

**Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)**

На правах рукописи



СЕРДЮК ДМИТРИЙ ОЛЕГОВИЧ

**ИССЛЕДОВАНИЕ ЗВУКОИЗОЛЯЦИОННЫХ СВОЙСТВ ТРЕХСЛОЙНОЙ
ПЛАСТИНЫ**

01.02.06 – динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры

**Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук**

Научный руководитель:
кандидат технических наук,
доцент Н.А. Локтева

Москва – 2016 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	4
ГЛАВА 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН С ПЛАСТИНОЙ СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ	
§ 1.1. Современное состояние вопроса.....	11
§ 1.2. Постановка задачи о прохождении волн через пластину сложной структуры.....	22
§ 1.3. Уравнения движения трехслойной пластины.....	25
§ 1.4. Уравнения движения акустической среды.....	32
ГЛАВА 2. ПРОХОЖДЕНИЕ ВОЛН РАЗЛИЧНОГО ТИПА ЧЕРЕЗ БЕСКОНЕЧНУЮ ТРЕХСЛОЙНУЮ ПЛАСТИНУ	
§ 2.1. Постановка задачи о прохождении волн через бесконечную трехслойную пластину.....	35
§ 2.2. Связь амплитуд давлений звуковых волн в акустической среде с кинематическими параметрами пластины.....	38
§ 2.3. Определение звукоизоляционных свойств бесконечной трехслойной пластины.....	42
§ 2.4. Пример расчета.....	52
ГЛАВА 3. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН РАЗЛИЧНОГО ТИПА С ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНОЙ	
§ 3.1. Постановка задачи о прохождении волн различного типа через трехслойную пластину.....	56
§ 3.2. Связь амплитуд давлений звуковых волн в акустической среде с кинематическими параметрами пластины.....	60
§ 3.3. Определение звукоизоляционных свойств пластины в плоском случае.....	65
§ 3.4. Пример расчета.....	70

ГЛАВА 4. ПРОХОЖДЕНИЕ ВОЛН РАЗЛИЧНОГО ТИПА ЧЕРЕЗ ПРЯМОУГОЛЬНУЮ ТРЕХСЛОЙНУЮ ПЛАСТИНУ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

§ 4.1. Постановка задачи о прохождении волн различного типа через трехслойную пластину конечных размеров.....	75
§ 4.2. Связь амплитуд давлений звуковых волн в акустической среде с кинематическими параметрами прямоугольной пластины конечных размеров.....	79
§ 4.3. Определение звукоизоляционных свойств пластины конечных размеров.....	84
§ 4.4. Пример расчета и анализ влияния формы набегающей звуковой волны на звукоизоляционные свойства пластины.....	94
Основные выводы.....	104
Условные обозначения.....	105
Библиографический список.....	107

Введение

Актуальность темы. Снижение шума на производстве или обеспечение акустического комфорта в летательных аппаратах или автомобилях является актуальной инженерной задачей. Одним из способов ее решения является использование звукоизолирующих преград. Давно известно, что чем массивнее ограждение, тем эффективнее происходит изоляция звука. Однако борьба за малый вес и рациональное использование материальных ресурсов требует более тонкого подхода к проектированию звукоизоляционных преград.

В качестве таких преград широко применяются тонкостенные однослойные или многослойные кожухи или перегородки, которые хорошо подходят для изоляции двигателей в транспорте или стационарных двигателей на производстве. В том случае если источник шума изолировать нельзя, также используют тонкостенные преграды, на пример – щиты вдоль дорог проходящие через населенные пункты; специальные кабины для обслуживающего персонала на производстве, обеспечивающие защиту от шума и пригодные для наблюдения за ходом технологического процесса.

Уровень и динамика развития новых перспективных летательных аппаратов предъявляет все более высокие требования к повышению степени шумо и виброзащиты. Эти же проблемы возникают в других отраслях машиностроения, где необходимо обеспечить эффективную звукоизоляцию. Во всех этих отраслях появляется все больший интерес к использованию новых функциональных материалов, которые позволяют получать требуемый уровень звукоизоляции создаваемых элементов конструкции путем организации нужного вида их внутреннего строения. Это приводит к необходимости разработки новых усложненных математических моделей, позволяющих описывать поведение элементов конструкций с учетом особенностей их строения.

Наиболее полно на данный момент исследованы задачи, посвященные изучению свойств однородных звукоизолирующих препятствий. Для варианта трехслойных элементов, как правило, не учитываются поперечное обжатие заполнителя и сдвиг слоев, что приводит к существенному искажению истинной картины деформированного состояния. В практическом отношении вопросы учета влияния поперечного обжатия заполнителя и сдвига слоев, а также анализ влияния формы набегающей волны на звукопоглощающие свойства пластин сложной конструкции являются актуальными. В настоящей работе предполагается использовать новые уточненные модели трехслойных пластин, позволяющие учитывать влияние вышеназванных эффектов.

Диссертационная работа посвящена аналитическому исследованию взаимодействия волн различного типа, возбуждаемых в акустической среде с трехслойными пластинами различной конфигурации.

Цель диссертационной работы заключается в разработке аналитических способов определения коэффициента поглощения трехслойной разномасштабной пластины в акустической среде, а также определения ее показателя звукоизоляции в зависимости от формы и частоты набегающей волны.

Для достижения поставленной цели в диссертации решаются следующие задачи:

1. Разрабатывается математическая модель взаимодействия акустической среды с трехслойной пластиной различных параметров с мягким ортотропным заполнителем и симметричным по толщине строением.
2. Исследуется задача о прохождении волн напряжений различного типа через бесконечную по своей длине и ширине прямоугольную трехслойную пластину.
3. Разрабатывается способ решения задачи прохождения упругих волн акустического диапазона через прямоугольную трехслойную пластину бесконечной длины и ограниченную по ширине.

4. Строится решение задачи прохождения упругих волн акустического диапазона через прямоугольную трехслойную пластину конечных размеров.

5. Анализируется характер поглощения волн напряжений при прохождении их через трехслойную пластину с различными геометрическими и физическими параметрами.

Методы исследования. В работе дана математическая постановка задачи о взаимодействии гармонических волн различного типа с трехслойной пластиной. Движение пластины описываются уточненными уравнениями движения трехслойной пластины, позволяющими учитывать влияние поперечного обжатия и сдвига слоев, а также пространственной конфигурации заполнителя. Для построения решения поставленных задач применяется преобразование Фурье для бесконечной пластины и разложение в тригонометрические ряды для пластин ограниченной длины.

При описании движения акустической среды используются уравнения относительно амплитуды потенциала скоростей для разного типа волн: плоской, цилиндрической, сферической. Звукоизоляционные свойства преграды оцениваются коэффициентом поглощения или показателем звукоизоляции, измеряемым в децибелах.

Научная новизна. Впервые разработана математическая модель прохождения упругой волны через трехслойную пластину с мягким ортотропным заполнителем и симметричным по толщине строением.

Исследование звукоизоляционных свойств трехслойных пластин выполнено с учетом поперечного обжатия заполнителя и сдвига слоев.

Изучение влияния геометрии пластины при взаимодействии ее с волновой средой различной конфигурации впервые позволило выявить степень влияния формы звуковой волны на величину ее изоляции при прохождении через разноплановую по размерам пластину.

Практическая ценность, заключается в том, что разработаны способы оценки звукоизоляционных свойств разноплановых трехслойных пластин с сотовым наполнителем при взаимодействии их с различными по форме и частоте волновыми воздействиями.

В случае, когда возникает необходимость звукоизоляции больших площадей, например поверхностей зданий и сооружений, а источник звука находится на достаточно большом удалении или же таких источников несколько, возможно использовать результаты, полученные для бесконечной пластины под воздействием плоской гармонической волны. Такие условия задачи подразумевают, например, защиту объектов от шума и вибраций, излучаемые автотрассами, стройками и т.д., находящимися на значительном удалении.

Второй вариант постановки задачи, включающий в себя пластину бесконечную по длине, ограниченную по высоте и находящуюся под воздействием цилиндрической волны, так же может быть использован для разработки защиты от источников шума, имеющих большие линейные размеры (автомобильные, железнодорожные магистрали, метрополитен и т.п.). Однако в данном случае звукоизолирующее препятствие должно так же иметь значительные размеры в длину. На практике подобные условия соответствуют воздействию шума, источником которого являются протяженные транспортные магистрали, на звукопоглощающие экраны, установленные вдоль них. Так же подобные преграды способны поглощать и рассеянный шум, что соответствует воздействию плоской волны.

Третья постановка задачи, пластина ограниченных размеров, является универсальной. Полученные решения позволяют моделировать и приведенные выше ситуации, и ситуации когда источник звука находится в непосредственной близости от изолируемого объекта. Зачастую такие варианты звукоизоляции необходимы, когда источник звуковых колебаний находится в непосредственной близости от человека и его воздействие является достаточно продолжительным. Например, воздействие колебаний, создаваемое различными типами двигателей (автомобильными, авиационными, корабельными, промышленными и др.). Если

источник шума сконцентрирован в одной точке, тогда становится целесообразным использовать третью постановку задачи – воздействие сферической волны на пластину ограниченных размеров.

Обоснованность и достоверность результатов исследований.

Достоверность научных положений и выводов обеспечена корректностью принятых постановок рассматриваемых задач и используемых при решении методов, близостью полученных разными способами результатов, а также сравнением с экспериментальными данными и результатами, полученными другими авторами.

Основные результаты, выносимые на защиту:

1. Модель процесса взаимодействия акустической среды с трехслойной пластиной с мягким ортотропным наполнителем.
2. Решение задачи об определении коэффициента поглощения и показателя звукоизоляции при прохождении волн различного типа через бесконечную прямоугольную трехслойную пластину.
3. Решение задачи об определении коэффициента поглощения и показателя звукоизоляции при прохождении волн различного типа через прямоугольную трехслойную пластину конечных размеров.
4. Результаты анализа процесса звукоизоляции трехслойной пластины при воздействии на нее разного типа акустических волн.

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях, симпозиумах и семинарах:

- XIX-XXII Международный симпозиум имени А. Г. Горшкова «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» (Россия, Москва, 2013-2016);
- Конференция «Ломоносовские чтения» (г. Москва, 2013, 2014);

- Международная конференции «Теории оболочек и мембран в механике и биологии: от макро- до наноразмерных структур» (г. Минск, 2013);
- Международная научная конференции «Современные проблемы математики, механики и информатики» (г. Тула, 2014);
- Международный научный семинар «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы» (г. Москва, 2014);
- XI-ый всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоритической и прикладной механики (г. Казань, 2015).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 13 работ, в том числе 2 статьи в журналах из перечня, рекомендованного ВАК РФ.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырёх глав, основных выводов, списка условных обозначений, библиографического списка включающего 100 наименований. Общий объем диссертации – 117 страниц и 24 рисунка.

Содержание работы. Во введении дано обоснование актуальности выбранной темы, сформулированы цели и задачи исследования, описаны методы исследования, научная новизна и практическая ценность данной работы, а также приведено краткое содержание диссертации по главам.

Первая глава посвящена общей постановке задачи. Дан краткий обзор работ по данной тематике. Обозначены основные цели работы и дана математическая постановка задачи. Приведены геометрическое и физическое описания объекта исследования (трехслойной пластины), уравнения движения трехслойной пластины, а также граничные и начальные условия. Описаны уравнения движения акустической среды и установлены рассматриваемые типы звуковых волн.

Вторая, третья и четвертая главы посвящены аналитическому решению задач по определению звукоизоляционных свойств трехслойной пластины в зависимости от ее геометрии и формы набегающей звуковой волны.

Во второй главе рассмотрена бесконечная прямоугольная трехслойная пластина, на которую набегают плоская или цилиндрическая звуковая волна. Определена взаимосвязь амплитуд давлений прошедшей и отраженной волн в акустических средах с кинематическими параметрами пластины. Разработан способ исследования звукоизоляционных свойств бесконечной пластины с использованием преобразований Фурье. Представлен пример расчета и выполнена верификация результатов.

В третьей главе исследуются звукоизоляционные свойства прямоугольной трехслойной пластины бесконечной длины, на которую воздействует плоская и цилиндрическая звуковая волна.

В четвертой главе исследуются звукоизоляционные свойства прямоугольной пластины конечных размеров при воздействии на нее плоской, цилиндрической и сферической звуковой волны.

В последних двух главах установлены связи амплитуд давлений прошедшей и отраженной от пластины волн с ее кинематическими параметрами. Разработан способ исследования звукоизоляционных свойств с использованием тригонометрических рядов Фурье. Представлены примеры расчета коэффициента поглощения преграды и параметра звукоизоляции в зависимости от частоты и формы набегающей волны. Проанализировано влияние формы волны на звукоизоляционные свойства прямоугольной пластины конечных размеров.

ГЛАВА 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН С ПЛАСТИНОЙ СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ

§ 1.1. Современное состояние вопроса

Исследованием процесса прохождения звуковых волн через преграды различных конфигураций занимались многие ученые. За более чем вековую историю это были Д. Стретт, Л. Кремер, А. Шох и многие другие.

Основателем классической теории звукоизоляции однослойных пластин является Д. Стретт (лорд Рэлей) [56]. В своих исследованиях он рассматривал нормальное воздействие плоской набегающей звуковой волны на тонкую однослойную пластину неограниченных размеров, предполагая, что под действием звуковой волны пластина совершает поршневые колебания. Основным выводом его работ в этом направлении является «закон массы», который гласит, что собственная звукоизоляция ограждения пропорциональна десятичному логарифму произведения частоты звука на вес ограждения, отнесенный к единице ее поверхности и обратно пропорциональна удвоенному произведению плотности акустической среды на скорость звука в ней:

$$R = 20 \lg \left(\frac{\omega \mu}{2\rho c} \right), \quad (1.1.1)$$

где R – собственная звукоизоляция преграды, ω – круговая частота набегающей звуковой волны, μ – масса единицы площади преграды, ρ – плотность окружающей среды, c – скорости звука в среде. Из «закона массы» Д. Стретта (1.1.1) следует, чем массивнее пластина, тем она эффективнее, при этом звукоизоляционные свойства пластины не зависят от геометрии и угла набегающей волны.

Однако, А. Лондон [81, 82], исследуя звукоизоляционные свойства пластин при воздействии на нее звуковой волны под различными углами установил, что

пластина наиболее эффективно изолирует звук при нормальном падении набегающей волны. При этом звукоизоляция пластины при диффузном падении звуковой волны определяется как:

$$R = 10 \lg \left(\frac{\omega \mu}{2\rho c} \right)^2 - 10 \lg \left(\ln \left(1 + \left(\frac{\omega \mu}{2\rho c} \right)^2 \right) \right).$$

Г. Рейснер в своих работах по изучению звукоизоляционных свойств бесконечной пластины с учетом сдвиговых и продольных волн [93] показал, что конкретный угол падения плоской набегающей волны имеет значение, а именно, существуют такие углы, при которых волна полностью проходит через пластину. Величины этих углов зависят от толщины пластины и длин сдвиговых и продольных волн в ней. Но вопрос о практическом применении полученных результатов остался открытым, так как искомые выражения были слишком сложны и громоздки, а результаты, полученные по теории Г. Рейснера, отличались от экспериментальных данных при исследовании пластин конечных размеров. Физическую природу полного прохождения звуковой волны через пластину Рейснер объяснить не смог.

Анализом влияния угла падения звуковых волн на звукоизоляционные свойства бесконечной пластины так же занимался А. Шох [96, 97]. Ученый разбил поверхность пластины на совокупность независимых элементарных площадок, которые представляют из себя колебательные системы с одной степенью свободы (в направлении перпендикулярном поверхности пластины). Данный подход позволил оценить влияние угла падения звуковой волны α на звукоизоляционные свойства пластины:

$$R = 10 \lg \left(1 + \left(\frac{\omega \mu \cos(\alpha)}{2\rho c} \right)^2 \right). \quad (1.1.2)$$

Согласно (1.1.2) звукоизоляционные свойства бесконечной пластины зависят от массы пластины, частоты и угла набегающей звуковой волны.

Работы А. Шоха по исследованию звукоизоляционных свойств бесконечных пластин уточнили результаты Д. Стретта, А. Лондона и Г. Рейснера, однако

результаты, полученные по формуле (1.1.2) расходились с экспериментальными данными при исследовании звукоизоляционных свойств пластин конечных размеров, особенно при высокой частоте набегающей волны.

Исследованием этого расхождения, и в целом звукоизоляционными свойствами бесконечных тонких пластин занимался Л. Кремер [67-70]. В своих работах он установил, что при определенном угле набегающей плоской звуковой волны происходит совпадение фазовой скорости изгибных волн в пластине со скоростью звуковой волны. В этом случае в окружающей среде вдоль пластины возникает эффект волнового совпадения, который ведет к практически полному прохождению звуковой волны через пластину. Тем самым Л. Кремер установил, что на звукоизоляционные свойства бесконечной пластины, помимо частоты набегающей волны, массы пластины и угла падения звука влияет и изгибная жесткость пластины D определяемая как:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

где E – модуль упругости первого рода материала пластины, h – толщина пластины, ν – коэффициент Пуассона.

Влияние изгибной жесткости на звукоизоляционные свойства пластины Л. Кремер получил в области высоких частот набегающих звуковых волн, что подтвердило несовпадение результатов полученными А. Шохом с экспериментальными данными. В связи с этим, Л. Кремер разделил частотный диапазон набегающей плоской волны на два участка, где границей этих участков служила граничная частота волнового совпадения:

$$\omega_{cp} = \frac{c^2}{2\pi \sin^2(\alpha)} \sqrt{\frac{\mu}{D}}.$$

На первом участке (частоты до частоты волнового совпадения) звукоизоляционные свойства пластины для диффузного падения звуковой волны Л. Кремер определяет по модифицированному «закону массы» (1.1.1) как:

$$R_1 = 20 \lg \left(\frac{\omega \mu}{2 \rho c} \right) - 5. \quad (1.1.3)$$

На втором участке звукоизоляционные свойства пластины определяются с учетом коэффициента потерь к материала пластины:

$$R_2 = 20 \lg \left(\frac{\pi \omega_{zp} \mu}{\rho c} \right) + 30 \lg \left(\frac{\omega}{\omega_{zp}} \right) + 10 \lg (\kappa) - 3. \quad (1.1.4)$$

Эксперименты, проводимые разными исследователями, показали, что при коэффициенте потерь материала пластины κ больше 0,04 результаты, получаемые по формуле (1.1.4) дают удовлетворительные результаты.

Опираясь на теорию волнового совпадения Д. Гётц [72] смог теоретически обосновать физическую природу полного прохождения звуковой диффузной волны через бесконечную пластину, которую ранее установил Г. Рейснер – полное прохождение звука возможно при совпадении фазовой скорости набегающей звуковой волны с фазовыми скоростями продольных и сдвиговых волн в пластине.

Наличие эффекта волнового совпадения помимо Л. Кремера в своих исследованиях получили так же и другие исследователи. В. И. Заборов [17] в своих работах о прохождении звуковой волны через бесконечный слой получил, что при частоте набегающей волны выше частоты волнового совпадения, звукоизоляционные свойства пластины растут интенсивнее, чем при частотах ниже частоты волнового совпадения.

Одним из первых, кто обнаружил явление волнового совпадения для ультразвуковой волны был Ф. Сандерс [95].

Занимаясь вопросом о прохождении звука через препятствия, Л. Беранек [65] сделал предположение, что на низких частотах набегающих звуковых волн преграда будет изолировать звук не по «закону массы», а по некоторому иному закону с учетом жесткости преграды и ее собственных частот колебаний. В связи с этим, исследователь добавил к частотному диапазону Л. Кремера третий участок – диапазон низких частот.

Вопросами о прохождении звуковых волн через бесконечную пластину занимался также Л. М. Лямшев [40]. Ученый установил, что на звукоизоляционные характеристики пластины влияют не только изгибные ее колебания, но и продольные колебания пластины.

Исследуя процесс прохождения звука через бесконечную тонкую пластину и проводя эксперименты по определению звукоизоляционных свойств пластин реальных размеров, такие ученые как Г. Бобран [66], Ф. Флеминг [71], В. Пьютц [89, 90], М. Хекль [75, 76] и другие [79, 80, 83, 85-87] обнаружили, что теоретические расчеты значительно расходятся с экспериментальными данными, особенно, при низких частотах набегающих звуковых волн. Получить решение для пластин реальных размеров им не удалось.

На пример М. Хекль в своих работах исследовал влияния способов закрепления и размеров пластины на ее звукоизоляционные свойства. В результате ученый получил, что на частотах ниже частоты волнового совпадения данные параметры не влияют на звукоизоляционные свойства пластины. Но это противоречило экспериментальным данным.

Р. Жос и К. Лямюр [77] в своих работах по исследованию звукоизоляционных свойств шарнирно опертой прямоугольной пластины конечных размеров смогли установить, что размеры пластины имеют влияние на значения звукоизоляции:

$$R = 10 \lg \left(\frac{\pi \omega \mu}{\rho c} \right)^2 - 10 \lg \left[\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \lg \frac{2\omega}{\Delta\omega} \right) + \frac{2c^2}{\pi^2 k \omega_{ep}} \frac{1}{\sqrt{\omega \cdot \omega_{ep}}} \times \right. \\ \left. \times \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} \left(1 + \frac{2\omega}{\omega_{ep}} + \frac{3\omega^2}{\omega_{ep}^2} \right) \right], \quad (1.1.5)$$

где a и b – размеры пластины в плане. Экспериментальную проверку формула (1.1.5) не прошла – существенные расхождения наблюдались в области низких частот набегающих волн.

Ю. А. Гурович [15] в своей работе о звукоизоляции прямоугольной пластины на низких частотах приходит к выводу, что минимальные значения

звукоизоляции обусловлены преимущественной передачей звуковой энергии резонансными факторами колебаний пластины. При этом учет механических потерь энергии в пластине должен привести к повышению звукоизоляции в этих областях частот в сторону сближения с законом массы. Таким образом, значения звукоизоляции реальной пластины должны находиться между теоритическими кривыми звукоизоляции для резонансного и нерезонансного прохождения.

Работая над исследованием процесса прохождения звука через пластины реальных размеров Л. М. Лямшев установил, что воздействуя на пластину звуковой волной с частотой равной собственной частоте колебаний пластины, ее амплитуда колебаний возрастает. Данные результаты исследователь получил для резонансных частот лежащих выше частоты волнового совпадения.

Л. М. Лямшев так же занимался исследованием процесса прохождения звуковых волн через пластины в виде бесконечной полосы. Результатами его работ стало открытие пространственно-частотного резонанса. Наблюдался этот сложный резонанс при падении звуковой волны под критическим углом, при котором звук отражался от преграды не зеркально. Суть пространственно-частотного резонанса в одновременном действии двух факторов: частота набегающей волны должна совпадать с собственной частотой пластины, и распределение давления в падающей волне по поверхности пластины должно совпадать с собственной формой колебаний пластины. В дальнейшем Л. М. Лямшев экспериментально подтвердил явление пространственно-частотного резонанса в области ультразвука [40].

Плотно исследованием процесса прохождения звука через однослойные преграды конечных размеров занимался М. С. Седов [48-55]. Результатами его исследований в этом направлении стала теория самосогласования волновых полей, суть которой в следующем: механизм прохождения звука через однослойные пластины реальных размеров имеет двойственный характер – резонансный и инерционный. Резонансное прохождение звука зависит от степени самосогласования звуковых полей и волнового поля собственных колебаний пластины, инерционное – от поверхностной массы ограждения. Иными словами,

это теория самосогласование звуковых полей с обеих сторон пластины и волновых полей собственных и инерционных колебаний пластины.

Звукоизоляционную характеристику М. С. Седов, по результатам своих работ, разделил на пять областей: первая – дорезонансная область, вторая – область простых резонансов, третья – область простых пространственных резонансов, четвертая – область неполных пространственных резонансов и пятая – область полных пространственных резонансов. Границами данных областей являются: нулевая частота, основная резонансная частота ω_1 , граничный простой пространственный резонанс ω_2 , граничный неполный пространственный резонанс ω_3 , граничный полный пространственный резонанс ω_4 .

Проводя эксперименты по исследованию звукоизоляционных свойств пластин М.С. Седов получил, что звукоизоляция пластин реальных размеров выше, чем у неограниченных пластин (закон массы) в области низких частот (частоты ниже граничной частоты полного пространственного резонанса ω_4). Это объясняется снижением инерциального прохождения звука в данном диапазоне благодаря конечности их геометрических размеров. При этом исследователь доказал, что варьируя габаритами пластины размеры этой области можно менять.

