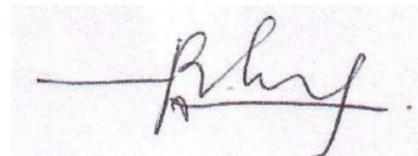


МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)

На правах рукописи



ВУ Ба Зуи

**РАЗРАБОТКА МЕТОДА И ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЁННОГО
СОСТОЯНИЯ ФИЗИЧЕСКИ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ
ОБОЛОЧЕК ПРИ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ТЕРМОСИЛОВЫХ НАГРУЗКАХ**

Специальность 01.02.04 – Механика деформируемого твёрдого тела

Диссертация на соискание ученой степени

Кандидата технических наук

Научный руководитель

Доктор технических наук, профессор Нерубайло Б.В.

Москва-2015

Оглавление

Оглавление	2
Введение	6
ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК	15
1.1. Дифференциальные уравнения физически ортотропных оболочек, основанные на гипотезах Кирхгофа-Лява - обобщение уравнений общей теории изотропных оболочек В.З. Власова	16
1.1.1 Постановка задач.....	16
1.1.2. Исходные соотношения: уравнения равновесия, зависимости «перемещения – деформации» и обобщенного закона Гука для физически ортотропного материала.....	17
1.1.3. Приведение исходных уравнений к системе трех дифференциальных уравнений в перемещениях при произвольно распределенных силовых нагрузках и температурных полях	19
1.1.4. Разрешающие дифференциальные уравнения при произвольно распределенных силовых и температурных воздействиях.....	21
1.2. Уравнения «типа теории Власова - Доннелла»: упрощенные по критерию В.В.Новожилова уравнения общей теории физически ортотропных оболочек.	23
1.3. Дискретно-континуальная модель В.З.Власова «ортотропной» оболочки: статические и геометрические гипотезы, уравнения. Полубезмоментная модель исходя из критерия В.В. Новожилова.....	26
1.4. Об асимптотической погрешности уравнений теории оболочек и расчленении напряженного состояния	31
1.5. Принципы и методы асимптотического синтеза и сращивания напряженного состояния на основе приближенных уравнений.....	32
ГЛАВА 2. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНСТРУКЦИЙ ТИПА ТОПЛИВНОГО ОТСЕКА ИЗ ФИЗИЧЕСКИ ОРТОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОГО ЖИДКОСТЬЮ	41

2.1. Цилиндрический топливный отсек с шарнирно закрепленными краями при действии гидростатического давления - обобщение решения задачи В.З.Власова на случай физически ортотропного материала	41
2.1.1. Решение на основе уравнений общей теории физически ортотропных оболочек для нагрузки кусочно-косинусоидальной вдоль контура и кусочно-постоянной вдоль образующей.....	42
2.1.2. Решение для нагрузки кусочно-косинусоидальной вдоль контура и кусочно-постоянной вдоль образующей на основе уравнений, описывающих элементарные напряженные состояния	46
2.1.3. Анализ НДС на основе решения по общей теории оболочек; влияние показателя ортотропии λ	47
2.1.4. Анализ результатов полученных на основе приближенных уравнений. Метод сращиваемых аналитических решений (МСАР)	52
2.2. Цилиндрический топливный отсек с произвольно закрепленными краями, в том числе с одним или двумя жесткими краями, при действии гидростатического давления	55
2.2.1. Постановка задачи на основе уравнений общей теории физически ортотропных оболочек для нагрузки кусочно-косинусоидальной вдоль контура и постоянной вдоль образующей	55
2.2.2. Решение для нагрузки кусочно-косинусоидальной вдоль контура и постоянной вдоль образующей на основе уравнений, описывающих элементарные напряженные состояния	58
2.2.3. Определение напряжённого состояния у защемленного края оболочки на основе метода сращиваемых аналитических решений основного состояния и краевого эффекта МСАР).....	62
ГЛАВА 3. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОБОЛОЧЕК ИЗ ФИЗИЧЕСКИ ОРТОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ПРОДОЛЬНЫМ НАГРУЗКАМ	67
3.1. Решение для оболочек конечной длины с шарнирным закреплением краев при действии локальной нагрузки.....	67
3.1.1. Применение уравнений точных и типа Власова-Доннелла.....	67
3.1.2. Основное и тангенциальное состояния оболочки	71
3.1.3. Сравнительный анализ численных результатов на основе уравнений точных и приближенных для напряженных состояний с различной изменчивостью	72

3.2. Бесконечно длинная оболочка при системе локальных нагрузок	76
3.2.1. Основное состояние: решение «типа полубезмоментных уравнений»....	79
3.2.2. Тангенциальное состояние: решение уравнений «типа плоской задачи»	81
3.2.3. Частный случай приложения нагрузки. Нагружения по отрезкам контуре	86
3.3. Краевая задача для полубесконечной оболочки со свободным краем при действии продольной нагрузки.....	91
3.3.1. Действие продольной локальной нагрузки	91
3.3.2. Случай нагружения оболочки по отрезкам контура	100
3.3.3. Преобразование решения при нагружении оболочки по отрезкам контура	104
3.4. К решению задачи о стыке отсеков: о передаче продольной нагрузки через шпангоут	105
ГЛАВА 4. ТЕРМОУПРУГИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОЛОЧЕК ИЗ ФИЗИЧЕСКИ ОРТОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЯХ РАЗЛИЧНОЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ	109
4.1. Бесконечно длинная оболочка при локальном распределении температуры, постоянной по толщине	110
4.2. Бесконечно длинная оболочка при локальном распределении температурного перепада по толщине - линейно изменяющаяся по толщине температура.....	114
4.3. Диаграммы, ограничивающие зоны максимальных напряжений для осесимметричного и несимметричного локального распределения температуры	116
4.4. Цилиндрический отсек с шарнирно закрепленными краями при действии кусочно-постоянного вдоль контура и постоянного по длине и толщине температурного поля.....	117
4.4.1. Решение на основе уравнений общей теории физически ортотропных оболочек	117
4.4.2. Упрощение решения в 4.4.1 применительно к приближенным уравнениям: типа Власова - Доннелла, полубезмоментной теории (основное состояние), краевого эффекта.....	122
4.4.3 Решение термоупругой задачи перепада по толщине по ОТО	124

4.5. Влияние вида краевых условий и ортотропии физико-механических свойств на напряженно-деформированное состояние оболочек при локализованных вдоль контура температурных полях.....	127
Заключение.....	136
Библиографический список.....	138

Введение

Тонкостенные оболочки являются важнейшими элементами многих современных конструкций в авиационной и ракетно-космической технике, в энергетическом машиностроении [9,83,85]. Быстрое развитие технологий создания композиционных материалов позволило использовать их уникальные свойства и в оболочечных конструкциях, где расчета агрегатов, выполненных из них часто используется теория ортотропных оболочек [1,8].

Одним из часто встречающихся воздействий на тонкостенные конструкции в современной авиационной и ракетно - космической технике, в энергетическом машиностроения является неравномерно распределенная по поверхности оболочки или даже локализованная на небольших ее участках нагрузка: силовая или температурное поле. Напряженно-деформированное состояние (НДС) в таких случаях, особенно при сильной локализации, может существенно влиять на прочность и несущую способность конструкции.

Отметим работы по локальным нагрузкам на изотропные цилиндрические оболочки Антуфьева Б.А.[4], Бейларда П.П.[91], Виноградова Ю.И., [11], Н.Г.Гурьянова [22], Даревского В.М.[23,24], Ю.П.Жигалко [28], Лукасевича С.[39], Нерубайло Б.В. [45-52,], Образцова И.Ф. [68-73] Ольшанского В.П. [76], Шклярчука Ф.Н.[90] и др. Расчёту напряжений при сильно локализованном двумерном распределении температуры в оболочках, например, при повреждении обмазки на корпусе летательного аппарата, посвящены работы Антуфьева Б.А.[3]; Иванова А.И., Нерубайло Б.В.[59]. В последней из них даётся сравнение расчетных и экспериментальных результатов на основе проведенного в лаборатории кафедры 603 МАИ эксперимента на крупногабаритной цилиндрической оболочке с замером температуры термопарами хромель-алюмель и деформаций высокотемпературными тензодатчиками ЦАГИ.

Имеются литературные обзоры: Ю.П. Жигалко [28]; И.Ф. Образцова, Б.В. Нерубайло, В.П.Ольшанского [70], что освобождает от перечисления других работ.

Что касается оболочек анизотропных, в частности, рассматриваемых здесь ортотропных, то вопрос остается недостаточно исследованным, несмотря на то, что имеются определенные успехи. Так, известны работы Амбарцумяна С.А. [1] по общей теории и различным приближенным моделям анизотропных оболочек, Артюхина Ю.П. [2], Бажанова В.Л., Гольденבלата И.И., Копнова В.А., Поспелова А.Д. Синюкова А.М [7], Васильева В.В.[12,13]; Григоренко Я.М., Василенко А.Т. [20,21]; Елпатьевского А.Н. и Васильева В.В.[27]; Королева В.И.[36]; Лукаевича С. [39]; Нерубайло Б.В. [53-59]; Нерубайло Б.В. и Образцова И.Ф.[68,74]; Паляя О.М. и Спиро В.Е. [77]; Сухинина С.Н.[80]; Христенко А.С.[89] и ряда других исследователей.

Решению задач о действии на ортотропные цилиндрические оболочки локальной нормальной нагрузки и локального температурного поля посвящены работы диссертанта в соавторстве с Нерубайло Б.В., в которых, вероятно, впервые дан систематический анализ влияния показателя ортотропии на НДС при различных случаях нагружения [60] и нагрева [61] оболочек. В первой их них решение строится на основе применения уравнений общей теории физически ортотропных оболочек, обобщающих уравнения В.З.Власова. Приводятся численные результаты, иллюстрирующие влияние ортотропии на НДС. Во второй статье получены численные результаты на основе уравнений общей теории физически ортотропных оболочек, иллюстрирующие влияние на напряженное состояние анизотропии физических (коэффициенты температурного расширения) и механических характеристик материала. В обеих статьях широко представлен графический материал.

В работе Васильева В.В. [12] показано, что величина погрешности, вносимой гипотезой жесткой нормали при расчете оболочек из ортотропного стеклопластика на действие радиальной сосредоточенной нагрузки, существенно зависит от параметра тонкостенной оболочки. Так, при $h/R < 0,02$ разница в максимальной величине нормального перемещения, найденной на основании классических и более точных уравнений, не превышает 5%. Это дает нам основания использовать такую механико-математическую модель в дальнейших исследованиях. В статье

Ю.П. Артюхина [2] методом двойных тригонометрических рядов исследуется ортотропная цилиндрическая оболочка, шарнирно закрепленная по торцам и нагруженная радиальной сосредоточенной силой. Полученный числовой материал иллюстрируется графиками изменения внутренних силовых факторов по длине оболочки и в окружном направлении. Цитированная работа Христенко А.С. [89] посвящена построению асимптотических формул при действии на оболочку нагрузки с большой изменчивостью, приложенной на свободном крае оболочки. В цитированной работе Сухинина С.Н.[80] применены уравнения типа ортотропных пологих оболочек, на основании которых рассмотрен один пример о действии на «достаточно длинную» оболочку самоуравновешенной локальной радиальной нагрузки.

Известно, что проблема определения НДС применяют как численные, так и аналитические методы. Роль последних не уменьшается, несмотря на все прогрессирующее развитие вычислительной техники и вычислительной математики, которое стало дополнительным стимулом к развитию относительно нового раздела математики — асимптотических методов, позволяющих, в частности, производить априорный анализ решений дифференциальных уравнений и отбросить несущественные, а порой весьма громоздкие слагаемые, как, например, в теории тонких оболочек. В результате применения асимптотических методов к дифференциальным уравнениям общей теории оболочек показана возможность расчленения напряженно-деформированного состояния оболочки на ряд элементарных состояний [18,68,45,46,6,96-100], описываемых известными приближенными уравнениями. В значительной степени это относится к оболочкам нулевой гауссовой кривизны, к которым в первую очередь относятся рассматриваемые в диссертации цилиндрические оболочки. Такая потребность обусловлена тем, что при действии на оболочки нагрузок общего характера задача определения НДС может быть приведена к решению системы уравнений высокого — восьмого — порядка в частных производных, что служит естественным тормозом на пути решения многих краевых задач. Для устранения

возникающих трудностей представляется весьма плодотворным развитие и обобщение на случай произвольного деформирования оболочек методов асимптотического синтеза (МАС) напряженного состояния, которые позволяют построить НДС на основе приближенных уравнений более простой структуры и более низкого порядка. (Под асимптотическим синтезом понимается сведение в единое целое решений различных приближенных уравнений, каждое из которых "хорошо" описывает то или иное асимптотически однородное элементарное состояние) [72]. Так, широко известный с 20-х годов прошлого века, приближенный метод Штаермана-Геккелера для расчета осесимметричного деформирования куполов и днищ положительной гауссовой кривизны, в которых полное напряженно-деформированное состояние получено путем, по сути, синтеза двух напряженных состояний: безмоментного и краевого эффекта. Построенные позже методы асимптотического интегрирования уравнений общей теории оболочек позволили расчленить напряженное состояние оболочки на ряд так называемых элементарных напряженных состояний, каждое из которых описывается известными приближенными уравнениями, полученными в разные времена. Это уравнения безмоментной и полубезмоментной теории, теории краевого эффекта, напряженного состояния с высокой изменчивостью (уравнения Власова-Доннелла) и, наконец, уравнения изгибного и тангенциального состояний, являющиеся аналогом уравнений плоской задачи и изгиба пластины. Что же касается синтеза напряженного состояния на основе приближенных уравнений, то здесь вопрос оставался значительное время открытым из-за отсутствия принципов и достаточно четких критериев при определении границ "склеивания" (сращивания) приближенных решений. Наибольшие трудности при этом возникают, когда напряженное состояние описывается функциями, изменчивость которых колеблется в широких диапазонах, как например, при воздействиях сингулярного характера — при сосредоточенных и локализованных силовых и температурных воздействиях. В этих случаях вклад того или иного элементарного напряженного состояния существенно зависит от

изменяемости поверхностной или краевой нагрузки. При действии нагрузок сингулярного характера на оболочки **положительной** гауссовой кривизны таким образом решение построено Г.Н.Чернышевым, как сумма безмоментного напряженного состояния и «точечного» краевого эффекта в окрестности сосредоточенной силы [86]. В случае же оболочек нулевой гауссовой кривизны, к которым в первую очередь относятся цилиндрические и конические оболочки такой подход неприменим, и возникшие дополнительные трудности были частично преодолены в работах И.Ф.Образцова и Б.В.Нерубайло [68,70].

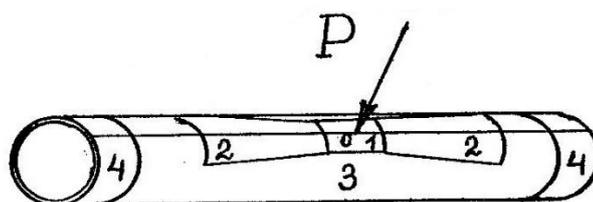


Рис.1. К построению напряженного состояния в оболочке нулевой кривизны в зонах с различной изменяемостью.

1- уравнение типа Власова-Доннелла; 2-типа полубезмоментной теории (обобщенного краевого эффекта); 3- безмоментная теория; 4-уравнение краевого эффекта.

Г.Н.Чернышев [86] рассмотрел применение метода асимптотического интегрирования для приближенного расчета оболочек нулевой гауссовой кривизны. Предполагается, что в окружном направлении разрешающая функция изменяется быстро, а в меридиональном – медленно. Для цилиндрической оболочки производится условное разбиение поверхности на зоны, в каждой из которых преобладает тот или иной вид решения (Рис1). Зона, непосредственно прилегающая к сосредоточенной силе, названа зоной точечного краевого эффекта. НДС этой зоны рекомендуется рассматривать как для пластинки. Далее следует переходная зона и зона, в которой оболочка работает как безмоментная, затем идет зона краевого эффекта. Однако такой подход практического применения и развития не получил.

Представляет интерес для расчётов прочности авиационных и ракетно-космических тонкостенных конструкций определение напряженно-

деформированного состояния ортотропных цилиндрических оболочек, являющихся неперменным элементом многих частично заполненных жидкостью сосудов, под действием неосесимметричного гидростатического давления [16,63]. Например, обечайки топливных баков, предназначенных для размещения компонентов жидкого топлива (окислителя, горючего), в полете нагружены внутренним избыточным давлением, складывающимся из гидростатического давления и наддува. Кроме того, часть обечайки сосуда, свободная от жидкости, может нагреваться иногда до значительной температуры (250...300 °С) [9]. Причем, по длине оболочки ее можно принять постоянной, а по контуру на границе сухой и смоченной частей она резко изменяется [33], что может вызвать появление значительных температурных напряжений. В случае изотропного материала задача определения напряженного состояния оболочек при гидростатическом давлении рассматривалась в монографии В.З.Власова [14], где на основе приближенной (полубезмоментной) теории оболочек представлены некоторые результаты расчета напряжений. А также в работе [63] задача обобщена на случай произвольных условий закрепления на торцах. В работе [16] на основе общей теории оболочек рассмотрено определение напряженного состояния физически ортотропных оболочек с шарнирным закреплением при гидростатическом давлении, где в двойных тригонометрических рядах найдены выражения для перемещений, усилий и изгибающих моментов и проведен анализ влияния показателя ортотропии на НДС. Также исследовалось влияние на НДС условий закрепления оболочек из физически ортотропного материала при действии локальных нагрузок и локализованного нагрева.

Учитывая сказанное, можно полагать, что разработка эффективного метода и исследование НДС физически ортотропных цилиндрических оболочек при упомянутых воздействиях является актуальной задачей не только в научном плане, но и для практики.

Объект диссертационного исследования: круговые цилиндрические оболочки из материала, который имеет разные упругие свойства в трех взаимно перпендикулярных направлениях, а именно, физически ортотропные оболочки.

Предмет исследования- методы расчёта напряженно-деформированного состояния на основе теории анизотропных оболочек.

Целью работы является:

- Построение алгоритмов для исследования НДС ортотропных цилиндрических оболочек на основе методов, позволяющих свести сложные краевые задачи для уравнений в частных производных восьмого порядка к решению хорошо изученных дифференциальных уравнений четвертого порядка.
- Решение имеющей важное практическое значение проблемы расчёта круговых цилиндрических оболочек из ортотропного материала при воздействии различной степени локализации нагрузок и нагрева, создание метода сращиваемых аналитических решений (МСАР) дифференциальных уравнений.
- Получение простых аналитических выражений, пригодных для определения НДС в процессе проектирования.

Научная новизна работы состоит в следующем:

- Разработан метод сращиваемых аналитических решений (МСАР) дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка типа основного состояния и краевого эффекта физически ортотропных цилиндрических и слабokonических оболочек для определения напряжений при нагрузках и температурных полях, имеющих существенно меньшую изменчивость вдоль образующей, чем вдоль контура.
- Получено разрешающее дифференциальное уравнение общей теории физически ортотропных цилиндрических оболочек в частных производных восьмого порядка и дифференциальные зависимости для искомых факторов при действии произвольной продольной нагрузки, безупречные с точки зрения энергостатики, как и уравнения изотропных оболочек В.З.Власова, и на их базе построена теория элементарных напряженных состояний: основного, с высокой изменчивостью и тангенциального.

Достоверность полученных результатов подтверждается путём их сравнения с имеющимися или найденными путем численного или натурного эксперимента.

Практическую ценность диссертационной работы составляют:

- Обобщение решения задачи В. З. Власова о напряженном состоянии цилиндрических оболочек в виде топливных отсеков, сосудов, трубопроводов на случай их изготовления из физически ортотропного материала, при несимметричном гидростатическом давлении и нагреве, произвольном закреплении, что имеет место в аэрокосмических и энергетических конструкциях.
- Построение аналитических алгоритмов, а для некоторых факторов также и простых формул, пригодных для определения НДС физически ортотропных оболочечных конструкций при действии локализованных нагрузок и температуры.
- Проведение систематического анализа на основе построенных алгоритмов для физически ортотропных оболочек выявило существенное влияние физико-механических свойств материала (механическая и тепловая ортотропия), условий нагружения и нагрева, а также краевых условий на характер распределения и уровень напряженно-деформированного состояния.
- Построение решения для бесконечно длинной, полубесконечной оболочек и оболочек конечной длины со свободным краем при действии локальной продольной нагрузки в удобном для практического использования виде и применение одного из построенных решений (полубесконечная оболочка со свободным краем) в качестве компоненты для контактной задачи о передаче через шпангоут продольной сосредоточенной силы.
- Представление числовой информации в форме номограмм и диаграмм напряжений, дающих возможность нахождения предпочтительных областей изменения физико-механических характеристик материала для некоторых частных случаев нагружения и нагрева конструкции.

Апробация работы. Основные результаты и выводы диссертационной работы докладывались:

На 12-ой Международной конференция «Авиация и Космонавтика - 2013».

На Международном симпозиуме «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова - 2014.

На семинаре д.физ.-мат наук Д.В. Тарлаковского «Проблемы механики деформируемого твердого тела и динамики машин», 2015г.

Публикации. Основные положения диссертации опубликованы в семи печатных работах. Из них пять - в изданиях, рекомендуемых ВАК Министерства образования и науки РФ для опубликования результатов кандидатских диссертаций.

Объём и структура работы

Диссертационная работа состоит из введения, 4 глав, заключения, списка литературы; содержит 147 страниц, 36 рисунков, 17 таблиц. Список литературы включает 100 наименований.

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Теория оболочек в общем виде, т.е. для оболочек произвольной формы, разработана во второй половине XIX века. Однако длительное время была не ясна погрешность допущений Кирхгофа в теории оболочек, что порождало различные варианты написания соотношений теории оболочек, отличающиеся друг от друга только малыми членами. Каноническая форма записи уравнений долгое время отсутствовала. И лишь в сороковых годах было доказано, что в теории тонких оболочек погрешность, вносимая принятием гипотезы Кирхгофа, имеет величину порядка h/R по сравнению с единицей (h , R - толщина и наименьший из линейных размеров или радиусов кривизны срединной поверхности оболочки) [66].

В настоящее время имеется значительное число вариантов уравнений теории цилиндрических оболочек, построенных на основе принятия гипотез Кирхгофа-Лява и отличающихся друг от друга второстепенными членами. В.З. Власов отмечал, что уравнения Лява, Галёркина, Лурье имеют ряд неточностей, обуславливающих асимметрию дифференциальной матрицы при записи их в перемещениях, что противоречит законам энергостатики сплошных упругих тел. Однако они носят чисто принципиальный характер, и в теории достаточно тонких оболочек при расчёте их на прочность практического значения не имеют. Так, погрешность уравнений Лява в максимальных напряжениях не превосходит 5% [14].

Здесь за основу принимаем свободные от указанных неточностей уравнения общей теории оболочек в форме В.З. Власова [14], обобщённые на случай анизотропного, физически ортотропного материала [16].

1.1. Дифференциальные уравнения физически ортотропных оболочек, основанные на гипотезах Кирхгофа-Лява - обобщение уравнений общей теории изотропных оболочек В.З. Власова

1.1.1 Постановка задач

Рассматривается круговая цилиндрическая оболочка из материала, который имеет разные упругие свойства в трех взаимно перпендикулярных направлениях, а именно, физически ортотропные оболочки.

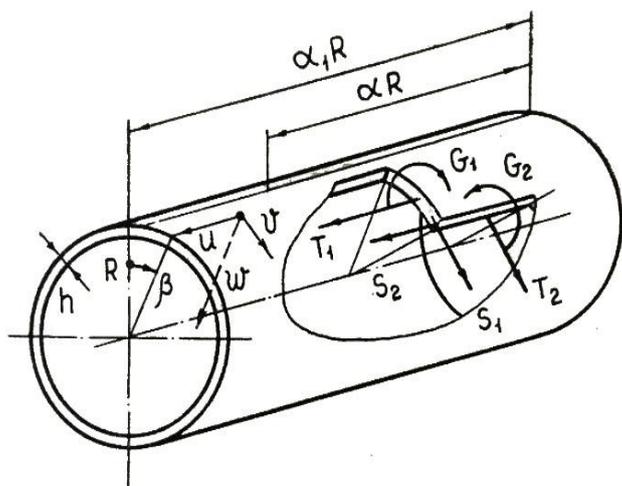


Рис.1.1

– вдоль дуги поперечного сечения, так что произведение αR есть расстояние до какой –либо точки по образующей оболочки, βR - расстояние по дуге относительно какого- то фиксированного сечения. Построим на срединной поверхности недеформированной оболочки систему координат xuz , у которой ось x совпадает с образующей, ось y - с касательной к направляющей, ось z -с нормалью к поверхности, причём она направлена к центру кривизны оболочки. Компоненты внешней поверхностной нагрузки $p_1(\alpha, \beta)$, $p_2(\alpha, \beta)$, $p_3(\alpha, \beta)$ и перемещения $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$ направим вдоль осей x, y, z соответственно. Положительные направления основных внутренних силовых и моментов, возникающих при деформировании оболочки, показано на рис 1.1.

Обозначаем через R, h, l радиус, толщина длина оболочки соответственно. Положение какой –либо точки на поверхности оболочки определим безразмерными координатами α и β , причём α характеризует положение точки вдоль образующей а β

1.1.2. Исходные соотношения: уравнения равновесия, зависимости «перемещения – деформации» и обобщенного закона Гука для физически ортотропного материала

Известно, что как в теории упругости при построениях общей теории оболочек необходимо рассмотреть три стороны задачи:

а) *Дифференциальные уравнение равновесия, бесконечно малого элемента срединной поверхности:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial S_2}{\partial \beta} + p_1 R &= 0; \\ \frac{\partial T_2}{\partial \beta} + \frac{\partial S_1}{\partial \alpha} - Q_2 + p_2 R &= 0; \\ T_2 + \frac{\partial Q_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial Q_2}{\partial \beta} + p_3 R &= 0; \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_{12}}{\partial \alpha} - \frac{\partial G_2}{\partial \beta} + R Q_2 &= 0; \\ \frac{\partial G_{21}}{\partial \beta} - \frac{\partial G_1}{\partial \alpha} + R Q_1 &= 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

где T_1, T_2, S_1, S_2 - нормальные и сдвигающие усилия;

G_1, G_2, G_{12}, G_{21} - изгибающие и крутящие моменты;

Q_1, Q_2 - перерезывающие силы.

Из последних двух уравнений находим перерезывающие силы Q_1, Q_2

$$Q_1 = -\frac{1}{R} \left(\frac{\partial G_{21}}{\partial \beta} - \frac{\partial G_1}{\partial \alpha} \right); \quad Q_2 = -\frac{1}{R} \left(\frac{\partial G_{12}}{\partial \alpha} - \frac{\partial G_2}{\partial \beta} \right); \quad (1.3)$$

б) *Зависимости для основных компонентов деформации и компонентов перемещении*

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \alpha}; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} - w \right); \quad \omega = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right); \\ \chi_1 &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}; \quad \chi_2 = \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + w \right); \quad \tau = -\frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{\partial v}{\partial \alpha} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \right). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega$ - деформации удлинений и сдвига средней поверхности оболочки, χ_1, χ_2, τ - деформации изгиба и кручения, получающиеся при переходе средней поверхности оболочки в деформированное состояние.

в) *Соотношения между усилиями, изгибающими моментами и деформациями.*

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{E_1 h}{1 - \nu_1 \nu_2} \left(\varepsilon_1 + \nu_2 \varepsilon_2 + \frac{h^2}{12R^2} \chi_1 \right); & T_2 &= \frac{E_2 h}{1 - \nu_1 \nu_2} \left(\varepsilon_2 + \nu_1 \varepsilon_1 + \frac{h^2}{12R^2} \chi_2 \right); \\
S_1 &= Gh \left(\omega + \frac{h^2}{12R^2} \tau \right); & S_2 &= Gh \left(\omega - \frac{h^2}{12R^2} \tau \right); \\
G_1 &= -\frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)} \left[\chi_1 + \nu_2 \chi_2 + \frac{1}{R} (\varepsilon_1 + \nu_2 \varepsilon_2) \right]; & G_2 &= -\frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)} (\chi_2 + \nu_1 \chi_1); \\
G_{12} &= \frac{Gh^3}{12} \left(2\tau + \frac{\omega}{R} \right); & G_{21} &= \frac{Gh^3}{6} \tau.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

где E_1, E_2 – модули упругости материала оболочки в направлениях α, β ; ν_1 – коэффициент поперечного сжатия в направлении β при растяжении в α ; ν_2 – коэффициент поперечного сжатия в направлении α при растяжении в β ; G – модуль сдвига.

$t^*(\alpha, \beta)$ – температура срединной поверхности оболочки, определяемая через температуру внутренней $t_1(\alpha, \beta)$ и наружной $t_2(\alpha, \beta)$ поверхностей оболочки:

$$t^*(\alpha, \beta) = \frac{t_1(\alpha, \beta) + t_2(\alpha, \beta)}{2};$$

$t^{**}(\alpha, \beta)$ – характеризует перепад температуры по толщине стенки:

$$t^{**}(\alpha, \beta) = \frac{t_2(\alpha, \beta) - t_1(\alpha, \beta)}{2}.$$

Подставляя (1.4) в формулы (1.5) получим выражения для усилий и изгибающих моментов через перемещения $u(\alpha, \beta), v(\alpha, \beta), w(\alpha, \beta)$:

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{E_1 h}{(1 - \nu_1 \nu_2) R} \left[\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \nu_2 \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} - w \right) + c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right] - T_{1r}; \\
T_2 &= \frac{E_2 h}{(1 - \nu_1 \nu_2) R} \left[\frac{\partial v}{\partial \beta} - w + \nu_1 \frac{\partial u}{\partial \alpha} - c^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + w \right) \right] - T_{2r}; \\
S_1 &= \frac{Gh}{R} \left[\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} + c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \right]; \\
S_2 &= \frac{Gh}{R} \left[\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} - c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \right]; \\
G_1 &= -\frac{D_1}{R^2} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \nu_2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) w + \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \nu_2 \frac{\partial v}{\partial \beta} \right] - G_{1r};
\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$G_2 = -\frac{D_2}{R^2} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \nu_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) w + w \right] - G_{2t};$$

$$G_{12} = \frac{Gh^3}{6R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \right);$$

$$G_{21} = \frac{Gh^3}{6R^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{\partial v}{\partial \alpha} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \right);$$

где $D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_1 \nu_2)}$; $D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_1 \nu_2)}$; $c^2 = \frac{h^2}{12R^2}$;

$$T_{1t}(\alpha, \beta) = \frac{E_1 h}{1-\nu_1 \nu_2} (\alpha_{1t} + \nu_2 \alpha_{2t}) t^*(\alpha, \beta); \quad T_{2t}(\alpha, \beta) = \frac{E_2 h}{1-\nu_1 \nu_2} (\alpha_{2t} + \nu_1 \alpha_{1t}) t^*(\alpha, \beta);$$

$$G_{1t}(\alpha, \beta) = \frac{(\alpha_{1t} + \nu_2 \alpha_{2t}) E_1 h^2}{1-\nu_1 \nu_2} t^{**}(\alpha, \beta); \quad G_{2t}(\alpha, \beta) = \frac{(\alpha_{2t} + \nu_1 \alpha_{1t}) E_2 h^2}{1-\nu_1 \nu_2} t^{**}(\alpha, \beta).$$

1.1.3. Приведение исходных уравнений к системе трех дифференциальных уравнений в перемещениях при произвольно распределенных силовых нагрузках и температурных полях

Поставляя в (1.3) моменты G_1, G_2, G_{12}, G_{21} , определяемые формулами (1.6), получаем:

$$Q_1 = -\frac{D_1}{R^3} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \nabla^2 w + \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{1-\nu_2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1+\nu_2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} \right); \quad (1.7)$$

$$Q_2 = -\frac{D_1}{R^3} \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \nabla^2 w + \frac{\partial w}{\partial \beta} - (1-\nu_1) \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} \right).$$

Исключив в уравнений (1.1) с помощью (1.6) и (1.7) все внутренние силы оболочки, получим систему трех дифференциальных уравнений относительно трех основных функций: $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$. Эта система представлена в таблице 1.1.

Таблица.1.1. Система трех дифференциальных уравнений в перемещениях

$u(\alpha, \beta)$	$V(\alpha, \beta)$	$w(\alpha, \beta)$	Правая часть		
			силовая нагрузка	температурное воздействие	
$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \mu_1 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}$	$(\nu_2 + \mu_1) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}$	$-\nu_2 \frac{\partial}{\partial \alpha} + c^2 \left(\frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} - \mu_1 \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \beta^2} \right)$	$-\frac{(1-\nu_1\nu_2)R^2}{E_1 h} p_1(\alpha, \beta)$	$(\alpha_{1t} + \nu_2 \alpha_{2t}) R \frac{\partial t^*}{\partial \alpha}$	0
$(\nu_2 + \mu_1) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}$	$\lambda \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \mu_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}$	$-\lambda \frac{\partial}{\partial \beta} + c^2 (\nu_2 + 3\mu_1) \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \beta}$	$-\frac{(1-\nu_1\nu_2)R^2}{E_1 h} p_2(\alpha, \beta)$	$(\alpha_{2t} + \nu_1 \alpha_{1t}) \lambda R \frac{\partial t^*}{\partial \beta}$	$-\frac{(\alpha_{2t} + \nu_1 \alpha_{1t})}{6} \lambda h \frac{\partial t^{**}}{\partial \beta}$
$-\nu_2 \frac{\partial}{\partial \alpha} + c^2 \left(\frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} - \mu_1 \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \beta^2} \right)$	$-\lambda \frac{\partial}{\partial \beta} + c^2 (\nu_2 + 3\mu_1) \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \beta}$	$\lambda + c^2 \left[\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2(\nu_2 + 2\mu_1) \times \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right)^2 \lambda \right]$	$\frac{(1-\nu_1\nu_2)R^2}{E_1 h} p_3(\alpha, \beta)$	$-(\alpha_{2t} + \nu_1 \alpha_{1t}) \lambda R t^*$	$-\left[\frac{(\alpha_{1t} + \nu_2 \alpha_{2t})}{6} h \frac{\partial^2 t^{**}}{\partial \alpha^2} + \frac{(\alpha_{2t} + \nu_1 \alpha_{1t})}{6} h \lambda \frac{\partial^2 t^{**}}{\partial \beta^2} \right]$

1.1.4. Разрешающие дифференциальные уравнения при произвольно распределенных силовых и температурных воздействиях

При решении конкретных задач удобно свести систему трех дифференциальных уравнений в табл.1.1 к одному разрешающему уравнению восьмого порядка относительно разрешающей функции. Через разрешающую функцию с помощью соответствующих дифференциальных операторов выражаются все силовые и деформационные факторы оболочки.

При действии на оболочку только продольной поверхностной нагрузки $p_1(\alpha, \beta) \neq 0$, $p_2(\alpha, \beta) = 0$, $p_3(\alpha, \beta) = 0$ введем разрешающую функцию $\Phi(\alpha, \beta)$, связанную с перемещениями, следующими дифференциальными зависимостями:

$$u = \frac{1}{\mu_1} A_{11} \Phi_1 ; v = \frac{1}{\mu_1} A_{12} \Phi_1 ; w = \frac{1}{\mu_1} A_{13} \Phi_1 \quad (1.8)$$

где A_{11}, A_{12}, A_{13} - алгебраические дополнения системы уравнений табл.1.1.

Тогда в результате подстановки (1.8) в табл.1.1, на основании теорем алгебры, второе и третье уравнения обратятся в тождества, а первое даст следующее разрешающее уравнение при действии $p_1(\alpha, \beta)$:

$$L\Phi(\alpha, \beta) = \frac{R^4}{D_1} p_1(\alpha, \beta) \quad (1.9)$$

$$\text{где } L = \left[\frac{\partial^8}{\partial \alpha^8} + a_{6,2} \frac{\partial^8}{\partial \alpha^6 \partial \beta^2} + 2v_2 \frac{\partial^6}{\partial \alpha^6} + a_{4,4} \frac{\partial^8}{\partial \alpha^4 \partial \beta^4} + a_{4,2} \frac{\partial^6}{\partial \alpha^4 \partial \beta^2} + \lambda \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + a_{2,6} \frac{\partial^8}{\partial \alpha^2 \partial \beta^6} + \right. \\ \left. + a_{2,4} \frac{\partial^6}{\partial \alpha^2 \partial \beta^4} + a_{2,2} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \lambda^2 \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right)^2 + \frac{1 - v_1 v_2}{c^2} \lambda \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} \right]$$

$$a_{6,2} = \frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} + 4\mu_1 ; a_{4,4} = 2\lambda \left[3 + \frac{v_1}{\mu_2} (1 - v_1 v_2) - 4v_1 (v_2 + \mu_1) \right] ;$$

$$a_{4,2} = a_{4,4} ; a_{2,6} = \lambda a_{6,2} ; a_{2,4} = 2\lambda (a_{6,2} - v_2) ; a_{2,2} = \lambda \left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} - 2v_2 \right) ;$$

$$\lambda = \frac{E_2}{E_1} = \frac{v_2}{v_1} ; \mu_i = \frac{G}{E_i} (1 - v_1 v_2) ; \quad (i = 1; 2) .$$

Перемещения u , v , w , усилия, изгибающие моменты и другие факторы на основании (1.8) и обобщенного закона Гука (1.6) связаны с разрешающей функцией $\Phi(\alpha, \beta)$ следующими дифференциальными соотношениями:

$$\begin{aligned}
u(\alpha, \beta) &= \lambda \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} + \frac{c^2}{\mu_1} \left[\mu_1 \frac{\partial^6}{\partial \alpha^6} + (\lambda + 2\nu_2 \mu_1 + 4\mu_1^2) \frac{\partial^6}{\partial \alpha^4 \partial \beta^2} + \right. \\
&\quad \left. + \lambda(5\mu_1 + 2\nu_2) \frac{\partial^6}{\partial \alpha^2 \partial \beta^4} + 2\lambda(4\mu_1 + \nu_2) \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right) \right] \Phi; \\
v(\alpha, \beta) &= -\lambda \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{c^2}{\mu_1} \left[(\mu_1 + \nu_2) \frac{\partial^6}{\partial \alpha^5 \partial \beta} + (\mu_1 + \nu_2)(2\nu_2 + 4\mu_1) \frac{\partial^6}{\partial \alpha^3 \partial \beta^3} + \right. \\
&\quad \left. + (\lambda + \nu_2^2 + 3\mu_1 \nu_2) \frac{\partial^4}{\partial \alpha^3 \partial \beta} + \lambda(\mu_1 + \nu_2) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial^5}{\partial \beta^5} + \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} \right) + \lambda \nu_2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha \partial \beta^3} \right] \Phi; \\
w(\alpha, \beta) &= \nu_2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \alpha^3} - \lambda \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta^2} - \frac{c^2}{\mu_1} \left\{ \mu_1 \frac{\partial^5}{\partial \alpha^5} + [\lambda - (\nu_2 + 2\mu_1)^2] \frac{\partial^5}{\partial \alpha^3 \partial \beta^2} - \right. \\
&\quad \left. - \lambda \mu_1 \frac{\partial^5}{\partial \alpha \partial \beta^4} \right\} \Phi; \\
T_1(\alpha, \beta) &= \frac{E_1 h}{R} \left\langle \lambda \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \alpha^3} + \frac{c^2}{1 - \nu_1 \nu_2} \left\{ \frac{\partial^7}{\partial \alpha^7} + \left(\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} + \nu_2 + 4\mu_1 \right) \frac{\partial^7}{\partial \alpha^5 \partial \beta^2} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (5\lambda - 6\nu_2^2 - 4\mu_1 \nu_2 + 2\nu_2 \frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1}) \frac{\partial^7}{\partial \alpha^3 \partial \beta^4} + \lambda \left(\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - \nu_2 \right) \frac{\partial^7}{\partial \alpha \partial \beta^6} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left[7(\lambda - \nu_2^2) + 2 \frac{\nu_2}{\mu_1} (\lambda - \nu_2^2) - 4\mu_1 \nu_2 \right] \frac{\partial^5}{\partial \alpha^3 \partial \beta^2} + 2\nu_2 \frac{\partial^5}{\partial \alpha^5} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2\lambda \left(\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - \nu_2 \right) \frac{\partial^5}{\partial \alpha \partial \beta^4} + \frac{\lambda^2}{\mu_1} \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \beta^2} \right\} \Phi \right\rangle; \\
T_2(\alpha, \beta) &= \frac{D_2}{R^3} \left\{ \nu_1 \frac{\partial^7}{\partial \alpha^7} - (1 - 2\nu_1 \nu_2 - 4\nu_1 \mu_1) \frac{\partial^7}{\partial \alpha^5 \partial \beta^2} - [4(\mu_1 - \nu_2) + 5\nu_2] \frac{\partial^7}{\partial \alpha^3 \partial \beta^4} - \right. \\
&\quad \left. - \lambda \frac{\partial^7}{\partial \alpha \partial \beta^6} + \frac{\partial^5}{\partial \alpha^5} - 4\mu_1 \frac{\partial^5}{\partial \alpha^3 \partial \beta^2} - \lambda \frac{\partial^5}{\partial \alpha \partial \beta^4} + \frac{\lambda \nu_2}{\mu_1} \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \beta^2} \right\} \Phi; \\
S_1(\alpha, \beta) &= \frac{c^2 G h}{R} \left\{ -\frac{\nu_2}{\mu_1} \frac{\partial^7}{\partial \alpha^6 \partial \beta} + \left(\frac{\lambda - 2\nu_2^2}{\mu_1} - 4\nu_2 \right) \frac{\partial^7}{\partial \alpha^4 \partial \beta^3} - \left(\frac{\lambda + \nu_2^2}{\mu_1} + 2\nu_2 \right) \frac{\partial^5}{\partial \alpha^4 \partial \beta} + \right. \\
&\quad \left. + \lambda \left(\frac{\nu_2}{\mu_1} + 4 \right) \frac{\partial^7}{\partial \alpha^2 \partial \beta^5} + \frac{\lambda^2}{\mu_1} \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right)^2 + 6\lambda \frac{\partial^5}{\partial \alpha^2 \partial \beta^3} \right\} \Phi; \\
S_2(\alpha, \beta) &= \frac{c^2 G h}{R} \left\{ -\frac{\nu_2}{\mu_1} \frac{\partial^7}{\partial \alpha^6 \partial \beta} + \left(\frac{\lambda - 2\nu_2^2}{\mu_1} - 4\nu_2 \right) \frac{\partial^7}{\partial \alpha^4 \partial \beta^3} + \lambda \left(\frac{\nu_2}{\mu_1} + 4 \right) \frac{\partial^7}{\partial \alpha^2 \partial \beta^5} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\lambda^2}{\mu_1} \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right)^2 - \left(\frac{\lambda + \nu_2^2}{\mu_1} + 4\nu_2 \right) \frac{\partial^5}{\partial \alpha^4 \partial \beta} + 8\lambda \frac{\partial^5}{\partial \alpha^2 \partial \beta^3} \right\} \Phi;
\end{aligned} \tag{1.10}$$

$$G_1(\alpha, \beta) = -\frac{D_1}{R^2} \left\langle v_2 \frac{\partial^5}{\partial \alpha^5} - (\lambda - v_2^2) \frac{\partial^5}{\partial \alpha^3 \partial \beta^2} + \lambda \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} - \lambda v_2 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial^4}{\partial \beta^4} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) + \right. \\ \left. + c^2 \left\{ 4(v_2 + 2\mu_1) \frac{\partial^7}{\partial \alpha^5 \partial \beta^2} + \left[2(3\lambda - v_2^2) + \frac{v_2(\lambda - v_2^2)}{\mu_1} \right] \frac{\partial^7}{\partial \alpha^3 \partial \beta^4} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\lambda(\lambda - v_2^2)}{\mu_1} \frac{\partial^7}{\partial \alpha \partial \beta^6} \right\} \Phi \right\rangle;$$

$$G_2(\alpha, \beta) = -\frac{D_2}{R^2} \left\langle v_1 v_2 \frac{\partial^5}{\partial \alpha^5} + v_2 \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} - \lambda \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial^4}{\partial \beta^4} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) - \right. \\ \left. - c^2 \left\{ v_1 \frac{\partial^7}{\partial \alpha^7} + \left[1 + \frac{v_2}{\mu_1} - \frac{v_1(v_2 + 2\mu_1)^2}{\mu_1} \right] \frac{\partial^7}{\partial \alpha^5 \partial \beta^2} + \left[\lambda(1 - v_1 \mu_1) - (v_2 + 2\mu_1)^2 \right] \frac{\partial^7}{\partial \alpha^3 \partial \beta^4} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\mu_1} \left[\lambda - (v_2 + 2\mu_1)^2 \right] \frac{\partial^5}{\partial \alpha^3 \partial \beta^2} - \lambda \frac{\partial^7}{\partial \alpha \partial \beta^6} \right\} \right\rangle \Phi.$$

Аналогично, разрешающие функции при действии на оболочку только радиальной поверхностной нагрузки; температурного поля постоянного по толщине; температурного перепада по толщине записываются следующими образами:

$$L\Phi(\alpha, \beta) = \frac{R^4}{D_1} p_3(\alpha, \beta);$$

$$L\Phi^*(\alpha, \beta) = \frac{\alpha_{2t} + v_1 \alpha_{1t}}{c^2} R t^*(\alpha, \beta);$$

$$L\Phi^{**}(\alpha, \beta) = -\frac{\alpha_{2t} + v_1 \alpha_{1t}}{6c^2} h t^{**}(\alpha, \beta).$$

Перемещения, усилия, изгибающие моменты и другие искомые факторы связаны с разрешающей функцией известными соотношениями [68].

1.2. Уравнения «типа теории Власова - Доннелла»: упрощенные по критерию В.В.Новожилова уравнения общей теории физически ортотропных оболочек

Уравнения общей теории оболочек носят общий характер. На их основе можно определить НДС оболочек при действии произвольной поверхностной нагрузки и температурного поля. Для решения многих задач прочности и устойчивости оболочек получили широкое применение уравнения моментной

технической теории (уравнения изотропных пологих оболочек, или Власова-Доннелла). В различных источниках они записываются по-разному, но наиболее часто – в форме Власова или Доннелла. Различны также способы их получения: либо путём упрощения исходных соотношений [14], [26], либо путём наложения определённых ограничений на изменяемость НДС оболочки [66]. При втором способе задача ставится так: из общих уравнений теории оболочек, записанных в предыдущем разделе, получить уравнения, пригодные для определения напряжённого состояния с высокой изменяемостью в направлении образующей и контура оболочки.

Математически это означает, что имеет место приближённое равенство [66]

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} \right| \approx \left| \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} \right| \gg |f|. \quad (1.11)$$

где f - любой фактор в оболочке (разрешающая функция, усилие и т.д.).

Заметим, что изменяемость функции на данном интервале в каком-либо направлении можно характеризовать, как это принято в [18], величиной, равной отношению некоторого среднего для рассматриваемого интервала абсолютного значения её производной к среднему абсолютному значению самой функции.

Упростим разрешающее уравнение общей теории исходя из (1.11). Приведем здесь разрешающее дифференциальное уравнение этой теории для случая действия продольного нагрузки $p_1(\alpha, \beta)$:

$$L\Phi(\alpha, \beta) = \frac{R^4}{D_1} p_1(\alpha, \beta); \quad (1.12)$$

$$\text{где } L = \frac{\partial^8}{\partial \alpha^8} + a_{6,2} \frac{\partial^8}{\partial \alpha^6 \partial \beta^2} + a_{4,4} \frac{\partial^8}{\partial \alpha^4 \partial \beta^4} + a_{2,6} \frac{\partial^8}{\partial \alpha^2 \partial \beta^6} + \lambda^2 \frac{\partial^8}{\partial \beta^8} + \lambda \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{c^2} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4}.$$

При этом значительно упрощаются и соотношения (1.9) и (1.10), связывающие искомые факторы – перемещения, усилия, изгибающие моменты - с разрешающей функцией [62]:

$$u(\alpha, \beta) = \lambda \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} + \frac{c^2}{\mu_1} \left[\mu_1 \frac{\partial^6}{\partial \alpha^6} + (\lambda + 2\nu_2 \mu_1 + 4\mu_1^2) \frac{\partial^6}{\partial \alpha^4 \partial \beta^2} + \lambda(5\mu_1 + 2\nu_2) \frac{\partial^6}{\partial \alpha^2 \partial \beta^4} + \lambda^2 \frac{\partial^6}{\partial \beta^6} \right] \Phi;$$

$$\begin{aligned}
v(\alpha, \beta) &= -\lambda \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{c^2}{\mu_1} \left[(\mu_1 + \nu_2) \frac{\partial^6}{\partial \alpha^5 \partial \beta} + (\mu_1 + \nu_2)(2\nu_2 + 4\mu_1) \frac{\partial^6}{\partial \alpha^3 \partial \beta^3} \right. \\
&\quad \left. + \lambda(\mu_1 + \nu_2) \frac{\partial^6}{\partial \alpha \partial \beta^5} \right] \Phi; \\
w(\alpha, \beta) &= \nu_2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \alpha^3} - \lambda \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta^2} - \frac{c^2}{\mu_1} \left[\mu_1 \frac{\partial^5}{\partial \alpha^5} + (\lambda - (\nu_2 + 2\mu_1)^2) \frac{\partial^5}{\partial \alpha^3 \partial \beta^2} - \lambda \mu_1 \frac{\partial^5}{\partial \alpha \partial \beta^4} \right] \Phi; \\
T_1(\alpha, \beta) &= \frac{E_1 h}{R} \left\{ \lambda \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \alpha^3} + \frac{c^2}{1 - \nu_1 \nu_2} \left[\frac{\partial^7}{\partial \alpha^7} + \left(\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} + \nu_2 + 4\mu_1 \right) \frac{\partial^7}{\partial \alpha^5 \partial \beta^2} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (5\lambda - 6\nu_2^2 - 4\mu_1 \nu_2 + 2\nu_2 \frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1}) \frac{\partial^7}{\partial \alpha^3 \partial \beta^4} + \lambda \left(\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - \nu_2 \right) \frac{\partial^7}{\partial \alpha \partial \beta^6} \right] \Phi \right\}; \quad (1.13) \\
T_2(\alpha, \beta) &= \frac{D_2}{R^3} \left\{ \nu_1 \frac{\partial^7}{\partial \alpha^7} - (1 - 2\nu_1 \nu_2 - 4\nu_1 \mu_1) \frac{\partial^7}{\partial \alpha^5 \partial \beta^2} - [4(\mu_1 - \nu_2) + 5\nu_2] \frac{\partial^7}{\partial \alpha^3 \partial \beta^4} - \lambda \frac{\partial^7}{\partial \alpha \partial \beta^6} \right\} \Phi; \\
S(\alpha, \beta) &= S_1(\alpha, \beta) = S_2(\alpha, \beta) = \\
&= \frac{c^2 G h}{R} \left\{ -\frac{\nu_2}{\mu_1} \frac{\partial^7}{\partial \alpha^6 \partial \beta} + \left(\frac{\lambda - 2\nu_2^2}{\mu_1} - 4\nu_2 \right) \frac{\partial^7}{\partial \alpha^4 \partial \beta^3} + \lambda \left(\frac{\nu_2}{\mu_1} + 4 \right) \frac{\partial^7}{\partial \alpha^2 \partial \beta^5} + \frac{\lambda^2}{\mu_1} \frac{\partial^7}{\partial \beta^7} \right\} \Phi; \\
G_1(\alpha, \beta) &= -\frac{D_1}{R^2} \left\langle \nu_2 \frac{\partial^5}{\partial \alpha^5} - (\lambda - \nu_2^2) \frac{\partial^5}{\partial \alpha^3 \partial \beta^2} - \lambda \nu_2 \frac{\partial^5}{\partial \alpha \partial \beta^4} + c^2 \left\{ 4(\nu_2 + 2\mu_1) \frac{\partial^7}{\partial \alpha^5 \partial \beta^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left[2(3\lambda - \nu_2^2) + \frac{\nu_2}{\mu_1} (\lambda - \nu_2^2) \right] \frac{\partial^7}{\partial \alpha^3 \partial \beta^4} + \frac{\lambda(\lambda - \nu_2^2)}{\mu_1} \frac{\partial^7}{\partial \alpha \partial \beta^6} \right\} \right\rangle \Phi; \\
G_2(\alpha, \beta) &= -\frac{D_2}{R^2} \left\langle \nu_1 \nu_2 \frac{\partial^5}{\partial \alpha^5} - \lambda \frac{\partial^5}{\partial \alpha \partial \beta^4} - c^2 \left\{ \nu_1 \frac{\partial^7}{\partial \alpha^7} + \left[1 + \frac{\nu_2}{\mu_1} - \frac{\nu_1(\nu_2 + 2\mu_1)^2}{\mu_1} \right] \frac{\partial^7}{\partial \alpha^5 \partial \beta^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left[\lambda(1 - \nu_1 \mu_1) - (\nu_2 + 2\mu_1)^2 \right] \frac{\partial^7}{\partial \alpha^3 \partial \beta^4} - \lambda \frac{\partial^7}{\partial \alpha \partial \beta^6} \right\} \right\rangle \Phi.
\end{aligned}$$

В частном случае изотропного материала ($\lambda = 1$) дифференциальное уравнение (1.12) и соотношения (1.13) переходят в соответствующие зависимости теории пологих оболочек, или уравнений Власова-Доннелла [14,46].

