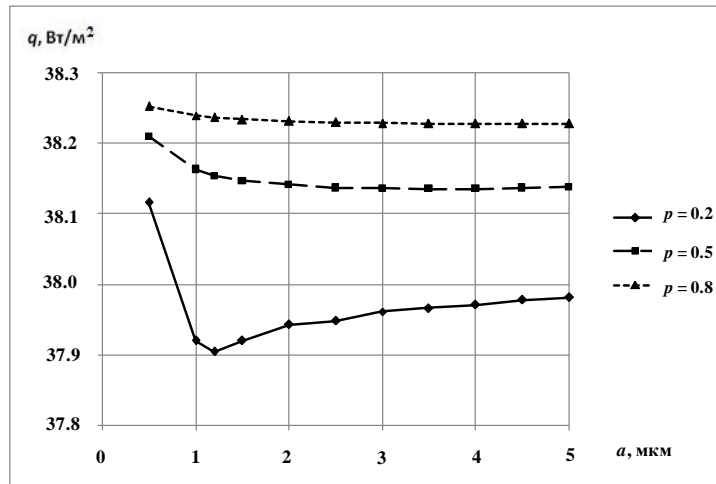


Рис. 2.14 Интегральный поток теплового излучения через ЭВТИ в зависимости от радиуса волокна.

На рис. 2.15 приведена зависимость интегрального потока теплового излучения от толщины оксидной пленки на алюминиевой фольге при  $p=0.2$  и  $a=1.2$  мкм.

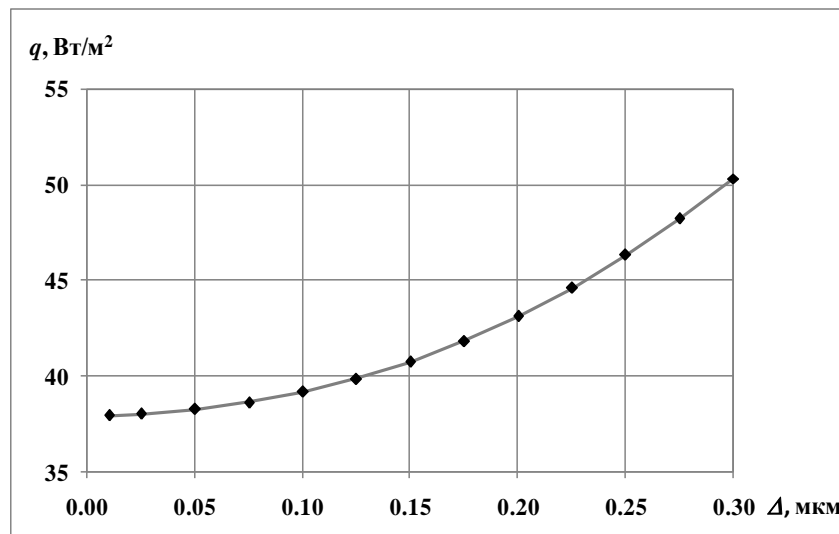


Рис. 2.15 Интегральный поток теплового излучения через ЭВТИ в зависимости от толщины оксидной пленки.

Монотонное увеличение потока теплового излучения с толщиной оксидной пленки объясняется увеличением излучательной способности окисленной фольги. Этот эффект оказывается значительным уже при толщине оксидной пленки на уровне 0.1 мкм.

## 2.2. Оптимизация ЭВТИ путем выбора волокнистого разделителя

Как показали выполненные расчеты переноса теплового излучения в ЭВТИ с учетом тонкого полупрозрачного разделителя из кварцевых волокон, влияние этого разделителя невелико. Простое увеличение поверхностной плотности тонкого разделителя оказывается не очень эффективным.

В то же время, анализ возможных решений для волокнистых разделителей показал, что хорошим решением для уменьшения теплового потока без увеличения веса ЭВТИ является использование не простых кварцевых волокон, а таких же или более тонких волокон, покрытых тончайшим слоем алюминия. В работах [42-44] было показано, что результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными работы [45]. Экспериментально было доказано, что слоистые материалы, изготовленные из диэлектрических волокон радиусом от 50 нм до 1.5 мкм с алюминиевым покрытием толщиной 50 нм или даже меньше, характеризуются чрезвычайно высоким ослаблением инфракрасного излучения [45, 46].

В исследовании Домбровского [44] показано, что оптические свойства тонкого двухслойного волокна оказываются такими же, как у сплошного алюминиевого волокна того же радиуса. Такие волокна не поглощают инфракрасное излучение, тогда как транспортный фактор эффективности рассеяния  $Q_s^{tr}$  оказывается довольно большим. Для оценки величины  $Q_s^{tr}$  можно использовать расчеты для волокон из полностью отражающего материала (с бесконечной величиной комплексного показателя преломления,  $m \rightarrow \infty$ ). Зависимость транспортного фактора эффективности рассеяния от параметра дифракции  $x = 2\pi a/\lambda$  приведена на рис. 2.16.

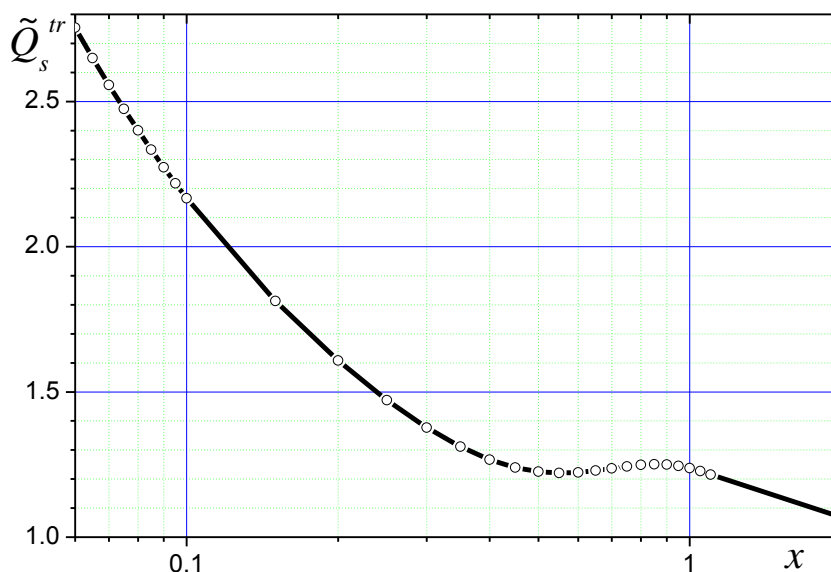


Рис. 2.16 Транспортный фактор эффективности рассеяния для монодисперсных полностью отражающих волокон, хаотически ориентированных в слое, освещаемом неполяризованным излучением.

Сравнение с рис. 2.12 показывает, что металлизированные волокна имеют значительно больший транспортный фактор эффективности ослабления, чем обычные кварцевые волокна, особенно в коротковолновой части спектра инфракрасного излучения, при  $\lambda < 7.5$  мкм. Поскольку вклад коротковолновой части спектра в интегральный поток теплового излучения повышается с увеличением температуры, можно рекомендовать применение более дорогих металлизированных волокон только во внешних слоях ЭВТИ или, например, для условий полета, отличающихся интенсивными тепловыми нагрузками.

Большие значения транспортного фактора эффективности ослабления говорят о том, что гипотеза независимого рассеяния действительна только для высокопористого материала. На рис. 2.17 приведены расчетные значения интегрального потока теплового излучения через ЭВТИ с высокопористым разделителем из кварцевых волокон, покрытых слоем алюминия, в зависимости от радиуса волокна. Расчет произведен при тех же исходных данных, что и в разделе 2.1.6 при  $p = 0.5$ . Для сравнения на графике представлены также

тепловые потоки через ЭВТИ с разделителем из кварцевого волокна и через ЭВТИ без разделителя.

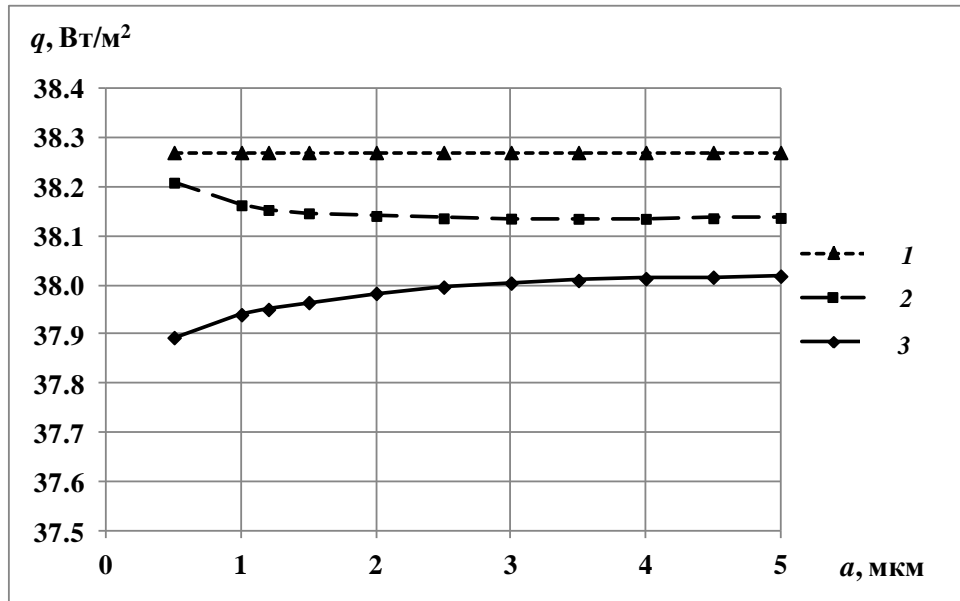


Рис. 2.17 Сравнение интегральных потоков теплового излучения через ЭВТИ: 1 – ЭВТИ без разделителя; 2 – ЭВТИ с разделителем из кварцевого волокна; 3 – ЭВТИ с разделителем из металлизированного волокна

Как видно из графика, использование металлизированных волокон приводит к еще небольшому снижению теплового потока как относительно случая использования ЭВТИ без разделителя, так и ЭВТИ с разделителем из обычных волокон. При этом максимальное снижение теплового потока наблюдаются при меньших значениях радиуса волокна.

В случае металлизированных волокон эффекты зависимого рассеяния оказываются значительными в случае более плотного разделителя, при поверхностной пористости меньшей 0.5 [47–50]. В связи с этим, пользоваться приведенными ранее соотношениями для оценки влияния разделителей из металлизированных волокон в диапазоне зависимого рассеяния нельзя. Вместо этого, такой разделитель может быть приближенно рассмотрен как алюминиевая фольга. В этом случае параметр  $U$  принимает значение:

$$U_{\lambda} = T_{\lambda} - R_{\lambda} = \varepsilon_{sp,\lambda} - 1 \quad (2.32)$$

В таком случае, плотность потока теплового излучения через слой ЭВТИ, содержащий разделитель из металлизированных волокон, принимает следующий вид:

$$q_{\lambda}^{sp} = \frac{f_{1,\lambda} - f_{2,\lambda}}{\frac{1}{\varepsilon_{1,\lambda}} + \frac{1}{\varepsilon_{2,\lambda}} + \frac{2}{\varepsilon_{sp,\lambda}} - 2} \quad (2.33)$$

А отношение потоков излучения с учетом разделителя и без него равно:

$$\frac{q_{\lambda}^{sp}}{q_{\lambda}} = \frac{\frac{1}{\varepsilon_{1,\lambda}} + \frac{1}{\varepsilon_{2,\lambda}} - 1}{\frac{1}{\varepsilon_{1,\lambda}} + \frac{1}{\varepsilon_{2,\lambda}} + \frac{2}{\varepsilon_{sp,\lambda}} - 2} \quad (2.34)$$

Пренебрегая температурной зависимостью излучательной способности алюминиевой фольги, несложно получить, что это отношение равно 0.5. Таким образом, приведенная оценка показывает, что использование разделителей из металлизированных волокон может быть достаточно эффективным способом снижения теплового потока через ЭВТИ.

### 2.3. Конечно-разностный алгоритм

Полученная в разделе 2.1 система обыкновенных дифференциальных уравнений может быть приближенно решена с использованием численных алгоритмов. Для решения дифференциальных уравнений существует несколько методов их численного решения. Одним из наиболее употребительных методов численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем является метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности [51].

Систему (1) можно представить в виде :

$$\begin{aligned} \frac{dT_l}{d\tau} &= f_l(\tau, T_1, \dots, T_l, \dots, T_L) \\ T_l(\tau_{\min}) &= T_{l0} \end{aligned} \quad (2.35)$$



$$l = \overline{1, L}$$

Для решения задачи весь диапазон времени  $\tau \in (\tau_{\min}, \tau_{\max}]$  разбивается на  $M$  отрезков с шагом  $h$ . Алгоритм вычисления температуры  $l$ -го слоя  $T_l$  на  $i+1$ -ой итерации выглядит следующим образом:

$$T_{l,i+1} = T_{li} + \Delta T_{li}$$

$$\Delta T_{li} = \frac{1}{6} (k_{li}^1 + 2k_{li}^2 + 2k_{li}^3 + k_{li}^4) \quad (2.36)$$

$$l = \overline{1, L}$$

где через  $k_{li}^1, k_{li}^2, k_{li}^3, k_{li}^4$  обозначены частные приращения для искомым функций  $T_l$  на  $i$ -ой итерации:

$$k_{li}^1 = h \cdot f_l(\tau_i, T_{1,i}, \dots, T_{li}, \dots, T_{Li})$$

$$k_{li}^2 = h \cdot f_l\left(\tau_{i+1/2}, T_{li} + \frac{k_{li}^1}{2}, \dots, T_{li} + \frac{k_{li}^1}{2}, \dots, T_{Li} + \frac{k_{Li}^1}{2}\right) \quad (2.37)$$

$$k_{li}^3 = h \cdot f_l\left(\tau_{i+1/2}, T_{li} + \frac{k_{li}^2}{2}, \dots, T_{li} + \frac{k_{li}^2}{2}, \dots, T_{Li} + \frac{k_{Li}^2}{2}\right)$$

$$k_{li}^4 = h \cdot f_l(\tau_{i+1}, T_{li} + k_{li}^3, \dots, T_{li} + k_{li}^3, \dots, T_{Li} + k_{Li}^3)$$

где  $\tau_{i+1/2} = \tau_i + h/2$ ,  $\tau_{i+1} = \tau_i + h$ .

Для реализации численного метода и решения задачи по определению температурного поля в образце ЭВТИ был разработан программный код (программное обеспечение) на языке FORTRAN.

## Выводы по главе 2

Рассмотрены процессы переноса излучения в элементе ЭВТИ, состоящем из двух экранов и волокнистого разделителя между ними. Получено выражение для определения потока излучения через такой элемент, учитывающее отражение и пропускание излучения высокопористого волокнистого разделителя, определяемые на основании теории независимости рассеяния и теории Ми для бесконечного однородного цилиндра, а также данных о дисперсном составе волокнистого материала. В предположении, что материалом экранов ЭВТИ является алюминий, учтено также наличие возможной оксидной пленки на его поверхности и оценено влияние такой пленки на излучательную способность алюминиевой фольги. Показано, что наличие слоя оксида приводит к значительному увеличению потока теплового излучения через слой ЭВТИ.

### Глава 3. Практическая апробация разрабатываемого метода моделирования

#### 3.1. Тепловые испытания образцов, моделирующих элементы ЭВТИ

##### 3.1.1. Цели и задачи тепловых испытаний

Для оценки эффективности разработанной модели по определению радиационного теплопереноса через слой ЭВТИ, учитывающей влияние разделительного слоя, проведено экспериментальное исследование образцов, моделирующих элементы ЭВТИ.

Основными целями проведенных тепловых испытаний образцов являлось: определение, с использованием термопарных измерений, характеристик теплового состояния образцов с различным расположением сепарирующих слоев относительно радиационных экранов и характеристик теплового состояния датчиков теплового потока (ДТП), установленных на образцах в условиях нестационарного радиационного нагрева в вакууме, в диапазоне температур от комнатной до 400°C.

Для проведения тепловых испытаний использовался тепловакуумный стенд ТВС-1М, входящий в состав экспериментального комплекса ВТС-ОЗТ Тепловой лаборатории НИО-601 МАИ [52, 53] с экспериментальным модулем ЭМ-2В и плоским нагревательным элементом (НЭ) из алюминиевой фольги толщиной 0,18 мм. Испытания проводились экспериментальной группой Тепловой лаборатории НИО-601 МАИ под руководством С.А.Будника.

Для решения задач испытаний проводились следующие измерения:

*Основные измерения:*

- $T_i(\tau), 0 \leq \tau \leq \tau_e$  - изменение температур в заданных точках схемы измерений  $X_i, i = \overline{1, M}$  в образцах;

- $T_i(\tau), 0 \leq \tau \leq \tau_e$  - изменение температур в заданных точках схемы измерений  $X_i, i = \overline{M+1, M1}$  в датчиках плотности теплового потока на обратных поверхностях образцов.

- $T_{НЭ}(\tau), 0 \leq \tau \leq \tau_e$  - изменение температуры нагревательного элемента (НЭ) экспериментального модуля (ЭМ) (используется в системе управления нагревом). Кроме того, в данных испытаниях НЭ является частью образца ЭВТИ, выполняя функцию радиационного экрана с более высокой температурой.

*Дополнительные измерения:*

- $I(\tau), 0 \leq \tau \leq \tau_e$  - изменение тока в цепи НЭ и  $U(\tau), 0 \leq \tau \leq \tau_e$  - изменение напряжения на границах рабочей зоны НЭ. Данные характеристики используются для расчета электрической мощности (используются в системе управления нагревом).

- Геометрические размеры образцов и их элементов.
- Геометрические размеры и масса элементов датчиков теплового потока и для определения (уточнения) плотности используемого в датчиках материала.

Для проведения штатных тепловых испытаний были разработаны и изготовлены два экспериментальных образца А и В, моделирующие элементы ЭВТИ (радиационный экран + сепарирующий слой). Пассивный радиационный экран каждого образца имеет форму квадратных пластин из алюминиевой фольги с размерами (длина×ширина×толщина) 80×80×0,18мм. Сепарирующий слой образца, выполненный из кварцевого холста, в общем случае покрывает нагреваемую поверхность образца. Этот слой выполнен из кварцевого холста в виде квадратной пластины с размерами (длина×ширина×толщина) 80×80×0,18мм. При этом наличие сепарирующего слоя и его толщина зависят от используемой схемы испытаний (рис. 3.1 – 3.4).

В данных испытаниях нагревательный элемент (НЭ) экспериментального модуля, выполненный из алюминиевой фольги, играет роль второго активного радиационного экрана (с большей температурой) общего для образцов А и В. Таким образом пассивный радиационный экран + сепарирующий слой + НЭ образуют исследуемый элемент ЭВТИ. НЭ в зоне размещения образцов имеет размеры (длина×ширина×толщина) 100×80×0,18мм. Пассивные экраны образцов А и В в процессе сборки экспериментального модуля (ЭМ) устанавливаются параллельно НЭ модуля с одинаковыми зазорами, равными 5 мм, и крепятся к боковым теплоизолирующим элементам ЭМ с помощью специальных керамических опор (подвесов).

На поверхности пассивных экранов образцов А и В противоположной нагреваемой поверхности расположены датчики теплового потока (ДТП). Каждый датчик имеют форму квадратной пластины с размерами (длина×ширина×толщина) 79×79×3,7мм и выполнен из теплоизоляционного материала ТЗМК-10 с плотностью 178 кг/м<sup>3</sup>.

На обратных поверхностях ДТП образцов А и В размещаются теплоизолирующие пластины квадратной формы с размерами (длина×ширина×толщина) 79×79×19,5мм из теплоизоляционного материала ТЗМК-10 с плотностью 146 кг/м<sup>3</sup>. Плотность материала ТЗМК-10 определялась путем взвешивания и расчета объема соответствующих ДТП и теплоизолирующих пластин.

В качестве термодатчиков в испытаниях использовались термопары типа Хромель-Алюмель (тип К) с диаметрами проводов Ø 0,05мм и Ø 0,1мм сваренные способом «встык». На схемах термопары с Ø 0,1 отмечены специально.

В таблице 3.1 приведены геометрические параметры образцов А и В.

Таблица 3.1 – Геометрические параметры элементов образцов А и В

Образец	Элемент	Длина, мм	Ширина, мм	Толщина, мм
А	Экран А	80,0	80,0	0,18
	ДТП А	79,0	79,0	3,70
	Теплоизолирующая пластина А	79,0	79,0	19,50
В	Экран В	80,0	80,0	0,18
	ДТП В	79,0	79,0	3,70
	Теплоизолирующая пластина В	79,0	79,0	19,50

Схемы температурных измерений (количество и координаты точек измерения) при проведении штатных испытаний в образцах А и В выбиралась с учетом требований решаемой задачи исследований и физических свойств исследуемых материалов и представлены в таблице 3.2.

Таблица 3.2 - Схемы температурных измерений в образцах А и В.

Координата*, мм	Образец А	Образец В	Примечание
Термопара			
$X_1$	0,0	0,0	<b>Нагреваемая поверхность образца</b> $T_0 = T_{нэ}$
$T_i$	$T_0$	$T_0$	
$X_2$	5,0	5,0	Радиационный экран, нагреваемая поверхность ДТП
$T_i$	$T_8$	$T_1, T_2$	
$X_3$	8,7	8,7	Обратная поверхность ДТП
$T_i$	$T_{10}$	$T_6$	
$X_4$	28,2	28,2	Обратная поверхность теплоизолирующей пластины
$T_i$	$T_{11}$	$T_7$	

\* координаты точек измерения отсчитываются от соответствующей поверхности **нагревательного элемента**

### 3.1.2. Методика проведения тепловых испытаний.

На начальном этапе тепловых испытаний были проведены предварительные испытания с использованием штатных образцов. В этих испытаниях была проведена комплексная проверка работоспособности систем стенда и АСНИ, подбор и отладка режимов и программы управления нагревом, подготовка образцов и экспериментального модуля ЭМ-2В к проведению штатных испытаний.

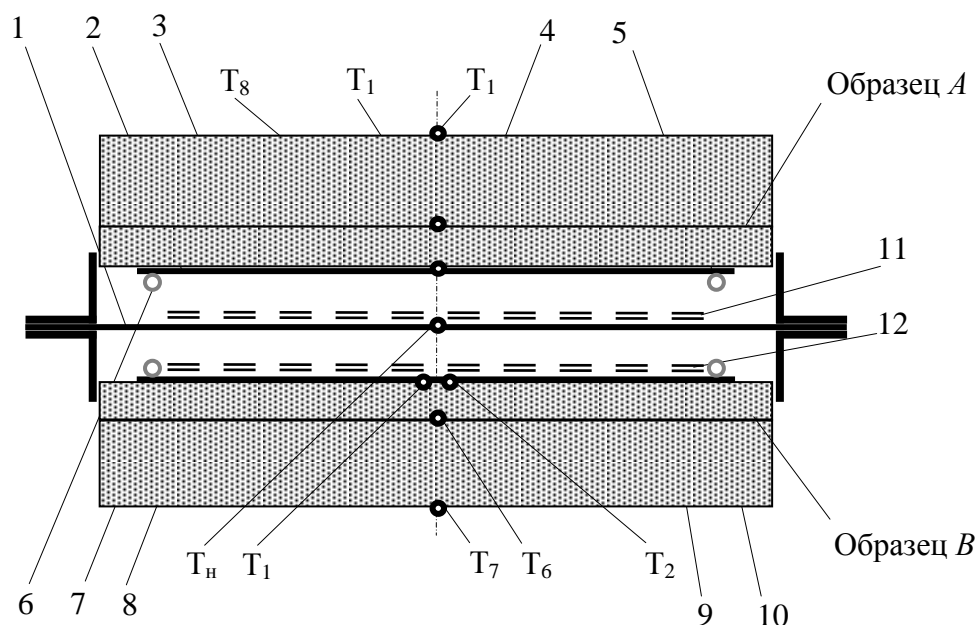
С учетом конструкции и технологических особенностей образцов А и В штатные тепловые испытания проводились по следующей программе в четыре последовательных этапа:

- На первом этапе использовалась схема испытаний №1 (см. рис. 3.1), с двумя слоями кварцевого холста уложенными на радиационный экран образца В и двумя слоями холста уложенными на нагревательный элемент (НЭ) экспериментального модуля ЭМ-2В.

- На втором этапе использовалась схема испытаний №2 (см. рис. 3.2), в которой, в отличие от схемы №1, был удален двойной сепарирующий слой с верхней поверхности «активного» экрана (НЭ).

- На третьем этапе использовалась схема испытаний №3 (см. рис. 3.3), в которой, в отличие от схемы №2, был удален один из слоев кварцевого холста из сепарирующего слоя, уложенного на «пассивный» экран образца В.

- На четвертом этапе использовалась схема испытаний №4 (см. рис. 3.4), в которой, в отличие от схемы №3, был удален последний сепарирующий слой с «пассивного» экрана образца В. В этом случае реализуется симметричная схема радиационного нагрева двух «пассивных» экранов образцов А и В от одного «активного» экрана – НЭ.