Согласно теории М. С. Седова, звукоизоляционные свойства однослойной преграды конечных размеров зависят от ее геометрии, жесткости на изгиб, частоты набегающей волны и коэффициента потерь энергии колебаний на внутреннее трение в материале при его деформации. При этом существенное влияние на звукоизоляцию оказывают способы закрепления краев пластины, ее размеры и жесткость на изгиб.

Опираясь на теорию самосогласования волновых полей, В. Н. Бобылев [7-9] изучал звукоизоляционные свойства преград при низких частотах набегающих звуковых волн. В результате были получены инженерные методы расчета звукоизоляции однослойных преград. Методы прошли верификацию многочисленными экспериментами.

Таким образом, процесс прохождения звука через однослойные преграды изучен достаточно широко. Наиболее точно, для пластин реальных размеров, его описывает теория самосогласования волновых полей М. С. Седова.

Следующим этапом изучения механизма прохождения звука через преграды является исследование звукоизоляционных свойств многослойных пластин. Одним из первых, кто занимался данным вопросом, был Л. Беранек [62-64]. Исследователь изучал механизм прохождения звуковой волны набегающей по нормали к поверхности пластин. Пластина представляла собой систему чередующихся слоев. Звукоизоляционные свойства такой преграды Л. Беранек определял, применяя импедансный метод.

Аналогичную задачу, но с учетом диффузного падения звуковой волны решал К. Малхоланд [83, 84].

В. Томсон [99] исследуя акустические свойства многослойных преград рассматривал систему из параллельных пластин. Используя матричный метод для описания уравнений движения пластины В. Томсон получил, что если пластины не имеют воздушного зазора между собой, то задачу нельзя свести к случаю одиночной однослойной пластины. В этом случае, необходимо рассматривать каждый слой в совокупности с примыкающими слоями: уравнения для отдельного взятого слоя должны быть связаны с уравнениями примыкающего слоя непрерывностью скорости частиц, нормальных и касательных напряжений на их границе.

Развитием и уточнением теории В. Томсона по исследованию звукоизоляционных свойств системы упругих слоев занимались Н.Н. Морозова, С.А. Рыбак [41, 42], Б.Д. Тарлаковский [47], В.И. Гельфгат [57]. Исследователи разработали инженерные методы и программы на ЭВМ для анализа звукоизоляционных свойств многослойных преград.

Оценкой влияния механических и вязкоупругих свойств материалов многослойной пластины на ее звукоизоляционные свойства занимались И. Гиадера и С. Леже [73, 74]. В их модели уравнения движения многослойной пластины и граничные условия не зависели от количества слоев. Многослойная

пластина заменялась эквивалентной однослойной. Уравнения описывающие движения пластины решены применяя вариационный принцип для прямоугольной свободно опертой пластины. Авторами получены частоты и формы колебаний многослойной пластины. Исследователи показали, что увеличение числа слоев пластины при ее неизменной массе ведет к повышению граничной частоты волнового совпадения.

Исследованием звукоизоляционных свойств трехслойных пластин занимался И. Кервин [78]. Анализируя колебания трехслойных демпфирующих панелей без учета граничных условий, ученый получил выражение, позволяющие определить коэффициент потерь в зависимости от свойств материалов слоев и геометрии пластины.

В. И. Юлин [58, 59] занимался анализом колебания трехслойных пластин с жестким наполнителем. Автор получил выражения для определения скорости распространения изгибных и сдвиговых волн в трехслойной пластине. В работе [60] В. И. Юлин исследовал звукоизоляционные свойства трехслойной пластины с относительно толстым несжимаемым средним слоем. Исследователь получил решение уравнения свободных колебаний и формулу по определению граничной частоты такой пластины. Анализируя влияние несжимаемого среднего слоя на граничную частоту, исследователь пришел к выводу, что подобрав подходящий средний слой можно повысить звукоизоляцию трехслойной пластины не увеличивая ее массы.

Изучением механизма прохождения звука через трехслойные пластины с вязкоупругим наполнителем занимались Д. Росс, И. Кервин и Е. Унгар [94]. Исследователи предложили метод для анализа демпфирования вязкоупругого слоя при его растяжении-сжатии и сдвиге. При этом авторы оценили максимально возможное демпфирование, которое можно достичь через функцию относительных размеров демпфирующей панели.

Исследованием влияния коэффициента потерь материала наполнителя на звукоизоляционные свойства бесконечной трехслойной пластины занимались Бешенков С.Н., Голоскоков Е.Г. и Ольшанский В.П. [4-6]. В своей работе [5] они

считали, что в пластине устанавливается два типа колебаний: изгибные и симметричные относительно срединной плоскости. При построении уравнений движения исследователи учитывали деформации поперечного сдвига и полагали, что распределение тангенциальных перемещений по толщине заполнителя подчиняется линейному закону. Несущие слои пластины подчиняются гипотезе Кирхгофа, а деформация заполнителя по толщине происходит по линейному закону. Потери в несущих слоях не учитывались. По изложенной теории были построены кривые звукоизоляции трехслойных пластин с разной толщиной несущих слоев и различными коэффициентами потерь материала заполнителя. Сданы выводы о том, что рост звукоизоляции трехслойных пластин на частотах близких к граничной частоте, на граничной частоте и выше граничной наблюдается при увеличении коэффициента потерь материала заполнителя.

Следует отметить обстоятельные работы А. А. Кочкина [22-25] по исследованию звукоизоляционных свойств трёхслойных пластин реальных размеров с вибродемпфирующим слоем. В процессе вывода дифференциальных уравнений свободных колебаний трехслойной пластины с вибродемпфирующим промежуточным слоем использовались гипотезы [10] и основные положения теории слоистых плит Э. И. Григолюка и П. П. Чулкова [14]: к внешним слоям применяются гипотезы Кирхгофа–Лява, а к заполнителю – гипотеза о постоянстве по его толщине поперечных сдвигов.

А. А. Кочкин [25] установил, что в области неполных пространственных резонансов звукоизоляция слоистых вибродемпфированных элементов управляется массой, частотой звука, коэффициентом потерь каждого конструктивного слоя элемента, его жесткостью и размерами.

На основе данных теоретических исследований и полученных формул для оценки звукоизоляции слоистых элементов с вибродемпфирующими слоями разработана методика расчета звукоизоляции слоистых элементов и компьютерные программы для ее реализации. Предложенная методика дает возможность производить анализ зависимости звукоизоляции слоистых элементов от различных факторов и тем самым выполнять их целенаправленное

проектирование путем варьирования, например, величинами динамических модулей упругости и коэффициентом потерь материалов пластины [25].

Как видно из представленного обзора, механизм прохождения звуковых волн через преграды изучен достаточно широко. Исследованы звукоизоляционные свойства однослойных и многослойных пластин неограниченных и реальных размеров. Проанализировано влияние геометрических размеров, способов закрепления, физических и механических свойств пластин на их звукоизоляционные характеристики. Исследовано влияние угла падения звуковых волн на преграды различных конфигураций. Получены инженерные методы и программы на ЭВМ для проектирования эффективной звукоизоляции. Изучены звукоизоляционные свойства трехслойных пластин с жестким, упругим и вязкоупругим наполнителем.

Однако при рассмотрении трехслойных пластин, как правило, не учитываются поперечное обжатие и сдвиг слоев [98], что не позволяет достаточно полно отразить истинную картину их деформированного состояния. При этом наполнитель представляет собой некий «сплошной слой». Также практически не изучено влияние геометрии набегающей волны на акустические свойства препятствия.

В настоящей работе исследуются звукоизоляционные свойства шарнирно опертой трехслойной пластины с учетом поперечного обжатия наполнителя и сдвига слоев. При этом наполнитель представляет собой не «сплошной слой», а конструкцию – сотовый наполнитель, геометрические замеры которого являются параметрами задачи. Рассматривается трехслойная пластина неограниченных размеров, пластина в виде бесконечной полосы и пластина реальных размеров. При этом анализируется влияние формы набегающей волны (плоская, сферическая и цилиндрическая) на звукоизоляционные свойства пластины. Для описания колебаний такой пластины используются уравнения динамики многослойных оболочек с трансверсально-мягким наполнителем В.А. Иванова, и В. Н. Паймушина [19, 20].

§ 1.2. Постановка задачи о прохождении волн через пластину сложной структуры

Рассматриваемая в модели пластина окружена с двух сторон акустическими средами «1» и «2» (см. рисунок. 1.2.1). Акустическая среда «1» имеет плотность ρ_1 , со скоростью распространения в ней звуковых волн c_1 . Акустическая среда «2» обладает плотность ρ_2 , а скорость распространения в ней звуковых волн c_2 . Пластина расположена в декартовой системе координат $Oxyz$, при этом предполагается, что плоскость Oxy для пластины является срединной, а ось Oz направлена в глубину среды «2». Ось Oy направлена от наблюдателя.

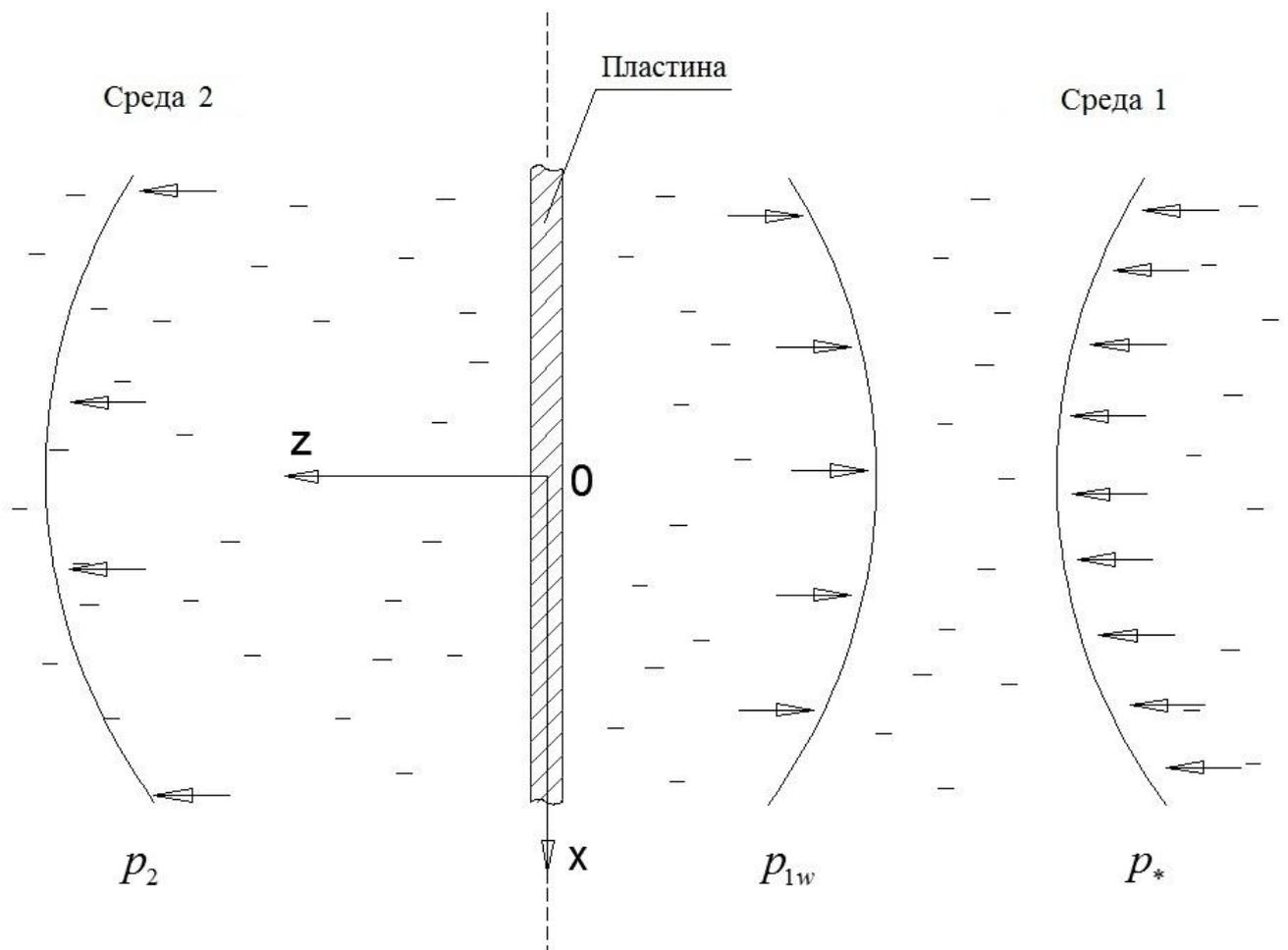


Рис. 1.2.1. Модель взаимодействия акустических сред с пластиной.

На пластину набегают гармоническая звуковая волна с амплитудой давления на фронте p_* и частотой ω . В результате ее взаимодействия с пластиной в окружающих средах «1» и «2» возбуждаются давления с амплитудами p_1 и p_2 соответственно. Где p_2 – амплитуда давления прошедшей волны, p_1 – определяется как:

$$p_1 = p_* + p_{1w}. \quad (1.2.1)$$

В формуле (1.2.1) p_{1w} – амплитуда давления отраженной волны.

Основной целью работы является вычисление коэффициента поглощения преграды как функции частоты ω и пространственных координат x и y :

$$\eta = \left| \frac{p_2}{p_*} \right|_{z=0}, \quad (1.2.2)$$

а затем определение его максимального значения в зависимости от параметров пластины:

$$\eta_m = \max_{\substack{(x,y) \in N \\ \omega \in [\omega_1, \omega_2]}} \eta|_{z=0}. \quad (1.2.3)$$

В равенстве (1.2.3): N – двумерная область, занимаемая точками срединной плоскости пластины, $[\omega_1, \omega_2]$ – заданный диапазон частот.

Помимо коэффициентов (1.2.2) и (1.2.3) для качественной оценки звукоизоляционных свойств трехслойной пластины в работе используется показатель звукоизоляции R_p , измеряемый в децибелах (дБ):

$$R_p = -20 \cdot \lg(\eta), \quad (1.2.4)$$

и его минимальное значение:

$$R_{pm} = \min_{\substack{(x,y) \in N \\ \omega \in [\omega_1, \omega_2]}} R_p.$$

В зависимости от размера пластины, положения источника шума и формы движущейся от него волны, пластина может быть представлена в виде трех вариантов:

1) Источник по своим габаритам является локальным по отношению к размерам пластины. В этом случае пластина может быть представлена бесконечно

большой по длине и ширине. Другими словами габариты пластины на процесс поглощения звуковой волны влияния не оказывают.

2) Сочетание размеров пластины и источника таковы, что размеры пластины по одной координате сопоставимы с размерами фронта звуковой волны, а по другой размер пластины является бесконечным.

3) Источник шума по размерам фронта своего движения сопоставим с размерами звукоизолирующей пластины. В этом случае пластину можно рассматривать как пластину конечных размеров с использованием соответствующего математического аппарата.

Для решения всего спектра задач изоляции гармонических волн слышимого диапазона необходимо иметь метод дающий специалистам возможность реализовывать все три указанных выше варианта геометрии пластины. Для этого необходимо:

1) Применить систему уравнений, описывающую поведение пластины с учетом ее геометрических параметров и физических свойств составляющих пластину материалов.

2) Описать акустические среды перед и за пластиной, а также типы набегающих на пластину волн.

При этом математическая постановка задачи включает в себя задание амплитуды давления набегающей волны p_* , краевую задачу для пластины, а также связь давлений p_1 и p_2 с кинематическими параметрами пластины.

§ 1.3. Уравнения движения трехслойной пластины

Объектом исследования является трехслойная пластина симметричной структуры, состоящая из двух несущих слоев и заполнителя между ними (см. рисунок 1.3.1).

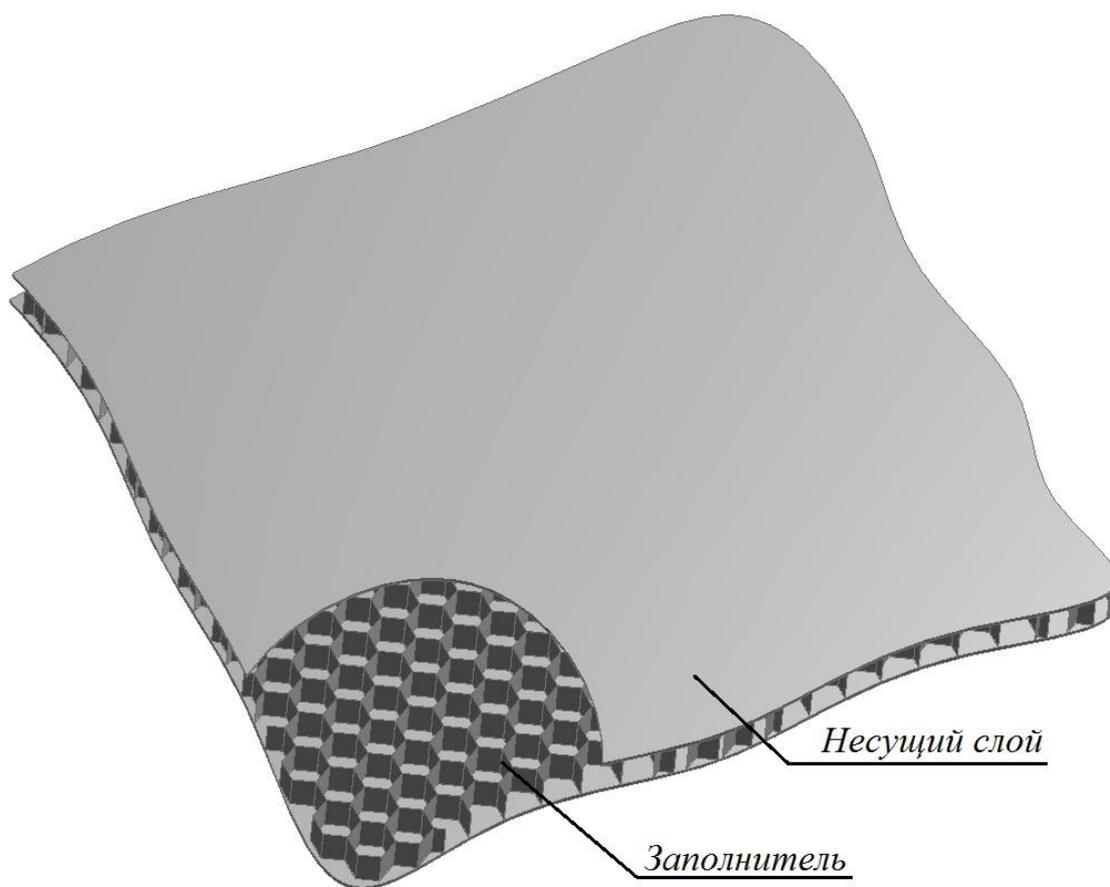


Рис. 1.3.1. Структура пластины.

Несущие слои пластины являются упругими и изотропными, с модулем упругости первого рода E и коэффициентом Пуассона ν , имеют толщину $2t$. Заполнитель ортотропный, сотовой конфигурации, с модулем упругости E_z и коэффициентом Пуассона ν_z , имеет толщину $2h$. Заполнитель имеет модуль обжатия E_3 и модули поперечного сдвига G_1 и G_2 в направлениях осей Ox и Oy соответственно.

Полагаем, что на несущие слои действуют внешние нормальные давления p_1 и p_2 . Через $u_1^{(k)}$ и $u_2^{(k)}$ обозначим амплитуды тангенциальных перемещений вдоль осей Ox и Oy соответственно, а через $w^{(k)}$ нормальное перемещение k -го несущего слоя. q^1 и q^2 – амплитуды постоянных по толщине поперечных касательных напряжений в заполнителе, направленных по осям Ox и Oy . Тогда уравнения движения пластины принимают вид [19, 20] (наличие координаты после запятой соответствует дифференцированию по ней, а точки – дифференцированию по времени τ):

$$\begin{aligned}
\rho_c \ddot{u}_1^c &= L_{11}(u_1^c) + L_{12}(u_2^c), \\
\rho_c \ddot{u}_2^c &= L_{21}(u_1^c) + L_{22}(u_2^c), \\
\rho_a \ddot{u}_1^a &= L_{11}(u_1^a) + L_{12}(u_2^a) + 2q^1, \\
\rho_a \ddot{u}_2^a &= L_{21}(u_1^a) + L_{22}(u_2^a) + 2q^2, \\
\rho_c \ddot{w}_c - \underline{m_c \Delta \ddot{w}_c} + \underline{\rho_{wq}(\ddot{q}_{,x}^1 + \ddot{q}_{,y}^1)} &= -D\Delta_2^2 w_c + 2k_1(q_{,x}^1 + q_{,y}^1) + p_1 - p_2, \\
\rho_{aw} \ddot{w}_a - \underline{m_a \Delta \ddot{w}_a} &= -D\Delta_2^2 w_a - 2c_3 w_a + p_1 + p_2, \\
\underline{\rho_{q1} \ddot{q}^1} - \underline{\rho_{wq1} \ddot{w}_{c,x}} &= u_1^a - k_1 w_{c,x} - k_2 (q_{,x}^1 + q_{,y}^2)_{,x} + k_{31} q^1, \\
\underline{\rho_{q2} \ddot{q}^2} - \underline{\rho_{wq2} \ddot{w}_{c,y}} &= u_2^a - k_1 w_{c,y} - k_2 (q_{,x}^1 + q_{,y}^2)_{,y} + k_{32} q^2.
\end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Где:

$$\begin{aligned}
u_i^c &= u_i^{(1)} + u_i^{(2)}, u_i^a = u_i^{(1)} - u_i^{(2)} \quad (i=1,2), \\
w_c &= w^{(1)} + w^{(2)}, w_a = w^{(1)} - w^{(2)};
\end{aligned} \tag{1.3.2}$$

$$\begin{aligned}
L_{11} &= B \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right), \\
L_{12} = L_{21} &= B \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \\
L_{22} &= B \left(\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right), \\
\Delta_2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.
\end{aligned} \tag{1.3.3}$$

В формулах (1.3.1, 1.3.3) B – жесткость несущих слоев на растяжение-сжатие, D – жесткость несущих слоев на изгиб:

$$B = \frac{2Et}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Bt^2}{3}. \quad (1.3.4)$$

Коэффициенты k_1 , k_2 , k_{3i} и c_3 определяются как:

$$k_1 = t + h, \quad k_2 = \frac{h^2}{3c_3}, \quad k_{3i} = \frac{2h}{G_i}, \quad (i = 1, 2), \quad (1.3.5)$$

$$c_3 = \frac{E_3}{2h}. \quad (1.3.6)$$

Модуль обжатия заполнителя E_3 [2]:

$$E_3 = \frac{4dE_z}{3(1-\nu_z^2)a \sin(\varphi)}. \quad (1.3.7)$$

$$\rho_a = 2\rho_b t, \quad \rho_c = \rho_a + \rho h, \quad \rho_{aw} = \rho_a + \frac{\rho h}{3}. \quad (1.3.8)$$

Где ρ_b – плотность материала несущих слоев, φ – угол между стенками заполнителя, а ρ – осредненная плотность заполнителя [2]:

$$\rho = \frac{4d\rho_z}{3a \sin(\varphi)}. \quad (1.3.9)$$

В формуле (1.3.9) d – толщина стенки заполнителя, a – длина стенки заполнителя, ρ_z – плотность материала заполнителя.

$$\rho_{wqi} = \frac{2\rho h^3}{3G_i}, \quad \rho_{qi} = \frac{2\rho_{wqi}}{G_i}, \quad k_b = \frac{2t^3}{3}, \quad (1.3.10)$$

$$m_c = k_b \rho_b + \frac{\rho h^3}{3}, \quad m_a = k_b \rho_b + \rho \left(\frac{2h^3}{15} + ht^2 + \frac{2th^2}{3} \right).$$

Далее будем рассматривать частный случай трансверсально-мягкого заполнителя, где модули поперечного сдвига заполнителя равны между собой – $G_1 = G_2 = G$. В этом случае в уравнениях (1.3.5) и (1.3.10) следует задать:

$$\rho_{wq1} = \rho_{wq2} = \rho_{wq} = \frac{2\rho h^3}{3G}, \quad \rho_{q1} = \rho_{q2} = \rho_q = \frac{2\rho_{wq}}{G}, \quad k_{31} = k_{32} = k_3 = \frac{2h}{G}. \quad (1.3.11)$$

Модуль поперечного сдвига заполнителя G и модуль сдвига материала заполнителя G_z определяется как [2]:

$$G = G_z \frac{2d(1 + \cos^2(\varphi))}{3a \sin(\varphi)}, \quad G_z = \frac{E_z}{2(1 + \nu_z)}. \quad (1.3.12)$$

Как показано в [19, 20], во многих случаях подчеркнутые слагаемые в (1.3.1) могут быть опущены. Тогда с учетом (1.3.11) система уравнений приобретает вид:

$$\begin{aligned} L_{11}(u_1^c) + L_{12}(u_2^c) &= \rho_c \ddot{u}_1^c, \\ L_{21}(u_1^c) + L_{22}(u_2^c) &= \rho_c \ddot{u}_2^c, \\ L_{11}(u_1^a) + L_{12}(u_2^a) + 2q^1 &= \rho_a \ddot{u}_1^a, \\ L_{21}(u_1^a) + L_{22}(u_2^a) + 2q^2 &= \rho_a \ddot{u}_2^a, \\ -D\Delta_2^2 w_c + 2k_1(q_{,x}^1 + q_{,y}^2) + p_1 - p_2 &= \rho_c \ddot{w}_c, \\ -D\Delta_2^2 w_a - 2c_3 w_a + p_1 + p_2 &= \rho_{aw} \ddot{w}_a, \\ u_1^a - k_1 w_{c,x} - k_2(q_{,x}^1 + q_{,y}^2)_{,x} + k_3 q^1 &= 0, \\ u_2^a - k_1 w_{c,y} - k_2(q_{,x}^1 + q_{,y}^2)_{,y} + k_3 q^2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

В эту систему уравнений заложено описание всех геометрических параметров пластины, такие как толщина несущих слоев и заполнителя, длина стенки заполнителя, его толщина и угол между стенками. Эти параметры входят в формулы для определения коэффициентов k_1 , k_2 , k_3 , жесткости несущих слоев на растяжение-сжатие B , жесткости несущих слоев на изгиб D . Система уравнений описывает также физические свойства материалов пластины.