При больших значениях показателя изменяемости напряжённого состояния уравнения (1.12) из-за возможности пренебрежения его последним членом переходит в полигармоническое уравнение, распадающееся на два бигармонических:

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2(\nu_2 + 2\mu_1) \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \lambda \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \right] \left[\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + \left(\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - 2\nu_2 \right) \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \lambda \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \right] \Phi(\alpha, \beta) = \frac{R^4}{D_1} p_1(\alpha, \beta)$$

Одно из них описывает тангенциальное напряженное состояние, являющееся аналогом плоского напряженного состояния:

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} + \left(\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - 2\nu_2 \right) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \lambda \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \beta^4} = - \frac{(1 - \nu_1 \nu_2) R^2}{E_1 h} p(\alpha, \beta), \quad (1.14)$$

$$u = \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\lambda}{\mu_1} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \Phi; \quad V = - \left(1 + \frac{\nu_2}{\mu_1} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta};$$

$$T_1 = \frac{E_1 h}{(1 - \nu_1 \nu_2) R} \left[\frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} + \left(\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - \nu_2 \right) \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \beta^2} \right] \Phi;$$

$$T_2 = \frac{E_2 h}{(1 - \nu_1 \nu_2) R} \left(\nu_1 \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} - \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \beta^2} \right) \Phi; \quad S = \frac{E_1 h}{(1 - \nu_1 \nu_2) R} \left(\lambda \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} - \nu_2 \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \beta} \right) \Phi.$$

1.3. Дискретно-континуальная модель В.З.Власова «ортотропной» оболочки: статические и геометрические гипотезы, уравнения. Полубезмоментная модель исходя из критерия В.В. Новожилова

Наиболее простыми вариантами теории оболочек, занимающими промежуточное положение между общей теорией и безмоментной теорией, являются полубезмоментная теория оболочек и теория краевого эффекта, наиболее полно разработанная вначале применительно к решению задач осесимметричного деформирования оболочек [82], а много позже - и для случаев действия нагрузки по закону $\sin \beta$, $\cos \beta$ [87].

Уравнения полубезмоментной теории (или технической теории) [15] оболочек впервые были получены на основе принятия статических и геометрических гипотез, что позволило заменить оболочку некоторой дискретно-континуальной моделью [14]. Дискретно-континуальная модель В.З.Власова «ортотропной» оболочки заключается в том, что цилиндрические оболочки произвольного очертания, подкреплённые продольными и поперечными ребрами (стрингерами и шпангоутами) при достаточно частом расположении этих ребер можно рассмотреть, как тонкостенную ортотропную пространственную систему, в поперечных сечениях которой могут возникать только тангенциальные (нормальные и сдвигающие) усилия. Продольные изгибающие и крутящие

моменты, вследствие их слабого влияния на напряжённое состояние оболочки, принимаются равными нулю. По продольным сечениям, помимо нормальных и сдвигающих усилий, могут возникать также и поперечные силы и окружные (кольцевые) изгибающие моменты. В силу указанных статических гипотез за расчётную модель принимается тонкостенная система, состоящая по длине (вдоль образующей) как бы из бесконечного множества поперечных элементарных изгибающих полосок. Каждая из таких полосок уподобляется плоскому кривому стержню, работающему в каждом своем сечении не только на растяжение -сжатие, но также и на поперечный изгиб и сдвиг. Взаимодействие между двумя смежными поперечными полосками в оболочке выражается в передаче с одной полоски на другие полоски одних только нормальных и сдвигающих усилий.

В этом случае проблема может быть сведена к решению дифференциального уравнения четвертого порядка по продольной координате, которое при разложении нагрузки и всех факторов в ряды по окружной координате приводится к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению для n -го члена ряда [15]:

$$N_n^{IV}(\alpha) - 2r_n^2 N_n^{II}(\alpha) + s_n^4 N_n(\alpha) = 0, \quad (1.15)$$

где $N_n(\alpha)$ - амплитудное значение продольного усилия, разложенного, как и остальные силовые факторы и перемещения, в ряд по окружной координате:

$$N(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} N_n(\alpha) \cos n\beta,$$

r_n^2 , s_n^4 - коэффициенты, зависящие от номера гармоники n -го члена тригонометрического ряда и от упругих характеристик подкрепляющих элементов и самой оболочки, получившей название «ортотропной».

$$r_n^2 = \frac{1}{2} \frac{BD}{C} \frac{n^2(n^2-1)^2}{n^4 B - 2Ben^2 + BR^2}; \quad (1.16)$$

$$s_n^4 = \frac{BD}{A} \frac{n^4(n-1)^2}{n^4 B - 2Ben^2 + BR^2}.$$

В технике, как известно, такие тонкостенные конструкции называют конструктивно-ортотропными, в отличие от анизотропных, физически ортотропных, рассматриваемых в диссертации.

Изложенный метод позволяет рассчитать оболочки с учётом $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega, \varepsilon_2$, не равных нулю.

Власов В.З. [14] также вводит и геометрические гипотезы, согласно которым деформации удлинений оболочки по линиям, параллельным направляющей её средней поверхности, и деформации сдвига в срединной поверхности, как величины, мало влияющие на состояние внутренних сил оболочки, принимаются равными нулю ($\omega = 0, \varepsilon_2 = 0$).

При этом деформация оболочки происходит так:

- линии этой поверхности, перпендикулярные к образующей в каждой точке остаются не растяжными;
- углы между линиями главных кривизн (координатными линиями), прямые до деформации, остаются прямыми и после деформации.

Исходя из гипотезы, что деформация сдвига равна нулю $\omega = 0$. В приведенном выше уравнении (1.16), жесткость C , соответствующая этой деформации, полагается равной бесконечности, тогда уравнение (1.16) принимает вид:

$$N_n^{IV}(\alpha) + s_n^4 N_n(\alpha) = 0 \quad (1.17)$$

Это уравнение, по сути, только в другой записи широко используется при описании основного состояния при решении многих силовых и термоупругих задач [44].

Здесь, в отличие от дискретно-континуальной модели В.З. Власова «ортотропной» оболочки рассматривается оболочки из не изотропного, а физически ортотропного материала. Такой вид материала, когда плоскости упругой симметрии совпадают с координатными плоскостями, представляется важным ввиду его широкого применения в конструкциях [7,9,12,27,81].

Как отмечает В. В. Новожилов [66], некоторые из трактовки В.З. Власова с точки зрения основной идеи полубезмоментной теории ($G_1 = G_{12} = 0$) не являются обязательными.

Представляется наиболее рациональным подход к упрощению уравнений, предложенный В. В. Новожиловым [66], заключающийся в том, что в уравнениях общей теории оболочек принимается сильное неравенство:

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} \right| \gg \left| \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} \right|, \quad (1.18)$$

означающее, что характер изменения перемещений и напряжений в направлении образующей существенно более плавный, чем в направлении контура.

И если принять в качестве рабочей гипотезы сильное неравенство (1.18), то придём к одному из вариантов полубезмоментной теории, для которого основное разрешающее уравнение в случае действия продольной нагрузки, вместо (1.9), принимает вид:

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} + \frac{c^2 \lambda}{1 - \nu_1 \nu_2} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right)^2 \Phi = - \frac{R^2}{E_2 h} p(\alpha, \beta) \quad (1.19)$$

Вследствие применения (1.18) к (1.9- 1.10), в (1.19), по сравнению с (1.9), вдвое понижается порядок разрешающего дифференциального уравнения по продольной координате.

При этом существенным образом упрощаются и соотношения, связывающие все искомые факторы с функцией $\Phi(\alpha, \beta)$:

$$\begin{aligned} u(\alpha, \beta) &= \lambda \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2}; \quad v(\alpha, \beta) = -\lambda \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta}; \quad w(\alpha, \beta) = -\lambda \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta^2}; \\ T_1(\alpha, \beta) &= \lambda \frac{E_1 h}{R} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \alpha^3}; \quad T_2(\alpha, \beta) = -\lambda \frac{D_2}{R^3} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial^6}{\partial \beta^6} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - \frac{\nu_2}{\mu_1} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \Phi; \\ S(\alpha, \beta) &= S_1(\alpha, \beta) = S_2(\alpha, \beta) = \frac{c^2 G h}{R} \frac{\lambda^2}{\mu_1} \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right)^2 \Phi; \\ G_1(\alpha, \beta) &= \lambda \nu_2 \frac{D_1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial^4}{\partial \beta^4} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \Phi; \quad G_2(\alpha, \beta) = \lambda \frac{D_2}{R^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial^4}{\partial \beta^4} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \Phi. \end{aligned} \quad (1.20)$$

При $\lambda = 1$ уравнение (1.19) и соотношения (1.20) переходят в известные уравнения и соотношения полубезмоментной теории [14], или основного напряженного состояния [18].

В изотропных вариантах ($\lambda = 1$) эти теории с отвечающими им разрешающими уравнениями (1.19), (1.20) получили применение при решении

различных задач из области прочности конструкций, как самостоятельные [14], так и в качестве элементарных напряженных состояний: основного и с большой изменчивостью [18, 68].

К наиболее простому варианту полубезмоментной теории оболочек приводит следующее допущение:

$$|\partial^2 f / \partial \beta^2| \gg |f|. \quad (1.21)$$

С учётом (1.21) разрешающее дифференциальное уравнение (1.19) и остальные соотношения упрощаются:

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} + \frac{c^2 \lambda}{1 - \nu_1 \nu_2} \frac{\partial^8}{\partial \beta^8} \Phi = -\frac{R^2}{E_2 h} p(\alpha, \beta). \quad (1.22)$$

Было показано [46], насколько большие возможности сулит при преобразовании выражений для искомых факторов в ряде задач предположение (1.21) при рассмотрении напряжённого состояния от различного рода локальных воздействий.

Уравнения напряженного состояния типа краевого эффекта получаются из уравнений моментной технической теории, если принять предположение, прямо противоположное принятому при выводе уравнений полубезмоментной теории, а именно $|\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}| \gg |\frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2}|$.

$$(1.23)$$

Разрешающее уравнение при действии радиальной нагрузки:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + \frac{1 - \nu^2}{c^2} w = \frac{R^4}{D} p_3(\alpha, \beta). \quad (1.24)$$

И силовые факторы краевого эффекта:

$$T_2 = -\frac{E_2 h}{R} w; \quad G_1 = -\frac{\nu_2 D_1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}; \quad G_2 = -\frac{D_2}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}.$$

В виде (1.24) уравнение получило широкое применение при рассмотрении задач осесимметричного деформирования оболочек под действием радиальной нагрузки [82]. Его отличие от случая осесимметричного деформирования заключается лишь в замене обычной производной на частную.

1.4. Об асимптотической погрешности уравнений теории оболочек и расчленении напряженного состояния

Асимптотический анализ точных уравнений теории изотропных оболочек показывает, что в зависимости от изменяемости внешних воздействий и напряжённого состояния они допускают те или иные упрощения [18, 29]. Степень упрощения зависит от показателя изменяемости поверхностной или краевой нагрузки и, следовательно, от показателя изменяемости напряженного состояния.

Обозначим показатель изменяемости через ρ и заметим, что он связан с относительной толщиной оболочки h/R и номером гармоники n при разложении внешней нагрузки и напряженного состояния в ряд по окружной координате [18]:

$$n = h_*^{-\rho}; \quad h_* = c; \quad c = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{\frac{h}{R}}. \quad (1.25)$$

В (1.25) величина n характеризует изменяемость n -й гармоники.

Таблица 1.2

Тип теории оболочек или дифференциального уравнения	Асимптотическая погрешность
Полубезмоментная теория. Теория краевого эффекта.	$\varepsilon \approx \frac{n^2}{2\sqrt{3}\lambda} \frac{h}{R} \left(\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} + 4\mu_1 \right)$
Уравнения Власова – Доннелла.	$\varepsilon \approx \frac{2 \left(\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} + 4\mu_1 - \nu_2 \right)}{n^2 \left(\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} + 4\mu_1 \right)}$
Уравнения изгибного состояния. Уравнения тангенциального состояния.	$\varepsilon \approx \frac{2 \left(\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} + 4\mu_1 - \nu_2 \right)}{c^2 n^2 \left(\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} + 4\mu_1 \right)}$

В зависимости от ρ можно прийти к приближённым уравнениям теории оболочек, описывающим различные элементарные напряжённые состояния. Это уравнения краевого эффекта, полубезмоментной теории, моментной технической

теории, или Власова-Доннелла, а также уравнения типа плоской задачи и изгиба пластинки [18]. Их асимптотические погрешности представлены в табл. 1.2.

Наименьшую асимптотическую погрешность при $\rho \rightarrow 0$ дают уравнения полубезмоментной теории, описывающие так называемое основное состояние [18], и простого краевого эффекта. При увеличении ρ погрешность этих уравнений растёт, а при $\rho = 1/2$ равна единице. Для уравнений напряжённого состояния с большой изменчивостью наибольшая асимптотическая погрешность имеет место при $\rho \rightarrow 0$. При росте ρ погрешность резко падает и монотонно стремится к нулю, практически исчезая при $\rho = 1/2$. Асимптотическая погрешность уравнений изгибного и тангенциального состояний при $\rho \ll 1/2$ значительная, при $\rho \gg 1/2$ стремится к нулю.

НДС оболочки, таким образом, может быть асимптотически расчленено на так называемые элементарные напряжённые состояния [18], каждое из которых описывается известными приближёнными уравнениями теории оболочек и плоских тел, полученными в разные времена.

1.5. Принципы и методы асимптотического синтеза и сращивания напряженного состояния на основе приближенных уравнений

Известно, что интегрирование уравнений общей теории оболочек позволяет найти НДС с высокой степенью точности, но, как правило, требует проведения трудоёмкой вычислительной работы при реализации краевых задач. В этом отношении исключения составляют лишь оболочки с шарнирным закреплением, где вычислительные проблемы легко переложить «на плечи» современных высокоскоростных компьютеров.

Одним из наиболее привлекательных путей получения достаточно точных и в то же время легко поддающихся численной реализации решений является синтез [72,71,46] и предлагаемое в диссертации сращивание НДС оболочек на основе приближённых уравнений, описывающих так называемые элементарные напряженные состояния. Под этими терминами понимается *сведение в единое целое результатов решения различных приближённых уравнений, каждое из*

которых хорошо описывает то или иное элементарное напряжённое состояние. Наибольшие трудности при этом возникают, когда напряжённое состояние описывается функциями, изменяемость которых $0 \leq \rho < \infty$ ($0 \leq n < \infty$) колеблется в широком диапазоне, как, например, при сильно локализованных силовых или температурных воздействиях. В этих случаях вклад того или иного элементарного напряжённого состояния существенно зависит от изменяемости поверхностной или краевой нагрузки. При этом, естественно, вопросом первостепенной важности является установление границы использования каждого из них в соответствии с вносимой ими погрешностью и вкладом в полное НДС. Причём, такой подход должен сочетать достаточно прогнозируемую точность и существенно меньшую трудоёмкость по сравнению с возможным решением на основе полных уравнений.

Важным ориентиром, указывающим путь в направлении построения приближенного напряжённого состояния может послужить установление асимптотических погрешностей для различных приближенных уравнений теории ортотропных оболочек (табл. 1.2), хотя они дают лишь качественную картину источника появления действительных погрешностей.

При решении практических задач важнейшим моментом является правильный выбор границ срачивания решений на основе примененных приближенных уравнений. Этому способствует графическое представление поведения асимптотической погрешности уравнений, описывающих различные элементарные состояния в зависимости от показателя изменяемости ρ [18], показанное на рис.1.2.

Характер поведения функций, описывающих асимптотические погрешности на рис. 1.2, говорит о наличии у них точки пересечения $(\rho = \bar{\rho}), (n = \bar{n})$ на оси абсцисс, разделяющей ее на два участка: в одном из них минимальную асимптотическую погрешность имеют уравнения Власова – Доннелла $(\rho > \bar{\rho}), (n > \bar{n})$ (кривая 1), в другом – уравнения полубезмоментной теории и краевого эффекта $(\rho < \bar{\rho}), (n < \bar{n})$ (кривая 2).

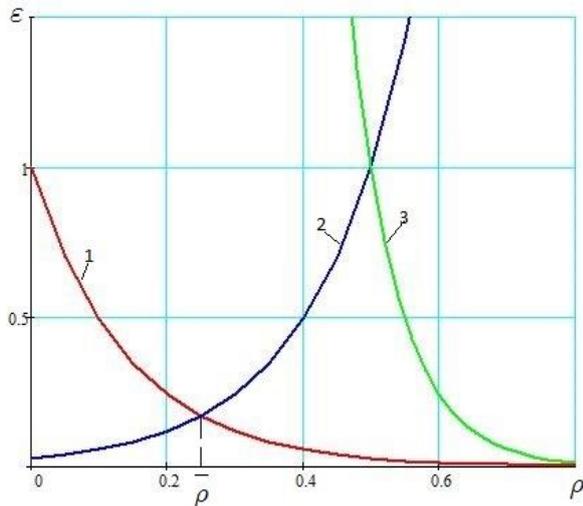


Рис.1.2

Отсюда вытекает **принцип минимума асимптотической погрешности для синтеза полного напряженно-деформированного состояния, в основе которого лежит применение для описания элементарных напряженных состояний приближенных дифференциальных уравнений с минимальной асимптотической**

погрешностью, из которого естественным образом вытекают методы асимптотического синтеза напряжённо-деформированного состояния (МАС).

П е р в ы й МАС основан на условии обеспечения минимальной асимптотической погрешности за счет применения уравнений полубезмоментной теории и теории краевого эффекта при «низких» номерах гармоник $n \leq \bar{n}$, а уравнений моментной технической теории (типа пологих оболочек, или Власова-Доннелла) - при «высоких» номерах гармоник $n > \bar{n}$.

Здесь и дальше под n понимается номер члена ряда при разложении нагрузки и всех факторов по окружной координате.

Условие обеспечения минимальной асимптотической погрешности очевидным образом, на основании табл. 1.2, приводит к следующей зависимости:

$$n^4 \approx 2\sqrt{3} \frac{R}{h} \left[\sqrt{\lambda} \left(\frac{1 - \nu_1 \nu_2}{2\sqrt{\mu_1 \mu_2}} + 2\sqrt{\mu_1 \mu_2} \right) - \frac{\nu_2}{2} \right] \left(\frac{1 - \nu_1 \nu_2}{2\sqrt{\mu_1 \mu_2}} + 2\sqrt{\mu_1 \mu_2} \right)^{-2} \quad (1.26)$$

Округленное до ближайшего целого числа значение n , найденное по формуле (1.26), дает искомую границу $n = \bar{n}$.

В т о р о й МАС заключается в применении при «низких» ($n \leq \bar{n}$) и «высоких» ($n > n^*$) номерах гармоник уравнений четвертого порядка по продольной координате: полубезмоментной теории и теории краевого эффекта при ($n \leq \bar{n}$), изгибного и тангенциального состояний ($n > n^*$), а при «средних» номерах

($n < n \leq n^*$) – моментной технической теории (теории пологих оболочек, или уравнений Власова-Доннелла).

Поясним сущность и происхождение номера гармоники $n = n^*$, разделяющего «средние» и «высокие» значения n , для чего обратимся к характеристическим уравнениям, соответствующим моментной технической теории:

$$L = \frac{\partial^8}{\partial \alpha^8} + a_{6,2} \frac{\partial^8}{\partial \alpha^6 \partial \beta^2} + a_{4,4} \frac{\partial^8}{\partial \alpha^4 \partial \beta^4} + a_{2,6} \frac{\partial^8}{\partial \alpha^2 \partial \beta^6} + \lambda^2 \frac{\partial^8}{\partial \beta^8} + \lambda \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{c^2} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} \quad (1.27)$$

Значение номер ряда n , при котором можно перейти к уравнениям изгибного и тангенциального состояний, получим из сравнения последнего члена уравнения (1.27) с наибольшим членом, не содержащим множителя c^{-2} :

$$a_{4,4} n^4 \gg \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{c^2} \lambda; \quad (1.28)$$

$$n^4 \gg \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{2c^2} \left[3 + \frac{\nu_1}{\mu_2} (1 - \nu_1 \nu_2) - 4\nu_1 (\nu_2 + \mu_1) \right]^{-1}.$$

Далее учтем, что в отличие от уравнений общей теории оболочек, которые по условиям своего вывода содержат в себе погрешность порядка h/R по сравнению с единицей, приближённые уравнения теории оболочек, описывающие элементарные напряжённые состояния (например, уравнения краевого эффекта), являются источником погрешности порядка $\sqrt{h/R}$ по сравнению с единицей [66]. Поэтому, если в общей теории оболочек нет смысла сохранять члены порядка меньшего, чем h/R , то при синтезе напряжённого состояния на основе приближённых уравнений вполне допустимо пренебрегать величинами порядка $\sqrt{h/R}$ по сравнению с единицей, то есть можно принять $\sqrt{h/R} \ll 1$. (1.29)

Тогда из системы сильных неравенств (1.28), (1.29) получаем

$$n^4 \approx 6(1 - \nu_1 \nu_2) \left(\frac{R}{h} \right)^2 \sqrt{\frac{R}{h}} \left[3 + \frac{\nu_1}{\mu_1} (1 - \nu_1 \nu_2) - 4\nu_1 (\nu_2 + \mu_1) \right]^{-1}. \quad (1.30)$$

Округлённое до ближайшего целого числа значение n , определяемое на основании зависимости (1.30), дает искомое значение n^* .

Для оценки порядка величин n, n^* , найденных по формулах (1.26), (1.30), примем следующие параметры $R/h = 130$; $\nu_1 = 0.3$; $\lambda = 0.1$; $1; 10$, тогда получим

	$\lambda = 0.1$	$\lambda = 1$	$\lambda = 10$
\bar{n}	3	4	4
n^*	22	24	24

(1.31)

Таким образом, применение первого и второго МАС приводит к асимптотически точным результатам, полученным для прикладных задач путем синтеза (сращивания) решений названных выше приближенных уравнений на границах (1.31).

Значения в (1.31) соответствуют действию одной нагрузки ($k=1$), а при двух нагрузках ($k=2$) получаем

	$\lambda = 0.1$	$\lambda = 1$	$\lambda = 10$
\bar{n}	2	2	2
n^*	11	12	12

(1.32)

Обратимся к условиям (1.19) перехода от общей теории к полубезмоментной. Для этого запишем функции, входящие в решения, соответствующие этой теории

$$\Phi_n^0(\alpha, \beta) \sim e^{-\mu_n \alpha} \begin{pmatrix} \sin \mu_n \alpha \\ \cos \mu_n \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin n\beta \\ \cos n\beta \end{pmatrix}. \quad (1.33)$$

Здесь μ_n - модуль корней характеристического уравнения полубезмоментной теории $\lambda^4 + 4\mu_n^4 = 0$; $4\mu_n^4 = \frac{\lambda c^2}{1 - \nu_1 \nu_2} n^4 (n^2 - 1)^2$. (1.34)

Вычислим вторые производные функции $\Phi_n^0(\alpha, \beta)$ по α и β и поставим в неравенство (1.19) получим $n^2 \gg \mu_n^2$ ($n \geq 2$)

Если принять во внимание выражение для μ_n^2 , определяемое на основании уравнении (1.29), получим: $n^2 \geq \frac{\sqrt{\lambda}}{4\sqrt{3(1-\nu_1\nu_2)}} \frac{h}{R} n^2 (n^2 - 1)$. (1.35)

Будем пренебрегать величинами порядка $\sqrt{h/R}$ по сравнению с единицей $\sqrt{h/R} \ll 1$. Тогда из (1.35) получим зависимость:

$$n^2 \approx 4 \sqrt{\frac{3(1-\nu_1\nu_2)}{\lambda}} \sqrt{\frac{R}{h}} \quad (1.36)$$

Округлённое до ближайшего целого числа значение n , определяемое на основании зависимости (1.36) дает искомое значение \widehat{n} .

Таким образом, номера гармоник $n = \bar{n}$, $n = n^*$ (или $n = \widehat{n}$) очерчивают области применения приближенных уравнений, обеспечивающих минимальную погрешность решений. И тогда полное напряженное состояние, таким образом, при наличии значений \bar{n} , n^* может быть построено на основе одного из методов асимптотического синтеза напряженного состояния [66]:

$$\Phi(\alpha, \beta) \approx \begin{cases} \Phi^o(\alpha, \beta), & n \leq \bar{n} \\ \Phi^*(\alpha, \beta), & n > \bar{n} \end{cases}; \quad \Phi(\alpha, \beta) \approx \begin{cases} \Phi^o(\alpha, \beta), & n \leq \bar{n} \\ \Phi^*(\alpha, \beta), & \bar{n} < n \leq n^* \\ \Phi^r(\alpha, \beta), & n > n^* \end{cases}. \quad (1.37)$$

В (1.37) слагаемые относятся к основному состоянию (Φ^o), напряженному состоянию с высокой изменчивостью (Φ^*) и тангенциальному состоянию (Φ^r).

Метод сращиваемых аналитических решений (МСАР). Только что были изложены два метода синтеза напряженного состояния (МАС), являющиеся асимптотически точными. Они с точностью гипотез Кирхгофа-Лява описывают НДС оболочек при всех типах нагрузок и нагрева локализованного характера. Причем, роль входящих в них элементарных напряженных состояний может быть существенно различной при большом разнообразии силовых и температурных воздействий. На практике имеют место случаи, когда нагрузка или температурное поле существенно более плавные вдоль образующей, чем в окружном направлении. Сюда относятся рассматриваемые в диссертации случаи гидростатического несимметричного давления при частично заполненных сосудах и температурные поля в отсеках летательных аппаратов, частично заполненных топливом. НДС в таких ситуациях характеризуется достаточно высокой изменчивостью вдоль контура на удалении от краев конструкции, незначительной изменчивостью вдоль образующей на большей ее части и весьма существенной изменчивостью, и интенсивностью в зонах установки днищ, особенно при их большой жесткости и несовершенстве конфигурации (за исключением случаев, когда применяются

днища типа Бицено и пр.). НДС в этих случаях может характеризоваться как основное состояние на большей части оболочки плюс краевой эффект в зоне установки днищ. Причем, при достаточно большом угле заполнения сосуда изменяемость НДС в направлении контура уменьшается при одновременном увеличении интенсивности напряжений как основного состояния, так и краевого эффекта. Полное НДС имеет изменяемость, которую можно характеризовать показателем $\rho < 1/2$, и не возникает необходимости в дополнительном применении дифференциальных уравнений типа Власова-Доннелла. А в случае малых углов заполнения интенсивность напряжений очень мала, и также нет необходимости привлекать эти уточняющие уравнения. Таким образом, полное НДС может быть построено только с привлечением дифференциальных уравнений полубезмоментной теории (основное состояние) и краевого эффекта. Следует отметить, что при малых номерах гармоник при разложении решений в ряды по окружной координате соответствующие части корней характеристического уравнения общей теории оболочек : $k_{1-4} = \pm r_{1n} \pm is_{1n}$; $k_{5-8} = \pm r_{2n} \pm is_{2n}$ почти точно совпадают с малыми корнями полубезмоментной теории и с большими корнями уравнений краевого эффекта, приведенными в форме следующей таблицы 1.3:

Таблица 1.3

R/h	n	r_{1n}	s_{1n}	r_{2n}	s_{2n}
20	0	5,749	5,749	0	0
	1	5,834	5,660	0	0
	2	6,106	5,413	0,3134	0,2884
	4	7,271	4,700	1,4879	0,9941
100	0	12,85	12,85	0	0
	1	12,89	12,82	0	0
	2	13,01	12,7	0,1359	0,1335

Изменяемость основного состояния по мере увеличения номеров гармоник растет, и при достаточно больших номерах она приближается к изменяемости краевого эффекта, то есть основное состояние «вырождается». И за критерий такого «вырождения» естественно принять примерное равенство вторых

производных, например, нормального перемещения того и другого состояния по продольной координате:

$$\left| \frac{\partial^2 w^{осн}}{\partial \alpha^2} \right| \approx \left| \frac{\partial^2 w^{кп}}{\partial \alpha^2} \right| \quad (1.38)$$

Известно, что оператор дифференциального уравнения технической теории оболочек (полубезмоментной теории) может быть записан в трехчленном и двухчленном виде, как и дифференциальное уравнение краевого эффекта [66, 87] в общем виде и приближенном, основанном на пренебрежении членами порядка $\sqrt{h/R}$ по сравнению с единицей («метод Геккелера»).

Если принять к расчету более простые уравнения краевого эффекта и основного состояния (полубезмоментной теории), то соотношение (1.38) без существенной погрешности может быть заменено более простым то-есть равенством коэффициентов уравнений при вторых членах, а именно:

$$4\eta^4 = 4\mu_n^4. \text{ Тогда } 12(1-\nu_1\nu_2)\left(\frac{R}{h}\right)^2 = \frac{1}{12(1-\nu_1\nu_2)}\left(\frac{h}{R}\right)^2 n^4(n^2-1)^2, \text{ откуда, принимая } n^2 \gg$$

$$1, \text{ получаем: } n^4 = 12(1-\nu_1\nu_2)\left(\frac{R}{h}\right)^2. \quad (1.39)$$

Сделаем оценку величины n по этой формуле, приняв для n обозначение \tilde{n} , для чего примем следующие параметры $R/h = 130$; $\nu_1 = 0.3$; $\lambda = 0.1$; 1; 10. Получаем

	$\lambda = 0.1$	$\lambda = 1$	$\lambda = 10$
\tilde{n}	21	20	7

(1.40)

Анализ действительной погрешности для искомых факторов показывает, что при локализованных воздействиях на цилиндрические оболочки слабо изменяющихся вдоль образующей можно избежать интегрирования дифференциальных уравнений восьмого порядка по продольной координате типа Власова-Доннелла и свести задачу к решению хорошо изученных уравнений четвертого порядка для основного состояния и краевого эффекта- путём расширения области использования уравнений полубезмоментной теории

(основного состояния) и краевого эффекта до номеров гармоник $n = \tilde{n}$. Такой подход составляет сущность *метода сращиваемых аналитических решений (МСАР)*. В дальнейшем применение МСАР рассматривается в главах 2,4 при решении задач о локализованных силовых и температурных воздействиях на оболочки.

ГЛАВА 2. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНСТРУКЦИЙ ТИПА ТОПЛИВНОГО ОТСЕКА ИЗ ФИЗИЧЕСКИ ОРТОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОГО ЖИДКОСТЬЮ

Определение НДС цилиндрических оболочек, являющихся неизменным элементом многих частично заполненных жидкостью сосудов, под действием гидростатического давления, представляет интерес для расчётов прочности трубопроводов [17], [38] авиационных и ракетно-космических тонкостенных конструкций [33,43,67]. Например, обечайки топливных баков, предназначенных для размещения компонентов жидкого топлива (окислителя, горючего), в полете нагружены внутренним избыточным давлением, складывающимся из гидростатического давления и наддува. Кроме того, часть обечайки сосуда, свободная от жидкости, может нагреваться иногда до значительной температуры (250...300° С) [9]. Причем, по длине оболочки ее можно принять постоянной, а по контуру на границе сухой и смоченной частей она резко изменяется [33], что может вызвать появление значительных температурных напряжений.

2.1. Цилиндрический топливный отсек с шарнирно закрепленными краями при действии гидростатического давления - обобщение решения задачи В.З.Власова на случай физически ортотропного материала

В случае изотропного материала задача определения напряженного состояния оболочек при гидростатическом давлении рассматривалась в монографии В.З.Власова [14], где на основе приближенной, полубезмоментной теории оболочек представлены некоторые результаты расчета напряжений.

В отличие от [14], здесь рассматриваются: *во-первых*, оболочки из не изотропного, а физически ортотропного материала. Такой вид материала, когда плоскости упругой симметрии совпадают с координатными плоскостями, представляется важным ввиду его широкого применения в конструкциях [14]; *во-вторых*, используется наиболее точная, общая теория оболочек из физически ортотропных материалов.

2.1.1. Решение на основе уравнений общей теории физически ортотропных оболочек для нагрузки кусочно-косинусоидальной вдоль контура и кусочно-постоянной вдоль образующей

При использовании полных уравнений теории физически ортотропных упругих тонких оболочек, построенной на основе принятия гипотез Кирхгофа-Лява, задача о действии на оболочку нормальной поверхностной нагрузки $p_3(\alpha, \beta)$ может быть приведена к следующему разрешающему дифференциальному уравнению относительно функции $\Phi(\alpha, \beta)$ [68], [46]:

$$L\Phi(\alpha, \beta) = \frac{R^4}{D_1} p_3(\alpha, \beta). \quad (2.1)$$

Здесь, все обозначения приняты также как в первой главе.

Перемещения, усилия, изгибающие моменты связаны с разрешающей функцией $\Phi(\alpha, \beta)$ с помощью известных дифференциальных соотношений [68].

Остановимся на примере конечной оболочки с шарнирными закреплениями поперечных краев при действии гидростатического давления. Краевые условия в этом случае, как известно, математически формулируются следующим образом:

$$w = V = T_1 = G_1 = 0 \quad ; \quad \alpha = 0, \alpha = \alpha_1, \quad (2.2)$$

где $\alpha_1 = L/R$ – относительная длина оболочки.

Таким образом, краевая задача о нахождении НДС рассматриваемой оболочки формулируется так: необходимо найти разрешающую функцию $\Phi(\alpha, \beta)$, являющуюся решением разрешающего уравнения (2.1), удовлетворяющую краевым условиям (2.2), которые записываются через $\Phi(\alpha, \beta)$ с помощью известных дифференциальных соотношений [68].

Поверхностную нагрузку $p_3(\alpha, \beta)$ - гидростатическое давление жидкости-представим в виде произведения амплитудного значения давления и двух безразмерных функций, характеризующих его распределение вдоль образующей и контура:

$$p(\alpha, \beta) = p_0 \theta(\alpha) \theta(\beta) = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m \theta_n \sin \chi_m \alpha \cos n\beta. \quad (2.3)$$

где p_0 - амплитудное значение, $p_0 = -\gamma R$, γ - плотность жидкости, а знак «минус» обусловлен принятым здесь, как и в [46], правилом знаков для внешней нагрузки: нормальная нагрузка и нормальное перемещение считаются положительными, если направлены внутрь оболочки.

$\theta(\alpha)$, $\theta(\beta)$ - безразмерные функции распределения нагрузки в продольном и окружном направлениях, соответственно.

В продольном направлении гидростатическое давление принимается постоянным, поэтому $\theta(\alpha) = 1$, $0 \leq \alpha \leq \alpha_1$, а в окружном оно меняется по закону, принятому в монографии [14]:

$$\theta(\beta) = \begin{cases} \cos \beta - \cos \beta_0, & |\beta| \leq \beta_0; \\ 0, & |\beta| > \beta_0; \end{cases} \quad (2.4)$$

где β_0 - половина угла заполнения сосуда жидкостью (рис 2.1).

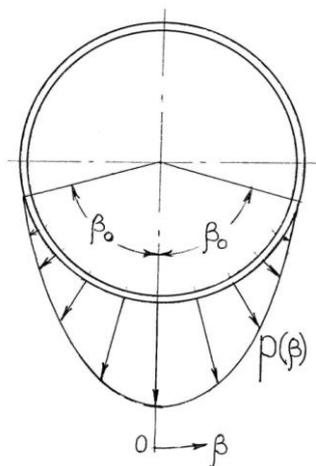


Рис 2.1. Распределение кусочно-косинусоидального давления

В представлении нагрузки (2.3) приняты обозначения:

θ_m - коэффициент разложения $\theta(\alpha)$ в тригонометрический ряд по синусам с периодом $2\alpha_1$;

$$\theta(\alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m \sin \chi_m \alpha, \quad \text{где } \chi_m = \frac{m\pi}{\alpha_1}; \quad \theta_m = \frac{4}{\pi m} \sin \chi_m \xi \sin \chi_m \alpha_0;$$

ξ - координата середины нагруженной области;

θ_n - коэффициент разложения в тригонометрический ряд Фурье вдоль контура;

$$\theta(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos n\beta = \theta_0 + \theta_1 \cos \beta + \sum_{n=2}^{\infty} \theta_n \cos n\beta;$$

$$\theta_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\beta_0} (\cos \beta - \cos \beta_0) d\beta = \frac{2}{\pi} (\sin \beta_0 - \beta_0 \cos \beta_0);$$

$$\begin{aligned} \theta_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\beta_0} (\cos \beta - \cos \beta_0) \cos n\beta d\beta = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin(n-1)\beta_0}{2(n-1)} + \frac{\sin(n+1)\beta_0}{2(n+1)} - \cos \beta_0 \frac{\sin n\beta_0}{n} \right]. \end{aligned}$$

Здесь первые два члена ряда ($n=0$, $n=1$) соответствуют деформированию сосуда без изменения формы поперечного кругового сечения, а остальные характеризуют деформирование контура.

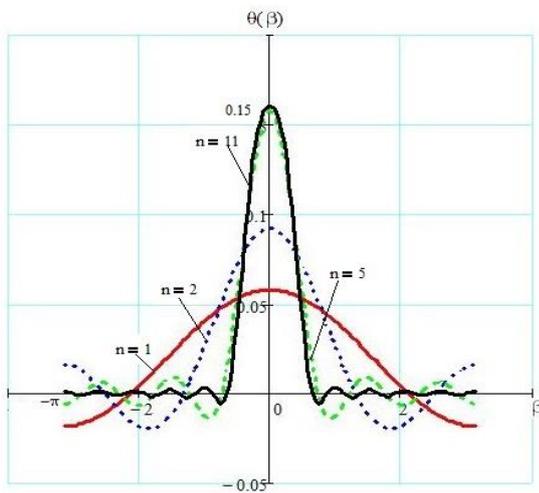


Рис.2.2. Изменение функции распределения давления $\theta(\beta)$, определяющего по (2.4) от числа членов ряда Фурье (частичные суммы) при разложении нагрузки по окружной координате.

Граничные условия (2.2) будут удовлетворены, если представить разрешающую функцию $\Phi(\alpha, \beta)$ в виде двойного тригонометрического ряда:

$$\Phi(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_{mn} \sin \chi_m \alpha \cos n\beta. \quad (2.5)$$

В результате очевидных подстановок для разрешающей функции получаем

выражение:
$$\Phi(\alpha, \beta) = 12(1 - \nu_1 \nu_2) \left(\frac{R}{h}\right)^3 \frac{p_0 R}{E_1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta_m \theta_n}{L_{mn}} \sin \chi_m \alpha \cos n\beta. \quad (2.6)$$

где
$$\begin{aligned} L_{m,n} &= \chi_m^8 + a_{6,2} \chi_m^6 n^2 - 2\nu_2 \chi_m^6 + a_{4,4} \chi_m^4 n^4 - a_{4,2} \chi_m^4 n^2 + \lambda \chi_m^4 + \\ &+ a_{2,6} \chi_m^2 n^6 - a_{2,4} \chi_m^2 n^4 + a_{2,2} \chi_m^2 n^2 + \lambda^2 n^4 (n^2 - 1)^2 + \lambda \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{c^2} \chi_m^4. \end{aligned}$$

Вычислительные формулы в виде рядов для перемещений, усилий и моментов находим в результате подстановки $\Phi(\alpha, \beta)$ в известные соотношения [68], связывающие искомые факторы с разрешающей функцией. Приведем наиболее важные из них:

$$\begin{aligned} \frac{E_1}{p_0 R} w &= 12(1 - v_1 v_2) \left(\frac{R}{h}\right)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta_m \theta_n}{L_{mn}} w_{mn} \sin \chi_m \alpha \cos n\beta; \\ \frac{1}{p_0 R} T_i &= -12(1 - v_1 v_2) \left(\frac{R}{h}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta_m \theta_n}{L_{mn}} t_{imn} \sin \chi_m \alpha \cos n\beta; \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\frac{1}{p_0 R^2} G_i = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta_m \theta_n}{L_{mn}} g_{imn} \sin \chi_m \alpha \cos n\beta; \quad (i = 1, 2),$$

где
$$w_{mn} = \chi_m^4 + \left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} - 2v_2 \right) \chi_m^2 n^2 + \lambda n^4;$$

$$t_{1mn} = \lambda \chi_m^2 n^2 + \frac{2c^2}{1 - v_1 v_2} \left[2\mu_1 \chi_m^4 n^2 + (\lambda - v_2^2 - 2v_2 \mu_1) \chi_m^2 n^4 \right];$$

$$\begin{aligned} t_{2mn} = \lambda \left\{ \chi_m^4 - \frac{2c^2}{1 - v_1 v_2} \left[v_1 \chi_m^6 + \left(3 + \lambda \frac{v_1}{\mu_1} - \frac{v_1}{\mu_1} (v_2 + 2\mu_1)^2 \right) \chi_m^4 n^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} + 4\mu_1 - v_2 \right) \chi_m^2 n^4 + \lambda n^6 \right] \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{1mn} = \left[\chi_m^6 + \left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} - v_2 \right) \chi_m^4 n^2 + -v_2 \chi_m^4 + \left[\lambda + v_2 \left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} - v_2 \right) \right] \chi_m^2 n^4 + \right. \\ \left. + \left(\lambda + v_2^2 - \frac{(\lambda - v_2^2)v_2}{\mu_1} \right) \chi_m^2 n^2 - \lambda v_2 (n^4 - n^6) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{2mn} = \lambda \left[v_1 \chi_m^6 - \chi_m^4 + \left[1 + \frac{(\lambda - v_2^2)v_1}{\mu_1} - 2v_1 v_2 \right] \chi_m^4 n^2 + \left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} - v_2 \right) \chi_m^2 n^4 - \right. \\ \left. - \left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} - 2v_2 \right) \chi_m^2 n^2 - \lambda (n^4 - n^6) \right]. \end{aligned}$$

2.1.2. Решение для нагрузки кусочно-косинусоидальной вдоль контура и кусочно-постоянной вдоль образующей на основе уравнений, описывающих элементарные напряженные состояния

Далее, рассмотрим упрощение полученного решения, к которому приводит использование вместо уравнений общей теории оболочек (2.1) уравнений Власова-Доннелла, полубезмоментной теории оболочек, краевого эффекта и изгибного состояния. При этом вид решения (2.7) остается неизменным, а выражения $w_{mn}, t_{imn}, g_{imn}, L_{mn}$ упростятся следующим образом:

а) Основное состояние - аналог полубезмоментной теории

$$L_{m,n} = \lambda^2 n^4 (n^2 - 1)^2 + \lambda \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{c^2} \chi_m^4;$$

$$w_{mn} = \lambda n^4; \quad t_{1mn} = \lambda \chi_m^2 n^2; \quad g_{1mn} = -\lambda \nu_2 (n^4 - n^6); \quad g_{2mn} = -\lambda (n^4 - n^6). \quad (2.8)$$

б) Краевой эффект

$$L_{m,n} = \chi_m^8 + \lambda \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{c^2} \chi_m^4;$$

$$w_{mn} = \chi_m^4; \quad t_{2mn} = \lambda \chi_m^4; \quad g_{1mn} = \chi_m^6; \quad g_{2mn} = \lambda \nu_1 \chi_m^6.$$

в) Напряженное состояние с высокой изменчивостью - аналог уравнений типа Власова-Доннелла.

$$L_{m,n} = \chi_m^8 + a_{6,2} \chi_m^6 n^2 + a_{4,4} \chi_m^4 n^4 + a_{2,6} \chi_m^2 n^6 + \lambda^2 n^8 + \lambda \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{c^2} \chi_m^4;$$

$$w_{mn} = \chi_m^4 + \left(\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - 2\nu_2 \right) \chi_m^2 n^2 + \lambda n^4;$$

$$t_{1mn} = \lambda \chi_m^2 n^2 + \frac{2c^2}{1 - \nu_1 \nu_2} \left[2\mu_1 \chi_m^4 n^2 + (\lambda - \nu_2^2 - 2\nu_2 \mu_1) \chi_m^2 n^4 \right];$$

$$t_{2mn} = \lambda \left\{ \chi_m^4 - \frac{c^2}{1 - \nu_1 \nu_2} \left[\nu_1 \chi_m^6 + \left(3 + \lambda \frac{\nu_1}{\mu_1} - \frac{\nu_1}{\mu_1} (\nu_2 + 2\mu_1)^2 \right) \chi_m^4 n^2 + \left(\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} + 4\mu_1 - \nu_2 \right) \chi_m^2 n^4 + \lambda n^6 \right] \right\}; \quad (2.10)$$

$$g_{1mn} = \left[\chi_m^6 + \left(\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - \nu_2 \right) \chi_m^4 n^2 + \left[\lambda + \nu_2 \left(\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - \nu_2 \right) \right] \chi_m^2 n^4 + \lambda \nu_2 n^6 \right];$$

$$g_{2mn} = \lambda \left[v_1 \chi_m^6 + \left[1 + \frac{(\lambda - v_2^2)v_1}{\mu_1} - 2v_1v_2 \right] \chi_m^4 n^2 + \left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} - v_2 \right) \chi_m^2 n^4 + \lambda v_2 n^6 \right].$$

г) Обобщение решения изгиба ортотропной пластины на НДС оболочки с высокой изменчивостью ($\rho \gg 1/2$).

$$\begin{aligned} L_{mn} &= \left[\chi_m^4 + 2(v_2 + 2\mu_1)\chi_m^2 \tilde{n}^2 + \lambda \tilde{n}^4 \right] \left[\chi_m^4 + \left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} - 2v_2 \right) \chi_m^2 \tilde{n}^2 + \lambda \tilde{n}^4 \right]; \\ w_{mn} &= \left[\chi_m^4 + \left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} - 2v_2 \right) \chi_m^2 \tilde{n}^2 + \lambda \tilde{n}^4 \right]; \\ g_{1mn} &= \left[\chi_m^6 + \left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} - v_2 \right) \chi_m^4 n^2 + \left[\lambda + v_2 \left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} - v_2 \right) \right] \chi_m^2 n^4 + \lambda v_2 n^6 \right]; \\ g_{2mn} &= \lambda \left[v_1 \chi_m^6 + \left[1 + \frac{(\lambda - v_2^2)v_1}{\mu_1} - 2v_1v_2 \right] \chi_m^4 n^2 + \left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} - v_2 \right) \chi_m^2 n^4 + \lambda v_2 n^6 \right]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.1.3. Анализ НДС на основе решения по общей теории оболочек; влияние показателя ортотропии λ

В качестве объекта исследования влияния ортотропии на НДС рассмотрим оболочку с геометрическими параметрами, принятыми в работе [14]: длина $L=4000$ см, радиус $R=320$ см, толщина $h=0,6$ см. Угол заполнения сосуда жидкостью $2\beta_0 = 66$ град.

Результаты расчётов по формулам (2.6), (2.7) для гипотетических ортотропных материалов исследуемой оболочки представим в виде графиков на рис. 2.3- рис 2.7 , где дано распределение нормального перемещения, продольного и кольцевого усилий, продольного и кольцевого изгибающих моментов: w, T_1, T_2, G_1, G_2 - вдоль нулевой образующей оболочки в зависимости от значений параметра ортотропии материала λ , который изменяется в достаточно широком диапазоне ($\lambda = 0,1 - 10$). Имеет место весьма сильная зависимость приведенных факторов от величины λ . Причем, при росте параметра ортотропии λ значения кольцевого изгибающего момента увеличиваются, а нормального перемещения и продольного усилия уменьшаются.

Отметим, что в соответствии с принятым правилом знаков, как в [31, 58], отрицательное нормальное перемещение направлено в сторону увеличения

радиуса, положительные усилия – растягивающие, а положительные изгибающие моменты создают растягивающие напряжения на внешней поверхности оболочки.

Результат расчёта максимального значения нормального продольного напряжения, в середине оболочки, для частного случая изотропного материала, при $\lambda = 1$, сопоставлялся с полученным в монографии приближенным решением [14]. При этом его отклонение от полученного здесь точного результата составляет более 10%.

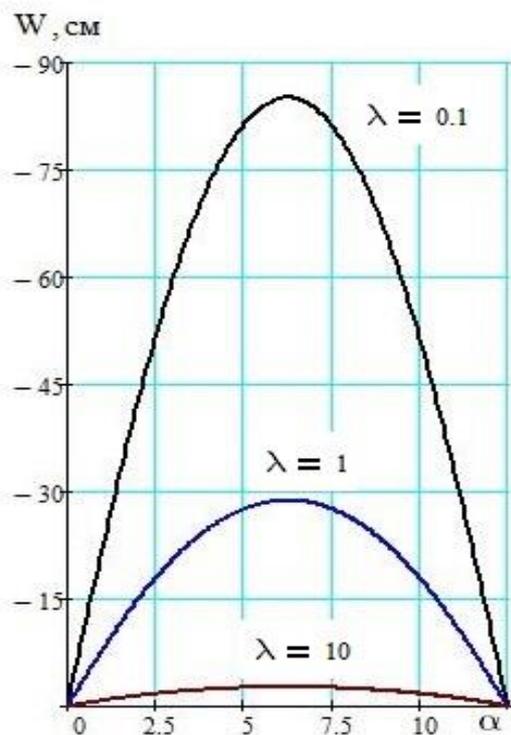


Рис.2.3. Изменение радиального перемещения вдоль нулевой образующей оболочки при различных значениях параметра ортотропии материала λ .

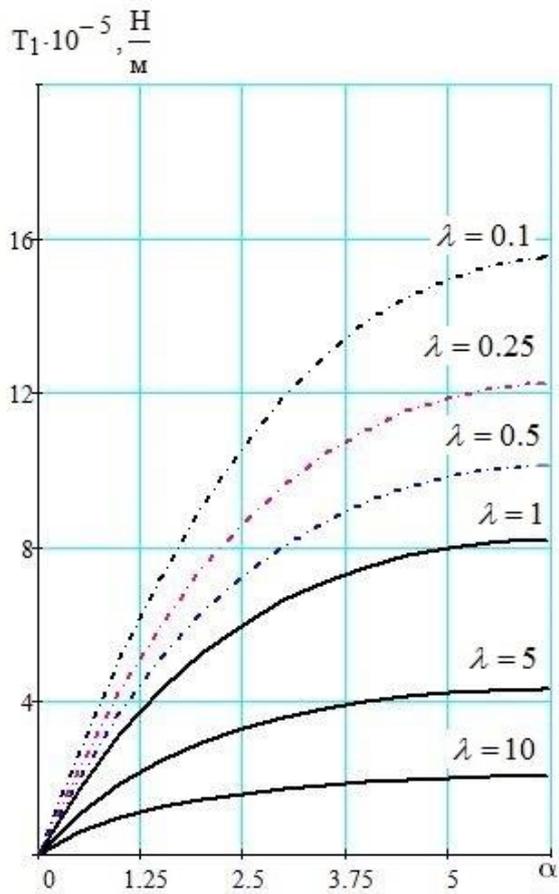


Рис.2.4.Изменение продольного усилия вдоль нулевой образующей оболочки при различных значениях параметра ортотропии λ .