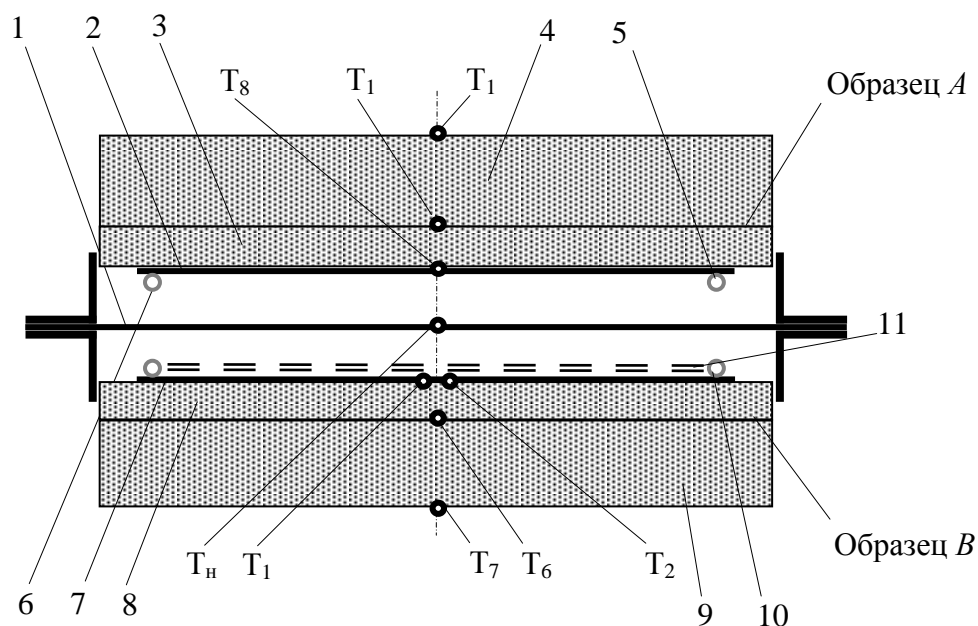
1 – нагревательный элемент (НЭ), 2 – экран образца А, 3 – датчик теплового потока образца А (ДТП<sub>А</sub>), 4 – теплоизолирующая пластина на образце А, 5 и 6 – опоры экрана образца А, 7 – экран образца В, 8 – датчик теплового потока образца В (ДТП<sub>В</sub>), 9 – теплоизолирующая пластина на образце В, 10 – элемент крепления экрана образца В, 11 – 2-хслойный сепаратор на НЭ, 12 – 2-хслойный сепаратор на экране образца В.

Термопары типа Х-А с диаметром термоэлектродов  $\varnothing 0,05$  мм (кроме специально оговоренных случаев):

$T_{нэ}$  - термопара на нагревательном элементе,  
 $T_1$  - термопара на экране образца В;  
 $T_2$  - термопара с  $\varnothing 0,1$ мм на экране образца В;  
 $T_6$  - термопара на обратной поверхности ДТП<sub>В</sub>;  
 $T_7$  - термопара на обратной поверхности теплоизолирующей пластины на образце В;  
 $T_8$  - термопара на экране образца А;  
 $T_{10}$  - термопара на обратной поверхности ДТП<sub>А</sub>  
 $T_{11}$  - термопара на обратной поверхности теплоизолирующей пластины на образце А;

Рис. 3.1 Схема тепловых испытаний №1 с 2-мя слоями холста на НЭ и 2-мя слоями холста на экране образца В



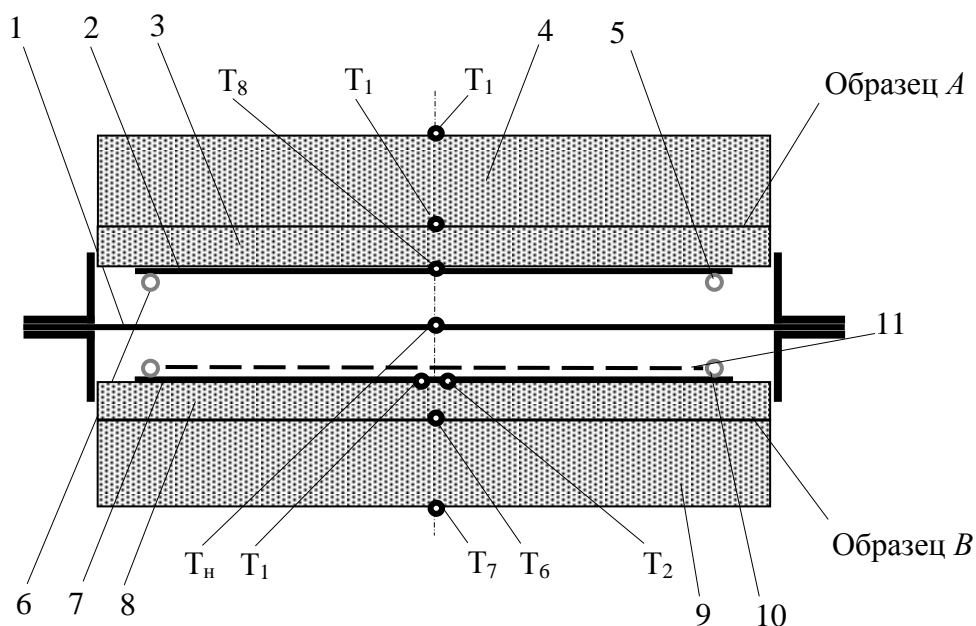


1 – нагревательный элемент (НЭ), 2 – экран образца А, 3 – датчик теплового потока образца А (ДТП<sub>А</sub>), 4 – теплоизолирующая пластина на образце А, 5 и 6 – опоры экрана образца А, 7 – экран образца В, 8 – датчик теплового потока образца В (ДТП<sub>В</sub>), 9 – теплоизолирующая пластина на образце В, 10 – элемент крепления экрана образца В, 11 – 2-хслойный сепаратор на экране образца В.

Термопары типа Х-А с диаметром термоэлектродов  $\varnothing 0,05$  мм (кроме специально оговоренных случаев):

$T_{нэ}$  - термопара на нагревательном элементе,  
 $T_1$  - термопара на экране образца В;  
 $T_2$  - термопара с  $\varnothing 0,1$ мм на экране образца В;  
 $T_6$  - термопара на обратной поверхности ДТП<sub>В</sub>;  
 $T_7$  - термопара на обратной поверхности теплоизолирующей пластины на образце В;  
 $T_8$  - термопара на экране образца А;  
 $T_{10}$  - термопара на обратной поверхности ДТП<sub>А</sub>  
 $T_{11}$  - термопара на обратной поверхности теплоизолирующей пластины на образце А;

Рис. 3.2 Схема тепловых испытаний №2 с 2-мя слоями холста на экране образца В

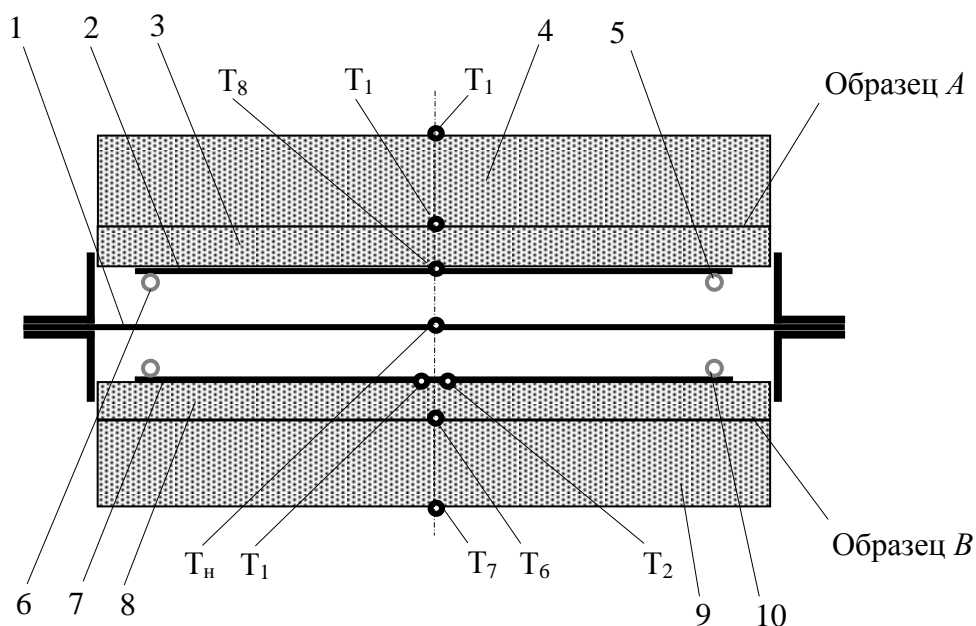


1 – нагревательный элемент (НЭ), 2 – экран образца А, 3 – датчик теплового потока образца А (ДТП<sub>А</sub>), 4 – теплоизолирующая пластина на образце А, 5 и 6 – опоры экрана образца А, 7 – экран образца В, 8 – датчик теплового потока образца В (ДТП<sub>В</sub>), 9 – теплоизолирующая пластина на образце В, 10 – элемент крепления экрана образца В, 11 – 1-слойный сепаратор на экране образца В.

Термопары типа Х-А с диаметром термоэлектродов  $\varnothing 0,05$  мм (кроме специально оговоренных случаев):

$T_{нэ}$  - термопара на нагревательном элементе,  
 $T_1$  - термопара на экране образца В;  
 $T_2$  - термопара с  $\varnothing 0,1$ мм на экране образца В;  
 $T_6$  - термопара на обратной поверхности ДТП<sub>В</sub>;  
 $T_7$  - термопара на обратной поверхности теплоизолирующей пластины на образце В;  
 $T_8$  - термопара на экране образца А;  
 $T_{10}$  - термопара на обратной поверхности ДТП<sub>А</sub>  
 $T_{11}$  - термопара на обратной поверхности теплоизолирующей пластины на образце А;

Рис. 3.3 Схема тепловых испытаний №3 с 1-м слоем холста на экране образца В



1 – нагревательный элемент (НЭ), 2 – экран образца А, 3 – датчик теплового потока образца А (ДТП<sub>А</sub>), 4 – теплоизолирующая пластина на образце А, 5 и 6 – опоры экрана образца А, 7 – экран образца В, 8 – датчик теплового потока образца В (ДТП<sub>В</sub>), 9 – теплоизолирующая пластина на образце В, 10 – элемент крепления экрана образца В,

Термопары типа Х-А с диаметром термоэлектродов  $\varnothing 0,05$  мм (кроме специально оговоренных случаев):

$T_{нэ}$  - термопара на нагревательном элементе,  
 $T_1$  - термопара на экране образца В;  
 $T_2$  - термопара с  $\varnothing 0,1$  мм на экране образца В;  
 $T_6$  - термопара на обратной поверхности ДТП<sub>В</sub>;  
 $T_7$  - термопара на обратной поверхности теплоизолирующей пластины на образце В;  
 $T_8$  - термопара на экране образца А;  
 $T_{10}$  - термопара на обратной поверхности ДТП<sub>А</sub>  
 $T_{11}$  - термопара на обратной поверхности теплоизолирующей пластины на образце А;

Рис. 3.4 Схема тепловых испытаний №4 без сепараторов

На каждом из перечисленных этапов, с целью оценки влияния темпа нагрева на процессы теплообмена, проводилось два испытания на режимах нагрева с темпом  $2^\circ\text{C}/\text{с}$  и  $15^\circ\text{C}/\text{с}$ .

Предложенная программа и схемы испытаний позволили: рассмотреть различные варианты взаимного расположения экранов и сепарирующего слоя, сократив при этом общее количество испытаний; использовать НЭ в качестве одного из радиационных экранов; значительно уменьшить погрешности, вносимые в испытание при переборке экспериментального модуля, связанной с заменой сепарирующего слоя, а также в условия испытаний; упростить процесс смены схем испытаний.

### **3.1.3. Тепловые испытания и анализ результатов**

В соответствии со схемами испытаний (см. рис. 3.1 – 3.4) экспериментальные образцы А и В устанавливались в экспериментальном модуле ЭМ-2В и закреплялись параллельно нагревательному элементу с зазором 5 мм с помощью специальных узлов подвеса. Нагревательный элемент имеет длину 100 мм и ширину 80 мм в зоне размещения образцов. Толщина НЭ – 0,18 мм.

После установки образца В с сепарирующим слоем, на верхней поверхности НЭ размещается сепарирующий слой и устанавливается образец А. Образцы А и В фиксируются в модуле помощью специальных прижимов.

На рисунке 3.5 изображен собранный экспериментальный модуль с образцами, который после подготовки устанавливается в вакуумной камере стенда ТВС-1М (рис. 3.6).

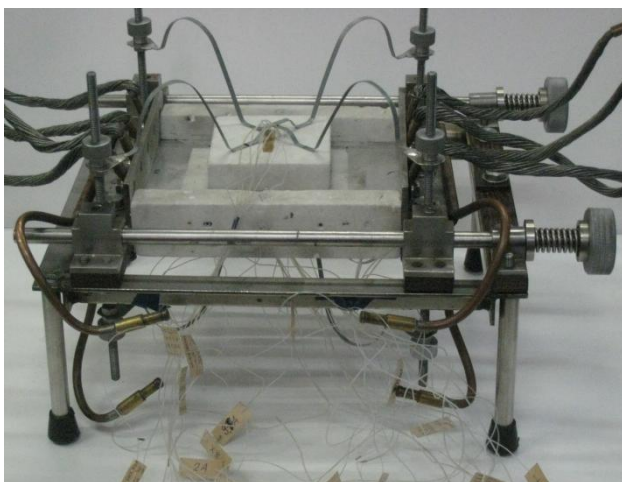


Рис. 3.5 Модуль ЭМ-2В с образцами, подготовленный для испытаний



Рис. 3.6 Модуль ЭМ-2В с образцами в вакуумной камере стенда ТВС-1М

Первый этап штатных тепловых испытаний включал:

- Предварительное вакуумирование камеры стенда с установленным модулем и экспериментальной сборкой образцов в течение шести часов.
- **Испытание №1** по схеме №1 на режиме нагрева с темпом  $15^{\circ}\text{C}/\text{с}$ . Результаты испытания после проведения соответствующей первичной обработки представлены на рис. 3.7.

Для удобства анализа результатов на иллюстрирующих их рисунках в обозначения графиков в скобках добавлены следующие сокращенные пояснения: эА – экран образца А; эВ – экран образца В; дА – датчик образца А; дВ – датчик образца В; плА – теплоизолирующая пластина образца А; плВ – теплоизолирующая пластина образца В.

- Выдержку ЭМ с образцами после испытания и охлаждения в условиях вакуума до следующего испытания.
- **Испытание №2** по схеме №1 на режиме нагрева с темпом  $2^{\circ}\text{C}/\text{с}$ . Результаты испытания после проведения соответствующей первичной обработки представлены на рис. 3.11.

Второй этап штатных тепловых испытаний включал:

- Удаление сепарирующего слоя с верхней поверхности НЭ без разборки экспериментального модуля.
- Предварительное вакуумирование камеры стенда с установленным модулем и экспериментальной сборкой образцов в течение шести часов.
- **Испытание №3** по схеме №2 на режиме нагрева с темпом 15°C/с. Результаты испытания после проведения соответствующей первичной обработки представлены на рис. 3.8.
- Выдержку ЭМ с образцами после испытания и охлаждения в условиях вакуума до следующего испытания.
- **Испытание №4** по схеме №2 на режиме нагрева с темпом 2°C/с. Результаты испытания после проведения соответствующей первичной обработки представлены на рис. 3.12.

Третий этап штатных тепловых испытаний включал:

- Удаление одного слоя холста из сепарирующего слоя на образце В с частичной разборкой и последующей сборкой экспериментального модуля.
- Предварительное вакуумирование камеры стенда с установленным модулем и экспериментальной сборкой образцов в течение шести часов.
- **Испытание №5** по схеме №3 на режиме нагрева с темпом 15°C/с. Результаты испытания после проведения соответствующей первичной обработки представлены на рис. 3.9.
- Выдержку ЭМ с образцами после испытания и охлаждения в условиях вакуума до следующего испытания.
- **Испытание №6** по схеме №3 на режиме нагрева с темпом 2°C/с. Результаты испытания после проведения соответствующей первичной обработки представлены на рис. 3.13.

Четвертый этап штатных тепловых испытаний включал:

- Удаление оставшегося слоя холста из сепарирующего слоя на образце В без разборки экспериментального модуля.
- Предварительное вакуумирование камеры стенда с установленным модулем и экспериментальной сборкой образцов в течение шести часов.
- **Испытание №7** по схеме №4 на режиме нагрева с темпом  $15^{\circ}\text{C}/\text{с}$ . Результаты испытания после проведения соответствующей первичной обработки представлены на рис. 3.10.
- Выдержку ЭМ с образцами после испытания и охлаждения в условиях вакуума до следующего испытания.
- **Испытание №8** по схеме №4 на режиме нагрева с темпом  $2^{\circ}\text{C}/\text{с}$ . Результаты испытания после проведения соответствующей первичной обработки представлены на рис. 3.14.

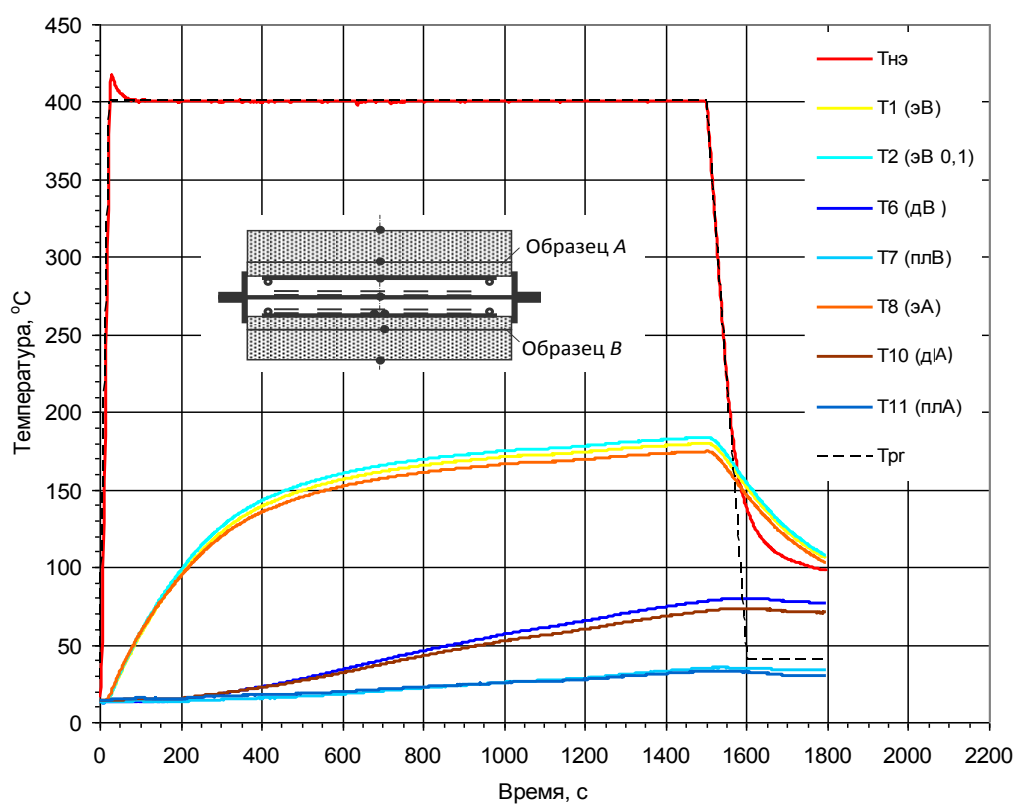


Рис. 3.7 Результаты испытания №1, (схема испытаний №1, темп  $15^{\circ}\text{C}/\text{с}$ , 2 слоя холста на НЭ и 2 слоя холста на экране образца В)

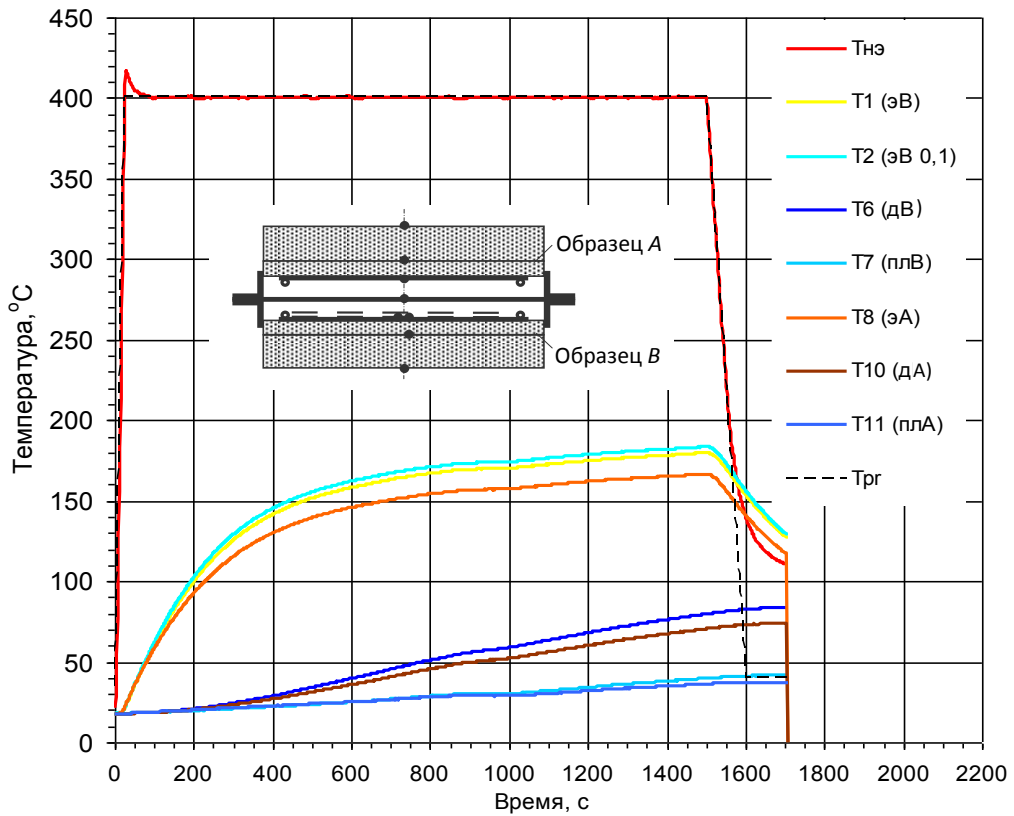


Рис. 3.8 Результаты испытания №3, (схема испытаний №2, темп 15°C/с, 2 слоя холста на экране образца В)

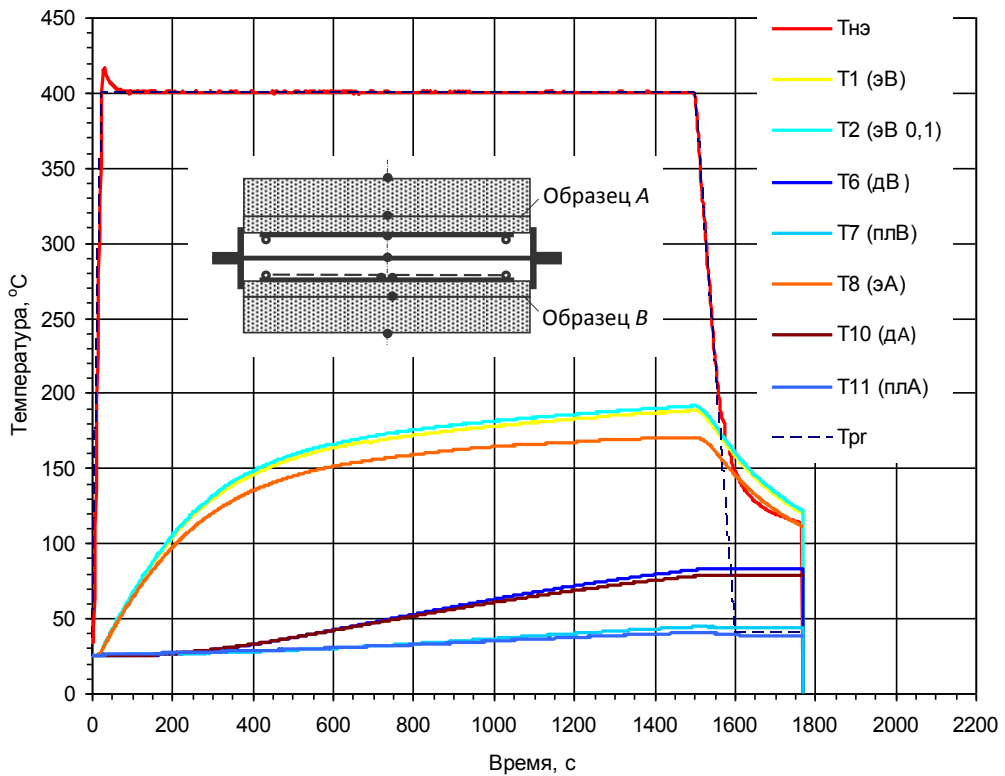


Рис. 3.9 Результаты испытания №5, (схема испытаний №3, темп 15°C/с, 1 слой холста на экране образца В)