К системе уравнений (1.3.13) необходимо добавить начальные и граничные условия. Первые из них рассматривать не будем, поскольку далее речь пойдет о стационарных задачах.

Среди всех возможных граничных условий на контуре Γ срединной плоскости σ остановимся на условиях шарнирного опирания [19, 20]:

$$\begin{aligned} u_\tau^c \Big|_\Gamma = u_\tau^a \Big|_\Gamma = w_c \Big|_\Gamma = w_a \Big|_\Gamma = 0, (T_n^{(1)} + T_n^{(2)}) \Big|_\Gamma = (T_n^{(1)} - T_n^{(2)}) \Big|_\Gamma = 0, \\ (M_n^{(1)} + M_n^{(2)}) \Big|_\Gamma = (M_n^{(1)} - M_n^{(2)}) \Big|_\Gamma = 0, (q_{,x}^1 + q_{,y}^2) \Big|_\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

Здесь $M_n^{(k)} = M_{(k)}^{ij} n_i n_j$; $T_n^{(k)} = T_{(k)}^{ij} n_i n_j$; $u_n = u_i n^i$ и $u_\tau = u_i \tau^i$ – проекции вектора с координатами u_1, u_2 на единичные внешний нормальный \mathbf{n} и касательный $\boldsymbol{\tau}$ векторы к кривой Γ соответственно; $n_1 = n^1, n_2 = n^2$ и $\tau_1 = \tau^1, \tau_2 = \tau^2$ – координаты этих единичных векторов; $M_{(k)}^{ij}$ и $T_{(k)}^{ij}$ – компоненты тензоров погонных моментов и усилий в k -м несущем слое. Последние величины определяются так:

$$\begin{aligned} M_{(k)}^{ij} = D_{(k)}^{ijnm} \chi_{nm}^{(k)}, T_{(k)}^{ij} = B_{(k)}^{ijnm} \varepsilon_{nm}^{(k)}, M_{(k)}^{ij} = D_{(k)}^{ijnm} \chi_{nm}^{(k)}, \\ D_{(k)}^{ijnm} = \frac{2h_{(k)}^3}{3} E_{(k)}^{ijnm}, B_{(k)}^{ijnm} = 2h_{(k)} E_{(k)}^{ijnm}, \chi_{nm}^{(k)} = -\nabla_n \nabla_m w^{(k)}, \varepsilon_{nm}^{(k)} = \nabla_n u_m^{(k)}. \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

Где $E_{(k)}^{ijnm}$ и $2h_{(k)}$ – компоненты тензора упругих постоянных для k -го несущего слоя и его толщина; $\varepsilon_{nm}^{(k)}$ и $\chi_{nm}^{(k)}$ – ковариантные компоненты тензоров тангенциальных деформаций и искривлений срединной поверхности $\sigma_{(k)}$ этого слоя.

Для изотропного материала в случае принятия дополнительной гипотезы об отсутствии нормальных напряжений они имеют вид ($\nu_{(k)}$, $E_{(k)}$, $G_{(k)}$ и $\lambda_{(k)}$ – коэффициент Пуассона, модули упругости и упругая постоянная Ламе; g^{ij} – компоненты метрического тензора):

$$\begin{aligned} E_{(k)}^{ijnm} = \frac{1 - 2\nu_{(k)}}{1 - \nu_{(k)}} \lambda_{(k)} g^{ij} g^{nm} + G_{(k)} (g^{in} g^{jm} + g^{im} g^{jn}), \\ \lambda_{(k)} = \frac{E_{(k)} \nu_{(k)}}{(1 + \nu_{(k)})(1 - 2\nu_{(k)})}. \end{aligned} \quad (1.3.16)$$

Подставляя (1.3.16) в (1.3.15) и учитывая симметрию пластины и ранее принятые обозначения, приходим к следующим равенствам:

$$\begin{aligned}
M_{(k)}^{ij} &= -D \left[\nu g^{ij} \Delta w^{(k)} + (1-\nu) g^{in} g^{jm} \nabla_n \nabla_m w^{(k)} \right], \\
T_{(k)}^{ij} &= B \left[\nu g^{ij} \nabla_n u_{(k)}^n + (1-\nu) \varepsilon_{(k)}^{ij} \right].
\end{aligned} \tag{1.3.17}$$

С учетом принятой метрики ($g^{ij} = \delta^{ij}$) формулы (1.3.17) записываются так:

$$\begin{aligned}
M_{(k)}^{11} &= -D \left[\nu \Delta_2 w^{(k)} + (1-\nu) w_{,xx}^{(k)} \right], \quad M_{(k)}^{12} = -D(1-\nu) w_{,xy}^{(k)}, \\
T_{(k)}^{11} &= B \left(u_{1,x}^{(k)} + \nu u_{2,y}^{(k)} \right), \quad T_{(k)}^{22} = B \left(u_{2,y}^{(k)} + \nu u_{1,x}^{(k)} \right), \\
M_{(k)}^{22} &= -D \left[\nu \Delta_2 w^{(k)} + (1-\nu) w_{,yy}^{(k)} \right], \quad T_{(k)}^{12} = B \frac{1-\nu}{2} \left(u_{1,y}^{(k)} + u_{2,x}^{(k)} \right).
\end{aligned} \tag{1.3.18}$$

На прямых $x = x_*$ ($n_1 = \pm 1, n_2 = 0$, $\tau_1 = 0, \tau_2 = \mp 1$, где верхний знак соответствует сонаправленному оси Ox вектору \mathbf{n} , а нижний - противоположному случаю) и $y = y_*$ ($n_1 = 0, n_2 = \pm 1$, $\tau_1 = \pm 1, \tau_2 = 0$, где верхний знак соответствует сонаправленному оси Oy вектору \mathbf{n} , а нижний - противоположному случаю), граничные условия (1.3.14) приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned}
u_2^c \Big|_{x=x_*} &= u_2^a \Big|_{x=x_*} = w_c \Big|_{x=x_*} = w_a \Big|_{x=x_*} = 0, \quad (T_{(1)}^{11} + T_{(2)}^{11}) \Big|_{x=x_*} = (T_{(1)}^{11} - T_{(2)}^{11}) \Big|_{x=x_*} = 0, \\
(M_{(1)}^{11} + M_{(2)}^{11}) \Big|_{x=x_*} &= (M_{(1)}^{11} - M_{(2)}^{11}) \Big|_{x=x_*} = 0, \quad (q_{,x}^1 + q_{,y}^2) \Big|_{x=x_*} = 0; \\
u_2^c \Big|_{y=y_*} &= u_2^a \Big|_{y=y_*} = w_c \Big|_{y=y_*} = w_a \Big|_{y=y_*} = 0, \\
(T_{(1)}^{22} + T_{(2)}^{22}) \Big|_{y=y_*} &= (T_{(1)}^{22} - T_{(2)}^{22}) \Big|_{y=y_*} = 0, \\
(M_{(1)}^{22} + M_{(2)}^{22}) \Big|_{y=y_*} &= (M_{(1)}^{22} - M_{(2)}^{22}) \Big|_{y=y_*} = 0, \\
(q_{,x}^1 + q_{,y}^2) \Big|_{y=y_*} &= 0.
\end{aligned}$$

Последние две группы равенств с учетом формул (1.3.18) и обозначений, записываются в перемещениях так:

$$\begin{aligned}
u_2^c \Big|_{x=x_*} &= u_2^a \Big|_{x=x_*} = w_c \Big|_{x=x_*} = w_a \Big|_{x=x_*} = 0, \\
(u_{1,x}^c + \nu u_{2,y}^c) \Big|_{x=x_*} &= (u_{1,x}^a + \nu u_{2,y}^a) \Big|_{x=x_*} = 0, \\
(q_{,x}^1 + q_{,y}^2) \Big|_{x=x_*} &= 0, \\
\left[\nu \Delta_2 w_c + (1-\nu) w_{c,xx} \right] \Big|_{x=x_*} &= \left[\nu \Delta_2 w_a + (1-\nu) w_{a,xx} \right] \Big|_{x=x_*} = 0;
\end{aligned} \tag{1.3.19}$$

$$\begin{aligned}
u_2^c \Big|_{y=y_*} &= u_2^a \Big|_{y=y_*} = w_c \Big|_{y=y_*} = w_a \Big|_{y=y_*} = 0, \\
\left[u_{2,y}^c + \nu u_{1,x}^c \right] \Big|_{y=y_*} &= \left[u_{2,y}^a + \nu u_{1,x}^a \right] \Big|_{y=y_*} = 0, \\
\left(q_{,x}^1 + q_{,y}^2 \right) \Big|_{y=y_*} &= 0, \\
\left[\nu \Delta_2 w_c + (1-\nu) w_{c,yy} \right] \Big|_{y=y_*} &= \left[\nu \Delta_2 w_a + (1-\nu) w_{a,yy} \right] \Big|_{y=y_*} = 0.
\end{aligned} \tag{1.3.20}$$

§ 1.4. Уравнения движения акустической среды

В системе координат, описанной выше, рассматриваем движение акустической среды, которое описывается волновым уравнением относительно потенциала скорости Φ [11]:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \Phi, \quad \Delta = \Delta_2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1.4.1)$$

При этом для давления p и вектора скорости среды \mathbf{v} имеют место равенства:

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad \mathbf{v} = \text{grad } \Phi. \quad (1.4.2)$$

В этих формулах c и ρ_0 – скорость звука и плотность акустической среды.

Далее будем рассматривать только гармонические волны:

$$\Phi = \Phi_a e^{i\omega t}, \quad (1.4.3)$$

где Φ_a – амплитуда волны потенциала, ω – частота, i – мнимая единица.

Подставляя (1.4.3) в уравнение (1.4.1), приходим к уравнению Гельмгольца:

$$\Delta \Phi_a + k^2 \Phi_a = 0, \quad k = \omega/c, \quad (1.4.4)$$

где k – волновое число. При этом для давления из (1.4.2) имеем следующее равенство:

$$p = p_a e^{i\omega t}, \quad p_a = -i\omega\rho_0 \Phi_a. \quad (1.4.5)$$

Если область, в которой ищется решение уравнения Гельмгольца (1.4.4) неограниченна, то его решение должно удовлетворять условиям излучения Зоммерфельда (r – длина радиус-вектора):

– пространственная и одномерная задачи

$$\frac{\partial \Phi_a}{\partial r} + ik\Phi_a = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (1.4.6)$$

– плоская задача

$$\frac{\partial \Phi_a}{\partial r} + ik\Phi_a = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (1.4.7)$$

Далее будем использовать одномерные волны, распространяющиеся в бесконечном пространстве – плоские, сферические и цилиндрические [11]:

А. Плоские волны распространяются вдоль положительного направления оси Oz . В этом случае полагаем $\Phi_a = \Phi_a(z)$. Как следует из уравнения (1.4.4) амплитуда потенциала удовлетворяет уравнению (здесь штрихами обозначена производная по z):

$$\Phi_a'' + k^2\Phi_a = 0.$$

Его решение, удовлетворяющее условию (1.4.6), имеет вид (A_Φ – произвольная постоянная, $r = z$):

$$\Phi_a = A_\Phi e^{-ikz}.$$

Отсюда и из (1.4.3), (1.4.5) получаем следующие равенства для потенциала и давления плоской волны:

$$\Phi = A_\Phi e^{-ik(z-ct)}, \quad p = A_p e^{-ik(z-ct)}, \quad A_p = -i\omega\rho_0 A_\Phi. \quad (1.4.8)$$

Б. Цилиндрические волны распространяются от источника расположенного в точке $O_1(0,0,-L)$. Вводим цилиндрическую систему координат с центром в O_1 , параллельной Oz осью и радиусом r_1 :

$$r_1 = \sqrt{x^2 + (z+L)^2}.$$

Считая, что $\Phi_a = \Phi_a(r_1)$, из (1.4.4) получаем следующее уравнение относительно этой функции (здесь штрихами обозначена производная по r_1):

$$r_1^{-1}(r_1\Phi_a')' + k^2\Phi_a = 0.$$

Его общее решение имеет вид [12]:

$$\Phi_a = A_\Phi H_0^{(2)}(kr_1) + B_\Phi H_0^{(1)}(kr_1),$$

где $H_\nu^{(1)}(\zeta)$ и $H_\nu^{(2)}(\zeta)$ – функции Ханкеля порядка ν ; A_Φ и B_Φ – произвольные постоянные.

Учитывая равенства [1]:

$$H_0^{(j)'}(\zeta) = -H_1^{(j)}(\zeta) \quad (j=1,2),$$

$$H_\nu^{(1)}(\zeta) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(\zeta-\mu)\pi}, \quad H_\nu^{(2)}(\zeta) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i(\zeta-\mu)\pi} \quad (\zeta \rightarrow +\infty), \quad \mu = \frac{2\nu+1}{4},$$

получаем, что условию излучения (1.4.7), где следует положить $r = r_1$, удовлетворяет решение:

$$\Phi_a = A_\Phi H_0^{(2)}(kr_1).$$

Отсюда с учетом (1.4.3) и (1.4.5) приходим к следующим равенствам для потенциала и давления цилиндрической волны:

$$\Phi = A_\Phi H_0^{(2)}(kr_1) e^{i\omega t}, \quad p = A_p H_0^{(2)}(kr_1) e^{i\omega t}, \quad A_p = -i\omega\rho_0 A_\Phi. \quad (1.4.9)$$

В. Сферические волны распространяются от источника расположенного в точке $O_1(0,0,-L)$. Вводим сферическую систему координат с центром в O_1 и радиусом r_2 :

$$r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+L)^2}.$$

Считая $\Phi_a = \Phi_a(r_2)$, из (1.4.4) получаем следующее уравнение относительно этой функции (здесь штрихами обозначена производная по r_2):

$$r_2^{-2} (r_2^2 \Phi_a')' + k^2 \Phi_a = 0.$$

Его общее решение находится с помощью введения новой функции $\Phi_a(r_2)$ и имеет вид:

$$\Phi_a = r_2^{-1} (A_\Phi e^{-ikr_2} + B_\Phi e^{ikr_2}).$$

Отсюда находим, что условию излучения (1.4.6), где следует положить $r = r_2$, удовлетворяет решение:

$$\Phi_a = r_2^{-1} A_\Phi e^{-ikr_2}.$$

Отсюда аналогично (1.4.8) и (1.4.9) приходим к следующим равенствам для потенциала и давления сферической волны:

$$\Phi = A_\Phi r_2^{-1} e^{-ik(r_2-ct)}, \quad p = A_p r_2^{-1} e^{-ik(r_2-ct)}, \quad A_p = -i\omega\rho_0 A_\Phi. \quad (1.4.10)$$

ГЛАВА 2. ПРОХОЖДЕНИЕ ВОЛН РАЗЛИЧНОГО ТИПА ЧЕРЕЗ БЕСКОНЕЧНУЮ ТРЕХСЛОЙНУЮ ПЛАСТИНУ

§ 2.1. Постановка задачи о прохождении волн через бесконечную трехслойную пластину

Рассматривается бесконечная прямоугольная трехслойная пластина, состоящая из двух несущих слоев с заполнителем между ними. Несущие слои упругие и изотропные, заполнитель ортотропный, сотовой конфигурации. Пластина окружена с двух сторон акустическими средами «1» и «2». Используется прямоугольная декартова система координат $Oxuz$. При этом предполагается, что плоскость Oxu для пластины является срединной, а ось Oz направлена в глубину среды «2». Ось Oy направлена от наблюдателя (рис. 2.1.1).

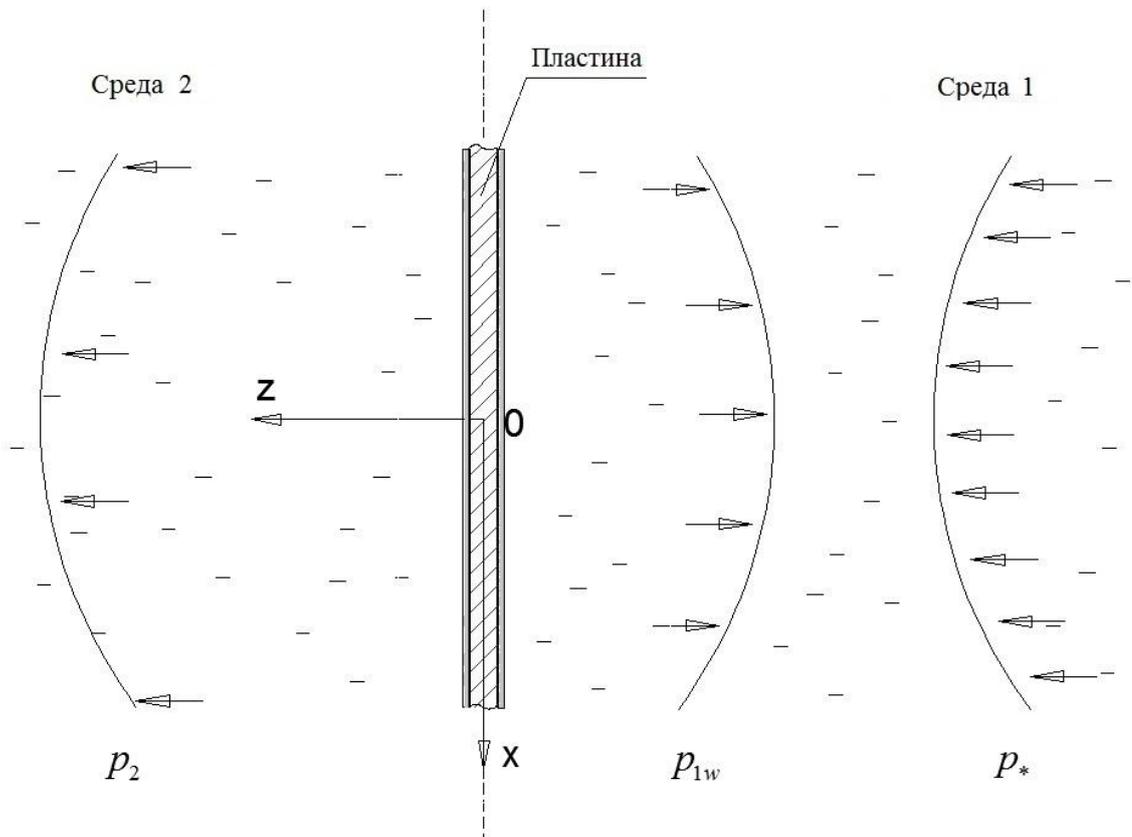


Рис. 2.1.1. Модель взаимодействия акустических сред при прохождении волны через бесконечную прямоугольную трехслойную пластину.

На пластину набегают плоская или цилиндрическая звуковая волна с амплитудой давления на фронте p_* и частотой ω . В результате ее взаимодействия с пластиной в окружающих средах «1» и «2» возбуждаются давления с амплитудами p_1 и p_2 соответственно. Где p_2 – амплитуда давления прошедшей волны, p_1 – сумма амплитуд давлений падающей p_* и отраженной p_{1w} .

Амплитуда давления набегающей волны p_* и ее значение на препятствие p_{*0} зависит от геометрии набегающей волны, и в соответствии с формулами (1.4.8), (1.4.9) и с учетом одинаковых физических свойств акустических сред записываются следующим образом:

– плоская волна

$$p_* = \Delta p e^{-ikz}, \quad p_{*0} = \Delta p = -i\omega\rho_0 A_\Phi; \quad (2.1.1)$$

– цилиндрическая волна

$$p_* = -i\omega\rho_0 A_\Phi H_0^{(2)}(kr_1) = \Delta p \frac{H_0^{(2)}(kr_1)}{H_0^{(2)}(kL)}, \quad r_1 = \sqrt{x^2 + (z+L)^2}, \quad (2.1.2)$$

$$p_{*0} = \Delta p \frac{H_0^{(2)}(kr_{10})}{H_0^{(2)}(kL)}, \quad r_{10} = \sqrt{x^2 + L^2}.$$

В формулах (2.1.1), (2.1.2): A_Φ – произвольная постоянная, ρ_1 – плотность среды «1», L – расстояние от источника звуковой волны до поверхности пластины, z – полутолщина пластины.

Для определения амплитуд давлений отраженной p_{1w} и прошедшей p_2 волны необходимо решить вспомогательную задачу о распространении кинематических возмущений от границы акустического полупространства для случая плоской задачи с помощью преобразования Фурье. В результате получим взаимосвязь давлений p_{1w} и p_2 с кинематическими параметрами трехслойной пластины.

Необходимые кинематические параметры пластины определяются из решения системы дифференциальных уравнений, описывающих её движение. Для

описания движения пластины используется система уравнений (1.3.13), где полагаем, что:

$$u_2^c = u_2^a \equiv 0, q^2 \equiv 0. \quad (2.1.3)$$

Поскольку в этом случае первое уравнение системы (1.3.13) однородное, то можно далее положить, что $u_1^c \equiv 0$. С учетом этого и (2.1.3) система дифференциальных уравнений (1.3.13) приобретает вид:

$$\begin{aligned} L_{11}(u_1^a) + 2q^1 &= \rho_a \ddot{u}_1^a, \\ -D\Delta_2^2 w_c + 2k_1 q_{,x}^1 + p_1 - p_2 &= \rho_c \ddot{w}_c, \\ -D\Delta_2^2 w_a - 2c_3 w_a + p_1 + p_2 &= \rho_{aw} \ddot{w}_a, \\ u_1^a - k_1 w_{c,x} - k_2 (q_{,x}^1)_{,x} + k_3 q^1 &= 0, \\ -k_1 w_{c,y} - k_2 (q_{,x}^1)_{,y} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Целью поставленной задачи является определение показателя звукоизоляции (1.2.4) и коэффициента поглощения преграды (1.2.2) в зависимости от частоты ω для соответствующей формы набегающей волны (2.1.1, 2.1.2).