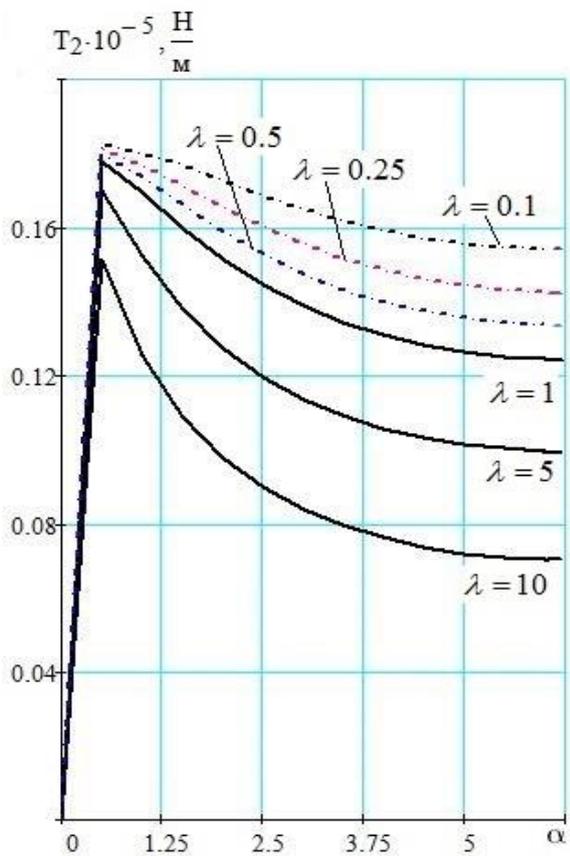


Рис.2.5. Изменение кольцевого усилия вдоль нулевой образующей оболочки при различных значениях параметра ортотропии λ .

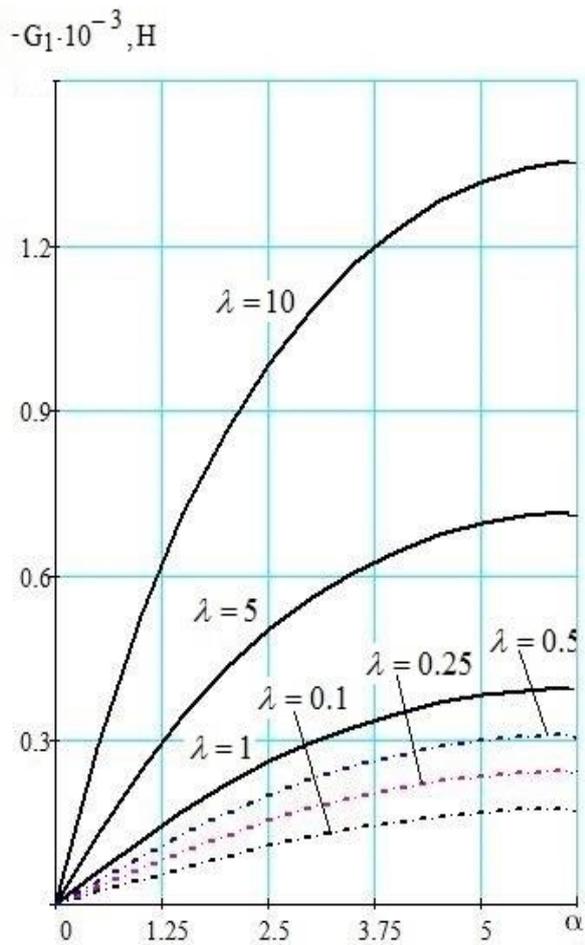


Рис.2.6. Изменение продольного изгибающего момента вдоль нулевой образующей оболочки с различными значениями параметра ортотропии λ .

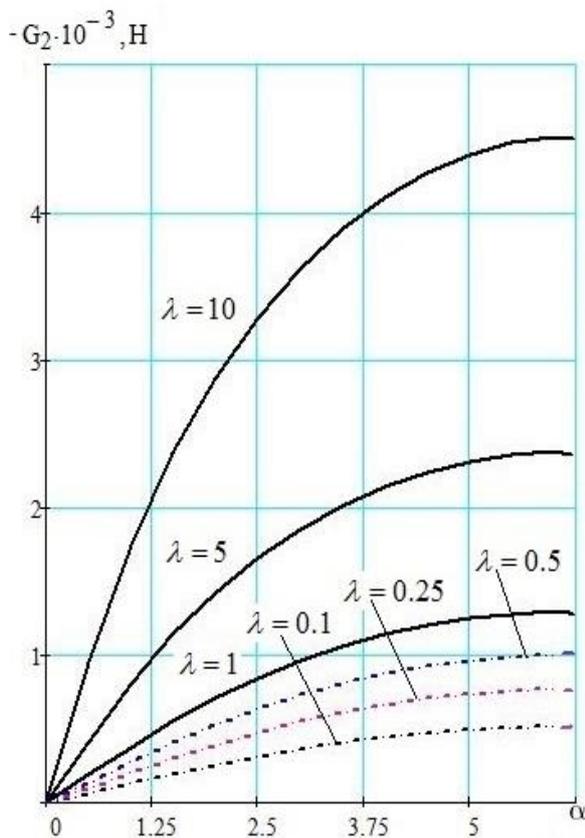


Рис.2.7. Изменение кольцевого изгибающего момента вдоль нулевой образующей оболочки с различными значениями параметра ортотропии λ .

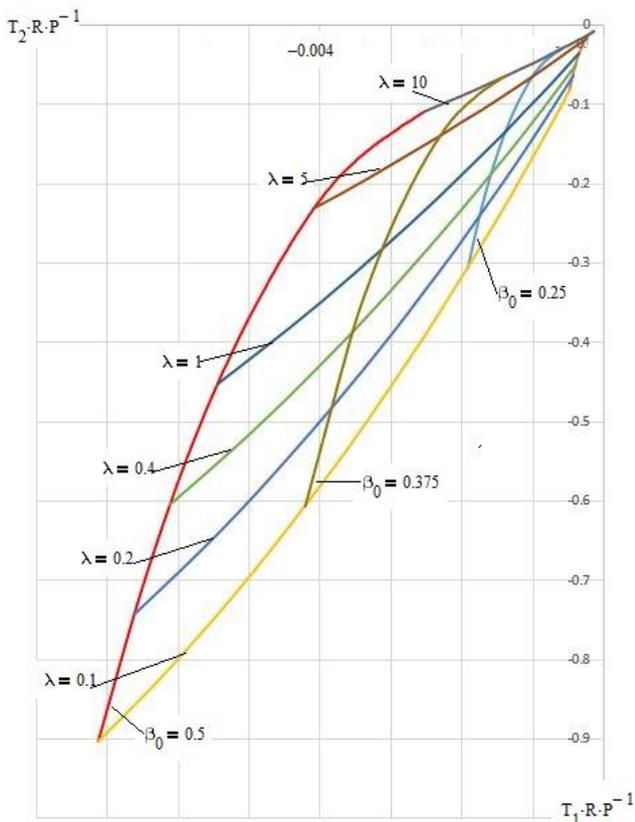


Рис.2.8. Номограмма «продольное усилие – кольцевое усилие» для центра нагруженной области.

К выбору типа материала для сосуда. В качестве другого примера рассмотрим цилиндрические оболочки с шарнирным закреплением, изготовленные из стали 1X18H10T, алюминиевого сплава Д16Т и гипотетического материала со следующими механическими характеристиками:

- 1 Сталь 1X18H10T: $E_1 = E_2 = 21 \cdot 10^4 \text{ мПа}$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$;
- 2 Алюминиевый сплав Д16Т: $E_1 = E_2 = 7.2 \cdot 10^4 \text{ мПа}$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$;
- 3 Боропластик: $E_1 = 21.1 \cdot 10^4 \text{ мПа}$, $E_2 = 2.11 \cdot 10^4 \text{ мПа}$,
 $\nu_1 = 0.35$, $\nu_2 = 0.035$;
- 4 Стеклопластик: $E_1 = 6.26 \cdot 10^4 \text{ мПа}$, $E_2 = 2.12 \cdot 10^4 \text{ мПа}$,
 $\nu_1 = 0.219$, $\nu_2 = 0.073$.

Оболочки имеют указанные в начале раздела **2.1.3** геометрические параметры и угол заполнения жидкостью $2\beta_0 = 66^\circ$.

Численные значения максимальных напряжений, полученные по формулам (2.6-2.7), на наружной и внутренней поверхностях оболочки, приведены в таблице 2.1. Максимальные нормальные перемещения записаны в последнем столбце этой таблицы 2.1.

Таблица 2.1

Материал оболочки	Напряжение, мПа				Нормальное перемещение, см
	$\sigma_{1\max}^+$	$\sigma_{1\max}^-$	$\sigma_{2\max}^+$	$\sigma_{2\max}^-$	w
1X18H10T	70.6	202.3	-214	218	29.6
Д 16	70.6	202.3	-214	218	86.4
Боропластик	224	291	-83	89	85.5
Стеклопластик	163	226	-134	139	180

В табл.2.1 приняты обозначения: σ_1^+ и σ_2^+ - меридиональное и окружное напряжения на наружной поверхности; σ_1^- и σ_2^- - меридиональное и окружное напряжения на внутренней поверхности оболочки.

Таким образом, дано обобщение задачи В.З.Власова на случай анизотропного, физически ортотропного, материала. Построенное эффективное решение позволяет получать достаточно легко точную информацию о НДС оболочек с шарнирно закрепленными краями из ортотропных материалов при действии радиальной нагрузки, а для конкретных конструкций выбирать подходящие материалы.

2.1.4. Анализ результатов полученных на основе приближенных уравнений. Метод сращиваемых аналитических решений (МСАР)

В связи с тем, что на основе дифференциальных уравнений общей теории ортотропных оболочек решение краевых задач с условиями закрепления, отличными от шарнирного, представляет значительные трудности, рассмотрим возможность применения для этой цели метода сращиваемых аналитических решений (МСАР).

В качестве объекта исследований возьмём рассмотренный ранее сосуд с тем же уровнем жидкости ($\beta_0 = 33^\circ$), но при кусочно-постоянном распределении давления ($\alpha_0 \Rightarrow 0$) вдоль образующей в середине оболочки ($\alpha = \alpha_1 / 2$).

Проведем сравнение численных значений наиболее важных силовых факторов, найденных по разным теориям. Таковыми являются, очевидно, изгибающие моменты. Представим для сравнения эти результаты в виде таблиц и

графиков, показывающих, какой вклад в напряженное состояние вносит каждая гармоника ряда для продольного и окружного изгибающих моментов по каждой теории. Максимальные численные значения продольного и окружного моментов для n -го члена ряда $\overline{G_{1n}}(\alpha = 0.5\alpha_1; \beta = 0), \overline{G_{2n}}(\alpha = 0.5\alpha_1; \beta = 0)$ в изотропном случае представлены в таблицах 2.2 и 2.3 и для достаточно широкого диапазона изменения показателя ортотропии ($\lambda = 0,1; 10.$) в виде графиков на рис. 2.9, 2.10.

Таблица 2.2

Численные значения продольного изгибающего момента $G_{1n}P^{-1} \cdot 10^7$ на основе различных уравнений теории оболочек в частном случае $\lambda = 1$.

Номер гармоник	Общая теория оболочек	Типа Власова-Доннелла	Основное состояние	Краевой эффект	Основное состояние плюс краевой эффект	Изгибное состояние
2	24,442	24,645	0,639	23,634	24,273	551,671
3	25,413	25,617	5,193	19,821	25,015	306,935
4	21,922	21,691	6,274	15,221	21,495	175,911
5	14,785	14,690	3,916	10,414	14,330	95,808
41	-0,012	-0,012	-0,005	-0,013	-0,017	-0,012

Таблица 2.3

Численные значения кольцевого изгибающего момента $G_{2n}P^{-1} \cdot 10^7$ на основе различных уравнений теории оболочек в частном случае: $\lambda = 1$.

Номер гармоник	Общая теория оболочек	Типа Власова-Доннелла	Основное состояние	Краевой эффект	Основное состояние плюс краевой эффект	Изгибное состояние
2	9,386	9,364	2,131	7,089	9,220	555,47
3	23,625	22,361	17,311	5,945	23,257	310,113
4	25,818	23,837	20,914	4,565	25,479	178,345
5	16,621	15,817	13,054	3,124	16,177	97,469
41	-0,013	-0,013	-0,016	-0,004	-0,019	-0,013

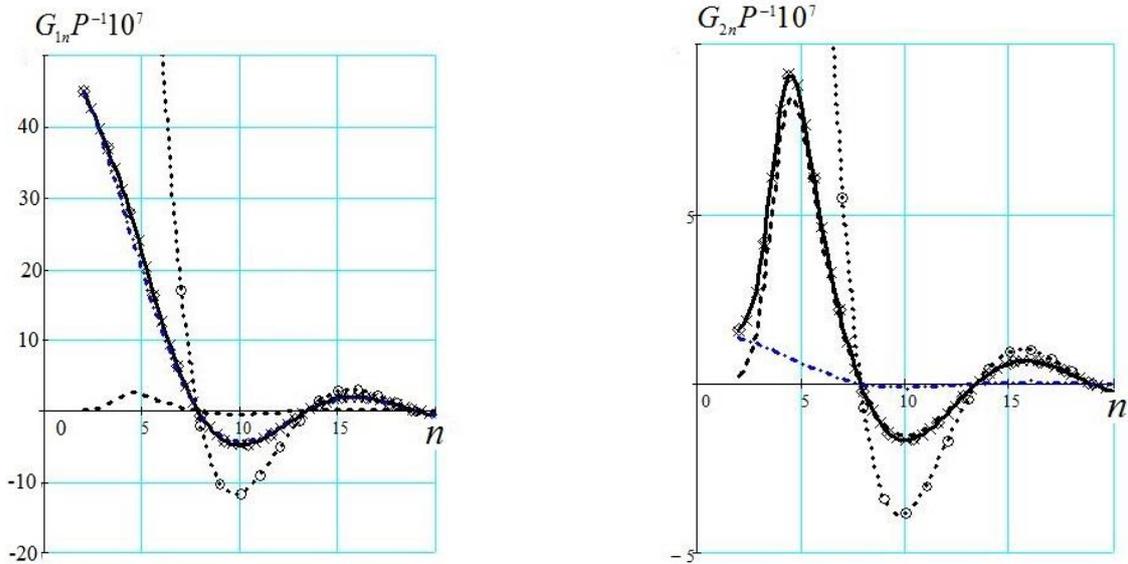


Рис.2.9 Сравнение n -й гармоники продольного и кольцевого изгибающих моментов на основе различных уравнений для оболочки с параметром ортотропии $\lambda = 0.1$.

— Общая теория оболочек; $\diamond \diamond$ Моментная теория; - - - Основное состояние; - · - · - Краевой эффект; $\circ \circ \circ$ Изгибное состояние; $\times \times \times$ Основное состояние плюс краевой эффект.

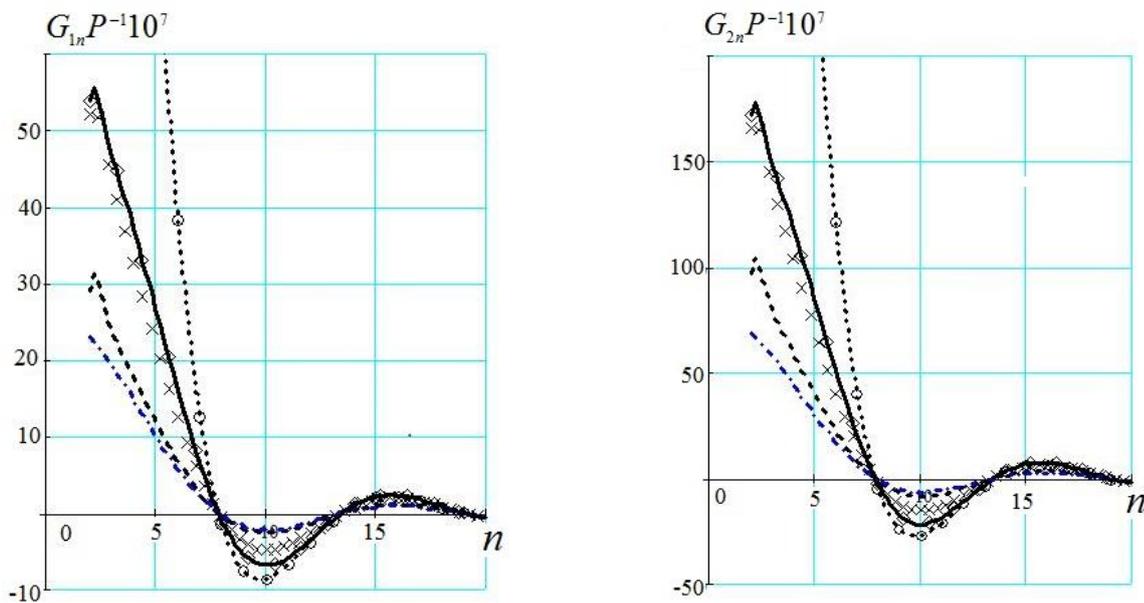


Рис.2.10 Сравнение n -й гармоники продольного и кольцевого изгибающих моментов на основе различных уравнений для оболочки с параметром ортотропии $\lambda = 10$.

— Общая теория оболочек; $\diamond \diamond$ Моментная теория; - - - Основное состояние; - · - · - Краевой эффект; $\circ \circ \circ$ Изгибное состояние; $\times \times \times$ Основное состояние плюс краевой эффект.

Анализ результатов, представленных в таблицах 2.2 и 2.3 и на графиках показывает:

Суммарные численные значения изгибающих моментов для основного состояния и краевого эффекта при гармониках $n=2; n=3; n=4$ и т.д. весьма близки к соответствующим точным значениям (на основе общей теории ортотропных оболочек), как и сумма этих величин до значения \tilde{n} в МСАР, что позволяет игнорировать уравнения восьмого порядка типа Власова- Доннелла. При этом изгибное состояние значительно превышает не только решения на основе других приближенных уравнений, но и точное решение, что полностью соответствует характеру поведения асимптотических погрешностей. При значительных номерах гармоник $n > \tilde{n}$ решения на основе уравнений типа Власова - Доннелла совпадают с изгибным состоянием, что подчеркивает тщательность проведенных вычислений.

Принимая во внимание подобие рассмотренного здесь напряженного состояния и у жестко защемленного края (полное стеснение деформации поперечного сечения оболочки: $(u = 0; V = 0; w_{\alpha}' = 0)$), приходим к заключению, что полученные здесь результаты и сделанные на их основе выводы о применимости МСАР могут быть перенесены на весьма важный случай жесткого защемления оболочки $(u = V = w = w_{\alpha}' = 0)$, который будет объектом исследования в разделе.2.2.

2.2. Цилиндрический топливный отсек с произвольно закрепленными краями, в том числе с одним или двумя жесткими краями, при действии гидростатического давления

2.2.1. Постановка задачи на основе уравнений общей теории физически ортотропных оболочек для нагрузки кусочно-косинусоидальной вдоль контура и постоянной вдоль образующей

Решения, будучи построенными на основе уравнений (2.6), (2.7), позволяют найти НДС оболочки с высокой степенью достоверности, но требуют проведения

трудоемкой вычислительной работы. Вычислительные трудности существенно растут при локализации нагрузки, а также при решении краевых задач для оболочек конечной длины, когда граничные условия отличны от классических (шарнирного закрепления).

Их удастся избежать полностью или в значительной степени, если пойти по пути применения приближенных уравнений, степень упрощения которых зависит от изменяемости действующей на оболочку нагрузки в α, β - направлениях на поверхности. Изменяемость напряженного состояния характеризуем сравнением модулей разрешающей функции и ее вторых производных по главным направлениям α, β [66].

Решение разрешающего уравнения общей теории оболочек (2.1) ищем в виде

$$\Phi(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(\alpha) \cos n\beta. \quad (2.12)$$

Делая подстановку разложений (2.12) в уравнение (2.1), получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно амплитудного значения разрешающей функции $\Phi_n(\alpha)$:

$$\tilde{L}\Phi_n(\alpha) = p_0 R^4 D^{-1} \theta_n \theta(\alpha), \quad (2.13)$$

где оператор \tilde{L} определяется следующим образом:

$$L = \left[\frac{\partial^8}{\partial \alpha^8} + a_{6,2} \frac{\partial^8}{\partial \alpha^6} n^2 + 2\nu_2 \frac{\partial^6}{\partial \alpha^6} + a_{4,4} \frac{\partial^8}{\partial \alpha^4} n^4 + a_{4,2} \frac{\partial^6}{\partial \alpha^4} n^2 + \lambda \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + a_{2,6} \frac{\partial^8}{\partial \alpha^2} n^6 + a_{2,4} \frac{\partial^6}{\partial \alpha^2} n^4 + \right. \\ \left. + a_{2,2} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2} n^2 + \lambda^2 n^4 (n^2 - 1)^2 + \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{c^2} \lambda \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} \right].$$

В соответствии с представлением внешней нагрузки и разрешающей функции разложим в одинарные тригонометрические ряды перемещения, усилия и моменты:

$$\begin{aligned} u(\alpha, \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} U_n(\alpha) \cos n\beta; & v(\alpha, \beta) &= \sum_{n=1}^{\infty} V_n(\alpha) \sin n\beta; \\ w(\alpha, \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} W_n(\alpha) \cos n\beta; & G_i(\alpha, \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} G_{in}(\alpha) \cos n\beta; \\ T_i(\alpha, \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} T_{in}(\alpha) \cos n\beta; & S_i(\alpha, \beta) &= \sum_{n=1}^{\infty} S_{in}(\alpha) \sin n\beta; \quad (i = 1; 2). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Амплитудные значения $U_n(\alpha), \dots, G_n(\alpha)$ выражаются через $\Phi_n(\alpha)$ в результате подстановки (2.13), (2.14) в известные соотношения [68]:

$$\begin{aligned}
 W_n(\alpha) &= \left[\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + \left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} - 2v_2 \right) n^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \lambda n^4 \right] \Phi_n(\alpha); \\
 G_{2n}(\alpha) &= \frac{-D_2}{R^2} \left\{ v_1 \frac{\partial^6}{\partial \alpha^6} + \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + \left[1 + \frac{(\lambda - v_2^2)v_1}{\mu_1} - 2v_1v_2 \right] n^2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} - v_2 \right) n^4 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} - 2v_2 \right) n^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \lambda(n^4 - n^6) \right\} \Phi_n(\alpha).
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Восьмой порядок основного разрешающего дифференциального уравнения (2.1) и, соответственно, (2.14) требует постановки на торцах оболочки восьми граничных условий, записанных относительно кинематических или статических факторов. Так что процедура отыскания постоянных из системы восьми алгебраических уравнений в общем случае громоздка и таит в себе большую вероятность ошибки. Этого в значительной мере можно избежать, если применить метод асимптотического синтеза напряжённого состояния (МАС), а также МСАР. Разрешающая функция $\Phi_n(\alpha)$ может быть представлена приближённо [68, 46, 63]:

$$\Phi_n(a) \approx \begin{cases} \Phi_n^o(\alpha) + \Phi^k(\alpha) & (n \leq n^*) \\ \Phi_n^u(\alpha) & (n > n^*) \end{cases} \tag{2.16}$$

или
$$\Phi_n(a) \approx \Phi_n^o(\alpha) + \Phi^k(\alpha) \quad (n < \tilde{n}) \tag{2.17}$$

(индексы «о», «к», «u» относятся к основному состоянию, краевому эффекту и изгибному состоянию, соответственно).

Однако при рассматриваемой здесь нагрузке, постоянной по длине и имеющей, как правило, большой угол заполнения $\beta_0 \gg \sqrt{h/R}$ функция $\Phi_n(a)$ с достаточной точностью может быть определена следующим образом:

$$\Phi_n(a) \approx \begin{cases} \Phi_n^o(\alpha) \text{ при } n \geq 2 \\ \Phi_n^k(\alpha) \text{ при } n \geq 0 \end{cases} \tag{2.18}$$

В соответствии с (2.18) могут быть записаны и искомых факторы:

$$w(\alpha, \beta) = w^o(\alpha, \beta) + w^k(\alpha, \beta);$$

$$\begin{aligned}
T_1(\alpha, \beta) &= T_1^0(\alpha, \beta); \quad T_2(\alpha, \beta) = T_2^k(\alpha, \beta); \\
G_1(\alpha, \beta) &= G_1^k(\alpha, \beta) + \nu_1 G_2^0(\alpha, \beta); \\
G_2(\alpha, \beta) &= G_2^0(\alpha, \beta) + \nu_2 G_1^k(\alpha, \beta).
\end{aligned}
\tag{2.19}$$

2.2.2. Решение для нагрузки кусочно-косинусоидальной вдоль контура и постоянной вдоль образующей на основе уравнений, описывающих элементарные напряженные состояния

а) Основное состояние- аналог полубезмоментной теории. Рассмотрим вначале основное состояние в (2.18), (2.19), которое описывается уравнениями полубезмоментной теории оболочек. Для разрешающей функции получаем обыкновенное дифференциальное уравнение путём соответствующего упрощения [66] уравнения (2.13):

$$\left(\frac{d^4}{d\alpha^4} + 4\mu_n^4 \right) \Phi_n(\alpha) = \frac{p_0 R^2}{E_2 h} \theta_n \theta(\alpha), \quad 4\mu_n^4 = \frac{\lambda c^2}{1 - \nu_1 \nu_2} n^4 (n^2 - 1)^2; \quad n \geq 2. \tag{2.20}$$

Амплитудные значения перемещений, усилий и моментов связаны с разрешающей функцией $\Phi_n(\alpha)$ записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
U_n(\alpha) &= \lambda n^2 \Phi_n'(\alpha); \quad V_n(\alpha) = \lambda n^3 \Phi_n(\alpha); \quad W_n(\alpha) = \lambda n^4 \Phi_n(\alpha); \\
T_{1n}(\alpha) &= \frac{E_1 h}{R} \lambda n^2 \Phi_n''(\alpha); \quad S_n(\alpha) = -\frac{E_1 h}{R} \lambda n \Phi_n'''(\alpha); \quad G_{2n}(\alpha) = \frac{D_2}{R^2} \lambda n^4 (n^2 - 1) \Phi_n(\alpha).
\end{aligned}
\tag{2.21}$$

Воспользуемся решением на основе метода начальных параметров [46] для произвольно распределенной по длине нагрузки и запишем его для рассматриваемого здесь случая, положив в нем $\alpha_0 = \alpha_1 / 2$. Оно представлено в табл.2.4.

Амплитудные значения перемещений $U_n(\alpha), V_n(\alpha)$ с помощью табл.2.4 записываются по формулам: $V_n(\alpha) = \frac{R}{E_1 h} V_n^*(\alpha); \quad U_n(\alpha) = \frac{R}{E_1 h} U_n^*(\alpha).$

Примечание к табл 2.4: $T_{1n}(0), S_n(0), V_n^*(0), U_n^*(0)$ - начальные параметры;

$$\Phi_{1n}(\alpha) = ch\mu_n \alpha \sin \mu_n \alpha; \quad \Phi_{2n}(\alpha) = ch\mu_n \alpha \cos \mu_n \alpha;$$

$$\Phi_{3n}(\alpha) = sh\mu_n \alpha \sin \mu_n \alpha; \quad \Phi_{4n}(\alpha) = sh\mu_n \alpha \cos \mu_n \alpha. \text{ (индексы "н" у функций}$$

$\Phi_{1n}(\alpha), \Phi_{2n}(\alpha), \Phi_{3n}(\alpha), \Phi_{4n}(\alpha)$ опущены). Искомые факторы основного состояния

теперь определяются, принимая во внимание найденные из решения краевой задачи амплитудные значения $U_n(\alpha), V_n(\alpha), T_{1n}(\alpha), S_n(\alpha)$ и разложения (2.15).

Таблица 2.4

Решение дифференциального уравнения основного напряженного состояния при действии гидростатического давления

	$T_{1n}(0)$	$S_n(0)$	$V_n^*(0)$	$U_n^*(0)$	$-\theta_n \gamma R^2$
$T_{1n}(\alpha)$	Φ_2	$-\frac{n}{2\mu_n}(\Phi_1 + \Phi_3)$	$-\frac{2\mu_n^2}{n}\Phi_4$	$\mu_n(\Phi_3 - \Phi_1)$	$\frac{n^2}{2\mu_n^2}\Phi_4(\alpha)$
$S_n(\alpha)$	$-\frac{\mu_n}{n}(\Phi_3 - \Phi_1)$	Φ_2	$\frac{2\mu_n^3}{n^2}(\Phi_1 + \Phi_3)$	$\frac{2\mu_n^2}{n}\Phi_4$	$-\frac{n}{2\mu_n}[\Phi_1(\alpha) + \Phi_3(\alpha)]$
$V_n^*(\alpha)$	$\frac{n}{2\mu_n^2}\Phi_4$	$\frac{n^2}{4\mu_n^3}(\Phi_3 - \Phi_1)$	Φ_2	$\frac{n}{2\mu_n^2}(\Phi_1 + \Phi_3)$	$\frac{n^3}{4\mu_n^4}[1 - \Phi_2(\alpha)]$
$U_n^*(\alpha)$	$\frac{1}{2\mu_n}(\Phi_1 + \Phi_3)$	$-\frac{n}{2\mu_n^2}\Phi_4$	$\frac{\mu_n}{n}(\Phi_3 - \Phi_1)$	Φ_2	$-\frac{n^2}{4\mu_n^3}[\Phi_3(\alpha) - \Phi_1(\alpha)]$

Здесь проводится исследование погрешность уравнения основного состояния при применении различных границ \hat{n}, \tilde{n} для оболочки с шарнирно закрепленными краями. Численные максимального значения кольцевого изгибающего момента представлены в табл.2.5.

Из табл. 2.5 видно что, в данном случае результат получены по МСАР более точные по сравнению с результатами полученными по МАС.

Таблица.2.5

$-G_2 \cdot 10^{-3} H$				
	λ	0.1	1	10
Основное состояние	\hat{n}	0.518	1.293	4.228
	\tilde{n}	0.515	1.294	4.537
Общая теория оболочек	$n \rightarrow \infty$	0.516	1.296	4.513

В качестве примера приведем окончательные выражения для нормального усилия, нормального перемещения и кольцевого изгибающего момента в оболочке с жестко защемленными краями.

$$\begin{aligned}
 T_1(\alpha, \beta) &= \sum_{n=2}^{\tilde{n}} (K_{T_t}(\alpha) \bar{T}_{10} + K_{T_s} \bar{S}_0 - T) \cos n\beta; \\
 w(\alpha, \beta) &= \frac{R}{E_1 h} \sum_{n=2}^{\tilde{n}} (K_{V_t} \bar{T}_{10} + K_{V_s} \bar{S}_0 - V) n \cos n\beta; \\
 G_2(\alpha, \beta) &= \frac{D_2}{R^2} \frac{R}{E_1 h} \sum_{n=2}^{\tilde{n}} (K_{V_t} \bar{T}_{10} + K_{V_s} \bar{S}_0 - V) n(n^2 - 1) \cos n\beta.
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{n^2}{2\mu_n^2} \theta_n \gamma R^2 \Phi_4; \hat{S} = \frac{n}{2\mu_n} \theta_n \gamma R^2 [\Phi_1 + \Phi_3]; V = \frac{n^3}{4\mu_n^4} \theta_n \gamma R^2 [1 - \Phi_2]; \\
 U &= -\frac{n^2}{4\mu_n^3} \theta_n \gamma R^2 [\Phi_3(\alpha) - \Phi_1(\alpha)]; \\
 \bar{S}_0 &= \frac{U(\alpha_1) K_{V_t}(\alpha_1) - V(\alpha_1) K_{U_t}(\alpha_1)}{K_{U_s}(\alpha_1) K_{V_t}(\alpha_1) - K_{V_s}(\alpha_1) K_{U_t}(\alpha_1)}; \quad \bar{T}_{10} = \frac{U(\alpha_1) - \bar{S}_0 K_{U_s}(\alpha_1)}{K_{U_t}(\alpha_1)}.
 \end{aligned}$$

На основе полубезмоментной теории получены численные результаты, иллюстрирующие НДС оболочки в зависимости от краевых условий, закона распределения нагрузки и параметра ортотропии λ для угла заполнения сосуда жидкостью $2\beta_0 = 66$ град. Здесь в качестве объекта исследования принята оболочка с вышеуказанными геометрическими размерами принятыми в монографии [14]: с различными параметрами ортотропии λ и гидростатическое давление являющееся постоянным в направлении α и по β следующему закону:

$$p(\alpha, \beta) = -\gamma R (1 - \cos \beta_0) \theta(\alpha) \theta(\beta). \tag{2.23}$$

$$\text{где } \theta(\beta) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi\beta}{2\beta_0}\right); & |\beta| \leq \beta_0 \\ 0 & |\beta| > \beta_0 \end{cases};$$

Представленные на рис.2.12 результаты расчетов для оболочки с разными граничными условиями позволяют судить о весьма существенном влиянии граничных условий и параметра ортотропии на величину и характер НДС оболочки.

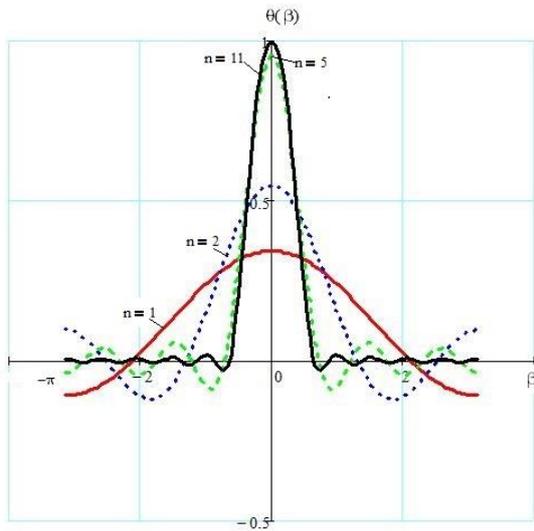


Рис.2.11. Изменение функции распределения давления $\theta(\beta)$, определяющего по (2.23) от числа членов ряда Фурье (частичные суммы) при разложении нагрузки по окружной координате.

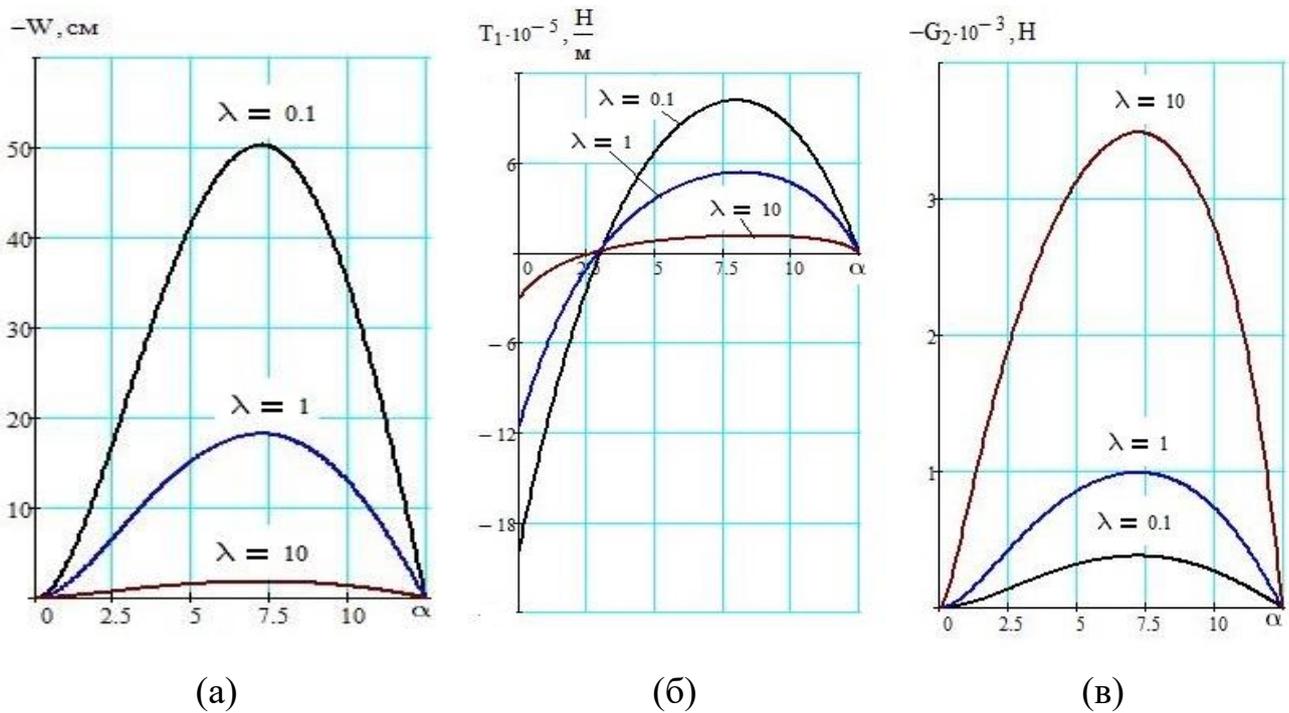


Рис.2.12. Изменение радиального перемещения (а), нормального продольного усилия (б), кольцевого изгибающего момента (в) вдоль нулевой образующей оболочки при разных значениях $\lambda = 0,1; 1; 10$.

В частном случае, изотропного материала, результаты представленные в рис.2.12 не отличаются от результатов представленных в работе [63]. Следовательно, в дальнейшем исследовании в зависимости от типов краевых задач для функции, описывающей гидростатическое давление можно использовать закон (2.21) а также закон (2.5).

2.2.3. Определение напряжённого состояния у заземленного края оболочки на основе метода сращиваемых аналитических решений основного состояния и краевого эффекта МСАР)

В предыдущих разделах рассматривалось НДС круговой цилиндрической оболочки с шарнирно закрепленными краями при действии на нее гидростатического давления, постоянного по длине, на основе общей теории ортотропных оболочек, а также с различными условиями закрепления на поперечных краях на основе полубезмоментной теории, дающей так называемое основное напряженное состояние. *При шарнирном закреплении торцов* такая задача для изотропного материала, как отмечалось и ранее, решалась в работах [14,17,38] методом двойных тригонометрических рядов. Здесь, кроме этого метода, применяется метод одинарных тригонометрических рядов, что существенно расширяет возможности изучения оболочек с различными краевыми условиями. Однако, следует отметить, что в случае отличия краевых условий от упомянутого шарнирного закрепления трудности построения и реализации решения существенно возрастают. И возникает необходимость в построении приближенных решений, которые были построены с целью анализа влияния показателя ортотропии и расчета напряжений на некотором удалении от краев, на основе полубезмоментной теории оболочек (рис.2.12). В случае шарнирного закрепления такое решение удовлетворяет поставленным краевым условиям. При наличии же жестко закрепленного края на основе полубезмоментной теории невозможно найти изгибающие моменты на крае, так как там обращается в нуль нормальное перемещение, через которое выражается изгибающий момент

$$G_1 = \nu G_2; G_2 = -\frac{D}{R^2} \left(\frac{\partial^6 \Phi}{\partial \beta^6} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \beta^6} \right) \quad \text{а не через производную по } \alpha$$

$$G_1 = -\frac{D}{R^2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha^2} + \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial \beta^2} + \nu \right) \nabla^4 \phi. \quad \text{Равенство нулю нормального перемещения}$$

автоматически влечет за собой отсутствие изгибающего момента. Поэтому основное состояние, являющееся решением уравнений полубезмоментной теории, пригодное лишь в случае шарнирного закрепления, будем дополнять в

соответствии с методом сращивания аналитических решений (МСАР) краевым эффектом [46,86] .

Перейдем к рассмотрению напряженного состояния типа краевого эффекта, включающего не только осесимметричную составляющую ($n=0$), как это обычно принято при расчете сосудов давления, но и несимметричные гармоники ($n \geq 1$) [46,86].

Уравнение краевого эффекта получаются из уравнений (2.1) с учётом соотношения $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} \right| \gg \left| \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} \right|$ [66].

$$\frac{\partial^8 \Phi}{\partial \alpha^8} + \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{c^2} \lambda \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} = \frac{R^4}{D_1} p_3(\alpha, \beta),$$

А основное здесь нормальное перемещение, усилия, моменты связаны с $\Phi(\alpha, \beta)$ соотношениями:

$$w = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4}; \quad T_1 = \frac{-E_1 h}{R} \lambda \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2}; \quad T_2 = \frac{-E_2 h}{R} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4}; \quad (2.22)$$

$$G_1 = \frac{-D_1}{R^2} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \alpha^6}; \quad G_2 = \frac{-\nu_1 D_2}{R^2} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \alpha^6} = \frac{-\nu_2 D_1}{R^2} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \alpha^6}.$$

Запишем разрешающее дифференциальное уравнение в привычном для расчетчиков виде, то есть через нормальное перемещение $w = w(\alpha, \beta)$:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + 4\eta^4 w = \frac{R^4}{D_1} p(\alpha, \beta); \quad 4\eta^4 = \frac{(1 - \nu_1 \nu_2)}{c^2} \lambda .; \quad (2.23)$$

Здесь нормальное перемещение $w = w(\alpha, \beta)$, являющееся функцией двух координат, идентифицируется с осесимметричным краевым эффектом [38],[46], и может быть представлено в виде:

$$w(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(\alpha) \cos n\beta. \quad (2.24)$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение и силовые факторы:

$$\left(\frac{d^4}{d\alpha^4} + 4\eta^4 \right) w_n(\alpha) = \frac{R^4}{D_1} p_0 \theta_n \theta(\alpha); \quad (2.25)$$

$$T_{2n}(\alpha) = -\frac{E_2 h}{R} w_n(\alpha); \quad G_{1n}(\alpha) = -\frac{D_1}{R^2} w_n''(\alpha); \quad G_2 = \nu_2 G_1.$$

Решение этого дифференциального уравнения может быть получено по методу начальных параметров путем адаптации записанного в [46] решения на случай действующего гидростатического давления.

Теперь обратимся к задаче расчета оболочки с одним защемленным, а другим шарнирно закрепленным краями и напомним, что для таких оболочек основное напряженное состояние нами было построено ранее (стр 60). А здесь ставим задачу уточнить напряженное состояние у жестко защемленного края. Учитывая свойства краевого эффекта быстрой изменяемости, это можно сделать, если ограничиться моделью полубесконечной оболочки с жестким краем, при длине оболочки, удовлетворяющей условию:

$$L \gg 2l_0 = 5\sqrt{Rh}. \quad (2.26)$$

где l_0 – зона затухания краевого эффекта.

Решение (2.25) с учётом граничных условий на бесконечности может быть записано в форме:

$$w(\alpha) = c_1 \varphi(\alpha) + c_2 \chi(\alpha) + \hat{w}(\alpha); \quad \varphi(\alpha) = e^{-\eta\alpha} \cos \eta\alpha; \quad \chi(\alpha) = e^{-\eta\alpha} \sin \eta\alpha. \quad (2.27)$$

где $\hat{w}(\alpha) = \frac{p_0 R^2}{\lambda E_1 h}$ – частное решение дифференциального уравнения (2.25). С

учетом краевых условий на жестком крае $\alpha = 0; W_n(\alpha) = W_{n\alpha}'(\alpha) = 0$. находим

произвольные постоянные: $c_1, c_2 = -\frac{p_0 R^2}{\lambda E_1 h}$, а затем нормальное перемещение,

окружное нормальное усилие и изгибающие моменты:

$$w(\alpha, \beta) = -\frac{p_0 R^2}{E_2 h} [1 - \varphi(\alpha) - \chi(\alpha)] \theta(\beta); \quad T_2(\alpha, \beta) = p_0 R [1 - \varphi(\alpha) - \chi(\alpha)] \theta(\beta); \quad (2.28)$$

$$G_1(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt{3\lambda(1-\nu_1\nu_2)}}{6(1-\nu_1\nu_2)} p_0 R h [\varphi(\alpha) - \chi(\alpha)] \theta(\beta); \quad G_2(\alpha, \beta) = \nu_2 G_1(\alpha, \beta); \quad \theta(\beta) = \frac{\theta_0}{2} + \sum_{n=1}^{\tilde{n}} \theta_n \cos n\beta.$$

Определим напряжения непосредственно на защемленном крае. От усилия T_2 оно равно, очевидно, нулю, а изгибные напряжения от моментов равны:

$$\sigma_1^{\max}(0,0) = \pm \frac{6G_1(0)}{h^2} = \pm 3 \sqrt{\frac{\lambda}{3(1-\nu_1\nu_2)}} p_0 \frac{R}{h}; \quad (2.29)$$

$$\sigma_2^{\max}(0,0) = \nu_2 \sigma_1^{\max}(0,0).$$

Вдоль контура оболочки они изменяются по закону $\theta(\beta)$ и принимают максимальное значение в нижней точке сосуда, причем, на внутренней поверхности сосуда σ_1^{\max} имеет знак плюс (растягивающее) и складывается с продольным напряжением от основного напряженного состояния, а на внешней поверхности – сжимающее и вычитается с продольным напряжением:

$$\sigma_1^{\Sigma}(0,0) = \frac{T_1}{h} \pm 3 \sqrt{\frac{\lambda}{3(1-\nu_1\nu_2)}} p_0 \frac{R}{h}. \quad (2.30)$$

В качестве примера определения напряжений на жестком крае на основе МСАР рассмотрим ортотропную оболочку-сосуд с приведенными на стр 47 параметрами. Изгибающие моменты на жестком крае, вычисленные по формуле (2.29), продольное усилие и напряжения представлены в таблице 2.6. для различных значений показателя ортотропии: $\lambda = 0,1$; $\lambda = 1$; $\lambda = 10$, а распределение вдоль контура и образующей оболочки показано на рис.2.13.

Таблица 2.6

	$\lambda = 0.1$	$\lambda = 1$	$\lambda = 10$
$G_1 (p_0Rh)^{-1}$	0.1	0.3	3
$G_2 (p_0Rh)^{-1}$	0.003	0.09	9
$\sigma_1^{\max}(0,0)$ (МПа)	1.5	4.9	50.1
$\sigma_2^{\max}(0,0)$ (МПа)	0.045	1.5	150.5
$T_1(0,0) (10^{-5} \frac{H}{м})$	-19.3	-11.63	-3.14
T_1 / h (МПа)	-321.7	-193.8	-52.3
$\sigma_1^{+\Sigma}(0,0)$ (МПа)	-320.2	-188.9	-2.2
$\sigma_1^{-\Sigma}(0,0)$ (МПа)	-323.7	-198.7	-102.4

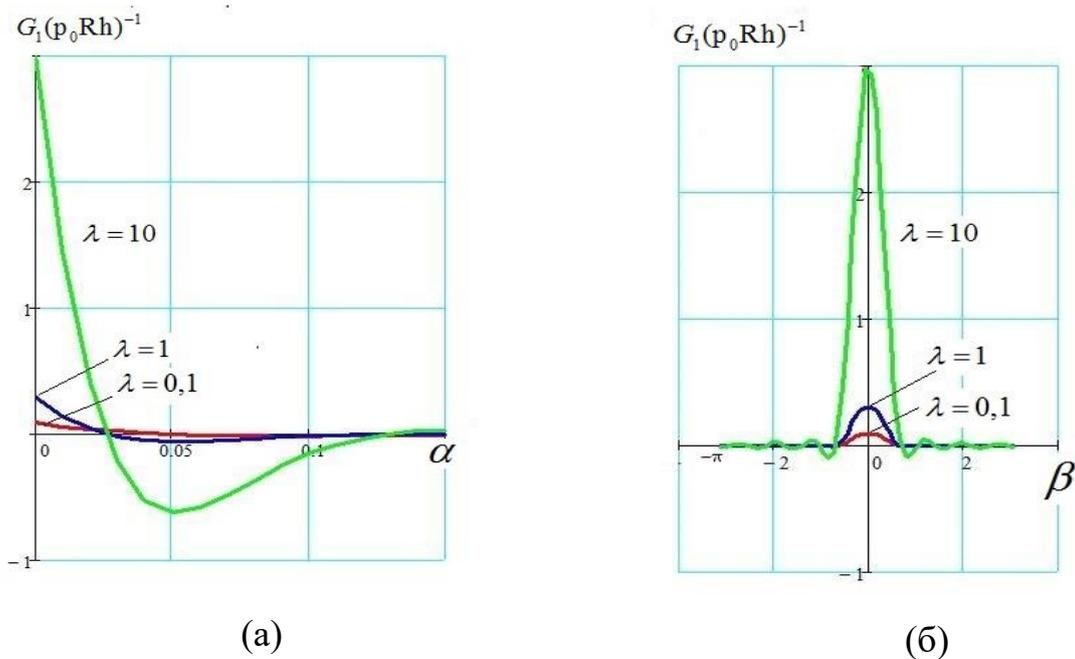


Рис.2.13. Изменения продольного изгибающего момента у жёсткого края:
 (а) вдоль нулевой образующей, (б)- по контуре.

По расчетам и в соответствии с физическим смыслом задачи в нижней точке сосуда нормальное перемещение, направлено в сторону увеличения радиуса, кольцевое усилие растягивающее, а изгибающие моменты в заделке создают сжимающие напряжения на внешней поверхности оболочки. Кольцевое усилие на краю равно нулю, а вдали от края принимает максимальное значение, равное найденному по безмоментной теории.

Найденное здесь напряженно-деформированное состояние следует дополнять балочным напряжением $\sigma_1(\alpha, \beta) = \sigma_1(\alpha) \cos \beta$, $\sigma_1(\alpha) = M(\alpha) / W$ от возникающего в оболочке, как в балке, изгибающего момента от гидростатической нагрузки (M – изгибающий момент, W – момент сопротивления сечения оболочки), и прогибом.

ГЛАВА 3. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОБОЛОЧЕК ИЗ ФИЗИЧЕСКИ ОРТОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ПРОДОЛЬНЫХ НАГРУЗКАХ

3.1. Решение для оболочек конечной длины с шарнирным закреплением краев при действии локальной нагрузки

3.1.1. Применение уравнений точных и типа Власова-Доннелла

Влияние параметров ортотропии материала на НДС рассмотрим на примере оболочки с шарнирным закреплением поперечных краев. Краевые условия в этом случае, как известно, математически формулируются следующим образом:

$$w = v = T_1 = G_1 = 0 ; \quad \alpha = 0, \alpha = \alpha_1, \quad (3.1)$$

где $\alpha_1 = L/R$ – относительная длина оболочки.

При действии продольной нагрузки не самоуравновешенной во внутренней области оболочки $0 < \alpha < \alpha_1$, считаем, что она может быть уравновешена, например, продольными усилиями $(T_0 + T_1 \cos \beta)$, приложенными по торцам оболочки.

Рассмотрим вначале действие на оболочку “к” локальных продольных нагрузок одного направления, приложенных вдоль контура с постоянным шагом $2\pi/k$ в одном сечении оболочки с координатой $\alpha = \zeta$. Нагрузка передается на оболочку через одну или несколько областей, ограниченных линиями кривизны, и имеет постоянную интенсивность давления. Нагруженную область удобно характеризовать безразмерными параметрами α_0 и β_0 . Тогда протяженность её в продольном и окружном направлениях соответственно равна $2\alpha_0 R, 2\beta_0 R$.