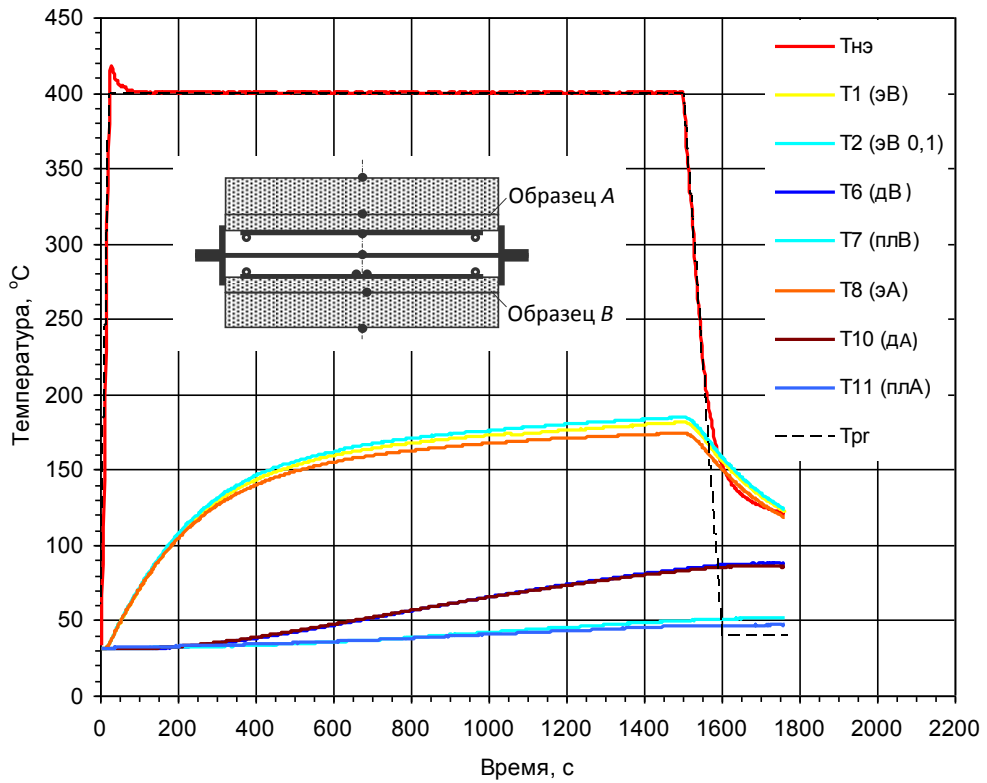


Рис. 3.10 Результаты испытания №7, (схема испытаний №4, темп 15°C/с, без холста)

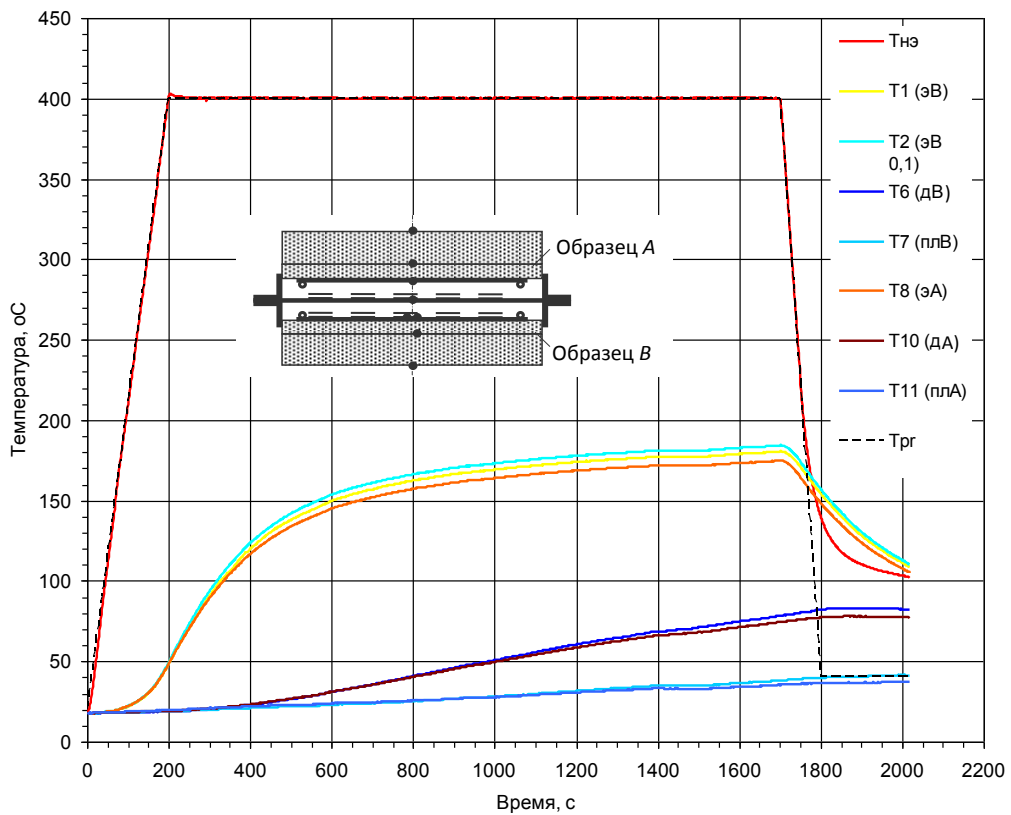


Рис. 3.11 Результаты испытания №2, (схема испытаний №1, темп 2°C/с, 2 слоя холста на НЭ и 2 слоя холста на экране образца В)

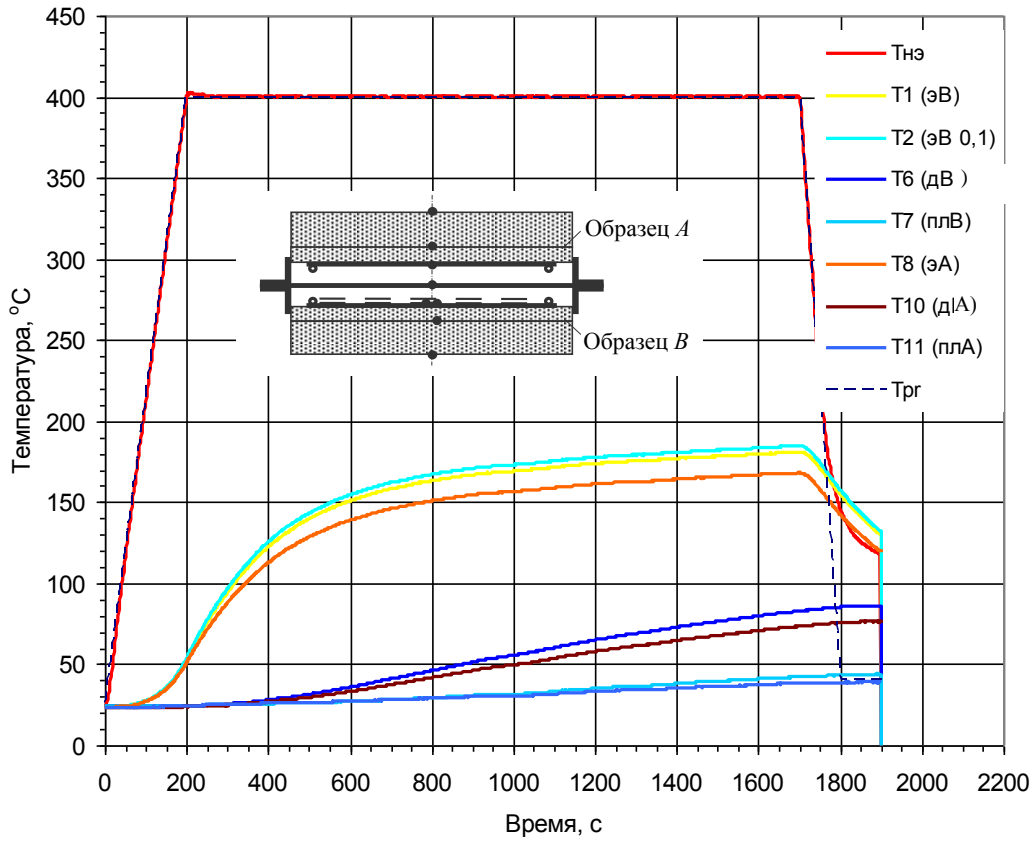


Рис. 3.12 Результаты испытания №4 (схема испытаний №2, темп 2°C/с, 2 слоя холста на экране образца В)

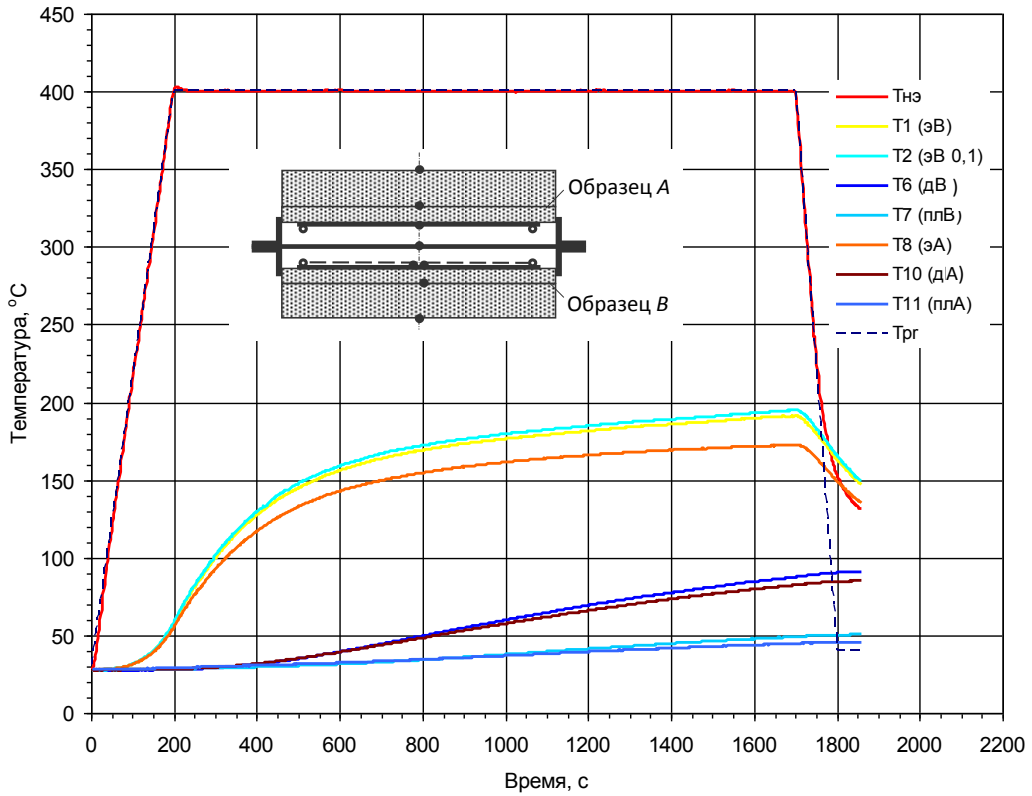


Рис. 3.13 Результаты испытания №6 (схема испытаний №3, темп 2°C/с, 1 слой холста на экране образца В)

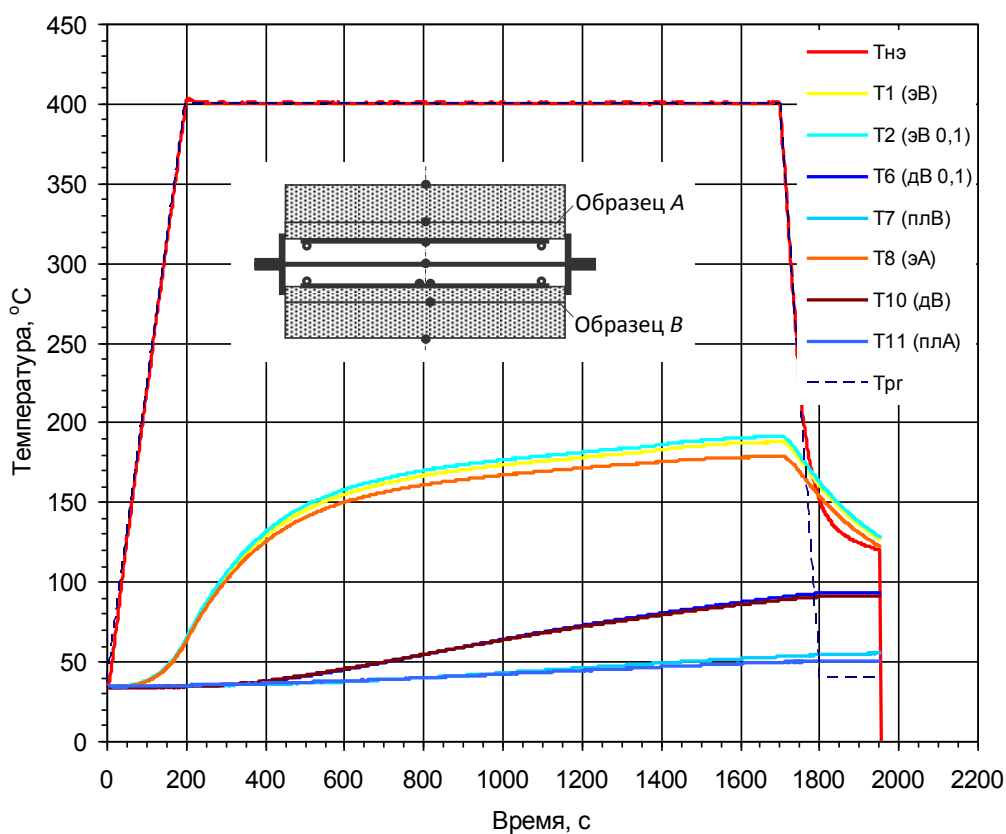


Рис. 3.14 Результаты испытания №8 (схема испытаний №4, темп 2°C/с, без холста)

Проведенные тепловые испытания образцов А и В моделирующих элементы ЭВТИ с радиационными экранами и сепарирующим слоем показали, что во всех испытаниях удалось достаточно хорошо реализовать заданные программы нагрева. Лучшие результаты получены на режиме нагрева с темпом 2°C/с. При нагреве с темпом 15°C/с на начальном участке нагрева и при переходе на полку с постоянной температурой наблюдается большее расхождение значений температур НЭ с программными значениями. Это связано с инерционностью работы системы управления нагревом и теплофизических характеристик материала НЭ в условиях радиационного нагрева. Характер изменения температуры НЭ на конечном участке испытаний связан с естественным охлаждением НЭ, закрепленного в массивной конструкции ЭМ, установленного на охлаждаемом столе камеры. Влияние рассмотренных темпов нагрева 15°C/с и 2°C/с на результаты испытаний заключается, в основном, в увеличении скорости нагрева образцов и уровня

максимальных температур, достигаемого за время испытаний. В связи с этим в дальнейших расчетах используются результаты, полученные на режиме нагрева с темпом  $2^{\circ}\text{C}/\text{с}$ .

Температуры «пассивных» экранов, на обратных поверхностях ДТП и теплоизолирующих пластин в образцах А и В на различных режимах нагрева при использовании симметричной схемы №4 (рис. 3.10 и 3.14) достаточно хорошо совпадают для образцов А и В, что свидетельствует о достаточно хорошей реализации симметричного нагрева. Тем не менее, во всех испытаниях, включая схему симметричного нагрева, соответствующие температуры в образце А были несколько ниже температуры «пассивного» экрана на образце В.

Во всех испытаниях показания термопар разной толщины установленных рядом на экране образца В различались примерно на  $3 \div 4^{\circ}\text{C}$ . При этом показания более толстой термопары  $\varnothing 0,1$  мм были выше чем показания термопары  $\varnothing 0,05$  мм. Характер изменения разности показаний термопар для различных схем испытаний и темпов нагрева практически совпадал. Поскольку, различия в показаниях термопар является достаточно малыми, все это может быть связано с погрешностями в схеме испытаний, в частности, различным контактным сопротивлением между тонким экраном и ДТП в местах установки термопар. В дальнейших расчетах используются показания термопары  $\varnothing 0,05$  мм.

На рис. 3.15 приведено сравнение температур на экранах и в ДТП образца А для различных схем испытаний при темпе нагрева  $2^{\circ}\text{C}/\text{с}$ , приведенных к одинаковым начальным условиям.

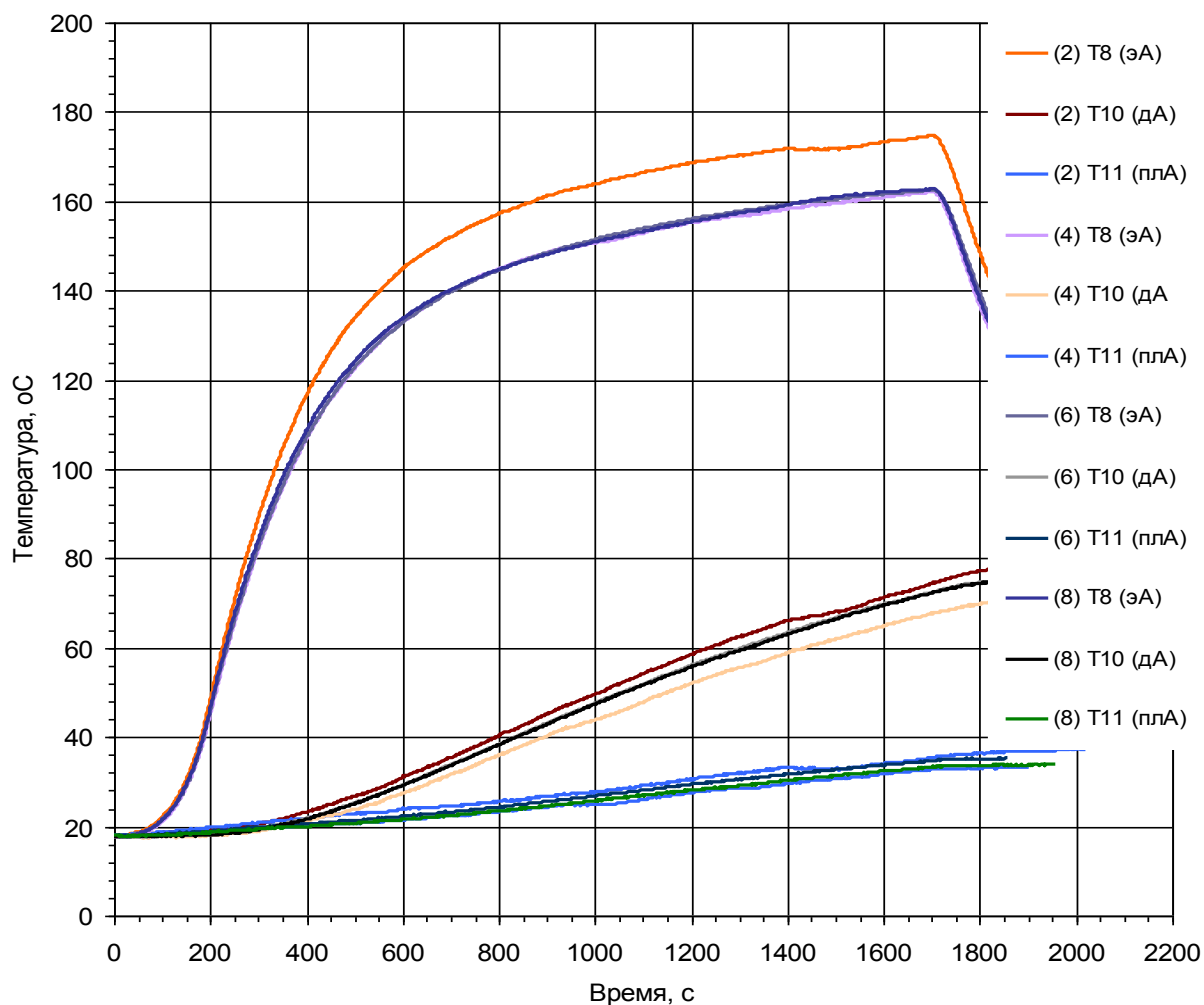


Рис. 3.15 Сравнение температур на экранах и в ДТП образца А для различных схем испытаний при темпе нагрева 2°C/с.

На рис. 3.16 приведено сравнение температур на экранах и в ДТП образца В для различных схем испытаний при темпе нагрева 2°C/с, приведенных к одинаковым начальным условиям.

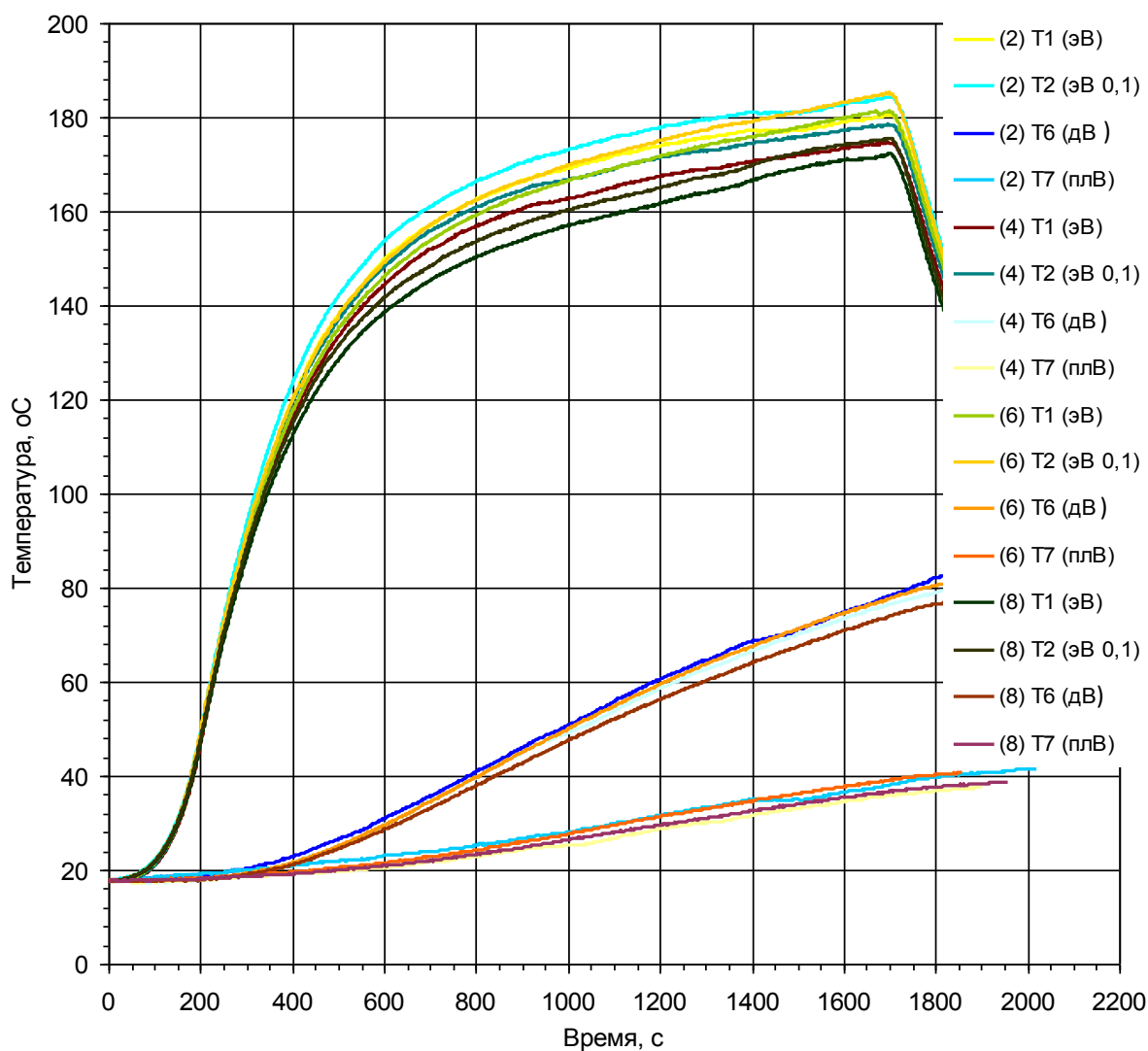


Рис. 3.16 Сравнение температур на экранах и в ДТП образца В для различных схем испытаний при темпе нагрева  $2^{\circ}\text{C}/\text{с}$ .

### 3.1.4. Результаты расчетов

Для оценки результатов экспериментального исследования образцов проводится сравнение расчетных значений плотностей тепловых потоков на границе пассивного экрана (экраны А и В). На рис. 3.17 приведена схема проведения такого расчета для экрана В. Расчет для экрана А производится аналогично.

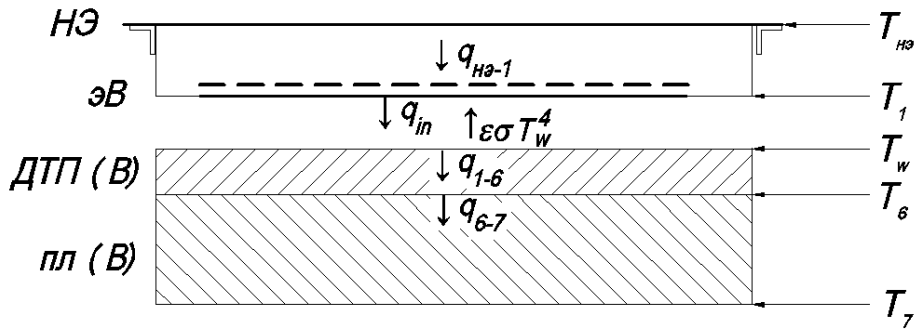


Рис. 3.17 Схема расчетов плотностей тепловых потоков.