§ 2.2. Связь амплитуд давлений звуковых волн в акустической среде с кинематическими параметрами пластины

Для определения указанной в §2.1 связи давлений с кинематическими параметрами пластины рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

Предполагается, что на границе $z=0$ акустического полупространства задано нормальное перемещение (см. рисунок 2.2.1.), изменяющееся по времени по гармоническому закону (w_j и v_j ($j=1,2,3$) – координаты векторов перемещения w и скорости v в жидкости):

$$w_3|_{z=0} = w_0(x, y)e^{i\omega t}. \quad (2.2.1)$$

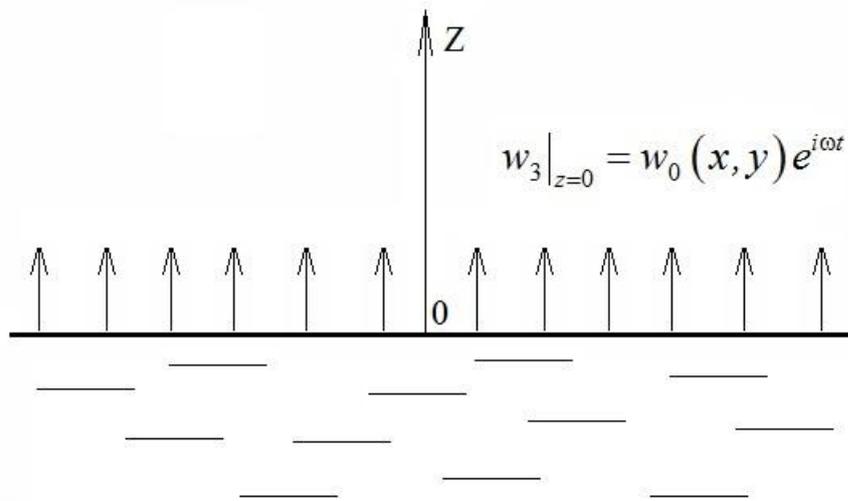


Рис. 2.2.1. Акустическое полупространство.

Требуется найти давление на границе полупространства $p|_{z=0} = p_0(x, y)e^{i\omega t}$. При этом все искомые функции изменяются по закону (2.2.1). Далее для их амплитуд сохраняем те же обозначения, что и для самих функций.

Рассмотрим плоскую задачу, полагая, что все искомые функции зависят только от координат x и z , а также:

$$v_2 \equiv 0.$$

В этом случае граничное условие (2.2.1) с учетом принятого соглашения относительно обозначений принимает вид:

$$v_3|_{z=0} = i\omega w_0(x), \quad (2.2.2)$$

а уравнение движения акустической жидкости относительно потенциала скорости записывается так (в обозначении Φ_a нижний индекс опущен):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + k^2 \Phi = 0. \quad (2.2.3)$$

При этом амплитуды давления и скоростей в соответствии с (1.4.2) определяются следующими равенствами:

$$p = -i\omega \rho_0 \Phi, \quad v_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (2.2.4)$$

Далее, для решения уравнения (2.2.3) используем преобразование Фурье по координате x (q – параметр, верхний индекс « F » указывает на изображение). Тогда уравнение (2.2.3) и граничное условие (2.2.2) переходят в следующие равенства:

$$\frac{\partial^2 \Phi^F}{\partial z^2} + \text{sign}(k - |q|) k_0^2(k^2, q^2) \Phi^F = 0, \quad k_0(k, q) = \sqrt{|k - q|}, \quad (2.2.5)$$

$$v_3^F|_{z=0} = i\omega w_0^F(q). \quad (2.2.6)$$

Для среды «2» (ось Oz направлена в глубь полупространства), при $|q| > k$ решение задачи (2.2.5), (2.2.6) должно быть ограниченным при $z \rightarrow +\infty$, а при $|q| < k$ с учетом одномерности задачи в пространстве преобразований дополнительное условие (условие Зоммерфельда (1.4.7) [11]) записывается так:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} + ik_0(k^2, q^2) \Phi = o\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right), \quad z \rightarrow +\infty. \quad (2.2.7)$$

При этом изображения амплитуд давления и скоростей, как следует из (2.2.4), определяются так:

$$p^F = -i\omega \rho_0 \Phi^F, \quad v_1^F = iq \Phi^F, \quad v_3^F = \frac{\partial \Phi^F}{\partial z}. \quad (2.2.8)$$

Удовлетворяющее этим требованиям решение уравнения (2.2.5) имеет вид (C – постоянная интегрирования; в точках $q = \pm k$ решение доопределяется соответствующими односторонними пределами):

$$\Phi^F = C(q) \left[e^{-ik_0(k^2, q^2)z} H(k - |q|) + ie^{-k_0(k^2, q^2)z} H(|q| - k) \right],$$

где $H(x)$ – функция Хэвисайда.

Определяя теперь постоянную C из граничного условия (2.2.6), приходим к следующему результату:

$$\Phi^F = -\frac{\omega w_0^F(q)}{k_0(k^2, q^2)} \left[e^{-ik_0(k^2, q^2)z} H(k - |q|) + ie^{-k_0(k^2, q^2)z} H(|q| - k) \right]. \quad (2.2.9)$$

Отсюда с учетом (2.2.8) получаем изображение искомого давления на границе полупространства:

$$p_0^F = w_0^F(q) \Gamma^F(k, q), \quad \Gamma^F(k, q) = \frac{\rho_0 \omega^2 \varepsilon(k, q)}{k_0(k^2, q^2)}, \quad (2.2.10)$$

$$\varepsilon(k, q) = \begin{cases} i & \text{при } |q| < k, \\ -1 & \text{при } |q| > k. \end{cases}$$

Оригинал функции $\Gamma^F(k, q)$ находим с учетом ее четности по q :

$$\begin{aligned} \Gamma(k, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma^F(k, q) e^{-iqx} dq = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \Gamma^F(k, q) \cos(qx) dq = \\ &= \frac{\rho_0 \omega^2}{\pi} \left[i \int_0^k \frac{\cos qx}{\sqrt{k^2 - q^2}} dq - \int_k^{+\infty} \frac{\cos qx}{\sqrt{q^2 - k^2}} dq \right]. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Вычисляя входящие в (2.2.11) интегралы [12]:

$$\int_0^k \frac{\cos qx}{\sqrt{k^2 - q^2}} dq = \frac{\pi}{2} J_0(kx), \quad \int_k^{+\infty} \frac{\cos qx}{\sqrt{q^2 - k^2}} dq = -\frac{\pi}{2} N_0(k|x|),$$

где $J_0(\zeta)$ и $N_0(\zeta)$ – функции Бесселя и Неймана нулевого порядка, приходим к следующему результату:

$$\Gamma(k, x) = \frac{1}{2} i \omega \rho_0 k \left[J_0(kx) - i N_0(k|x|) \right] = \frac{1}{2} i \omega^2 \rho_0 H_0^{(2)}(k|x|). \quad (2.2.12)$$

Здесь учтена четность функции $J_0(\zeta)$ и связь функции Ханкеля второго рода с функциями Бесселя и Неймана.

Отметим, что поскольку для функции $H_0^{(2)}(\zeta)$ имеет место соотношение [12]:

$$H_0^{(2)}(\zeta) = -\frac{2i}{\pi} \ln \frac{\zeta}{2}, \quad \zeta \rightarrow 0,$$

то при $k = 0$ ($\omega = 0$) функция $\Gamma(k, x)$ доопределяется так:

$$\Gamma(0, x) = 0,$$

а при $k > 0$ справедливо асимптотическое представление:

$$\Gamma(k, x) = \frac{\omega^2 \rho_0}{\pi} \ln \frac{k|x|}{2}, \quad x \rightarrow 0.$$

Окончательно для давления на поверхности полупространства с использованием теоремы о свертке оригиналов [11] из (2.2.10) находим следующее представление (знак «*» означает свертку):

$$p_{20}(x) = w_0(x) * \Gamma(k, x). \quad (2.2.13)$$

Для среды «1» (ось Oz направлена в сторону противоположную полупространству) при $|q| > k$ решение задачи (2.2.5), (2.2.6) должно быть ограниченным при $z \rightarrow -\infty$, а при $|q| < k$ условие (2.2.7) заменятся следующим соотношением:

$$\frac{\partial \Phi^F}{\partial z} + ik_0 \Phi^F = o\left(\frac{1}{\sqrt{-z}}\right), \quad z \rightarrow -\infty.$$

При этом вместо формул (2.2.9) и (2.2.13) получаем следующие равенства:

$$\Phi^F = \frac{\omega w_0^F(q)}{k_0(k^2, q^2)} \left[e^{ik_0(k^2, q^2)z} H(k - |q|) + ie^{k_0(k^2, q^2)z} H(|q| - k) \right],$$

$$p_{1w0}(x) = -w_0(x) * \Gamma(k, x). \quad (2.2.14)$$

§ 2.3. Определение звукоизоляционных свойств бесконечной трехслойной пластины

Для определения звукоизоляционных свойств бесконечной прямоугольной трехслойной пластины рассмотрим систему дифференциальных уравнений движения пластины (2.1.4):

$$\begin{aligned} L_{11}(u_1^a) + 2q^1 &= \rho_a \ddot{u}_1^a, \\ -D\Delta_2^2 w_c + 2k_1 q_{,x}^1 + p_1 - p_2 &= \rho_c \ddot{w}_c, \\ -D\Delta_2^2 w_a - 2c_3 w_a + p_1 + p_2 &= \rho_{aw} \ddot{w}_a, \\ u_1^a - k_1 w_{c,x} - k_2 (q_{,x}^1)_{,x} + k_3 q^1 &= 0, \\ -k_1 w_{c,y} - k_2 (q_{,x}^1)_{,y} &= 0. \end{aligned}$$

Система (2.1.4) с учетом формул (1.3.3) и условия, что все функции изменяются по гармоническому закону типа (2.2.1) и зависят только от координаты x и z переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} B \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_1^a + 2q^1 + \omega^2 \rho_a u_1^a &= 0, \\ -D \frac{\partial^4}{\partial x^4} w_c + 2k_1 q_{,x}^1 + p_{10} - p_{20} + \omega^2 \rho_c w_c &= 0, \\ -D \frac{\partial^4}{\partial x^4} w_a - 2c_3 w_a + p_{10} + p_{20} + \omega^2 \rho_{aw} w_a &= 0, \\ u_1^a - k_1 w_{c,x} - k_2 (q_{,x}^1)_{,x} + k_3 q^1 &= 0. \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

На бесконечности искомые функции ограничены. Под величинами p_{10} и p_{20} понимаются амплитуды давлений в окружающих пластину акустических средах с номерами «1» и «2» на поверхности пластины. При этом p_{20} определяется формулой (2.2.13) с учетом (1.3.2) как:

$$p_{20}(x) = w^{(2)}(x) * \Gamma_2(k, x) = \frac{1}{2} [w_c(x) - w_a(x)] * \Gamma_2(k, x). \tag{2.3.2}$$

Амплитуда давления p_{10} представляем в соответствии с (1.2.1):

$$p_{10} = p_{*0} + p_{1w0}. \quad (2.3.3)$$

В (2.3.3) p_{*0} и p_{1w0} – амплитуды давлений набегающей и отраженной волны на поверхности пластины. Первая из них зависит от формы волны и определяется в соответствии с формулами (2.1.1, 2.1.2). Амплитуда давления p_{1w0} определяется формулой (2.2.14) с учетом (1.3.2) как:

$$p_{1w0}(x) = -w^{(1)}(x) * \Gamma_1(k, x) = -\frac{1}{2} [w_c(x) + w_a(x)] * \Gamma_1(k, x). \quad (2.3.4)$$

Далее ограничимся случаем одинаковых физических свойств акустических сред, тогда $\rho_1 = \rho_2 = \rho_0$, а $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$, где функция Γ имеет вид (2.2.12). Тогда разность и сумма амплитуд давлений в системе уравнений (2.3.1) с учетом (2.3.2–2.3.4) определяются так:

$$\begin{aligned} p_{10} - p_{20} &= p_{*0} - w_c(x) * \Gamma(k, x), \\ p_{10} + p_{20} &= p_{*0} - w_a(x) * \Gamma(k, x). \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Для решения задачи к уравнениям (2.3.1) с учетом последних равенств применяем преобразования Фурье по координате x :

Первое уравнение системы (2.3.1):

$$B u_{1,xx}^a + 2q^1 + \omega^2 \rho_a u_1^a = 0, \quad (2.3.6)$$

$$B \int_{-\infty}^{\infty} u_{1,xx}^a e^{-iqx} dx + 2 \int_{-\infty}^{\infty} q^1 e^{-iqx} dx + \omega^2 \rho_a \int_{-\infty}^{\infty} u_1^a e^{-iqx} dx = 0. \quad (2.3.7)$$

Возьмем интегралы, входящие в уравнение (2.3.7):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} u_1^a e^{-iqx} dx &= u_1^{aF}; \\ \int_{-\infty}^{\infty} q^1 e^{-iqx} dx &= q^{1F}; \\ \int_{-\infty}^{\infty} u_{1,xx}^a e^{-iqx} dx &= u_{1,x}^a e^{-iqx} \Big|_{-\infty}^{\infty} + u_1^a i q e^{-iqx} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u_1^a q^2 e^{-iqx} dx = -q^2 u_1^{aF}. \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

С учетом формул (2.3.7–2.3.8) уравнение (2.3.6) в преобразовании Фурье выглядит следующим образом:

$$-Bq^2 u_1^{aF} + 2q^{1F} + \omega^2 \rho_a u_1^{aF} = 0. \quad (2.3.9)$$

Второе уравнение системы (2.3.1):

$$-Dw_{c,xxxx} + 2k_1 q_{,x}^1 + p_1 - p_2 + \omega^2 \rho_c w_c = 0. \quad (2.3.10)$$

С учетом (2.3.5) уравнение (2.3.10) переписывается следующим образом:

$$-Dw_{c,xxxx} + 2k_1 q_{,x}^1 + p_{*0} - w_c * \Gamma + \omega^2 \rho_c w_c = 0. \quad (2.3.11)$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} & - \int_{-\infty}^{\infty} Dw_{c,xxxx} e^{-iqx} dx + 2 \int_{-\infty}^{\infty} k_1 q_{,x}^1 e^{-iqx} dx + \int_{-\infty}^{\infty} p_{*0} e^{-iqx} dx - \int_{-\infty}^{\infty} (w_c * \Gamma) e^{-iqx} dx + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \rho_c w_c e^{-iqx} dx = 0, \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} Dw_{c,xxxx} e^{-iqx} dx + 2k_1 \int_{-\infty}^{\infty} q_{,x}^1 e^{-iqx} dx + p_{*0}^F - w_c^F \Gamma^F + \omega^2 \rho_c w_c^F = 0. \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Возьмем интегралы, входящие в (2.3.12):

$$\begin{aligned} & 2k_1 \int_{-\infty}^{\infty} q_{,x}^1 e^{-iqx} dx = 2k_1 i q q^{1F}, \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} Dw_{c,xxxx} e^{-iqx} dx = -Dq^4 w_c^F. \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Тогда уравнение (2.3.11) с учетом (2.3.12–2.3.13) в преобразовании Фурье выглядит следующим образом:

$$-Dq^4 w_c^F + 2k_1 i q q^{1F} + p_{*0}^F - w_c^F \Gamma^F + \omega^2 \rho_c w_c^F = 0. \quad (2.3.14)$$

Третье уравнение системы (2.3.1):

$$-Dw_{a,xxxx} - 2c_3 w_a + p_1 + p_2 + \omega^2 \rho_{aw} w_a = 0. \quad (2.3.15)$$

С учетом (2.3.5) уравнение (2.3.15) переписывается следующим образом:

$$-Dw_{a,xxxx} - 2c_3 w_a + p_{*0} - w_a * \Gamma + \omega^2 \rho_{aw} w_a = 0. \quad (2.3.16)$$

Аналогично уравнению (2.2.14) получаем уравнение (2.3.16) в преобразованиях Фурье:

$$-Dq^4 w_a^F - 2c_3 w_a^F + p_{*0}^F - w_a^F \Gamma^F + \omega^2 \rho_{aw} w_a^F = 0. \quad (2.3.17)$$

Четвертое уравнение системы (2.3.1):

$$u_1^a - k_1 w_{c,x} - k_2 q_{,xx}^1 + k_3 q^1 = 0, \quad (2.3.18)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_1^a e^{-iqx} dx - k_1 \int_{-\infty}^{\infty} w_{c,x} e^{-iqx} dx - \int_{-\infty}^{\infty} k_2 q_{,xx}^1 e^{-iqx} dx + \int_{-\infty}^{\infty} k_3 q^1 e^{-iqx} dx = 0. \quad (2.3.19)$$

Возьмем интегралы, входящие в уравнение (2.3.19):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} u_1^a e^{-iqx} dx &= u_1^{aF}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} k_3 q^1 e^{-iqx} dx &= k_3 q^{1F}, \\ -k_1 \int_{-\infty}^{\infty} w_{c,x} e^{-iqx} dx &= -k_1 i q w_c^F, \\ - \int_{-\infty}^{\infty} k_2 q_{,xx}^1 e^{-iqx} dx &= k_2 q^2 q^{1F}. \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

Тогда уравнение (2.3.18) с учетом (2.3.19), (2.3.20) в преобразовании Фурье выглядит следующим образом:

$$u_1^{aF} - i q k_1 w_c^F + k_2 q^2 q^{1F} + k_3 q^{1F} = 0. \quad (2.3.21)$$

Тогда согласно (2.3.9), (2.3.14), (2.3.17), (2.3.21) система уравнений (2.3.1) в преобразованиях Фурье выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} -B q^2 u_1^{aF} + 2 q^{1F} + \omega^2 \rho_a u_1^{aF} &= 0, \\ -D q^4 w_c^F + 2 k_1 i q q^{1F} + p_{*0}^F - w_c^F \Gamma^F + \omega^2 \rho_c w_c^F &= 0, \\ -D q^4 w_a^F - 2 c_3 w_a^F + p_{*0}^F - w_a^F \Gamma^F + \omega^2 \rho_{aw} w_a^F &= 0, \\ u_1^{aF} - i q k_1 w_c^F + k_2 q^2 q^{1F} + k_3 q^{1F} &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

Теперь необходимо вывести выражения для w_a^F и w_c^F , для этого сгруппируем слагаемые в системе следующим образом:

$$\begin{aligned} 2 q^{1F} - P_1(q^2, \omega^2) u_1^{aF} &= 0, \\ [P_3(q^2, \omega^2) - \Gamma^F(k, q)] w_c^F - 2 i q k_1 q^{1F} &= p_{0*}^F, \\ S_1(q, \omega) w_a^F &= p_{0*}^F, \\ u_1^{aF} - i q k_1 w_c^F + P_2(q^2) q^{1F} &= 0, \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

где

$$\begin{aligned} P_1(q, \omega) &= Bq - \rho_a \omega, \quad P_2(q) = k_2 q + k_3, \\ P_3(q, \omega) &= Dq^2 - \omega \rho_c, \quad P_4(q, \omega) = Dq^2 - \omega \rho_{av} + 2c_3, \\ S_1(q, \omega) &= P_4(q^2, \omega^2) + \Gamma^F(k, q). \end{aligned}$$

Из третьего уравнения системы (2.3.23) выводим выражение для w_a^F :

$$w_a^F = \frac{P_{1*}^F}{S_1(q, \omega)}, \quad (2.3.24)$$

а из четвертого уравнения выводим q^{1F} :

$$q^{1F} = \frac{iqk_1 w_c^F - u_1^{aF}}{P_2(q^2)}. \quad (2.3.25)$$

Первое и второе уравнение системы (2.3.23) с учетом (2.3.25) перепишем следующим образом:

$$\begin{aligned} P_5(q^2, \omega^2) u_1^{aF} - 2iqk_1 w_c^F &= 0, \\ 2iqk_1 u_1^{aF} + S(q, \omega) w_c^F &= P_2(q^2) p_{0*}^F, \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

где:

$$\begin{aligned} P_5(q, \omega) &= 2 + P_1(q, \omega) P_2(q), \\ S(q, \omega) &= 2q^2 k_1^2 + [P_3(q^2, \omega^2) - \Gamma^F(k, q)] P_2(q^2). \end{aligned}$$

Из (2.3.26) выводим w_c^F :

$$w_c^F = \frac{P_5(q^2, \omega^2) p_{0*}^F}{S_2(q, \omega)}, \quad (2.3.27)$$

где:

$$\begin{aligned} S_2(q, \omega) &= P_5(q^2, \omega^2) \Gamma^F(k, q) + P_6(q^2, \omega^2), \\ P_6(q, \omega) &= P_3(q, \omega) P_5(\omega, q) + 2k_1^2 q P_1(q, \omega). \end{aligned}$$

Для плоской набегающей волны, учтя, что $q = 0$ выражения (2.3.24) и (2.3.27) примут вид:

$$w_c^F = \frac{p_*^F}{\Gamma^F(k, 0) - \omega^2 \rho_c}, \quad (2.3.28)$$

$$w_a^F = \frac{p_*^F}{2c_3 - \omega^2 \rho_{aw} + \Gamma^F(k, 0)}.$$

Амплитуда давления прошедшей волны на поверхности пластины в преобразовании Фурье согласно (2.3.2) и (2.3.28) определяется как:

$$p_{20}^F = \frac{1}{2}(w_c^F - w_a^F)\Gamma^F(k, 0) = \frac{1}{2}(w_{c1}^F - w_{a1}^F)\Gamma^F(k, 0)p_{*0}^F = R(0, \omega)p_{*0}^F, \quad (2.3.29)$$

где:

$$R(0, \omega) = \frac{1}{2}(w_{c1}^F - w_{a1}^F)\Gamma^F(k, 0),$$

$$w_{c1}^F = \frac{1}{\Gamma^F(k, 0) - \omega^2 \rho_c}, \quad (2.3.30)$$

$$w_{a1}^F = \frac{1}{\Gamma^F(k, 0) + 2c_3 - \omega^2 \rho_{aw}}.$$

В (2.3.29), (2.3.30) с учетом (2.2.10), (2.2.5) и (1.4.4):

$$\Gamma^F(k, 0) = i\rho_0 \omega c. \quad (2.3.31)$$

Теперь необходимо найти изображение амплитуды давления набегающей плоской волны p_{*0}^F . Амплитуда давления на поверхности пластины набегающей плоской волны согласно (2.1.1) определяется как:

$$p_{*0} = -i\omega\rho_0 A_\phi = \Delta p.$$

Изображение амплитуды давления плоской набегающей волны на поверхности пластины согласно [11]:

$$p_{*0}^F = -2\pi i \omega \rho_0 A \delta(q), \quad (2.3.32)$$

где $\delta(q)$ – дельта-функция Дирака.