Указанная система нагрузка может быть представлена двойным тригонометрическим рядом:

$$p(\alpha, \beta) = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m \theta_n \sin \chi_m \alpha \cos kn\beta ; \quad (3.2)$$

Здесь θ_m, θ_n - коэффициенты рядов Фурье функций продольного и окружного распределения нагрузки; p_0 - амплитудное значение нагрузки.

$$\theta_m = \frac{4}{\pi} \sin \chi_m \xi \sin \chi_m \alpha_0 ; \quad \chi_m = m \frac{\pi}{\alpha_1} ; \quad \theta_n = \begin{cases} k\beta_0 & n = 0 \\ \frac{2 \sin kn\beta_0}{\pi n} & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (3.3)$$

Тогда можно записать разрешающую функцию в виде двойного тригонометрического ряда:

$$\Phi(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_{mn} \theta_n \theta_m \sin \chi_m \alpha \cos kn\beta.$$

Поставим (3.3) в разрешающее уравнение (1.9). Получим выражение для $\Phi(\alpha, \beta)$:

$$\Phi(\alpha, \beta) = \frac{-3(1-v_1v_2)}{\alpha_0\beta_0} \left(\frac{R}{h}\right)^3 \frac{P}{E_1R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta_n \theta_m \sin \chi_m \alpha \cos \tilde{n}\beta}{L_{mn}}; \quad (3.4)$$

$$\text{где } L_{m,n} = \chi_m^8 + a_{6,2}\chi_m^6 \tilde{n}^2 - 2v_2\chi_m^6 + a_{4,4}\chi_m^4 \tilde{n}^4 - a_{4,2}\chi_m^4 \tilde{n}^2 + \lambda\chi_m^4 + a_{2,6}\chi_m^2 \tilde{n}^6 - a_{2,4}\chi_m^2 \tilde{n}^4 + a_{2,2}\chi_m^2 \tilde{n}^2 + \lambda^2 \tilde{n}^4 (\tilde{n}^2 - 1)^2 + \lambda \frac{1-v_1v_2}{c^2} \chi_m^4; \quad \tilde{n} = kn.$$

В результате постановки разрешающей функции (3.4) в дифференциальных уравнениях (1.10) получаем

$$\begin{aligned} \frac{E_1R}{P} u(\alpha, \beta) &= -\frac{3(1-v_1v_2)}{\alpha_0\beta_0} \left(\frac{R}{h}\right)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{u_{mn} \theta_m \theta_n}{L_{mn}} \sin \chi_m \alpha \cos \tilde{n}\beta; \\ \frac{E_1R}{P} v(\alpha, \beta) &= -\frac{3(1-v_1v_2)}{\alpha_0\beta_0} \left(\frac{R}{h}\right)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{v_{mn} \theta_m \theta_n}{L_{mn}} \cos \chi_m \alpha \sin \tilde{n}\beta; \\ \frac{E_1R}{P} w(\alpha, \beta) &= -\frac{3(1-v_1v_2)}{\alpha_0\beta_0} \left(\frac{R}{h}\right)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{w_{mn} \theta_m \theta_n}{L_{mn}} \cos \chi_m \alpha \cos \tilde{n}\beta; \\ \frac{R}{P} T_1(\alpha, \beta) &= -\frac{3(1-v_1v_2)}{\alpha_0\beta_0} \left(\frac{R}{h}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t_{1mn} \theta_m \theta_n}{L_{mn}} \cos \chi_m \alpha \cos \tilde{n}\beta; \\ \frac{R}{P} T_2(\alpha, \beta) &= -\frac{\lambda}{4\alpha_0\beta_0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t_{2mn} \theta_m \theta_n}{L_{mn}} \cos \chi_m \alpha \cos \tilde{n}\beta; \\ \frac{R}{P} S_1(\alpha, \beta) &= -\frac{1-v_1v_2}{4\alpha_0\beta_0} \frac{G}{E_1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{s_{1mn} \theta_m \theta_n}{L_{mn}} \sin \chi_m \alpha \sin \tilde{n}\beta \\ \frac{1}{P} G_1(\alpha, \beta) &= \frac{1}{4\alpha_0\beta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_{1mn} \theta_m \theta_n}{L_{mn}} \cos \chi_m \alpha \cos \tilde{n}\beta; \\ \frac{1}{P} G_2(\alpha, \beta) &= \frac{\lambda}{4\alpha_0\beta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_{2mn} \theta_m \theta_n}{L_{mn}} \cos \chi_m \alpha \cos \tilde{n}\beta. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$u_{mm} = -\lambda \chi_m^2 + \frac{c^2}{\mu_1} \left[-\mu_1 \chi_m^6 - (\lambda + 2\mu_1 v_2 + 4\mu_1^2) \chi_m^4 \tilde{n}^2 - \right. \\ \left. - \lambda (5\mu_1 + 2v_2) \chi_m^2 \tilde{n}^4 + 2\lambda (4\mu_1 + v_2) \chi_m^2 \tilde{n}^2 - \lambda^2 \tilde{n}^2 (\tilde{n}^2 - 1)^2 \right]; \quad (3.6)$$

$$v_{mm} = \lambda \chi_m \tilde{n} - \frac{c^2}{\mu_1} \left[-(\mu_1 + v_2) \chi_m^5 \tilde{n} - (\mu_1 + v_2)(2v_2 + 4\mu_1) \chi_m^3 \tilde{n}^3 + \right. \\ \left. + (\lambda + v_2^2 + 3\mu_1 v_2) \chi_m^3 \tilde{n} + \lambda (\mu_1 + v_2) \chi_m (-\tilde{n}^5 + \tilde{n}^3) + \lambda v_2 \chi_m \tilde{n}^3 \right];$$

$$w_{mm} = -v_2 \chi_m^3 + \lambda \chi_m \tilde{n}^2 - \frac{c^2}{\mu_1} \left\{ \mu_1 \chi_m^5 + [\lambda - (v_2 + 2\mu_1)^2] \chi_m^3 \tilde{n}^2 - \lambda \mu_1 \chi_m \tilde{n}^4 \right\};$$

$$t_{1mm} = -\lambda \chi_m^3 + \frac{c^2}{1 - v_1 v_2} \left\{ -\chi_m^7 - \left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} + v_2 + 4\mu_1 \right) \chi_m^5 \tilde{n}^2 - (5\lambda - 6v_2^2 - 4\mu_1 v_2 + \right. \\ \left. + 2v_2 \frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} \right) \chi_m^3 \tilde{n}^4 - \lambda \left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} - v_2 \right) \chi_m \tilde{n}^6 + \left[7(\lambda - v_2^2) + 2 \frac{v_2}{\mu_1} (\lambda - v_2^2) - 4\mu_1 v_2 \right] \chi_m^3 \tilde{n}^2 + \right. \\ \left. + 2v_2 \chi_m^5 + 2\lambda \left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} - v_2 \right) \chi_m \tilde{n}^4 - \frac{\lambda^2}{\mu_1} \chi_m \tilde{n}^2 \right\};$$

$$t_{2mm} = -v_1 \chi_m^7 + (1 - 2v_1 v_2 - 4v_1 \mu_1) \chi_m^5 \tilde{n}^2 + [4(\mu_1 - v_2) + 5v_2] \chi_m^3 \tilde{n}^4 + \lambda \chi_m \tilde{n}^6 + \chi_m^5 - \\ - 4\mu_1 \chi_m^3 \tilde{n}^2 - \lambda \chi_m \tilde{n}^4 - \frac{\lambda v_2}{\mu_1} \chi_m \tilde{n}^2;$$

$$s_{1mm} = -\frac{v_2}{\mu_1} \chi_m^6 \tilde{n} + \left(\frac{\lambda - 2v_2^2}{\mu_1} - 4v_2 \right) \chi_m^4 \tilde{n}^3 + \left(\frac{\lambda + v_2^2}{\mu_1} + 2v_2 \right) \chi_m^4 \tilde{n} + \lambda \left(\frac{v_2}{\mu_1} + 4 \right) \chi_m^2 \tilde{n}^5 + \\ + \frac{\lambda^2}{\mu_1} \tilde{n}^3 (\tilde{n}^2 - 1)^2 - 6\lambda \chi_m^2 \tilde{n}^3;$$

$$s_{2mm} = -\frac{v_2}{\mu_1} \chi_m^6 \tilde{n} + \left(\frac{\lambda - 2v_2^2}{\mu_1} - 4v_2 \right) \chi_m^4 \tilde{n}^3 + \lambda \left(\frac{v_2}{\mu_1} + 4 \right) \chi_m^2 \tilde{n}^5 + \\ + \frac{\lambda^2}{\mu_1} \tilde{n}^3 (\tilde{n}^2 - 1)^2 + \left(\frac{\lambda + v_2^2}{\mu_1} + 4v_2 \right) \chi_m^4 \tilde{n} - 8\lambda \chi_m^2 \tilde{n}^3;$$

$$g_{1mm} = v_2 \chi_m^5 - (\lambda - v_2^2) \chi_m^3 \tilde{n}^2 - \lambda \chi_m^3 - \lambda v_2 \chi_m (\tilde{n}^4 - \tilde{n}^2) + \\ + c^2 \left\{ -4(v_2 + 2\mu_1) \chi_m^5 \tilde{n}^2 - \left[2(3\lambda - v_2^2) + \frac{v_2}{\mu_1} (\lambda - v_2^2) \right] \chi_m^3 \tilde{n}^4 - \frac{\lambda(\lambda - v_2^2)}{\mu_1} \chi_m \tilde{n}^6 \right\};$$

$$g_{2mm} = v_1 v_2 \chi_m^5 - v_2 \chi_m^3 - \lambda \chi_m (\tilde{n}^4 - \tilde{n}^2) - \\ - c^2 \left\{ -v_1 \chi_m^7 - \left[1 + \frac{v_2}{\mu_1} - \frac{v_1(v_2 + 2\mu_1)^2}{\mu_1} \right] \chi_m^5 \tilde{n}^2 - \left[\lambda(1 - v_1 \mu_1) - (v_1 + 2\mu_1)^2 \right] \chi_m^3 \tilde{n}^4 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\mu_1} [\lambda - (\nu_1 + 2\mu_1)^2] \chi_m^3 \tilde{n}^2 + \lambda \chi_m \tilde{n}^6 \right\}.$$

Рассмотрим нагруженную оболочку, имеющей параметров $\alpha_1 = L/R = 8$, $R/h = 130$; нагруженная область является кусочно-постоянной $\alpha_0 = \beta_0 = 0.125$. В результате расчётов получены зависимости величин продольного перемещения, продольного усилия, сдвигающего усилий u, T_1, S_1 от параметра ортотропии материала, представленные на рис.3.1. Результат показаны в растяжении зоне: продольное усилие является растягивающим, а сдвигающее - сжимающим.

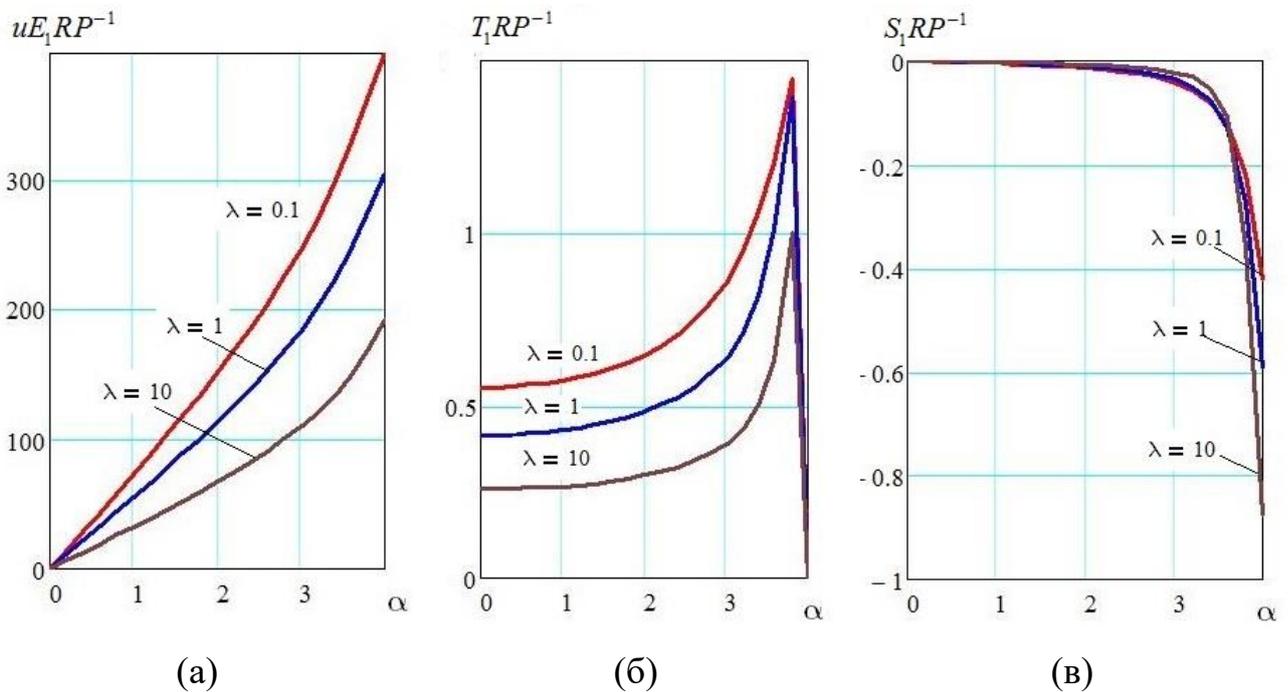


Рис.3.1. Изменение продольного перемещения (а), продольного усилия (б) вдоль нулевой образующей оболочки и сдвигающего усилия (в) вдоль линий $\beta = \beta_0$.

Далее, рассмотрим упрощение полученного решения, к котором приводит использование вместо уравнений общей теории оболочек (1.9) уравнений моментной технической, полубезмоментной теории оболочек и тангенциального состояния. При этом вид решения (3.5), (3.6) остается неизменным, а выражения $w_{mn}, t_{imn}, g_{imn}, L_{mn}$ упростятся следующим образом:

Напряженное состояние с высокой изменчивостью - аналог уравнений типа Власова-Доннелла.

$$\begin{aligned}
 L_{m,n} &= \chi_m^8 + a_{6,2}\chi_m^6\tilde{n}^2 + a_{4,4}\chi_m^4\tilde{n}^4 + a_{2,6}\chi_m^2\tilde{n}^6 + \lambda^2\tilde{n}^8 + \lambda\frac{1-v_1v_2}{c^2}\chi_m^4; \\
 u_{mn} &= -\lambda\chi_m^2 + \frac{c^2}{\mu_1}\left[-\mu_1\chi_m^6 - (\lambda + \mu_1v_2 + v_1\lambda\mu_1 + 4\mu_1^2)\chi_m^4\tilde{n}^2 - \right. \\
 &\quad \left. - \lambda(5\mu_1 + v_2 + v_1\lambda)\chi_m^2\tilde{n}^4 - \lambda^2\tilde{n}^6\right]; \\
 v_{mn} &= \lambda\chi_m\tilde{n} - \frac{c^2}{\mu_1}\left[-(\mu_1 + v_2)\chi_m^5\tilde{n} - (\mu_1 + v_2)(2v_2 + 4\mu_1)\chi_m^3\tilde{n}^3 - \lambda(\mu_1 + v_2)\chi_m\tilde{n}^5\right]; \\
 w_{mn} &= -v_2\chi_m^3 + \lambda\chi_m\tilde{n}^2 - \frac{c^2}{\mu_1}\left[\mu_1\chi_m^5 + (\lambda - (v_2 + 2\mu_1)^2)\chi_m^3\tilde{n}^2 - \lambda\mu_1\chi_m\tilde{n}^4\right]; \\
 t_{1mn} &= -\lambda\chi_m^3 + \frac{c^2}{1-v_1v_2}\left\{-\chi_m^7 - \left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} + v_2 + 4\mu_1\right)\chi_m^5\tilde{n}^2 - \right. \\
 &\quad \left. - (5\lambda - 6v_2^2 - 4\mu_1v_2 + 2v_2\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1})\chi_m^3\tilde{n}^4 - \lambda\left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} - v_2\right)\chi_m\tilde{n}^6\right\}; \\
 t_{2mn} &= -v_1\chi_m^7 + (1 - 2v_1v_2 - 4v_1\mu_1)\chi_m^5\tilde{n}^2 + [4(\mu_1 - v_2) + 5v_2]\chi_m^3\tilde{n}^4 + \lambda\chi_m\tilde{n}^6; \\
 s_{1mn} &= -\frac{v_2}{\mu_1}\chi_m^6\tilde{n} + \left(\frac{\lambda - 2v_2^2}{\mu_1} - 4v_2\right)\chi_m^4\tilde{n}^3 + \lambda\left(\frac{v_2}{\mu_1} + 4\right)\chi_m^2\tilde{n}^5 + \frac{\lambda^2}{\mu_1}\tilde{n}^7; \\
 g_1 &= v_2\chi_m^5 - (\lambda - v_2^2)\chi_m^3\tilde{n}^2 - \lambda v_2\chi_m\tilde{n}^4 + \\
 &\quad + c^2\left\{-4(v_2 + 2\mu_1)\chi_m^5\tilde{n}^2 - \left[2(3\lambda - v_2^2) - \frac{v_2(\lambda - v_2^2)}{\mu_1}\right]\chi_m^3\tilde{n}^4 - \frac{\lambda(\lambda - v_2^2)}{\mu_1}\chi_m\tilde{n}^6\right\}; \\
 g_{2mn} &= v_1v_2\chi_m^5 - \lambda\chi_m\tilde{n}^4 - c^2\left\{-v_1\chi_m^7 - \left[1 + \frac{v_2}{\mu_1} - \frac{v_1(v_2 + 2\mu_1)^2}{\mu_1}\right]\chi_m^5\tilde{n}^2 - \right. \\
 &\quad \left. - \left[\lambda(1 - v_1\mu_1) - (v_1 + 2\mu_1)^2\right]\chi_m^3\tilde{n}^4 + \lambda\chi_m\tilde{n}^6\right\}.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

3.1.2. Основное и тангенциальное состояния оболочки
Основное состояние - аналог полубезмоментной теории

$$\begin{aligned}
 L_{m,n} &= \lambda^2\tilde{n}^4(\tilde{n}^2 - 1)^2 + \lambda\frac{1-v_1v_2}{c^2}\chi_m^4; \\
 u_{mn} &= -\lambda\chi_m^2; \quad v_{mn} = \lambda\chi_m\tilde{n}; \quad w_{mn} = \lambda\chi_m\tilde{n}^2; \quad t_{1mn} = -\lambda\chi_m^3; \\
 t_{2mn} &= \lambda\chi_m\tilde{n}^6 - \lambda\chi_m\tilde{n}^4 - \frac{\lambda v_2}{\mu_1}\chi_m\tilde{n}^2; \quad s_{1mn} = s_{2mn} = \frac{\lambda^2}{\mu_1}\tilde{n}^3(\tilde{n}^2 - 1)^2; \\
 g_{1mn} &= -\lambda v_2\chi_m(\tilde{n}^4 - \tilde{n}^2); \quad g_{2mn} = -\lambda\chi_m(\tilde{n}^4 - \tilde{n}^2).
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Тангенциальное состояние

$$\begin{aligned} L_{mn} &= c^2 \left[\lambda_m^4 + \left(\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - 2\nu_2 \right) \lambda_m^2 \tilde{n}^2 + \lambda \tilde{n}^4 \right]; \\ u_{mn} &= -c^2 \left(\chi_m^2 + \frac{\lambda}{\mu_1} \tilde{n}^2 \right); \quad v_{mn} = c^2 \left(1 + \frac{\nu_2}{\mu_1} \right) \chi_m \tilde{n}; \\ t_{1mn} &= \frac{c^2}{1 - \nu_1 \nu_2} \left[\chi_m^3 + \left(\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - \nu_2 \right) \chi_m \tilde{n}^2 \right]; \quad t_{2mn} = \left[-\nu_1 \chi_m^3 + \chi_m \tilde{n}^2 \right]; \quad s_{mn} = \left[\lambda \tilde{n}^3 - \nu_2 \chi_m^2 \tilde{n} \right]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

3.1.3. Сравнительный анализ численных результатов на основе уравнений точных и приближенных для напряженных состояний с различной изменяемостью

В качестве подтверждения возможности получения решения на основе метода асимптотического синтеза НДС приведем числовую информацию, относящуюся к случаю нагружены оболочки, имеющей параметров

$$\alpha_1 = \frac{L}{R} = 8, \quad \frac{R}{h} = 130; \quad \text{нагруженная область является кусочно-постоянной}$$
$$\alpha_0 = \beta_0 = 0.125; 0.03125.$$

На основе различных приближенных уравнений максимальные значения продольного перемещения $E_1 R P^{-1} U_n$ продольного усилия $T_1 P R^{-1}$, сдвигающего усилия $S_1 P R^{-1} 10^3$ при различных значениях номеров гармоник n , представлены в табл. 3.1-3.3 для частного случая изотропной оболочки, на которой действует кусочно-постоянной $\alpha_0 = \beta_0 = 0.125$ а для $\alpha_0 = \beta_0 = 0.03125$ представлены в табл. 3.4-3.6.

Численные значения продольного перемещения $E_1 R P^{-1} U_n(\xi, 0)$ продольного усилия $P R^{-1} T_{1n}(\xi + \alpha_0, 0)$, сдвигающего усилия $P R^{-1} 10^3 S_{1n}(\xi, \beta_0)$ на основе различных уравнений теории оболочек в частном случае $\lambda = 1$ при $\alpha_0 = \beta_0 = 0.125$

Таблица 3.1

n	Общая теория оболочек	Уравнение типа Власова-Доннелла	Уравнение основного состояния	Уравнение тангенциального состояния
2	74.725	73.171	74.832	15.212
3	40.214	36.875	39.802	8.963
4	15.263	14.731	14.183	5.8
5	8.407	8.246	7.558	3.902
23	-0.036	-0.036	0.0001	-0.036

Таблица 3.2

n	Общая теория оболочек	Уравнение типа Власова-Доннелла	Уравнение основного состояния	Уравнение тангенциального состояния
2	-0.150	-0.150	-0.151	-0.121
3	-0.133	-0.132	-0.134	-0.101
4	-0.114	-0.114	-0.115	-0.082
5	-0.095	-0.094	-0.096	-0.065
24	0.001	0.001	0	0.001

Таблица 3.3

n	Общая теория оболочек	Уравнение типа Власова-Доннелла	Уравнение основного состояния	Уравнение тангенциального состояния
2	-10.045	-10.291	-10.035	-28.731
3	-14.697	-14.959	-14.472	-34.493
4	-20.124	-20.348	-19.762	-39.092
5	-25.387	-25.57	-25.002	-42.379
24	-0.155	-0.155	-0.186	-0.155

Численные значения продольного перемещения $E_1 RP^{-1} U_n(\xi, 0)$ продольного усилия $PR^{-1} T_{1n}(\xi + \alpha_0, 0)$, сдвигающего усилия $PR^{-1} 10^3 S_{1n}(\xi, \beta_0)$ на основе различных уравнений теории оболочек в частном случае $\lambda = 1$ при $\alpha_0 = \beta_0 = 0.03125$.

Таблица 3.4

n	Общая теория оболочек	Уравнение типа Власова-Доннелла	Уравнение основного состояния	Уравнение тангенциального состояния
2	80.109	78.483	80.257	17.856
3	46.355	42.678	45.936	11.799
4	20.208	19.571	18.958	8.768
5	13.087	12.869	12	6.947
25	1.07	1.067	0.214	1.07

Таблица 3.5

n	Общая теория оболочек	Уравнение типа Власова-Доннелла	Уравнение основного состояния	Уравнение тангенциального состояния
2	-0.144	-0.144	-0.155	-0.140
3	-0.143	-0.143	-0.154	-0.138
4	-0.141	-0.141	-0.152	-0.136
5	-0.140	-0.140	-0.150	-0.134
21	-0.096	-0.096	-0.082	-0.096

Таблица 3.6

n	Общая теория оболочек	Уравнение типа Власова-Доннелла	Уравнение основного состояния	Уравнение тангенциального состояния
2	-2.56	-2.64	-2.6	-3.673
3	-4.1	-4.16	-4.1	-5.633
4	-6.0	-6.0	-6.0	-7.652
24	-34.7	-34.7	-47.4	-34.8

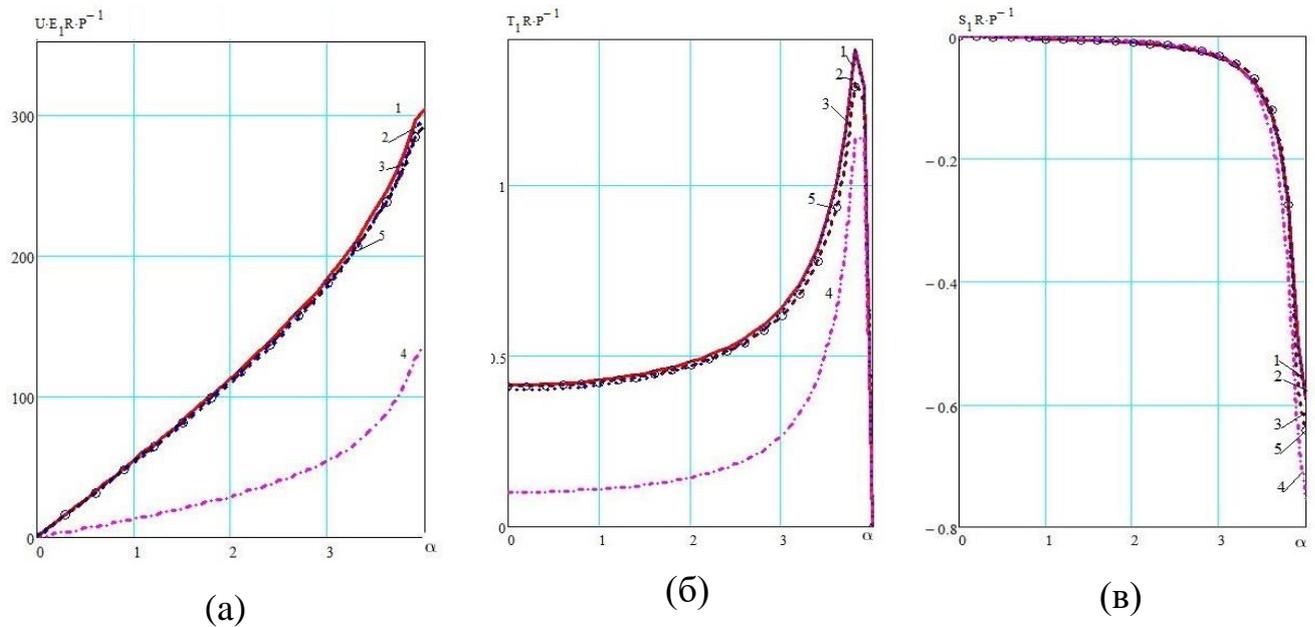


Рис.3.2. Изменение продольного перемещения(а), продольного усилия (б), вдоль нулевой образующей оболочки а сдвигающего усилия (в) вдоль линий $\beta = \beta_0$. при разных уравнениях для нагруженной области $\alpha_0 = \beta_0 = 0.125$ и $\lambda = 1$

1-Общей теории оболочек. 2-Теория типа Власова-Доннелла. 3-Уравнение основного состояния.4- Уравнение тангенциального состояния. 5-Уравнение основного состояния плюс тангенциального состояния.

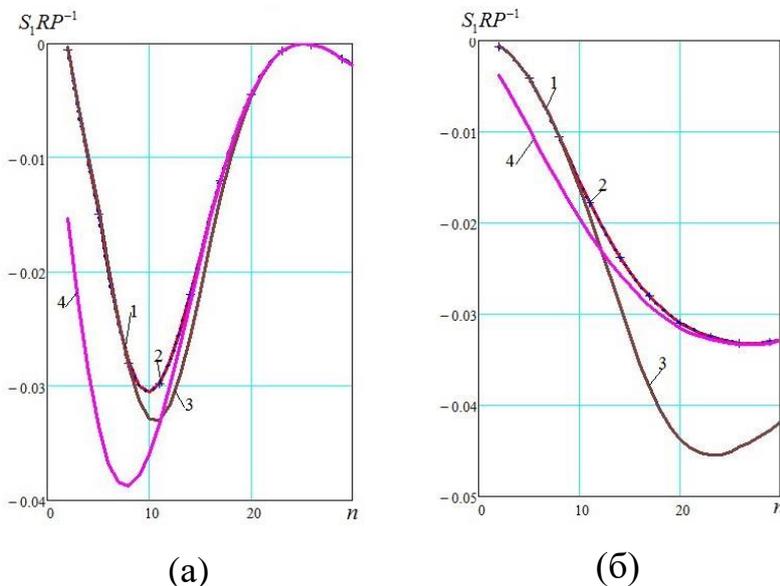


Рис.3.3. Сравнение n-й гармоники сдвигающего усилия на основе различных уравнений для оболочки с параметром ортотропии $\lambda = 1$, при $\alpha_0 = \beta_0 = 0.125$ (рис 3.3а) и $\alpha_0 = \beta_0 = 0.03125$ (рис 3.3б).

Анализ показывает, что полное НДС оболочки может быть построено путём применения одного из МАС. Первый и второй МАС дает результаты, практически не отличающиеся от точных (разница составляет меньше 5%). Приближенное

решение для сдвигающего усилия, как видно из рис.3.3, при номерах гармоник $n > n^*$ незначительно отличается от точного решения. Поэтому есть основания полагать, что решение может быть построено только на основе уравнений основного и тангенциального состояний. Причем при достаточно больших значениях β_0 ($\beta_0 > \sqrt{h/R}$) роль второго слагаемого является второстепенной, им можно пренебречь и заменить предел суммирования на бесконечность.

3.2. Бесконечно длинная оболочка при системе локальных нагрузок

Рассмотрим бесконечно длинную оболочку при действии локальной нагрузки, приложенной в одном сечении: $\alpha = 0$. Примем, что в общем случае она уравнивается продольной силой и изгибающим моментом, приложенными на значительном удалении от места её приложения.

В этом случае, как естественно ожидать и как показывает опыт, наиболее важным внутренним силовым фактором является продольное усилие $T_1(\alpha, \beta)$:

$$T_1(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{P}{2\pi R} + \frac{hM}{J} R \cos \beta + \sum_{n=2}^{\infty} T_{1n}(\alpha) \cos n\beta, & (k=1) \\ \frac{P}{2\pi R} + \sum_{n=1}^{\infty} T_{1n}(\alpha) \cos n\beta, & (k \geq 2) \end{cases} \quad (3.10)$$

В формулах (3.10) при $k=1$ первые два члена отражают нормальные усилия, вытекающие из принятия гипотезы плоских сечений, то есть элементарное состояние, как в стержне и в балке, а члены при $n \geq 2$ - нормальное усилие, связанное с деформированием контура поперечного сечения (бимоментное [16]). При числе сил, большем одной ($k \geq 2$), изгиб оболочки, как балки, отсутствует.

Усилия от первого и второго членов являются незатухающими до краев оболочки, а другие, в виде суммы, затухают, и для достаточно длинных оболочек их можно принять ничтожными, что дает возможность представить нагрузку вдоль образующей в виде интеграла Фурье, а вдоль контура, как обычно, - в виде ряда Фурье:

$$p(\alpha, \beta) = \frac{2}{\pi} p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos \tilde{n}\beta \int_0^{\infty} \frac{1}{\chi} \sin \alpha_0 \chi \cos \alpha \chi d\chi; \quad \tilde{n} = kn. \quad (3.11)$$

Решение уравнения (3.2) для номеров гармоник $n \geq 2$ отыскиваем в виде, аналогичном (3.11):

$$\Phi(\alpha, \beta) = \sum_{n=2}^{\infty} \cos \tilde{n}\beta \int_0^{\infty} \Phi_n(\alpha) \cos \alpha \chi d\chi; \quad (3.12)$$

тогда в результате очевидных подстановок находим разрешающую функцию:

$$\Phi(\alpha, \beta) = -\frac{6(1-v_1v_2)}{\pi\alpha_0\beta_0} \left(\frac{R}{h}\right)^3 \frac{P}{E_1R} \sum_n \theta_n \cos \tilde{n}\beta \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha_0 \chi \cos \alpha \chi}{\chi L(\chi, n)} d\chi. \quad (3.13)$$

И все искомые факторы путем подстановки (3.13) в (1.10):

$$\begin{aligned} \frac{E_1R}{P} u(\alpha, \beta) &= \frac{6(1-v_1v_2)}{\pi\alpha_0\beta_0} \left(\frac{R}{h}\right)^3 \sum_n \theta_n \cos \tilde{n}\beta \int_0^{\infty} \frac{u_n(\chi) \sin \alpha_0 \chi \cos \alpha \chi}{\chi L_n(\chi)} d\chi; \\ \frac{E_1R}{P} v(\alpha, \beta) &= \frac{6(1-v_1v_2)}{\pi\alpha_0\beta_0} \left(\frac{R}{h}\right)^3 \sum_n \theta_n \sin \tilde{n}\beta \int_0^{\infty} \frac{v_n(\chi) \sin \alpha_0 \chi \sin \alpha \chi}{\chi L_n(\chi)} d\chi; \\ \frac{E_1R}{P} w(\alpha, \beta) &= -\frac{6(1-v_1v_2)}{\pi\alpha_0\beta_0} \left(\frac{R}{h}\right)^3 \sum_n \theta_n \cos \tilde{n}\beta \int_0^{\infty} \frac{w_n(\chi) \sin \alpha_0 \chi \sin \alpha \chi}{\chi L_n(\chi)} d\chi; \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\frac{R}{P} T_1(\alpha, \beta) = -\frac{6(1-v_1v_2)}{\pi\alpha_0\beta_0} \left(\frac{R}{h}\right)^2 \sum_n \theta_n \cos \tilde{n}\beta \int_0^{\infty} \frac{t_{1n}(\chi) \sin \alpha_0 \chi \sin \alpha \chi}{\chi L_n(\chi)} d\chi;$$

$$\frac{R}{P} T_2(\alpha, \beta) = -\frac{\lambda}{2\pi\alpha_0\beta_0} \sum_n \theta_n \cos \tilde{n}\beta \int_0^{\infty} \frac{t_{2n}(\chi) \sin \alpha_0 \chi \sin \alpha \chi}{\chi L_n(\chi)} d\chi;$$

$$\frac{R}{P} S(\alpha, \beta) = \frac{1-v_1v_2}{2\pi\alpha_0\beta_0} \frac{G}{E_1} \sum_n \theta_n \sin \tilde{n}\beta \int_0^{\infty} \frac{s_n(\chi) \sin \alpha_0 \chi \cos \alpha \chi}{\chi L_n(\chi)} d\chi;$$

$$\frac{1}{P} G_i(\alpha, \beta) = \frac{I}{2\pi\alpha_0\beta_0} \sum_n \theta_n \cos \tilde{n}\beta \int_0^{\infty} \frac{g_{in}(\chi) \sin \alpha_0 \chi \sin \alpha \chi}{\chi L_n(\chi)} d\chi; \quad i=1,2$$

где $P = 4\alpha_0\beta_0 p_0 R^2$;

$$\begin{aligned} L_n(\chi, n) &= (\chi^8 + a_{6,2}\chi^6\tilde{n}^2 - 2v_2\chi^6 + a_{4,4}\chi^4\tilde{n}^4 + a_{4,2}\chi^4\tilde{n}^2 + \lambda\chi^4 + a_{2,6}\chi^2\tilde{n}^6 - a_{2,4}\chi^2\tilde{n}^4 \\ &\quad + a_{2,2}\chi^2\tilde{n}^2 + \lambda^2\tilde{n}^4(\tilde{n}^2 - 1)^2 + \lambda \frac{(1-v_1v_2)}{c^2} \chi^4); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_n(\chi) &= \lambda\chi^2 + \frac{c^2}{\mu_1} [\chi^6\mu_1 + (\lambda + 2\mu_1v_2 + 4\mu_1^2)\chi^4\tilde{n}^2 + \lambda(5\mu_1 + 2v_2)\chi^2\tilde{n}^4 \\ &\quad - 2\lambda(4\mu_1 + v_2)\chi^2\tilde{n}^2 + \lambda^2\tilde{n}^2(\tilde{n}^2 - 1)^2]; \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$v_n(\chi) = \lambda\chi\tilde{n} + \frac{c^2}{\mu_1} \left[(\mu_1 + v_2)\chi^5\tilde{n} + (\mu_1 + v_2)(2v_2 + 4\mu_1)\chi^3\tilde{n}^3 + \right. \\ \left. - (\lambda + v_2^2 + 3\mu_1v_2)\chi^3\tilde{n} + \lambda(\mu_1 + v_2)\chi(\tilde{n}^5 - \tilde{n}^3) - \lambda v_2\chi\tilde{n}^3 \right];$$

$$w_n(\chi) = v_2\chi^3 - \lambda\chi\tilde{n}^3 + \frac{c^2}{\mu_1} \left\{ \mu_1\chi^5 + [\lambda - (v_2 + 2\mu_1)^2]\chi^3\tilde{n}^2 - \lambda\mu_1\chi\tilde{n}^4 \right\};$$

$$t_{1n}(\chi) = \left\{ \lambda\chi^3 + \frac{c^2}{1 - v_1v_2} \left[\chi^7 + \left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} + v_2 + 4\mu_1 \right) \chi^5\tilde{n}^2 + (5\lambda - 6v_2^2 - 4\mu_1v_2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2v_2 \frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} \right) \chi^3\tilde{n}^4 + \lambda \left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} - v_2 \right) \chi\tilde{n}^6 + \left[7(\lambda - v_2^2) + 2 \frac{v_2}{\mu_1} (\lambda - v_2^2) - 4\mu_1v_2 \right] \chi^3\tilde{n}^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \lambda \left(\frac{\lambda - v_2}{\mu_1} - v_2 \right) \chi\tilde{n}^6 - 2v_2\chi^5 - 2\lambda \left(\frac{\lambda - v_2}{\mu_1} - v_2 \right) \chi\tilde{n}^4 + \frac{\lambda^2}{\mu_1} \chi\tilde{n}^2 \right] \right\};$$

$$t_{2n}(\chi) = v_1\chi^7 - (1 - 2v_1v_2 - 4v_1\mu_1)\chi^5\tilde{n}^2 - [4(\mu_1 - v_2) + 5v_2]\chi^3\tilde{n}^4 - \lambda\chi\tilde{n}^6 - \chi^5 + 4\mu_1\chi^3\tilde{n}^2 + \\ + \lambda\chi\tilde{n}^4 + \frac{\lambda v_2}{\mu_1} \chi\tilde{n}^2 \};$$

$$s_n(\chi) = \left[-\frac{v_2}{\mu_1} \chi^6\tilde{n} + \left(\frac{\lambda - 2v_2}{\mu_1} - 4v_2 \right) \chi^4\tilde{n}^3 + \lambda \left(\frac{v_2}{\mu_1} + 4 \right) \chi^2\tilde{n}^5 + \frac{\lambda^2}{\mu_1} \tilde{n}^3(\tilde{n}^2 - 1)^2 - \right. \\ \left. - \left(\frac{\lambda + v_2^2}{\mu_1} + 4v_2 \right) \chi^4\tilde{n} - 8\lambda\chi^2\tilde{n}^3 \right];$$

$$g_{1n}(\chi) = -v_2\chi^5 + (\lambda - v_2^2)\chi^3\tilde{n}^2 + \lambda\chi^3 + \lambda v_2\chi(\tilde{n}^4 - \tilde{n}^2) + \\ + c^2 \left\{ 4(v_2 + 2\mu_1)\chi^5\tilde{n}^2 - \left[2(3\lambda - v_2^2) + \frac{v_2}{\mu_1}(\lambda - v_2^2) \right] \chi^3\tilde{n}^4 + \frac{\lambda(\lambda - v_2^2)}{\mu_1} \chi\tilde{n}^6 \right\};$$

$$g_{2n}(\chi) = \lambda \left\langle -v_1v_2\chi^5 + v_2\chi^3 + \lambda\chi(\tilde{n}^4 - \tilde{n}^2) - c^2 \left\{ v_1\chi^7 + \left[1 + \frac{v_2}{\mu_1} - \frac{v_1(v_2 + 2\mu_1)^2}{\mu_1} \right] \chi^5\tilde{n}^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left[\lambda(1 - v_1\mu_1) - (v_2 + 2\mu_1)^2 \right] \chi^3\tilde{n}^4 - \frac{1}{\mu_1} \left[\lambda - (v_2 + 2\mu_1)^2 \right] \chi^3\tilde{n}^2 - \lambda\chi\tilde{n}^6 \right\} \right\rangle.$$

На основании построенного здесь решения (3.14), (3.15) могут быть рассмотрены различные частные случаи приложения нагрузки к оболочке. В частном случае, когда нагрузка приложена по отрезкам контуре ($\alpha_0 \rightarrow 0$), выражения для искомых фактор упрощаются и записываются следующим образом:

$$\frac{E_1 R}{P} u(\alpha, \beta) = \frac{6(1 - v_1v_2)}{\pi\beta_0} \left(\frac{R}{h} \right)^3 \sum_n^{\infty} \theta_n \cos \tilde{n}\beta \int_0^{\infty} \frac{u_n(\chi) \cos \alpha\chi}{L_n(\chi)} d\chi;$$

$$\frac{R}{P} T_1(\alpha, \beta) = -\frac{6(1-\nu_1\nu_2)}{\pi\beta_0} \left(\frac{R}{h}\right)^2 \sum_n \theta_n \cos \tilde{n}\beta \int_0^\infty \frac{t_{1n}(\chi) \sin \alpha\chi}{L_n(\chi)} d\chi; \quad (3.16)$$

$$\frac{R}{P} S(\alpha, \beta) = \frac{1-\nu_1\nu_2}{2\pi\beta_0} \frac{G}{E_1} \sum_n \theta_n \sin \tilde{n}\beta \int_0^\infty \frac{s_n(\chi) \cos \alpha\chi}{L_n(\chi)} d\chi.$$

Отметим что, в формулах (3.17) остались справедливыми все обозначения, приняты в формулах (3.15).

Суммирование рядов (3.15), (3.17) начинается с $n=2$ при $k=1$ и с $n=1$ - при $k \geq 2$

Здесь рассмотрено самоуравновешенное (бимоментное) напряженное состояние, связанное с деформированием контура поперечного сечения, так что при расчете конкретной конструкции необходимо принять во внимание условия ее закрепления, как балки и стержня (при $k=1$) или только стержня (при $k \geq 2$) - с недеформируемым контуром поперечного сечения.

3.2.1. Основное состояние: решение «типа полубезмоментных уравнений»

При использовании уравнений «типа пологих оболочек» все решения (3.13-3.16) легко трансформируются, если в них произвести замены в соответствии с (1.12), (1.13).

В случае применения уравнений (1.19), (1.20) для разрешающей функции получаем:

$$\Phi(\alpha, \beta) = -\frac{P}{2\pi\alpha_0\beta_0 E_2 h} \sum_n \theta_n \cos \tilde{n}\beta \int_0^\infty \frac{\sin \alpha_0 \chi \cos \alpha\chi}{\chi \tilde{L}(\chi, n)} d\chi, \quad (3.17)$$

где $\tilde{L}(\chi, \tilde{n}) = \chi^4 + 4\mu_n^4$; $4\mu_n^4 = \frac{\lambda c^2}{1-\nu_1\nu_2} \tilde{n}^4 (\tilde{n}^2 - 1)^2$.

В аналогичной форме записываются и искомые факторы:

$$\begin{aligned} \frac{E_1 R}{P} u(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2\pi\alpha_0\beta_0} \frac{R}{h} \sum_n \theta_n \cos \tilde{n}\beta \int_0^\infty \frac{\chi \sin \alpha_0 \chi \cos \alpha\chi}{\chi^4 + 4\mu_n^4} d\chi; \\ \frac{E_1 R}{P} v(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2\pi\alpha_0\beta_0} \frac{R}{h} \sum_n \theta_n \tilde{n} \sin \tilde{n}\beta \int_0^\infty \frac{\sin \alpha_0 \chi \sin \alpha\chi}{\chi^4 + 4\mu_n^4} d\chi; \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\frac{E_1 R}{P} w(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi\alpha_0\beta_0} \frac{R}{h} \sum_n \theta_n \tilde{n}^2 \cos \tilde{n}\beta \int_0^\infty \frac{\sin \alpha_0 \chi \sin \alpha\chi}{\chi^4 + 4\mu_n^4} d\chi ;$$

$$\frac{R}{P}T_1(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2\pi\alpha_0\beta_0} \sum_n^* \theta_n \cos \tilde{n}\beta \int_0^\infty \frac{\chi^2 \sin \alpha_0 \chi \sin \alpha \chi}{\chi^4 + 4\mu_n^4} d\chi ;$$

$$\frac{R}{P}S(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2\pi\alpha_0\beta_0} \sum_n^* 4\mu_n^4 \frac{\theta_n}{\tilde{n}} \sin \tilde{n}\beta \int_0^\infty \frac{\sin \alpha_0 \chi \cos \alpha \chi}{\chi(\chi^4 + 4\mu_n^4)} d\chi.$$

В результате вычисления интегралов [19] получаем:

$$\frac{E_1 R}{P}u(\alpha, \beta) = \frac{1}{16\alpha_0\beta_0} \frac{R}{h} \sum_n^* \frac{1}{\mu_n^2} u_n(\alpha) \theta_n \cos \tilde{n}\beta ;$$

$$\frac{E_1 R}{P}v(\alpha, \beta) = \frac{1}{32\alpha_0\beta_0} \frac{R}{h} \sum_n^* \frac{\tilde{n}}{\mu_n^3} v_n(\alpha) \theta_n \sin \tilde{n}\beta ; \quad (3.19)$$

$$\frac{E_1 R}{P}w(\alpha, \beta) = \frac{1}{32\alpha_0\beta_0} \frac{R}{h} \sum_n^* \frac{\tilde{n}^2}{\mu_n^3} w_n(\alpha) \theta_n \cos \tilde{n}\beta ;$$

$$\frac{R}{P}T_1(\alpha, \beta) = -\frac{1}{16\alpha_0\beta_0} \sum_n^* \frac{1}{\mu_n} t_{1n}(\alpha) \theta_n \cos \tilde{n}\beta ;$$

$$\frac{R}{P}T_2(\alpha, \beta) = -\frac{1}{8\alpha_0\beta_0} \sum_n^* \frac{\left(\begin{matrix} -\tilde{n}^4 + \tilde{n}^2 + \frac{v_2}{\mu_1} \\ \mu_1 \end{matrix} \right) \mu_n}{\tilde{n}^2 (\tilde{n}^2 - 1)^2} t_{2n}(\alpha) \theta_n \cos \tilde{n}\beta ;$$

$$\frac{R}{P}S(\alpha, \beta) = -\frac{1}{8\alpha_0\beta_0} \sum_n^* \frac{1}{\tilde{n}} s_n(\alpha) \theta_n \sin \tilde{n}\beta ;$$

$$\frac{1}{P}G_2(\alpha, \beta) = \frac{1}{8\alpha_0\beta_0} \sum_n^* \frac{\mu_n^2}{(\tilde{n}^2 - 1)} g_{2n}(\alpha) \theta_n \cos \tilde{n}\beta ;$$

где

$$u_n^o(\alpha) = \begin{cases} \zeta_n(\alpha_0 - \alpha) + \zeta_n(\alpha_0 + \alpha), & (|\alpha| \leq \alpha_0) \\ \zeta_n(\alpha_0 + \alpha) - \zeta_n(\alpha - \alpha_0), & (|\alpha| > \alpha_0) \end{cases} ;$$

$$v_n^o(\alpha) = \begin{cases} \varphi_n(\alpha_0 - \alpha) + \zeta_n(\alpha_0 - \alpha) - \varphi_n(\alpha_0 + \alpha) - \zeta_n(\alpha_0 + \alpha), & (|\alpha| \leq \alpha_0) \\ \varphi_n(\alpha - \alpha_0) + \zeta_n(\alpha - \alpha_0) - \varphi_n(\alpha + \alpha_0) - \zeta_n(\alpha + \alpha_0), & (|\alpha| > \alpha_0) \end{cases} ;$$

$$w_n^o(\alpha) = v_n^o(\alpha) ;$$

$$t_{1n}^o(\alpha) = \begin{cases} \varphi_n(\alpha_0 - \alpha) - \zeta_n(\alpha_0 - \alpha) - \varphi_n(\alpha_0 + \alpha) + \zeta_n(\alpha_0 + \alpha), & (|\alpha| \leq \alpha_0) \\ \varphi_n(\alpha - \alpha_0) - \zeta_n(\alpha - \alpha_0) - \varphi_n(\alpha + \alpha_0) + \zeta_n(\alpha + \alpha_0), & (|\alpha| > \alpha_0) \end{cases} ;$$

$$t_{2n}^o(\alpha) = v_n^o(\alpha) ;$$

$$s_n^o(\alpha) = \begin{cases} 2 - \varphi_n(\alpha_0 - \alpha) - \varphi_n(\alpha_0 + \alpha), & (|\alpha| \leq \alpha_0), \\ \varphi_n(\alpha - \alpha_0) - \varphi_n(\alpha + \alpha_0), & (|\alpha| > \alpha_0) \end{cases};$$

$$g_{2n}^o(\alpha) = w_n^o(\alpha);$$

$$\varphi_n(\alpha) = \exp(-\mu_n \alpha) \cos \mu_n \alpha; \quad \xi_n(\alpha) = \exp(-\mu_n \alpha) \sin \mu_n \alpha.$$

Для основного состояния в (3.19) суммирование рядов начинается с $n=2$ при $k=1$ и с $n=1$ - при $k \geq 2$.

В частном случае, когда нагрузка приложена по отрезкам контуре ($\alpha_0 \rightarrow 0$):

$$\begin{aligned} \frac{E_1 R}{P} u(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2\pi\beta_0} \frac{R}{h} \sum_n^* \theta_n \cos \tilde{n}\beta \int_0^\infty \frac{\chi^2 \cos \alpha \chi}{\chi^4 + 4\mu_n^4} d\chi; \\ \frac{E_1 R}{P} w(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2\pi\beta_0} \frac{R}{h} \sum_n^* \theta_n \tilde{n}^2 \cos \tilde{n}\beta \int_0^\infty \frac{\chi \sin \alpha \chi}{\chi^4 + 4\mu_n^4} d\chi; \\ \frac{R}{P} T_1(\alpha, \beta) &= -\frac{1}{2\pi\beta_0} \sum_n^* \theta_n \cos \tilde{n}\beta \int_0^\infty \frac{\chi^3 \sin \alpha \chi}{\chi^4 + 4\mu_n^4} d\chi; \\ \frac{R}{P} S(\alpha, \beta) &= -\frac{1}{2\pi\beta_0} \sum_n^* 4\mu_n^4 \frac{\theta_n}{\tilde{n}} \sin \tilde{n}\beta \int_0^\infty \frac{\cos \alpha \chi}{\chi^4 + 4\mu_n^4} d\chi. \end{aligned} \quad (3.20)$$

В результате вычисления интегралов [19] получаем:

$$\begin{aligned} \frac{E_1 R}{P} u(\alpha, \beta) &= \frac{1}{8\beta_0} \frac{R}{h} \sum_n^* \frac{\theta_n}{\mu_n} [\varphi_n(\alpha) - \xi_n(\alpha)] \cos \tilde{n}\beta; \\ \frac{E_1 R}{P} w(\alpha, \beta) &= \frac{1}{8\beta_0} \frac{R}{h} \sum_n^* \frac{\tilde{n}^2}{\mu_n} \xi_n(\alpha) \theta_n \cos \tilde{n}\beta; \\ \frac{R}{P} T_1(\alpha, \beta) &= -\frac{1}{4\beta_0} \sum_n^* \theta_n \varphi_n(\alpha) \cos \tilde{n}\beta; \\ \frac{R}{P} S(\alpha, \beta) &= -\frac{1}{4\beta_0} \sum_n^* \mu_n \frac{\theta_n}{\tilde{n}} [\varphi_n(\alpha) + \xi_n(\alpha)] \sin \tilde{n}\beta. \end{aligned} \quad (3.20a)$$

3.2.2. Тангенциальное состояние: решение уравнений «типа плоской задачи»

Разрешающая функция для тангенциального состояния получается путём подставить (3.13) в (1.14):

$$\Phi(\alpha, \beta) = -\frac{1 - \nu_1 \nu_2}{2\pi\alpha_0\beta_0} \frac{P}{E_1 h} \sum_n^* \theta_n \cos \tilde{n}\beta \int_0^\infty \frac{\sin \alpha_0 \chi \cos \alpha \chi}{\chi \hat{L}(\chi, \tilde{n})} d\chi; \quad (3.21)$$

где $\hat{L}(\chi, \tilde{n}) = \chi^4 + \left(\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - 2\nu_2 \right) \chi^2 \tilde{n}^2 + \lambda \tilde{n}^4$.