На данной схеме  $q_{HЭ-1}$  – поток теплового излучения между двумя экранами ЭВТИ, вычисленный по предлагаемой методике и учитывающий наличие разделительного слоя между экранами. А  $q_{in}$  – поток теплового излучения на границе экрана В, идущий внутрь конструкции, а именно в ДТП.  $q_{in}$  вычисляется из уравнения баланса потоков теплового излучения на внешней границе ДТП, имеющей температуру  $T_w$ .

$$q_{in} = \frac{q_{1-6}}{\varepsilon} + \sigma T_w^4 \quad (3.1)$$

Для вычисления  $q_{1-6}$  сначала на основании температур  $T_6$  и  $T_7$  вычисляется плотность теплового потока  $q_{6-7}$  на границе датчика теплового потока и теплоизолирующей пластины с помощью решения граничной обратной задачи теплообмена [54, 55]. А затем на основании полученного теплового потока  $q_{6-7}$  и экспериментальных значений температуры  $T_6$  с помощью решения граничной ОЗТ определяется тепловой поток  $q_{1-6}$  и температура  $T_w$ .

На рис. 3.18 приведено сравнение расчетных значений плотностей теплового потока для экрана А для различных схем измерений. Здесь сплошной линией изображен тепловой поток между экранами ЭВТИ ( $q_{HЭ-1}$ ), а штриховой линией – тепловой поток, идущий из ЭВТИ внутрь конструкции ( $q_{in}$ ).

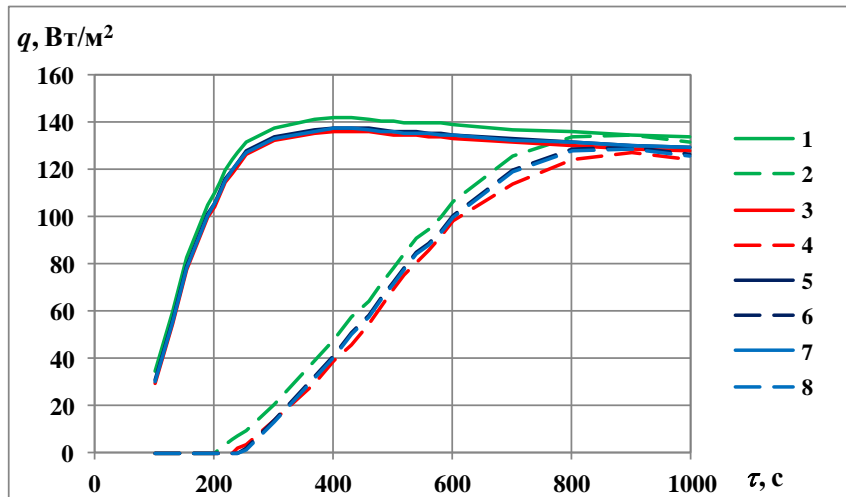


Рис. 3.18 – Сравнение плотностей теплового потока для различных схем испытаний для экрана А: кривые 1,2 – схема 1, кривые 3,4 – схема 2, кривые 5,6 – схема 3, кривые 7,8 – схема 4.

На рис. 3.19 приведены результаты аналогичного расчета для экрана В.

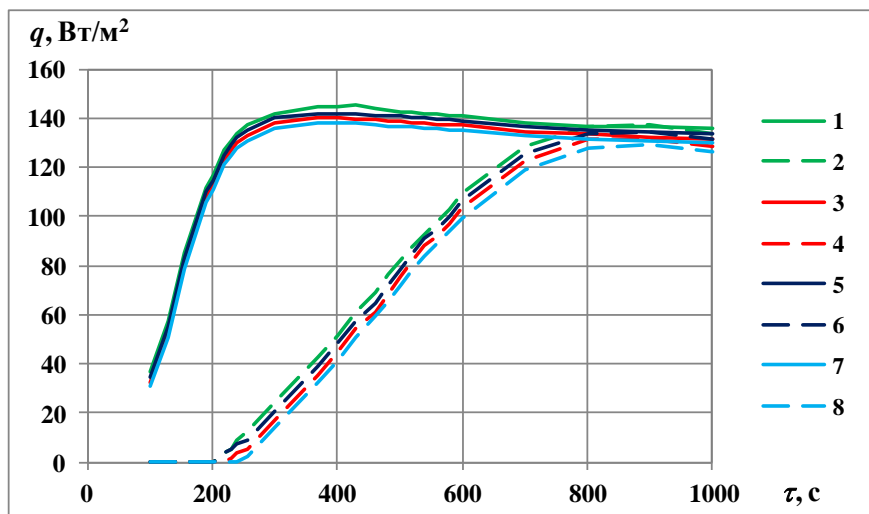


Рис. 3.19 Сравнение плотностей теплового потока для различных схем испытаний для экрана В: кривые 1,2 – схема 1, кривые 3,4 – схема 2, кривые 5,6 – схема 3, кривые 7,8 – схема 4.

Из приведенных графиков видно, что плотности тепловых потоков для экранов А и В для различных схем измерений достаточно хорошо совпадают в условиях установившегося режима теплообмена. Данные результаты свидетельствуют о достоверности предложенной модели по определению теплового воздействия через слой ЭВТИ.



### **3.2. Экспериментальное исследование многослойного теплоизоляционного покрытия**

Первоначальной целью исследования, проведенного в МАИ на кафедре 601 экспериментальной группой Тепловой лаборатории под руководством С.А. Будника в рамках работы по проекту МНТЦ № 804.2, являлось определение теплофизических свойств многослойного теплоизоляционного покрытия ЕТП-МLI-TCS, представляющего собой экрано-вакуумную теплоизоляцию, в температурном диапазоне 20-450 °С, а также исследование прогрева образцов покрытия в условиях стендовых тепловых испытаний на заданных режимах нагрева. В настоящей работе полученные ранее экспериментальные данные использовались для сравнения результатов математического моделирования на основе модифицированной математической модели (раздел 2.1) с имеющимися экспериментальными данными.

Образцы покрытия для исследований предоставлены ASTRIUM GmbH по согласованию с ESTEC/ESA. Тепловые испытания образцов покрытия проводились на тепловакуумном стенде ТВС-1М в МАИ с использованием специально разработанного и изготовленного экспериментального модуля ЭМ-2В.

#### **3.2.1 Методика и результаты проведения тепловых испытаний**

Рассмотрим физическую модель процесса теплообмена в образце, установленном в экспериментальном модуле ЭМ-2. Образец покрытия представляет собой многослойную пластину в форме прямоугольного параллелепипеда с размерами 150 x 150 x 5 мм. Такое соотношение размеров образца, а также использование схемы симметричного нагрева двух одинаковых образцов и соответствующей методики проведения испытаний обеспечивают в образце поле температуры, близкое к одномерному. В начальный момент времени в образце реализуется равномерное распределение

температуры. Схема многослойного теплоизоляционного покрытия MLI ETTI-MLI-TCS представлена на рис. 3.20. Данные об известных свойствах материалов, составляющих покрытие MLI ETTI-MLI-TCS и предоставленные специалистами ESTEC/ESA, приведены в таблице 3.3.

Таблица 3.3. Свойства материалов теплоизоляционного покрытия MLI ETTI-MLI-TCS.

Материал	Керамическая ткань	Алюминиевая фольга	Алюминизированный полимер типа Upilex	Алюминизированный полиамидный полимер	Разделительная стеклоткань (стекловуаль)
Число слоев материала в покрытии	1	6	14	1	20
Излучательная способность, $\varepsilon$	0.81	0.1	0.06	0.06	-
Толщина слоя материала, мкм	250	7.5	7.5	50	25.4
Плотность 1-го слоя материала, г/м <sup>2</sup>	258	20.25	11.03	73.50	5.66
Удельная теплоемкость, Дж/(г* К)	1.046	0.9	1.13	1.13	0.79
Теплоемкость 1-го слоя материала, Дж/(м <sup>2</sup> К)	270	18.2	12.5	83.1	4.5

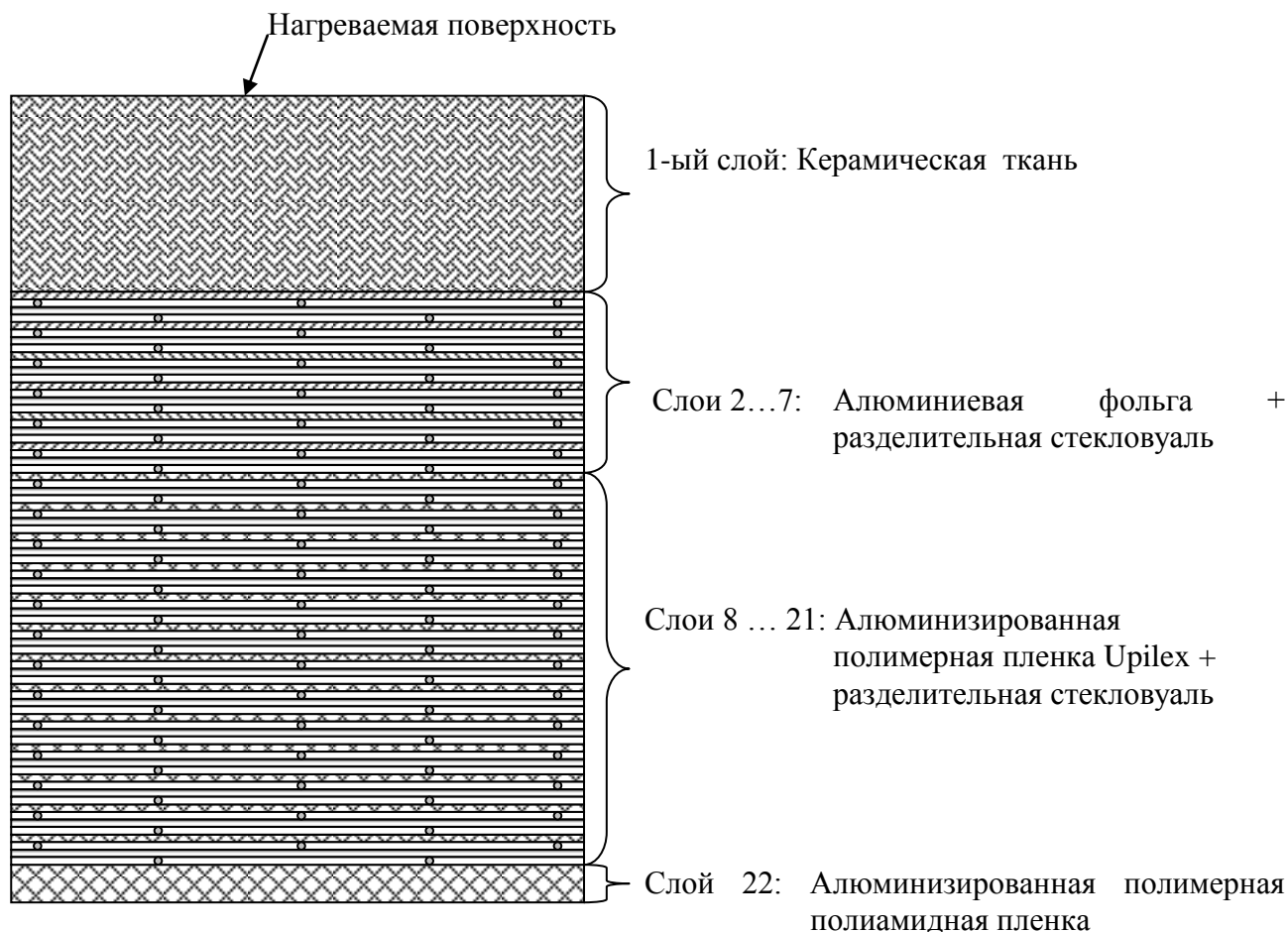


Рис. 3.20 Схема многослойного теплоизоляционного покрытия MLI ETPI-MLI-TCS.

Условия и режим нагрева образцов при проведении тепловых испытаний:

- нагрев образцов проводится в вакууме при давлении менее чем  $10^{-7}$  бар.

Предварительное вакуумирование образцов перед испытанием проводится в течение 48 часов при указанном давлении;

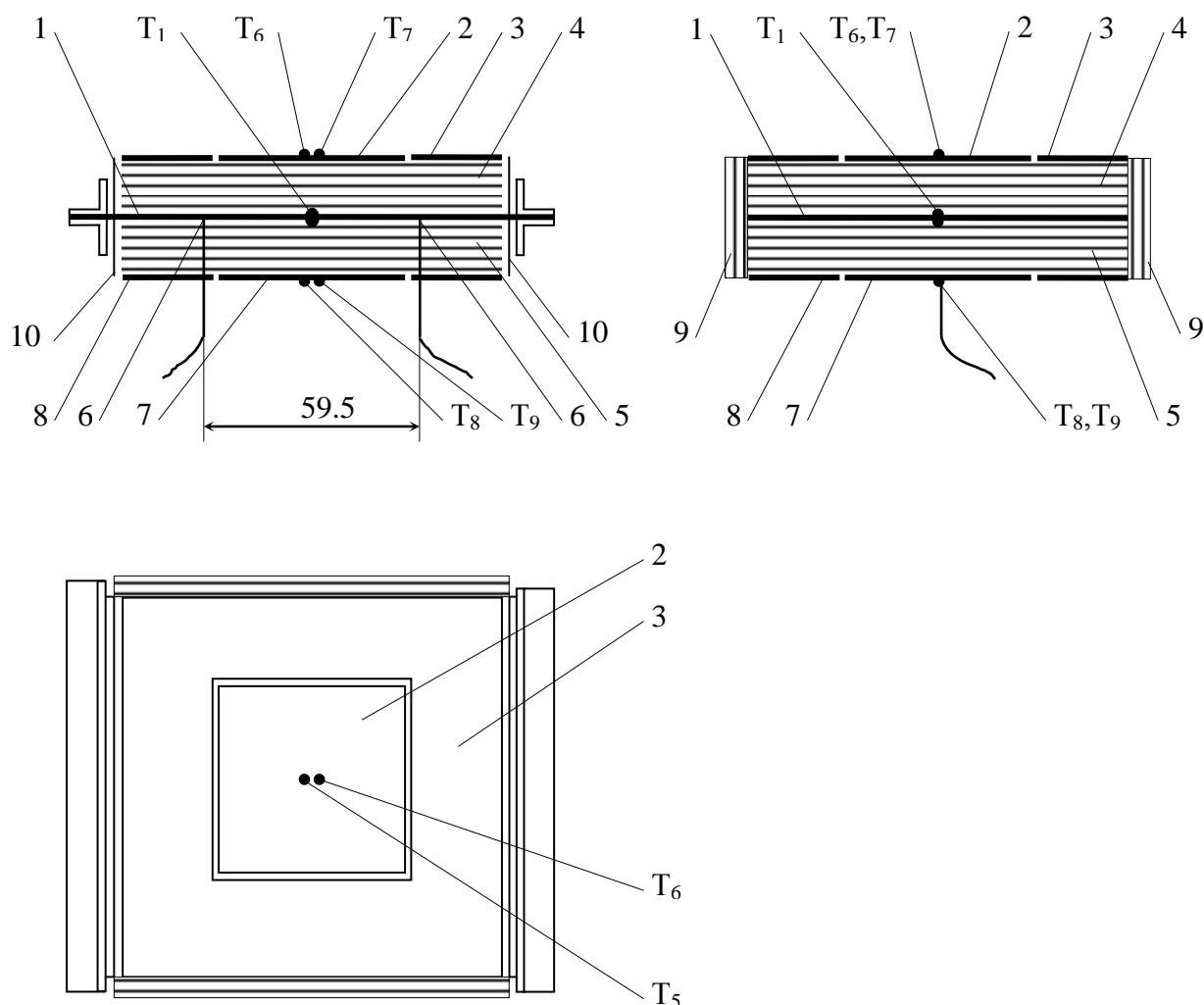
- начальная температура образцов  $T_0 = 293\text{K}$ ;

- характер изменения температуры нагреваемой поверхности  $T_I(\tau)$ ,  $0 \leq \tau \leq \tau_n$  – трапециевидный. Первый участок – нагрев по линейному закону изменения температуры с темпом 3 К/с от температуры  $T_0$  до  $T_{max}$ . Второй участок – с постоянной температурой  $T_w(\tau) = T_{max} = const$ , в течение 72000 с (20 часов). Третий участок - охлаждение по линейному

закону изменения температуры с темпом 3 К/с от  $T_{max}$  до  $T_0$ . Максимальная температура нагреваемой поверхности образца на втором участке –  $T_{max} = 570 \text{ K}$ .

Следует отметить, что в условиях тепловых испытаний на стенде ТВС-1М реализовать режим охлаждения образцов по предложенному закону технически невозможно. Возможным вариантом является выключение нагрева в конце участка с постоянной температурой и последующее естественное охлаждение нагреваемой поверхности образца в условиях работы систем охлаждения экспериментального модуля и вакуумной камеры.

Схема температурных измерений с установкой датчиков только на нагреваемой и внутренней поверхностях образца представлена на рис. 3.21. В качестве датчиков температуры используются термопары хромель-алюмель с электродами диаметром 0,1 мм, сваренными методом «встык». Термопара  $T_1$  установлена в центре нагревательного элемента. Показания этой термопары принимаются равными температуре нагреваемых поверхностей образцов  $2c / 2d$ . Две термопары  $T_6$  и  $T_7$  установлены в центре тонкого медного калориметра, размещенного на внутренней стороне образца  $2c$  ( $T_7$  – резервная термопара) и аналогично термопары  $T_8$  и  $T_9$  установлены в центре тонкого медного калориметра, размещенного на внутренней стороне образца  $2d$  ( $T_9$  – резервная термопара).



1. – нагревательный элемент модуля ЭМ-2В, 2– калориметр на образце 2с, 3. – маска на образце 2с, 4. – образец 2с, 5. – образец 2d, 6. – точки измерения напряжения на нагревательном элементе, 7. – калориметр на образце 2d, 8. – маска на образце 2d, 9. – элементы теплоизолирующей оправки из ЭВТИ, 10. – элементы теплоизолирующего экрана,

T<sub>1</sub> – термопара на нагревательном элементе, T<sub>6</sub>, T<sub>7</sub> – термопары на внутренней поверхности образца 2с, T<sub>8</sub>, T<sub>9</sub> – термопары на внутренней поверхности образца 2d.

Рис. 3.21 Схема образцов 2с, 2d материала *ETTI-MLI-TCS*

Схема температурных измерений, выбранная с учетом решаемой задачи анализа данных, свойств исследуемого материала и положений методики проведения тепловых испытаний на стенде ТВС-1М, приведена в таблице 3.4. Координаты точек измерения  $X_m$ ,  $m = 1, 2$ , отсчитываются от нагреваемой поверхности образца (см. рис. 3.21).

Таблица 3.4. Схемы температурных измерений в образцах покрытия *MLI ETPI-MLI-TCS*

Образец	$X_1$ , мм	$X_2$ , мм	Примечание
	Термопары	Термопары	
2c	0,0	5,0	Термопара $T_7$ резервная
	$T_1$	$T_6, T_7$	
2d	0,0	5,0	Термопара $T_9$ резервная
	$T_1$	$T_8, T_9$	

Испытание пары образцов *2c*, *2d* проводилось по следующей программе режима нагрева:

- первый участок (технологический - для выхода нагревательного элемента на режим):  $0 \div 50$  с при температуре  $25\text{ }^\circ\text{C}$ ;
- второй участок: нагрев по линейному закону с темпом  $3\text{ }^\circ\text{C}/\text{с}$  от  $T_0 = 25\text{ }^\circ\text{C}$  до  $T_{max} = 297\text{ }^\circ\text{C}$ ;
- третий участок: с постоянной температурой  $T = 297\text{ }^\circ\text{C}$  в течение  $72000$  с (20 часов);
- четвертый участок: естественное охлаждение от  $T = 297\text{ }^\circ\text{C}$  в течение  $1859$  с.

Давление в вакуумной камере в процессе испытаний было в диапазоне от  $0.32 \times 10^{-7}$  бар до  $0.11 \times 10^{-7}$  бар. При этом давление постепенно уменьшалось.

Результаты испытания образцов *2c* и *2d* покрытия *ETPI-MLI-TCS* в виде графиков зависимостей температуры от времени  $T_m(\tau)$ ,  $0 \leq \tau \leq 74000$ с (20.56 ч) представлены на рис. 3.22. Температура  $T_3$  – это заданная температура внешней поверхности образца. На графике представлены только начальный этап (нагрев)

и конечный этап (охлаждение), т.к. все температуры между этими двумя этапами являются практически постоянными. Поскольку, показания основных термопар  $T_6$  и  $T_8$ , расположенных на внутренних поверхностях образцов, практически полностью совпадали с показаниями соответствующих резервных термопар  $T_7$  и  $T_9$ , на графиках приведены показания только основных термопар  $T_6$  и  $T_8$ .

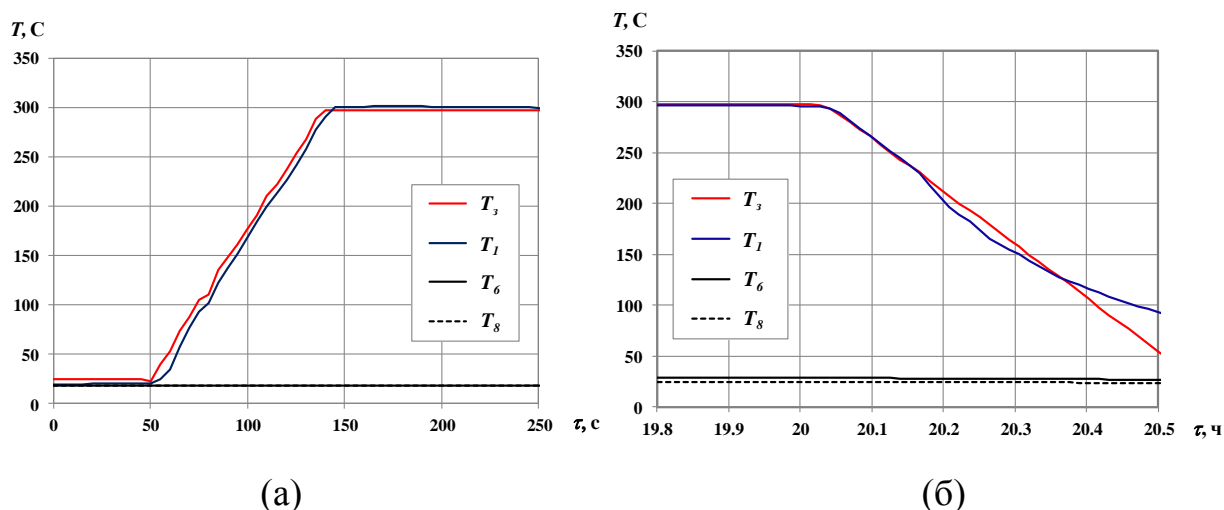


Рис. 3.22 Результаты температурных измерений в образцах 2с и 2d на этапах (а) начального нагрева и (б) финального охлаждения.

Результаты температурных измерений на внутренних поверхностях образцов в увеличенном масштабе приведены на рис. 3.23. Как видно из графика, квазистационарный режим достигается примерно через два часа после начала нагрева. Разница примерно в 4С в температуре внутренних поверхностей образцов 2с и 2d объясняется главным образом влиянием защитного экрана масляного насоса (ниже экспериментального модуля).