Тогда изображение амплитуды давления прошедшей волны согласно (2.3.29) и (2.3.32) определяется как:

$$p_{20}^F = -R(0, \omega) 2\pi i \omega \rho_0 A \delta(q).$$

Оригинал амплитуды давления прошедшей волны:

$$p_{20} = -R(0, w)i\omega\rho_0 A.$$

Тогда коэффициент поглощения преграды согласно (1.2.2) и (2.3.30):

$$\eta = \left| \frac{p_{20}}{p_{*0}} \right| = \left| \frac{-R(0, w)i\omega\rho_0 A}{-i\omega\rho_0 A} \right| = \left| \frac{1}{2} (w_{c1}^F - w_{a1}^F) \Gamma^F(k, 0) \right|.$$

Или с учетом (2.3.31):

$$\eta = \left| \frac{i\rho_0\omega c}{2} \left(\frac{1}{i\rho_0\omega c - \omega^2\rho_c} - \frac{1}{2c_3 - \omega^2\rho_{av} + i\rho_0\omega c} \right) \right|. \quad (2.3.33)$$

Решение статической задачи при $\omega = 0$, и при высоких частотах набегающей волны приводит к следующему результату:

– поведение коэффициента поглощения при $\omega = 0$ демонстрирует предел

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \eta = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left| \frac{i\rho_0\omega c}{2} \left(\frac{1}{i\rho_0\omega c - \omega^2\rho_c} - \frac{1}{2c_3 - \omega^2\rho_{av} + i\rho_0\omega c} \right) \right| = \frac{1}{2}; \quad (2.3.34)$$

– поведение коэффициента поглощения на высоких частотах демонстрирует следующий предел

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \eta = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| \frac{i\rho_0\omega c}{2} \left(\frac{1}{i\rho_0\omega c - \omega^2\rho_c} - \frac{1}{2c_3 - \omega^2\rho_{av} + i\rho_0\omega c} \right) \right| = 0. \quad (2.3.35)$$

Показатель звукоизоляции согласно формуле (1.2.4) получим следующий:

$$R_p = -20 \cdot \lg \left| \frac{i\rho_0\omega c}{2} \left(\frac{1}{i\rho_0\omega c - \omega^2\rho_c} - \frac{1}{2c_3 - \omega^2\rho_{av} + i\rho_0\omega c} \right) \right|. \quad (2.3.36)$$

Для цилиндрической набегающей волны амплитуда давления прошедшей волны в преобразованиях Фурье вычисляется подобно (2.3.29) с учетом (2.3.24) и (2.3.27):

$$p_{20}^F = \frac{1}{2} (w_c^F - w_a^F) \Gamma^F(k, 0) = R(q, \omega) p_{*0}^F, \quad (2.3.37)$$

$$R(q, \omega) = \frac{P_5(q^2, \omega^2) S_1(q, \omega) - S_2(q, \omega)}{2S_1(q, \omega) S_2(q, \omega)} \Gamma^F(k, q).$$

Используя равенства (2.2.10), (2.3.24) и (2.3.27) функцию $R(q, \omega)$ преобразовываем следующим образом:

$$R(q, \omega) = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 \left[R_1(q, \omega) \varepsilon_1(k, q) + \text{sign}(k - |q|) R_2(q, \omega) k_0(k^2, q^2) \right] k_0(k^2, q^2),$$

где:

$$\begin{aligned} R_1(q, \omega) &= -\frac{Q_3(q^2, \omega^2) Q_1(q^2, \omega^2)}{Q(q^2, \omega^2)}, \quad \varepsilon_1(k, q) = \begin{cases} i & \text{при } |q| < k, \\ 1 & \text{при } |q| > k, \end{cases} \\ R_2(q, \omega) &= \frac{Q_3(q^2, \omega^2) Q_2(q^2, \omega^2)}{Q(\omega^2, q^2)}, \\ Q(q, \omega) &= Q_1^2(q, \omega) - (\omega/c^2 - q) Q_2^2(q, \omega), \\ Q_1(q, \omega) &= \rho_0^2 \omega^2 P_5(q, \omega) - (\omega/c^2 - q) P_4(q, \omega) P_6(q, \omega), \\ Q_2(q, \omega) &= \rho_0 \omega [P_6(q, \omega) + P_4(q, \omega) P_5(q, \omega)], \\ Q_3(q, \omega) &= [\omega(\rho_c - \rho_{av}) + 2c_3] P_5(q, \omega) - 2k_1^2 q P_1(q, \omega). \end{aligned} \tag{2.3.38}$$

Амплитуда давления на поверхности пластины при цилиндрической набегающей волне согласно (2.1.2) определяется как:

$$p_{*0} = \Delta p \frac{H_0^{(2)}(k\sqrt{x^2 + L^2})}{H_0^{(2)}(kL)}.$$

Изображение амплитуды давления находим, вычисляя соответствующие интегралы [12]:

$$\begin{aligned} \frac{p_{*0}^F H_0^{(2)}(kL)}{\Delta p} &= \int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(2)}(k\sqrt{x^2 + L^2}) e^{iqx} dx = \\ &= 2 \int_d^{+\infty} \frac{t \cos(q\sqrt{t^2 - L^2})}{\sqrt{t^2 - L^2}} H_0^{(2)}(kt) dt = \\ &= \frac{2}{k_0(k^2, q^2)} \left[e^{-iLk_0(k^2, q^2)} H(k - |q|) + e^{-Lk_0(k^2, q^2)} H(|q| - k) \right]. \end{aligned}$$

Тогда изображение p_{20}^F в (2.3.37) приобретает вид:

$$p_{20}^F(q, \omega) = \frac{2\Delta p R(q, \omega)}{k_0(k^2, q^2) H_0^{(2)}(kL)} \left[e^{-iLk_0(k^2, q^2)} H(k - |q|) + e^{-Lk_0(k^2, q^2)} H(|q| - k) \right].$$

Его оригинал с учетом четности по q и (2.3.38) определяем, численно находя интеграл обращения:

$$p_{20}(x, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} p_{20}^F(q, \omega) \cos(qx) dq = -2i\omega^3 \rho_0^2 A \left[J_1(x, \omega^2) + J_2(x, \omega^2) \right],$$

$$J_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^k \left[iR_1(q, \omega) + R_2(q, \omega) k_0(k^2, q^2) \right] e^{-iLk_0(k^2, q^2)} \cos(qx) dq, \quad (2.3.39)$$

$$J_2 = \frac{1}{\pi} \int_k^{\infty} \left[R_1(q, \omega) - R_2(q, \omega) k_0(k^2, q^2) \right] e^{-Lk_0(k^2, q^2)} \cos(qx) dq.$$

Интегралы, входящие в выражение (2.3.39) берутся численно. Представим интегралы J_1 и J_2 в виде суммы и разности интегралов соответственно:

$$J_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^k iR_1(q, \omega) e^{-iLk_0(k^2, q^2)} \cos(qx) dq +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^k R_2(q, \omega) k_0(k^2, q^2) e^{-iLk_0(k^2, q^2)} \cos(qx) dq. \quad (2.3.40)$$

$$J_2 = \frac{1}{\pi} \int_k^{\infty} R_1(q, \omega) e^{-Lk_0(k^2, q^2)} \cos(qx) dq -$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_k^{\infty} R_2(q, \omega) k_0(k^2, q^2) e^{-Lk_0(k^2, q^2)} \cos(qx) dq. \quad (2.3.41)$$

При этом в интеграле J_2 возникают особенности в связи с наличием в знаменателе полинома $Q(q^2, \omega^2)$ высокой степени, что не позволяет интегрировать его стандартными способами.

Первый интеграл в (2.3.41) перепишем следующим образом:

$$\frac{1}{\pi} \int_k^{\infty} R_1(q, \omega) e^{-Lk_0(k^2, q^2)} \cos(qx) dq = \frac{1}{\pi} \int_k^{\infty} \frac{Q_3(q^2, \omega^2) Q_1(q^2, \omega^2)}{Q(q^2, \omega^2)} e^{-Lk_0(k^2, q^2)} \cos(qx) dq. \quad (2.3.42)$$

Полином $Q(q^2, \omega^2)$, полученный в результате преобразований выражений (2.3.38), а так же его корни определяются численно для конкретной частоты набегающей цилиндрической звуковой волны. В результате для каждой частоты получаем два действительных положительных значения q_1, q_2 и подставляем полученные значения в функцию (2.3.42) в виде:

$$\int_k^{\infty} \frac{F(q)}{(q-q_1)(q-q_2)} dq, \quad (2.3.43)$$

где:

$$F(q) = \frac{1}{\pi} \frac{Q_3(q^2, \omega^2) Q_1(q^2, \omega^2) e^{-Lk_0(k^2, q^2)} \cos(qx)}{Q_{n-2}(q^2, \omega^2)}.$$

Регуляризируем выражение (2.3.43):

$$\int_k^{\infty} \frac{F(q)}{(q-q_1)(q-q_2)} dq = \frac{1}{q_1 - q_2} \left(\int_k^{\infty} \frac{F(q)}{(q-q_1)} dq - \int_k^{\infty} \frac{F(q)}{(q-q_2)} dq \right),$$

где:

$$\begin{aligned} \int_k^{\infty} \frac{F(q)}{(q-q_1)} dq &= \int_k^{\infty} \frac{F(q) - F(q_1)}{(q-q_1)} dq + F(q_1) \int_k^{\infty} \frac{dq}{(q-q_1)}, \\ \int_k^{\infty} \frac{F(q)}{(q-q_2)} dq &= \int_k^{\infty} \frac{F(q) - F(q_2)}{(q-q_2)} dq + F(q_2) \int_k^{\infty} \frac{dq}{(q-q_2)}. \end{aligned}$$

Окончательно для (2.3.43) имеем:

$$\begin{aligned} \int_k^{\infty} \frac{F(q)}{(q-q_1)(q-q_2)} dq &= \frac{1}{q_1 - q_2} \left(\int_k^{\infty} \frac{F(q) - F(q_1)}{(q-q_1)} dq + F(q_1) \int_k^{\infty} \frac{dq}{(q-q_1)} - \right. \\ &\left. - \int_k^{\infty} \frac{F(q) - F(q_2)}{(q-q_2)} dq - F(q_2) \int_k^{\infty} \frac{dq}{(q-q_2)} \right). \end{aligned} \quad (2.3.44)$$

Сингулярная регуляризованная часть интеграла (2.3.44) берется в смысле главных значений по Коши. Остальные составляющие выражения (2.3.44) вычисляются численно на ПК в программной среде Maple.

Аналогичным образом поступаем со вторым интегралом (2.3.41).

Тогда, в случае цилиндрической волны коэффициент поглощения преграды (1.2.2) вычисляется при дополнительном учете равенства (2.1.2) так:

$$\eta = \left| \frac{p_2}{p_*} \right|_{z=0} = 2\omega^2 \rho_0 \frac{J_1(x, \omega^2) + J_2(x, \omega^2)}{H_0^{(2)}(k\sqrt{x^2 + d^2})}.$$

§ 2.4. Пример расчета

Исследуем звукоизоляционные свойства бесконечной прямоугольной пластины при воздействии на нее плоской звуковой волны.

В качестве примера рассмотрим пластину сотовой структуры (см. рисунок 1.3.1), окруженную с двух сторон воздухом: $\rho_0 = 1.2041 \text{ кг/м}^3$, $c = 343 \text{ м/с}$. Толщина несущего слоя и полутолщина заполнителя – $t = 0.3 \text{ мм}$, $h = 4 \text{ мм}$. Материал несущих слоев – сталь Ст0, материал заполнителя – сплав АМц: $E = 200 \text{ ГПа}$, $\nu = 0.3$, $E_z = 71 \text{ ГПа}$, $\nu_z = 0.34$, $\rho_b = 7850 \text{ кг/м}^3$, $\rho_z = 2730 \text{ кг/м}^3$. Осредненные характеристики сотового заполнителя из сплава АМц с длиной и толщиной стенки $a = 6.3 \text{ мм}$ и $d = 0.05 \text{ мм}$, а также углом между стенками $\varphi = 120^\circ$ определяются на основании работы [2]: $E_3 = 981 \text{ МПа}$, $G = 202 \text{ МПа}$, $\rho = 33.36 \text{ кг/м}^3$.

Соответствующие коэффициенты в системе уравнений (2.3.1) согласно (1.3.4–1.3.6, 1.3.8, 1.3.9) имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} \rho_a &= 4.71, \rho_c = 4.78, \rho_{aw} = 4.73, \\ B &= 13.19 \cdot 10^7, D = 3.97, c_3 = 2.45 \cdot 10^{11}, \\ k_1 &= 0.0023, k_2 = 5.44 \cdot 10^{-18}, k_3 = 1.98 \cdot 10^{-11}. \end{aligned}$$

Результаты расчетов при $\Delta p = -i\omega\rho_0 A_\Phi$ полученные по формулам (2.3.33) и (2.3.36) представлены на рисунках 2.4.1 и 2.4.2 соответственно.

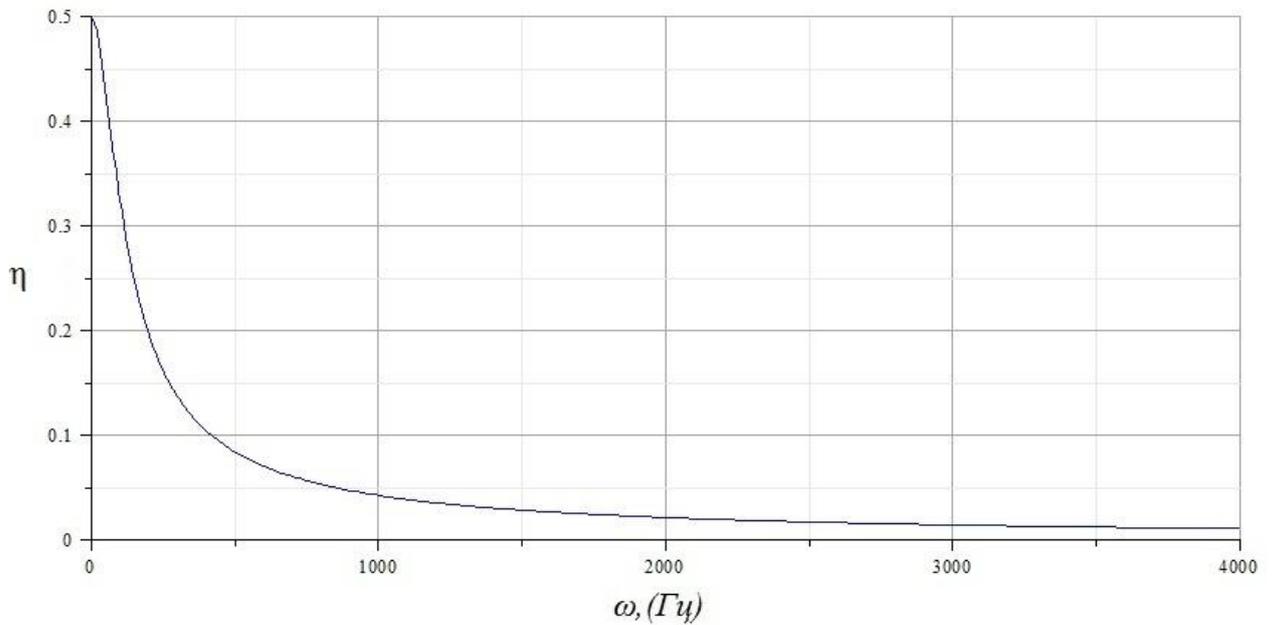


Рис. 2.4.1. Коэффициент поглощения пластины в случае плоской набегающей волны.

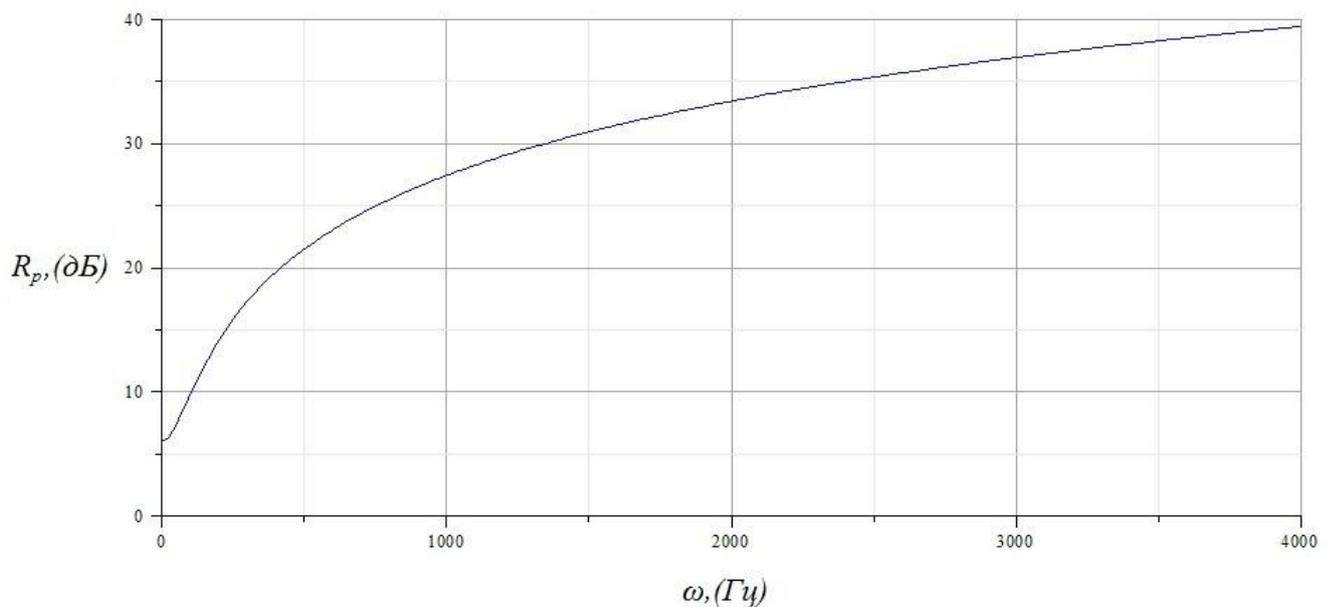
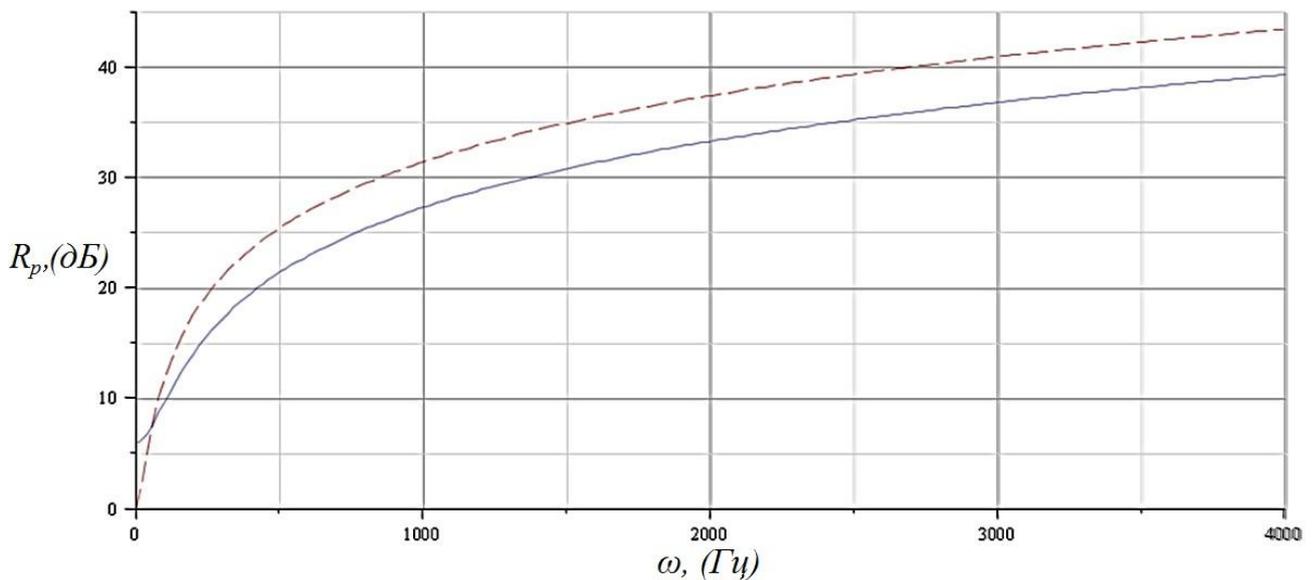


Рис. 2.4.2. Показатель звукоизоляции пластины в случае плоской набегающей волны.

На рисунке 2.4.1 представлен график зависимости коэффициента поглощения от частоты плоской набегающей волны. На рисунке 2.4.2 представлен график зависимости показателя звукоизоляции от частоты набегающей плоской волны. Из рисунка 2.4.2 видно, что с ростом частоты набегающей волны растет и

эффективность пластины. При этом результат, представленный на рис. 2.4.1, соответствует результату полученному в (2.3.34), (2.3.35).

В качестве верификации, представленного в главе 2 способа исследования звукоизоляционных свойств трехслойной пластины бесконечных размеров, выполним расчет показателя звукоизоляции однослойной бесконечной пластины по «закону массы» Д. Стретта (1.1.1) при воздействии плоской набегающей звуковой волны. Сравним полученный результат с результатами, представленными на рис. 2.4.2 полученными по формуле (1.2.4) при условии, что массы единиц площадей преград равны. Результаты сравнения представлены на рис. 2.4.3.



Сплошная кривая – расчет по формуле (1.2.4).

Пунктирная кривая – «закон массы» Стретта (1.1.1).

Рис. 2.4.3. Верификация результата.

По результатам, представленным на рис. 2.4.3 видно, что графики зависимостей показателей звукоизоляции от частоты набегающей плоской волны имеют схожий характер, а численно в основном различаются не более чем на 4 дБ. При этом результаты полученные по формуле (1.2.4) удовлетворяет формулировке «закона массы» Д. Стретта – с удвоением частоты показатель звукоизоляции растёт на 6 дБ.

Стоит отметить, что модифицированный «закон массы» Л. Крамера (1.1.3) дает результат на 5 дБ ниже, нежели «закон массы» Д. Стретта, и в этом случае трехслойная пластина будет эффективнее изолировать звук, нежели однослойная пластина той же массы её квадратного метра.

Выполненная верификация позволяет говорить о том, что способ исследования звукоизоляционных свойств бесконечной трехслойной пластины дает результаты, не противоречащие результатам других авторов.

ГЛАВА 3. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН РАЗЛИЧНОГО ТИПА С ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНОЙ

§ 3.1. Постановка задачи о прохождении волн различного типа через трехслойную пластину

Рассматривается трехслойная пластинка бесконечной длины (бесконечна вдоль оси Oy) и высоты l , состоящая из двух несущих слоев с заполнителем между ними. Несущие слои упругие и изотропные, заполнитель ортотропный сотовой конфигурации. Пластинка окружена с двух сторон акустическими средами «1» и «2». Используется прямоугольная декартова система координат $Oxyz$. При этом предполагается, что плоскость Oxy для пластинки является срединной, а ось Oz направлена в глубину среды «2». Ось Oy направлена от наблюдателя (рис. 3.1.1).

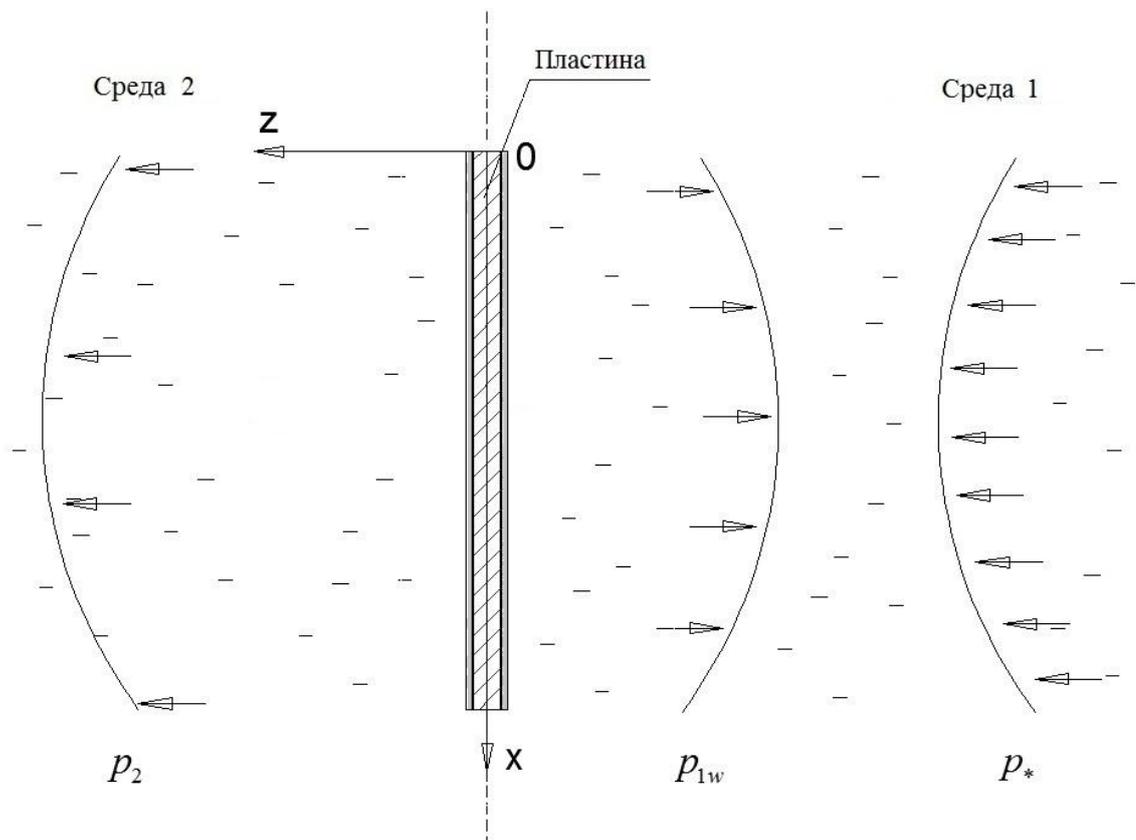


Рис. 3.1.1. Постановка задачи.

На пластину набегают плоская или цилиндрическая звуковая волна с амплитудой давления на фронте p_* и частотой ω . В результате ее взаимодействия с пластиной в окружающих средах «1» и «2» возбуждаются давления с амплитудами p_1 и p_2 соответственно, где p_2 – амплитуда давления прошедшей волны, p_1 – сумма амплитуд давлений падающей p_* и отраженной p_{1w} (1.2.1).

Целью задачи является вычисление коэффициента поглощения преграды η (1.2.2) и показателя звукоизоляции R_p (1.2.4) в зависимости от частоты и формы набегающей волны.