Для продольного перемещения и продольного усилия, сдвигающего усилия находим:

$$\begin{aligned} \frac{E_1 h}{P} u(\alpha, \beta) &= \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{2\pi \alpha_0 \beta_0} \sum_{n^{*+1}}^{\infty} \theta_n \cos \tilde{n} \beta \int_0^{\infty} \frac{u_n^r(\chi) \sin \alpha_0 \chi \cos \alpha \chi}{\chi \hat{L}(\chi, \tilde{n})} d\chi; \\ \frac{R}{P} T_1(\alpha, \beta) &= -\frac{1}{2\pi \alpha_0 \beta_0} \sum_{n^{*+1}}^{\infty} \theta_n \cos \tilde{n} \beta \int_0^{\infty} \frac{t_{1n}^r(\chi) \sin \alpha_0 \chi \sin \alpha \chi}{\chi \hat{L}(\chi, \tilde{n})} d\chi; \\ \frac{R}{P} S_1(\alpha, \beta) &= -\frac{1}{2\pi \alpha_0 \beta_0} \sum_{n^{*+1}}^{\infty} \theta_n \sin \tilde{n} \beta \int_0^{\infty} \frac{s_n^r(\chi) \sin \alpha_0 \chi \cos \alpha \chi}{\chi \hat{L}(\chi, \tilde{n})} d\chi; \end{aligned} \quad (3.22)$$

где $u_n^r(\chi) = \chi^2 + \frac{\lambda}{\mu_1} \tilde{n}^2$; $t_{1n}^r(\chi) = \chi^3 + \left(\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - \nu_2 \right) \chi \tilde{n}^2$; $s_n^r(\chi) = \lambda \tilde{n}^3 - \nu_2 \tilde{n} \chi^2$.

Введем обобщенный модуль сдвига [2]: $G = \sqrt{E_1 E_2} / 2 (1 + \sqrt{\nu_1 \nu_2})$ и получим преобразованный с его помощью знаменатель под знаком интеграла (3.22):

$$\hat{L}(\chi, \tilde{n}) = (\chi^2 + \sqrt{\lambda} \tilde{n}^2)^2. \quad (3.23)$$

Тогда, после подстановки (3.23) в выражения (3.22) и взятия интегралов [19]:

$$\frac{E_1 R}{P} u^r(\alpha, \beta) = \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{8\alpha_0 \beta_0 \sqrt{\lambda}} \frac{R}{h} \sum_{n^{*+1}}^{\infty} \frac{1}{\tilde{n}^2} u_n^r(\alpha) \theta_n \cos \tilde{n} \beta; \quad (3.24)$$

$$u_n^r(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{2} \hat{n}(\alpha_0 - \alpha) e^{-\hat{n}(\alpha_0 - \alpha)} + \frac{1}{2} \hat{n}(\alpha_0 + \alpha) e^{-\hat{n}(\alpha_0 + \alpha)} + \\ + \frac{\sqrt{\lambda}}{\mu_1} \left\{ 2 - \frac{1}{2} [2 + \hat{n}(\alpha_0 - \alpha)] e^{-\hat{n}(\alpha_0 - \alpha)} - \frac{1}{2} [2 + \hat{n}(\alpha_0 + \alpha)] e^{-\hat{n}(\alpha_0 + \alpha)} \right\}, |\alpha| \leq \alpha_0; \\ -\frac{1}{2} \hat{n}(\alpha - \alpha_0) e^{-\hat{n}(\alpha - \alpha_0)} + \frac{1}{2} \hat{n}(\alpha + \alpha_0) e^{-\hat{n}(\alpha + \alpha_0)} + \\ + \frac{\sqrt{\lambda}}{\mu_1} \left\{ \frac{1}{2} [2 + \hat{n}(\alpha - \alpha_0)] e^{-\hat{n}(\alpha - \alpha_0)} - [2 + \frac{1}{2} \hat{n}(\alpha + \alpha_0)] e^{-\hat{n}(\alpha + \alpha_0)} \right\}, |\alpha| > \alpha_0, \end{cases}$$

$$\frac{R}{P} T_1^r(\alpha, \beta) = -\frac{1}{16\alpha_0 \beta_0 \sqrt{\lambda}} \sum_{n^{*+1}}^{\infty} \frac{1}{\tilde{n}} t_{1n}^r(\alpha) \theta_n \cos \tilde{n} \beta;$$

$$t_{1n}^r(\alpha) = \begin{cases} [1 - \hat{n}(\alpha_0 - \alpha)]e^{-\hat{n}(\alpha_0 - \alpha)} - [1 - \hat{n}(\alpha_0 + \alpha)]e^{-\hat{n}(\alpha_0 + \alpha)} + \\ + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} - v_2 \right) \{ [1 + \hat{n}(\alpha_0 - \alpha)]e^{-\hat{n}(\alpha_0 - \alpha)} - [1 + \hat{n}(\alpha_0 + \alpha)]e^{-\hat{n}(\alpha_0 + \alpha)} \}, |\alpha| \leq \alpha_0 \\ [1 - \hat{n}(\alpha - \alpha_0)]e^{-\hat{n}(\alpha - \alpha_0)} - [1 - \hat{n}(\alpha + \alpha_0)]e^{-\hat{n}(\alpha + \alpha_0)} + \\ + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} - v_2 \right) \{ [1 + \hat{n}(\alpha - \alpha_0)]e^{-\hat{n}(\alpha - \alpha_0)} - [1 + \hat{n}(\alpha + \alpha_0)]e^{-\hat{n}(\alpha + \alpha_0)} \}, |\alpha| > \alpha_0 \end{cases}$$

$$\frac{R}{P} S^r(\alpha, \beta) = -\frac{1}{16\alpha_0\beta_0} \sum_{n^{*+1}}^{\infty} \frac{1}{\hat{n}} s_n^r(\alpha) \theta_n \sin \tilde{n}\beta;$$

$$s_n^r(\alpha) = \begin{cases} 4 - [2 + (1 + \frac{v_2}{\sqrt{\lambda}})\hat{n}(\alpha_0 + \alpha)]e^{-\hat{n}(\alpha_0 + \alpha)} - [2 + (1 + \frac{v_2}{\sqrt{\lambda}})\hat{n}(\alpha_0 - \alpha)]e^{-\hat{n}(\alpha_0 - \alpha)}, & |\alpha| \leq \alpha_0; \\ -[2 + (1 + \frac{v_2}{\sqrt{\lambda}})\hat{n}(\alpha_0 + \alpha)]e^{-\hat{n}(\alpha_0 + \alpha)} + [2 + (1 + \frac{v_2}{\sqrt{\lambda}})\hat{n}(\alpha - \alpha_0)]e^{-\hat{n}(\alpha - \alpha_0)}, & |\alpha| > \alpha_0. \end{cases}$$

Здесь обозначено: $\hat{n} = \sqrt[4]{\lambda} \tilde{n}$.

В частном случае, когда нагрузка приложена по отрезкам контуре ($\alpha_0 \rightarrow 0$)

получаем:

$$\frac{E_1 R}{P} u^r(\alpha, \beta) = \frac{1 - v_1 v_2}{8\beta_0} \frac{R}{h} \sum_{n^{*+1}}^{\infty} \frac{1}{\hat{n}} \left[2 - \left(1 - \frac{\sqrt{\lambda}}{\mu_1} \right) (1 + \hat{n}\alpha) \right] \theta_n \cos \tilde{n}\beta;$$

$$\frac{R}{P} T_1^r(\alpha, \beta) = -\frac{1}{8\beta_0} \sum_{n^{*+1}}^{\infty} t_{1n}^r(\alpha) \theta_n \cos \tilde{n}\beta;$$

$$\frac{R}{P} S^r(\alpha, \beta) = -\frac{1}{8\beta_0} \sum_{n^{*+1}}^{\infty} s_n^r(\alpha) \theta_n \sin \tilde{n}\beta; \quad (3.25)$$

$$\text{где } s_{1n}^r(\alpha) = e^{-\hat{n}\alpha} \left[\frac{1}{\sqrt[4]{\lambda}} (\sqrt{\lambda} + v_2) (1 + \hat{n}\alpha) - 2v_2 \right]; \quad t_{1n}^r(\alpha) = e^{-\hat{n}\alpha} \left[(2 - \hat{n}\alpha) + (2\sqrt{\lambda} + v_2) \frac{\hat{n}\alpha}{\sqrt{\lambda}} \right].$$

Таким образом, построено решение для искомых факторов основного и тангенциального состояний, являющихся компонентами полного НДС.

Результаты расчета наиболее важных силовых факторов - продольного и окружного нормальных усилий (T_1, T_2) - для оболочки с относительной толщиной $h/R=1/130$ и нагруженными областями, имеющими параметры $\alpha_0 = \beta_0 = 0,25; 0,125; 0,0625$ (кривые 1;2;3, соответственно), представлены на рис.3.4 при $\beta = 0, \alpha = \text{var}, \lambda = 1$. Начало координат помещено в центре нагруженных

областей, усилия показаны в сжатой зоне: продольное усилие является сжимающим, а окружное – растягивающим.

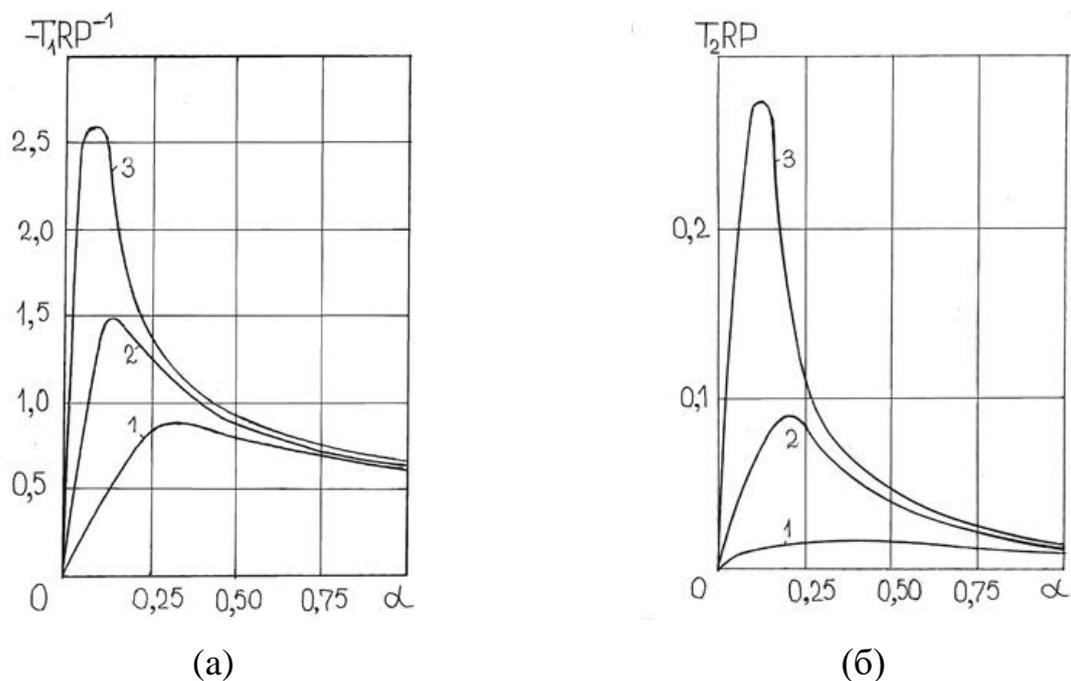


Рис 3.4. Изменение продольного (а) и кольцевого (б) усилия вдоль нулевой образующей оболочки.

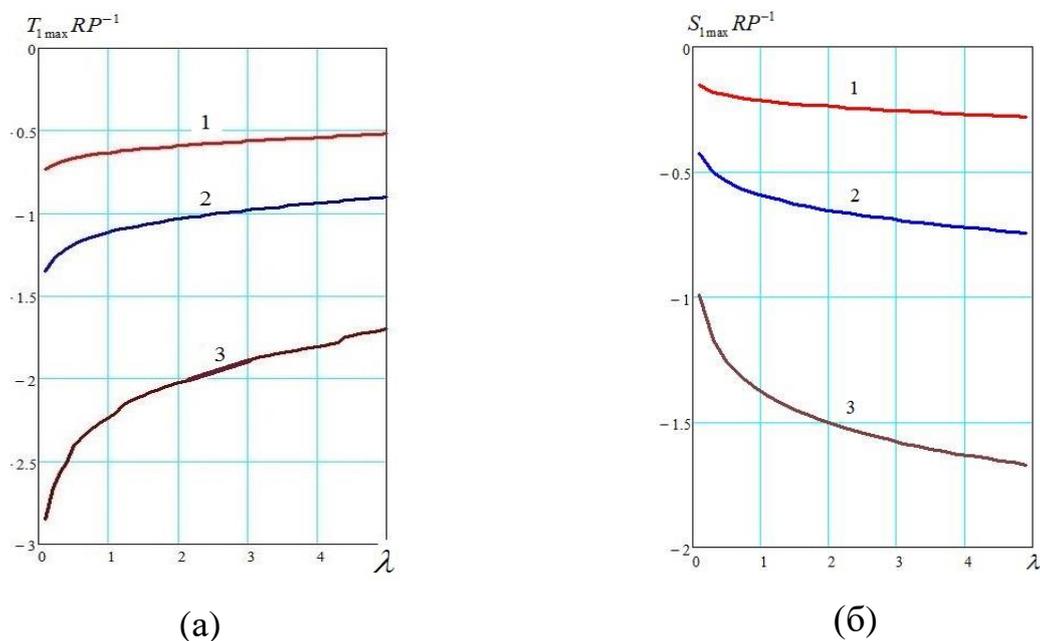


Рис 3.5. Зависимость максимальных значений продольного усилия (а), сдвигающего усилия (б) от параметра ортотропии.

Зависимости максимальных усилий для оболочки с относительной толщиной $h/R=1/130$ и нагруженными областями, имеющими параметры $\alpha_0 = \beta_0 = 0,25; 0,125; 0,0625$ (кривые 1;2;3, соответственно), представлены на рис.3.5

Влияние показателя ортотропии λ на величину максимального значения продольного усилия видно на рис. 3.6, где дана зависимость отношения величины усилия при $\alpha = \alpha_0; \beta = 0; h/R = 1/100; \alpha_0 = \beta_0 = 0,25$, различных значениях λ ($0,1 < \lambda < 10$) к величине усилия при $\lambda=1$ для следующих законов изменения нагрузки: $\cos 2\beta$; $\cos 10\beta$ (кривые 1; 2, соответственно). В первом случае, $\cos 2\beta$, использовались уравнения основного состояния, во втором, $\cos 10\beta$, – уравнения тангенциального состояния, те и другие дающие при указанных номерах гармоник асимптотически точные результаты.

Для продольного перемещения, принимающего максимальное значение в центре нагруженной области, аналогичная информация представлена на рис.3.7, где принято: $\alpha_0 = \beta_0 = 0,25$, закон изменения нагрузки $\cos 2\beta$. Аналогичная кривая, соответствующая закону изменения нагрузки $\cos 10\beta$, практически совпадает с приведенной на рис.3.7 для случая $\cos 2\beta$.

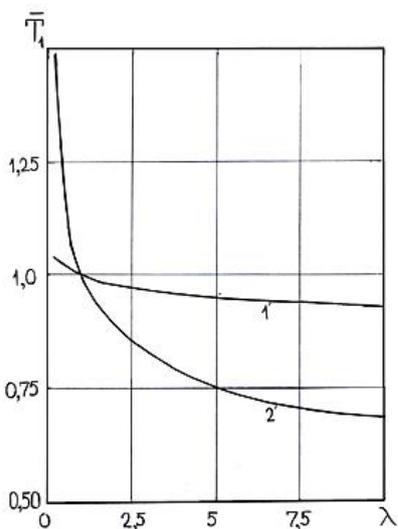


Рис.3.6. Влияние показателя ортотропии λ на величину продольного усилия.

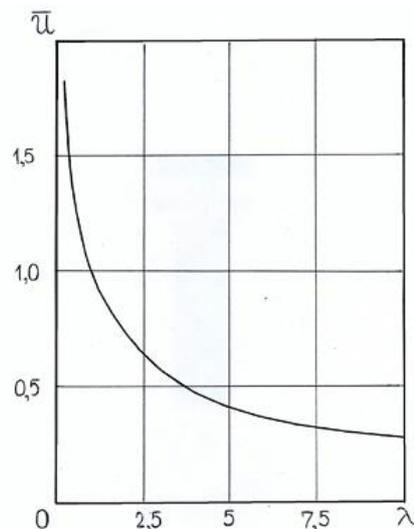


Рис 3.7. Влияние показателя ортотропии λ на величину продольного перемещения.

3.2.3. Частный случай приложения нагрузки. Нагружения по отрезкам контуре

Рассмотрим один частный случай приложения нагрузки, когда она действует по “k” отрезками контура. Он характеризуется тем, что для него $\alpha_0 \rightarrow 0$ из (3.20а) и (3.25) записываем выражения для продольного перемещения, продольного и сдвигающего усилий:

$$\begin{aligned} \frac{E_1 R}{P} u(\alpha, \beta) = & \frac{1}{8\beta_0} \frac{R}{h} \sum_n^{n^*} \frac{\theta_n}{\mu_n} [\varphi_n(\alpha) - \xi_n(\alpha)] \cos \tilde{n}\beta \\ & + \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{8\beta_0} \frac{R}{h} \sum_{n^{*+1}}^{\infty} \frac{1}{\tilde{n}} \left[2 - \left(1 - \frac{\sqrt{\lambda}}{\mu_1} \right) (1 + \hat{n}\alpha) \right] \theta_n \cos \tilde{n}\beta; \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\frac{R}{P} T_1(\alpha, \beta) = -\frac{1}{4\beta_0} \sum_n^{n^*} \theta_n \varphi_n(\alpha) \cos \tilde{n}\beta - \frac{1}{4\beta_0} \sum_{n^{*+1}}^{\infty} \left[e^{-\hat{n}\alpha} \left(1 - \frac{\hat{n}\alpha}{2} \right) + \left(1 + \frac{\nu_2}{2\sqrt{\lambda}} \right) \hat{n}\alpha \right] \theta_n \cos \tilde{n}\beta;$$

$$\begin{aligned} \frac{R}{P} S(\alpha, \beta) = & -\frac{1}{4\beta_0} \sum_n^{\bar{n}} [\varphi_n(\alpha) + \xi_n(\alpha)] \frac{\mu_n}{n} \theta_n \sin \tilde{n}\beta - \\ & - \frac{1}{8\beta_0} \sum_{n^{*+1}}^{\infty} e^{-\hat{n}\alpha} \left[\frac{1}{\sqrt[4]{\lambda}} (\sqrt{\lambda} + \nu_2) (1 + \hat{n}\alpha) - 2\nu_2 \right] \theta_n \sin \tilde{n}\beta. \end{aligned}$$

Проанализируем аналитическое выражение для продольного перемещения и продольного усилия. Наиболее значения принимает при $\alpha = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{E_1 R}{P} u(0, \beta) = & \frac{1}{4\pi \sqrt[4]{\lambda} \beta_0} \frac{R}{h} \sum_n^{n^*} \frac{1}{n \mu_n} \sin \tilde{n}\beta_0 \cos \tilde{n}\beta + \\ & + \frac{(3\sqrt{\lambda} - \nu_2)(1 - \nu_1 \nu_2)}{(\sqrt{\lambda} - \nu_2) \sqrt[4]{\lambda}} \frac{1}{4\pi k \beta_0} \frac{R}{h} \sum_{n^{*+1}}^{\infty} \frac{\sin \tilde{n}\beta_0}{n^2} \cos \tilde{n}\beta; \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\frac{R}{P} T_1(0, \beta) = -\frac{1}{2\pi \beta_0} \sum_n^{\infty} \frac{\sin \tilde{n}\beta_0}{n} \cos \tilde{n}\beta.$$

Сравним члены, входящие в продольное перемещение и являющиеся, как известно, решениями уравнений основного состояния и тангенциального состояния. Подставим в решение для основного состояния значения коэффициента μ_n :

$$\frac{E_1 R}{P} u^0(0, \beta) = \frac{k \sqrt[4]{3(1 - \nu_1 \nu_2)}}{2\pi \sqrt[4]{\lambda} \beta_0} \frac{R}{h} \sqrt{\frac{R}{h}} \sum_n^{n^*} \frac{1}{\tilde{n}^2 \sqrt{\tilde{n}^2 - 1}} \sin \tilde{n}\beta_0 \cos \tilde{n}\beta; \quad (3.28)$$

и оценим величину одного из первых членов (3.27) и решения для тангенциального состояния.

При $k = 2, n = 2$ формула (3.28) может быть записана в виде:

$$\frac{E_1 R}{P} u_2^0(0, \beta) \approx \frac{\sqrt[4]{3(1-v_1 v_2)}}{64\pi^4 \sqrt{\lambda} \beta_0} \frac{R}{h} \sqrt{\frac{R}{h}} \sin 4\beta_0 \cos 4\beta; \quad (3.29)$$

При записи этой формулы принято, что для данных фиксированных значений k, n можно пренебречь единицей по сравнению n^* .

Во второе слагаемое продольного перемещения, являющееся решением для тангенциального состояния, подставим значение n^* , определяемое соотношением (1.30), тогда получим:

$$\begin{aligned} \frac{E_1 R}{P} u_{n^*}^r(0, \beta) = & \frac{(3\sqrt{\lambda} - v_2)(\sqrt{\lambda} + v_2) \sqrt{\left[3 + \frac{v_1(1-v_1 v_2)}{\mu_1} - 4v_1(v_2 + \mu_1)\right]}}{\lambda^4 \sqrt{\lambda} \sqrt{6(1-v_1 v_2)}} \times \\ & \times \frac{1}{4\pi\beta_0} \sqrt{\frac{h}{R}} \sin 2n^* \beta_0 \cos 2n^* \beta; \end{aligned}$$

Подставим $\mu_1 = \frac{\sqrt{\lambda} - v_2}{2}$, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{E_1 R}{P} u_{n^*}^r(0, \beta) = & \frac{(3\sqrt{\lambda} - v_2)(\sqrt{\lambda} + v_2) \sqrt{3 + 2v_1(\sqrt{\lambda} + v_2)\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)}}{\lambda^4 \sqrt{\lambda} \sqrt{6(1-v_1 v_2)}} \times \\ & \times \frac{1}{4\pi\beta_0} \sqrt{\frac{h}{R}} \sin 2n^* \beta_0 \cos 2n^* \beta; \end{aligned} \quad (3.30)$$

Взято значение $n = n^*$, а не $n = n^* + 1$, как это следует из (3.26), для простоты записи, т.к. для достаточно тонких оболочек ($h/R \approx 1/100$) можно считать, что $n^* + 1 \approx n^*$.

Из сравнения (3.29), (3.30) видно, что коэффициенты в решении основного состояния, стоящие при тригонометрических функциях, существенно больше соответствующих коэффициентов в решении для тангенциального состояния.

При достаточно больших значения β_0 роль второго слагаемого является второстепенной, и им можно пренебречь по сравнению с первым членом, являющимся решением уравнений полубезмоментной теории. В точке $\alpha = \beta = 0$

продольное перемещение имеет максимальное значение и может быть записано таким образом:

$$\frac{E_1 R}{P} u(0,0) = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu_1\nu_2)}}{2\pi\sqrt[4]{\lambda k\beta_0}} \frac{R}{h} \sqrt{\frac{R}{h}} \sum_n^{\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{k^2n^2-1}} \sin \tilde{n}\beta_0. \quad (3.31)$$

Замена предела суммирования n^*+1 на бесконечность позволяет преодолеть вычислительные трудности, поскольку появляется возможность выделить главную часть решения и записать её в замкнутом виде. С точки зрения принципиальной такая замена означает, что перемещение строится только на основе полубезмоментной теории оболочек.

Преобразуем выражение (3.31) к виду, удобному для проведения вычислений с целью выделения главной его части в замкнутом виде. Входящий в (3.31) бесконечный ряд запишем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \tilde{n}\beta_0}{n^2\sqrt{\tilde{n}-1}} = \left(\frac{1}{k^2\beta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \tilde{n}\beta_0}{n^3} + \varepsilon \right) k\beta_0 \quad (k \geq 2) \quad (3.32)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \tilde{n}\beta_0}{n^2\sqrt{\tilde{n}-1}} = \left[\frac{1}{\beta_0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\beta_0}{n^3} - \sin n\beta_0 \right) + \varepsilon^* \right] \beta_0. \quad (k=1)$$

$$\text{где } \varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2\sqrt{k^2n^2-1}} - \frac{1}{kn^3} \right]; \quad \varepsilon^* = \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{n^3} \right].$$

Такое преобразование ряда, входящего в (3.32), позволят воспользоваться хорошо известными результатами по суммированию бесконечных рядов, в частном случае $\beta_0 = 0$ превращающихся в дзета функцию Римана, и записать выражение для рассматриваемого здесь продольного перемещения в форме, легко поддающейся параметрическому анализу и численной реализации без применения ЭВМ.

Делая последовательно подстановки преобразованных рядов (3.31), а затем (3.32) в (3.30), найдем формулы для продольного перемещения оболочки в случае действия $k \geq 2$ нагрузок и одной нагрузки:

$$\frac{E_1 R}{P} u(0,0) = \begin{cases} \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu_1\nu_2)}}{2\pi\sqrt[4]{\lambda}} \frac{R}{h} \sqrt{\frac{R}{h}} \left(\frac{\pi^2}{6k} - \frac{\pi\beta_0}{4} + \frac{k\beta_0^2}{12} + \varepsilon \right) \text{ при } k \geq 2; \\ \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu_1\nu_2)}}{2\pi\sqrt[4]{\lambda}} \frac{R}{h} \sqrt{\frac{R}{h}} \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi\beta_0}{4} + \frac{k\beta_0^2}{12} - \frac{\sin \beta_0}{\beta_0} + \varepsilon^* \right) \text{ при } k = 1 \end{cases} \quad (3.33)$$

При малых значениях параметра β_0 , для определения перемещения можно воспользоваться более простыми формулами, получающиеся из (3.33) и справедливыми для сосредоточенных нагрузок:

$$\frac{E_1 R}{P} u(0,0) = \begin{cases} \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu_1\nu_2)}}{2\pi^4\sqrt{\lambda}} \frac{R}{h} \sqrt{\frac{R}{h}} \left(\frac{\pi^2}{6k} + \varepsilon \right) & \text{при } k \geq 2; \\ \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu_1\nu_2)}}{2\pi^4\sqrt{\lambda}} \frac{R}{h} \sqrt{\frac{R}{h}} \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 + \varepsilon^* \right) & \text{при } k = 1 \end{cases} \quad (3.34)$$

Для значения параметра β_0 , при котором продольное перемещение можно определять по формуле (3.34), получаем оценку из сравнения слагаемых в $\frac{\pi\beta_0}{4}$ и $\frac{k\beta_0^2}{12}$, принимая что допустимо пренебречь членами порядка $\sqrt{h/R}$ по сравнению с

единицей:
$$\beta_0 \leq \frac{2\pi}{3k} \sqrt{\frac{h}{R}}. \quad (3.35)$$

Рассмотрим поведение продольного перемещения в случае, когда нагрузка вырождается в сосредоточенную силу, в систему «к» сосредоточенных сил. Для продольного перемещения на основе (3.26) путем продольного перехода $\beta_0 \rightarrow 0$ находим:

$$\begin{aligned} \frac{E_1 R}{P} u(0,\beta) &= \frac{1}{4\pi^4\sqrt{\lambda}} \frac{R}{h} \sum_n^{n^*} \frac{k}{\mu_n} \cos \tilde{n}\beta + \frac{(3\sqrt{\lambda} - \nu_2)(1 - \nu_1\nu_2)}{(\sqrt{\lambda} - \nu_2)^4\sqrt{\lambda}} \frac{R}{h} \sum_{n^{*+1}}^{\infty} \frac{\cos \tilde{n}\beta}{n} = \\ &= \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu_1\nu_2)}}{2\pi^4\sqrt{\lambda}} \frac{R}{h} \sqrt{\frac{R}{h}} \sum_n^{n^*} \frac{1}{n\sqrt{\tilde{n}^2 - 1}} \cos \tilde{n}\beta + \frac{(3\sqrt{\lambda} - \nu_2)(1 - \nu_1\nu_2)}{4\pi(\sqrt{\lambda} - \nu_2)^4\sqrt{\lambda}} \frac{R}{h} \sum_{n^{*+1}}^{\infty} \frac{\cos \tilde{n}\beta}{n}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

В этом случае (3.36) наиболее мощным является второе слагаемое, и можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{E_1 R}{P} u(0,\beta) &\approx \frac{(3\sqrt{\lambda} - \nu_2)(1 - \nu_1\nu_2)}{4\pi(\sqrt{\lambda} - \nu_2)^4\sqrt{\lambda}} \frac{R}{h} \sum_{n^{*+1}}^{\infty} \frac{\cos \tilde{n}\beta}{n} \approx \\ &\approx \frac{(3\sqrt{\lambda} - \nu_2)(1 - \nu_1\nu_2)}{4\pi(\sqrt{\lambda} - \nu_2)^4\sqrt{\lambda}} \frac{R}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \tilde{n}\beta}{n}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Определим характер поведения продольного перемещения в окрестности точки приложения одной из «k» сосредоточенных сил. Для этого воспользуемся формулой для суммы ряда, входящего в (3.37):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\tilde{\beta}}{n} = \ln 2 \sin \frac{k\beta}{2} \approx -\ln \beta \quad (0 < \beta < 2\pi). \quad (3.38)$$

Совершая подстановку (3.38) в (3.37), получим для продольного перемещения асимптотическую форму, определяющую характер поведения перемещения в окрестности точки приложения нагрузки (в окрестности точки $\beta = 0$).

$$\frac{E_1 R}{P} u(0, \beta) \approx -\frac{(3\sqrt{\lambda} - \nu_2)(1 - \nu_1 \nu_2)}{4\pi(\sqrt{\lambda} - \nu_2)^2 \sqrt{\lambda}} \frac{R}{h} \ln \beta. \quad (3.39)$$

Асимптотическая формула (3.39) совпадает со своей сути с асимптотической формулой, другим путем полученной В.М.Даревский [23,24] для изотропных оболочек $\nu_1 = \nu_2$.

Перейдем к рассмотрению продольного усилия. Выражение для него приставлено в группе формул (3.20) и (3.25) для общего случая и в (3.26) при $\alpha = 0$. Преобразуем его учитывая, что сумма входящего в него ряда допускает запись в конечном виде [19,25]. При этом необходимо иметь в виду, что суммирование ряда (3.26) для продольного усилия начинается с $n = 1$ при $k \geq 2$ и при $n = 2$ при $k = 1$.

Запишем окончательные формулы для максимального значения продольного усилия, имеющего места при $\alpha = 0$, в случае действия на оболочку продольной нагрузки P по одному отрезку контуре ($k = 1$) и по $k \geq 2$ отрезкам контура.

При $k = 1$

$$\frac{R}{P} T_1(0, \beta) = \begin{cases} -\frac{\pi - \beta_0 - 2 \sin \beta_0 \cos \beta}{4\pi\beta_0} & \text{при } \beta < \beta_0 \\ -\frac{\pi - 2\beta_0 - 2 \sin \beta_0}{8\pi\beta_0} & \text{при } \beta = \beta_0 \\ \frac{\beta_0 + 2 \sin \beta_0 \cos \beta}{4\pi\beta_0} & \text{при } \beta > \beta_0 \end{cases} \quad (3.40)$$

При $k \geq 2$

$$\frac{R}{P} T_1(0, \beta) = \begin{cases} -\frac{\pi - k\beta_0}{4\pi\beta_0} & \text{при } \beta < \beta_0 \\ -\frac{\pi - 2k\beta_0}{8\pi\beta_0} & \text{при } \beta = \beta_0 \\ \frac{k}{4\pi} & \text{при } \beta > \beta_0 \end{cases} \quad (3.41)$$

Здесь представлена только бимоментная часть продольного усилия. При решении конкретных задач к полученным усилиям необходимо добавить продольные усилия, возникающие в оболочке как стержне (без деформации контура) и зависящие от условий её закрепления на поперечных краях (имеются в виду условия её закрепления как жесткого стержня).

3.3. Краевая задача для полубесконечной оболочки со свободным краем при действии продольной нагрузки

3.3.1. Действие продольной локальной нагрузки

При рассмотрении действия продольной локальной нагрузки на бесконечно длинные оболочки процедура сводилась к построению лишь частного решения. Проблема отыскания решения краевой задачи, например, для полубесконечной оболочки со свободным краем, существенно сложнее, особенно если исходить из уравнений общей теории оболочек. В то же время рассмотрение краевых задач может привести к столь же эффективным результатам, как и в случае бесконечно длинной оболочки, если полное НДС строить путем синтеза на основе решений для элементарных напряженных состояний, соответствующим образом расчленив краевые условия и отбросив в них второстепенные составляющие.

Здесь остановимся на общем случае действия на оболочку самоуравновешенной системы продольных локальных нагрузок, приложенных на произвольном расстоянии от ее свободного края.

При действии локальной нагрузки, приложенной в одном сечении $\alpha = 0$, примем, что в общем случае она уравнивается продольной силой и изгибающим моментом, приложенными на значительном удалении от ее места приложения.

Представим внешнюю продольную нагрузку на оболочку в виде следующего разложения:

$$p(\alpha, \beta) = p_0 \theta(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos \tilde{n}\beta; \quad \tilde{n} = kn. \quad (3.42)$$

Здесь, $\theta(\alpha)$ - безразмерная функция распределения давления вдоль образующей; θ_n - коэффициенты рядов Фурье функций окружного распределения нагрузки; p_0 - амплитудное значение нагрузки.

Решение разрешающего уравнения общей теории оболочек (1.9) ищем в виде:

$$\Phi(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(\alpha) \cos \tilde{n}\beta. \quad (3.43)$$

В результате постановки разложения в разрешающее уравнение общей теории оболочки (1.9), (1.10) получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно амплитудного значения $\Phi_n(\alpha)$:

$$L\Phi_n(\alpha) = -\frac{R^4}{D_1} p_0 \theta(\alpha) \theta_n. \quad (3.44)$$

Выразим через $\Phi_n(\alpha)$ амплитудные значения перемещения, усилия и моментов, для чего представим их в виде следующих рядов:

$$\begin{aligned} u(\alpha, \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\alpha) \cos \tilde{n}\beta; & v(\alpha, \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n(\alpha) \sin \tilde{n}\beta; \\ w(\alpha, \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} w_n(\alpha) \cos \tilde{n}\beta; & T_1(\alpha, \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} T_{1n}(\alpha) \cos \tilde{n}\beta; \\ S_1(\alpha, \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} s_{1n}(\alpha) \sin \tilde{n}\beta; & G_1(\alpha, \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} g_{1n}(\alpha) \cos \tilde{n}\beta. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Амплитудные значения определим в результате постановки (3.43), (3.45) в соотношения (1.10), связывающие искомые факторы с разрешающей функцией:

$$\begin{aligned} u_n(\alpha) &= \lambda \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \alpha^2} + \frac{c^2}{\mu_1} \left[\mu_1 \frac{\partial^6}{\partial \alpha^6} - (\lambda + 2\nu_2 \mu_1 + 4\mu_1^2) \tilde{n}^2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + \right. \\ &\quad \left. + \lambda(5\mu_1 + 2\nu_2) \tilde{n}^4 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - 2\lambda(4\mu_1 + \nu_2) \tilde{n}^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \lambda^2 \tilde{n}^2 (\tilde{n}^2 - 1)^2 \right] \Phi_n; \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} v_n(\alpha) &= \lambda \tilde{n} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \alpha} - \frac{c^2}{\mu_1} \left[-(\mu_1 + \nu_2) \tilde{n} \frac{\partial^5}{\partial \alpha^5} + (\mu_1 + \nu_2)(2\nu_2 + 4\mu_1) \tilde{n}^3 \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} - \right. \\ &\quad \left. - \tilde{n}(\lambda + \nu_2^2 + 3\mu_1 \nu_2) \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} + \lambda(\mu_1 + \nu_2) \frac{\partial}{\partial \alpha} (\tilde{n}^3 - \tilde{n}^5) + \lambda \nu_2 \tilde{n}^3 \frac{\partial}{\partial \alpha} \right] \Phi_n; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_n(\alpha) &= v_2 \frac{\partial^3 \Phi_n}{\partial \alpha^3} + \lambda \tilde{n}^2 \frac{\partial \Phi_n}{\partial \alpha} - \frac{c^2}{\mu_1} \left\{ \mu_1 \frac{\partial^5}{\partial \alpha^5} - [\lambda - (v_2 + 2\mu_1)^2] \tilde{n}^2 \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} - \lambda \mu_1 \tilde{n}^4 \frac{\partial}{\partial \alpha} \right\} \Phi_n; \\
T_{1n}(\alpha) &= \frac{E_1 h}{R} \left\langle \lambda \frac{\partial^3 \Phi_n}{\partial \alpha^3} + \frac{c^2}{1 - v_1 v_2} \left\{ \frac{\partial^7}{\partial \alpha^7} - \left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} + v_2 + 4\mu_1 \right) \tilde{n}^2 \frac{\partial^5}{\partial \alpha^5} + \right. \right. \\
&\quad + (5\lambda - 6v_2^2 - 4\mu_1 v_2 + 2v_2 \frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1}) \tilde{n}^4 \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} - \lambda \left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} - v_2 \right) \tilde{n}^6 \frac{\partial}{\partial \alpha} - \\
&\quad \left. - \left[7(\lambda - v_2^2) + 2 \frac{v_2}{\mu_1} (\lambda - v_2^2) - 4\mu_1 v_2 \right] \tilde{n}^2 \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} + 2v_2 \frac{\partial^5}{\partial \alpha^5} + \right. \\
&\quad \left. + 2\lambda \left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} - v_2 \right) \tilde{n}^4 \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\lambda^2}{\mu_1} \tilde{n}^2 \frac{\partial}{\partial \alpha} \right\} \Phi_n \right\rangle; \\
T_{2n}(\alpha) &= \frac{D_2}{R^3} \left\{ v_1 \frac{\partial^7}{\partial \alpha^7} + (1 - 2v_1 v_2 - 4v_1 \mu_1) \tilde{n}^2 \frac{\partial^5}{\partial \alpha^5} - [4(\mu_1 - v_2) + 5v_2] \tilde{n}^4 \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} + \right. \\
&\quad \left. + \lambda \tilde{n}^6 \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial^5}{\partial \alpha^5} + 4\mu_1 \tilde{n}^2 \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} - \lambda \tilde{n}^4 \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\lambda v_2}{\mu_1} \tilde{n}^2 \frac{\partial}{\partial \alpha} \right\} \Phi_n; \\
S_{1n}(\alpha) &= \frac{c^2 G h}{R} \left\{ \frac{v_2}{\mu_1} \tilde{n} \frac{\partial^6}{\partial \alpha^6} + \left(\frac{\lambda - 2v_2^2}{\mu_1} - 4v_2 \right) \tilde{n}^3 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + \left(\frac{\lambda + v_2^2}{\mu_1} + 2v_2 \right) \tilde{n} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} - \right. \\
&\quad \left. - \lambda \left(\frac{v_2}{\mu_1} + 4 \right) \tilde{n}^5 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\lambda^2}{\mu_1} \tilde{n}^3 (\tilde{n}^2 - 1)^2 + 6\lambda \tilde{n}^3 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right\} \Phi_n; \\
S_{2n}(\alpha) &= \frac{c^2 G h}{R} \left\{ \frac{v_2}{\mu_1} \tilde{n} \frac{\partial^6}{\partial \alpha^6} + \left(\frac{\lambda - 2v_2^2}{\mu_1} - 4v_2 \right) \tilde{n}^3 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} - \lambda \left(\frac{v_2}{\mu_1} + 4 \right) \tilde{n}^5 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\lambda^2}{\mu_1} \tilde{n}^3 (\tilde{n}^2 - 1)^2 - \left(\frac{\lambda + v_2^2}{\mu_1} + 4v_2 \right) \tilde{n} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 8\lambda \tilde{n}^3 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right\} \Phi_n; \\
G_{1n}(\alpha) &= -\frac{D_1}{R^2} \left\langle v_2 \frac{\partial^5}{\partial \alpha^5} + (\lambda - v_2^2) \tilde{n}^2 \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} + \lambda \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} - \lambda v_2 \frac{\partial}{\partial \alpha} (\tilde{n}^4 - \tilde{n}^2) + \right. \\
&\quad + c^2 \left\{ -4(v_2 + 2\mu_1) \tilde{n}^2 \frac{\partial^5}{\partial \alpha^5} + \left[2(3\lambda - v_2^2) + \frac{v_2}{\mu_1} (\lambda - v_2^2) \right] \tilde{n}^4 \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} - \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\lambda(\lambda - v_2^2)}{\mu_1} \tilde{n}^6 \frac{\partial}{\partial \alpha} \right\} \Phi_n \right\rangle.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

При решении рассматриваемой здесь краевой задач разрешающая функция Φ_n , являющаяся решением уравнения (3.45) должна удовлетворять условиям на

$$\text{бесконечности: } \left[\Phi_n(\alpha), \Phi_n'(\alpha), \Phi_n''(\alpha), \Phi_n'''(\alpha) \rightarrow 0 \right]_{\alpha \rightarrow \infty} = 0 \tag{3.48}$$

и четырьмя граничными условиями на свободном крае оболочки $\alpha = -\xi$:

$$T_{1n}(-\xi) = S_n(-\xi) = 0; \quad (3.49)$$

$$Q_{1n}(-\xi) = G_{1n}(-\xi) = 0; \quad (3.50)$$

Равенство (3.49) описывает тангенциальные, а (3.50) - нетангенциальные граничные условия.

В случае рассмотрения полубесконечной оболочки задача сводится к определению только четырех постоянных, так как четыре других обращаются в нуль из условия на бесконечности (речь идет о самоуравновешенном НДС).

При использовании метода синтеза напряженного состояния полное НДС при номерах гармоник $n \leq n^*$ складывается из основного состояния, а при $n > n^*$ - из тангенциального состояния. Причем каждое из элементарных состояний находится обособленно и в соответствии с порядком разрешающего уравнения содержит по четыре произвольные постоянные.

Таким образом, для построения полного НДС оболочки вначале рассматривается одна группа уравнений (основное состояние), а затем независимо от нее – другая (тангенциальное состояние).

В соответствии с идеей применяемого метода синтеза разрешающая функция $\Phi_n(\alpha)$ может быть записана приближенно:

$$\Phi_n(\alpha) \approx \begin{cases} \Phi_n^o(\alpha) & (n \leq n^*) \\ \Phi_n^\tau(\alpha) & (n^* < n) \end{cases} \quad (3.51)$$

Аналогично могут быть записаны и амплитудные значения для искомых факторов.

Построим отдельно основное и тангенциальное состояния.

Основное состояние НДС

Основное состояние, являющееся частью полного НДС оболочки, описывается уравнениями полубезмоментной теории оболочек. Для разрешающей функции $\Phi_n^o(\alpha)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение путем соответствующего упрощения разрешающего уравнения (3.45) по критерию (1.18):

$$\left(\frac{d^4}{d\alpha^4} + 4\mu_n^4\right)\Phi_n^0(\alpha) = -\frac{p_0 R^2}{E_2 h} \theta_n \theta(\alpha), \quad (3.52)$$

где $4\mu_n^4 = \frac{\lambda c^2}{1 - \nu_1 \nu_2} \tilde{n}^4 (\tilde{n}^2 - 1)^2$; $\tilde{n} \geq 2$.

Амплитудные значения перемещения, усилий и моментов связаны с разрешающей функцией $\Phi_n^o(\alpha)$ посредством соотношений, получающихся на основании (3.47) в соответствии с условиями (1.18):

$$u(\alpha, \beta) = \lambda \Phi_n''(\alpha); \quad v(\alpha, \beta) = \lambda \tilde{n} \Phi_n'(\alpha); \quad w(\alpha, \beta) = \lambda \tilde{n}^2 \Phi_n'(\alpha);$$

$$T_n(\alpha) = \lambda \frac{E_1 h}{R} \Phi_n'''(\alpha); \quad S_n(\alpha) = \frac{c^2 G h}{R} \frac{\lambda^2}{\mu_1} \tilde{n}^3 (\tilde{n}^2 - 1)^2 \Phi_n. \quad (3.53)$$

Решение разрешающего уравнения с учётом условий на бесконечности $[\Phi_n(\alpha), \Phi_n'(\alpha), \Phi_n''(\alpha), \Phi_n'''(\alpha) \rightarrow 0]_{\alpha \rightarrow \infty} = 0$ записывается в виде:

$$\Phi_n(\alpha) = c_1 \varphi_n(\alpha) + c_2 \zeta_n(\alpha) + \bar{\Phi}_n(\alpha). \quad (3.54)$$

Перемещение и силовые факторы выражаются через $\Phi_n(\alpha)$ и её производные:

$$\Phi_n'(\alpha) = \mu_n \{-c_1 [\varphi_n(\alpha) + \zeta_n(\alpha)] + c_2 [\varphi_n(\alpha) - \zeta_n(\alpha)]\} + \bar{\Phi}_n'(\alpha);$$

$$\Phi_n''(\alpha) = 2\mu_n^2 [c_1 \zeta_n(\alpha) - c_2 \varphi_n(\alpha)] + \bar{\Phi}_n''(\alpha); \quad (3.55)$$

$$\Phi_n'''(\alpha) = 2\mu_n^3 \{c_1 [\varphi_n(\alpha) - \zeta_n(\alpha)] + c_2 [\varphi_n(\alpha) + \zeta_n(\alpha)]\} + \bar{\Phi}_n'''(\alpha).$$

Граничные условия вдоль свободного края оболочки формулируются относительно и сдвигающего усилия при $\alpha = -\xi$:

$$T_1(\alpha = -\xi) = S(\alpha = -\xi) = 0 \quad (3.56)$$

Принимая во внимание соотношения (3.53), (3.55), на основании (3.56) получаем систему двух уравнений для определения произвольных постоянных c_1, c_2 :

$$c_1 \varphi_n(-\xi) + c_2 \zeta_n(-\xi) = -\bar{\Phi}_n(-\xi)$$

$$c_1 [\varphi_n(-\xi) - \zeta_n(-\xi)] + c_2 [\varphi_n(-\xi) + \zeta_n(-\xi)] = -\frac{1}{2\mu_n^3} \bar{\Phi}_n'''(-\xi) \quad (3.57)$$

Откуда находим c_1, c_2

$$\begin{aligned}
c_1 &= \left\{ \frac{1}{2\mu_n^3} \overline{\Phi}_n'''(-\xi) \zeta_n(-\xi) - \overline{\Phi}_n(-\xi) [\varphi_n(-\xi) + \zeta_n(-\xi)] \right\} e^{-2\mu_n \xi}; \\
c_2 &= \left\{ \overline{\Phi}_n(-\xi) [\varphi_n(-\xi) - \zeta_n(-\xi)] - \frac{1}{2\mu_n^3} \overline{\Phi}_n'''(-\xi) \varphi_n(-\xi) \right\} e^{-2\mu_n \xi}.
\end{aligned} \tag{3.58}$$

справедливые для любого закона изменения продольной нагрузки, определяющего вид функций $\overline{\Phi}_n'(\alpha) \dots \overline{\Phi}_n'''(\alpha)$.

При действии системы локальных нагрузок, для которой справедливо представление в виде ряда Фурье (3.12) в окружном направлении и интеграла Фурье в осевом направлении, получаем:

$$\begin{aligned}
\overline{\Phi}_n(\alpha) &= -\frac{1}{2\pi\alpha_0\beta_0} \frac{P}{E_2 h} \theta_n \int_0^\infty \frac{\sin \alpha_0 \chi}{\chi(\chi^4 + 4\mu_n^4)} \cos \alpha \chi d\chi; \\
\overline{\Phi}_n'(\alpha) &= \frac{1}{2\pi\alpha_0\beta_0} \frac{P}{E_2 h} \theta_n \int_0^\infty \frac{\sin \alpha_0 \chi}{(\chi^4 + 4\mu_n^4)} \sin \alpha \chi d\chi; \\
\overline{\Phi}_n''(\alpha) &= \frac{1}{2\pi\alpha_0\beta_0} \frac{P}{E_2 h} \theta_n \int_0^\infty \frac{\chi \sin \alpha_0 \chi}{(\chi^4 + 4\mu_n^4)} \cos \alpha \chi d\chi; \\
\overline{\Phi}_n'''(\alpha) &= -\frac{1}{2\pi\alpha_0\beta_0} \frac{P}{E_2 h} \theta_n \int_0^\infty \frac{\chi^2 \sin \alpha_0 \chi}{(\chi^4 + 4\mu_n^4)} \sin \alpha \chi d\chi.
\end{aligned} \tag{3.59}$$

В результате постановки найденных значений $\overline{\Phi}_n(\xi), \overline{\Phi}_n'''(\xi)$ в уравнении (3.58) находимся для произвольных постоянных c_1, c_2 следующие значения:

$$c_1 = \frac{1}{32\alpha_0\beta_0} \frac{P}{E_2 h} \frac{\theta_n}{\mu_n^4} \overline{c}_1; \quad c_2 = -\frac{1}{32\alpha_0\beta_0} \frac{P}{E_2 h} \frac{\theta_n}{\mu_n^4} \overline{c}_2. \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned}
\text{где } \overline{c}_1 &= \left\{ \zeta_n(-\xi) t_{1n}^o(|\xi|) + [\varphi_n(-\xi) + \zeta_n(-\xi)] s_n^o(|\xi|) \right\} e^{-2\mu_n \xi}; \\
\overline{c}_2 &= \left\{ [\varphi_n(-\xi) - \zeta_n(-\xi)] s_n^o(|\xi|) + \varphi_n(-\xi) t_{1n}^o(|\xi|) \right\} e^{-2\mu_n \xi}.
\end{aligned}$$

Величины $t_{1n}^o(|\xi|); s_n^o(|\xi|)$ найдены из (3.19).

С определением произвольных постоянных краевая задача является решенной, и для всех силовых и деформационных факторов могут быть записаны окончательные выражения:

$$\begin{aligned}
\frac{E_2 R}{P} \Phi(\alpha, \beta) &= \frac{1}{32\alpha_0\beta_0} \frac{R}{h} \sum_n^* \frac{\theta_n}{\mu_n^4} \left[\overline{c}_1 \overline{\Phi}_n(\alpha) - \overline{c}_2 \zeta_n(\alpha) - \overline{f}_n(|\alpha|) \right] \cos \tilde{n}\beta; \\
\overline{f}_n(|\alpha|) &= \begin{cases} 2 - \varphi_n(\alpha_0 - \alpha) - \varphi_n(\alpha_0 + \alpha), & |\alpha| \leq \alpha_0 \\ \varphi_n(\alpha - \alpha_0) - \varphi_n(\alpha_0 + \alpha), & |\alpha| > \alpha_0 \end{cases};
\end{aligned} \tag{3.61}$$

$$\frac{E_2 R}{P} u(\alpha, \beta) = \frac{1}{16\alpha_0\beta_0} \frac{R}{h} \sum_n^* \frac{\theta_n}{\mu_n^2} \left[\bar{c}_1 \zeta_n(\alpha) + \bar{c}_2 \varphi_n(\alpha) + u_n^0(\alpha) \right] \cos \tilde{n}\beta;$$

$$u_n^0(|\alpha|) = \begin{cases} \zeta_n(\alpha_0 - |\alpha|) - \zeta_n(\alpha_0 + |\alpha|), & |\alpha| \leq \alpha_0; \\ \zeta_n(|\alpha| + \alpha_0) - \zeta_n(|\alpha| - \alpha_0), & |\alpha| > \alpha_0; \end{cases};$$

$$\frac{R}{P} T_1(\alpha, \beta) = \frac{1}{16\alpha_0\beta_0} \sum_n^* \frac{\theta_n}{\mu_n} \left\{ \bar{c}_1 [\varphi_n(\alpha) - \zeta_n(\alpha)] - \bar{c}_2 [\varphi_n(\alpha) + \zeta_n(\alpha)] - \bar{t}_{1n}(|\alpha|) \operatorname{sign} \alpha \right\} \cos \tilde{n}\beta;$$

$$\bar{t}_{1n}(|\alpha|) = \begin{cases} \varphi_n(\alpha_0 - |\alpha|) - \zeta_n(\alpha_0 - |\alpha|) - \varphi_n(\alpha_0 + |\alpha|) + \zeta_n(\alpha_0 + |\alpha|), & |\alpha| \leq \alpha_0; \\ \varphi_n(|\alpha| - \alpha_0) - \zeta_n(|\alpha| - \alpha_0) - \varphi_n(|\alpha| + \alpha_0) + \zeta_n(|\alpha| + \alpha_0), & |\alpha| > \alpha_0; \end{cases};$$

$$\frac{R}{P} S_1(\alpha, \beta) = \frac{1}{8\alpha_0\beta_0} \sum_n^* \frac{\theta_n}{n} \left\{ \bar{c}_1 \varphi_n(\alpha) - \bar{c}_2 \zeta_n(\alpha) - \bar{s}_{1n}(|\alpha|) \right\} \sin \tilde{n}\beta;$$

$$\bar{s}_{1n}(|\alpha|) = \bar{f}_n(|\alpha|)$$

Суммирование рядов (3.61) начинается с $n=2$ при $k=1$ и с $n=1$ - при $k \geq 2$.