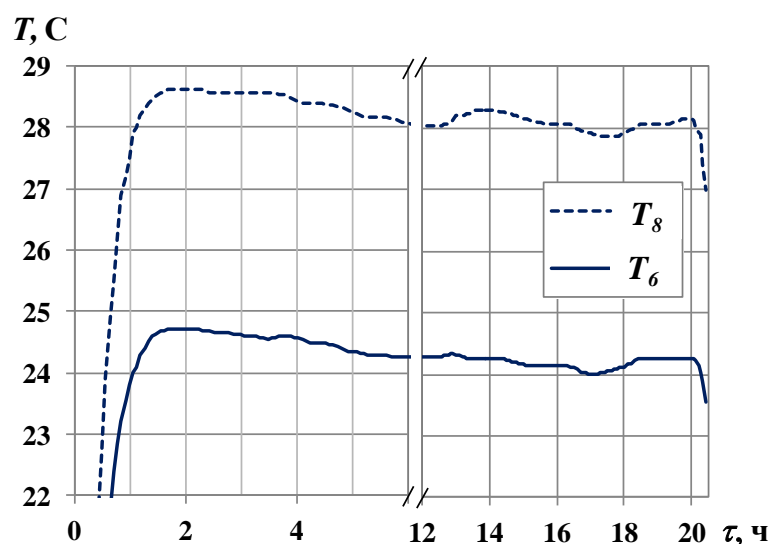


Рис. 3.23 Результаты температурных измерений на внутренней поверхности образцов 2с и 2d

### 3.2.2 Результаты моделирования

На основании метода, представленного в разделе 2.1, разработана математическая модель, описывающая переходное состояние для физической модели, предложенной в эксперименте. Полученная система уравнений учитывает набор из  $L = 21$  изотермических непрозрачных экранов с одним дополнительным слоем, соответствующим медной пластине, расположенной на внутренней стороне образца покрытия. Волокнистые разделительные слои, расположенные между слоями покрытия, не рассматриваются как отдельные элементы ЭВТИ, но их влияние на радиационный теплоперенос учитывается, как это представлено в разделе 2.1. Тепловое излучение от слоя керамической ткани рассматривается в качестве внешнего теплового потока. Также присутствует радиационный теплоперенос между медной пластиной и стальной стенкой камеры. Данная стенка охлаждается водой для предотвращения ее нагрева в ходе эксперимента. Результирующая математическая модель выглядит следующим образом:



$$c_1 \rho_1 \delta_1 \frac{dT_1}{d\tau} = \varepsilon_{a,1}^{eff} \sigma (T_a^4 - T_1^4) - \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} q_{1,2,\lambda} d\lambda, \quad T_1(0) = T_{10}, \quad T_a = T_a(\tau) \quad (3.2a)$$

$$c_l \rho_l \delta_l \frac{dT_l}{d\tau} = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} (q_{l-1,l,\lambda} - q_{l,l+1,\lambda}) d\lambda, \quad T_l(0) = T_{l0}, \quad l = 2, \dots, 20 \quad (3.2b)$$

$$c_L \rho_L \delta_L \frac{dT_L}{d\tau} = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} q_{L-1,L,\lambda} d\lambda + \varepsilon_{L,c}^{eff} \sigma (T_c^4 - T_L^4), \quad T_L(0) = T_{L0} \quad (3.2c)$$

$$c_c \rho_c \delta_c \frac{dT_c}{d\tau} = \varepsilon_{L,c}^{eff} \sigma (T_L^4 - T_c^4) + \varepsilon_{s,c}^{eff} \sigma (T_s^4 - T_c^4), \quad T_c(0) = T_{c0} \quad T_s = T_s(\tau) \quad (3.2d)$$

$$\tau \in (\tau_{\min}, \tau_{\max}]$$

где  $\varepsilon_{L,c}^{eff} = \frac{\varepsilon_L \varepsilon_c}{\varepsilon_L + \varepsilon_c - \varepsilon_L \varepsilon_c}$   $\varepsilon_{c,s}^{eff} = \frac{\varepsilon_c \varepsilon_s}{\varepsilon_c + \varepsilon_s - \varepsilon_c \varepsilon_s}$  – приведенная излучательная

способность системы соседних слоев. Индекс “a” обозначает нагреваемую керамическую ткань, индексы “l” and “L” обозначают экраны ЭВТИ ( $l = 1, \dots, 6$  – алюминиевая фольга,  $l = 7, \dots, 20$  – алюминизированный полимер Upilex и  $L$  – алюминизированный полиамидный полимер), индексы “c” и “s” обозначают медную пластину и стальную стенку камеры соответственно.

Спектральный поток излучения через слой ЭВТИ, состоящий из двух экранов с расположенным между ними разделителем, изготовленной из полупрозрачного высокопористого материала, выглядит следующим образом:

$$q_{l,l+1,\lambda} = \frac{f_{l,\lambda} - f_{l+1,\lambda}}{\frac{1}{\varepsilon_{l,\lambda}} + \frac{1}{\varepsilon_{l+1,\lambda}} + \frac{2}{1 + T_\lambda - R_\lambda} - 2} \quad (3.3)$$

где  $f_\lambda = \pi B_\lambda(T)$  – спектральный поток излучения абсолютно черного тела с

температурой  $T$ ,  $B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$  – функция Планка,  $R_\lambda$  и  $T_\lambda$  – спектральные

полусферические отражательная и пропускательная способности разделителя.

Результаты вычисления в условиях экспериментального нагрева и охлаждения представлены на рис. 3.24. Излучательные способности окисленной поверхности медной пластины и стальной поверхности были

приняты  $\varepsilon = 0.6$  и  $\varepsilon = 0.45$  соответственно. В качестве параметров волокнистых разделителей приняты: радиус волокна  $a = 3$  мкм и поверхностная пористость слоя волокон  $p = 0.8$ . При интегрировании учитывался спектральный диапазон  $\lambda \in [1, 20]$  мкм, так как именно на эту область приходится основной вклад в величину интегрального потока теплового излучения.

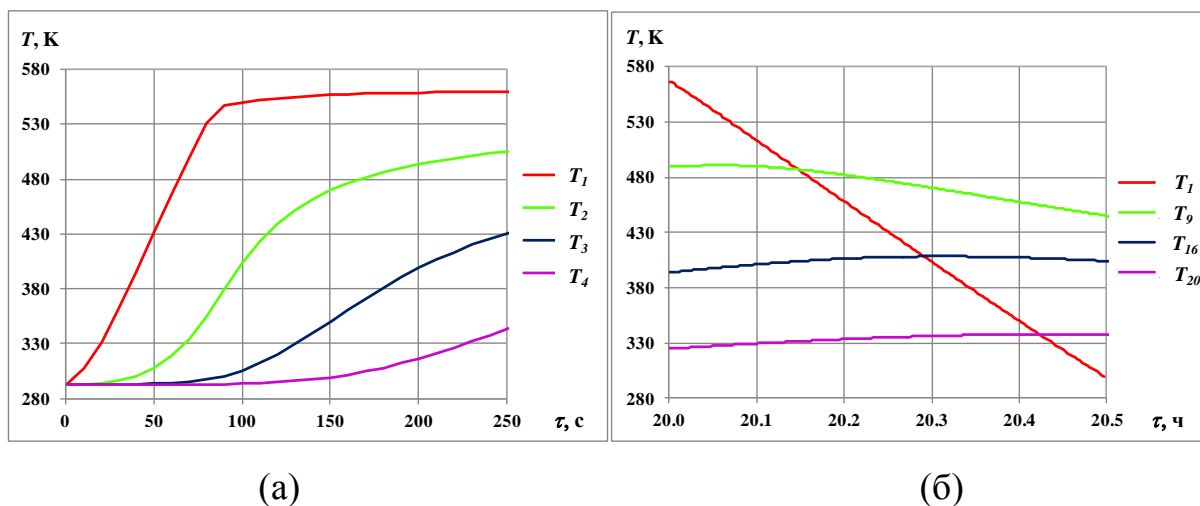


Рис. 3.24 Результаты вычислений температуры слоев ЭВТИ на этапах (а) начального нагрева и (б) финального охлаждения.

Как видно из рис. 3.24, температура глубоких слоев, расположенных далеко от нагреваемой поверхности, невысокая и обладает слабой чувствительностью к изменениям температуры нагреваемого слоя. Более того, температура слоев с номерами около 16 и более продолжает расти в течение получаса после начала охлаждения нагревателя. Это говорит о большой тепловой инертности ЭВТИ и подтверждает тот факт, что возможные резкие изменения внешнего потока излучения в случае специфических условий полета не опасны для космического аппарата, защищенного данным видом теплоизоляции.

Сравнение расчетной и измеренной температур внутренней поверхности ЭВТИ представлено на рис. 3.25. Здесь  $T_{calc}$  – расчетная температура последнего слоя ЭВТИ. Как видно из графика, теоретический прогноз, как для уровня температуры, так и для режимов нагрева и охлаждения, довольно точен. Это

означает, что эффект резкого увеличения радиационного потока между плотно расположенными слоями не наблюдается в условиях лабораторной вакуумной установки.

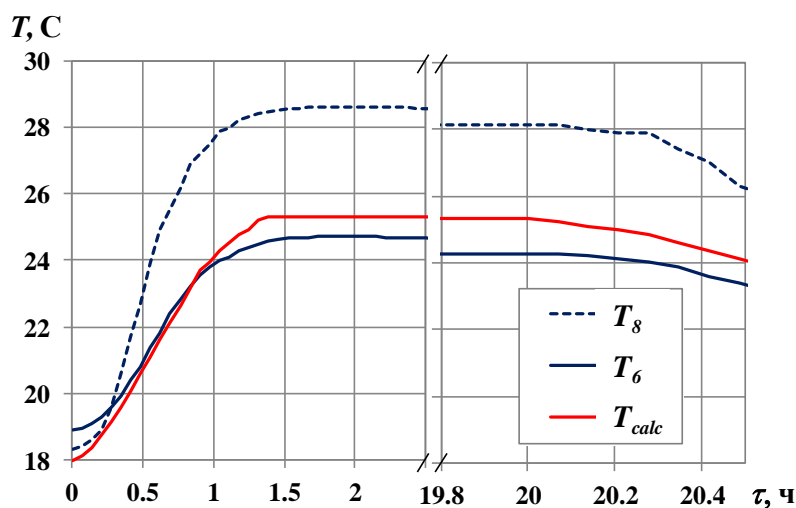


Рис. 3.25 Сравнение расчетной и измеренной температур внутренней поверхности ЭВТИ.

Приведенное сравнение позволит использовать разработанную математическую модель для анализа тепловых свойств ЭВТИ в широком диапазоне. В частности, интересно рассмотреть влияние значительного изменения внешнего потока излучения. Последнее можно смоделировать посредством изменения температуры нагревателя. Результаты таких вычислений представлены на рис. 3.26 и 3.27. Температурная зависимость слоев ЭВТИ, приведенная на рис. 3.26, соответствует температуре нагревателя, увеличенной на 50%. И результаты, представленные на рис. 3.27, соответствуют температуре нагревателя, которая на 20% меньше, чем температура нагревателя в эксперименте.

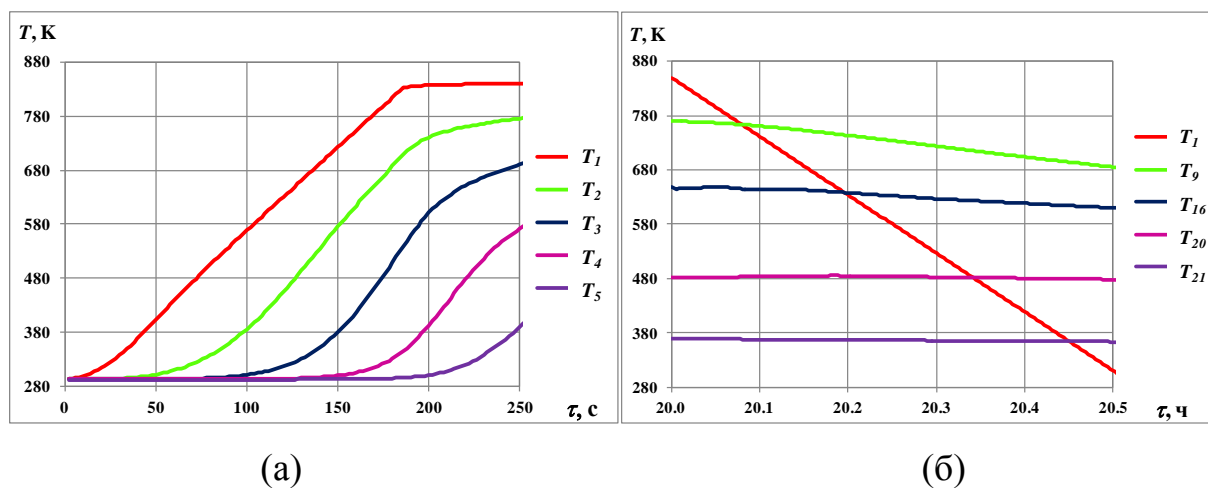


Рис. 3.26 Расчет температуры слоев ЭВТИ при температуре нагревателя, увеличенной на 50%: (а) начальный нагрев и (б) финальное охлаждение.

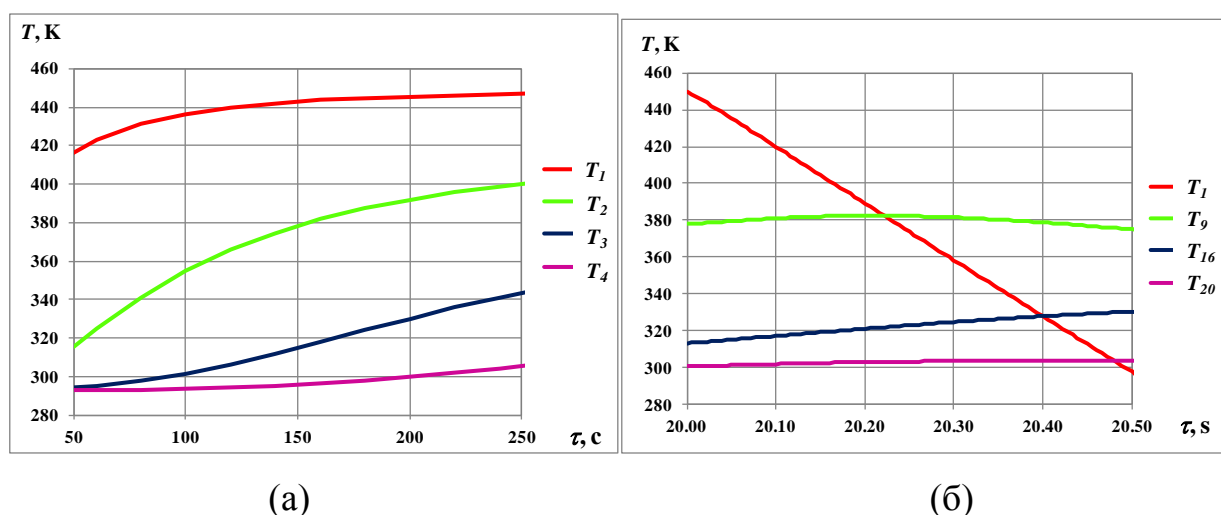


Рис. 3.27 Расчет температуры слоев ЭВТИ при температуре нагревателя, уменьшенной на 20%: (а) начальный нагрев и (б) финальное охлаждение.

Как и следовало ожидать, температура слоев ЭВТИ, близких к нагревателю, очень чувствительна к температуре нагревателя, и задержка по времени в изменении таких температур незначительна. Но это справедливо только для первых трех слоев тепловой изоляции. Интересно, что уменьшение температуры внутренних слоев в течение периода охлаждения наблюдается только в случае высокой стационарной величины температуры нагревателя, что видно из сравнения рис. 3.26б и 3.27б. Конечно, полученные результаты зависят также от тепловых условий на обратной стороне ЭВТИ. А значит,

вычисления в специфических тепловых условиях космических аппаратов должны проводиться в каждом конкретном случае.

### **Выводы по главе 3**

Методика по определению теплового потока через слой ЭВТИ, представленная в главе 2, апробирована в процессе моделирования процессов теплообмена образце ЭВТИ и последующего сравнения результатов моделирования с результатами тепловых испытаний образцов, имитирующих элементы ЭВТИ. Результаты сравнения расчетных значений плотностей тепловых потоков свидетельствуют о достоверности предложенной модели.

Проанализированы данные экспериментального исследования реального образца ЭВТИ. Составлена математическая модель теплообмена в ЭВТИ, учитывающая наличие разделительных слоев между экранами. Показано, что теоретический прогноз довольно точно соответствует результатам измерений температуры, что позволяет использовать разработанную математическую модель для анализа тепловых процессов в ЭВТИ.

## **Глава 4. Идентификация математической модели теплопереноса в ЭВТИ**

### **4.1. Итерационный алгоритм решения задачи идентификации математической модели теплообмена.**

В настоящее время для решения различных обратных задач теплообмена используется в практике тепловых исследований большое количество методов и алгоритмов. Они достаточно подробно описаны в большом количестве монографий и статей [54-58].

Характерной особенностью обратных задач теплообмена является некорректность исходной постановки, связанная с возможной неоднозначностью и неустойчивостью их решения, что требует разработки специальных математических методов и вычислительных алгоритмов, а также оптимального планирования и должной технической организации экспериментальных исследований [56].

Общим математическим методом решения некорректных и в том числе обратных задач является метод регуляризации А.Н.Тихонова. Этот метод основан на применении регуляризирующего оператора, использование которого позволяет получить устойчивое приближенное решение анализируемой задачи. Из принципов построения регуляризирующих алгоритмов наибольшее распространение получил вариационный принцип. Применяются также другие методы и приемы получения устойчивых решений, одним из которых является принцип, получивший название итерационной регуляризации. Этот метод является основой построения регуляризирующих алгоритмов в данной работе, т.к. он показал свою высокую эффективность в практике решения различных обратных задач теплообмена.

#### **4.1.1 Метод итерационной регуляризации и структура алгоритмов решения обратных задач**

В силу некорректности обратных задач для их решения необходимо использовать специальные регуляризирующие методы и алгоритмы, позволяющие получить устойчивые приближенные решения. Широкое многообразие возникающих на практике постановок обратных задач требует применения таких методов, которые могут быть использованы для решения различных типов обратных задач, включая линейные и нелинейные, с минимально необходимым объемом экспериментальных данных и в переопределенных постановках и другие [54, 55, 57, 58].

Рассмотрим кратко суть метода итерационной регуляризации [56]. С этой целью проанализируем некоторую абстрактную обратную задачу, записанную в операторной форме. Пусть математическая модель процесса нестационарного теплообмена при взаимодействии анализируемой системы (элемента конструкции) с окружающей средой имеет вид

$$L(\tau, \bar{T}, \bar{u})\bar{T}(\tau) = 0, \quad \tau \in (0, \tau_m], \quad (4.1)$$

$$\bar{T}(\tau_{\min}) = \bar{T}_0$$

Пусть вектор характеристик  $\bar{u}$  неизвестен, однако имеются данные измерений температуры в некотором числе  $M$  точек области  $(0, \tau_m]$ .

$$\bar{T}_{\text{эксн}}(\tau_m) = f_m, \quad m = \overline{1, M} \quad (4.2)$$

Обратная задача заключается в определении  $\bar{u}$  из условий (4.1) - (4.2).

Математическая модель (4.1) - (4.2) при заданных значениях вектора характеристик  $u$  позволяет вычислить температуры в точках установки термодатчиков. Другими словами, эта модель позволяет осуществить преобразование характеристик  $u$  в температуру в точках измерений. В результате измерений формируется векторная функция  $f = \{f_i(\tau)\}_1^N$ . Пусть элементы  $u$  и  $f$  принадлежат некоторым пространствам  $U$  и  $F$



соответственно. Тогда анализируемую обратную задачу можно представить в виде операторного уравнения первого рода:

$$Au = f, u \in U, f \in F, A: U \rightarrow F \quad (4.3)$$

где оператор  $A$  строится на основании модели исследуемого процесса (4.1) - (4.2), а правая часть формируется с использованием экспериментальных данных. Пространства  $U$  и  $F$  выбираются, исходя из особенностей рассматриваемой задачи. Они должны содержать достаточно широкие классы функций, и включать в себя все возможные решения  $u$  и любые правые части  $f$  с учетом искажений, вносимых измерительными приборами. Чаще всего в качестве  $U$  и  $F$  берется пространство  $L_2$  функций с интегрируемым квадратом.

Так как правая часть уравнения (4.3) формируется на основании результатов измерений, то элемент  $f$  всегда известен с некоторой погрешностью  $\delta = \|f - \bar{f}\|_F$ , где  $\bar{f}$  — точное значение этого элемента. Кроме того, при численном построении оператора  $A$  также возникают погрешности, связанные с использованием различных приближений, аппроксимирующих зависимостей и других операций, а также с погрешностями округления при проведении вычислений. В результате и оператор  $A$  известен неточно. Погрешность задания оператора  $A$  можно характеризовать величиной  $h = \|A - \bar{A}\|$ , где  $A$  — точный оператор. Таким образом, исходные данные при практическом решении обратной задачи заданы с погрешностью, которая может быть записана в виде точностного параметра  $\varepsilon(h, \delta)$ . Сформируем функционал невязки:

$$J(u) = \|Au - f\|_F \quad (4.4)$$

и рассмотрим задачу его минимизации относительно  $u$ . При решении конкретной обратной задачи в пространстве  $U$  искомым характеристикам, вообще говоря, необходимо выделить область допустимых решений  $D \subset U$ . Однако, во

многих практических задачах какая-либо конструктивная априорная информация об области  $D$  отсутствует. Поэтому обычно полагается, что  $D=U$ , т.е. полученное в результате минимизации (3.4) решение  $u$  удовлетворяет всем возможным ограничениям и, следовательно, можно использовать методы безусловной минимизации функционала  $J(u)$  с помощью какого-либо градиентного метода минимизации первого порядка, например, скорейшего спуска или сопряженных градиентов. Построим минимизирующий функционал (3.4) последовательность

$$u^{s+1} = u^s + \gamma_s G(J'_u{}^{(s)}), \quad s = 0, 1, \dots, s^* \quad (4.5)$$

где  $s$  – номер итерации;  $\gamma_s$  – глубина спуска, выбираемая из условия

$$\gamma_s = \operatorname{Arg} \min_{\gamma > 0} J(u^s + \gamma G(J'_u{}^{(s)})), \quad (4.6)$$

где  $J'_u{}^{(s)}$  – градиент функционала,  $G^s(J'_u{}^{(s)})$  – оператор, характеризующий используемый метод минимизации,  $u^0$  – задаваемое априорно начальное приближение,  $s^*$  – номер последней итерации, определяемый в процессе решения задачи из регуляризирующего условия останова, осуществляемого в соответствии с принципом обобщенной невязки:

$$s^* : J(u^{s^*}) \cong \varepsilon(h, \delta) \quad (4.7)$$

Оказывается, изложенный метод последовательных приближений порождает в соответствии с общим определением регуляризирующего оператора (семейства операторов) по А.Н. Тихонову, регуляризирующее семейство операторов, в котором параметром регуляризации является номер последней итерации  $s^*$  [56].

Для линейных некорректных задач (когда оператор  $A$  – линеен) метод итерационной регуляризации получил строгое математическое обоснование и практическое подтверждение данными математического моделирования. Применительно к нелинейным задачам какие-либо результаты по обоснованию

устойчивости итерационных алгоритмов в настоящее время отсутствует. Однако результаты проведенных обширных вычислительных экспериментов при решении обратных задач теплообмена различных типов подтверждают высокую эффективность метода итерационной регуляризации и для анализа широкого круга нелинейных задач.

При решении обратных задач преобразование  $A\bar{i}$  в уравнении (4.3) представляет собой функцию теплового состояния анализируемой системы (температуру, вычисленную в моменты времени, соответствующие измерениям термодатчиками). Для расчета этой величины необходимо решать исходную прямую задачу теплообмена при некоторых значениях искомого в обратной задаче характеристик. Если прямая задача линейна, то для её решения можно использовать известные аналитические и полуаналитические методы, позволяющие получить явные выражения для вычисления температуры. В некоторых случаях аналитические формулы можно получить и для нелинейных задач. Однако для подавляющего большинства возникающих на практике нелинейных задач теплообмена необходимо использовать численные методы решения, в частности, метод конечных разностей.

При практической реализации итерационных алгоритмов решения обратных задач часто бывает весьма затруднительно оценить погрешность задания оператора  $A$  в уравнении (4.3). Поскольку ошибки округления при проведении вычислений достаточно малы и, как правило, значительно меньше, чем погрешность измерений, то погрешности аппроксимации оператора  $A$  стремятся уменьшить за счет соответствующего выбора параметров вычислительного алгоритма. В частности, при использовании численных методов решения краевых задач предварительно проводятся вычислительные эксперименты, цель которых состоит в выборе таких параметров разностных сеток, что при их дальнейшем улучшении (например, увеличении числа шагов по пространству или времени) точность решения задачи практически не увеличивается. На основании результатов математического моделирования

делается вывод, что погрешность задания оператора  $A$  значительно меньше погрешностей измерений. В результате имеются основания считать, что оператор  $A$  известен почти точно и вместо соотношения (4.7) можно использовать условие невязки

$$s^* : J(u^{**}) \cong \delta \quad (4.8)$$

С точки зрения общей последовательности вычислительных операций итерационные алгоритмы решения обратных задач в основном строятся в соответствии с традиционной процедурой оптимизации на основе градиентных методов. Применительно к численному решению обратных задач эта процедура включает в себя следующие основные операции:

1. Задание начального приближения искомых характеристик.
2. Численное решение прямой задачи теплообмена при заданном приближении искомых характеристик.
3. Вычисление значения функционала невязки.
4. Проверка условия выхода из итерационного процесса (4.8) - если условие выхода выполнено, то осуществляется переход к п. 9, в противном случае - к п. 5.
5. Определение градиента функционала невязки.
6. Вычисление глубины спуска из условия (4.6).
7. Формирование нового приближения искомых характеристик, используя соотношение (4.5).
8. Проверка выхода из итерационного процесса по "слипанию" решения на двух соседних итерациях. Если условие выхода выполнено, то осуществляется переход к п. 9, в противном случае - к п. 2 и процесс последовательных приближений продолжается.