Амплитуда давления набегающей волны p_* и ее значение на препятствие p_{*0} зависит от формы набегающей волны, и в соответствии с формулами (1.4.8), (1.4.9) и с учетом одинаковых физических свойств акустических сред записываются следующим образом:

– плоская волна

$$p_* = \Delta p e^{-ikz}, p_{*0} = \Delta p = -i\omega\rho_0 A_\Phi; \quad (3.1.1)$$

– цилиндрическая волна

$$p_* = -i\omega\rho_0 A_\Phi H_0^{(2)}(kr_1) = \Delta p \frac{H_0^{(2)}(kr_1)}{H_0^{(2)}(kL)}, r_1 = \sqrt{(x-x_c)^2 + (z+L)^2},$$

$$p_{*0} = \Delta p \frac{H_0^{(2)}(kr_{10})}{H_0^{(2)}(kL)}, r_{10} = \sqrt{(x-x_c)^2 + L^2}. \quad (3.1.2)$$

Где: $x-x_c$ – координата источника излучения волны, L – расстояние от поверхности пластины до источника волны, z – полутолщина пластины, A_Φ – произвольная постоянная, ρ_0 – плотность среды «1», Δp – амплитуда давления на фронте волны при ее касании препятствия.

На рисунках 3.1.2 и 3.1.3 представлены графики зависимости амплитуд давлений набегающих волн по высоте пластины на ее поверхности для плоской и цилиндрической набегающей волны соответственно.

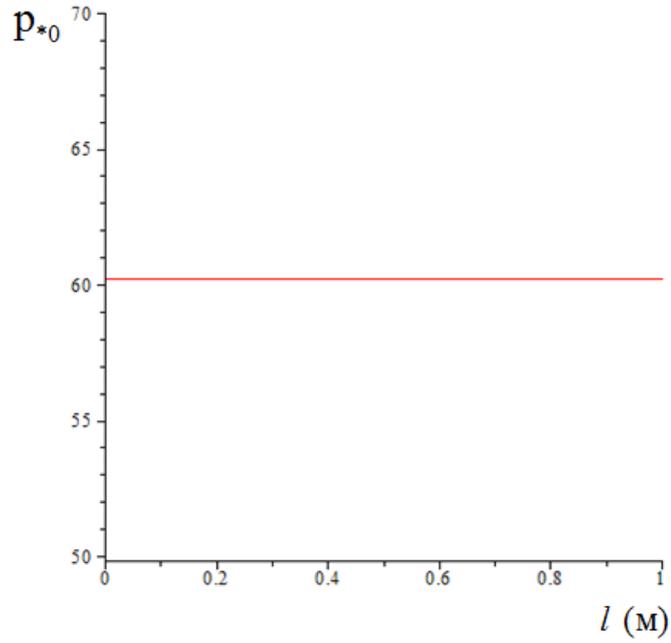


Рис. 3.1.2. Плоская волна.

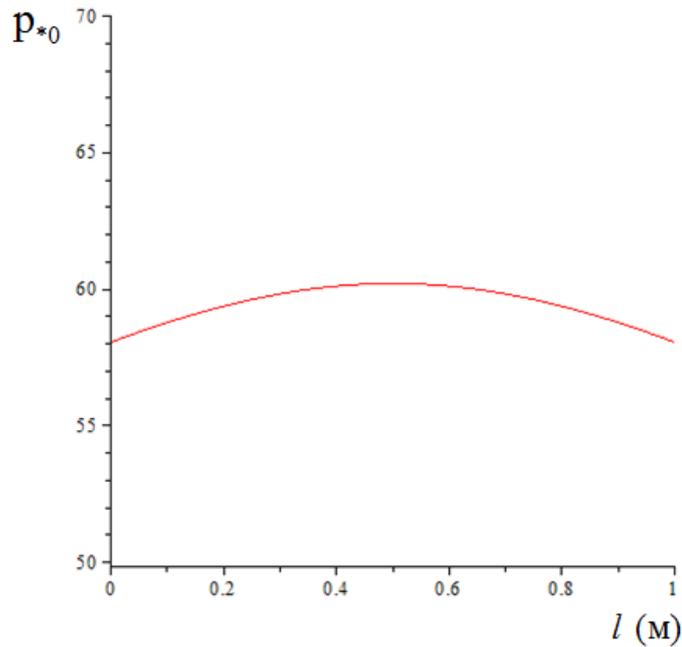


Рис. 3.1.3. Цилиндрическая волна.

Частота набегающей волны в обоих случаях 50 Гц, расстояние от пластины до источника звука $L=1$ м, высота пластины $l=1$ м. На рис. 3.1.3 координата источника излучения цилиндрической волны $x-x_c=l/2$. При варьировании координаты, пик будет смещаться вправо или влево. Также при приближении

источника звука к пластине пик будет более острый, а при удалении дуга выпрямится.

Амплитуды давления прошедшей p_2 и отраженной p_{1w} волны зависят от кинематических параметров пластины. Для их определения необходимо решить вспомогательную задачу о распространении кинематических возмущений от границы акустического полупространства для случая плоской задачи с использованием тригонометрических рядов Фурье. В результате получим взаимосвязь давлений p_2 и p_{1w} с кинематическими параметрами трехслойной пластины.

Необходимые кинематические параметры пластины определяются из решения системы дифференциальных уравнений, описывающих её движение. Для описания движения пластины используется система уравнений (1.3.13):

$$\begin{aligned}
 L_{11}(u_1^c) + L_{12}(u_2^c) &= \rho_c \ddot{u}_1^c, \\
 L_{21}(u_1^c) + L_{22}(u_2^c) &= \rho_c \ddot{u}_2^c, \\
 L_{11}(u_1^a) + L_{12}(u_2^a) + 2q^1 &= \rho_a \ddot{u}_1^a, \\
 L_{21}(u_1^a) + L_{22}(u_2^a) + 2q^2 &= \rho_a \ddot{u}_2^a, \\
 -D\Delta_2^2 w_c + 2k_1(q_{,x}^1 + q_{,y}^2) + p_1 - p_2 &= \rho_c \ddot{w}_c, \\
 -D\Delta_2^2 w_a - 2c_3 w_a + p_1 + p_2 &= \rho_{aw} \ddot{w}_a, \\
 u_1^a - k_1 w_{c,x} - k_2(q_{,x}^1 + q_{,y}^2)_{,x} + k_3 q^1 &= 0, \\
 u_2^a - k_1 w_{c,y} - k_2(q_{,x}^1 + q_{,y}^2)_{,y} + k_3 q^2 &= 0.
 \end{aligned}$$

Граничные условия вытекают из (1.3.19) и (1.3.20) с учетом (2.1.3):

$$\begin{aligned}
 w_c|_{x=0,l} &= w_a|_{x=0,l} = 0, \\
 u_{1,x}^a|_{x=0,l} &= 0, \quad q_{,x}^2|_{x=0,l} = 0, \\
 w_{c,xx}|_{x=0,l} &= w_{a,xx}|_{x=0,l} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

§ 3.2. Связь амплитуд давлений звуковых волн в акустической среде с кинематическими параметрами пластины

Установим связь амплитуд давлений прошедшей и отраженной волны на поверхности пластины с нормальными перемещениями ее несущих слоев. Для этого рассмотрим возмущенное движение j -й акустической среды. Согласно (1.4.4) оно описывается уравнением относительно амплитуды Φ_j потенциала скоростей [11] с учетом того, что все искомые функции зависят только от координат x и z :

$$\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial z^2} + k^2 \Phi_j = 0, \quad k = \omega/c. \quad (3.2.4)$$

При этом соответствующие амплитуды давления p_{1w} , p_2 и координаты v_{j1} , v_{j3} ($v_{j2} \equiv 0$) векторов скоростей аналогично (1.4.5) определяются следующими равенствами:

$$\begin{aligned} p_{1w} &= -i\omega\rho_0\Phi_1, \quad p_2 = -i\omega\rho_0\Phi_2, \\ v_{j1} &= \frac{\partial \Phi_j}{\partial x}, \quad v_{j3} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

В областях соприкосновения окружающих сред с пластиной выполняются условия непротекания:

$$v_{j3}\Big|_{z=0} = i\omega w^{(j)}, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (3.2.6)$$

На бесконечности должны выполняться условия Зоммерфельда (1.4.7) (r – длина радиус-вектора) [11]:

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial r} + ik\Phi_j = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (3.2.7)$$

Вне зоны контакта сред с пластиной давления совпадают:

$$p_1\Big|_{z=0} = p_2\Big|_{z=0}, \quad x < 0, \quad x > l.$$

Нормальные перемещения несущих слоев (1.3.2), давления, потенциалы скоростей и координаты векторов скоростей в средах представляем в виде тригонометрических рядов, удовлетворяющих граничным условиям (3.1.3):

$$p_j = \sum_{n=1}^{\infty} p_{jn} \sin(\lambda_n x), \quad \Phi_j = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{jn} \sin(\lambda_n x), \quad (3.2.8)$$

$$v_{j1} = \sum_{n=1}^{\infty} v_{j1n} \cos(\lambda_n x), \quad v_{j3} = \sum_{n=1}^{\infty} v_{j3n} \sin(\lambda_n x).$$

$$w_{a,c} = \sum_{n=1}^{\infty} w_{a,cn} \sin(\lambda_n x), \quad w^{(j)} = \sum_{n=1}^{\infty} w_n^{(j)} \sin(\lambda_n x), \quad (3.2.9)$$

$$w_n^{(1)} = \frac{w_{cn} + w_{an}}{2}, \quad w_n^{(2)} = \frac{w_{cn} - w_{an}}{2}, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}.$$

Тогда уравнение (3.2.4) и соотношения (3.2.5) приобретают следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \Phi_{jn}}{\partial z^2} + \text{sign}(k - \lambda_n) \beta_n^2 \Phi_{jn} = 0, \quad \beta_n = \sqrt{|k^2 - \lambda_n^2|}, \quad (3.2.10)$$

$$p_{1n} = -i\omega\rho_0 \Phi_{1n}, \quad p_{2n} = -i\omega\rho_0 \Phi_{2n}, \quad (3.2.11)$$

$$v_{j1n} = \lambda_n \Phi_{jn}, \quad v_{j3n} = \frac{\partial \Phi_{jn}}{\partial z}.$$

Условие (3.2.6) заменяем таким равенством относительно коэффициентов рядов:

$$v_{j3n} \Big|_{z=0} = i\omega w_n^{(j)}. \quad (3.2.12)$$

Вместо же равенства (3.2.7) полагаем, что при $k > \lambda_n$ имеют место соотношения:

$$-\frac{\partial \Phi_{1n}}{\partial z} + i\beta_n \Phi_{1n} = o\left(\frac{1}{\sqrt{-z}}\right), \quad z \rightarrow -\infty \quad (r = -z), \quad (3.2.13)$$

$$\frac{\partial \Phi_{2n}}{\partial z} + i\beta_n \Phi_{2n} = o\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right), \quad z \rightarrow +\infty \quad (r = z),$$

а при $k \leq \lambda_n$ функция $\Phi_{1n}(z)$ ограничена при $z \leq 0$, а функция $\Phi_{2n}(z)$ ограничена при $z \geq 0$.

Такой подход является приближенным. При этом фактически рассматривается периодическая в плоскости $z=0$ система пластин и не учитывается дифракция волн на краях пластины. Использование этого подхода

вызвано значительными сложностями при точном решении задачи. С другой стороны, следует ожидать, что приближенное решение будет мало отличаться от точного вне окрестностей краев препятствия.

Далее находим решение краевой задачи (3.2.10), (3.2.11), (3.2.13). При $k > \lambda_n$ общее решение уравнения (3.2.10) имеет вид (C_{1j} и C_{2j} - произвольные постоянные):

$$\Phi_{jn} = C_{1j}e^{-i\beta_n z} + C_{2j}e^{i\beta_n z}.$$

Удовлетворяя условиям (3.2.12) и (3.2.13) имеем:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \Phi_{1n}}{\partial z} + i\beta_n \Phi_{1n} &= -i\beta_n (-C_{11}e^{-i\beta_n z} + C_{21}e^{i\beta_n z}) + i\beta_n (C_{11}e^{-i\beta_n z} + C_{21}e^{i\beta_n z}) = \\ &= 2i\beta_n C_{11}e^{-i\beta_n z} = o\left(\frac{1}{\sqrt{-z}}\right), \quad z \rightarrow -\infty \Rightarrow C_{11} = 0, \\ \frac{\partial \Phi_{2n}}{\partial z} + i\beta_n \Phi_{2n} &= i\beta_n (-C_{12}e^{-i\beta_n z} + C_{22}e^{i\beta_n z}) + i\beta_n (C_{12}e^{-i\beta_n z} + C_{22}e^{i\beta_n z}) = \\ &= 2i\beta_n C_{22}e^{i\beta_n z} = o\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right), \quad z \rightarrow +\infty \Rightarrow C_{22} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Phi_{1n} &= C_{21}e^{i\beta_n z}, \quad \Phi_{2n} = C_{12}e^{-i\beta_n z}, \\ \frac{\partial \Phi_{1n}}{\partial z} &= i\beta_n C_{21}e^{i\beta_n z} \Rightarrow \left. \frac{\partial \Phi_{1n}}{\partial z} \right|_{z=0} = i\beta_n C_{21} = i\omega w_n^{(1)}, \quad C_{21} = \frac{\omega w_n^{(1)}}{\beta_n}, \\ \frac{\partial \Phi_{2n}}{\partial z} &= -i\beta_n C_{12}e^{-i\beta_n z} \Rightarrow \left. \frac{\partial \Phi_{2n}}{\partial z} \right|_{z=0} = -i\beta_n C_{12} = i\omega w_n^{(2)}, \quad C_{12} = \frac{\omega w_n^{(2)}}{\beta_n}. \end{aligned}$$

Приходим к следующим результатам:

$$\Phi_{1n} = \frac{\omega w_n^{(1)}}{\beta_n} e^{i\beta_n z}, \quad \Phi_{2n} = -\frac{\omega w_n^{(2)}}{\beta_n} e^{-i\beta_n z}. \quad (3.2.14)$$

При $k < \lambda_n$ общее решение уравнения (3.2.10) имеет вид (C_{1j} и C_{2j} - произвольные постоянные):

$$\Phi_{jn} = C_{1j}e^{-\beta_n z} + C_{2j}e^{\beta_n z}.$$

Удовлетворяя опять условиям (3.2.12) и (3.2.13) переходим к таким равенствам:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial\Phi_{1n}}{\partial z} + i\beta_n\Phi_{1n} &= -i\beta_n(-C_{11}e^{-i\beta_n z} + C_{21}e^{i\beta_n z}) + i\beta_n(C_{11}e^{-i\beta_n z} + C_{21}e^{i\beta_n z}) = \\ &= 2i\beta_n C_{11}e^{-i\beta_n z} = o\left(\frac{1}{\sqrt{-z}}\right), \quad z \rightarrow -\infty \Rightarrow C_{11} = 0; \\ \frac{\partial\Phi_{2n}}{\partial z} + i\beta_n\Phi_{2n} &= i\beta_n(-C_{12}e^{-i\beta_n z} + C_{22}e^{i\beta_n z}) + i\beta_n(C_{12}e^{-i\beta_n z} + C_{22}e^{i\beta_n z}) = \\ &= 2i\beta_n C_{22}e^{i\beta_n z} = o\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right), \quad z \rightarrow +\infty \Rightarrow C_{22} = 0. \end{aligned}$$

Из условий ограниченности:

$$C_{11} = 0, C_{22} = 0 \Rightarrow \Phi_{1n} = C_{21}e^{\beta_n z}, \Phi_{2n} = C_{12}e^{-\beta_n z}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Phi_{1n} &= C_{21}e^{\beta_n z}, \Phi_{2n} = C_{12}e^{-\beta_n z}, \\ \frac{\partial\Phi_{1n}}{\partial z} &= \beta_n C_{21}e^{\beta_n z} \Rightarrow \frac{\partial\Phi_{1n}}{\partial z}\Bigg|_{z=0} = \beta_n C_{21} = i\omega w_n^{(1)}, \quad C_{21} = \frac{i\omega w_n^{(1)}}{\beta_n}, \\ \frac{\partial\Phi_{2n}}{\partial z} &= -\beta_n C_{12}e^{-\beta_n z} \Rightarrow \frac{\partial\Phi_{2n}}{\partial z}\Bigg|_{z=0} = -\beta_n C_{12} = i\omega w_n^{(2)}, \quad C_{12} = \frac{i\omega w_n^{(2)}}{\beta_n}. \end{aligned}$$

Имеем следующие результаты:

$$\Phi_{1nm} = \frac{i\omega w_n^{(1)}}{\beta_n} e^{\beta_n z}, \Phi_{2n} = -\frac{i\omega w_n^{(2)}}{\beta_n} e^{-\beta_n z}. \quad (3.2.15)$$

Объединение формул (3.2.14) и (3.2.15) дает следующие формулы:

$$\begin{aligned} \Phi_{1n} &= \frac{\omega w_n^{(1)}}{\beta_n} \left[e^{i\beta_n z} H(k - \lambda_n) + i e^{\beta_n z} H(\lambda_n - k) \right], \\ \Phi_{2n} &= -\frac{\omega w_n^{(2)}}{\beta_n} \left[e^{-i\beta_n z} H(k - \lambda_n) + i e^{-\beta_n z} H(\lambda_n - k) \right]. \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

где $H(x)$ – функция Хэвисайда.

Подставляя (3.2.16) в (3.2.11) получим амплитуды давления набегающей и прошедшей волны на поверхности пластины в коэффициентах рядов связанные с кинематическими параметрами пластины $w^{(k)}$:

$$\begin{aligned}
 p_{1wn}|_{z=0} &= -i\omega\rho_0 \frac{\omega w_n^{(1)}}{\beta_n} [H(k - \lambda_n) + iH(\lambda_n - k)] = -\rho_0\omega^2\Gamma_n(k)w_n^{(1)}, \\
 p_{2n}|_{z=0} &= i\omega\rho_0 \frac{\omega w_n^{(2)}}{\beta_n} [H(k - \lambda_n) + iH(\lambda_n - k)] = \rho_0\omega^2\Gamma_n(k)w_n^{(2)}, \quad (3.2.17) \\
 \Gamma_n(k) &= \frac{\varepsilon(k, \lambda_n)}{\beta_n}, \quad \varepsilon(k, \lambda_n) = \begin{cases} i & \text{при } k > \lambda_n, \\ -1 & \text{при } k \leq \lambda_n. \end{cases}
 \end{aligned}$$

§ 3.3. Определение звукоизоляционных свойств пластины в плоском случае

Для анализа звукоизоляционных свойств прямоугольной пластины (1.2.2) и (1.2.4) с использованием формул (3.2.17) необходимо определить нормальные перемещения ее несущих слоев в коэффициентах рядов. Для их определения используем систему дифференциальных уравнений (1.3.13), записав ее с учетом граничных условий (3.1.3) и предположения (2.1.3) следующим образом:

$$\begin{aligned}
 B \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_1^a + 2q^1 + \omega^2 \rho_a u_1^a &= 0, \\
 -D \frac{\partial^4}{\partial x^4} w_c + 2k_1 q_{,x}^1 + p_{10} - p_{20} + \omega^2 \rho_c w_c &= 0, \\
 -D \frac{\partial^4}{\partial x^4} w_a - 2c_3 w_a + p_{10} + p_{20} + \omega^2 \rho_{aw} w_a &= 0, \\
 u_1^a - k_1 w_{c,x} - k_2 (q_{,x}^1)_{,x} + k_3 q^1 &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Под величинами p_{10} и p_{20} понимаются амплитуды давлений в окружающих пластину акустических средах с номерами «1» и «2» на поверхности пластины.

Систему (3.3.1) будем решать, применяя тригонометрические ряды Фурье. Поэтому искомые функции, входящие в систему, представим в виде тригонометрических рядов:

$$\begin{aligned}
 w_c &= \sum_{n=1}^{\infty} w_{cn} \sin(\lambda_n x), \quad w_a = \sum_{n=1}^{\infty} w_{an} \sin(\lambda_n x), \\
 u_1^a &= \sum_{n=1}^{\infty} u_{1n}^a \cos(\lambda_n x), \quad q^1 = \sum_{n=1}^{\infty} q_n^1 \cos(\lambda_n x), \\
 \lambda_n &= \pi n / l.
 \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Амплитуда давления p_{10} на поверхности пластины в уравнениях (3.3.1) определяется в соответствии с равенством (1.2.1):

$$p_{10} = p_{*0} + p_{1w0}.$$

Входящее в это равенство амплитуда давление падающей волны p_{*0} на поверхности пластины также раскладывается в тригонометрический ряд:

$$p_{*0} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{*0n} \sin(\lambda_n x), \quad p_{*0n} = \frac{2}{l} \int_0^l p_{*0} \sin(\lambda_n x) dx. \quad (3.3.3)$$

Коэффициенты этого ряда зависят от формы падающей волны и в соответствии с равенствами (3.1.1) и (3.1.2) имеют следующий вид:

– плоская волна

$$p_{*0n} = \frac{2\Delta p}{l} \int_0^l \sin(\lambda_n x) dx; \quad (3.3.4)$$

– цилиндрическая волна

$$p_{*0n} = \frac{2\Delta p}{lH_0^{(2)}(kL)} \int_0^l H_0^{(2)}(kr_{10}) \sin(\lambda_n x) dx. \quad (3.3.5)$$

При вычислении входящего в равенство (1.2.1) амплитуды давления p_{1w0} и амплитуды давления p_{20} пренебрегаем дифракцией на концах пластины. При этом можно воспользоваться (2.3.2) и (2.3.4). Однако, после разложения в ряды функции $\Gamma(k, x)$ и нормальных перемещений получим бесконечную систему уравнений относительно коэффициентов рядов (3.3.2). Поэтому, проще с той же степенью приближения искать функции p_{1w0} и p_{20} , представляя их в виде рядов типа (3.3.3):

$$p_{1w0} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{10wn} \sin(\lambda_n x), \quad p_{20} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{20n} \sin(\lambda_n x). \quad (3.3.6)$$

Разность и сумму амплитуд давлений на поверхности пластины входящие в систему (3.3.1) с учетом (1.3.2), (3.2.9), (3.2.17) и (3.3.6) представим как:

$$\begin{aligned} p_{10} - p_{20} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[p_{*0n} - \rho_0 \omega^2 w_{cn} \Gamma_n \right] \sin(\lambda_n x), \\ p_{10} + p_{20} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[p_{*0n} - \rho_0 \omega^2 w_{an} \Gamma_n \right] \sin(\lambda_n x). \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

С учетом формул (3.2.9), (3.3.2), (3.3.7) и (1.3.3) запишем систему (3.3.1) в коэффициентах рядов Фурье.