Построенное решение является элементом полного НДС, т.к. верхним предельном суммирования служит величина $n = n^*$. Во многих случаях оно хорошо описывает и полное НДС оболочки (например, при больших размерах нагруженных областей), и тогда его следует рассматривать как просто решение на основе полубезмоментной теории оболочек, и формально заменить n^* на ∞ .

Перейдем к построению тангенциального состояния, которое отвечает как не однократно отмечалось ранее, большим номерам гармоник $n > n^*$.

Тангенциальное состояние НДС

Для разрешающей функции ψ_n получаем обыкновенное дифференциальное уравнение путем соответствующего упрощения разрешающей функции (1.9)

$$\frac{\partial^4 \psi_n}{\partial \alpha^4} - \left(\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - 2\nu_2 \right) \tilde{n}^2 \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial \alpha^2} + \lambda \tilde{n}^4 = - \frac{(1 - \nu_1 \nu_2) R^2}{E_1 h} p(\alpha, \beta), \quad (3.62)$$

Амплитудные значения перемещений, усилий и моментов связаны с разрешающей функцией ψ_n посредством соотношений, получающихся на (1.14):

$$u_n = \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\lambda}{\mu_1} \tilde{n}^2 \right) \psi_n; \quad v_n = \left(1 + \frac{\nu_2}{\mu_1} \right) \tilde{n} \frac{\partial \psi_n}{\partial \alpha}; \quad (3.63)$$

$$T_{1n} = \frac{E_1 h}{(1 - \nu_1 \nu_2) R} \left[\frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} - \left(\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - \nu_2 \right) \tilde{n}^2 \frac{\partial \psi_n}{\partial \alpha} \right]; T_{2n} = \frac{E_2 h}{(1 - \nu_1 \nu_2) R} \left(\nu_1 \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} + \tilde{n}^2 \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \psi_n;$$

$$S = \frac{E_1 h}{(1 - \nu_1 \nu_2) R} \left(\lambda \tilde{n}^3 + \nu_2 \tilde{n} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \psi_n.$$

Решение разрешающего уравнения (3.62) с учётом условий на бесконечности $[\psi_n(\alpha), \psi_n'(\alpha), \psi_n''(\alpha), \psi_n'''(\alpha)]_{\alpha \rightarrow \infty} = 0$ записывается в виде:

$$\psi_n(\alpha) = (c_1 + \hat{n}\alpha c_2) e^{-\hat{n}\alpha}; \quad \hat{n} = \sqrt[4]{\lambda \tilde{n}} \quad (3.64)$$

Производные разрешающей функцией ψ_n :

$$\psi_n'(\alpha) = \hat{n}(c_2 - c_1 + \hat{n}\alpha c_2) e^{-\hat{n}\alpha}; \quad \psi_n''(\alpha) = -\hat{n}^2(2c_2 - c_1 - \hat{n}\alpha c_2) e^{-\hat{n}\alpha};$$

$$\psi_n'''(\alpha) = \hat{n}^3(3c_2 - c_1 - \hat{n}\alpha c_2) e^{-\hat{n}\alpha}. \quad (3.65)$$

Подставим (3.64), (3.65) в соотношения для перемещения и усилий (3.63):

$$u_n(\alpha) = \tilde{n}^2 \left\{ -\left(1 - \frac{\sqrt{\lambda}}{\mu_1}\right) c_1 + \left[2 - \left(1 - \frac{\sqrt{\lambda}}{\mu_1}\right) \hat{n}\alpha \right] c_2 \right\} e^{-\hat{n}\alpha} + \bar{u}_n(\alpha);$$

$$T_{1n}(\alpha) = \frac{E_1 h}{(1 - \nu_1 \nu_2) R} \sqrt[4]{\lambda \tilde{n}^3} \left\{ (\sqrt{\lambda} + \nu_2) c_1 + \left[(\sqrt{\lambda} - \nu_2) + (\sqrt{\lambda} + \nu) \hat{n}\alpha \right] c_2 \right\} e^{-\hat{n}\alpha} + \bar{T}_{1n}(\alpha); \quad (3.66)$$

$$S_{1n}(\alpha) = \frac{E_1 h}{(1 - \nu_1 \nu_2) R} \sqrt{\lambda \tilde{n}^3} \left\{ (\sqrt{\lambda} + \nu_2) c_1 - \left[2\nu_2 - (\sqrt{\lambda} + \nu_2) \hat{n}\alpha \right] c_2 \right\} e^{-\hat{n}\alpha} + \bar{S}_{1n}(\alpha).$$

Произвольные постоянные c_1, c_2 должны быть найдены из граничных условий (3.56) при $n > n^*$, которые с учётом (3.66) принимают вид:

$$T_{1n}(-\xi) = \frac{E_1 h}{(1 - \nu_1 \nu_2) R} \sqrt[4]{\lambda \tilde{n}^3} \left\{ (\sqrt{\lambda} + \nu_2) c_1 + \left[(\sqrt{\lambda} - \nu_2) - (\sqrt{\lambda} + \nu) \hat{n}\xi \right] c_2 \right\} e^{\hat{n}\xi} + \bar{T}_{1n}(-\xi) = 0$$

$$S_{1n}(-\xi) = \frac{E_1 h}{(1 - \nu_1 \nu_2) R} \sqrt{\lambda \tilde{n}^3} \left\{ (\sqrt{\lambda} + \nu_2) c_1 - \left[2\nu_2 + (\sqrt{\lambda} + \nu_2) \hat{n}\xi \right] c_2 \right\} e^{\hat{n}\xi} + \bar{S}_{1n}(-\xi) = 0 \quad (3.67)$$

Частные решения записываются следующим образом:

$$\bar{S}_{1n}(-\xi) = \frac{P}{R} \frac{1}{2\pi\alpha_0\beta_0} \theta_n \int_0^\infty \left[\frac{\lambda \tilde{n}^3}{\chi(\chi^2 + \sqrt{\lambda \tilde{n}^2})^2} - \frac{\nu_2 \tilde{n}\chi}{(\chi^2 + \sqrt{\lambda \tilde{n}^2})^2} \right] \sin(\chi\alpha_0) \cos(\chi\xi) d\chi; \quad (3.68)$$

$$\bar{T}_{1n}(-\xi) = \frac{P}{R} \frac{1}{2\pi\alpha_0\beta_0} \theta_n \int_0^\infty \left[\frac{\chi^2}{(\chi^2 + \sqrt{\lambda \tilde{n}^2})^2} + \left(\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - \nu_2 \right) \tilde{n}^2 \frac{1}{(\chi^2 + \sqrt{\lambda \tilde{n}^2})^2} \right] \sin(\chi\alpha_0) \sin(\chi\xi) d\chi.$$

После вычисления интегралов частные решения преобразуются таким образом:

$$\overline{T}_{1n}(-\xi) = \frac{1}{16\hat{n}\alpha_0\beta_0} \frac{P}{R} \theta_n t_{1n}^\tau(\xi); \quad \overline{S}_{1n}(-\xi) = -\frac{\sqrt[4]{\lambda}}{8\hat{n}\alpha_0\beta_0} \frac{P}{R} \theta_n s_n^\tau(\xi). \quad (3.69)$$

где

$$t_{1n}^\tau(\xi) = \left\langle \left\{ 2 + \left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} - v_2 - \sqrt{\lambda} \right) \left[1 + (\xi - \alpha_0) \hat{n} \right] \right\} e^{-(\xi - \alpha_0) \hat{n}} - \right. \\ \left. - \left\{ 2 + \left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} - v_2 - \sqrt{\lambda} \right) \left[1 + (\xi + \alpha_0) \hat{n} \right] \right\} e^{-(\xi + \alpha_0) \hat{n}} \right\rangle; \\ s_n^\tau(\xi) = \left\langle \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{v_2}{\sqrt{\lambda}} \right) (\xi - \alpha_0) \hat{n} \right\} e^{-(\xi - \alpha_0) \hat{n}} - \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{v_2}{\sqrt{\lambda}} \right) (\xi + \alpha_0) \hat{n} \right\} e^{-(\xi + \alpha_0) \hat{n}} \right\rangle;$$

Пусть $c_1 = \frac{1 - v_1 v_2}{16\sqrt[4]{\lambda} \tilde{n}^4 \alpha_0 \beta_0} \theta_n \frac{P}{E_1 h} \overline{c}_1$; $c_2 = \frac{1 - v_1 v_2}{16\sqrt[4]{\lambda} \tilde{n}^4 \alpha_0 \beta_0} \theta_n \frac{P}{E_1 h} \overline{c}_2$. (3.70)

Тогда подставим (3.70) в (3.67) получаем:

$$\overline{c}_2 = -\frac{1}{\sqrt{\lambda} + v_2} \left[t_{1n}^\tau(\xi) + 2s_n^\tau(\xi) \right] e^{-\hat{n}\xi}; \\ \overline{c}_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda} + v_2} \left\{ 2s_n^\tau(\xi) - \frac{1}{\sqrt{\lambda} + v_2} \left[t_{1n}^\tau(\xi) + 2s_n^\tau(\xi) \right] \left[2v_2 + (\sqrt{\lambda} + v_2) \hat{n} \xi \right] \right\} e^{-\hat{n}\xi}. \quad (3.71)$$

Получим окончательные выражения для перемещения и силовых факторов:

$$\frac{E_1 R}{P} u(\alpha, \beta) = \frac{1 - v_1 v_2}{16\alpha_0 \beta_0} \sum_{n=\tilde{n}^*+1}^{\infty} \left\langle \left\{ -\left(1 - \frac{\sqrt{\lambda}}{\mu_1} \right) \overline{c}_1 + \left[2 - \left(1 - \frac{\sqrt{\lambda}}{\mu_1} \right) \hat{n} \alpha \right] \overline{c}_2 \right\} e^{-\hat{n}\alpha} + \right. \\ \left. + u_n^\tau(|\alpha|) \right\rangle \frac{\theta_n}{\tilde{n}} \cos(\tilde{n}\beta); \quad (3.72)$$

$$\frac{R}{P} T_1(\alpha, \beta) = \frac{1}{16\alpha_0 \beta_0} \sum_{n=\tilde{n}^*+1}^{\infty} \left\langle \left\{ (\sqrt{\lambda} + v_2) \overline{c}_1 + \left[(\sqrt{\lambda} - v_2) + (\sqrt{\lambda} + v_2) \hat{n} \alpha \right] \overline{c}_2 \right\} e^{-\hat{n}\alpha} + \right. \\ \left. + t_{1n}^\tau(|\alpha|) \text{sign}(\alpha) \right\rangle \frac{\theta_n}{\tilde{n}} \cos(\tilde{n}\beta);$$

$$\frac{R}{P} S_{1n}(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt[4]{\lambda}}{16\alpha_0 \beta_0} \sum_{n=\tilde{n}^*+1}^{\infty} \left\langle \left\{ (\sqrt{\lambda} + v_2) \overline{c}_1 + \left[2v_2 - (\sqrt{\lambda} + v_2) \hat{n} \alpha \right] \overline{c}_2 \right\} e^{-\hat{n}\alpha} - s_n^\tau(|\alpha|) \right\rangle \frac{\theta_n}{\tilde{n}} \sin(\tilde{n}\beta).$$

Построены компоненты НДС оболочки: основное и тангенциальное состояние. Полное НДС получается следующим образом:

$$u(\alpha, \beta) = u^o(\alpha, \beta) + u^\tau(\alpha, \beta); \quad \mathcal{A}(\alpha, \beta) = \mathcal{A}^o(\alpha, \beta) + \mathcal{A}^\tau(\alpha, \beta); \\ w(\alpha, \beta) = w^o(\alpha, \beta); \quad T_1(\alpha, \beta) = T_1^o(\alpha, \beta) + T_1^\tau(\alpha, \beta); \quad (3.73)$$

$$T_2(\alpha, \beta) = T_2^o(\alpha, \beta) + T_2^\tau(\alpha, \beta); \quad S(\alpha, \beta) = S^o(\alpha, \beta) + S^\tau(\alpha, \beta);$$

$$G_1(\alpha, \beta) = G_1^o(\alpha, \beta); \quad G_2(\alpha, \beta) = G_2^o(\alpha, \beta).$$

При различных размерах нагруженных областей роль слагаемых в (3.73) меняется, особенно в усилиях. При уменьшении их размеров растет вклад тангенциального состояния, и при больших размерах хорошее приближение способно дать решение на основе лишь полубезмоментной теории. При конечных размерах областей перемещения определяются в основном решением по полубезмоментной теории, и вторые слагаемые могут быть отброшены.

На основе построенного здесь решения (3.73) проведены вычисления, позволяющие судить о влиянии на НДС оболочки степени удаленности места приложения локальной нагрузки от свободного края оболочки. Результаты представлены на рис.3.8.

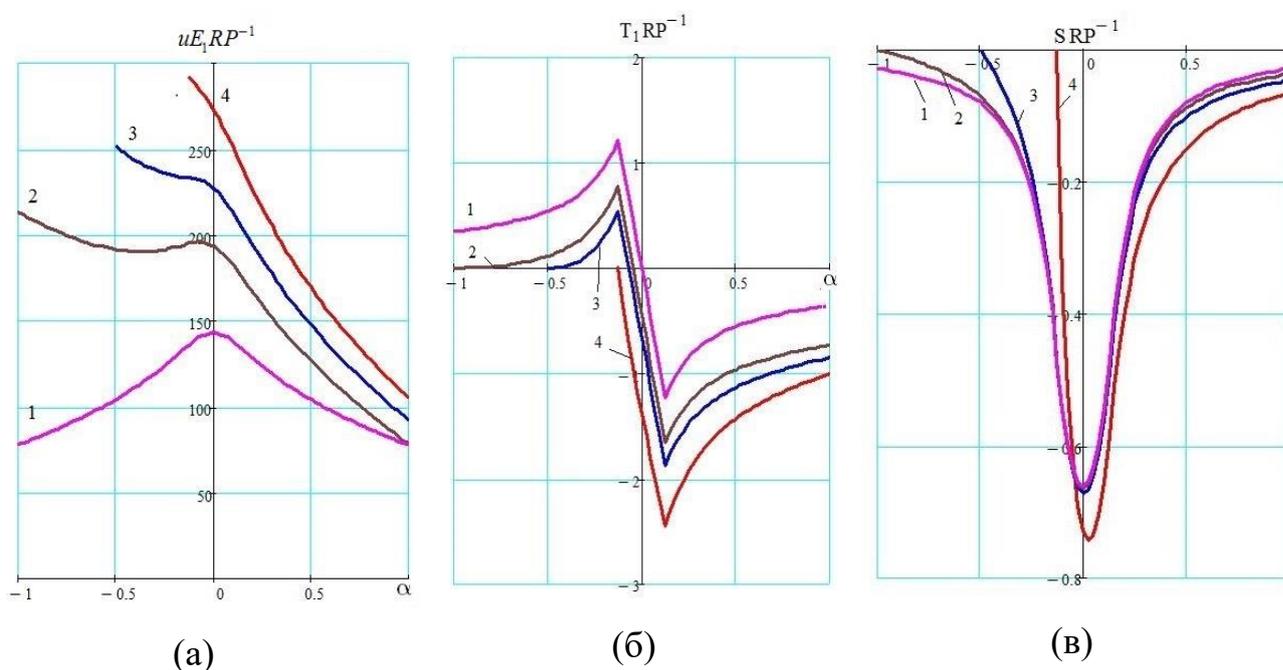


Рис.3.8. Влияние степени удаленности места приложения локальных продольных нагрузок от свободного края полубесконечной оболочки на изменение продольного перемещения (а), продольного усилия (б), сдвигающего усилия(в) для частного случая изотропной оболочки с параметрами:

$R/h = 130; \alpha_0 = \beta_0 = 0.125, k = 2$. Номерам кривых 1,2,3,4 соответствуют значения

$$\xi = \infty; 1; 0.5; 0.125 .$$

3.3.2. Случай нагружения оболочки по отрезкам контура

Несмотря на то, что реализация этого способа нагружения оболочки весьма проблематична, он представляет несомненный интерес, как предельный случай

приложения локальной нагрузки, и для него существует возможность получения ряда интересных зависимостей в конечном виде.

Как и при действии локальной нагрузки, отдельно рассмотрим основное состояние а затем тангенциальное состояние.

Основное состояние НДС

Аналогично решению при действии локальной нагрузки здесь необходимо найти произвольные постоянные c_1, c_2 через частные решения $\bar{\Phi}_n(-\xi), \bar{\Phi}_n'''(-\xi)$, которые записываются так:

$$\bar{\Phi}_n(\alpha) = -\frac{1}{2\pi\beta_0} \frac{P}{E_2 h} \theta_n \int_0^\infty \frac{\cos \alpha \chi}{\chi^4 + 4\mu_n^4} d\chi = -\frac{1}{16\beta_0} \frac{P}{E_2 h} \frac{\theta_n}{\mu_n^3} [\varphi_n(\alpha) + \zeta_n(\alpha)];$$

$$\bar{\Phi}_n'(\alpha) = \frac{1}{2\pi\beta_0} \frac{P}{E_2 h} \theta_n \int_0^\infty \frac{\chi}{\chi^4 + 4\mu_n^4} \sin \alpha \chi d\chi = \frac{1}{8\beta_0} \frac{P}{E_2 h} \frac{\theta_n}{\mu_n^2} \zeta_n(\alpha);$$

$$\bar{\Phi}_n''(\alpha) = \frac{1}{2\pi\beta_0} \frac{P}{E_2 h} \theta_n \int_0^\infty \frac{\chi^2}{\chi^4 + 4\mu_n^4} \cos \alpha \chi d\chi = \frac{1}{8\beta_0} \frac{P}{E_2 h} \frac{\theta_n}{\mu_n} [\varphi_n(\alpha) - \zeta_n(\alpha)];$$

$$\bar{\Phi}_n'''(\alpha) = -\frac{1}{2\pi\beta_0} \frac{P}{E_2 h} \theta_n \int_0^\infty \frac{\chi^3}{\chi^4 + 4\mu_n^4} \sin \alpha \chi d\chi = -\frac{1}{4\beta_0} \frac{P}{E_2 h} \theta_n \varphi_n(\alpha);$$

при $\alpha = -\xi$ имеем:

$$\bar{\Phi}_n(-\xi) = -\frac{1}{16\beta_0} \frac{P}{E_2 h} \frac{\theta_n}{\mu_n^3} [\varphi_n(-\xi) + \zeta_n(-\xi)]; \quad \bar{\Phi}_n'''(-\xi) = -\frac{1}{4\beta_0} \frac{P}{E_2 h} \theta_n \varphi_n(-\xi). \quad (3.74)$$

Подставив (3.74) в (3.67), получаем систему двух уравнений для определения произвольных постоянных c_1, c_2 :

$$\begin{aligned} c_1 \varphi_n(-\xi) + c_2 \zeta_n(-\xi) &= -\bar{\Phi}_n(-\xi) \\ c_1 [\varphi_n(-\xi) - \zeta_n(-\xi)] + c_2 [\varphi_n(-\xi) + \zeta_n(-\xi)] &= -\frac{1}{2\mu_n^3} \bar{\Phi}_n'''(-\xi); \end{aligned} \quad (3.75)$$

откуда

$$\begin{aligned} c_1 &= \left\{ \frac{1}{2\mu_n^3} \bar{\Phi}_n'''(\alpha) \zeta_n(-\xi) - \bar{\Phi}_n(-\xi) [\varphi_n(-\xi) + \zeta_n(-\xi)] \right\} e^{-2\mu_n \xi}; \\ c_2 &= \left\{ \bar{\Phi}_n(-\xi) [\varphi_n(-\xi) - \zeta_n(-\xi)] - \frac{1}{2\mu_n^3} \bar{\Phi}_n'''(\alpha) \varphi_n(-\xi) \right\} e^{-2\mu_n \xi}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Найдём для произвольных постоянных c_1, c_2 следующие значения:

$$c_1 = \frac{1}{8\beta_0} \frac{P}{E_2 h} \frac{\theta_n}{\mu_n^3} \bar{c}_1; \quad c_2 = -\frac{1}{8\beta_0} \frac{P}{E_2 h} \frac{\theta_n}{\mu_n^3} \bar{c}_2. \quad (3.77)$$

$$\text{где } \bar{c}_1 = \left\{ \frac{1}{2} [\varphi_n(\xi) + \zeta_n(\xi)] [\varphi_n(-\xi) + \zeta_n(-\xi)] + \varphi_n(-\xi) \zeta_n(\xi) \right\} e^{-2\mu_n \xi};$$

$$\bar{c}_2 = \left\{ \frac{1}{2} [\varphi_n(\xi) + \zeta_n(\xi)] [\varphi_n(-\xi) - \zeta_n(-\xi)] + \varphi_n(-\xi) \varphi_n(\xi) \right\} e^{-2\mu_n \xi}.$$

С определением произвольных постоянных краевая задача является решенной, и для всех силовых и деформационных факторов могут быть записаны окончательные выражения в виде:

$$\begin{aligned} \frac{E_1 R}{P} \Phi(\alpha, \beta) &= \frac{1}{8\lambda\beta_0} \frac{R}{h} \sum_n^* \frac{\theta_n}{\mu_n^3} \left[\bar{c}_1 \varphi_n(\alpha) - \bar{c}_2 \zeta_n(\alpha) - \frac{1}{2} (\varphi_n(|\alpha|) + \zeta_n(|\alpha|)) \right] \cos \tilde{n}\beta; \\ \frac{E_1 R}{P} u(\alpha, \beta) &= \frac{1}{4\beta_0} \frac{R}{h} \sum_n^* \frac{\theta_n}{\mu_n} \left[\bar{c}_1 \zeta_n(\alpha) + \bar{c}_2 \varphi_n(\alpha) + \frac{1}{2} (\varphi_n(|\alpha|) - \zeta_n(|\alpha|)) \right] \cos \tilde{n}\beta; \\ \frac{E_1 R}{P} v(\alpha, \beta) &= \frac{1}{8\beta_0} \frac{R}{h} \sum_n^* \frac{\tilde{n}}{\mu_n^2} \theta_n \left[-\bar{c}_1 [\varphi_n(\alpha) + \zeta_n(\alpha)] - \bar{c}_2 [\varphi_n(\alpha) - \zeta_n(\alpha)] + \zeta_n(|\alpha|) \text{sign} \alpha \right] \cos \tilde{n}\beta; \\ \frac{E_1 R}{P} w(\alpha, \beta) &= \frac{1}{8\beta_0} \frac{R}{h} \sum_n^* \frac{\tilde{n}^2}{\mu_n^2} \theta_n \left[-\bar{c}_1 [\varphi_n(\alpha) + \zeta_n(\alpha)] - \bar{c}_2 [\varphi_n(\alpha) - \zeta_n(\alpha)] + \zeta_n(|\alpha|) \text{sign} \alpha \right] \cos \tilde{n}\beta; \\ \frac{R}{P} T_2(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2\beta_0} \sum_n^* \frac{\mu_n^2}{\tilde{n} - 1} \theta_n \left[-\bar{c}_1 [\varphi_n(\alpha) + \zeta_n(\alpha)] - \bar{c}_2 [\varphi_n(\alpha) - \zeta_n(\alpha)] + \zeta_n(|\alpha|) \text{sign} \alpha \right] \cos \tilde{n}\beta; \\ \frac{R}{P} S_1(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2\lambda\beta_0} \sum_n^* \frac{\theta_n}{\tilde{n} \mu_n^2} \left\{ \bar{c}_1 \varphi_n(\alpha) - \bar{c}_2 \zeta_n(\alpha) - \frac{1}{2} (\varphi_n(|\alpha|) + \zeta_n(|\alpha|)) \right\} \sin \tilde{n}\beta. \\ \frac{1}{P} G_2(\alpha, \beta) &= \frac{1}{4\beta_0} \sum_n^* \theta_n \left[-\bar{c}_1 [\varphi_n(\alpha) + \zeta_n(\alpha)] - \bar{c}_2 [\varphi_n(\alpha) - \zeta_n(\alpha)] + \zeta_n(|\alpha|) \text{sign} \alpha \right] \cos \tilde{n}\beta; \\ G_1(\alpha, \beta) &= v_1 G_2(\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (3.78)$$

Здесь суммирование рядов начинается с $n=1$, если $k \geq 2$ и с $n=2$, если $k=1$

Тангенциальное состояние НДС

Произвольные постоянные c_1, c_2 должны быть найдены из условия граничных условий при $n > n^*$ которые с учётом (3.56) и (3.66) принимают вид:

$$S_{1n}(-\xi) = \frac{E_1 h}{(1 - v_1 v_2) R} \sqrt{\lambda} \tilde{n}^3 \left\{ (\sqrt{\lambda} + v_2) c_1 - \left[2v_2 + (\sqrt{\lambda} + v_2) \hat{n} \xi \right] c_2 \right\} e^{\hat{n} \xi} + \bar{S}_{1n}(-\xi) = 0 \quad (3.79)$$

$$T_{1n}(-\xi) = \frac{E_1 h}{(1 - v_1 v_2) R} \sqrt{\lambda} \tilde{n}^3 \left\{ (\sqrt{\lambda} + v_2) c_1 + \left[(\sqrt{\lambda} - v_2) - (\sqrt{\lambda} + v_2) \hat{n} \xi \right] c_2 \right\} e^{\hat{n} \xi} + \bar{T}_{1n}(-\xi) = 0$$

Частные решения записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}\overline{T}_{1n}(-\xi) &= \frac{P}{R} \frac{1}{2\pi\beta_0} \theta_n \int_0^\infty \left[\frac{\chi^3}{(\chi^2 + \sqrt{\lambda} \tilde{n}^2)^2} + \left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} - v_2 \right) \tilde{n}^2 \frac{\chi}{(\chi^2 + \sqrt{\lambda} \tilde{n}^2)^2} \right] \sin(\chi\xi) d\chi; \\ \overline{S}_{1n}(-\xi) &= -\frac{P}{R} \frac{1}{2\pi\beta_0} \theta_n \int_0^\infty \left[\frac{\lambda \tilde{n}^3}{(\chi^2 + \sqrt{\lambda} \tilde{n}^2)^2} - \frac{v_2 \tilde{n} \chi^2}{(\chi^2 + \sqrt{\lambda} \tilde{n}^2)^2} \right] \cos(\chi\xi) d\chi.\end{aligned}\quad (3.80)$$

Частные решения преобразуются таким образом:

$$\overline{T}_{1n}(-\xi) = \frac{1}{4\beta_0} \frac{P}{R} \theta_n t_{1n}^\tau(\xi); \quad \overline{S}_{1n}(-\xi) = -\frac{\sqrt[4]{\lambda}}{8\beta_0} \frac{P}{R} \theta_n s_n^\tau(\xi). \quad (3.81)$$

где

$$t_{1n}^\tau(\xi) = \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{v_2}{\sqrt{\lambda}} \right) \xi \hat{n} \right\} e^{-\xi \hat{n}}; \quad s_n^\tau(\xi) = \left[\left(I - \frac{v_2}{\sqrt{\lambda}} \right) + \left(I + \frac{v_2}{\sqrt{\lambda}} \right) \xi \hat{n} \right] e^{-\xi \hat{n}}.$$

Пусть

$$c_1 = \frac{1 - v_1 v_2}{4\sqrt[4]{\lambda} \tilde{n}^3 \beta_0} \theta_n \frac{P}{E_1 h} \overline{c}_1; \quad c_2 = \frac{1 - v_1 v_2}{4\sqrt[4]{\lambda} \tilde{n}^3 \beta_0} \theta_n \frac{P}{E_1 h} \overline{c}_2; \quad (3.82)$$

Здесь приняты:

$$\begin{aligned}\overline{c}_2 &= -\frac{1}{\sqrt{\lambda} + v_2} \left[t_{1n}^\tau(\xi) + \frac{1}{2} s_n^\tau(\xi) \right] e^{-\hat{n}\xi}; \\ \overline{c}_1 &= \frac{1}{\sqrt{\lambda} + v_2} \left\{ \frac{1}{2} s_n^\tau(\xi) - \frac{1}{\sqrt{\lambda} + v_2} \left[t_{1n}^\tau(\xi) + \frac{1}{2} s_n^\tau(\xi) \right] \left[2v_2 + (\sqrt{\lambda} + v_2) \hat{n} \xi \right] \right\} e^{-\hat{n}\xi}.\end{aligned}$$

Получим окончательные выражения для перемещений и силовых факторов:

$$\begin{aligned}\frac{E_1 R}{P} u(\alpha, \beta) &= \frac{1 - v_1 v_2}{4\beta_0} \frac{R}{h} \sum_{n=n^*+1}^\infty \left\langle \begin{aligned} &\sqrt{\lambda} \left\{ \left(I + \frac{\sqrt{\lambda}}{\mu_1} \right) \overline{c}_1 - \left[2 - \left(I + \frac{\sqrt{\lambda}}{\mu_1} \right) \hat{n} \alpha \right] \overline{c}_2 \right\} e^{-\hat{n}\alpha} + \\ &\left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu_1} - 1 \right) \right] (1 + |\alpha| \hat{n}) e^{-|\alpha| \hat{n}} \end{aligned} \right\rangle \frac{\theta_n}{\tilde{n}} \cos \tilde{n} \beta; \\ \frac{R}{P} T_1(\alpha, \beta) &= \frac{1}{4\beta_0} \sum_{n=n^*+1}^\infty \left\langle \begin{aligned} &\left\{ (\sqrt{\lambda} + v_2) \overline{c}_1 + \left[(\sqrt{\lambda} - v_2) + (\sqrt{\lambda} + v_2) \hat{n} \alpha \right] \overline{c}_2 \right\} e^{-\hat{n}\alpha} - \\ &\left[1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{v_2}{\sqrt{\lambda}} \right) |\alpha| \hat{n} \right] e^{-|\alpha| \hat{n}} \operatorname{sign}(\alpha) \end{aligned} \right\rangle \theta_n \cos \tilde{n} \beta; \quad (3.83) \\ \frac{R}{P} S_1(\alpha, \beta) &= \frac{\sqrt[4]{\lambda}}{4\beta_0} \sum_{n=n^*+1}^\infty \left\langle \begin{aligned} &\left\{ (\sqrt{\lambda} + v_2) \overline{c}_1 + \left[2v_2 - (\sqrt{\lambda} + v_2) \hat{n} \alpha \right] \overline{c}_2 \right\} e^{-\hat{n}\alpha} - \\ &-\frac{1}{2} \left[\left(I - \frac{v_2}{\sqrt{\lambda}} \right) + \left(I + \frac{v_2}{\sqrt{\lambda}} \right) |\alpha| \hat{n} \right] e^{-|\alpha| \hat{n}} \end{aligned} \right\rangle \theta_n \cos \tilde{n} \beta.\end{aligned}$$

3.3.3. Преобразование решения при нагружении оболочки по отрезкам контура

Вопрос о вкладе в полное НДС его компонентов- основного и тангенциального состояний- для бесконечно длинной оболочки рассматривался в разделе 3.2. Там же показана возможность получения для некоторых факторов, в частности, для продольного перемещения и продольного усилия, удобных для качественного и количественного анализа выражений или формул в замкнутом виде.

Рассмотрим более подробно частный случай приложения продольной нагрузки по отрезке контура, когда нагрузка приложена непосредственно на свободном крае оболочки. Для получения такого решения в выражениях (3.78), (3.83) нужно положить $\xi = 0$. Тогда произвольные постоянные c_1, c_2 существенно упростятся:

$$c_1^o = 0.5, c_2^o = 1.5; , c_1^\tau = \frac{\lambda - 6v_2\sqrt{\lambda} + v_2^2}{2\sqrt{\lambda}(\sqrt{\lambda} + v_2)^2}, c_2^\tau = \frac{v_2 - 3\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\lambda}(\sqrt{\lambda} + v_2)}. \quad (3.84)$$

Здесь индексы "o" и "τ" приняты для основного состояния и тангенциального.

Остановимся на продольном перемещении и продольном усилии, подставим $c_1^o = 0.5, c_2^o = 1.5$; в (3.78) и (3.83), тогда получим:

$$\begin{aligned} \frac{R}{P}T_1(\alpha, \beta) = & -\frac{1}{\pi\beta_0} \sum_n^* \frac{\sin \tilde{n}\beta_0}{n} (\varphi_n(\alpha) + \zeta_n(\alpha)) \cos \tilde{n}\beta - \\ & -\frac{1}{2\pi\beta_0} \sum_{n=\tilde{n}^*+1}^{\infty} \frac{\sin \tilde{n}\beta_0}{n} \left[2 + \left(1 + \frac{v_2}{\sqrt{\lambda}} \right) \alpha \hat{n} \right] e^{-\alpha \hat{n}} \cos \tilde{n}\beta; \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$\frac{E_2 R}{P} u(\alpha, \beta) = \frac{1}{\pi\beta_0} \frac{R}{h} \sum_n^* \frac{\sin \tilde{n}\beta_0}{n\mu_n} \varphi_n(\alpha) \cos \tilde{n}\beta.$$

Здесь решение для перемещения записано только на основе уравнений полубезмоментной теории оболочек, а для продольного усилия – по методу синтеза напряжённого состояния- как сумма основного и тангенциального состояний. Отметим, что максимальное значение продольного перемещения и усилия получается в точке $\alpha = \beta = 0$.

$$\frac{E_2 R}{P} u(0,0) = \frac{1}{\pi \beta_0} \frac{R}{h} \sum_n^* \frac{\sin \tilde{n} \beta_0}{n \mu_n}; \quad \frac{R}{P} T_1(0,0) = -\frac{1}{\pi \beta_0} \sum_n \frac{\sin \tilde{n} \beta_0}{n}. \quad (3.86)$$

Сравним полученные выражения с соответствующими формулами для бесконечно-длинной оболочки. Замечаем, что в случае полубесконечной-длинной оболочки нагруженной свободном крае системой продольных сил, максимальные значения продольного перемещения и продольного усилия в 2 раз больше, чем у бесконечно-длинной оболочки.

Интересно отметить, что действие системы сосредоточенных радиальных сил на свободном крае полубесконечной оболочки вызывает максимальное значение нормального перемещения (под силой) в 4 раз большее, чем в бесконечно длинной оболочке. Причём теоретический результат подтверждён экспериментом, опубликованным в монографии Б.В. Нерубайло [46].

3.4. К решению задачи о стыке отсеков: о передаче продольной нагрузки через шпангоут

Работоспособность цилиндрической оболочки в значительной степени зависит от способа передачи сил на неё какого-либо силового воздействия. Часто передачу сил осуществляют с помощью шпангоутов, которые способствуют более равномерному включению оболочки в работу.

Жесткость шпангоута должна выбираться в соответствии с характером действующей нагрузки. Так, при передаче радиальной нагрузки существенную роль играет жесткость шпангоута в его плоскости, а при действии продольной нагрузки (вдоль образующей оболочки) – жёсткость из плоскости и крутильная.

Здесь рассматривается краевая задача о контакте полубесконечной ортотропной оболочки и шпангоута, упругого из плоскости. За основу принимаются решения в разделе 3.3.

Если принять, что продольная сила происходит через центр жёсткости сечения шпангоута, то дифференциальное уравнение изгиба кольца из плоскости можно записать [15]:

$$\frac{\partial^6 u}{\partial \beta^6} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial \beta^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = -\frac{R^4}{C} q_0 \left(1 + \frac{C}{B_1} \tilde{n}^2 \right) \cos \tilde{n} \beta; \quad (3.87)$$

где C - крутильная жесткость поперечного сечения шпангоута, $C = I_p G$;

B_1 - изгибная жесткость шпангоута из его плоскости, $B_1 = I_{yy} E_1$ (I_{yy} - собственный момент инерции поперечного сечения шпангоута относительно продольной оси y) (рис.3.9).

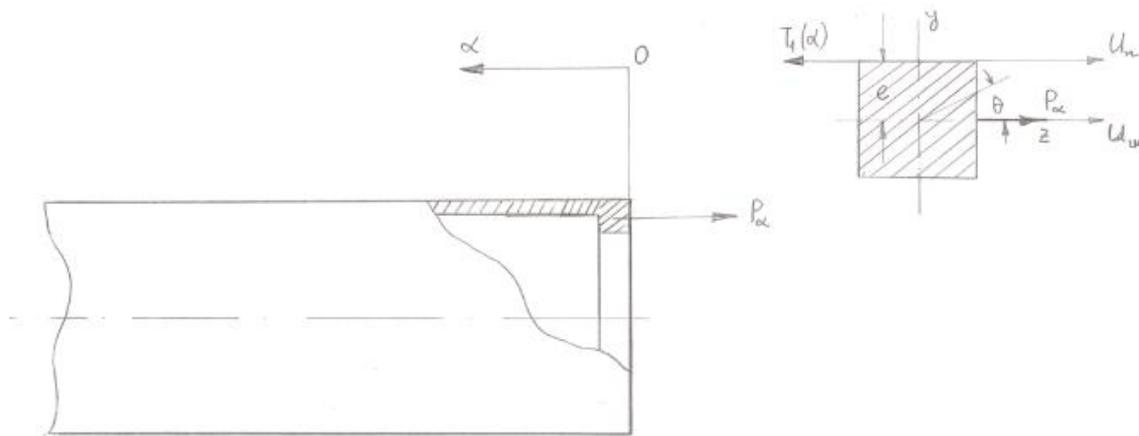


Рис.3.9

Решение дифференциального уравнения (3.87), имеет вид:

$$u = \frac{R^4}{C} \frac{1 + \frac{C}{B_1} \tilde{n}^2}{\tilde{n}^2 (\tilde{n}^2 - 1)^2} q_0 \cos \tilde{n} \beta. \quad (3.88)$$

Будем читать, что на линии контакта оболочки и шпангоута отсутствует тангенциальное (а, следовательно, и радиальное) перемещение, а условие контакта сводится к равенству перемещений оболочки и шпангоута:

$$\text{При } \alpha = 0 \quad u(0) = u_{\text{полн}}; \quad V(0) = 0. \quad (3.89)$$

Полное перемещение $u_{\text{полн}}$ шпангоута в нашем случае складывается из двух величин (рис.3.9):

$$u_{\text{полн}} = u_{\text{из}} - \theta e. \quad (3.90)$$

где θ -угол поворота сечения шпангоута

e - расстояние от линии центров жёсткости шпангоута до срединной поверхности оболочки.

Для случая усилия $T_{in}(0)$, действующего в осевом направлении получаем:

$$u_1 = \frac{R^4}{\tilde{n}^2 (\tilde{n}^2 - 1)^2 C} \left(1 + \frac{C}{B_1} \tilde{n}^2 \right); \quad \theta_1 = \frac{R^3}{(\tilde{n}^2 - 1)^2 C} \left(1 + \frac{C}{B_1} \right). \quad (3.91)$$

Для случая действия крутящего момента вызывающего q_{1n} , получаем:

$$u_2 = \frac{R^3}{(\tilde{n}^2 - 1) C} \left(1 + \frac{C}{B_1} \right); \quad \theta_2 = -\frac{R^2}{(\tilde{n}^2 - 1)^2 C} \left(\tilde{n}^2 + \frac{C}{B_1} \right). \quad (3.92)$$

Следуя Знаменскому П.М из (3.91) и (3.92) получаем выражение для перемещения $u_{ш}$ и угла поворота сечения шпангоута θ вызванных крутящими моментами и реактивными силами:

$$\begin{aligned} u_{ш} &= u_1 [q_{1n} - T_{1n}(0)] - u_2 T_{1n}(0) e; \\ \theta_{ш} &= -\theta_1 [q_{1n} - T_{1n}(0)] + \theta_2 T_{1n}(0) e. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Подставив (3.93) в (3.90), получаем для шпангоута:

$$u_{полн} = (u_1 + e\theta_1)q_{1n} - (-u_1 + e\theta_1 - u_2 e + e^2\theta_2)T_{1n}(0). \quad (3.94)$$

Для оболочки из (3.53)-(3.55) находим:

$$\begin{aligned} u_n(\alpha) &= 2\lambda\mu_n^2 [c_1\zeta_n(\alpha) - c_2\varphi_n(\alpha)] + \frac{\lambda}{8\beta_0} \frac{P}{E_2 h} \frac{\theta_n}{\mu_n} [\varphi_n(\alpha) - \zeta_n(\alpha)]; \\ V_n(\alpha) &= \lambda\tilde{n}\mu_n \{-c_1[\varphi_n(\alpha) + \zeta_n(\alpha)] + c_2[\varphi_n(\alpha) - \zeta_n(\alpha)]\} + \lambda\tilde{n} \frac{1}{8\beta_0} \frac{P}{E_2 h} \frac{\theta_n}{\mu_n^2} \zeta_n(\alpha); \\ T_{1n}(\alpha) &= \lambda \frac{E_1 h}{R} \left\langle 2\mu_n^3 \{c_1[\varphi_n(\alpha) - \zeta_n(\alpha)] + c_2[\varphi_n(\alpha) + \zeta_n(\alpha)]\} - \frac{1}{4\beta_0} \frac{P}{E_2 h} \theta_n \varphi_n(\alpha) \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.95)$$

При $\alpha = 0$ с учётом граничных условиях (3.89) находим

$$\begin{aligned} c_1 &= c_2; \\ c_2 &= -\frac{1}{2\lambda\mu_n^2} u_{полн} + \frac{1}{16\beta_0} \frac{P}{E_2 h} \frac{\theta_n}{\mu_n^3}; \end{aligned} \quad (3.96)$$

Далее подставим постоянные коэффициенты найдены по (3.96) в (3.95)

имеем:

$$T_{1n}(0) = 4 \frac{E_2 h}{R} \mu_n^3 c_2 - \frac{1}{4\beta_0} \frac{P}{R} \theta_n. \quad (3.97)$$

Подставим $T_{1n}(0)$ из (3.97) в (3.94):

$$u_{полн} = (u_1 + e\theta_1)q_{1n} - (-u_1 + e\theta_1 - u_2 e + e^2\theta_2) \left(4 \frac{E_2 h}{R} \mu_n^3 c_2 - \frac{1}{4\beta_0} \frac{P}{R} \theta_n \right). \quad (3.98)$$

Подставим (3.98) в (3.96) находим c_2 :

$$c_2 \left[1 - \frac{2E_1 h}{R} \mu_n (-u_1 + e\theta_1 - u_2 e + e^2 \theta_2) \right] = -\frac{1}{2\lambda \mu_n^2} \left[(u_1 + e\theta_1) q_{1n} - \right. \\ \left. - (-u_1 + e\theta_1 - u_2 e + e^2 \theta_2) \frac{1}{4\beta_0} \frac{P}{R} \theta_n \right] + \frac{1}{16\beta_0} \frac{P}{E_2 h} \frac{\theta_n}{\mu_n^3}. \quad (3.99)$$

Если нагрузка сосредоточенная, то постоянные коэффициенты c_1, c_2 определяются следующим образом :

$$c_1 = c_2; \quad c_2 \left[1 - \frac{2E_1 h}{R} \mu_n (-u_1 + e\theta_1 - u_2 e + e^2 \theta_2) \right] = \quad (3.100) \\ = -\frac{1}{2\lambda \mu_n^2} \left[(u_1 + e\theta_1) q_{1n} - (-u_1 + e\theta_1 - u_2 e + e^2 \theta_2) \frac{kP}{2\pi R} \right] + \frac{k}{8\pi \mu_n^3} \frac{P}{E_2 h}.$$

Зная c_1, c_2 , можно найти все интересующие нас величины как в оболочке, так и в шпангоуте.

На рис.3.10 представлено распределение продольного усилия $T_1(\alpha, \beta)$ по длине оболочки для нескольких размеров подкрепляющего шпангоута.

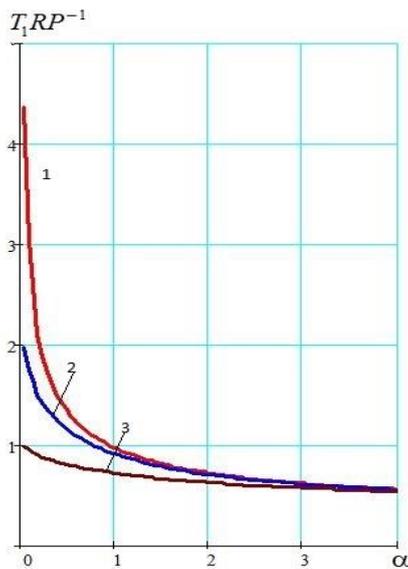


Рис.3.10. Распределение продольного усилия вдоль нулевой образующей полубесконечной ортотропной оболочки при $R \setminus h = 100; R = 0.2 м$ $I_p \setminus I_y = 1.7$ и различных I_p , $\lambda = 1$.

$$1 - I_p = 0.141 \cdot 10^{-12} м; \quad 2 - I_p = 11,4 \cdot 10^{-8} м;$$

$$3 - I_p = 88 \cdot 10^{-8} м.$$

ГЛАВА 4. ТЕРМОУПРУГИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОЛОЧЕК ИЗ ФИЗИЧЕСКИ ОРТОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЯХ РАЗЛИЧНОЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ

Исследование напряжённого состояния круговой цилиндрической оболочки при действии несимметричного или локализованного нагрева является одной из важных задач проектирования летательных аппаратов. Случаи локализованного нагрева могут встретиться, например, при некоторых режимах работы авиадвигателей, при откалывании защитой обмазки [3] на корпусе летательного аппарата, когда он подвергается действию аэродинамического нагрева, при наддуве баков. Как показывают расчёты и проведенный эксперимент, локальный нагрев вызывает в металлической оболочке значительные сжимающие напряжения [49].

Однако вопрос об определении напряжений при действии на ортотропную цилиндрическую оболочку локального нагрева посвящено незначительно число работ [54,56,59,61].

Пусть в тонкой круговой цилиндрической оболочке из физически ортотропного материала под действием внешних источников тепла возникает произвольно распределенное по ее поверхности постоянное по её толщине температурное поле $t^*(\alpha, \beta)$ и $t^{**}(\alpha, \beta)$ перепад температуры по толщине. Тогда при использовании уравнений общей теории оболочек, построенной на основе принятия гипотез Кирхгофа-Лява, задача может быть приведена к следующему дифференциальному уравнению в частных производных относительно разрешающей функции $\Phi(\alpha, \beta)$ [68], [74], [61]:

$$L\Phi^*(\alpha, \beta) = \frac{\alpha_{2t} + \nu_1 \alpha_{1t}}{c^2} R t^*(\alpha, \beta); \quad (4.1)$$

$$L\Phi^{**}(\alpha, \beta) = -\frac{\alpha_{2t} + \nu_1 \alpha_{1t}}{6c^2} h t^{**}(\alpha, \beta). \quad (4.2)$$

Здесь, все обозначения приняты такие же как в первой главе.

Перемещения, усилия, изгибающие моменты и другие искомые факторы связаны с разрешающей функцией известными соотношениями [68].

4.1. Бесконечно длинная оболочка при локальном распределении температуры, постоянной по толщине

Рассмотрим термоупругую задачу для оболочки с бесконечно удаленными границами и примем, что температурное поле $t^*(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n^*(\alpha) \cos n\beta$, $t_n^*(\alpha) = T_0^* \theta(\alpha)$ имеет две плоскости симметрии, на пересечении которых поместим начало координат. Тогда после подстановки в разрешающее уравнение (4.1) температурного поля, записанного в форме ряда Фурье по окружной координате β и интеграла Фурье по продольной координате, получаем для разрешающей функции:

Решение разрешающего уравнения (4.1) ищем в виде:

$$\Phi^*(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^*(\alpha) \cos n\beta. \quad (4.3)$$

В результате постановки (4.3) в (4.1) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $\Phi_n^*(\alpha)$:

$$L\Phi_n^*(\alpha) = \frac{\alpha_{2r} + \nu_1 \alpha_{1r}}{c^2} RT_0 \theta_n \theta(\alpha). \quad (4.4)$$

Подвергаем уравнение (4.3) преобразованию Фурье по переменной α и, предполагая при $|\alpha| \rightarrow \infty$, что функция $\Phi_n^*(\alpha) \rightarrow 0$ и её производные $\Phi_n^{*I}(\alpha), \Phi_n^{*II}(\alpha), \dots, \Phi_n^{*VII}(\alpha) \rightarrow 0$, приходим к следующему выражению:

$$L(\chi, n) \bar{\Phi}_n(\chi) = \frac{\alpha_{2r} + \nu_1 \alpha_{1r}}{c^2} RT_0 \theta_n \bar{\theta}(\chi), \quad (4.5)$$

где $\bar{\Phi}_n(\chi), \bar{\theta}(\chi)$ - трансформанты функций $\Phi_n(\alpha), \theta(\alpha)$;

$$\bar{\Phi}_n(\chi) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n(\alpha) e^{i\chi\alpha} d\alpha; \quad \bar{\theta}(\chi) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(\alpha) e^{i\chi\alpha} d\alpha. \quad (4.6)$$

Для определения функции $\Phi_n^*(\alpha)$ имеем обратное преобразование:

$$\Phi_n^*(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\Phi}_n(\chi) e^{i\chi\alpha} d\chi; \quad (4.7)$$

Отсюда разрешающей функции $\Phi^*(\alpha, \beta)$:

$$\Phi^*(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} \frac{\alpha_{2t} + v_1 \alpha_{1t}}{c^2} RT_0 \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos n\beta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\chi\alpha}}{L(\chi, n)} d\chi \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(\alpha) e^{i\chi\alpha} d\alpha \quad (4.8)$$

где

$$L(\chi, n) = \chi^8 + a_{6,2}\chi^6 n^2 - 2v_2\chi^6 + a_{4,4}\chi^4 n^4 - a_{4,2}\chi^4 n^2 + \lambda\chi^4 +$$

$$+ a_{2,6}\chi^2 n^6 - a_{2,4}\chi^2 n^4 + a_{2,2}\chi^2 n^2 + \lambda^2 n^4 (n^2 - 1)^2 + \lambda \frac{1 - v_1 v_2}{c^2} \chi^4.$$

Разрешающая функция (4.8) даёт решение термоупругой задачи, которое практически несколько не ограничивает её общность, при температуре, удовлетворяющей условию (4.1). В случае весьма локализованного, например, кусочно-постоянного изменения температуры имеем:

$$\begin{aligned} \theta(\alpha) &= 1, \quad |\alpha| \leq \alpha_0; \quad \theta(\alpha) = 0, \quad |\alpha| > \alpha_0; \\ \theta_n &= \frac{\beta_0}{\pi}, \quad n = 0; \quad \theta_n = \frac{2}{\pi n} \sin n\beta_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4.9)$$

Тогда разрешающая функция $\Phi^*(\alpha, \beta)$ в (4.8) с учетом (4.9) преобразуется к виду:

$$\Phi^*(\alpha, \beta) = \frac{24}{\pi} (\alpha_{2t} + v_1 \alpha_{1t}) RT_0 \left(\frac{R}{h} \right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos n\beta \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha_0 \chi \cos \alpha \chi}{\chi L(\chi, n)} d\chi. \quad (4.10)$$

Выражения для перемещений, усилий и изгибающих моментов получаются путем подстановки разрешающей функции (4.10) в связывающие с ней дифференциальные соотношения [68].