## 9. Процесс последовательных приближений закончен.

Необходимость введения пункта 8 продиктована следующими соображениями. В случае неадекватности принятой математической модели реальному процессу теплообмена заданный уровень невязки может никогда не достигаться в ходе итерационного процесса. Это обусловлено тем, что при расчете температур в точках установки термодатчиков в данном случае за счет неадекватности модели возникает систематическая погрешность относительно экспериментальных данных. Аналогичная ситуация может иметь место и при наличии в экспериментальной информации неучтенной на этапе подготовки исходных данных для решения обратной задачи систематической погрешности. Кроме того, неудачно выбранная аппроксимация искомых функциональных характеристик также может не позволить достичь требуемого уровня невязки.

В изложенной процедуре важнейшими операциями, реализация которых решающим образом влияет на вычислительную эффективность итерационных алгоритмов решения обратных задач, являются шаги 5 и 6, а также шаг 4. Важно отметить, что в целях сокращения общего количества вычислений весьма целесообразно дополнительно ввести в рассмотрение два типа краевых задач: сопряженной краевой задачи и краевой задачи для вариаций температур. Первая из них дает возможность получить аналитические выражения для градиента функционала невязки, а вторая - вычислить линейную оценку глубин спуска. Практика решения обратных задач теплообмена различных типов показала высокую эффективность такого подхода. В результате выполнение каждой из операций 5 и 6 состоит из двух составляющих:

5.1. Численное решение сопряженной краевой задачи.

5.2. Вычисление градиента функционала невязки.

6.1. Численное решение краевой задачи (или нескольких краевых задач) для вариаций температур.

## 6.2. Вычисление линейной оценки глубины спуска.

Следует подчеркнуть, что изложенная последовательность операций остается неизменной при решении обратных задач различных типов. Это позволяет разработать программные комплексы, большая часть которых является универсальной или проблемно-независимой в рамках некоторого класса рассматриваемых задач.

### 4.1.2. Сопряженная краевая задача и вычисление градиента функционала невязки

Важной составной частью итерационных алгоритмов решения обратных задач теплообмена является вычисление градиента функционала невязки. Эта операция в значительной части определяет общую эффективность вычислительных алгоритмов и расчетных методик. Наиболее экономичный метод определения градиента функционала невязки базируется на использовании теории экстремальных задач для систем с распределенными параметрами [56]. При этом рассматривается сопряженная краевая задача, с помощью которой могут быть получены аналитические формулы для градиента. Рассмотрим применение данного метода к обратным задачам по восстановлению зависящих от температуры характеристик теплообмена в элементе ЭВТИ. При этом будем учитывать наличие волокнистых разделителей между слоями ЭВТИ, как это предложено в главе 2. Тогда вектор теплового состояния системы должен удовлетворять следующей системе уравнений:

$$c_1(T_1)\rho_1\delta_1 \frac{dT_1}{d\tau} = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} (q_{a,1,\lambda}(T_a, T_1) - q_{1,2,\lambda}(T_1, T_2)) d\lambda,$$

$$\tau \in (\tau_{\min}, \tau_{\max}], T_a = T_a(\tau)$$

$$c_l(T_l)\rho_l\delta_l \frac{dT_l}{d\tau} = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} (q_{l-1,l,\lambda}(T_{l-1}, T_l) - q_{l,l+1,\lambda}(T_l, T_{l+1})) d\lambda, \quad (4.9)$$

$$\tau \in (\tau_{\min}, \tau_{\max}], l = \overline{2, L-1}$$

$$c_L(T_L)\rho_L\delta_L\frac{dT_L}{d\tau} = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} q_{L-1,L,\lambda}(T_{L-1},T_L)d\lambda + k_{in}(T_L,T_{in})(T_{in} - T_L),$$

$$\tau \in (\tau_{\min}, \tau_{\max}]$$

$$T_l(\tau_{\min}) = T_{l0}, \quad l = \overline{1, L}$$

$$\text{где } q_{l,l+1,\lambda}(T_l, T_{l+1}) = \frac{f_{l,\lambda}(T_l) - f_{l+1,\lambda}(T_{l+1})}{\frac{1}{\varepsilon_{l,\lambda}(T_l)} + \frac{1}{\varepsilon_{l+1,\lambda}(T_{l+1})} + \frac{2}{1 + T_\lambda - R_\lambda} - 2}$$

и где  $k_{in}$  - коэффициент теплопроводности между ЭВТИ и внутренней конструкцией.

В общем случае неизвестные характеристики могут находиться среди элементов векторов функций  $c_l$ ,  $l = \overline{1, L}$ ,  $\varepsilon_l$ ,  $l = \overline{1, L}$ ,  $\varepsilon_a$ ,  $k_{in}$ . Предположим, что среди них имеется несколько неизвестных характеристик  $u_i$ ,  $i = \overline{1, N_u}$ .

В качестве дополнительного условия, необходимого для решения задачи идентификации, используются экспериментально полученные зависимости температуры отдельных слоев системы от времени

$$T_m^{\text{exp}}(\tau) = f_m, \quad m = \overline{1, M} \quad (4.10)$$

Соотношения, определяющие сопряженную краевую задачу, можно получить различными способами. В данном разделе используется подход, основанный на применении неопределенных множителей Лагранжа. Данный способ является достаточно универсальным и применимым к широкому кругу экстремальных задач. Вид сопряженной задачи полностью определяется исходной моделью состояния и не зависит от набора искомым характеристик.

В качестве критерия оптимальности решаемой задачи рассмотрим функционал среднеквадратичного отклонения расчетных температур  $T_l(\tau)$  (полученных при некоторой оценке неизвестных функций  $u_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ ) от экспериментально измеренных значений:

$$J(\bar{u}) = \sum_{l=1}^L \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} (T_l(\tau) - f_l(\tau))^2 d\tau \quad (4.11)$$

Рассмотрим далее задачу его минимизации. Составим функционал Лагранжа для задачи условной минимизации (4.9), (4.11):

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} = & J + \int_0^{\tau_{\max}} \psi_1(\tau) \left[ -c_1 \rho_1 \delta_1 \frac{dT_1}{d\tau} + \right. \\ & + \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \left( \frac{(f_{a,\lambda} - f_{1,\lambda}) \varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda)}{\varepsilon_{1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{a,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} - 2\varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda)} - \right. \\ & + \left. \left. \frac{(f_{1,\lambda} - f_{2,\lambda}) \varepsilon_{1,\lambda} \varepsilon_{2,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda)}{\varepsilon_{2,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{1,\lambda} \varepsilon_{2,\lambda} - 2\varepsilon_{1,\lambda} \varepsilon_{2,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda)} \right) d\lambda \right] d\tau + \\ & + \sum_{l=2}^{L-1} \int_0^{\tau_{\max}} \psi_l(\tau) \left[ -c_l \rho_l \delta_l \frac{dT_l}{d\tau} + \right. \\ & + \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \left( \frac{(f_{l-1,\lambda} - f_{l,\lambda}) \varepsilon_{l-1,\lambda} \varepsilon_{l,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda)}{\varepsilon_{l,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{l-1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{l-1,\lambda} \varepsilon_{l,\lambda} - 2\varepsilon_{l-1,\lambda} \varepsilon_{l,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda)} - \right. \\ & + \left. \left. \frac{(f_{l,\lambda} - f_{l+1,\lambda}) \varepsilon_{l,\lambda} \varepsilon_{l+1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda)}{\varepsilon_{l+1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{l,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{l,\lambda} \varepsilon_{l+1,\lambda} - 2\varepsilon_{l,\lambda} \varepsilon_{l+1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda)} \right) d\lambda \right] d\tau + \\ & + \int_0^{\tau_{\max}} \psi_L(\tau) \left[ -c_L \rho_L \delta_L \frac{dT_L}{d\tau} + \right. \\ & + \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \left( \frac{(f_{L-1,\lambda} - f_{L,\lambda}) \varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda)}{\varepsilon_{L,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{L-1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} - 2\varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda)} \right) d\lambda + \\ & + k_{in} (T_{in} - T_L) \Big] d\tau + \sum_{l=1}^L \eta_l (T_l(\tau_{\min}) - T_{l0}) \end{aligned} \quad (4.12)$$

где  $\psi_l(\tau)$ ,  $l = \overline{1, L}$ ,  $\eta_l, l = \overline{1, L}$  – неопределенные множители Лагранжа.

Предположим, что все коэффициенты математической модели  $c_l, l = \overline{1, L}$ ,  $\varepsilon_l, l = \overline{1, L}$ ,  $\varepsilon_a, k_{in}$  получили некоторые вариации  $\Delta c_l, l = \overline{1, L}$ ,  $\Delta \varepsilon_l, l = \overline{1, L}$ ,  $\Delta \varepsilon_a, \Delta k_{in}$ .

Тогда температура  $T_l(\tau)$ , изменится на некоторую величину  $\vartheta_l(\tau)$ ,  $l = \overline{1, L}$ . Несложно показать, что вариация температуры  $\vartheta_l(\tau)$ , удовлетворяет следующей краевой задаче:









$$\begin{aligned}
& - \left[ \frac{(f_{l,\lambda} - f_{l+1,\lambda})\varepsilon_{l+1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)}{\varepsilon_{l+1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{l,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{l,\lambda}\varepsilon_{l+1,\lambda} - 2\varepsilon_{l,\lambda}\varepsilon_{l+1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)} \right. \\
& - \left. \frac{(f_{l,\lambda} - f_{l+1,\lambda})\varepsilon_{l,\lambda}\varepsilon_{l+1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)((1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{l+1,\lambda} - 2\varepsilon_{l+1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda))}{(\varepsilon_{l+1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{l,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{l,\lambda}\varepsilon_{l+1,\lambda} - 2\varepsilon_{l,\lambda}\varepsilon_{l+1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda))^2} \right] \Delta\varepsilon_l - \\
& \quad \frac{\varepsilon_{l,\lambda}\varepsilon_{l+1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) \frac{df_l}{dT_l} \mathcal{G}_l}{\varepsilon_{l+1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{l,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{l,\lambda}\varepsilon_{l+1,\lambda} - 2\varepsilon_{l,\lambda}\varepsilon_{l+1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)} \\
& - \left[ \frac{(f_{l,\lambda} - f_{l+1,\lambda})\varepsilon_{l+1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) \frac{d\varepsilon_l}{dT_l}}{\varepsilon_{l+1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{l,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{l,\lambda}\varepsilon_{l+1,\lambda} - 2\varepsilon_{l,\lambda}\varepsilon_{l+1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)} \right. \\
& - \left. \frac{(f_{l,\lambda} - f_{l+1,\lambda})\varepsilon_{l,\lambda}\varepsilon_{l+1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)((1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{l+1,\lambda} - 2\varepsilon_{l+1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)) \frac{d\varepsilon_l}{dT_l}}{(\varepsilon_{l+1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{l,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{l,\lambda}\varepsilon_{l+1,\lambda} - 2\varepsilon_{l,\lambda}\varepsilon_{l+1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda))^2} \right] \mathcal{G}_l - \\
& - \left[ \frac{(f_{l,\lambda} - f_{l+1,\lambda})\varepsilon_{l,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)}{\varepsilon_{l+1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{l,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{l,\lambda}\varepsilon_{l+1,\lambda} - 2\varepsilon_{l,\lambda}\varepsilon_{l+1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)} \right. \\
& - \left. \frac{(f_{l,\lambda} - f_{l+1,\lambda})\varepsilon_{l,\lambda}\varepsilon_{l+1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)((1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{l,\lambda} - 2\varepsilon_{l,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda))}{(\varepsilon_{l+1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{l,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{l,\lambda}\varepsilon_{l+1,\lambda} - 2\varepsilon_{l,\lambda}\varepsilon_{l+1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda))^2} \right] \Delta\varepsilon_{l+1} + \quad (4.14) \\
& \quad \frac{\varepsilon_{l,\lambda}\varepsilon_{l+1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) \frac{df_{l+1}}{dT_{l+1}} \mathcal{G}_{l+1}}{\varepsilon_{l+1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{l,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{l,\lambda}\varepsilon_{l+1,\lambda} - 2\varepsilon_{l,\lambda}\varepsilon_{l+1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)} \\
& + \left[ \frac{(f_{1,\lambda} - f_{2,\lambda})\varepsilon_{1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) \frac{d\varepsilon_2}{dT_2}}{\varepsilon_{2,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{1,\lambda}\varepsilon_{2,\lambda} - 2\varepsilon_{1,\lambda}\varepsilon_{2,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)} \right. \\
& - \left. \frac{(f_{l,\lambda} - f_{l+1,\lambda})\varepsilon_{l,\lambda}\varepsilon_{l+1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)((1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{l,\lambda} - 2\varepsilon_{l,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)) \frac{d\varepsilon_{l+1}}{dT_{l+1}}}{(\varepsilon_{l+1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{l,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{l,\lambda}\varepsilon_{l+1,\lambda} - 2\varepsilon_{l,\lambda}\varepsilon_{l+1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda))^2} \right] \mathcal{G}_{l+1} \Bigg\} d\lambda
\end{aligned}$$

$$\tau \in (\tau_{\min}, \tau_{\max}], \quad l = \overline{2, L-1}$$

$$\begin{aligned}
& c_L \rho_L \delta_L \frac{\partial \mathcal{G}_L}{\partial \tau} = -\frac{\partial c_L}{\partial T} \rho_L \delta_L \frac{\partial T_L}{\partial \tau} \mathcal{G}_L - \Delta c_L \rho_L \delta_L \frac{\partial T_L}{\partial \tau} + \\
& + \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \left\{ \left[ \frac{(f_{L-1,\lambda} - f_{L,\lambda}) \varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda)}{\varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{L-1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} - 2\varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda)} \right] - \right. \\
& - \left. \frac{(f_{L-1,\lambda} - f_{L,\lambda}) \varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) \left( (1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{L,\lambda} - 2\varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) \right)}{\left( \varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{L-1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} - 2\varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) \right)^2} \right] \Delta \varepsilon_{L-1} + \\
& + \frac{\varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) \frac{df_{L-1}}{dT_{L-1}} \mathcal{G}_{L-1}}{\varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{L-1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} - 2\varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda)} + \\
& + \left[ \frac{(f_{L-1,\lambda} - f_{L,\lambda}) \varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) \frac{d\varepsilon_{L-1}}{dT_{L-1}}}{\varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{L-1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} - 2\varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda)} - \right. \\
& - \left. \frac{(f_{L-1,\lambda} - f_{L,\lambda}) \varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) \left( (1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{L,\lambda} - 2\varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) \right) \frac{d\varepsilon_{L-1}}{dT_{L-1}}}{\left( \varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{L-1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} - 2\varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) \right)^2} \right] \mathcal{G}_{L-1} + \\
& + \left[ \frac{(f_{L-1,\lambda} - f_{L,\lambda}) \varepsilon_{L-1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda)}{\varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{L-1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} - 2\varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda)} - \right. \\
& - \left. \frac{(f_{L-1,\lambda} - f_{L,\lambda}) \varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) \left( (1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{L-1,\lambda} - 2\varepsilon_{L-1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) \right)}{\left( \varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{L-1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} - 2\varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) \right)^2} \right] \Delta \varepsilon_L - \\
& - \frac{\varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) \frac{df_L}{dT_L} \mathcal{G}_L}{\varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{L-1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} - 2\varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda)} + \\
& + \left[ \frac{(f_{L-1,\lambda} - f_{L,\lambda}) \varepsilon_{L-1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) \frac{d\varepsilon_L}{dT_L}}{\varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{L-1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} - 2\varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda)} - \right. \\
& - \left. \frac{(f_{L-1,\lambda} - f_{L,\lambda}) \varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) \left( (1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{L-1,\lambda} - 2\varepsilon_{L-1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) \right) \frac{d\varepsilon_L}{dT_L}}{\left( \varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{L-1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} - 2\varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) \right)^2} \right] \mathcal{G}_L \Big\} d\lambda + \\
& + \Delta k_{in} (T_{in} - T_L) - k_{in} \mathcal{G}_L + \frac{\partial k_{in}}{\partial T_L} (T_{in} - T_L) \mathcal{G}_L
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\tau \in (\tau_{\min}, \tau_{\max}]$$

$$\nu_l(\tau_{\min}) = 0, \quad l = \overline{1, L}$$

Выражение для линейной части приращения минимизируемого функционала невязки имеет вид:

$$\delta J = 2 \sum_{l=1}^L \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} (T_l(\tau) - f_l(\tau)) \mathcal{G}_l(\tau) d\tau \quad (4.16)$$

Вариацию функционала Лагранжа, представляющую собой главную линейную часть приращения этого функционала, можно представить следующим образом:

$$\delta \mathfrak{J} = \delta J + I_1 + I_2 \quad (4.17)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 = & \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} \psi_1(\tau) \left( -c_1 \rho_1 \delta_1 \frac{\partial \nu_1}{\partial \tau} - \frac{\partial c_1}{\partial T} \rho_1 \delta_1 \frac{\partial T_1}{\partial \tau} \nu_1 - \Delta c_1 \rho_1 \delta_1 \frac{\partial T_1}{\partial \tau} + \right. \\ & + \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \left[ \frac{(f_{a,\lambda} - f_{1,\lambda}) \varepsilon_{1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda)}{\varepsilon_{1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{a,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} - 2\varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda)} - \right. \\ & \left. \left. - \frac{(f_{a,\lambda} - f_{1,\lambda}) \varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) ((1 + T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{1,\lambda} - 2\varepsilon_{1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda))}{(\varepsilon_{1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{a,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} - 2\varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda))^2} \right] \Delta \varepsilon_a + \right. \end{aligned} \quad (4.18)$$



$$\begin{aligned}
& \left. \frac{(f_{1,\lambda} - f_{2,\lambda})\varepsilon_{1,\lambda}\varepsilon_{2,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)\left((1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{2,\lambda} - 2\varepsilon_{1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)\right)\frac{d\varepsilon_1}{dT_1}}{\left(\varepsilon_{2,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{1,\lambda}\varepsilon_{2,\lambda} - 2\varepsilon_{1,\lambda}\varepsilon_{2,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)\right)^2} \right] \mathfrak{g}_1 - \\
& \left[ \frac{(f_{1,\lambda} - f_{2,\lambda})\varepsilon_{1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)}{\varepsilon_{2,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{1,\lambda}\varepsilon_{2,\lambda} - 2\varepsilon_{1,\lambda}\varepsilon_{2,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)} - \right. \\
& \left. \frac{(f_{1,\lambda} - f_{2,\lambda})\varepsilon_{1,\lambda}\varepsilon_{2,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)\left((1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{1,\lambda} - 2\varepsilon_{1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)\right)}{\left(\varepsilon_{2,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{1,\lambda}\varepsilon_{2,\lambda} - 2\varepsilon_{1,\lambda}\varepsilon_{2,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)\right)^2} \right] \Delta\varepsilon_2 + \\
& + \frac{\varepsilon_{1,\lambda}\varepsilon_{2,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)\frac{df_2}{dT_2}\mathfrak{g}_2}{\varepsilon_{2,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{1,\lambda}\varepsilon_{2,\lambda} - 2\varepsilon_{1,\lambda}\varepsilon_{2,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)} - \\
& \left[ \frac{(f_{1,\lambda} - f_{2,\lambda})\varepsilon_{1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)\frac{d\varepsilon_2}{dT_2}}{\varepsilon_{2,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{1,\lambda}\varepsilon_{2,\lambda} - 2\varepsilon_{1,\lambda}\varepsilon_{2,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)} - \right. \\
& \left. \frac{(f_{1,\lambda} - f_{2,\lambda})\varepsilon_{1,\lambda}\varepsilon_{2,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)\left((1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{1,\lambda} - 2\varepsilon_{1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)\right)\frac{d\varepsilon_2}{dT_2}}{\left(\varepsilon_{2,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{1,\lambda}\varepsilon_{2,\lambda} - 2\varepsilon_{1,\lambda}\varepsilon_{2,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)\right)^2} \right] \mathfrak{g}_2 \left. \right\} d\lambda \left. \right\} d\tau + \\
& + \sum_{l=2}^{L-1} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} \psi_l(\tau) \left( -c_l \rho_l \delta_l \frac{\partial v_l}{\partial \tau} - \frac{\partial c_l}{\partial T} \rho_l \delta_l \frac{\partial T_l}{\partial \tau} v_l - \Delta c_l \rho_l \delta_l \frac{\partial T_l}{\partial \tau} + \right. \\
& + \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \left[ \frac{(f_{l-1,\lambda} - f_{l,\lambda})\varepsilon_{l,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)}{\varepsilon_{l,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{l-1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{l-1,\lambda}\varepsilon_{l,\lambda} - 2\varepsilon_{l-1,\lambda}\varepsilon_{l,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)} - \right. \\
& \left. \frac{(f_{l-1,\lambda} - f_{l,\lambda})\varepsilon_{l-1,\lambda}\varepsilon_{l,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)\left((1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{l,\lambda} - 2\varepsilon_{l,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)\right)}{\left(\varepsilon_{l,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{l-1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{l-1,\lambda}\varepsilon_{l,\lambda} - 2\varepsilon_{l-1,\lambda}\varepsilon_{l,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)\right)^2} \right] \Delta\varepsilon_{l-1} + \\
& + \frac{\varepsilon_{l-1,\lambda}\varepsilon_{l,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)\frac{df_{l-1}}{dT_{l-1}}\mathfrak{g}_{l-1}}{\varepsilon_{l,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{l-1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{l-1,\lambda}\varepsilon_{l,\lambda} - 2\varepsilon_{l-1,\lambda}\varepsilon_{l,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)} + \\
& + \left[ \frac{(f_{l-1,\lambda} - f_{l,\lambda})\varepsilon_{l,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)\frac{d\varepsilon_{l-1}}{dT_{l-1}}}{\varepsilon_{l,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{l-1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{l-1,\lambda}\varepsilon_{l,\lambda} - 2\varepsilon_{l-1,\lambda}\varepsilon_{l,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)} - \right. \\
& \left. \frac{(f_{l-1,\lambda} - f_{l,\lambda})\varepsilon_{l-1,\lambda}\varepsilon_{l,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)\left((1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{l,\lambda} - 2\varepsilon_{l,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)\right)\frac{d\varepsilon_{l-1}}{dT_{l-1}}}{\left(\varepsilon_{l,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{l-1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{l-1,\lambda}\varepsilon_{l,\lambda} - 2\varepsilon_{l-1,\lambda}\varepsilon_{l,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)\right)^2} \right] \mathfrak{g}_{l-1} +
\end{aligned}$$







$$\begin{aligned}
& + \left[ \frac{(f_{L-1,\lambda} - f_{L,\lambda})\varepsilon_{L-1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) \frac{d\varepsilon_L}{dT_L}}{\varepsilon_{L,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{L-1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{L-1,\lambda}\varepsilon_{L,\lambda} - 2\varepsilon_{L-1,\lambda}\varepsilon_{L,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)} - \right. \\
& \left. - \frac{(f_{L-1,\lambda} - f_{L,\lambda})\varepsilon_{L-1,\lambda}\varepsilon_{L,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)((1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{L-1,\lambda} - 2\varepsilon_{L-1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)) \frac{d\varepsilon_L}{dT_L}}{(\varepsilon_{L,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{L-1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{L-1,\lambda}\varepsilon_{L,\lambda} - 2\varepsilon_{L-1,\lambda}\varepsilon_{L,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda))^2} \right] \mathcal{G}_L \Bigg\} d\lambda + \\
& + \Delta k_{in}(T_{in} - T_L) - k_{in} \mathcal{G}_L + \frac{\partial k_{in}}{\partial T_L}(T_{in} - T_L) \mathcal{G}_L \Bigg) d\tau
\end{aligned}$$

$$I_2 = \sum_{l=1}^L \eta_l \nu_l(\tau_{\min})$$

Исключив далее в  $I_1$  производные вариации температуры, из условия стационарности функционала Лагранжа  $\delta \mathfrak{S} = 0$  за счет приравнивания нулю в соотношении (4.17) коэффициентов при  $\nu_l(\tau)$ ,  $l = \overline{1, L}$ ,  $\nu_l(\tau_{\min})$ ,  $l = \overline{1, L}$ , после преобразований получим следующую систему уравнений, определяющую сопряженную краевую задачу:

$$\begin{aligned}
& -c_1 \rho_1 \delta_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \tau} = \\
& = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \left\{ - \frac{\varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) \frac{df_1}{dT_1} \psi_1}{\varepsilon_{1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{a,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} - 2\varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda)} + \right. \\
& + \left[ \frac{(f_{a,\lambda} - f_{1,\lambda}) \varepsilon_{a,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) \frac{d\varepsilon_1}{dT_1}}{\varepsilon_{1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{a,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} - 2\varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda)} - \right. \\
& \left. - \frac{(f_{a,\lambda} - f_{1,\lambda}) \varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) ((1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{a,\lambda} - 2\varepsilon_{a,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda)) \frac{d\varepsilon_1}{dT_1}}{(\varepsilon_{1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{a,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} - 2\varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda))^2} \right] \psi_1 + \\
& + \left[ \frac{(f_{1,\lambda} - f_{2,\lambda}) \varepsilon_{2,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) \frac{d\varepsilon_1}{dT_1}}{\varepsilon_{2,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{1,\lambda} \varepsilon_{2,\lambda} - 2\varepsilon_{1,\lambda} \varepsilon_{2,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda)} - \right.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(f_{1,\lambda} - f_{2,\lambda})\varepsilon_{1,\lambda}\varepsilon_{2,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)\left((1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{2,\lambda} - 2\varepsilon_{2,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)\right)\frac{d\varepsilon_1}{dT_1}}{\left(\varepsilon_{2,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{1,\lambda}\varepsilon_{2,\lambda} - 2\varepsilon_{1,\lambda}\varepsilon_{2,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)\right)^2} \left. \frac{d\varepsilon_1}{dT_1} \right] (\psi_2 - \psi_1) + \\
& + \frac{\varepsilon_{1,\lambda}\varepsilon_{2,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)\frac{df_1}{dT_1}(\psi_2 - \psi_1)}{\varepsilon_{2,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{1,\lambda}\varepsilon_{2,\lambda} - 2\varepsilon_{1,\lambda}\varepsilon_{2,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)} \left. \right\} d\lambda + 2(T_1(\tau) - f_1(\tau)) \\
& \tau \in (\tau_{\min}, \tau_{\max}] \\
& - c_l \rho_l \delta_l \frac{\partial \psi_l}{\partial \tau} = \\
& + \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \left\{ \frac{\varepsilon_{l-1,\lambda}\varepsilon_{l,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)\frac{df_l}{dT_l}(\psi_{l-1} - \psi_l)}{\varepsilon_{l,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{l-1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{l-1,\lambda}\varepsilon_{l,\lambda} - 2\varepsilon_{l-1,\lambda}\varepsilon_{l,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)} \right. + \tag{4.20} \\
& + \left[ \frac{(f_{l-1,\lambda} - f_{l,\lambda})\varepsilon_{l-1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)\frac{d\varepsilon_l}{dT_l}}{\varepsilon_{l,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{l-1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{l-1,\lambda}\varepsilon_{l,\lambda} - 2\varepsilon_{l-1,\lambda}\varepsilon_{l,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)} \right. \\
& - \left. \frac{(f_{l-1,\lambda} - f_{l,\lambda})\varepsilon_{l-1,\lambda}\varepsilon_{l,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)\left((1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{l-1,\lambda} - 2\varepsilon_{l-1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)\right)\frac{d\varepsilon_l}{dT_l}}{\left(\varepsilon_{l,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{l-1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{l-1,\lambda}\varepsilon_{l,\lambda} - 2\varepsilon_{l-1,\lambda}\varepsilon_{l,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)\right)^2} \right] (\psi_l - \psi_{l-1}) + \\
& + \frac{\varepsilon_{l,\lambda}\varepsilon_{l+1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)\frac{df_l}{dT_l}(\psi_{l+1} - \psi_l)}{\varepsilon_{l+1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{l,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{l,\lambda}\varepsilon_{l+1,\lambda} - 2\varepsilon_{l,\lambda}\varepsilon_{l+1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)} + \\
& + \left[ \frac{(f_{l,\lambda} - f_{l+1,\lambda})\varepsilon_{l+1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)\frac{d\varepsilon_l}{dT_l}}{\varepsilon_{l+1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{l,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{l,\lambda}\varepsilon_{l+1,\lambda} - 2\varepsilon_{l,\lambda}\varepsilon_{l+1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)} \right. \\
& - \left. \frac{(f_{l,\lambda} - f_{l+1,\lambda})\varepsilon_{l,\lambda}\varepsilon_{l+1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)\left((1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{l+1,\lambda} - 2\varepsilon_{l+1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)\right)\frac{d\varepsilon_l}{dT_l}}{\left(\varepsilon_{l+1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{l,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{l,\lambda}\varepsilon_{l+1,\lambda} - 2\varepsilon_{l,\lambda}\varepsilon_{l+1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)\right)^2} \right] (\psi_{l+1} - \psi_l) \left. \right\} d\lambda + \\
& + 2(T_l(\tau) - f_l(\tau)) \\
& \tau \in (\tau_{\min}, \tau_{\max}], \quad l = \overline{2, L-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -c_L \rho_L \delta_L \frac{\partial \psi_L}{\partial \tau} = \\
& = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \left\{ \frac{(f_{L-1,\lambda} - f_{L,\lambda}) \varepsilon_{L-1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) \frac{d\varepsilon_L}{dT_L}}{\varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{L-1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} - 2\varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{(f_{L-1,\lambda} - f_{L,\lambda}) \varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) ((1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{L-1,\lambda} - 2\varepsilon_{L-1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda)) \frac{d\varepsilon_L}{dT_L}}{(\varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{L-1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} - 2\varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda))^2} (\psi_L - \psi_{L-1}) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) \frac{df_L}{dT_L} (\psi_{L-1} - \psi_L)}{\varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{L-1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} - 2\varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda)} \right\} d\lambda - \\
& -k_{in} \psi_L + \frac{\partial k_{in}}{\partial T_L} (T_{in} - T_L) \psi_L + 2(T_L(\tau) - f_L(\tau)) \\
& \tau \in (\tau_{\min}, \tau_{\max}]
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Используя соотношения (4.18) и (4.19) - (4.21) можно получить формулы для вычисления градиента функционала невязки. выражение (4.17) преобразуем к виду:

$$\begin{aligned}
\delta J = & \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} \psi_1(\tau) \left( -\Delta c_1 \rho_1 \delta_1 \frac{\partial T_1}{\partial \tau} + \right. \\
& + \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \left\{ \frac{(f_{a,\lambda} - f_{1,\lambda}) \varepsilon_{1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda)}{\varepsilon_{1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{a,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} - 2\varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{(f_{a,\lambda} - f_{1,\lambda}) \varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) ((1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{1,\lambda} - 2\varepsilon_{1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda))}{(\varepsilon_{1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{a,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} - 2\varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda))^2} \right\} \Delta \varepsilon_a + \\
& + \left[ \frac{(f_{a,\lambda} - f_{1,\lambda}) \varepsilon_{a,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda)}{\varepsilon_{1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{a,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} - 2\varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{(f_{a,\lambda} - f_{1,\lambda}) \varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) ((1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{a,\lambda} - 2\varepsilon_{a,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda))}{(\varepsilon_{1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{a,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} - 2\varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda))^2} \right] \Delta \varepsilon_1 - \\
& - \left[ \frac{(f_{1,\lambda} - f_{2,\lambda}) \varepsilon_{2,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda)}{\varepsilon_{2,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{1,\lambda} \varepsilon_{2,\lambda} - 2\varepsilon_{1,\lambda} \varepsilon_{2,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda)} \right.
\end{aligned} \tag{4.22}$$



$$\begin{aligned}
& + \left[ \frac{(f_{L-1,\lambda} - f_{L,\lambda})\varepsilon_{L-1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)}{\varepsilon_{L,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{L-1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{L-1,\lambda}\varepsilon_{L,\lambda} - 2\varepsilon_{L-1,\lambda}\varepsilon_{L,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)} - \right. \\
& \left. - \frac{(f_{L-1,\lambda} - f_{L,\lambda})\varepsilon_{L-1,\lambda}\varepsilon_{L,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda)((1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{L-1,\lambda} - 2\varepsilon_{L-1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda))}{(\varepsilon_{L,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{L-1,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{L-1,\lambda}\varepsilon_{L,\lambda} - 2\varepsilon_{L-1,\lambda}\varepsilon_{L,\lambda}(1+T_\lambda - R_\lambda))^2} \right] \Delta\varepsilon_L \Bigg\} d\lambda + \\
& + \Delta k_{in}(T_{in} - T_L) d\tau
\end{aligned}$$

В том случае, когда определяемые в обратной задаче характеристики являются функцией только времени  $\tau$ , соотношение (4.22) может рассматриваться как дифференциал функционала невязки. Тогда с помощью этого соотношения можно сразу записать выражение для градиента функционала невязки. В данной задаче неизвестные характеристики зависят от температуры - переменной состояния анализируемого процесса, и равенство (4.22) не является дифференциалом. В этом случае выражение для градиента можно получить, представив искомые зависимости в параметрическом виде [54]:

$$\begin{aligned}
c_l(T) &= \sum_{k=1}^{N_{c_l}} c_k^l \varphi_k^{c_l}(T), \quad l = \overline{1, L}, \\
\varepsilon_{a,\lambda}(T) &= \sum_{k=1}^{N_{\varepsilon_a}} e_k^a \varphi_k^{\varepsilon_a}(\lambda, T) \\
\varepsilon_{l,\lambda}(T) &= \sum_{k=1}^{N_{\varepsilon_l}} e_k^l \varphi_k^{\varepsilon_l}(\lambda, T), \quad l = \overline{1, L} \\
k_{in}(T) &= \sum_{k=1}^{N_{k_{in}}} k_k^{in} \varphi_k^{k_{in}}(T),
\end{aligned} \tag{4.23}$$

где  $c_k^l, k = \overline{1, N_{c_l}}, e_k^a, k = \overline{1, N_{\varepsilon_a}}, e_k^l, k = \overline{1, N_{\varepsilon_l}}, k_k^{in}, k = \overline{1, N_{k_{in}}}$  - неизвестные параметры аппроксимации,

$\varphi_k^{c_l}(T), k = \overline{1, N_{c_l}}, \varphi_k^{\varepsilon_a}(\lambda, T), k = \overline{1, N_{\varepsilon_a}}, \varphi_k^{\varepsilon_l}(\lambda, T), k = \overline{1, N_{\varepsilon_l}}, \varphi_k^{k_{in}}(T), k = \overline{1, N_{k_{in}}}$ , - заданная система базисных функций.

Подставляя в (4.22) приращения

$$\begin{aligned}
\Delta c_l(T) &= \sum_{k=1}^{N_{c_l}} \Delta c_k^l \varphi_k^{c_l}(T), \quad l = \overline{1, L}, \\
\Delta \varepsilon_{a,\lambda}(T) &= \sum_{k=1}^{N_{\varepsilon_a}} \Delta e_k^a \varphi_k^{\varepsilon_a}(\lambda, T)
\end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\Delta \varepsilon_{l,\lambda}(T) = \sum_{k=1}^{N_{el}} \Delta e_k^l \varphi_k^{\varepsilon_l}(\lambda, T), \quad l = \overline{1, L}$$

$$\Delta k_{in}(T) = \sum_{k=1}^{N_{kin}} \Delta k_k^{in} \varphi_k^{k_{in}}(T),$$

получим следующие выражения для составляющих градиента функционала невязки:

$$J'_{e_k^l} = -\psi_l \varphi_k^{\varepsilon_l} \rho_l \delta_l \frac{\partial T_l}{\partial \tau}$$

$$J'_{e_k^a} = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \psi_1 \left[ \frac{(f_{a,\lambda} - f_{1,\lambda}) \varepsilon_{1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda)}{\varepsilon_{1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{a,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} - 2\varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda)} - \frac{(f_{a,\lambda} - f_{1,\lambda}) \varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) ((1 + T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{1,\lambda} - 2\varepsilon_{1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda))}{(\varepsilon_{1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{a,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} - 2\varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda))^2} \right] \varphi_k^{\varepsilon_a}(\lambda, T) d\lambda \quad (4.25)$$

$$J'_{e_k^1} = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \left\{ \psi_1 \left[ \frac{(f_{a,\lambda} - f_{1,\lambda}) \varepsilon_{a,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda)}{\varepsilon_{1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{a,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} - 2\varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda)} - \frac{(f_{a,\lambda} - f_{1,\lambda}) \varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) ((1 + T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{a,\lambda} - 2\varepsilon_{a,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda))}{(\varepsilon_{1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{a,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} - 2\varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda))^2} \right] \varphi_k^{\varepsilon_1}(\lambda, T) - \right. \\ \left. - (\psi_2 - \psi_1) \left[ \frac{(f_{1,\lambda} - f_{2,\lambda}) \varepsilon_{2,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda)}{\varepsilon_{2,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{1,\lambda} \varepsilon_{2,\lambda} - 2\varepsilon_{1,\lambda} \varepsilon_{2,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda)} - \frac{(f_{1,\lambda} - f_{2,\lambda}) \varepsilon_{1,\lambda} \varepsilon_{2,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) ((1 + T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{2,\lambda} - 2\varepsilon_{2,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda))}{(\varepsilon_{2,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{1,\lambda} \varepsilon_{2,\lambda} - 2\varepsilon_{1,\lambda} \varepsilon_{2,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda))^2} \right] \varphi_k^{\varepsilon_1}(\lambda, T) \right\} d\lambda$$

$$J'_{e_k^l} = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \left\{ (\psi_l - \psi_{l-1}) \left[ \frac{(f_{l-1,\lambda} - f_{l,\lambda}) \varepsilon_{l-1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda)}{\varepsilon_{l,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{l-1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{l-1,\lambda} \varepsilon_{l,\lambda} - 2\varepsilon_{l-1,\lambda} \varepsilon_{l,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda)} - \frac{(f_{l-1,\lambda} - f_{l,\lambda}) \varepsilon_{l-1,\lambda} \varepsilon_{l,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) ((1 + T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{l-1,\lambda} - 2\varepsilon_{l-1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda))}{(\varepsilon_{l,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{l-1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{l-1,\lambda} \varepsilon_{l,\lambda} - 2\varepsilon_{l-1,\lambda} \varepsilon_{l,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda))^2} \right] \varphi_k^{\varepsilon_l}(\lambda, T) + \right. \\ \left. + (\psi_{l+1} - \psi_l) \left[ \frac{(f_{l,\lambda} - f_{l+1,\lambda}) \varepsilon_{l+1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda)}{\varepsilon_{l+1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{l,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{l,\lambda} \varepsilon_{l+1,\lambda} - 2\varepsilon_{l,\lambda} \varepsilon_{l+1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda)} - \frac{(f_{l,\lambda} - f_{l+1,\lambda}) \varepsilon_{l,\lambda} \varepsilon_{l+1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) ((1 + T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{l+1,\lambda} - 2\varepsilon_{l+1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda))}{(\varepsilon_{l+1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{l,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{l,\lambda} \varepsilon_{l+1,\lambda} - 2\varepsilon_{l,\lambda} \varepsilon_{l+1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda))^2} \right] \varphi_k^{\varepsilon_l}(\lambda, T) \right\} d\lambda$$



$$J'_{e_k^L} = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \left\{ (\psi_L - \psi_{L-1}) \left[ \frac{(f_{L-1,\lambda} - f_{L,\lambda}) \varepsilon_{L-1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda)}{\varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{L-1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} - 2\varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda)} - \frac{(f_{L-1,\lambda} - f_{L,\lambda}) \varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) ((1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{L-1,\lambda} - 2\varepsilon_{L-1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda))}{(\varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{L-1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} - 2\varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda))^2} \right] \varphi_k^{\varepsilon_L}(\lambda, T) \right\} d\lambda$$

$$J'_{k_k^{in}} = \psi_L \varphi_k^{k_{in}}(T_{in} - T_L)$$

Для того чтобы вычислить градиент функционала невязки требуется вначале решить исходную прямую задачу теплообмена, далее сопряженную краевую задачу и затем воспользоваться соотношениями вида (4.22). При этом краевую задачу для сопряженной переменной необходимо решать в "обратном" времени по сравнению с прямой задачей. Легко видеть, что за счет введения новой переменной  $t = \tau_{\max} - \tau$  сопряженная краевая задача приобретает структуру, аналогичную прямой задаче. Отличия заключаются лишь в коэффициентах системы уравнений. Решение обеих задач может осуществляться по одному и тому же алгоритму, однако коэффициенты сопряженной задачи вычисляются в "обратном" относительно переменной  $t$  направлении.

### 4.1.3. Определение параметра спуска

В градиентных методах минимизации выбор параметра спуска на каждой  $s$ -ой итерации осуществляется на основании решения задачи минимизации функции одной переменной [56]:

$$\gamma^s = \arg \min_{\gamma} J(u^s + \gamma^s G^s(J_u^{(s)})), \quad (4.26)$$

Для решения этой задачи могут быть использованы известные и хорошо зарекомендовавшие себя алгоритмы, например, "золотого" сечения. Однако реализация таких алгоритмов требуют на каждой итерации многократного вычисления минимизируемого функционала. В случае обратных задач

теплообмена это приводит к необходимости многократно решать соответствующие краевые задачи для уравнений в частных производных. При реализации алгоритма на ЭВМ такая процедура требует достаточно больших временных затрат.

Практика решения различных обратных задач итерационными методами показала, что эффективным в вычислительном отношении приемом является использование линейной оценки параметра спуска [56]. При таком подходе для вычисления параметра  $\gamma$  можно получить приближенную аналитическую форму. Для этого представим выражение для функционала невязки на  $s+1$ -й итерации в виде:

$$J(u^{s+1}) = \sum_{l=1}^L \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} (T_l(u^{s+1}, \tau) - f_l)^2 d\tau = \sum_{l=1}^L \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} (T_l(u^s, \tau) + \mathcal{G}_l(\Delta u^s, \tau) - f_l)^2 d\tau \quad (4.27)$$

где приращение температуры  $\mathcal{G}_l(\tau)$  определяется из решения краевой задачи (4.13)-(4.15), в которой  $\Delta u_i(T)$  с учетом аппроксимации неизвестных характеристик их приращения можно представить как:

$$\Delta u_i(T) = \gamma^s \sum_{k=1}^{N_i} G_k^i(J_{p_k}^{(s)}) \varphi_k^i(T), \quad i = \overline{1, N_u} \quad (4.28)$$

При использовании выражения (4.27) краевая задача (4.13)-(4.15) является линейной относительно параметра  $\gamma^s$ . Поэтому справедливо соотношение:

$$\mathcal{G}_l(\tau, \gamma^s G^s(J_u^{(s)})) = \gamma^s \mathcal{G}_l(\tau, G^s(J_u^{(s)})) \quad (4.29)$$

Дифференцируя  $J^{s+1}$  по  $\gamma^s$  и приравнявая полученное выражение нулю, получим:

$$\gamma^s = \frac{\sum_{l=1}^L \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} (T_l(u^s, \tau) - f_l) \mathcal{G}_l(G^s(J_u^{(s)}), \tau) d\tau}{\sum_{l=1}^L \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} (\mathcal{G}_l(G^s(J_u^{(s)}), \tau))^2 d\tau} \quad (4.30)$$

Как видно из соотношения (4.30), для вычисления параметра спуска на каждой итерации необходимо только один раз решить краевую задачу для вариаций температуры (4.13)-(4.15).

Следует отметить, что практическое применение градиентных методов минимизации в сочетании с вычислением оценки глубины спуска  $\gamma$  по формуле (4.30) для решения обратных задач теплопроводности оказывается эффективным только при восстановлении одной неизвестной характеристики. Как показали результаты различных вычислительных экспериментов, использование данного подхода для одновременного восстановления нескольких характеристик исследуемого процесса часто приводит к очень медленной сходимости к точному решению процесса последовательных приближений, а иногда вообще не дают такой сходимости.

При решении обратных задач по восстановлению нескольких характеристик более эффективным оказывается вычисление линейной оценки параметра спуска в виде вектора [56]. В этом случае для каждой определяемой характеристики вычисляется свое линейное приближение параметра, и на каждой итерации процесса последовательных приближений из условия минимума функционала невязки определяется вектор параметров спуска.

Рассмотрим данный способ на примере определения неизвестных характеристик математической модели (4.9) с использованием данных измерений температуры (4.10). Введем в рассмотрение вектор  $\bar{\gamma} = \{\gamma_k\}_1^{N_u}$  и функционал (4.11) на  $(s+1)$ -ой итерации представим в виде

$$J(\bar{u}^{s+1}) = \sum_{l=1}^L \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} \left( T_l(u^s, \tau) + \sum_{i=1}^{N_u} \gamma_i^s \mathcal{G}_l(G_i^s(J_{u_i}^{(s)}), \tau) - f_l \right)^2 d\tau \quad (4.31)$$

где  $\mathcal{G}_l(G_i^s(J_{u_i}^{(s)}), \tau)$  – вариации температуры, получающиеся при сообщении приращения только одной искомой  $i$ -ой характеристики соответственно.

Функция  $\vartheta_l(G_i^s(J_{u_i}^{(s)}), \tau)$  определяется из решения краевой задачи (4.13)-(4.15) при  $\Delta u_n = 0, n = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, N_u$ .

Минимизируя  $J^{s+1}$  по  $\bar{\gamma} = \{\gamma_k\}_1^{N_u}$ , после несложных преобразований получим систему линейных алгебраических уравнений для вычисления составляющих вектора параметров спуска.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{N_u} \gamma_i^s \sum_{l=1}^L \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} (\vartheta_l(G_i^s(J_{u_i}^{(s)}), \tau) \vartheta_l(G_n^s(J_{u_n}^{(s)}), \tau)) d\tau = \\ & = \sum_{l=1}^L \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} (T_l(\bar{u}^s, \tau) - f_l) \vartheta_l(G_i^s(J_{u_i}^{(s)}), \tau) d\tau, \quad i = \overline{1, N_u} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Полученная система имеет симметричную матрицу и эффективно может быть решена методом квадратного корня.

Таким образом, при выборе векторного параметра спуска на каждой итерации процесса последовательных приближений необходимо решить краевую задачу для вариаций температуры столько раз, сколько характеристик определяется в рассматриваемой обратной задаче. Легко видеть, что при определении только одной характеристики система уравнений (4.30) преобразуется к одному соотношению (4.28) для вычисления линейной оценки скалярной величины параметра спуска.

## 4.2. Идентификация неизвестных характеристик ЭВТИ

### 4.2.1. Особенности алгоритм решения рассматриваемой обратной задачи теплообмена

Разработанный алгоритм решения обратной задачи теплообмена в ЭВТИ и результаты вычислительного эксперимента используются для восстановления некоторых радиационных свойств металлической фольги / металлизированной полимерной пленки и разделителя. Следует отметить, что модель (3.2a) – (3.2d)

включает в себя некоторые неопределенности в свойствах материала, и спектральная излучательная способность нагреваемой керамической ткани является основной из них. Поэтому данный раздел посвящен идентификации данной характеристики (а именно  $\varepsilon_{a,\lambda}$ ) посредством решения обратной задачи теплообмена.

Результаты температурных измерений в медной пластине (3.2d) можно рассматривать как дополнительную информацию, необходимую для решения обратной задачи теплообмена.

$$T_l^{\text{exp}}(\tau) = f_l \quad (4.32)$$

Алгоритм решения обратной задачи разработан на основании предложенной в разделе 4.1 методики. Неизвестный коэффициент может быть аппроксимирован с помощью некоторой системы базисных функций (в частности, кусочно-гладкие функции или В-сплайны).

$$\varepsilon_{a,\lambda}(\lambda) = \sum_{k=1}^N e_k \varphi_k(\lambda) \quad (4.33)$$

Градиент минимизируемого функционала вычисляется с использованием решения сопряженной задачи.

$$J'_{e_k} = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \psi_1 \left( \frac{\varphi_k(\lambda) \varepsilon_{1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda)}{(\varepsilon_{1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{a,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} - 2\varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda))} \right. \\ \left. \frac{\varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) \varphi_k(\lambda) ((1 + T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{1,\lambda} - 2\varepsilon_{1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda))}{(\varepsilon_{1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{a,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} - 2\varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} (1 + T_\lambda - R_\lambda))^2} \right) (f_{a,\lambda} - f_{1,\lambda}) d\lambda \quad (4.34)$$

где  $\psi_1$  - решение следующей сопряженной задачи:

$$\begin{aligned}
-c_1 \rho_1 \delta_1 \frac{d\psi_1}{d\tau} &= \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \left( \frac{-\varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) \frac{df_1}{dT_1} \psi_1(\tau)}{(\varepsilon_{1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{a,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} - 2\varepsilon_{a,\lambda} \varepsilon_{1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda))} - \right. \\
&\quad \left. \frac{\varepsilon_{1,\lambda} \varepsilon_{2,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) \frac{df_{1,\lambda}}{dT_1} (\psi_1(\tau) - \psi_2(\tau))}{(\varepsilon_{2,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{1,\lambda} \varepsilon_{2,\lambda} - 2\varepsilon_{1,\lambda} \varepsilon_{2,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda))} \right) d\lambda, \\
\psi_1(\tau_{\max}) &= 0, \\
-c_l \rho_l \delta_l \frac{d\psi_l}{d\tau} &= \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \left( \frac{\varepsilon_{l-1,\lambda} \varepsilon_{l,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) \frac{df_{l,\lambda}}{dT_l} (\psi_{l-1}(\tau) - \psi_l(\tau))}{(\varepsilon_{l,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{l-1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{l,\lambda} \varepsilon_{l-1,\lambda} - 2\varepsilon_{l,\lambda} \varepsilon_{l-1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda))} - \right. \\
&\quad \left. \frac{\varepsilon_{l,\lambda} \varepsilon_{l+1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) \frac{df_{l,\lambda}}{dT_l} (\psi_l(\tau) - \psi_{l+1}(\tau))}{(\varepsilon_{l+1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{l,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{l,\lambda} \varepsilon_{l+1,\lambda} - 2\varepsilon_{l,\lambda} \varepsilon_{l+1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda))} \right) d\lambda, \tag{4.35}
\end{aligned}$$

$$\psi_l(\tau_{\max}) = 0, \quad l = 2, \dots, 20$$

$$\begin{aligned}
-c_L \rho_L \delta_L \frac{d\psi_L}{dt} &= \int_{\lambda_{\max}}^{\lambda_{\min}} \left( \frac{\varepsilon_{L-1,\lambda} \varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) \frac{df_{L,\lambda}}{dT_L} (\psi_{L-1}(\tau) - \psi_L(\tau))}{\varepsilon_{L,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + \varepsilon_{L-1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda) + 2\varepsilon_{L,\lambda} \varepsilon_{L-1,\lambda} - 2\varepsilon_{L,\lambda} \varepsilon_{L-1,\lambda} (1+T_\lambda - R_\lambda)} \right) d\lambda + \\
&+ 4 \mathcal{E}_{L,c}^{\text{eff}} \sigma T_L^3 (\psi_c - \psi_L), \\
\psi_L(\tau_{\max}) &= 0 \\
-c_c \rho_c d_c \frac{d\psi_c}{d\tau} &= 4 \mathcal{E}_{L,c}^{\text{eff}} \sigma T_c^3 (\psi_L - \psi_c) - 4 \mathcal{E}_{c,s}^{\text{eff}} \sigma T_c^3 \psi_c + 2(T_c(\tau) - f(\tau)), \\
\psi_c(\tau_{\max}) &= 0
\end{aligned}$$

### 4.2.2. Вычислительный эксперимент

Проверка эффективности разработанного алгоритма проводится с помощью универсального подхода, представляющего собой вычислительный эксперимент, выполненный в условиях тепловых испытаний, рассмотренных в разделе 3.2. Данное исследование проводится следующим образом: сначала решается прямая задача теплообмена в образце в предположении, что все характеристики материала известны. Затем, используя полученные значения

температур в предполагаемых точках установки термодатчиков, формируются "экспериментальные" данные, необходимые для решения обратной задачи. И после этого решается обратная задача по определению  $\varepsilon_{a,\lambda}$ . Случайные ошибки в "экспериментальных" данных формируются следующим образом:

$$f(\tau) = \tilde{f}(\tau)(1 + \delta_f \omega(\tau)) \quad (4.36)$$

где  $\tilde{f}(\tau)$  – точная величина,  $\omega$  – это случайная величина нормального распределения со средним значением, равным 0.0, и дисперсией, равной 1.0,  $\delta_f = 0.05$  – относительная погрешность. Результаты вычислений в условиях экспериментального нагрева представлены на рис. 4.1. Излучательные способности окисленной поверхности медной пластины и стальной поверхности были приняты равными 0.6 и 0.45 соответственно. В качестве параметров волокнистых разделителей приняты: радиус волокна  $a = 3$  мкм и поверхностная пористость слоя волокон  $p = 0.8$ . При интегрировании учитывался спектральный диапазон  $\lambda \in [1, 20]$  мкм, так как именно на эту область приходится основной вклад в величину интегрального потока теплового излучения.