Первое уравнение системы (3.3.1):

$$\begin{aligned}
& B \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_1^a + 2q^1 + \omega^2 \rho_a u_1^a = 0, \\
& B \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{n=1}^{\infty} u_{1n}^a \cos(\lambda_n x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q_n^1 \cos(\lambda_n x) + \omega^2 \rho_a \sum_{n=1}^{\infty} u_{1n}^a \cos(\lambda_n x) = 0, \quad (3.3.8) \\
& -B(\lambda_n)^2 u_{1n}^a + 2q_n^1 + \rho_a \omega^2 u_{1n}^a = 0.
\end{aligned}$$

Второе уравнение системы (3.3.1) выводится следующим образом:

$$\begin{aligned}
& -D \frac{\partial^4}{\partial x^4} w_c + 2k_1 q_{,x}^1 + p_{10} - p_{20} + \omega^2 \rho_c w_c = 0, \\
& -D \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(\sum_{n=1}^{\infty} w_{cn} \sin(\lambda_n x) \right) + 2k_1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} q_n^1 \cos(\lambda_n x) \right)_{,x} + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left[p_{*0n} - \rho_0 \omega^2 w_{cn} \Gamma_n \right] \sin(\lambda_n x) + \omega^2 \rho_c \sum_{n=1}^{\infty} w_{cn} \sin(\lambda_n x) = 0, \\
& -D(\lambda_n)^4 w_{cn} - 2k_1 \lambda_n q_n^1 + p_{*0n} - \rho_0 \omega^2 w_{cn} \Gamma_n + \rho_c \omega^2 w_{cn} = 0. \quad (3.3.9)
\end{aligned}$$

Третье уравнение системы (3.3.1) выводится так:

$$\begin{aligned}
& -D \frac{\partial^4}{\partial x^4} w_a - 2c_3 w_a + p_{10} + p_{20} + \omega^2 \rho_{aw} w_a = 0, \\
& -D \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(\sum_{n=1}^{\infty} w_{an} \sin(\lambda_n x) \right) - 2c_3 \sum_{n=1}^{\infty} w_{an} \sin(\lambda_n x) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left[p_{*0n} - \rho_0 \omega^2 w_{an} \Gamma_n \right] \sin(\lambda_n x) + \omega^2 \rho_{aw} \sum_{n=1}^{\infty} w_{an} \sin(\lambda_n x) = 0, \\
& -D(\lambda_n)^4 w_{an} - 2c_3 w_{an} + p_{*0n} - \rho_0 \omega^2 w_{an} \Gamma_n + \rho_{aw} \omega^2 w_{an} = 0. \quad (3.3.10)
\end{aligned}$$

Четвертое уравнение системы (3.3.1) выводится следующим образом:

$$\begin{aligned}
& u_1^a - k_1 w_{c,x} - k_2 \left(q_{,x}^1 \right)_{,x} + k_3 q^1 = 0, \\
& \sum_{n=1}^{\infty} u_{1n}^a \cos(\lambda_n x) - k_1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} w_{cn} \sin(\lambda_n x) \right)_{,x} - k_2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} q_n^1 \cos(\lambda_n x) \right)_{,x} + \\
& + k_3 \sum_{n=1}^{\infty} q_n^1 \cos(\lambda_n x) = 0, \\
& \sum_{n=1}^{\infty} u_{1n}^a \cos(\lambda_n x) - k_1 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n w_{cn} \cos(\lambda_n x) + k_2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n q_n^1 \sin(\lambda_n x) \right)_{,x} + \\
& + k_3 \sum_{n=1}^{\infty} q_n^1 \cos(\lambda_n x) = 0,
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{1n}^a \cos(\lambda_n x) - k_1 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n w_{cn} \cos(\lambda_n x) + k_2 \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n)^2 q_n^1 \cos(\lambda_n x) + k_3 \sum_{n=1}^{\infty} q_n^1 \cos(\lambda_n x) = 0,$$

$$u_{1n}^a - k_1 \lambda_n w_{cn} + k_2 (\lambda_n)^2 q_n^1 + k_3 q_n^1 = 0. \quad (3.3.11)$$

Из результатов, полученных в (3.3.8 - 3.3.11), получаем систему уравнений движения пластины ограниченной по одной координате в коэффициентах рядов Фурье:

$$\begin{aligned} u_{1n}^a (\rho_a \omega^2 - B(\lambda_n)^2) + 2q_n^1 &= 0, \\ w_{cn} (\rho_c \omega^2 - D(\lambda_n)^4 - \rho_0 \omega^2 \Gamma_n) - 2k_1 \lambda_n q_n^1 + p_{*0n} &= 0, \\ w_{an} (\rho_{aw} \omega^2 - D(\lambda_n)^4 - 2c_3 - \rho_0 \omega^2 \Gamma_n) + p_{*0n} &= 0, \\ u_{1n}^a - k_1 \lambda_n w_{cn} + q_n^1 (k_2 (\lambda_n)^2 + k_3) &= 0. \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

Выражение для w_{cn} и w_{an} выводим из системы (3.3.12):

$$\begin{aligned} w_{cn} &= \frac{p_{*0n} ((k_2 (\lambda_n)^2 + k_3) (\rho_a \omega^2 - B(\lambda_n)^2) - 2)}{(\rho_c \omega^2 - D(\lambda_n)^4 - \rho_0 \omega^2 \Gamma_n) (2 - (k_2 (\lambda_n)^2 + k_3) (\rho_a \omega^2 - B(\lambda_n)^2)) +} \\ &\quad \frac{+ 2k_1^2 (\lambda_n)^2 (\rho_a \omega^2 - B(\lambda_n)^2)}{2k_1^2 (\lambda_n)^2 (\rho_a \omega^2 - B(\lambda_n)^2)}, \\ w_{an} &= \frac{p_{*0n}}{D(\lambda_n)^4 + 2c_3 + \rho_0 \omega^2 \Gamma_n - \rho_{aw} \omega^2}. \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Выражения (3.3.13) позволяют определить амплитуду давления прошедшей волны на поверхности пластины в коэффициентах рядов (3.2.17) с учетом (1.3.2) в зависимости от формы набегающей волны (3.3.4), (3.3.5):

$$\begin{aligned} p_{20n} &= \rho_0 \omega^2 \Gamma_n(k) w_n^{(2)}, \\ \Gamma_n(k) &= \frac{\varepsilon(k, \lambda_n)}{\beta_n}, \quad \varepsilon(k, \lambda_n) = \begin{cases} i & \text{при } k > \lambda_n, \\ -1 & \text{при } k \leq \lambda_n, \end{cases} \end{aligned}$$

а затем и амплитуду давления прошедшей волны (3.3.6):

$$p_{20} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{20n} \sin(\lambda_n x).$$

Это позволяет анализировать звукоизоляционные свойства прямоугольной трехслойной пластины конечных размеров по формулам (1.2.2) и (1.2.4):

$$\eta = \left| \frac{P_{20}}{P_{*0}} \right|,$$

$$R_p = -20 \cdot \lg(\eta),$$

где амплитуда давления набегающей звуковой волны на поверхности пластины P_{*0} определяется в зависимости от формы волны в соответствии с (3.1.1), (3.1.2).

§ 3.4. Пример расчета

Рассмотрим пластину сотовой структуры (см. рис. 1.3.1), окруженную с двух сторон воздухом: $\rho_0 = 1.2041 \text{ кг/м}^3$, $c = 343 \text{ м/с}$. Пластина имеет следующие параметры: $l = 1 \text{ м}$, $t = 0.3 \text{ мм}$, $h = 4 \text{ мм}$. Материал несущих слоев – сталь Ст0, материал заполнителя – сплав АМц: $E = 200 \text{ ГПа}$, $\nu = 0.3$, $E_z = 71 \text{ ГПа}$, $\nu_z = 0.34$, $\rho_b = 7850 \text{ кг/м}^3$, $\rho_z = 2730 \text{ кг/м}^3$. Осредненные характеристики сотового заполнителя из сплава АМц с длиной и толщиной стенки $a = 6.3 \text{ мм}$ и $d = 0.05 \text{ мм}$, а также углом между стенками $\varphi = 120^\circ$ определяются на основании работы [2]: $E_3 = 981 \text{ МПа}$, $G = 202 \text{ МПа}$, $\rho = 33.36 \text{ кг/м}^3$.

Соответствующие коэффициенты в системе уравнений (1.3.13), согласно (1.3.4-1.3.6, 1.3.8, 1.3.9, 1.3.12), имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} \rho_a &= 4.71, \rho_c = 4.78, \rho_{aw} = 4.73, \\ B &= 13.19 \cdot 10^7, D = 3.97, c_3 = 2.45 \cdot 10^{11}, \\ k_1 &= 0.0023, k_2 = 5.44 \cdot 10^{-18}, k_3 = 1.98 \cdot 10^{-11}. \end{aligned}$$

Для цилиндрической набегающей звуковой волны принимаются следующие значения геометрических параметров расположения источника звука относительно пластины: $x_c = 0.5$, $L = 0.5 \text{ м}$.

Определим звукоизоляционные свойства такой пластины и построим графики зависимости показателя звукоизоляции от частоты набегающей волны по линии ab , и в т. k (см. рис. 3.4.1).

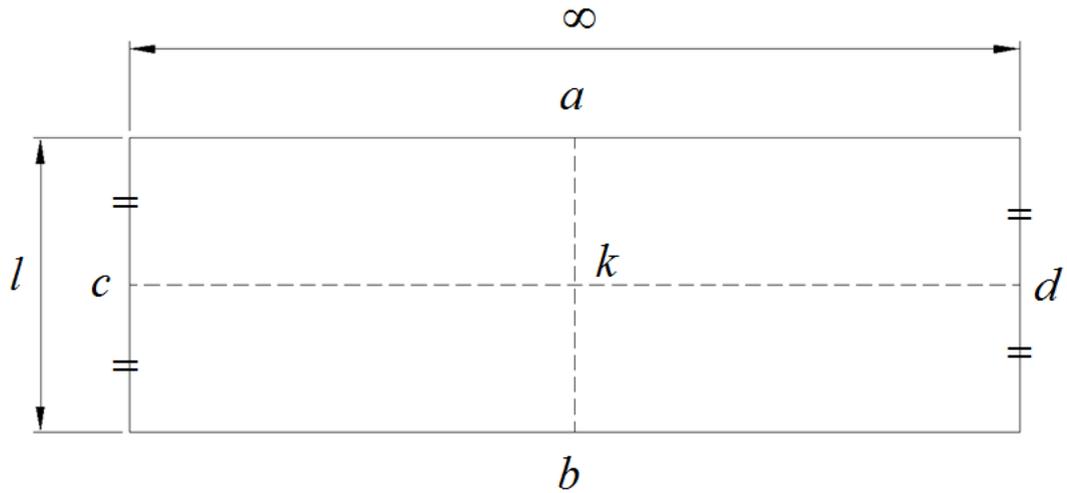


Рис. 3.4.1. Пластина в плане.

На рис. 3.4.2 представлен график зависимости показателя звукоизоляции R_p от частоты при цилиндрической форме набегающей волны по линии ab , а на рис. 3.4.3 в т. k . Для плоской волны зависимости выглядят аналогичным образом и незначительно отличаются численно.

Все результаты получены при учете двенадцати членов рядов. Больше их количество приводит к уточнению решения менее чем на 2 %.

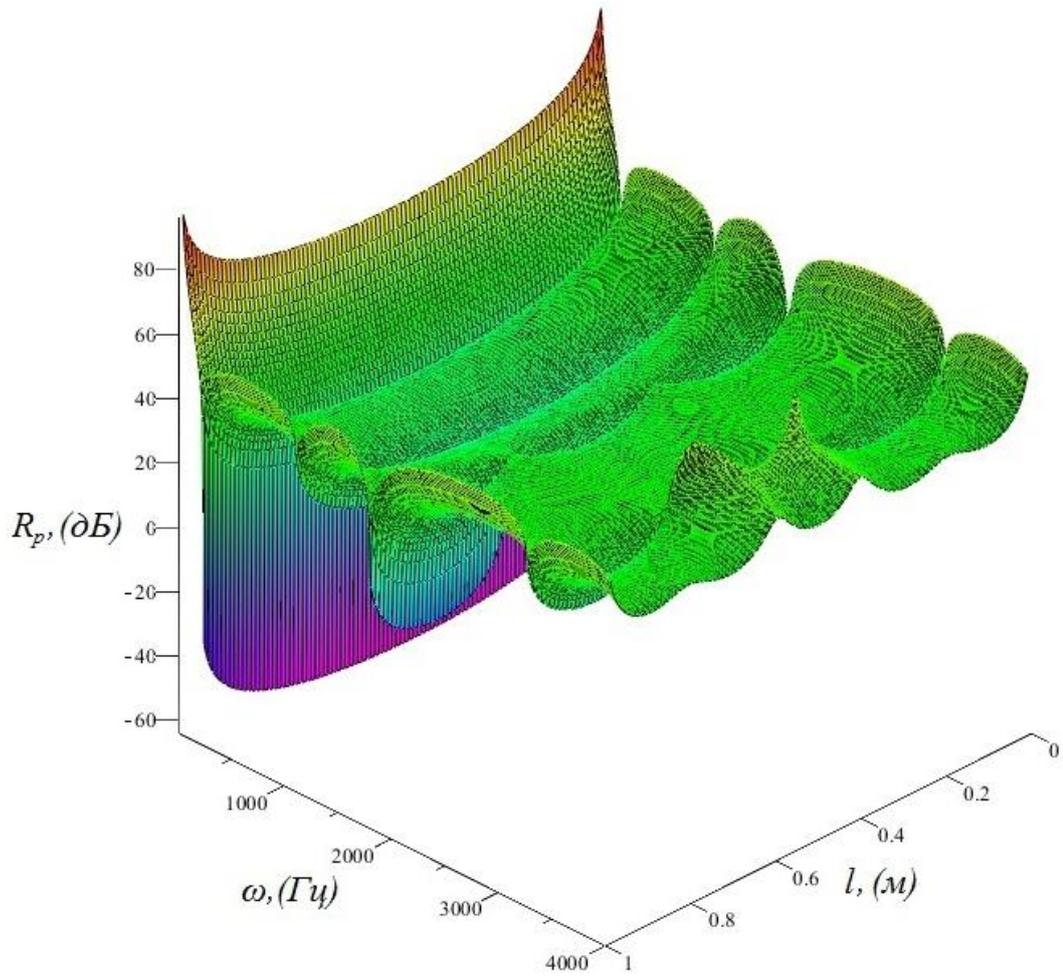


Рис. 3.4.2. Показатель R_p по линии ab при набегающей цилиндрической волне.

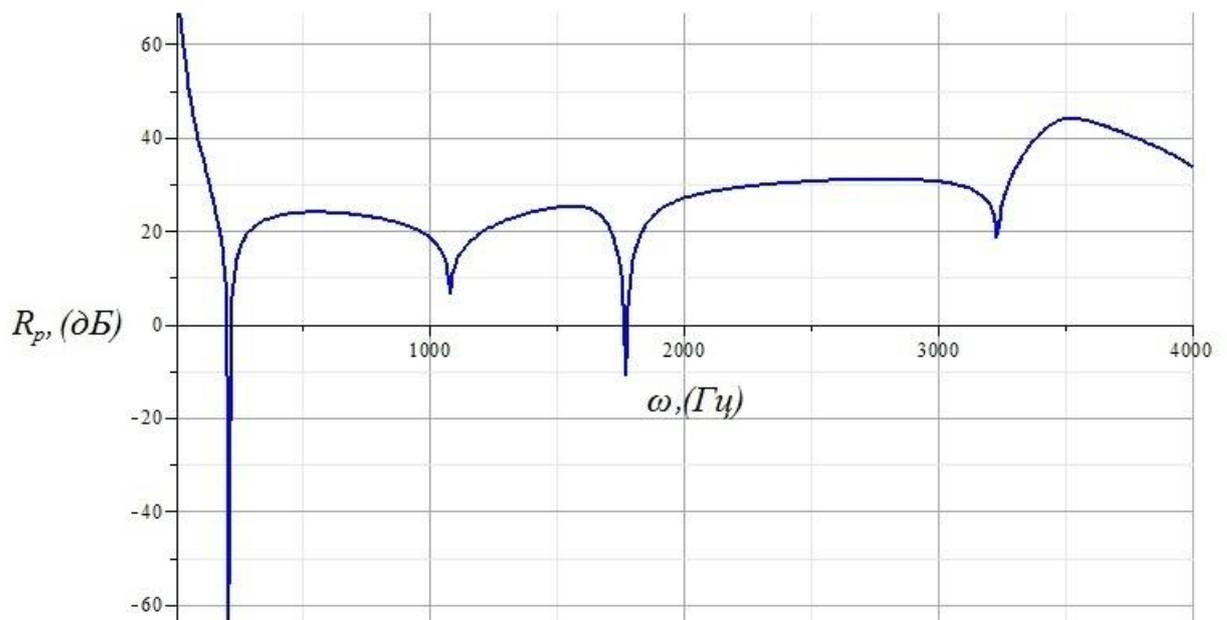


Рис. 3.4.3. Показатель R_p в точке k при набегающей цилиндрической волне.

График, представленный на рис. 3.4.2 иллюстрирует неравномерность распределения показателя звукоизоляции. На краях пластина лучше изолирует звук, чем в центре.

Из рисунка 3.4.3 видно, что пластина данной конфигурации не на всем рассмотренном диапазоне частот эффективно изолирует звук. Это связано с совпадением частоты набегающей волны с собственной частотой колебаний трехслойной пластины с мягким ортотропным наполнителем. Наиболее стабильно пластина изолирует звук в диапазоне частот от 2000 до 3000 Гц. В этом диапазоне пластина поглощает от 27 до 33 дБ.

В качестве верификации представленного в главе 3 способа исследования звукоизоляционных свойств трехслойной пластины бесконечной длины и ограниченной высоты сравним результаты, полученные с его помощью, приняв высоту пластины $l = 1000$ м, с результатами, полученными в главе 2 для пластины неограниченных размеров (см. рис. 2.4.1).

На рис. 3.4.4 изображен график зависимости коэффициента поглощения в т. k (см. рис. 3.4.1) от частоты плоской набегающей волны.

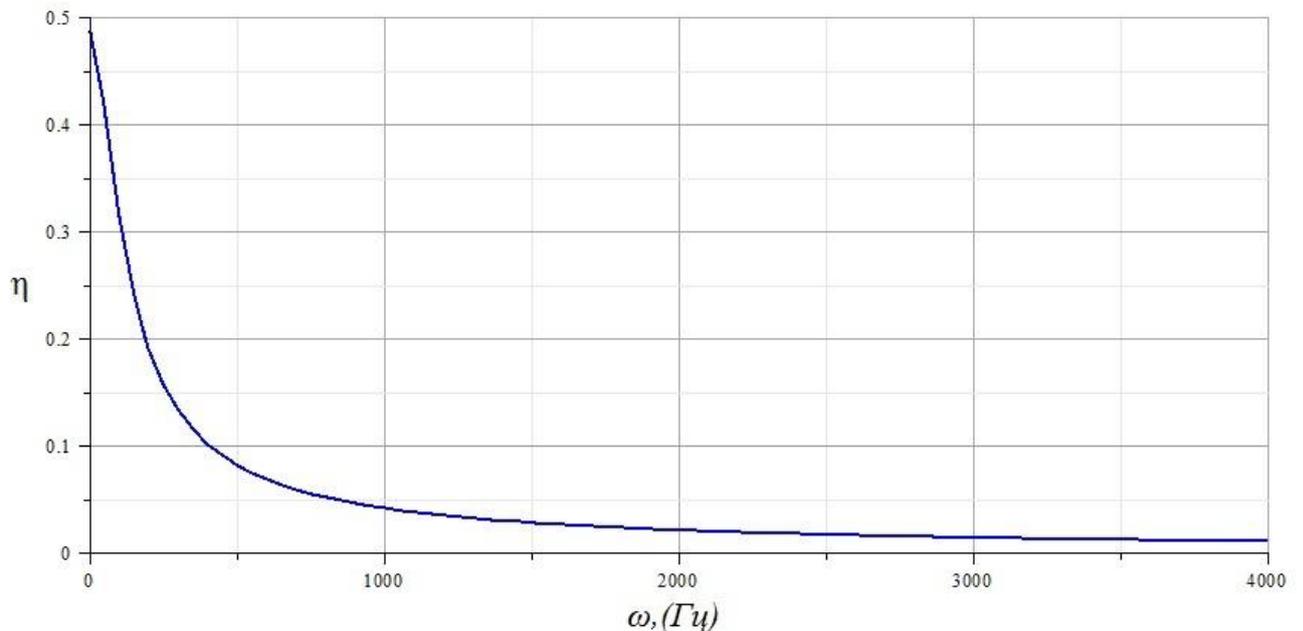


Рис. 3.4.4. Коэффициент η в точке k при набегающей плоской волне.

Анализируя результаты, представленные на рис. 3.4.4, и сравнивая их с результатами, полученными в главе 2 и представленными на рис. 2.4.1 видно, что зависимости имеют одинаковый характер, а численно отличаются не более чем на 2.5 %.

Выполненная верификация позволяет говорить о том, что предложенные способы исследования звукоизоляционных свойств трехслойных разноплановых пластин не противоречат друг другу.

ГЛАВА 4. ПРОХОЖДЕНИЕ ВОЛН РАЗЛИЧНОГО ТИПА ЧЕРЕЗ ПРЯМОУГОЛЬНУЮ ТРЕХСЛОЙНУЮ ПЛАСТИНУ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

§ 4.1. Постановка задачи о прохождении волн различного типа через трехслойную пластину конечных размеров

На трехслойную пластину размерами $l_1 \times l_2$, окруженную с двух сторон акустическими средами «1» и «2», набегают плоская, цилиндрическая или сферическая звуковая волна с амплитудой давления на фронте p_* и частотой ω . В результате ее взаимодействия с пластиной в окружающих средах возбуждаются давления с амплитудами p_1 и p_2 соответственно. Используется прямоугольная декартовая система координат $Oxyz$. При этом предполагается, что плоскость Oxy для пластины является срединной, а ось Oz направлена в глубину среды «2» (рис. 4.1.1).

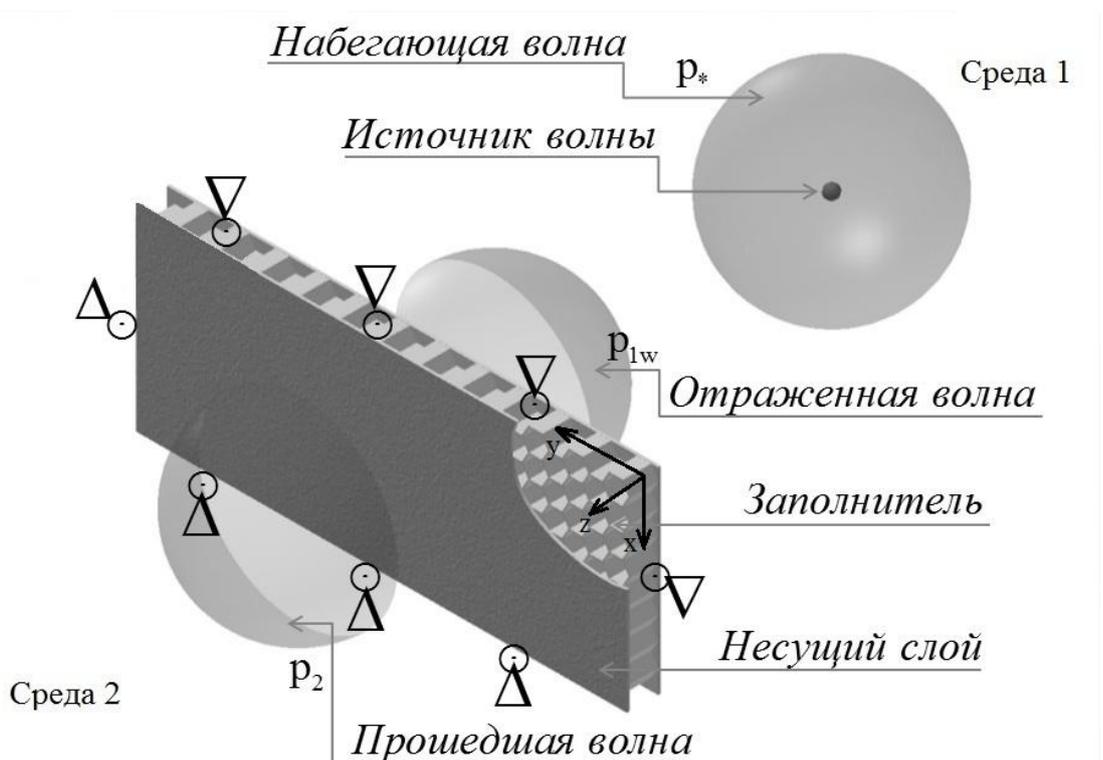


Рис. 4.1.1. Постановка задачи.

Целью задачи является вычисление коэффициента поглощения преграды η (1.2.2) и показателя звукоизоляции R_p (1.2.4) в зависимости от частоты и формы набегающей волны.

Амплитуда давления набегающей волны p_* и ее значение на препятствие p_{*0} зависит от ее формы, и в соответствии с формулами (1.4.8 – 1.4.10) и с учетом одинаковых физических свойств акустических сред записываются следующим образом:

– плоская волна

$$p_* = \Delta p e^{-ikz}, p_{*0} = \Delta p = -i\omega\rho_0 A_\Phi; \quad (4.1.1)$$

– цилиндрическая волна

$$p_* = -i\omega\rho_0 A_\Phi H_0^{(2)}(kr_1) = \Delta p \frac{H_0^{(2)}(kr_1)}{H_0^{(2)}(kL)}, r_1 = \sqrt{(x-x_c)^2 + (z+L)^2} \quad (4.1.2)$$

$$p_{*0} = \Delta p \frac{H_0^{(2)}(kr_{10})}{H_0^{(2)}(kL)}, r_{10} = \sqrt{(x-x_c)^2 + L^2};$$

– сферическая волна

$$p_* = -i\omega\rho_0 r_2^{-1} A_\Phi e^{-ikr_2} = \Delta p \frac{L}{r_2} e^{-ik(r_2-L)},$$

$$r_2 = \sqrt{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 + (z+L)^2}, \quad (4.1.3)$$

$$p_{*0} = \Delta p \frac{L}{r_{20}} e^{-ik(r_{20}-L)},$$

$$r_{20} = \sqrt{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 + L^2}.$$

Где: $x-x_c$ и $y-y_c$ координата источника излучения волны, L – расстояние от поверхности пластины до источника волны, z – полутолщина пластины, A_Φ – произвольная постоянная, ρ_0 – плотность среды «1», Δp – амплитуда давления на фронте волны при ее касании препятствия.