Запишем некоторые наиболее существенные из них, на примере которых проведем численный анализ влияния на напряженное состояние физико-механических характеристик материала оболочки.

$$\begin{aligned} \bar{T}_1(\alpha, \beta) &= \frac{24}{\pi} \left(\frac{R}{h} \right)^2 \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos n\beta \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha_0 \chi}{\chi L(\chi, n)} \times \\ &\times \left\{ \mathcal{G}(\lambda - v_2^2) \chi^4 + c^2 \left[\mathcal{G} \chi^8 + \left[\mathcal{G} \frac{(\lambda - v_2^2)}{\mu_1^2} + v_2 \mathcal{G} + 4\mathcal{G}\mu_1 - \lambda \right] \chi^6 n^2 + \right. \right. \\ &+ \left. \left[\mathcal{G} \frac{(\lambda - v_2^2)}{\mu_1^2} (5\mu_1 + 2v_2) - (\lambda - v_2 \mathcal{G})(4\mu_1 + v_2) \right] \chi^4 n^4 - \right. \\ &\left. \left. - \left[\frac{\lambda}{\mu_1} (\mu_1 - \mathcal{G})(\lambda - v_2^2) + \lambda v_2 (\mathcal{G} - v_2 - 4\mu_1) \right] \chi^6 n^2 + v_2 \lambda^2 n^8 \right] \right\} \cos \alpha \chi d\chi - \\ &- \frac{\mathcal{G}}{\lambda} \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos n\beta \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha_0 \chi \cos \alpha \chi}{\chi} d\chi; \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \overline{G}_2(\alpha, \beta) = & -\frac{12R}{\pi h} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos n\beta \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha_0 \chi}{\chi L(\chi, n)} \left\{ v_1(\lambda - v_2 \vartheta) \chi^6 + (\lambda - v_2^2) \chi^4 n^2 + \lambda(\vartheta - v_2) \chi^2 (n^4 - n^2) \right. \\ & + (v_2 \vartheta - \lambda) \chi^4 - c^2 \left[v_1 \vartheta \chi^8 + \left[\vartheta(\lambda - v_2^2) \frac{v_1}{\mu_1} - 4(v_2 + \mu_1) + (\vartheta + 2v_2) \right] \chi^6 n^2 + \right. \\ & + \left. \left[\frac{\vartheta(\lambda - v_2^2)}{\mu_1} - \vartheta(5v_2 + 4\mu_1) + 2(\lambda + v_2^2 + 2\mu_1 v_2) \right] \chi^4 n^4 + \right. \\ & \left. \left. + \lambda [2(v_2 + 2\mu_1) - \vartheta] \chi^2 n^6 \right\} \cos \alpha \chi d\chi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{S}_1(\alpha, \beta) = & -\frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos n\beta \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha_0 \chi}{\chi L(\chi, n)} \left\{ \frac{\lambda - \vartheta v_2}{\mu_1} \chi^7 n + \left[4(\lambda - v_2 \vartheta) + \frac{1}{\mu_1} (\lambda v_2 - 2\vartheta v_2^2 + \vartheta \lambda) \right] \chi^5 n^3 - \right. \\ & - \lambda \left[4(v_2 - \vartheta) - \frac{\lambda + 2\vartheta v_2 - 2v_2^2}{\mu_1} \right] \chi^3 n^5 - \frac{\lambda^2}{\mu_1} (v_2 - \vartheta) \chi n^7 \\ & \left. - \left[4(\lambda - v_2 \vartheta) + \frac{2v_2 \lambda}{\mu_1} - \vartheta \frac{\lambda + v_2^2}{\mu_1} \right] \chi^5 n - \lambda \left[8(\vartheta - v_2) + 2 \frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} \right] \chi^3 n^3 \right\} \sin \alpha \chi d\chi; \end{aligned}$$

$$T_1(\alpha, \beta) = \frac{\alpha_{2t} + v_1 \alpha_{1t}}{1 - v_1 v_2} E_2 h T_0 \overline{T}_1(\alpha, \beta); \quad S_1(\alpha, \beta) = (\alpha_{2t} + v_1 \alpha_{1t}) Gh T_0 \overline{S}_1(\alpha, \beta);$$

$$G_2(\alpha, \beta) = \left(\frac{\alpha_{2t} + v_1 \alpha_{1t}}{1 - v_1 v_2} E_2 \frac{h^2}{6} T_0 \right) \overline{G}_2(\alpha, \beta).$$

Построенные для произвольного, а в частном случае кусочно-постоянного, температурного поля решения (4.10)-(4.11) обладают большой общностью, так как они справедливы при любых комбинациях параметров ортотропии λ и коэффициентов линейного температурного расширения α_{1t}, α_{2t} , что дает возможность проследить их влияние на качественную и количественную картину напряженного состояния.

Зависимость продольного усилия и кольцевого изгибающего момента от величины коэффициента линейного температурного расширения α_{1t} при постоянном значении α_{2t} представлена на рис.4.1 при различных значениях λ : $\lambda = 0.1; 0.25; 0.5; 1$ (кривые соответственно 1,2,3,4). В качестве перегретой принята квадратная область $0,25R \times 0,25 R$ ($\alpha_0 = \beta_0 = 0.125$); относительная толщина оболочки $h/R = 1/100$. Как видно из графиков, имеет место весьма сильная

зависимость и усилия, и изгибающего момента, а следовательно, и напряжений от физико-механических характеристик материала оболочки.

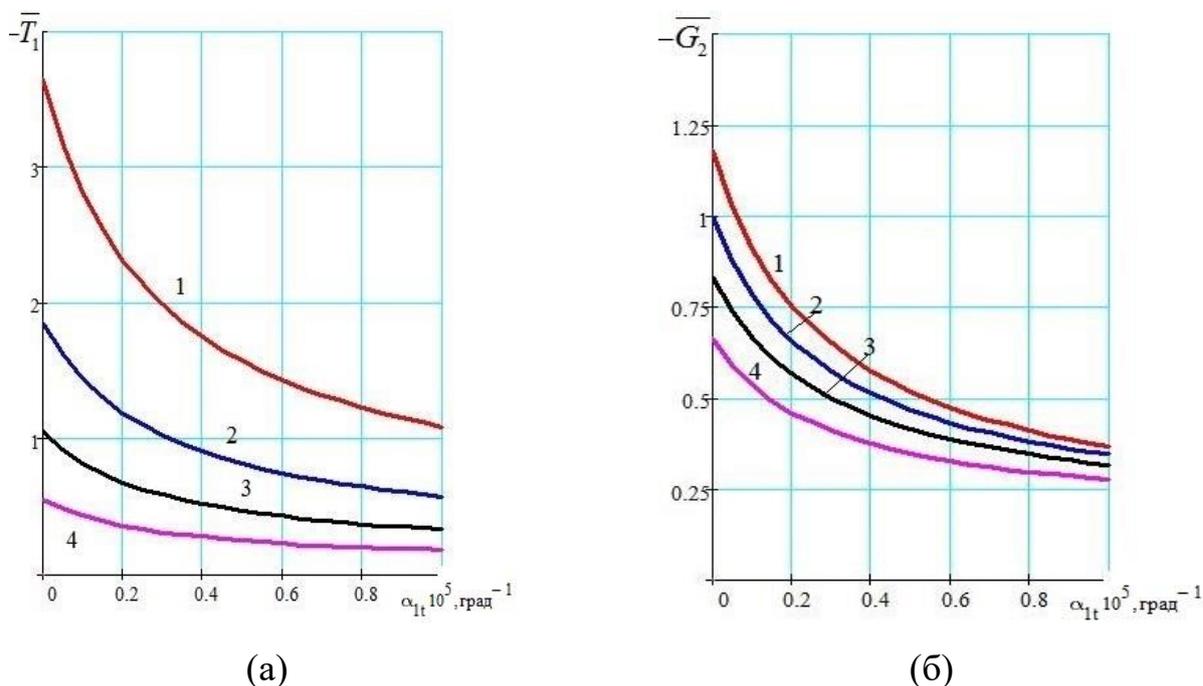


Рис.4.1. Зависимость продольного усилия (а), кольцевого изгибающего момента от величины коэффициента линейного температурного расширения α_{1t} при постоянном значении α_{2t} .

Таблица 4.1.

$w / (\alpha_{2t} + \nu_1 \alpha_{1t}) RT_0$				
$\alpha_{1t} 10^6, 1/^\circ C$	$\alpha_{2t} 10^6, 1/^\circ C$	$\lambda = 0.01$	$\lambda = 0.1$	$\lambda = 1$
10	0.1	-9.032	-5.307	-2.874
	1	-7.072	-4.222	-2.361
	10	-2.396	-1.634	-1.138

Представляет интерес также зависимость перемещений, особенно нормального, от геометрических параметров и физико-механических характеристик материала оболочки. Для нормального перемещения $w / (\alpha_{2t} + \nu_1 \alpha_{1t}) RT_0$ в центре нагретой квадратной области, расположенной в середине оболочки, числовая информация приведена в таблице 4.1.

Данные в табл.4.1 вычислены для параметров оболочки и нагретой области: удлинение $L/R=10$, относительная толщина $h/R=1/100$, размер нагретой области ($\alpha_0 = \beta_0 = 0,125$).

Приведенная здесь числовая информация для напряжений и нормального перемещения практически совпадает (погрешность менее 5%) с данными, найденными по первому и второму методам асимптотического синтеза напряженного состояния [72]. Отметим, что в принятой здесь постановке перегретое пятно (область) при постоянной температуре оболочки может трактоваться и как инородное включение, обладающее отличным от основного материала оболочки коэффициентами линейного температурного расширения. Оно может иметь произвольную форму, в том числе круговую, эллиптическую или прямоугольную, для которой выше приведены значения напряжений и нормального перемещения. Для плоской задачи теории упругости различные очертания горячего пятна рассматривались, в работах [92].

4.2. Бесконечно длинная оболочка при локальном распределении температурного перепада по толщине - линейно изменяющаяся по толщине температура

Рассматриваем бесконечно длинную оболочку относительно распределение температурного поля $t^{**}(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n^{**}(\alpha) \cos n\beta$, $t_n^{**}(\alpha) = T_0^{**} \theta(\alpha)$ принимаем что предположение, что и в случае распределение температурного поля имеет перепад, определяемой формулой:

$$t^{**}(\alpha, \beta) = \frac{t_2(\alpha, \beta) - t_1(\alpha, \beta)}{2} \quad (4.12)$$

$t_1(\alpha, \beta), t_2(\alpha, \beta)$ - температуры в соответствии внутренней и наружной поверхностей оболочки.

Разрешающая функция $\Phi^{**}(\alpha, \beta)$ получаем в виде:

$$\Phi^{**}(\alpha, \beta) = -\frac{4}{\pi} (\alpha_{2r} + \nu_1 \alpha_{1r}) \left(\frac{R}{h} \right)^2 h T_0^{**} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos n\beta \int_0^{\infty} \frac{\cos \chi \alpha}{L(\chi, n)} d\chi \int_0^{\infty} \theta(\alpha) \cos \chi \alpha d\alpha. \quad (4.13)$$

Выражения для перемещений, усилий и изгибающих моментов получаются путем подстановки разрешающей функции (4.13) в связывающие с ней дифференциальные соотношения [68].

Запишем некоторые наиболее существенные из них, на примере которых проведем численный анализ влияния на напряженное состояние физико-механических характеристик материала оболочки.

$$\begin{aligned}
\overline{G}_1^{**}(\alpha, \beta) = & \frac{2}{\pi} \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos n\beta \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha_0 \chi}{\chi L(\chi, n)} \left\{ \vartheta \chi^8 + \left(\vartheta \frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} + \lambda - \vartheta v_2 \right) \chi^6 n^2 + \right. \\
& + \left[\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} (\mu_1 \vartheta + \lambda + v_2 \vartheta) - v_2 (\lambda + \vartheta v_2) \right] \chi^4 n^4 + \\
& + \lambda \left[\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} (v_2 + \mu_1) + v_2 (\vartheta - v_2) \right] \chi^2 n^6 + v_2 \lambda^2 n^4 (n^2 - 1)^2 - \\
& - \vartheta v_2 \chi^6 - \left[\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} (\lambda + v_2 \vartheta) - \vartheta (\lambda + v_2^2) \right] \chi^4 n^2 - \\
& - \lambda v_2 \left[\vartheta + 2 \left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} - v_2 \right) \right] \chi^2 n^4 + \frac{\lambda}{\mu_1} (\lambda v_2 - \lambda v_1 - v_2^3) \chi^2 n^2 \left. \right\} \cos \alpha \chi d\chi - \\
& - \frac{\vartheta}{\lambda} \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos n\beta \int_0^{\infty} \frac{1}{\chi} \sin \alpha_0 \chi \cos \alpha \chi d\chi;
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
\overline{G}_2^{**}(\alpha, \beta) = & \frac{2}{\pi} \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos n\beta \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha_0 \chi}{\chi L(\chi, n)} \left\{ v_1 \vartheta \chi^8 + \right. \\
& + \left[v_1 (\lambda + \vartheta \mu_1) + \frac{\vartheta (\mu_1 + v_2) - v_1 \vartheta (\mu_1 + v_2)^2}{\mu_1} \right] \chi^6 n^2 \\
& + \left[(\vartheta + v_2) \left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} - 2v_2 \right) + \lambda (1 + v_1 \vartheta) \right] \chi^4 n^4 - \vartheta v_2 \chi^6 + \\
& + \frac{\lambda}{\mu_1} \left[\lambda (1 + v_1 \mu_1) + \mu_1 (\vartheta + \mu_1) - (v_2 + \mu_1)^2 \right] \chi^2 n^6 + \lambda^2 n^4 (n^2 - 1)^2 - \\
& - \left[\left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} - v_2 \right) (v_2 + \vartheta) + \lambda - \vartheta v_2 \right] \chi^4 n^2 - \lambda \left[\vartheta + 2 \left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} - v_2 \right) \right] \chi^2 n^4 + \\
& + \lambda \left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} - v_2 \right) \chi^2 n^2 \left. \right\} \cos \alpha \chi d\chi - \frac{\vartheta}{\lambda} \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos n\beta \int_0^{\infty} \frac{1}{\chi} \sin \alpha_0 \chi \cos \alpha \chi d\chi;
\end{aligned}$$

$$G_1^{**}(\alpha, \beta) = \left(\frac{\alpha_{2t} + v_1 \alpha_{1t}}{1 - v_1 v_2} E_2 \frac{h^2}{6} T_0^{**} \right) \overline{G}_1(\alpha, \beta);$$

$$G_2^{**}(\alpha, \beta) = \left(\frac{\alpha_{2t} + v_1 \alpha_{1t}}{1 - v_1 v_2} E_2 \frac{h^2}{6} T_0^{**} \right) \overline{G}_2(\alpha, \beta).$$

4.3. Диаграммы, ограничивающие зоны максимальных напряжений для осесимметричного и несимметричного локального распределения температуры

Числовая информация о продольном и окружном изгибных напряжениях $\sigma_1(0,0) - \sigma_2(0,0)$ при воздействии локализованной осесимметричной нагреве, длиной $0.5R$; $0.25R$; $0.0625 R$ ($\alpha_0 = 0.25$; 0.125 ; 0.03125 .) оболочки с параметром $R \setminus h = 100$, $\alpha_{1t} = \alpha_{2t} = 10 \cdot 10^{-6} 1/^\circ C$ и перепаде температуры по толщине принятой за единицу представлена на рис 4.2. Кривые 1,2,3 соответствуют длинам нагруженной зоны $\alpha_0 = 0.25$; 0.125 ; 0.03125 .

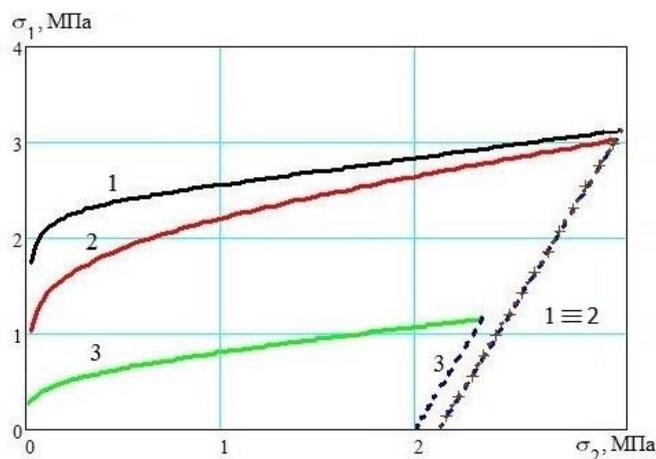


Рис.4.2. Диаграммы для определения напряжений вызваны изгибающими моментами при различных комбинациях модули упругости по направлений α и по направлений β .

Сплошная кривая соответствует вариантам параметра λ , при которых модуль $E_1 = 200$ ГПа, а модуль E_2 возрастает от нижней точки к верхней таким образом, что λ изменяется от величины 0.01 в окрестности начала координат до $\lambda = 1$. Пунктирная кривая отвечает таким вариантам λ , при которых модуль $E_2 = 200$ ГПа, а модуль E_1 уменьшается от верхней точки при движении вниз так, что при этом значения λ изменяются от $\lambda = 1$ в верхней точке до $\lambda = 0,01$ в нижней.

Далее, для случая перегретой области $0,25R \times 0,25R$ ($\alpha_0 = \beta_0 = 0.125$) и температуры, постоянной по толщине, числовая информация представлена в форме диаграммы на рис.4.3. Левые ветви, в виде кривых 1 и 3 соответствуют вариантам параметра λ , при которых модуль $E_1 = 200$ ГПа, а E_2 возрастает от нижней точки к

верхней таким образом, что λ изменяется от величины 0.01 в окрестности начала координат до $\lambda=1$ в верхней точке, где левые и правые ветви смыкаются. Правые ветви, в виде кривых 2 и 4, отвечают таким вариантам λ , при которых $E_2 = 200$ ГПа, а модуль E_1 уменьшается от верхней точки при движении вниз так, что при этом значения λ изменяются от $\lambda=1$ в верхней точке до $\lambda = 0,01$ в нижней. Здесь тоже верхняя точка- это точка изотропии материала.

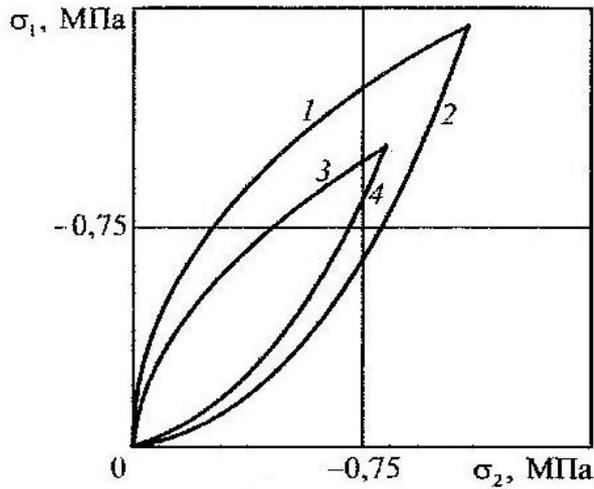


Рис.4.3. Диаграммы для определения напряжений при различных комбинациях модули упругости по направлений α и по направлений β .

Кривые 3 и 4 на рис.13 представляют изгибные напряжения ($\sigma_i = \pm 6G_i / h^2, i=1,2$), а кривые 1 и 2 – суммарные максимальные значения напряжений : не только от изгибающих моментов, но и от усилий ($\sigma_i = T_i / h, i=1,2$)

4.4. Цилиндрический отсек с шарнирно закрепленными краями при действии кусочно-постоянного вдоль контура и постоянного по длине и толщине температурного поля

4.4.1. Решение на основе уравнений общей теории физически ортотропных оболочек

При появлении температурного поля в оболочке (рис.4.4) напряженное состояние строится аналогично изложенному выше случаю гидростатического давления.

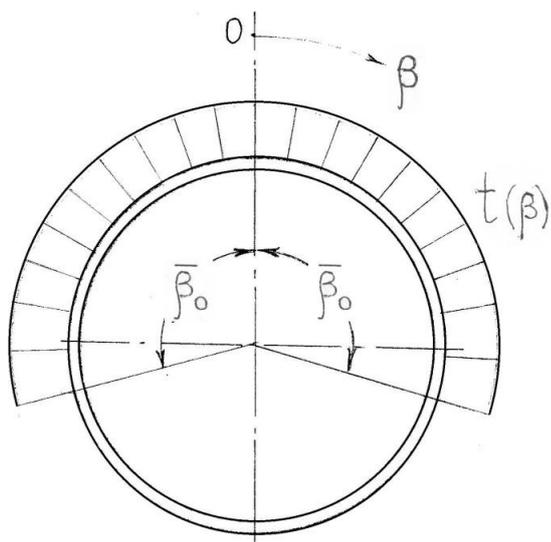


Рис.4.4

Для безразмерной функции $\bar{\theta}(\beta)$ изменения температуры $T^*(\alpha, \beta) = T_0^* \theta(\alpha) \bar{\theta}(\beta)$ по оболочке при начале координат, помещенном в диаметральной плоскости, проходящей через середину нагретой области, получаем следующее разложение [46, 63] в ряд Фурье:

$$\bar{\theta}(\beta) = \frac{\theta_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \cos(n\beta).$$

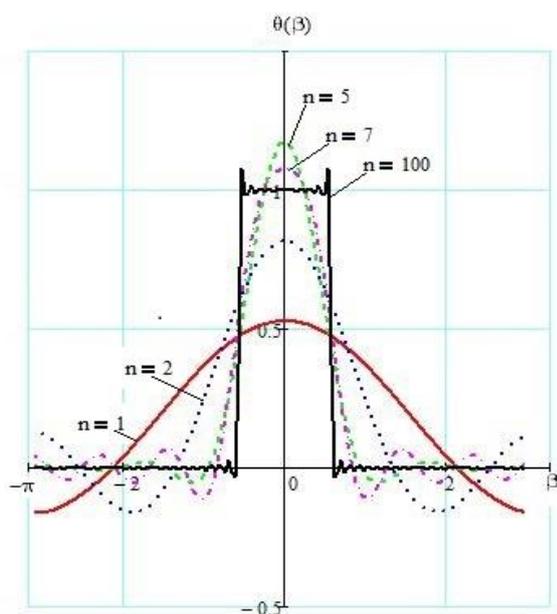


Рис.4.5. Изменение функции распределения температуры $\bar{\theta}(\beta)$, определяющего по (4.9) от числа членов ряда Фурье (частичные суммы) при разложении нагрузки по окружной координате.

Рассмотрим оболочку, имеющую на торцах так называемое шарнирное закрепление, которое описывается граничными условиями вида:

$$w = v = T_1 = G_1 \quad (\alpha = 0, \alpha = \alpha_1). \quad (4.16)$$

Решение задачи будем строить в виде разложений в двойные тригонометрические ряды. И после подстановки в разрешающее уравнение (4.1) температурного поля, постоянного по толщине, записанной в форме ряда Фурье по продольной координате α и окружной координате β , получаем для разрешающей функции:

$$\Phi^*(\alpha, \beta) = \frac{\alpha_{2t} + v_1 \alpha_{1t}}{c^2} RT^* \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta_m \theta_n}{L_{mn}} \sin \chi_m \alpha \cos \tilde{n} \beta; \quad (4.17)$$

где $L_{m,n} = \chi_m^8 + a_{6,2} \chi_m^6 \tilde{n}^2 - 2v_2 \chi_m^6 + a_{4,4} \chi_m^4 \tilde{n}^4 - a_{4,2} \chi_m^4 \tilde{n}^2 + \lambda \chi_m^4 +$
 $+ a_{2,6} \chi_m^2 \tilde{n}^6 - a_{2,4} \chi_m^2 \tilde{n}^4 + a_{2,2} \chi_m^2 \tilde{n}^2 + \lambda^2 \tilde{n}^4 (\tilde{n}^2 - 1)^2 + \frac{1 - v_1 v_2}{c^2} \lambda \chi_m^4.$

В результате постановки разрешающей функции (4.17) в выражении соотношении [68] получим формулы для определения искомых факторов, записанные в виде двойных тригонометрических рядов:

$$\begin{aligned} \bar{u}(\alpha, \beta) &= 12 \left(\frac{1 - v_1 v_2}{\mathcal{G} - v_2} \right) \left(\frac{R}{h} \right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta_m \theta_n}{L_{mn}} u_{mn} \cos \chi_m \alpha \cos \tilde{n} \beta; \\ \bar{w}(\alpha, \beta) &= 12 \left(\frac{1 - v_1 v_2}{\mathcal{G} - v_2} \right) \left(\frac{R}{h} \right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta_m \theta_n}{L_{mn}} w_{mn} \sin \chi_m \alpha \cos \tilde{n} \beta; \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\bar{T}_1(\alpha, \beta) = \frac{12(1 - v_1 v_2)}{\mathcal{G} - v_2} \left(\frac{R}{h} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta_m \theta_n}{L_{mn}} t_{1mn} \sin \chi_m \alpha \cos \tilde{n} \beta - \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{G} - v_2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m \theta_n \sin \chi_m \alpha \cos \tilde{n} \beta;$$

$$\bar{T}_2(\alpha, \beta) = \frac{12\lambda(1 - v_1 v_2)}{\mathcal{G} - v_2} \left(\frac{R}{h} \right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta_m \theta_n}{L_{mn}} t_{2mn} \sin \chi_m \alpha \cos \tilde{n} \beta - \frac{\lambda}{\mathcal{G} - v_2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m \theta_n \sin \chi_m \alpha \cos \tilde{n} \beta;$$

$$\bar{G}_i(\alpha, \beta) = \frac{6}{\mathcal{G} - v_2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta_m \theta_n}{L_{mn}} g_{imn} \sin \chi_m \alpha \cos \tilde{n} \beta;$$

$$u(\alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha_{1t} RT_0^*} \bar{u}(\alpha, \beta); \quad w(\alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha_{1t} RT_0^*} \bar{w}(\alpha, \beta); \quad T_1(\alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha_{1t} E_1 h T_0^*} \bar{T}_1(\alpha, \beta);$$

$$T_2(\alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha_{1t} E_1 h T_0^*} \bar{T}_2(\alpha, \beta); \quad G_i(\alpha, \beta) = \frac{6}{\alpha_{1t} E_1 T_0^* h^2} \bar{G}_i(\alpha, \beta).$$

Здесь приняты следующие обозначения для коэффициентов

$u_{mn}, w_{mn}, t_{1mn}, s_{1mn}, g_{2mn}$:

$$\begin{aligned} u_{mn} &= -\lambda(\mathcal{G} - v_2) \chi_m^3 + \frac{c^2}{\mu_1} \left\{ -\mathcal{G} \mu_1 \chi_m^7 - \left[\mathcal{G}(\lambda + 2v_2 \mu_1 + 4\mu_1^2) - \lambda v_2 \right] \chi_m^5 \tilde{n}^2 \right. \\ &\quad \left. + \lambda \left[2(v_2 + \mu_1)(v_2 + 2\mu_1) - \mathcal{G}(5\mu_1 + 2v_2) \right] \chi_m^3 \tilde{n}^4 - \right. \\ &\quad \left. - \lambda \left[2\mathcal{G}(v_2 + 4\mu_1) - 2v_2^2 - 7v_2 \mu_1 - 4\mu_1^2 \right] \chi_m^3 \tilde{n}^2 + \lambda^2 (v_2 + \mu_1 - \mathcal{G}) \chi_m \tilde{n}^2 (\tilde{n}^2 - 1)^2 \right\}; \\ w_{mn} &= (v_2 \mathcal{G} - \lambda) \chi_m^4 - \lambda(\mathcal{G} - v_2) \chi_m^2 \tilde{n}^2 - \frac{c^2}{\mu_1} \left\{ -\mathcal{G} \mu_1 \chi_m^6 - \left[\mathcal{G}(\lambda - v_2^2 + 4v_2 \mu_1 - 4\mu_1^2) + 2\lambda \mu_1 \right] \chi_m^4 \tilde{n}^2 - \right. \\ &\quad \left. - \lambda \mu_1 \left[2(v_1 + 2\mu_1) - \mathcal{G} \right] \chi_m^2 \tilde{n}^4 \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{1mm} = & \left\{ \lambda \mathcal{G} \chi_m^4 + \frac{c^2}{1-v_1 v_2} \left\langle \mathcal{G} \chi_m^8 + \left[\frac{\mathcal{G}(\lambda - v_2^2)}{\mu_1} + \mathcal{G} v_2 + 4\mathcal{G} \mu_1 - \lambda \right] \chi_m^6 \tilde{n}^2 + \right. \right. \\
& + \left[\frac{\mathcal{G}(\lambda - v_2^2)}{\mu_1} (5\mu_1 + 2v_2) - (\lambda + v_2 \mathcal{G})(v_2 + 4\mu_1) \right] \chi_m^4 \tilde{n}^4 - \\
& - \left[\frac{\lambda}{\mu_1} (\mu_1 - \mathcal{G})(\lambda - v_2^2) + \lambda v_2 (\mathcal{G} - v_2 - 4\mu_1) \right] \chi_m^2 \tilde{n}^6 + v_2 \lambda^2 \tilde{n}^4 (\tilde{n}^2 - 1)^2 - 2v_2 \mathcal{G} \chi_m^6 - \\
& - \left. \left[\frac{\mathcal{G}(\lambda - v_2^2)}{\mu_1} (7\mu_1 + 2v_2) - 2(2\mu_1 \lambda + 2\mu_1 v_2 \mathcal{G} + v_2 \lambda) \right] \chi_m^4 \tilde{n}^2 + \right. \\
& \left. + 2\lambda \left[(\mu_1 - \mathcal{G}) \left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} - v_2 \right) - 3v_2 \mu_1 \right] \chi_m^2 \tilde{n}^4 - \lambda^2 \left(\frac{v_2 - \mathcal{G}}{\mu_1} + 1 \right) \lambda_m^2 \tilde{n}^2 \right\rangle \right\}; \tag{4.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{2mm} = & \left\{ \lambda \chi_m^4 + \frac{c^2}{1-v_1 v_2} \left\langle v_1 \mathcal{G} \chi_m^8 + \left[\mathcal{G}(1 - 2v_1 v_2 - 4\mu_1 v_1) - \lambda \left[\frac{1 - v_1 v_2}{\mu_1} - v_1 \right] \right] \chi_m^6 \tilde{n}^2 - \right. \right. \\
& - \left[(5 + \frac{v_2}{\mu_1})(\mathcal{G} v_2 - \lambda + v_2^2) + 4(v_2 \mu_1 + \mu_1 \mathcal{G} - v_2 \mathcal{G}) + \frac{\lambda v_2}{\mu_1} (v_1 v_2 - v_1 \mathcal{G} + v_1 \mu_1 - 1) \right] \chi_m^4 \tilde{n}^4 - \\
& - \lambda \left[\mathcal{G} - v_2 - 4\mu_1 - \frac{\lambda}{\mu_1} (1 - v_1 v_2) \right] \chi_m^2 \tilde{n}^6 + \lambda^2 \tilde{n}^4 (\tilde{n}^2 - 1)^2 - (v_2 + \mathcal{G}) \chi_m^6 - \\
& - \left[4\mu_1 (\mathcal{G} + v_2) - 2(1 - v_1 v_2) \frac{\lambda v_2}{\mu_1} - \lambda(5 - 7v_1 v_2) \right] \chi_m^4 \tilde{n}^2 + \\
& \left. + \lambda \left[v_2 - 8\mu_1 + \mathcal{G} - 2 \frac{\lambda}{\mu_1} (1 - v_1 v_2) \right] \chi_m^2 \tilde{n}^4 - \frac{\lambda v_2}{\mu_1} (v_2 + \mu_1 - \mathcal{G}) \lambda_m^2 \tilde{n}^2 \right\rangle \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{1mm} = & \left\{ \frac{\lambda - v_2 \mathcal{G}}{\mu_1} \chi_m^7 \tilde{n} + \left[4(\lambda - \mathcal{G} v_2) + \frac{1}{\mu_1} (\lambda v_2 - 2\mathcal{G} v_2^2 + \mathcal{G} \lambda) \right] \chi_m^5 \tilde{n}^3 - \right. \\
& - \lambda \left[4(v_2 - \mathcal{G}) - \frac{\lambda + \mathcal{G} v_2 - 2v_2^2}{\mu_1} \right] \chi_m^3 \tilde{n}^5 - \frac{\lambda^2}{\mu_1} (v_2 - \mathcal{G}) \chi_m \tilde{n}^3 (\tilde{n}^2 - 1)^2 + \\
& \left. + \left[\mathcal{G} \left(\frac{\lambda + v_2^2}{\mu_1} + 2v_2 \right) - 2 \frac{\lambda}{\mu_1} (v_2 + \mu_1) \right] \chi_m^5 \tilde{n} - \lambda \left[6(\mathcal{G} - v_2) + \frac{2(\lambda - v_2^2)}{\mu_1} \right] \chi_m^3 \tilde{n}^3 \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{1mm} = & -(\lambda - v_2 \mathcal{G}) \chi_m^6 - \mathcal{G}(\lambda - v_2^2) \chi_m^4 \tilde{n}^2 - \lambda v_2 (\mathcal{G} - v_2) \chi_m^2 (\tilde{n}^4 - \tilde{n}^2) - \lambda (\mathcal{G} - v_2) \chi_m^4 + \\
& + c^2 \left\langle [3\lambda - 4\mathcal{G}(v_2 + \mu_1)] \chi_m^6 \tilde{n}^2 + \left[8\lambda \mu_1 + 5\lambda v_2 - 6\lambda \mathcal{G} + 2v_2^2 \mathcal{G} - (\lambda - v_2^2) \frac{v_2 \mathcal{G}}{\mu_1} \right] \chi_m^4 \tilde{n}^4 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda \left[\lambda - \frac{\vartheta}{\mu_1} (\lambda - \nu_2^2) \right] \chi_m^2 \tilde{n}^6 - \nu_2 \lambda^2 \tilde{n}^4 (\tilde{n}^2 - 1)^2 \Bigg\}; \\
g_{2mm} = & -\nu_2 (\lambda - \nu_2 \vartheta) \chi_m^6 - \lambda (\lambda - \nu_2^2) \chi_m^4 \tilde{n}^2 - \lambda^2 (\vartheta - \nu_2) \chi_m^2 (\tilde{n}^4 - \tilde{n}^2) - \lambda (\nu_2 \vartheta - \lambda) \chi_m^4 + \\
& + \lambda c^2 \left\langle \nu_1 \vartheta \chi_m^8 + \left[\vartheta (\lambda - \nu_2^2) \frac{\nu_1}{\mu_1} - 4(\nu_2 + \mu_1) + \vartheta + 2\nu_2 \right] \chi_m^6 \tilde{n}^2 + \right. \\
& \left. + \left[\frac{\vartheta (\lambda - \nu_2^2)}{\mu_1} - \vartheta (5\nu_2 + 4\mu_1) + 2(\lambda + \nu_2^2 + 2\mu_1 \nu_2) \right] \chi_m^4 \tilde{n}^4 + \lambda [2(\nu_2 + 2\mu_1) - \vartheta] \chi_m^2 \tilde{n}^6 \right\rangle.
\end{aligned}$$

Зависимость продольного и кольцевого усилия и продольного и кольцевого изгибающего момента от параметра ортотропии представлена на рис.4.6-рис.4.7. В качестве перегретой принята квадратная область $\alpha_0 = \beta_0 = 0.125$; геометрические оболочки $R/h = 100$, $\alpha_1 = L/R = 0.5$ и $\alpha_{1r} = \alpha_{2r} = 10 \cdot 10^{-6} 1/^\circ C$. Как видно из графиков, имеет место сильная зависимость и усилия, и изгибающего момента, а следовательно, и напряжений от λ .

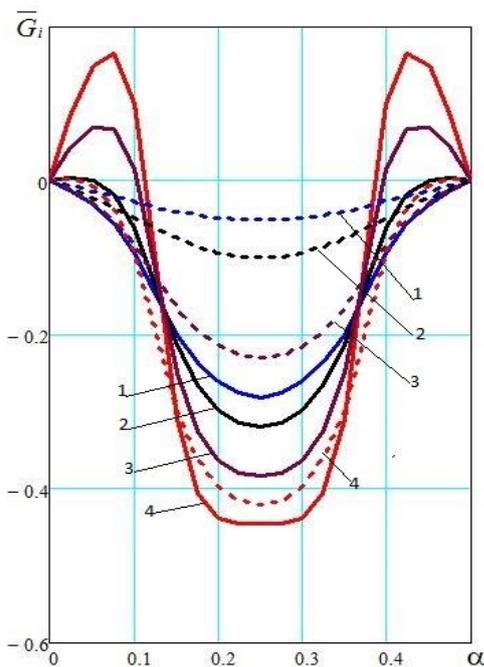


Рис.4.6. Изменение продольного (——) и кольцевого (_ _ _ _) изгибающего момента вдоль нулевой образующей при различных значениях параметра $\lambda = 0.1, 0.2, 0.5, 1$ (соответственно, кривые 1,2,3,4).

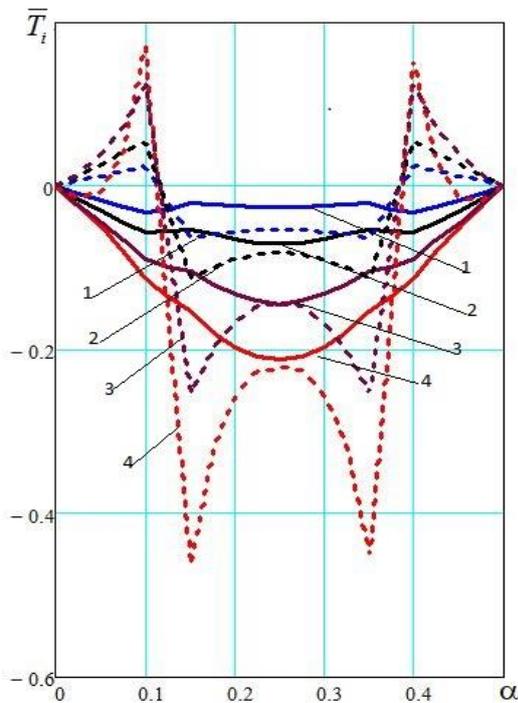


Рис.4.7. Изменение продольного (————) и кольцевого (_ _ _ _) усилия вдоль нулевой образующей при значениях параметра $\lambda = 0.1, 0.2, 0.5, 1$ (соответственно, кривые 1,2,3,4).

В частном случае, изотропный материал полученные результаты по (4.18-4.19) полностью совпадает с результатами, предоставленными в работе Нерубайло Б.В [46].

4.4.2. Упрощение решения в 4.4.1 применительно к приближенным уравнениям: типа Власова - Доннелла, полубезмоментной теории (основное состояние), краевого эффекта

Далее, рассмотрим упрощение полученного решения, к котором приводит использование вместо уравнений общей теории оболочек (4.17-4.19) уравнений моментной технической, полубезмоментной теории оболочек, краевого эффекта. При этом вид решения (4.18) остается неизменным, а выражения $w_{mn}, t_{imn}, g_{imn}, L_{mn}$ упростятся следующим образом

а) Уравнений типа Власова-Доннелла

$$L_{m,n} = \chi_m^8 + a_{6,2}\chi_m^6 \tilde{n}^2 + a_{4,4}\chi_m^4 \tilde{n}^4 + a_{2,6}\chi_m^2 \tilde{n}^6 + \lambda^2 \tilde{n}^8 + \lambda \frac{1-\nu_1\nu_2}{c^2} \chi_m^4;$$

$$u_{mn} = -\lambda(\vartheta - \nu_2)\chi_m^3 + \frac{c^2}{\mu_1} \left\{ -\vartheta\mu_1\chi_m^7 - \left[\vartheta(\lambda + 2\nu_2\mu_1 + 4\mu_1^2) - \lambda\nu_2 \right] \chi_m^5 \tilde{n}^2 - \right. \\ \left. + \lambda \left[2(\nu_2 + \mu_1)(\nu_2 + 2\mu_1) - \vartheta(5\mu_1 + 2\nu_2) \right] \chi_m^3 \tilde{n}^4 + \lambda^2(\nu_2 + \mu_1 - \vartheta)\chi_m \tilde{n}^6 \right\};$$

$$w_{mn} = (v_2 \mathcal{G} - \lambda) \chi_m^4 - \lambda (\mathcal{G} - v_2) \chi_m^2 \tilde{n}^2 - \frac{c^2}{\mu_1} \left\{ -\mathcal{G} \mu_1 \chi_m^6 - \left[\mathcal{G} (\lambda - v_2^2 + 4v_2 \mu_1 - 4\mu_1^2) + 2\lambda \mu_1 \right] \chi_m^4 \tilde{n}^2 - \lambda \mu_1 [2(v_1 + 2\mu_1) - \mathcal{G}] \chi_m^2 \tilde{n}^4 \right\}; \quad (4.20)$$

$$t_{1mn} = \left\{ \lambda \mathcal{G} \chi_m^4 + \frac{c^2}{1 - v_1 v_2} \left\langle \mathcal{G} \chi_m^8 + \left[\frac{\mathcal{G} (\lambda - v_2^2)}{\mu_1} + \mathcal{G} v_2 + 4\mathcal{G} \mu_1 - \lambda \right] \chi_m^6 \tilde{n}^2 + \left[\frac{\mathcal{G} (\lambda - v_2^2)}{\mu_1} (5\mu_1 + 2v_2) - (\lambda + v_2 \mathcal{G}) (v_2 + 4\mu_1) \right] \chi_m^4 \tilde{n}^4 - \left[\frac{\lambda}{\mu_1} (\mu_1 - \mathcal{G}) (\lambda - v_2^2) + \lambda v_2 (\mathcal{G} - v_2 - 4\mu_1) \right] \chi_m^2 \tilde{n}^6 + v_2 \lambda^2 \tilde{n}^8 \right\rangle \right\}$$

$$t_{2mn} = \lambda \chi_m^4 + \frac{c^2}{1 - v_1 v_2} \left\langle v_1 \mathcal{G} \chi_m^8 + \left[\mathcal{G} (1 - 2v_1 v_2 - 4\mu_1 v_1) - \lambda \left[\frac{1 - v_1 v_2}{\mu_1} - v_1 \right] \right] \chi_m^6 \tilde{n}^2 + \left[(5 + \frac{v_2}{\mu_1}) (\mathcal{G} v_2 - \lambda + v_2^2) + 4(v_2 \mu_1 + \mu_1 \mathcal{G} - v_2 \mathcal{G}) + \frac{\lambda v_2}{\mu_1} (v_1 v_2 - v_1 \mathcal{G} + v_1 \mu_1 - 1) \right] \chi_m^4 \tilde{n}^4 - \lambda \left[\mathcal{G} - v_2 - 4\mu_1 - \frac{\lambda}{\mu_1} (1 - v_1 v_2) \right] \chi_m^2 \tilde{n}^6 + \lambda^2 \tilde{n}^8 \right\rangle;$$

$$s_{1mn} = \left\{ \frac{\lambda - v_2 \mathcal{G}}{\mu_1} \chi_m^7 \tilde{n} + \left[4(\lambda - \mathcal{G} v_2) + \frac{1}{\mu_1} (\lambda v_2 - 2\mathcal{G} v_2^2 + \mathcal{G} \lambda) \right] \chi_m^5 \tilde{n}^3 - \lambda \left[4(v_2 - \mathcal{G}) - \frac{\lambda + \mathcal{G} v_2 - 2v_2^2}{\mu_1} \right] \chi_m^3 \tilde{n}^5 - \frac{\lambda^2}{\mu_1} (v_2 - \mathcal{G}) \chi_m \tilde{n}^7 \right\};$$

$$g_{1mn} = -(\lambda - v_2 \mathcal{G}) \chi_m^6 - \mathcal{G} (\lambda - v_2^2) \chi_m^4 \tilde{n}^2 - \lambda v_2 (\mathcal{G} - v_2) \chi_m^2 \tilde{n}^4 + c^2 \left\langle [3\lambda - 4\mathcal{G} (v_2 + \mu_1)] \chi_m^6 \tilde{n}^2 + \left[8\lambda \mu_1 + 5\lambda v_2 - 6\lambda \mathcal{G} + 2v_2^2 \mathcal{G} - (\lambda - v_2^2) \frac{v_2 \mathcal{G}}{\mu_1} \right] \chi_m^4 \tilde{n}^4 + \lambda \left[\lambda - \frac{\mathcal{G}}{\mu_1} (\lambda - v_2^2) \right] \chi_m^2 \tilde{n}^6 - v_2 \lambda^2 \tilde{n}^8 \right\rangle;$$

$$g_{2mn} = -v_1 (\lambda - v_2 \mathcal{G}) \chi_m^6 - (\lambda - v_2^2) \chi_m^4 \tilde{n}^2 - \lambda (\mathcal{G} - v_2) \chi_m^2 (\tilde{n}^4 - \tilde{n}^2) - (v_2 \mathcal{G} - \lambda) \chi_m^4 + c^2 \left\langle v_1 \mathcal{G} \chi_m^8 + \left[\mathcal{G} (\lambda - v_2^2) \frac{v_1}{\mu_1} - 4(v_2 + \mu_1) + \mathcal{G} + 2v_2 \right] \chi_m^6 \tilde{n}^2 + \left[\frac{\mathcal{G} (\lambda - v_2^2)}{\mu_1} - \mathcal{G} (5v_2 + 4\mu_1) + 2(\lambda + v_2^2 + 2\mu_1 v_2) \right] \chi_m^4 \tilde{n}^4 + \lambda [2(v_2 + 2\mu_1) - \mathcal{G}] \chi_m^2 \tilde{n}^6 \right\rangle.$$

б) Основное состояние - аналог полубезмоментной теории

$$L_{m,n} = \lambda^2 \tilde{n}^4 (\tilde{n}^2 - 1)^2 + \lambda \frac{1 - v_1 v_2}{c^2} \chi_m^4;$$

$$u_{mn} = \lambda(\vartheta - v_2)(-\chi_m^3); \quad w_{mn} = -\lambda(\vartheta - v_2)\chi_m^2 \tilde{n}^2; \quad \text{и (4.21)}$$

$$t_{1mn} = \lambda \vartheta \chi_m^4 + \frac{c^2}{1 - v_1 v_2} v_2 \lambda^2 \tilde{n}^4 (\tilde{n}^2 - 1)^2; \quad t_{2mn} = \lambda \vartheta \chi_m^4 + \frac{c^2}{1 - v_1 v_2} \lambda^2 \tilde{n}^4 (\tilde{n}^2 - 1)^2;$$

$$s_{1mn} = -\frac{\lambda^2}{\mu_1} (v_2 - \vartheta) \chi_m \tilde{n}^3 (\tilde{n}^2 - 1)^2; \quad g_{2mn} = -\lambda(\vartheta - v_2) \chi_m^2 (\tilde{n}^4 - \tilde{n}^2); \quad g_{1mn} = v_2 g_{2mn}.$$

в) Краевой эффект

$$L_{m,n} = \chi_m^8 + \lambda \frac{1 - v_1 v_2}{c^2} \chi_m^4; \quad (4.22)$$

$$t_{2mn} = \lambda \chi_m^4; \quad g_{1mn} = -(\lambda - v_2 \vartheta) \chi_m^6; \quad g_{2mn} = -v_1 (\lambda - v_2 \vartheta) \chi_m^6.$$

4.4.3 Решение термоупругой задачи перепада по толщине по ОТО

В рассматриваемом случае температурного воздействия на оболочку разложение для температурного поля $t^{**}(\alpha, \beta)$ запишем в виде:

$$t^{**}(\alpha, \beta) = T_0^{**} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m \theta_n \sin \chi_m \alpha \cos \tilde{n} \beta \quad (4.23)$$

Разрешающая функция также представим рядом, позволяющим удовлетворить граничным условиям (4.2):

$$\Phi^{**}(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_{mn}^{**} \sin \chi_m \alpha \cos \tilde{n} \beta; \quad (4.24)$$

Постановка выражение (4.23), (4.24) в разрешающее уравнение (4.2) дает возможность найти значение коэффициента $\Phi^{**}(\alpha, \beta)$, а затем записать разрешающую функцию:

$$\Phi^{**}(\alpha, \beta) = -\frac{\alpha_{2t} + v_1 \alpha_{1t}}{6c^2} h T^{**} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta_m \theta_n}{L_{mn}} \sin \chi_m \alpha \cos \tilde{n} \beta; \quad (4.25)$$

Здесь приняты такие же обозначения, как и в предыдущем разделе, где рассмотрен случай воздействия температуры, постоянной по толщине оболочки.

В результате постановки разрешающей функции (4.25) в выражении соотношений перемещении и силовых факторов с разрешающей функций [68] получим формулы для определения искомых факторов, записанные в виде двойных тригонометрических рядов:

$$\begin{aligned}
\hat{u}(\alpha, \beta) &= -2 \left(\frac{1 - v_1 v_2}{\vartheta - v_2} \right) \frac{R}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta_m \theta_n}{L_{mn}} u_{mn} \cos \chi_m \alpha \cos \tilde{n} \beta; \\
w(\alpha, \beta) &= -2 \left(\frac{1 - v_1 v_2}{\vartheta - v_2} \right) \frac{R}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta_m \theta_n}{L_{mn}} w_{mn} \sin \chi_m \alpha \cos \tilde{n} \beta; \\
T_1(\alpha, \beta) &= 2 \frac{(1 - v_1 v_2)}{\vartheta - v_2} \frac{R}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta_m \theta_n}{L_{mn}} t_{1mn}^{**} \sin \chi_m \alpha \cos \tilde{n} \beta; \\
T_2(\alpha, \beta) &= 2 \frac{\lambda(1 - v_1 v_2)}{\vartheta - v_2} \frac{R}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta_m \theta_n}{L_{mn}} t_{2mn}^{**} \sin \chi_m \alpha \cos \tilde{n} \beta; \\
G_1(\alpha, \beta) &= \frac{1}{\vartheta - v_2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta_m \theta_n}{L_{mn}} g_{1mn}^{**} \sin \chi_m \alpha \cos \tilde{n} \beta - \frac{\vartheta}{\vartheta - v_2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m \theta_n \sin \chi_m \alpha \cos \tilde{n} \beta; \\
G_2(\alpha, \beta) &= \frac{\lambda}{\vartheta - v_2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta_m \theta_n}{L_{mn}} g_{2mn}^{**} \sin \chi_m \alpha \cos \tilde{n} \beta - \frac{\lambda}{\vartheta - v_2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m \theta_n \sin \chi_m \alpha \cos \tilde{n} \beta. \\
u(\alpha, \beta) &= \frac{1}{\alpha_{1r} h T_0^{**}} \hat{u}(\alpha, \beta); \quad w(\alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha_{1r} h T_0^{**}} w(\alpha, \beta); \\
T_i(\alpha, \beta) &= \frac{1}{\alpha_{1r} E_1 h T_0^{**}} T_i(\alpha, \beta); \quad G_i(\alpha, \beta) = \frac{6}{\alpha_{1r} E_1 T_0^{**} h^2} G_i(\alpha, \beta); \quad i = 1, 2.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Здесь приняты следующие обозначения для коэффициентов

$u_{mn}, w_{mn}, t_{1mn}, s_{1mn}, g_{2mn}$:

$$\begin{aligned}
u_{mn} &= \vartheta v_2 \chi_m^5 - \lambda(\vartheta - v_2) \chi_m^3 \tilde{n}^2 - \lambda^2 \chi_m \tilde{n}^2 (\tilde{n}^2 - 1) - \\
&- c^2 \left\{ -\vartheta \chi_m^7 + \frac{1}{\mu_1} \left[(v_2 + 2\mu_1)(\lambda \vartheta + 1) + \vartheta(v_2 + 2\mu_1) \right] \chi_m^5 \tilde{n}^2 + \right. \\
&\left. + \lambda \left(\frac{\lambda + v_2^2}{\mu_1} + 2v_2 - \vartheta \right) \chi_m^3 \tilde{n}^4 - \frac{\lambda^2 v_2}{\mu_1} \chi_m \tilde{n}^6 \right\}; \\
w_{mn} &= -\vartheta \chi_m^6 - \left[\vartheta \left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} - 2v_2 \right) + \lambda \right] \chi_m^4 \tilde{n}^2 - \left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} + \vartheta - 2v_2 \right) \chi_m^2 \tilde{n}^4 + \\
&+ \lambda^2 \tilde{n}^4 (1 - \tilde{n}^2) + \lambda \left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} - v_2 \right) \chi_m^2 \tilde{n}^2; \\
t_{1mn}^{**} &= \lambda \left[-\vartheta \chi_m^4 \tilde{n}^2 - \lambda \chi_m^2 (\tilde{n}^4 - \tilde{n}^2) \right] + \frac{c^2}{1 - v_1 v_2} \left\{ \left[\lambda + 2\lambda \vartheta + 4\mu_1 \vartheta - \frac{\lambda \vartheta}{\mu_1} (1 - v_2) \right] \chi_m^6 \tilde{n}^2 + \right. \\
&\left. + (\lambda v_2 - 2\lambda \vartheta + 2v_2^2 \vartheta + 4v_2 \vartheta \mu_1) \chi_m^4 \tilde{n}^4 - \lambda^2 v_2 \tilde{n}^8 - \lambda^2 \chi_m^2 \tilde{n}^6 \right\};
\end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}
t_{2mn}^{**} &= \left(-\vartheta \chi_m^6 - \lambda \chi_m^4 \tilde{n}^2 \right) - \\
&\quad - \frac{c^2}{1 - v_1 v_2} \left\{ -\vartheta v_1 \chi_m^8 + \left[4v_1 \vartheta (v_2 + \mu_1) - 2v_2 (1 + \vartheta) - 3\vartheta + \frac{\lambda - v_2^2 - v_2^2 \vartheta (1 - v_1)}{\mu_1} \right] \chi_m^6 \tilde{n}^2 \right. \\
&\quad \left. + \left[4(\lambda - \mu_1 \vartheta) + v_2 (\vartheta - 2v_2) + (v_2 - \vartheta) \frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} \right] \chi_m^4 \tilde{n}^4 + \lambda^2 \tilde{n}^6 + \lambda (2v_2 - \vartheta) \chi_m^2 \tilde{n}^6 \right\}; \\
g_{1mn}^{**} &= \vartheta \chi_m^8 + \left(\vartheta \frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} + \lambda - \vartheta v_2 \right) \chi_m^6 \tilde{n}^2 + \left[\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} (\mu_1 \vartheta + \lambda + v_2 \vartheta) - v_2 (\lambda + \vartheta v_2) \right] \chi_m^4 \tilde{n}^4 + \\
&\quad + \lambda \left[\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} (v_2 + \mu_1) + v_2 (\vartheta - v_2) \right] \chi_m^2 \tilde{n}^6 + v^2 \lambda^2 \tilde{n}^4 (\tilde{n}^2 - 1)^2 - \vartheta v_2 \chi_m^6 - \\
&\quad - \left[\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} (\lambda + v_2 \vartheta) - \vartheta (\lambda + v_2^2) \right] \chi_m^4 \tilde{n}^2 + \frac{\lambda}{\mu_1} (v_2 \lambda - \mu_1 \lambda - v_2^3) \chi_m^2 \tilde{n}^2; \\
g_{2mn}^{**} &= v_1 \vartheta \chi_m^8 + \left[\vartheta + v_1 (\lambda + \vartheta v_1) + \frac{\vartheta (v_2 + \mu_1) - v_1 \vartheta (v_2 + \mu_1)^2}{\mu_1} \right] \chi_m^6 \tilde{n}^2 + \\
&\quad + \left[(\vartheta - v_2) \left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} - 2v_2 \right) + \lambda (1 + v_1 \vartheta) \right] \chi_m^4 \tilde{n}^4 + \\
&\quad + \frac{\lambda}{\mu_1} \left[\lambda (1 + v_1 \mu_1) + \mu_1 (\vartheta + \mu_1) - (v_2 + \mu_1)^2 \right] \chi_m^2 \tilde{n}^6 + \lambda^2 \tilde{n}^4 (\tilde{n}^2 - 1)^2 - \\
&\quad - \left[\lambda - \vartheta v_2 + \left(\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} - v_2 \right) (v_2 + \vartheta) \right] \chi_m^4 \tilde{n}^2 - \\
&\quad - \lambda \left[2 \frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} - 2v_2 + \vartheta \right] \chi_m^4 \tilde{n}^2 + \lambda \left[\frac{\lambda - v_2^2}{\mu_1} - v_2 + \vartheta \right] \chi_m^2 \tilde{n}^2;
\end{aligned}$$

Суммирование ряды для продольного усилия начинается с $n=1$ а для кольцевого усилия с $n=0$. В соответствии с граничными условиями (4.9) оболочка считается не закрепленной в продольном направлении, поэтому появление в ней продольного усилия вызвано лишь деформацией контура оболочки.