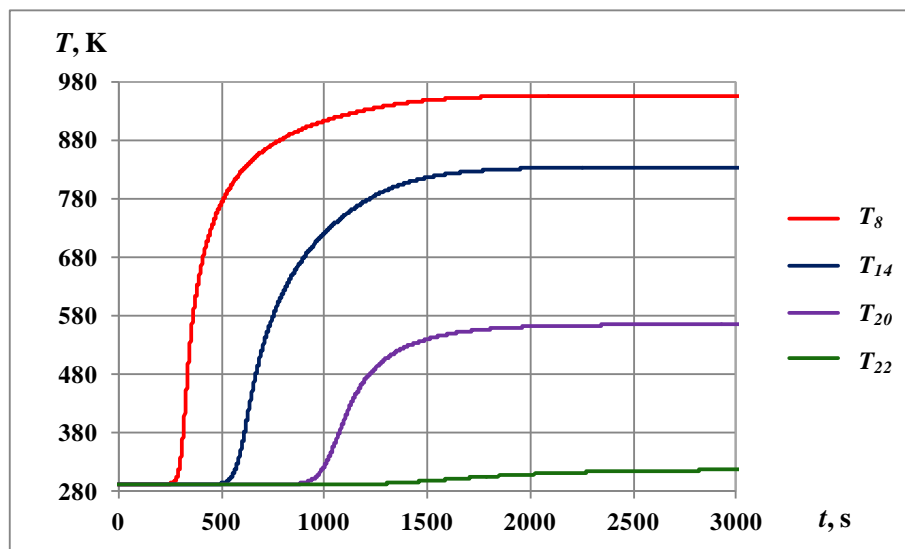


Рис. 4.1. Температура слоев ЭВТИ на этапе начального нагрева

Приближенные оценки величины  $\varepsilon_{a,\lambda}$  для различных приближений представлены на рис. 4.2.

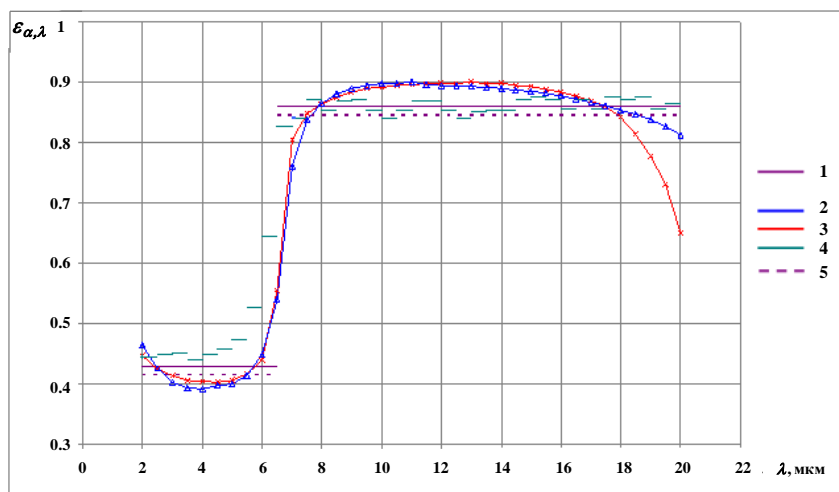


Рис. 4.2. Восстановленные значения  $\varepsilon_{\alpha,\lambda}$ : 1 – “точное” значение, используемое для моделирования, 2 – оценка с аппроксимацией кубическими В-сплайнами ( $N=3$ ), 3 – оценка с аппроксимацией кубическими В-сплайнами ( $N=5$ ), 4 – оценка с аппроксимацией кусочно-постоянной функцией ( $N=36$ ), 5 – оценка с аппроксимацией кусочно-постоянной функцией ( $N=2$ ).

На рис. 4.3 и в таблице 4.1 приведено сравнение “экспериментально” полученных значений температур медной пластины и результатов расчетов температуры медной пластины для восстановленных значений  $\varepsilon_{\alpha,\lambda}$ , полученных с помощью различных аппроксимаций.

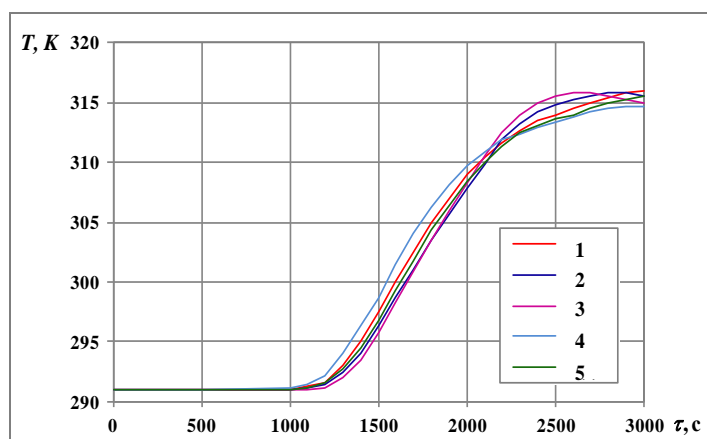


Рис. 4.3. Сравнение теоретического прогноза и экспериментальных данных для температуры медной пластины: 1 – “эксперимент”, 2 – аппроксимация кубическими В-сплайнами ( $N=3$ ), 3 – аппроксимация кубическими В-сплайнами ( $N=5$ ), 4 – аппроксимация кусочно-постоянной функцией ( $N=36$ ), 5 – аппроксимация кусочно-постоянной функцией ( $N=2$ ).



Таблица 4.1. Отклонения расчетной и “измеренной” температур.

Аппроксимация	Отклонения температуры по методу наименьших квадратов (К)	Отклонения температуры (%)	Максимальные температурные отклонения (К)	Максимальные температурные отклонения (%)
1	1.24	4.1	2.5	7.1
2	1.16	4.3	2.3	7.5
3	1.21	4.7	2.4	6.2
4	0.37	2.4	1.2	4.3

Как и следовало ожидать, минимальный набор параметров аппроксимации обеспечивает лучшую точность и стабильность решения обратных задач. Хотя в случае приближения кусочно-постоянной функцией с  $N = 2$  использовалась априорная информация о границе двухзонного излучения волокон [23] (около 6.5 мкм), но оценку этой величины можно найти из любого другого приближения (рис. 4.2, кривые 2-4).

#### 4.2.3. Результаты обработки экспериментальных данных

Полученный алгоритм решения обратной задачи используется также для восстановления величины  $\varepsilon_{a,\lambda}$  в условиях реального экспериментального нагрева. Приближенные оценки величины  $\varepsilon_{a,\lambda}$  для различных приближений представлены на рис. 4.4.

Восстановленные значения  $\varepsilon_{a,\lambda}$  оказываются менее точными по сравнению со значениями, полученными на основании вычислительного эксперимента с увеличенной температурой нагревательного элемента. Такие результаты объясняются главным образом недостаточным уровнем прогрева слоев ЭВТИ в условиях реального эксперимента.

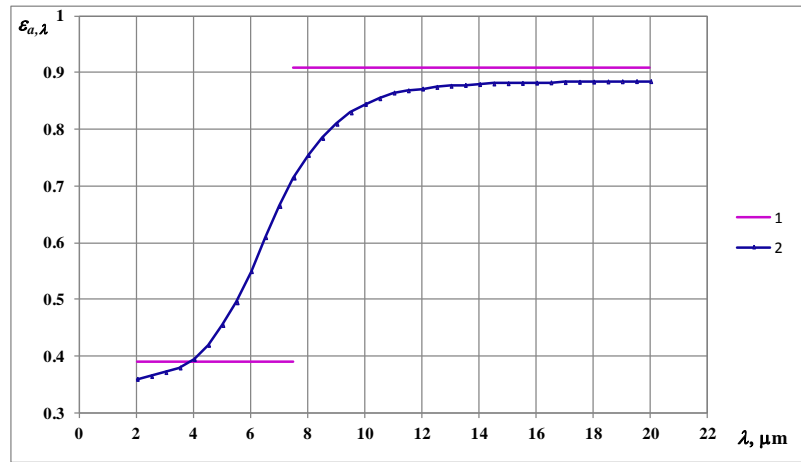


Рис. 4.4. Восстановленные значения  $\varepsilon_{a,\lambda}$ : 1 – оценка с аппроксимацией кубическими В-сплайнами ( $N=3$ ), 2 – оценка с аппроксимацией кусочно-постоянной функцией ( $N=2$ ).

#### Выводы по главе 4

На основе метода итерационной регуляризации разработан алгоритм решения обратной задачи теплообмена по восстановлению зависящих от температуры теплофизических характеристик ЭВТИ, учитывающий наличие волокнистых разделительных слоев между экранами ЭВТИ. Разработанный алгоритм и результаты вычислительного эксперимента используются для восстановления спектральной излучательной способности нагреваемой керамической ткани  $\varepsilon_{a,\lambda}$ . Показано, что предложенный алгоритм позволяет вычислять искомую величину с высокой точностью.

## Заключение

1. Рассмотрены основные типы тепловых потоков, воздействующих на космический аппарат во время орбитального полета, особенности их моделирования. В результате разработана методика по определению внешнего теплового воздействия на КА, реализованная в виде программы, написанной на языке FORTRAN. Данная программа позволяет определять тепловые потоки без проведения дополнительных исследований, только на основании имеющихся геометрических характеристик КА и его программы полета.

2. Рассмотрены процессы переноса излучения в элементе ЭВТИ, состоящем из двух экранов и волокнистого разделителя между ними. Получено выражение для определения потока излучения через такой элемент, учитывающее отражение и пропускание излучения высокопористого волокнистого разделителя, определяемые на основании теории независимости рассеяния и теории Ми для бесконечного однородного цилиндра, а также данных о дисперсном составе волокнистого материала. В предположении, что материалом экранов ЭВТИ является алюминий, учтено также наличие возможной оксидной пленки на его поверхности и оценено влияние такой пленки на излучательную способность алюминиевой фольги. Показано, что наличие слоя оксида приводит к значительному увеличению потока теплового излучения через слой ЭВТИ. Предложена математическая модель теплопереноса в ЭВТИ с учетом влияния волокнистого разделителя между слоями.

3. Разработанная модель теплопереноса через слой ЭВТИ апробирована путем сравнения результатов моделирования процессов теплообмена в образце ЭВТИ с результатами тепловых испытаний образцов, имитирующих элементы ЭВТИ. Результаты сравнения расчетных значений плотностей тепловых потоков свидетельствуют о достоверности предложенной модели.

4. Проанализированы данные экспериментального исследования реального образца ЭВТИ. Составлена математическая модель теплообмена в ЭВТИ, учитывающая наличие разделительных слоев между экранами. Показано, что теоретический прогноз достаточно точно соответствует результатам измерений температуры, что позволяет использовать разработанную математическую модель для анализа тепловых процессов в ЭВТИ.

5. Разработан обобщенный итерационный алгоритм решения обратных задач для систем с сосредоточенными параметрами, который охватывает и случай идентификации предложенной модифицированной математической модели ЭВТИ. Получены аналитические выражения для вычисления градиента функционала невязки с использованием краевой задачи для сопряженной переменной. Также получена краевая задача для вариации температуры, позволяющая получить линейную оценку глубины спуска.

6. Разработанный алгоритм и результаты вычислительного эксперимента используются для восстановления спектральной излучательной способности нагреваемой керамической ткани  $\varepsilon_{a,\lambda}$ . Показано, что предложенный алгоритм позволяет вычислять искомую величину с достаточно высокой точностью.

7. Рассмотрены перспективные варианты исполнения разделительных слоев ЭВТИ. Показано, что использование плотных разделителей из кварцевых волокон, покрытых тонким слоем алюминия, приводит к значительному уменьшению плотности теплового излучения через слой ЭВТИ.

### Список литературы

1. Авдуревский В.С., Галицейский Б.М. и др. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике, под общ. ред. Авдуревского В.С., Кошкина В.К. М.: Машиностроение, 1992. 528 с.
2. Козлов Л.В., Нусинов М.Д. и др. Моделирование тепловых режимов космического аппарата и окружающей его среды, под ред. акад. Петрова Г.И. М.: Машиностроение, 1971. 382с.
3. Малоземов В.В., Рожнов В.Ф., Правецкий В.Н. Системы жизнеобеспечения экипажей летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1986. 584 с.
4. Фаворский О.Н., Каданер Я.С. Вопросы теплообмена в космосе. М.: Высшая школа, 1967. 248с.
5. Малоземов В.В. Тепловой режим космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1980. 232с.
6. Адрианов В.Н. Основы радиационного и сложного теплообмена. М.: Энергия, 1972. 464с.
7. Залетаев В.М. К расчету собственного излучения Земли на космический аппарат. // Космич. исслед. Т. 6. № 6. 1968. С. 897 – 903.
8. Залетаев В.М., Капинос Ю.В., Сургучев О.В. Расчет теплообмена космического аппарата. М.: Машиностроение, 1979. 208с.
9. Modest M.F. Solar flux incident on an orbiting surface after reflection from the planet. //AIAA Journal. 1980. V.18. N.6. P.727-730.

10. Колесников А.В., Палешкин А.В. Численный метод моделирования внешнего теплообмена космического аппарата с произвольной формой наружных поверхностей. Вестник МАИ, №17/4.
11. Константинов М.С., Каменков Е.Ф. и др. Механика космического полета, под ред. Мишина В.П. М.: Машиностроение, 1989. 408с.
12. Малоземов В.В., Кудрявцева Н.С. Системы терморегулирования космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1995. 112с.
13. Грицевич И.В., Домбровский Л.А., Ненарокомов А.В. Перенос тепла излучением в экрано-вакуумной тепловой изоляции космических аппаратов. // ТПТ. 2013. Т. 5. № 1. С. 12-21.
14. Залетаев В.М., Капинос Ю.В., Сургучов О.В. Расчет теплообмена космического аппарата. М.: Машиностроение, 1982. 152с.
15. Кудрявцева Н.С. Основы проектирования эффективных систем терморегулирования космических аппаратов. М.: Изд-во МАИ, 2012. 228с.
16. Малоземов В.В., Кудрявцева Н.С. Оптимизация систем терморегулирования космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1988. 108с.
17. Малоземов В.В., Кутепов С.Н., Логинов С.Н. Выбор проектных параметров перспективных систем обеспечения теплового режима ЛА. М.: Изд-во МАИ, 1989. 68с.
18. Bohon H.L., Shideler J.L., Rummeler D.R. Radiative Metallic Thermal Protection Systems: A status report. // Journal of spacecraft and rockets. 1977. V.14. N.10. P. 626-631.
19. Nenarokomov A.V., Alifanov O.M., Gonzales V.M. Parameter Estimation for Multilayer Thermal Insulations. M.P.Menguc, N.Selcuk ed. Proc. of the Fifth International Symposium on Radiative Transfer. New York, Wallingford (UK), Begell House, 2007. 10 p.

20. Alifanov O.M., Nenarokomov A.V. and Gonzalez V.M. Study of multilayer Thermal Insulation by Inverse Problems Method. *Acta Astronautica*, 2009. V. 65. P. 1284-1291.

21. Nenarokomov A.V., Alifanov O.M., Gonzalez V.M. Identification of mathematical model of multilayer thermal insulation, In Proc. Of 6th International Symposium on Radiative Transfer. New York, Wallingford (UK), Begell House, 2010. 10 p.

22. Bohren C.F. and Huffman D.R. Absorption and Scattering of Light by Small Particles. Wiley, New York, 1983. 541 p.

Имеется перевод: Борен К., Хафмен, Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986. 664 с.

23. Dombrovsky L.A. and Baillis D. Thermal Radiation in Disperse Systems: An Engineering Approach. Begell House, New York and Redding (CT), 2010. 678 p.

24. Lee S.C. Radiative transfer through a fibrous medium: allowance for fiber orientation. // *J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer*. 1986. V. 36. N 3. P. 253–263.

25. Lee S.C. Radiation heat-transfer model for fibers oriented parallel to diffuse boundaries. // *AIAA J. Thermophys. Heat Transfer*. 1988. V. 2. N.4. P.303–308.

26. Bartl J. and Baranek M. Emissivity of aluminium and its importance for radiometric measurements. // *Meas. Phys. Quant.* 2004. V. 31. N. 4. P. 31-36.

27. Brannon R.R. and Goldstein R.J. Emittance of oxide layers on a metal substrate. // *ASME J. Heat Transfer*. 1970. V. 92. N. 2. P. 257-263.

Бреннон Р. и Голдстейн Р. Степень черноты окисных пленок на металлической подложке. // *Теплопередача*. 1970. Т. 4. № 2. С. 49–57.



28. Haevens O.S. Optical Properties of Thin Solid Films. Butterworths Scientific Publications, London, 1955. Ch. 4. 199 p.
29. Siegel R. and Howell J.R. Thermal Radiation Heat Transfer. Fourth Edition. Taylor & Francis, New York, 2002. 934 p.
30. Зигель Р., Хауэлл Дж. Теплообмен излучением. М.: Мир, 1975. 934 с.
31. Malitson I.H. Interspecimen comparison of the refractive index of fused silica. // J. Opt. Soc. Am. 1965. V. 55. N. 10. P. 1205–1209.
32. Оптические кварцевые стекла. Стекло КВ. Табл. стандарт. справ. данных/ Госстандарт; ГСССД 61-83, 1985. 51 с.,  
Оптические кварцевые стекла. Табл. стандарт. справ. данных/ Госстандарт; ГСССД 26-81, 1982 20 с.
33. Tan C.Z. and Arndt J. Temperature dependence of refractive index of glassy SiO<sub>2</sub> in the infrared wavelength range. // J. Phys. Chem. Solids. 2000. V. 61. No. 8. P. 1315–1320.
34. Beder E.C., Bass C.D., and Shackelford W.L. Transmissivity and absorption of fused quartz between 0.22 $\mu$ m and 3.5  $\mu$ m from room temperature to 1500°C. // Appl. Optics. 1971. V. 10. N. 10. P. 2263–2268.
35. Wray J.H. and Neu J.T. Refractive index of several glasses as a function of wavelength and temperature. // J. Opt. Soc. Am. 1969. V. 59. N. 6. P. 774–776.
36. Излучательные свойства твердых материалов. Справочник под ред. Шейндлина А.Е. М.: Энергия, 1974. 472с.
37. Banner D., Klarsfeld S. and Langlais C. Temperature dependence of the optical characteristics of semitransparent porous media. // High Temp.–High Press. 1989. V. 21. P. 347–354.

37. Gryvnak D.A. and Burch D.E. Optical and infrared properties of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> at elevated temperatures. // J. Opt. Soc. Am. 1965. V. 55. N. 6. P. 625–629.

38. Maltison I.H. Refraction and dispersion of synthetic sapphire. // J. Opt. Soc. Am. 1962. V. 52. N. 12. P. 1377–1379.

39. Лингарт Ю.К., Петров В.А., Тихонова Н.А. Оптические свойства лейкосапфира при высоких температурах. II. Свойства монокристалла в области непрозрачности и свойства расплава. // Теплофизика высоких температур. 1982. Т. 20. № 6. С. 1085–1092.

40. Whitson M.E. Handbook of the Infrared Optical Properties of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, Carbon, MgO and ZrO<sub>2</sub>. vol. 1. 1975. 471 p.

41. Соколов А.В. Оптические свойства металлов, М.: Физматгиз, 1961. 464с.

42. Домбровский Л.А. Радиационные характеристики тепловой изоляции из металлизированных волокон. // Теплофизика высоких температур. 1997. Т35. №2. С. 278–285.

Dombrovsky L.A. Radiative properties of metalized-fiber thermal insulation. // High Temp. 1997. V35. N2. P. 275–282.

43. Домбровский Л.А. Расчет радиационных характеристик высокопористых волокнистых материалов, в сборнике «Теплообмен в современной технике». М.: ИВТ РАН, 1998. с. 279–291.

Dombrovsky L.A. Calculation of radiative properties of highly porous fibrous materials, in “Heat Transfer in Modern Engineering”. Inst. High Temp., 1998, p. 279–291.

44. Dombrovsky L.A. Infrared and microwave radiative properties of metal coated microfibers. // Revue Générale de Thermique. 1998. V. 37. N. 11. P. 925–933.

45. Caps R., Arduini-Schuster M.C., Ebert H.P. and Fricke J. Improved thermal radiation extinction in metal coated polypropylene microfibers. // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 1993. V. 36. N. 11. P. 2789-2794.
46. Ebert H.P., Arduini-Schuster M.C., Fricke J., Caps R. and Reiss H. Infrared-radiation screens using very thin metallized glass fibers. // *High Temp. – High Press*. 1991. V. 23. N. 2. P. 143-148.
47. Tien C.L. and Drolen B.L. Thermal radiation in particulate media with dependent and independent scattering. *Annual Review of Numerical Fluid Mechanics and Heat Transfer*. V. 1. Hemisphere, New York, 1987. p. 1-32.
48. Lee S.-C. Angle of incidence and size effects on dependent scattering in fibrous media. // *ASME J. Heat Transfer*. 1996. V. 118. N. 4. P. 931-936.
49. Mishchenko M.I., Travis L.D. and Lacis A.A. *Multiple Scattering of Light by Particles: Radiative Transfer and Coherent Backscattering*. Cambridge Univ. Press, New York, 2006.
50. Lee S.-C. Wave propagation through a dielectric layer containing densely packed fibers. // *J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer*. 2011. V. 112. N. 1. P. 143-150.
51. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. М.: Физматлит, 2004. 400 с.
52. Алифанов О.М., Будник С.А., Михайлов В.В., Ненарокомов А.В. Экспериментально-вычислительный комплекс для исследования теплофизических свойств теплотехнических материалов. // *ТПТ*. 2009. Т. 1. №2. С.49-60.
53. Alifanov O.M., Budnik S.A. and Mikhaylov V.V. An Experimental-Computational System for the Determination of Thermal Properties of Materials. I. Equipment, Instrumentation and Methodical Support of Thermal Testing. *Proceedings*

of the 5th Int. Conference on Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice, Cambridge, UK. 2005. P. A02.1-A02.9.

54. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Ненарокомов А.В. Обратные задачи в исследовании сложного теплообмена. М.: Янус-К, 2009. 300с.

55. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена. М.: Наука, 1988. 288 с.

56. Алифанов О.М. Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов (введение в теорию обратных задач теплообмена). М.: Машиностроение, 1979. 216 с.

57. Park H.M., Yoon T.Y. Solution of the Inverse Radiation Problem Using a Conjugate Gradient Method. // Int. Jour. Heat and Mass Transfer. 2000. V. 43. P. 1767-1776.

58. Sun X., Jaggard D.L. The inverse blackbody radiation problem: a regularization solution. // Journal of Applied Physics. 1987. V .62. N.11. P. 4382-4386.