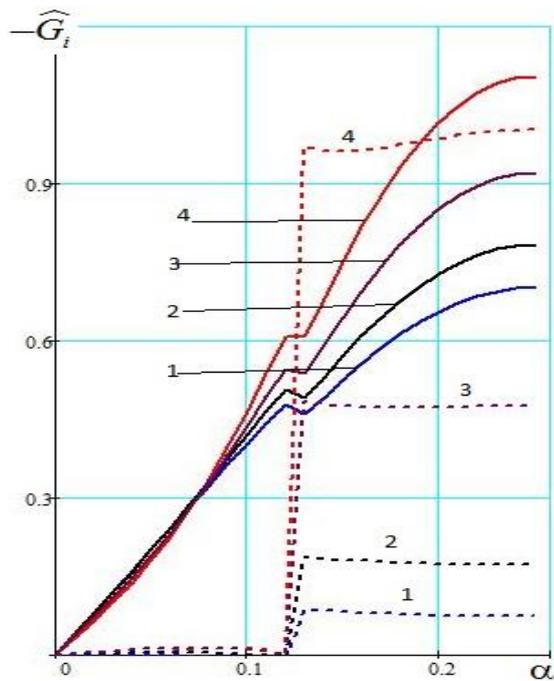


Рис.4.8. Изменение продольного (————) и кольцевого (-----) изгибающего момента вдоль нулевой образующей при различных параметрах $\lambda = 0.1, 0.2, 0.5, 1$, (соответственно кривые 1,2,3,4);
 $\alpha_1 = 0.5$; $\xi = 0.25$; $\alpha_0 = \beta_0 = 0.125$;
 $R / h = 100$, $\alpha_1 = L / R = 0.5$; $k = 1$
 $\alpha_{1r} = \alpha_{2r} = 10 \cdot 10^{-6} 1/^\circ C$.

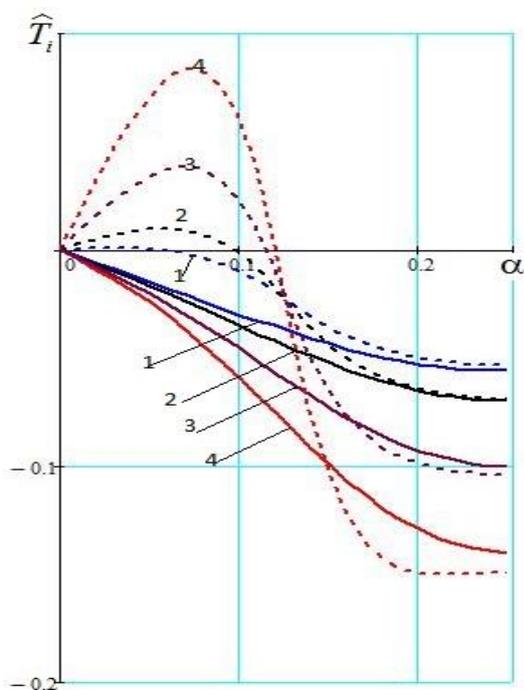


Рис.4.9. Изменение продольного (————) и кольцевого (-----) усилия вдоль нулевой образующей при различных параметрах $\lambda = 0.1, 0.2, 0.5, 1$, (соответственно кривые 1,2,3,4);
 $\alpha_1 = 0.5$; $\xi = 0.25$; $\alpha_0 = \beta_0 = 0.125$;
 $R / h = 100$; $\alpha_1 = L / R = 0.5$; $k = 1$
 $\alpha_{1r} = \alpha_{2r} = 10 \cdot 10^{-6} 1/^\circ C$.

4.5. Влияние вида краевых условий и ортотропии физико-механических свойств на напряженно-деформированное состояние оболочек при локализованных вдоль контура температурных полях

Возникающее в какой-то момент времени в оболочке температурное поле $T^*(\alpha, \beta)$ представим в виде следующего разложения:

$$T^*(\alpha, \beta) = T_0 \theta(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos n\beta. \quad (4.28)$$

Представим разрешающую функцию в виде ряда

$$\Phi^*(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(\alpha) \cos n\beta. \quad (4.29)$$

Если за основу принять уравнения общей теории оболочек, то для функции $\Phi_n(\alpha)$ справедливо обыкновенное дифференциальное уравнение (4.10), для амплитудных значений перемещений, усилий, моментов имеют место зависимости (4.11), а перемещения, усилия и моменты записываются в виде следующих рядов:

$$\begin{aligned} u(\alpha, \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} U_n(\alpha) \cos n\beta; & v(\alpha, \beta) &= \sum_{n=1}^{\infty} V_n(\alpha) \sin n\beta; \\ w(\alpha, \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} W_n(\alpha) \cos n\beta; & T_i(\alpha, \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} T_{in}(\alpha) \cos n\beta; \\ S_i(\alpha, \beta) &= \sum_{n=1}^{\infty} S_{in}(\alpha) \sin n\beta; & G_i(\alpha, \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} G_{in}(\alpha) \cos n\beta, \quad (i=1;2) \end{aligned} \quad (4.30)$$

Здесь $i=1$ для факторов, действующих в поперечном сечении, и $i=2$ для факторов продольного сечения.

НДС оболочки строим на основе метода синтеза напряжённого состояния.

Разрешающую функцию находим приближенно:

$$\Phi_n(\alpha) \approx \begin{cases} \Phi_n^o(\alpha) + \Phi^k(\alpha) & (n \leq \tilde{n}) \\ \Phi_n^u(\alpha) & (n > \tilde{n}) \end{cases}; \quad (4.31)$$

(индексы «о», «к», «u» относятся к основному состоянию, краевому эффекту и изгибному состоянию, соответственно).

Таким образом, для решения поставленной задачи необходимо найти функции $\Phi_n^o(\alpha)$, $\Phi^k(\alpha)$, $\Phi_n^u(\alpha)$ и соответствующие амплитудные значения исходных перемещений, усилий, моментов, а затем, используя разложения (4.30), получить окончательные выражения в виде одинарных рядов для всех факторов, определяющих НДС оболочки.

Основное состояние

Рассмотрим основное состояние, описываемое уравнениям полубезмоментной теории:

$$\lambda^2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \beta^4} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} + 1 \right)^2 + \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{c^2} \lambda \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} = \frac{\alpha_{2t} + \nu_1 \alpha_{1t}}{c^2} RT^*(\alpha, \beta), \quad (4.32)$$

Разрешающее дифференциальное уравнение при этом записывается в виде

$$\left(\frac{d^4}{d\alpha^4} + 4\mu_n^4\right)\bar{\Phi}_n(\alpha) = \frac{\alpha_{2l} + \nu_1\alpha_{1l}}{\lambda(1-\nu_1\nu_2)} RT_0 \theta(\alpha)\bar{\theta}_n; \quad (4.33)$$

$$4\mu_n^4 = \frac{c^2}{1-\nu_1\nu_2} \lambda n^4 (n^2 - 1)^2; n \geq 2.$$

Амплитудные значения перемещений, усилий и моментов связаны с разрешающей функцией $\Phi_n(\alpha)$ посредством следующих дифференциальных зависимостей [68]:

$$U_n(\alpha) = \lambda(\vartheta - \nu_2)\bar{\Phi}_n''''(\alpha); \quad V_n(\alpha) = \lambda(\vartheta - \nu_2)n\bar{\Phi}_n'''(\alpha); \quad W_n(\alpha) = \lambda(\vartheta - \nu_2)n^2\bar{\Phi}_n''(\alpha);$$

$$T_{1n}(\alpha) = \frac{E_1 h}{R} \left[\lambda \vartheta \bar{\Phi}_n''''(\alpha) + \frac{c^2 \nu_2 \lambda^2}{1 - \nu_1 \nu_2} n^4 (n^2 - 1)^2 \bar{\Phi}_n(\alpha) \right], \quad (4.34)$$

$$S_n(\alpha) = -\frac{Gh}{R} c^2 \frac{\lambda^2}{\mu_1} (\vartheta - \nu_2) n^3 (n^2 - 1)^2 \bar{\Phi}_n'(\alpha); \quad G_{2n}(\alpha) = -\frac{D_2}{R^2} \lambda (\vartheta - \nu_2) n^2 (n^2 - 1) \bar{\Phi}_n''(\alpha).$$

При использовании метода начальных параметров решение (4.33), с учетом (4.34) представлено в табл.4.2.

Частное решение соответствующие температуры, произвольной распределенной на участке $[\xi_1, \xi_2]$ записано в предпоследнем столбце табл.4.2. А частное решение для кусочно-постоянной температуры постоянной по толщине вдоль образующей записано в последние столбце табл.4.2.

В качестве пример рассматривается оболочка действующая нагрузка кусочно- постоянная вдоль образующей с условиям жесткого защемления на одном конце, на другом- шарнирного закрепления.

$$u(\alpha, \beta) = V(\alpha, \beta) = 0, \quad \alpha = 0, \quad T_1(\alpha, \beta) = V(\alpha, \beta) = 0, \quad \alpha = \alpha_1.$$

$$\text{Следовательно} \quad \begin{aligned} U_n(\alpha) = V_n(\alpha) = 0, & \quad \alpha = 0, \\ T_{1n}(\alpha) = V_n(\alpha) = 0, & \quad \alpha = \alpha_1. \end{aligned} \quad (4.35)$$

На основании табл.4.2 и краевых условий (4.35) получаем продольное усилие, нормальное перемещение и кольцевой изгибающий момент в виде:

$$T_1(\alpha, \beta) = \sum_{n=2}^{\bar{n}} (K_{T_n}(\alpha)\bar{T}_{10} + K_{T_n}\bar{S}_0 - T) \cos n\beta,$$

$$w(\alpha, \beta) = \frac{R}{E_1 h} \sum_{n=2}^{\bar{n}} (K_{V_n}\bar{T}_{10} + K_{V_n}\bar{S}_0 - V) n \cos n\beta,$$

$$G_2(\alpha, \beta) = \frac{D_2}{R^2} \frac{R}{E_1 h} \sum_{n=2}^{\bar{n}} (K_{V_n}\bar{T}_{10} + K_{V_n}\bar{S}_0 - V) n(n^2 - 1) \cos n\beta, \quad (4.36)$$

Таблица.4.2

	$T_{1n}(0)$	$S_n(0)$	$V_n^*(0)$	$U_n^*(0)$	$\frac{\alpha_{2t} + v_1 \alpha_{1t}}{1 - v_1 v_2} (\vartheta - v_2) \theta_n$	
$T_{1n}(\alpha)$	Φ_2	$-\frac{n}{2\mu_n}(\Phi_1 + \Phi_3)$	$-\frac{2\mu_n^2}{n}\Phi_4$	$\mu_n(\Phi_3 - \Phi_1)$	$\frac{\mu_n}{n} \int_{\xi_1}^{\xi_2} [\Phi_3(\alpha - \xi) - \Phi_1(\alpha - \xi)] \theta(\xi) d\xi - \theta(\alpha)$	$\Phi_2(\alpha) - 1$
$S_n(\alpha)$	$-\frac{\mu_n}{n}(\Phi_3 - \Phi_1)$	Φ_2	$\frac{2\mu_n^3}{n^2}(\Phi_1 + \Phi_3)$	$\frac{2\mu_n^2}{n}\Phi_4$	$\frac{2\mu_n^2}{n} \int_{\xi_1}^{\xi_2} [\Phi_4(\alpha - \xi) \theta(\xi) d\xi$	$-\frac{\mu_n}{n}[\Phi_3(\alpha) - \Phi_1(\alpha)]$
$V_n^*(\alpha)$	$\frac{n}{2\mu_n^2}\Phi_4$	$\frac{n^2}{4\mu_n^3}(\Phi_3 - \Phi_1)$	Φ_2	$\frac{n}{2\mu_n^2}(\Phi_1 + \Phi_3)$	$\frac{1}{2\mu_n} \int_{\xi_1}^{\xi_2} [\Phi_1(\alpha - \xi) + \Phi_3(\alpha - \xi)] \theta(\xi) d\xi$	$\frac{n}{2\mu_n^2}\Phi_4(\alpha)$
$U_n^*(\alpha)$	$\frac{1}{2\mu_n}(\Phi_1 + \Phi_3)$	$-\frac{n}{2\mu_n^2}\Phi_4$	$\frac{\mu_n}{n}(\Phi_3 - \Phi_1)$	Φ_2	$\frac{1}{n} \int_{\xi_1}^{\xi_2} [\Phi_2(\alpha - \xi) \theta(\xi) d\xi$	$\frac{1}{2\mu_n}[\Phi_3(\alpha) + \Phi_1(\alpha)]$

$$V = \frac{n}{2\mu_n^2} \frac{\alpha_{2t} + v_1\alpha_{1t}}{1 - v_1v_2} (\vartheta - v_2) E_1 h T \theta_n \Phi_4, \quad U = \frac{1}{2\mu_n} \frac{\alpha_{2t} + v_1\alpha_{1t}}{1 - v_1v_2} (\vartheta - v_2) E_1 h T \theta_n [\Phi_3(\alpha) + \Phi_1(\alpha)];$$

$$T = \frac{\alpha_{2t} + v_1\alpha_{1t}}{1 - v_1v_2} (\vartheta - v_2) E_1 h T \theta_n (\Phi_2 - 1), \quad S = -\frac{\mu_n}{n} \frac{\alpha_{2t} + v_1\alpha_{1t}}{1 - v_1v_2} (\vartheta - v_2) E_1 h T \theta_n [\Phi_3 - \Phi_1],$$

$$\overline{T}_{10} = \frac{V(\alpha_1)K_{Ts}(\alpha_1) - T_{ph}(\alpha_1)K_{Vs}(\alpha_1)}{K_{Ts}(\alpha_1)K_{Vt}(\alpha_1) - K_{Vs}(\alpha_1)K_{Tt}(\alpha_1)}, \quad \overline{S}_0 = \frac{V(\alpha_1) - \overline{T}_{10}K_{Vt}(\alpha_1)}{K_{Vs}(\alpha_1)}.$$

Для проверки аналитических решений и сравнение с экспериментальными данными были проведены расчёты цилиндрической оболочки с параметрами $L = 1540\text{мм}$, $R = 193\text{мм}$, $h = 1,5\text{мм}$. ,экспериментально исследованной в работе [49] при действии локализованного температурного поля, распределенного по закону, представленному на рис.4.10. Локализация температурного поля достигалась созданием направленного теплового потока от электрического нагревателя мощностью 3кВт на исследуемую зону ограниченных размеров и съёмом тепла вокруг неё.

Для описания функции распределения локализованных температурного поля воспользуемся законом (2.4) по направлению β , а методом слайдов по направлению α . Допустим, что область определения локализованного температурного поля разбита на конечное число отрезков, на каждом из которых сплайн описывается функцией первого порядка $\theta_i(\alpha) = a_i\alpha + b_i$; $i = 1..n$. Тогда частные решения в табл.4.2 найдем таким образом:

$$T(\alpha) = \frac{\mu_n}{n} \int_{\xi_1}^{\xi_2} [\Phi_3(\alpha - \xi) - \Phi_1(\alpha - \xi)] \theta(\xi) d\xi = \frac{\mu_n}{n} \sum_{i=1}^n \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} [\Phi_3(\alpha - \xi) - \Phi_1(\alpha - \xi)] \theta_i(\xi) d\xi$$

$$= \frac{\mu_n}{n} \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{-1}{\mu_n} [a_i\xi + b_i] \Phi_2(\alpha - \xi) - \frac{a_i}{2\mu_n^2} [\Phi_3(\alpha - \xi) + \Phi_1(\alpha - \xi)] \right\rangle \Big|_{\xi_i}^{\xi_{i+1}}$$

$$S(\alpha) = \frac{2\mu_n^2}{n} \int_{\xi_1}^{\xi_2} [\Phi_4(\alpha - \xi) \theta(\xi) d\xi = \frac{2\mu_n^2}{n} \sum_{i=1}^n \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \Phi_4(\alpha - \xi) \theta_i(\xi) d\xi$$

$$= \frac{2\mu_n^2}{n} \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{-1}{2\mu_n} [a_i\xi + b_i] [\Phi_1(\alpha - \xi) - \Phi_3(\alpha - \xi)] - \frac{a_i}{2\mu_n^2} \Phi_2(\alpha - \xi) \right\rangle \Big|_{\xi_i}^{\xi_{i+1}}$$

$$V(\alpha) = \frac{1}{2\mu_n} \int_{\xi_1}^{\xi_2} [\Phi_3(\alpha - \xi) + \Phi_1(\alpha - \xi)] \theta(\xi) d\xi = \frac{1}{2\mu_n} \sum_{i=1}^n \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} [\Phi_3(\alpha - \xi) - \Phi_1(\alpha - \xi)] \theta_i(\xi) d\xi$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\mu_n} \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{-1}{\mu_n} [a_i \xi + b_i] \Phi_4(\alpha - \xi) - \frac{a_i}{2\mu_n^2} [\Phi_1(\alpha - \xi) + \Phi_3(\alpha - \xi)] \right\rangle \Bigg|_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \\
U(\alpha) &= \frac{2\mu_n^2}{n} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \Phi_4(\alpha - \xi) \theta(\xi) d\xi = \frac{2\mu_n^2}{n} \sum_{i=1}^n \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \Phi_4(\alpha - \xi) \theta_i(\xi) d\xi \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{-1}{2\mu_n} [a_i \xi + b_i] [\Phi_1(\alpha - \xi) + \Phi_3(\alpha - \xi)] - \frac{a_i}{2\mu_n^2} \Phi_4(\alpha - \xi) \right\rangle \Bigg|_{\xi_i}^{\xi_{i+1}}
\end{aligned}$$

Теоретические и экспериментальные результаты для продольного напряжения $\sigma_1 = T_1 / h$ представлены на рис.4.11.

Сравнение напряжений, полученных для случая $\lambda = 1$ теоретически и экспериментально, показывает, что характер их распределения один и тот же, а максимальное значение продольного напряжения, найденного теоретически, мало отличается от экспериментального. Удовлетворительная точность и относительно небольшая трудоемкость делают это решение на основе МСАР пригодным для практических расчётов.

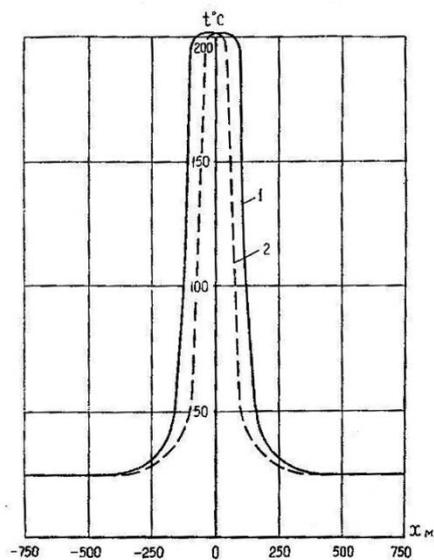


Рис.4.10. Распределение температуры вдоль нулевой образующей (1) и контура (2) оболочки.

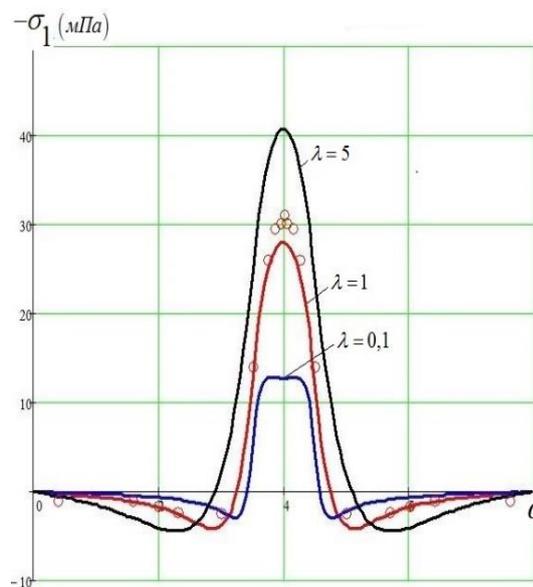


Рис.4.11. Распределение продольного нормального напряжения $\sigma_1 = T_1 / h$ вдоль нулевой образующей при различных значениях параметра ортотропии λ .

○ - экспериментальные результаты для

$\lambda = 1$.

Краевой эффект

Обратимся к построению НДС краевого эффекта при неосесимметричном температурном поле $t^*(\alpha, \beta)$.

$$\frac{\partial^8 \Phi}{\partial \alpha^8} + \lambda \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{c^2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} = \frac{\alpha_{2t} + \nu_1 \alpha_{1t}}{c^2} R t^*(\alpha, \beta). \quad (4.37)$$

Перемещение и силовые факторы записываются через разрешающую функцию:

$$\begin{aligned} w(\alpha, \beta) &= (\nu_2 \vartheta - \lambda) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4}; \quad T_2(\alpha, \beta) = -\frac{E_2 h}{R} \lambda \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} - \frac{E_2 h}{1 - \nu_1 \nu_2} (\alpha_{2t} + \nu_1 \alpha_{1t}) R t^*(\alpha, \beta); \\ G_1(\alpha, \beta) &= -\frac{D_1}{R^2} (\lambda - \nu_2 \vartheta) \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \alpha^6}; \quad G_2(\alpha, \beta) = \nu_1 G_1(\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Пусть $w^k(\alpha, \beta) = \frac{1}{(\nu_2 \vartheta - \lambda)} w(\alpha, \beta)$ тогда (4.37) запишем через $w^k(\alpha, \beta)$ таким

образом:

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + \lambda \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{c^2} \right) w^k(\alpha, \beta) = -\frac{\alpha_{2t} + \nu_1 \alpha_{1t}}{c^2} R t^*(\alpha, \beta). \quad (4.39)$$

Соотношения силовых факторов

$$\begin{aligned} T_2(\alpha, \beta) &= -\frac{E_2 h}{R} \lambda w^k(\alpha, \beta) - \frac{E_2 h}{1 - \nu_1 \nu_2} (\alpha_{2t} + \nu_1 \alpha_{1t}) R t^*(\alpha, \beta); \\ G_1(\alpha, \beta) &= -\frac{D_1}{R^2} (\lambda - \nu_2 \vartheta) \frac{\partial^2 w^k(\alpha, \beta)}{\partial \alpha^2}; \quad G_2(\alpha, \beta) = \nu_2 G_1(\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Здесь $w^k = w^k(\alpha, \beta)$, т.е. является функцией двух координат:

$$w^k(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\tilde{n}} w_n(\alpha) \cos n\beta = w^k(\alpha) \sum_{n=0}^{\tilde{n}} \theta_n \cos n\beta$$

Дифференциальное уравнение относительно разрешающей функции $w^k(\alpha)$, описывающее такое состояние, и искомые факторы имеют вид:

$$\left(\frac{d^4}{d\alpha^4} + 4\eta^4 \right) w^k(\alpha) = -\frac{\alpha_{2t} + \nu_1 \alpha_{1t}}{c^2} R T_0 \theta(\alpha); \quad 4\eta^4 = \frac{\lambda(1 - \nu_1 \nu_2)}{c^2}. \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} T_2(\alpha) &= -\frac{E_2 h}{R} \lambda w^k(\alpha) - \frac{E_2 h}{1 - \nu_1 \nu_2} (\alpha_{2t} + \nu_1 \alpha_{1t}) T_0 \theta(\alpha); \\ G_1(\alpha) &= -\frac{D_1}{R^2} (\lambda - \nu_2 \vartheta) \frac{\partial^2 w^k(\alpha)}{\partial \alpha^2}; \quad G_2(\alpha) = \nu_2 G_1(\alpha). \end{aligned}$$

Полагаем, что рассматриваемые оболочки имеют длину, удовлетворяющую условию (2.26), то есть их края не влияют друг на друга, тогда оболочка может быть рассчитана как полубесконечная, для которой

$$w^k(\alpha) = c_1\varphi(\alpha) + c_2\chi(\alpha) - \frac{\alpha_{2t} + v_1\alpha_{1t}}{\lambda(1-v_1v_2)} RT_0 \theta(\alpha). \quad (4.42)$$

Здесь обозначения $\varphi(\alpha), \chi(\alpha)$ принимаются как в (2.27). И температурное поле действует по всей длине оболочки $\theta(\alpha)=1$ тогда получаем первое производство:

$$w^k(\alpha)' = \eta \{ -[\varphi(\alpha) + \chi(\alpha)]c_1 + [\varphi(\alpha) - \chi(\alpha)]c_2 \}. \quad (4.43)$$

При краевых условиях $w = 0, w' = 0, (\alpha = 0)$ на основе (4.42), (4.43) получаем систему двух алгебраических уравнений:

$$c_1 - \frac{\alpha_{2t} + v_1\alpha_{1t}}{\lambda(1-v_1v_2)} RT_0 = 0; \quad -\frac{\alpha_{2t} + v_1\alpha_{1t}}{\lambda(1-v_1v_2)} RT_0 + c_2 = 0;$$

из которой находим произвольные постоянные интегрирования:

$$c_1 = c_2 = \alpha_{2t} + v_1\alpha_{1t} / \lambda(1-v_1v_2) RT_0. \quad (4.44)$$

На основании (4.41), с учетом (4.42)-(4.44) получаем следующие выражения для искоемых факторов термоупругой задачи:

$$\begin{aligned} w(\alpha) &= (v_2\mathcal{G} - \lambda) [\varphi(\alpha) + \chi(\alpha) - 1] \frac{\alpha_{2t} + v_1\alpha_{1t}}{\lambda(1-v_1v_2)} RT_0; \\ T_2(\alpha) &= -\frac{E_2h}{R} \lambda w^k(\alpha) - \frac{E_2h}{1-v_1v_2} (\alpha_{2t} + v_1\alpha_{1t}) T_0 = \\ &= E_2h [1 - \varphi(\alpha) - \chi(\alpha)] \frac{\alpha_{2t} + v_1\alpha_{1t}}{1-v_1v_2} T_0 - \frac{E_2h}{1-v_1v_2} (\alpha_{2t} + v_1\alpha_{1t}) T_0 \\ &= -E_2h [\varphi(\alpha) + \chi(\alpha)] \frac{\alpha_{2t} + v_1\alpha_{1t}}{1-v_1v_2} T_0; \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$G_1(\alpha) = \frac{D_1}{R^2} (\lambda - v_2\mathcal{G}) (w^k(\alpha))'' = \frac{\sqrt{3\lambda(1-v_1v_2)} E_1 h^2}{6(1-v_1v_2)^2} (\lambda - v_2\mathcal{G}) (\varphi(\alpha) - \chi(\alpha)) (\alpha_{2t} + v_1\alpha_{1t}) T_0;$$

$$G_2(\alpha) = v_2 G_1(\alpha); \quad \mathcal{G} = \alpha_{1t} + v_2\alpha_{1t} / \alpha_{2t} + v_1\alpha_{2t}$$

С помощью (4.45) находим максимальное продольное и кольцевое изгибные напряжения.

$$\sigma_1(\alpha) = \frac{6G_1(\alpha)}{h^2} = \pm \frac{\sqrt{3\lambda(1-\nu_1\nu_2)}}{(1-\nu_1\nu_2)^2} (\lambda - \nu_2\vartheta)(\varphi(\alpha) - \chi(\alpha))(\alpha_{2t} + \nu_1\alpha_{1t})E_1T_0; \quad \sigma_2(\alpha) = \nu_2\sigma_1(\alpha).$$

$$\sigma_i(\alpha, \beta) = \sigma_i(\alpha)\bar{\theta}(\beta), \quad i = 1, 2; \quad \bar{\theta}(\beta) = \frac{\theta_0}{2} + \sum_{n=1}^{\tilde{n}} \theta_n \cos n\beta.$$

Численный пример. Вычислим термоупругие напряжения для конкретного материала цилиндрической оболочки при гипотетическом уровне кусочно-постоянного по контуру и постоянного по длине оболочки температурного поля [43].

Пусть $t_0 = 100 \text{ град}$, тогда при $\alpha_{1t} = \alpha_{2t} \approx 16 \cdot 10^{-6} \text{ град}^{-1}$; $E_1 = E_2 \approx 2 \cdot 10^4 \text{ даН} / \text{мм}^2$, что соответствует стали марки 1Х18Н10Т, получаем изгибное продольное напряжение: $\sigma_1(\alpha) \approx 1,815\alpha_t E T_0 \approx 58 \text{ даН} / \text{мм}^2$, которое почти в два раза превышает предел текучести материала $\sigma_{0,2} \approx 24,8 \text{ даН} / \text{мм}^2$. Кольцевое изгибное напряжение: $\sigma_2(\alpha) = \nu_2\sigma_1(\alpha) \approx 17,4 \text{ даН} / \text{мм}^2$.

Кольцевое усилие, и, следовательно, напряжение, постоянное по толщине, является сжимающим: $\sigma_2(\alpha) = T_2(\alpha) / h = -E_2 [\varphi(\alpha) + \chi(\alpha)] \frac{\alpha_{2t} + \nu_1\alpha_{1t}}{1 - \nu_1\nu_2} T_0$.

Из сравнения видно, что изгибное напряжение больше кольцевого, постоянного по толщине оболочки, и может достигать в реальных случаях [43] значительной величины.

Заключение

1. Получено разрешающее дифференциальное уравнение общей теории физически ортотропных цилиндрических оболочек в частных производных восьмого порядка и дифференциальные зависимости для искомым факторов при действии произвольной продольной нагрузки, обобщающие теорию изотропных оболочек В.З.Власова, а также уравнения элементарных напряженных состояний: основного, с высокой изменяемостью и тангенциального.

2. Разработан метод сращиваемых аналитических решений дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка типа основного состояния и краевого эффекта физически ортотропных оболочек нулевой гауссовой кривизны - цилиндрических, а также слабokonических - для определения напряжений при нагрузках и температурных полях, имеющих существенно меньшую изменяемость вдоль образующей, чем вдоль контура.

3. Дано обобщение решения задачи В. З. Власова о напряженном состоянии цилиндрических оболочек в виде топливных отсеков, сосудов, трубопроводов на случай их изготовления из физически ортотропного материала, при несимметричном гидростатическом давлении, нагреве и произвольном закреплении, что имеет место в аэрокосмических и энергетических конструкциях.

4. Построены алгоритмы решения ряда новых, актуальных прикладных задач для физически ортотропных оболочек при различного рода локализованных силовых и температурных воздействий и на их основе проведен систематический численный анализ влияния механической и тепловой ортотропии, условий нагружения и нагрева, а также различных краевых условий на характер и интенсивность напряженного состояния.

5. Для некоторых частных случаев нагружения и нагрева оболочек показана возможность представления численных значений наиболее важных факторов в замкнутом виде, а также в форме номограмм и диаграмм, позволяющих находить предпочтительные области изменения физико-механических и теплофизических характеристик материала конструкции.

6. Полученные новые результаты нашли подтверждение путем сравнения с имеющимися или найденными путем численного или натурального эксперимента.

Библиографический список

1. **Амбарцумян С.А.** Общая теория анизотропных оболочек.- М.: Наука,1974. 446 с.
2. **Артюхин Ю.П.** Определение напряжений в ортотропной цилиндрической оболочке при действии сосредоточенной силы. В кн.: Исследования по теории пластин и оболочек. Казань, вып.5,1967, с.148-152.
3. **Антуфьев Б.А.** Температурная деформация пологой цилиндрической оболочки при локальном повреждении ее защитного слоя// Изв. вузов. Авиационная техника. 2008. №1. С. 6-9.
4. **Антуфьев Б.А.** Локальное деформирование дискретно подкрепленных оболочек. – М.: Изд-во МАИ, 2013.182с.
5. **Антуфьев Б.А., Шклярчук Ф.Н.** Деформация тонкой оболочки, нагруженной через упругую накладку// Изв.вузов.Авиационная техника. 1980. №4. С. 65-67.
6. **Андрианов. И., Аврейцевич Я.** Методы асимптотического анализа и синтеза в нелинейной динамике и механике деформируемого твёрдого тела.-М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований,2013-276с.
7. **Безухов Н.И., Бажанов В.Л., Гольденблат И.И., Николаенко Н.А., Синюков А.М.** Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур (Под редакцией И.И.Гольденבלата).- М., Машиностроение,1965. 567с.
8. **Белозеров Л.Г., Киреев В.А.** Композитные оболочки при силовых и тепловых воздействиях. М: Издательство физико-математической литературы, 2003-388с.
9. **Буланов И.М., Воробей В.В.** Технология ракетных и аэрокосмических конструкций из композиционных материалов.- М.: Изд-во МГТУ имени Н.Э.Баумана. 1998, 514 с.

10. **Виноградов Ю.И.** Напряжённо- деформированное состояние цилиндрической оболочки, подкреплённой шпангоутом и нагруженной силой. - Проблемы прочности, 1987, № 5, с 95-100.
11. **Виноградов Ю.И., Булашевич А.** Напряжённо- деформированное состояние конической оболочки, нагруженной сосредоточенными силами. - Проблемы прочности, 1987, № 8, с 80-84.
12. **Васильев В.В.** Механика конструкций из композиционных материалов.- М.: Машиностроение,1986. 269 с.
13. **Васильев В.В.** О воздействии локальной нагрузки на цилиндрическую оболочку из ортотропного стеклопластика. Механика полимеров, 1970, N1, с. 95-101.
14. **Власов В.З.** Общая теория оболочек и ее применение в технике.- М.: Изд-во АН СССР, 1962. Т.1. 528 с.
15. **Власов В.З.** Контактные задачи по теории оболочек и тонкостенных стержней. Пуб АН СССР, ОТН, N6, 1949, с 440-458.
16. **Ву Ба Зуи.** Обобщение задачи В.З. Власова о напряженном состоянии цилиндрических сосудов при гидростатическом давлении на случай физически ортотропного материала // Электронный журнал «Труды МАИ» 02.12.2014. Вып.78. www//mai/science/Trudy/.
17. **Галеркин Б.Г., Перельман Я.И.** Напряжение и перемещения в круговом цилиндрическом трубопроводе. Известия НИИ Гидротехнике, Т 27,1940. с.160-191.
18. **Гольденвейзер А.Л.** Теория упругих тонких оболочек. - М.: Наука, 1979. 512 с.
19. **Градштейн И.С., Рыжик И.М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений - М.: Наука, 1971.1108 с.
20. **Григоренко Я.М., Василенко А.Т.** Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек. М., «Наука», 1992г. -332с.
21. **Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратов Н.Д.** Статика анизотропных толстостенных оболочек. Киев. « Вишашкола»,1985,-190с.

22. **Гурьянов Н.Г.** Цилиндрическая оболочка, нагруженная по площадке, ограниченной линиями главных кривизн – Исследования по теории пластин и оболочек, 1967, вып.5, с.127-136.
23. **Даревский В.М.** Контактные задачи теории оболочек. Действие локальных нагрузок. – В кн.: Теория оболочек и пластин: Труды 6-ой Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1966, с.927-934.
24. **Даревский В.М.** Определение перемещений и напряжений в цилиндрической оболочке при локальных нагрузках – М.: В кн.: Прочность и динамика авиационных двигателей. Машиностроение, 1964. С.23-83.
25. **Двайт Г.Б.** Таблицы интегралов и другие математические формулы. Перевод с англ. М.: Наука, 1977, 224с.
26. **Доннелл Л.Г.** Балки, пластины и оболочки. М., «Наука», 1982-567с.
27. **Елпатьевский А.Н., Васильев В.В.** Прочность цилиндрических оболочек из армированных материалов. М., Машиностроение, 1972-168с.
28. **Жигалко Ю.П.** Статика оболочек при силовых локальных воздействиях. - В кн.: Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: КГУ, вып. II, 1975. С.62-91.
29. **Зверьев Е.М.** О соотношениях упругости в линейной теории тонких упругих оболочек // ПМП. 1970. вып.6. С. 1136-1138.
30. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. - М.; Мир, 1975. 575 с.
31. **Иванов С.Д., Нерубайло Б.В.** Напряжения в цилиндрической оболочке при передаче через жесткие элементы осевых сосредоточенных сил// Теория оболочек и пластин. М.: Наука, 1972. С.701-704.
32. **Иванов С.Д., Нерубайло Б.В., Федик И.И.** Исследование напряжений в полом цилиндре около жестких силовых элементов// Прикладная механика. 1973. Т. 9. Вып. 10. С.122-124.
33. **Кан С.Н.** Строительная механика оболочек. - М.: Машиностроение, 1966. 508 с.

34. **Коноплев Ю.Г.** Экспериментальное исследование задачи о действии сосредоточенной силы на цилиндрическую оболочку. - В книге.: Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: КГУ, вып.4, 1966. С.83-90.
35. **Коноплев Ю.Г., Саченков А.В.** Исследование напряженного состояния цилиндрической оболочки с жесткой площадкой нагружения. - В кн.: Исследование по теории пластин и оболочек. Казань: изд-во КГУ, вып.4, 1966, с.65-83.
36. **Королев В.И.** Слоистый анизотропные пластики и оболочки из армированных пластмасс. М. Машиностроение, 1965г.-272с.
37. **Лекницкий С.Г.** Теория упругости анизотропного тела. М., «Наука»,1977.415с.
38. **Лурье А.И.** Статика тонкостенных упругих оболочек. М.-Л. ОГИЗ, Гостехиздат 1947,.252 с
39. **Лукаевич С.** Локальные нагрузки в пластинках и оболочках.- М.: Мир, 1982. 542с.
40. **Малаховский Р.А.** Расчет круговых ортотропных конических оболочек// Изв. вузов. Авиационная техника. 1960г. С. 61-68.
41. **Матвеевко А.М., Нерубайло Б.В.** Вопросы прочности, устойчивости и надежности конструкций. -М. Изд-во МАИ, 2013.-160с.
42. **Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А.** Сопротивление жестких полимерных материалов. Рига. «Зинатне». 1967.-302.
43. **Моссаковский В.И., Макаренков А.Г., Никитин П.И., Саввин Ю.И., Спиридонов И.Н.** Прочность ракетных конструкций. - М.: Высшая школа, 1990. 359 с.
44. **Найфэ А.** Введение в методы возмущений. М., «Мир»,1984. -535с.
45. **Нерубайло Б.В.** Применение асимптотического метода в задачах термоупругости цилиндрических оболочек. // Прикладная механика. 1979. Том XV. №3. С.36-45.
46. **Нерубайло Б.В.** Локальные задачи прочности цилиндрических оболочек. - М.: Машиностроение, 1983. 248 с.

47. **Нерубайло Б.В., Смирнов Л.Г., Струкова О.А.** К решению задачи термоупругости конических оболочек// Изв. РАН. МТТ. 2008. №4, С.107- 121.
48. **Нерубайло Б.В.** К расчету напряжений в цилиндрических оболочках, нагруженных по линиям контура// Прикладная механика. 1975.Том 1. Вып.2, с. 41-48.
49. **Нерубайло Б.В.** Определение напряжений в цилиндрической оболочке при локальном нагреве// Изв. вузов. Авиационная техника. 1968. № 3, с.32-39.
50. **Нерубайло Б.В., Смирнов Л.Г.** К решению задач упругости конических оболочек// ПМТФ, 2005.Том 46. № 5. С.150-165.
51. **Нерубайло Б.В.** Три теоремы о погрешности различных уравнений теории оболочек с сингулярной правой частью// ПМТФ. 1997. Том 38. № 3. С.152-158.
52. **Нерубайло Б.В., Ольшанский В.П.** Асимптотический метод расчета конической оболочки на действие локальной нагрузки// Изв. РАН. МТТ. 2007. № 1. С.115-124.
53. **Нерубайло Б.В.** Ортоотропная цилиндрическая оболочка при действии локальной нагрузки// Прикладная механика. 1979. Том XV. № 6. С.40-48.
54. **Нерубайло Б.В.** Об одном представлении результатов решений уравнений термоупругих физически ортоотропных цилиндрических оболочек с разрывной правой частью// Прикладная механика. 1998. Том 34. № 6 . С.64-67.
55. **Нерубайло Б.В.** Краевые задачи для физически ортоотропных цилиндрических оболочек// Известия РАН. МТТ. №3, 1990. С.124-131.
56. **Нерубайло Б.В.** Термоупругое взаимодействие горячих пятен с неасимптотическим краем физически ортоотропной оболочки// ПМТФ. 1997. Том 38. №5. С. 156-164.
57. **Нерубайло Б.В.** К решению дифференциальных уравнений конической оболочки с сингулярной правой частью// ПМТФ. 1996. Том 37. №2. С. 157-161.

58. **Нерубайло Б.В., Нерубайло А.Б.** Обобщение уравнений В.З. Власова на случай трансверсально-изотропного материала// ПМТФ. 2005. Том 46. №4. С. 125-132.
59. **Нерубайло Б.В., Иванов А.И.** К учету изменения физических свойств материала при локальном нагреве оболочки вращения// Расчетные и экспериментальные исследования прочности, устойчивости и колебаний летательных аппаратов. М.: МАИ, 1988. С.41-45.
60. **Нерубайло Б.В., Ву Ба Зуи.** К решению задачи изгиба физически ортотропной цилиндрической оболочки локано приложенными радиальными силами // Изв. вузов. Авиационная техника. 2013.№2.С.78-80.
61. **Нерубайло Б.В., Ву Ба Зуи.** Термоупругая задача для физически ортотропной цилиндрической оболочки при локализованной температуре. // Изв. вузов. Авиационная техника. 2013.№3.С.75-81.
62. **Нерубайло Б.В, Ву Ба Зуи.** Дифференциальные уравнения физически ортотропны и изотропных цилиндрических оболочек при действии продольных нагрузок // Вестник Московского авиационного института.2013. Т20.С. 173-184.
63. **Нерубайло Б.В, Ву Ба Зуи, Зайцев В.М.** К расчёту напряжений в цилиндрических сосудах при несимметричном гидростатическом давлении и нагреве// Электронный журнал «Труды МАИ» 26.08.2013.Вып.67.www//mai/science/Trudy/
64. **Нерубайло Б.В, Жернаков В.С., Бердинков Ю.Н.** Метод асимптотического синтеза и термосиловых ананолигмй в теории оболочек.// Вестник УГАТУ Т. 10, №1 (26). С. 64–74.
65. **Новацкий В.** Вопросы термоупругости. Изд-во АН СССР, М.,1962. - 364.
66. **Новожилов В.В.** Теория тонких оболочек. - Л.: Судпромгиз. 1962. 431с.
67. **Новиков В.Н., Авхимович Б.М., Вейтин В.Е.** Основы устройства и конструирования летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1991. 368 с.

68. **Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В., Андрианов И.В.** Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций. - М.: Машиностроение. 1991. 416с.
69. **Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В., Иванов А.И.** Исследование оболочек вращения при локализованных силовых и температурных воздействиях // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение. 1989. С.243-262.
70. **Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В., Ольшанский В.П.** Оболочки при локализованных воздействиях (обзор работ, основные результаты и направления исследований) // М.: ВИНТИ, № 1222, 1988. 192 с.
71. **Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В., Андрианов И.В.** Методы сращивания предельных асимптотик. - ПППП, 1995. Вып.52.С. 3-11.
72. **Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В.** О методах синтеза напряженного состояния в теории оболочек// ДАН СССР, 1983. Т. 269. №1. С.54-56.
73. **Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В.** Об одной термосиловой аналогии в теории оболочек// ДАН СССР. 1984. Т. 277. №2. С.327-331.
74. **Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В.** Об одном классе решений краевых задач для термоупругих анизотропных оболочек.//ДАН СССР, 1986. Т. 291. №2. С.306-309.
75. **Огибалов П.М., Колтунов М.А.** Оболочки и пластины. М., Изд-во МГУ,1969. 695с.
76. **Ольшанский В.П., Лавинский В.И., Мазоренко Д.И., Тищенко Л.Н., Кучеренко С.И., Лукьянов И.М.** Аналитические методы расчёта локально нагруженных тонких оболочек. Харьков, НТУ «ХПИ»,2009,-366с.
77. **Палий О.М., Спиро В.Е.** Анизотропные оболочки в судостроении. Л.: Судостроение, 1977. - 390с.
78. **Підстригая Я.С., Ярема С.Я.** Температурные напряжения в оболочках. Київ, АН УРСР,1961-204с.
79. **Сибиряков В.А.** Расчет ортотропной конической оболочки на произвольную внешнюю нагрузку// Изв. вузов, Авиационная. техника. 1959. № 2. С. 72-82.

80. **Сухинин С.Н.** Действие локальных нагрузок на ортотропную цилиндрическую оболочку. – Расчет пространственных конструкций, Стройиздат, вып.12, М.: 1969, с.80-95.
81. **Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андриюшин В.А.** Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек. - М.: Физматлит, 2014. - 408 с.
82. **Тимошенко С.П., С. Войновский-Кригер.** Пластинки и оболочки. - М.: Физматгиз. 1963. 635 с.
83. Проблемы высоких температур в авиационных конструкциях», Сборник статей, перевод с английского под редакцией **В.К.Житомирского и Колтового Б.И.** Изд-во иностранной литературы, М., 1961. - 595 с.
84. **Уфлянд Я.С.** Интегрированное преобразование в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1968-402 с.
85. **Федик И.И., Ашмантас Л.В., Дзюбенко Б.В.** Проблемы создания ядерного ракетного двигателя. Становление и развитие. - Вильнюс: Trys zvaigzduotes. 2008. 175 с.
86. **Чернышев Г.Н.** О контактных задачах в теории оболочек.// Теория оболочек и пластин. М.: Наука. 1979. С.898-903.
87. **Чернина В.С.** Статика тонкостенных оболочек вращения. – М. Наука, 1966. 455 с.
88. **Хазанов Х.С., Леонов В.И., Савельев Л.М.** Передача локальных воздействий на цилиндрическую оболочку. -В кн.: Механика деформированного твердого тела. Куйбышев: Изд-во Куйбышевского ун-та, вып.2, с 134-140.
89. **Христенко А.С.** О действии на ортотропную круговую цилиндрическую оболочку сосредоточенных сил и моментов, приложенных к свободному краю. МТТ, N4, 1968, с.198-201.
90. **Шклярчук Ф.Н., Антуфьев Б.А.** Деформация тонкой упругой оболочки, нагруженной через жесткую накладку// Изв. вузов.Авиационная техника . 1974. №4.С. 115-120.

91. **Bijlaard P.P.** Stresses from local loading in cylindrical pressure vessels-transaction of the ASME, 1955,vol.77, N 6, p.805-816. (**Бейладр П.П.** напряжения от локальных нагрузок в цилиндрических сосудах давления- В кн.: Вопросы прочности цилиндрических оболочек. М., Оборонгиз, с. 43-65).
92. **Goodier J.N.** On the Integration of the Thermo Elastic Equations// Phil. Mag. 1937. Vol. 23, No 157. P. 1017-1032.
93. **Hoff N.J.** The Accuracy of Donnell's Equations- Journal of Applied Mechanism. " Transactions of American Society of Mechanical Engineers ", vol.22, N 3,1955,p. 329-334.
94. **Nerubailo B.V.** The Heuristic Theorems on a Real Error of Solutions in the Theory of Thin Cylindrical Shells// Intern. Conf. "Asymptotic in Mechanics". St. Petersburg: St. Petersburg State Marine Technical University. 1996. P. 44-45.
95. **Nerubailo B.V., L.G.Smirnov, and Nerubailo T.B.** An Investigation of Stresses in Composite Shells on the Basis of Method of Asymptotic Synthesis due to Various Local Action// Mechanics of Composite Materials. Riga. 1995. Vol. 31. No.6. P. 783-791.
96. **Nerubailo B.V., Nerubailo T.B., Fedik I.I.** Methods of Asymptotic Synthesis and Investigation of Stresses in Cylindrical Orthotropic Shells. - Intern. Conf. "Asymptotic in Mechanics". St. Petersburg: St. Petersburg State Marine Technical University. 1994. P.76-78.
97. **Nerubailo B.V., Nerubailo T.B., Fedik I.I.** Remarks on Ways an Asymptotic Joining of Solutions for Approximate Equations in the Theory of Shells// Intern. Conf. "Asymptotics in Mechanics". St. Petersburg: St. Petersburg State Marine Technical University. 1996. P. 46-48.
98. **Nerubailo B.V., Nerubailo T.B.** Methods of Asymptotic Synthesis for the Solutions of Some Problems in Perturbation// 3th Intern. Congress on Industrial and Applied Mathematics. Hamburg: 1995. P. 245-247.
99. **Nerubailo B.V.** Analytical Solutions of Partial Differential Equations of the Theory Shells with Singular Right - hand Side on Basic Asymptotic Approaches// Intern,

Conf. on Asymptotics in Mechanics. St. Peterburg: St. Petersburg State Marine Technical University. 1994. P. 75-76.

100. **Nerubailo B.V.** Asymptotic Analysis and Synthesis of Solutions of the Differential Equations in the Theory of Thin Elastic Shells// 3rd Euromech Solid Mechanics Conf. Book of Abstracts. Stockholm. 1997. P. 231-232.