На рисунке 4.1.2 представлен график зависимости амплитуды давления набегающей цилиндрической волны по высоте пластины на ее поверхности. Частота набегающей волны 50 Гц, расстояние от пластины до источника звука

$L=1$ м, высота пластины $l=1$ м, координата источника по высоте пластины $x-x_c=l/2$.

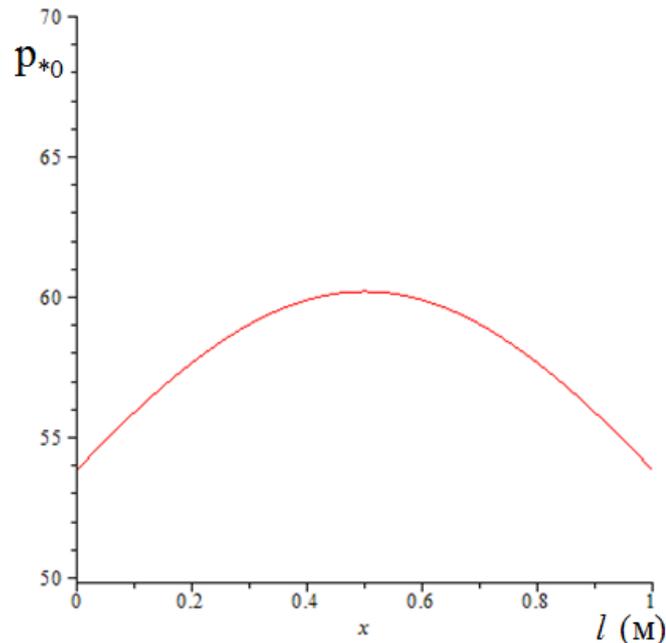


Рис. 4.1.2. Цилиндрическая волна.

При варьировании координаты источника звука, пик будет смещаться вправо или влево. Также при приближении источника звука к пластине пик будет более острый, а при удалении дуга выпрямится.

Для плоской и цилиндрической набегающей волны зависимости будут аналогичны 3.1.2 и 3.1.3 соответственно.

Амплитуды давлений отраженной p_{1w} и прошедшей p_2 волны зависят от кинематических параметров пластины, и для их определения необходимо решить вспомогательную задачу о распространении кинематических возмущений от границы акустического полупространства для случая пространственной задачи.

Необходимые кинематические параметры пластины определяются из решения системы дифференциальных уравнений, описывающих её движение. Для описания движения пластины используется система уравнений (1.3.13):

$$\begin{aligned}
L_{11}(u_1^c) + L_{12}(u_2^c) &= \rho_c \ddot{u}_1^c, \\
L_{21}(u_1^c) + L_{22}(u_2^c) &= \rho_c \ddot{u}_2^c, \\
L_{11}(u_1^a) + L_{12}(u_2^a) + 2q^1 &= \rho_a \ddot{u}_1^a, \\
L_{21}(u_1^a) + L_{22}(u_2^a) + 2q^2 &= \rho_a \ddot{u}_2^a, \\
-D\Delta_2^2 w_c + 2k_1(q_{,x}^1 + q_{,y}^2) + p_1 - p_2 &= \rho_c \ddot{w}_c, \\
-D\Delta_2^2 w_a - 2c_3 w_a + p_1 + p_2 &= \rho_{aw} \ddot{w}_a, \\
u_1^a - k_1 w_{c,x} - k_2(q_{,x}^1 + q_{,y}^2)_{,x} + k_3 q^1 &= 0, \\
u_2^a - k_1 w_{c,y} - k_2(q_{,x}^1 + q_{,y}^2)_{,y} + k_3 q^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Граничные условия для шарнирно опертой пластины согласно (1.3.19 – 1.3.20) следующие [19, 20]:

$$\begin{aligned}
u_2^c \Big|_{x=0,l_1} &= u_2^a \Big|_{x=0,l_1} = w_c \Big|_{x=0,l_1} = w_a \Big|_{x=0,l_1} = 0, \\
(u_{1,x}^c + \nu u_{2,y}^c) \Big|_{x=0,l_1} &= (u_{1,x}^a + \nu u_{2,y}^a) \Big|_{x=0,l_1} = 0, (q_{,x}^1 + q_{,y}^2) \Big|_{x=0,l_1} = 0, \\
[\nu \Delta_2 w_c + (1-\nu) w_{c,xx}] \Big|_{x=0,l_1} &= [\nu \Delta_2 w_a + (1-\nu) w_{a,xx}] \Big|_{x=0,l_1} = 0, \\
u_1^c \Big|_{y=0,l_2} &= u_1^a \Big|_{y=0,l_2} = w_c \Big|_{y=0,l_2} = w_a \Big|_{y=0,l_2} = 0, \\
[u_{2,y}^c + \nu u_{1,x}^c] \Big|_{y=0,l_2} &= [u_{2,y}^a + \nu u_{1,x}^a] \Big|_{y=0,l_2} = 0, (q_{,x}^1 + q_{,y}^2) \Big|_{y=0,l_2} = 0, \\
[\nu \Delta_2 w_c + (1-\nu) w_{c,yy}] \Big|_{y=0,l_2} &= [\nu \Delta_2 w_a + (1-\nu) w_{a,yy}] \Big|_{y=0,l_2} = 0.
\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

§ 4.2. Связь амплитуд давлений звуковых волн в акустической среде с кинематическими параметрами прямоугольной пластины конечных размеров

Установим связь амплитуд давлений прошедшей и отраженной волн на поверхности пластины с нормальными перемещениями ее несущих слоев. Для этого рассмотрим возмущенное движение j -й акустической среды. Согласно (1.4.4) оно описывается уравнением относительно амплитуды Φ_j потенциала скоростей [11]:

$$\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial z^2} + k^2 \Phi_j = 0, \quad k = \omega/c. \quad (4.2.1)$$

При этом соответствующие амплитуды давления p_{1w} , p_2 и координаты v_{j1} , v_{j2} , v_{j3} векторов скоростей аналогично (1.4.5) определяются следующими равенствами:

$$\begin{aligned} p_{1w} &= -i\omega\rho_0\Phi_1, \quad p_2 = -i\omega\rho_0\Phi_2, \\ v_{j1} &= \frac{\partial\Phi_j}{\partial x}, \quad v_{j2} = \frac{\partial\Phi_j}{\partial y}, \quad v_{j3} = \frac{\partial\Phi_j}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

В областях соприкосновения окружающих сред с пластиной выполняются условия непротекания:

$$v_{j3}\Big|_{z=0} = i\omega w^{(j)}, \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad 0 \leq y \leq l_2. \quad (4.2.3)$$

На бесконечности должны выполняться условия Зоммерфельда (1.4.6) (r – длина радиуса-вектора) [11]:

$$\frac{\partial\Phi_j}{\partial r} + ik\Phi_j = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (4.2.4)$$

Вне зоны контакта сред с пластиной давления совпадают:

$$p_1\Big|_{z=0} = p_2\Big|_{z=0}, \quad x < 0, \quad x > l_1, \quad y < 0, \quad y > l_2.$$

Нормальные перемещения несущих слоев (1.3.2), давления, потенциалы скоростей и координаты векторов скоростей в средах представляем в виде двойных тригонометрических рядов, удовлетворяющих граничным условиям (4.1.4):

$$p_j = \sum_{n,m=1}^{\infty} p_{jnm} \sin(\lambda_{1n}x) \sin(\lambda_{2m}y), \quad \Phi_j = \sum_{n,m=1}^{\infty} \Phi_{jnm} \sin(\lambda_{1n}x) \sin(\lambda_{2m}y),$$

$$v_{j1} = \sum_{n,m=1}^{\infty} v_{j1nm} \cos(\lambda_{1n}x) \sin(\lambda_{2m}y), \quad v_{j2} = \sum_{n,m=1}^{\infty} v_{j2nm} \sin(\lambda_{1n}x) \cos(\lambda_{2m}y), \quad (4.2.5)$$

$$v_{j3} = \sum_{n,m=1}^{\infty} v_{j3nm} \sin(\lambda_{1n}x) \sin(\lambda_{2m}y).$$

$$w_{a,c} = \sum_{n,m=1}^{\infty} w_{a,cnm} \sin(\lambda_{1n}x) \sin(\lambda_{2m}y), \quad w^{(j)} = \sum_{n,m=1}^{\infty} w_{nm}^{(j)} \sin(\lambda_{1n}x) \sin(\lambda_{2m}y), \quad (4.2.6)$$

$$w_{nm}^{(1)} = \frac{w_{cnm} + w_{anm}}{2}, \quad w_{nm}^{(2)} = \frac{w_{cnm} - w_{anm}}{2}, \quad \lambda_{1n} = \frac{\pi n}{l_1}, \quad \lambda_{2m} = \frac{\pi m}{l_2}.$$

Тогда уравнение (4.2.1) и соотношения (4.2.2) приобретают следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \Phi_{jnm}}{\partial z^2} + \text{sign}(k - \mu_{nm}) \beta_{nm}^2 \Phi_{jnm} = 0, \quad \beta_{nm} = \sqrt{|k^2 - \mu_{nm}^2|}, \quad (4.2.7)$$

где $\mu_{nm} = \sqrt{\lambda_{1n}^2 + \lambda_{2m}^2}$.

$$p_{1wnm} = -i\omega\rho_0 \Phi_{1nm}, \quad p_{2nm} = -i\omega\rho_0 \Phi_{2nm},$$

$$v_{j1nm} = \lambda_{1n} \Phi_{jnm}, \quad v_{j2nm} = \lambda_{2m} \Phi_{jnm}, \quad v_{j3nm} = \frac{\partial \Phi_{jnm}}{\partial z}. \quad (4.2.8)$$

Условие (4.2.3) заменяем таким равенством относительно коэффициентов рядов:

$$v_{j3nm} \Big|_{z=0} = i\omega w_{nm}^{(j)}. \quad (4.2.9)$$

Вместо же равенства (4.2.4) полагаем, что при $k > \mu_{nm}$ имеют место соотношения

$$-\frac{\partial \Phi_{1nm}}{\partial z} + i\beta_{nm} \Phi_{1nm} = o\left(\frac{1}{-z}\right), \quad z \rightarrow -\infty \quad (r = -z),$$

$$\frac{\partial \Phi_{2nm}}{\partial z} + i\beta_{nm} \Phi_{2nm} = o\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \rightarrow +\infty \quad (r = z), \quad (4.2.10)$$

а при $k \leq \mu_{nm}$ функция $\Phi_{1nm}(z)$ ограничена при $z \leq 0$, а функция $\Phi_{2nm}(z)$ ограничена при $z \geq 0$.

Такой подход является приближенным. При этом фактически рассматривается периодическая в плоскости $z=0$ система пластин и не учитывается дифракция волн на краях пластины. Использование этого подхода вызвано значительными сложностями при точном решении задачи. С другой стороны, следует ожидать, что приближенное решение будет мало отличаться от точного вне окрестностей краев препятствия.

Далее находим решение краевой задачи (4.2.7), (4.2.8), (4.2.10). При $k > \mu_{nm}$ общее решение уравнения (4.2.7) имеет вид (C_{1j} и C_{2j} – произвольные постоянные):

$$\Phi_{jnm} = C_{1j} e^{-i\beta_{nm}z} + C_{2j} e^{i\beta_{nm}z}.$$

Удовлетворяя условиям (4.2.9) и (4.2.10) имеем:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \Phi_{1nm}}{\partial z} + i\beta_{nm} \Phi_{1nm} &= -i\beta_{nm} (-C_{11} e^{-i\beta_{nm}z} + C_{21} e^{i\beta_{nm}z}) + i\beta_{nm} (C_{11} e^{-i\beta_{nm}z} + C_{21} e^{i\beta_{nm}z}) = \\ &= 2i\beta_{nm} C_{11} e^{-i\beta_{nm}z} = o\left(\frac{1}{-z}\right), \quad z \rightarrow -\infty \Rightarrow C_{11} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{2nm}}{\partial z} + i\beta_{nm} \Phi_{2nm} &= i\beta_{nm} (-C_{12} e^{-i\beta_{nm}z} + C_{22} e^{i\beta_{nm}z}) + i\beta_{nm} (C_{12} e^{-i\beta_{nm}z} + C_{22} e^{i\beta_{nm}z}) = \\ 2i\beta_{nm} C_{22} e^{i\beta_{nm}z} &= o\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \rightarrow +\infty \Rightarrow C_{22} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Phi_{1nm} &= C_{21} e^{i\beta_{nm}z}, \quad \Phi_{2nm} = C_{12} e^{-i\beta_{nm}z}, \\ \frac{\partial \Phi_{1nm}}{\partial z} &= i\beta_{nm} C_{21} e^{i\beta_{nm}z} \Rightarrow \left. \frac{\partial \Phi_{1nm}}{\partial z} \right|_{z=0} = i\beta_{nm} C_{21} = i\omega w_{nm}^{(1)}, \end{aligned}$$

$$C_{21} = \frac{\omega w_{nm}^{(1)}}{\beta_{nm}},$$

$$\frac{\partial \Phi_{2nm}}{\partial z} = -i\beta_{nm} C_{12} e^{-i\beta_{nm}z} \Rightarrow \left. \frac{\partial \Phi_{2nm}}{\partial z} \right|_{z=0} = -i\beta_{nm} C_{12} = i\omega w_{nm}^{(2)},$$

$$C_{12} = \frac{\omega w_{nm}^{(2)}}{\beta_{nm}}.$$

Приходим к следующим результатам:

$$\Phi_{1nm} = \frac{\omega w_{nm}^{(1)}}{\beta_{nm}} e^{i\beta_{nm}z}, \quad \Phi_{2nm} = -\frac{\omega w_{nm}^{(2)}}{\beta_{nm}} e^{-i\beta_{nm}z}. \quad (4.2.11)$$

При $k < \mu_{nm}$ общее решение уравнения (4.2.7) имеет вид (C_{1j} и C_{2j} - произвольные постоянные):

$$\Phi_{jnm} = C_{1j} e^{-\beta_{nm}z} + C_{2j} e^{\beta_{nm}z}.$$

Удовлетворяя опять условиям (4.2.9) и (4.2.10) переходим к таким равенствам:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \Phi_{1nm}}{\partial z} + i\beta_{nm} \Phi_{1nm} &= -i\beta_{nm} (-C_{11} e^{-i\beta_{nm}z} + C_{21} e^{i\beta_{nm}z}) + i\beta_{nm} (C_{11} e^{-i\beta_{nm}z} + C_{21} e^{i\beta_{nm}z}) = \\ &= 2i\beta_{nm} C_{11} e^{-i\beta_{nm}z} = o\left(\frac{1}{-z}\right), \quad z \rightarrow -\infty \Rightarrow C_{11} = 0; \\ \frac{\partial \Phi_{2nm}}{\partial z} + i\beta_{nm} \Phi_{2nm} &= i\beta_{nm} (-C_{12} e^{-i\beta_{nm}z} + C_{22} e^{i\beta_{nm}z}) + i\beta_{nm} (C_{12} e^{-i\beta_{nm}z} + C_{22} e^{i\beta_{nm}z}) = \\ 2i\beta_{nm} C_{22} e^{i\beta_{nm}z} &= o\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \rightarrow +\infty \Rightarrow C_{22} = 0. \end{aligned}$$

Из условий ограниченности:

$$C_{11} = 0, C_{22} = 0 \Rightarrow \Phi_{1nm} = C_{21} e^{\beta_{nm}z}, \quad \Phi_{2nm} = C_{12} e^{-\beta_{nm}z}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Phi_{1nm} &= C_{21} e^{\beta_{nm}z}, \quad \Phi_{2nm} = C_{12} e^{-\beta_{nm}z}, \\ \frac{\partial \Phi_{1nm}}{\partial z} &= \beta_{nm} C_{21} e^{\beta_{nm}z} \Rightarrow \left. \frac{\partial \Phi_{1nm}}{\partial z} \right|_{z=0} = \beta_{nm} C_{21} = i\omega w_{nm}^{(1)}, \\ C_{21} &= \frac{i\omega w_{nm}^{(1)}}{\beta_{nm}}, \\ \frac{\partial \Phi_{2nm}}{\partial z} &= -\beta_{nm} C_{12} e^{-\beta_{nm}z} \Rightarrow \left. \frac{\partial \Phi_{2nm}}{\partial z} \right|_{z=0} = -\beta_{nm} C_{12} = i\omega w_{nm}^{(2)}, \\ C_{12} &= \frac{i\omega w_{nm}^{(2)}}{\beta_{nm}}. \end{aligned}$$

Приходим к следующим результатам:

$$\Phi_{1nm} = \frac{i\omega w_{nm}^{(1)}}{\beta_{nm}} e^{\beta_{nm}z}, \quad \Phi_{2nm} = -\frac{i\omega w_{nm}^{(2)}}{\beta_{nm}} e^{-\beta_{nm}z}. \quad (4.2.12)$$

Объединение (4.2.11) и (4.2.12) дает следующие формулы:

$$\begin{aligned}\Phi_{1nm} &= \frac{\omega w_{nm}^{(1)}}{\beta_{nm}} \left[e^{i\beta_{nm}z} H(k - \mu_{nm}) + i e^{\beta_{nm}z} H(\mu_{nm} - k) \right], \\ \Phi_{2nm} &= -\frac{\omega w_{nm}^{(2)}}{\beta_{nm}} \left[e^{-i\beta_{nm}z} H(k - \mu_{nm}) + i e^{-\beta_{nm}z} H(\mu_{nm} - k) \right].\end{aligned}\quad (4.2.13)$$

где $H(x)$ – функция Хэвисайда.

Подставляя (4.2.13) в (4.2.8) получим амплитуды давления набегающей и прошедшей волны на поверхности пластины в коэффициентах рядов связанные с кинематическими параметрами пластины $w^{(k)}$:

$$\begin{aligned}P_{1wnm}|_{z=0} &= -i\omega\rho_0 \frac{\omega w_{nm}^{(1)}}{\beta_{nm}} \left[H(k - \mu_{nm}) + iH(\mu_{nm} - k) \right] = -\rho_0\omega^2\Gamma_{nm}(k)w_{nm}^{(1)}, \\ P_{2wnm}|_{z=0} &= i\omega\rho_0 \frac{\omega w_{nm}^{(2)}}{\beta_{nm}} \left[H(k - \mu_{nm}) + iH(\mu_{nm} - k) \right] = \rho_0\omega^2\Gamma_{nm}(k)w_{nm}^{(2)}, \\ \Gamma_{nm}(k) &= \frac{\varepsilon(k, \mu_{nm})}{\beta_{nm}}, \quad \varepsilon(k, \mu_{nm}) = \begin{cases} i & \text{при } k > \mu_{nm}, \\ -1 & \text{при } k \leq \mu_{nm}. \end{cases}\end{aligned}\quad (4.2.14)$$

§ 4.3. Определение звукоизоляционных свойств пластины конечных размеров

Для анализа звукоизоляционных свойств прямоугольной пластины по формулам (1.2.2) и (1.2.4) с использованием формул (4.2.14) необходимо определить ее нормальные перемещения в коэффициентах рядов. Для этого используем систему дифференциальных уравнений (1.3.13), записав ее следующим образом:

$$\begin{aligned}
 L_{11}(u_1^c) + L_{12}(u_2^c) &= \rho_c \ddot{u}_1^c, \\
 L_{21}(u_1^c) + L_{22}(u_2^c) &= \rho_c \ddot{u}_2^c, \\
 L_{11}(u_1^a) + L_{12}(u_2^a) + 2q^1 &= \rho_a \ddot{u}_1^a, \\
 L_{21}(u_1^a) + L_{22}(u_2^a) + 2q^2 &= \rho_a \ddot{u}_2^a, \\
 -D\Delta_2^2 w_c + 2k_1(q_{,x}^1 + q_{,y}^2) + p_{10} - p_{20} &= \rho_c \ddot{w}_c, \\
 -D\Delta_2^2 w_a - 2c_3 w_a + p_{10} + p_{20} &= \rho_{aw} \ddot{w}_a, \\
 u_1^a - k_1 w_{c,x} - k_2(q_{,x}^1 + q_{,y}^2)_{,x} + k_3 q^1 &= 0, \\
 u_2^a - k_1 w_{c,y} - k_2(q_{,x}^1 + q_{,y}^2)_{,y} + k_3 q^2 &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Под величинами p_{10} и p_{20} понимаются амплитуды давлений в окружающих пластину акустических средах с номерами «1» и «2» на поверхности пластины.

Систему (4.3.1) будем решать, применяя двойные тригонометрические ряды Фурье. Поэтому, представим входящие в систему уравнений неизвестные функции в виде тригонометрических рядов:

$$\begin{aligned}
 u_1^a &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{1nm}^a \cos(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y), \quad u_2^a = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{2nm}^a \sin(\lambda_{1n} x) \cos(\lambda_{2m} y), \\
 u_1^c &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{1nm}^c \cos(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y), \quad u_2^c = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{2nm}^c \sin(\lambda_{1n} x) \cos(\lambda_{2m} y), \\
 q^1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_{nm}^1 \cos(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y), \quad q^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_{nm}^2 \sin(\lambda_{1n} x) \cos(\lambda_{2m} y).
 \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Амплитуда давления p_{10} на поверхности пластины в уравнениях (4.3.1) определяется в соответствии с равенством (1.2.1):

$$p_{10} = p_{*0} + p_{1w0}.$$

Входящее в это равенство амплитуда давление падающей волны p_{*0} на поверхности пластины также раскладываем в тригонометрический ряд:

$$p_{*0} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} p_{*0nm} \sin(\lambda_{1n}x) \sin(\lambda_{2m}y),$$

$$p_{*0nm} = \frac{4}{l_1 l_2} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} p_{*0} \sin(\lambda_{1n}x) \sin(\lambda_{2m}y) dx dy. \quad (4.3.3)$$

Коэффициенты этого ряда зависят от формы падающей волны и в соответствии с формулами (4.1.1 - 4.1.3) имеют следующий вид:

– плоская волна

$$p_{*0nm} = \frac{4\Delta p}{l_1 l_2} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \sin(\lambda_{1n}x) \sin(\lambda_{2m}y) dx dy; \quad (4.3.4)$$

– цилиндрическая волна

$$p_{*0nm} = \frac{4\Delta p}{l_1 l_2 H_0^{(2)}(kL)} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} H_0^{(2)}(kr_{10}) \sin(\lambda_{1n}x) \sin(\lambda_{2m}y) dx dy; \quad (4.3.5)$$

– сферическая волна

$$p_{*0nm} = \frac{4\Delta p L}{l_1 l_2} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \frac{e^{-ik(r_{20}-L)}}{r_{20}} \sin(\lambda_{1n}x) \sin(\lambda_{2m}y) dx dy. \quad (4.3.6)$$

Амплитуды давления отраженной и прошедшей волны на поверхности пластины определяются по аналогии с (3.3.6), представляя их в виде рядов типа (4.2.5) как:

$$p_{1w0} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} p_{1w0nm} \sin(\lambda_{1n}x) \sin(\lambda_{2m}y),$$

$$p_{20} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} p_{20nm} \sin(\lambda_{1n}x) \sin(\lambda_{2m}y), \quad (4.3.7)$$

где амплитуды давления прошедшей и отраженной волн в коэффициентах рядов определяются по формулам (4.2.14).

Разность и сумма амплитуд давлений на поверхности пластины в акустических средах «1» и «2» входящие в систему (4.3.1) с учетом (1.3.2), (4.2.6), (4.2.14), (4.3.7) определяется как:

$$\begin{aligned} p_{10} - p_{20} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[p_{*0nm} - \rho_0 \omega^2 w_{cnm} \Gamma_{nm} \right] \sin(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y), \\ p_{10} + p_{20} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[p_{*0nm} - \rho_0 \omega^2 w_{anm} \Gamma_{nm} \right] \sin(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y). \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

Далее с учетом формул (4.2.6), (4.3.2), (4.3.8) и (1.3.3), запишем систему (4.3.1) в коэффициентах рядов.

Первое уравнение системы (4.3.1) выводится следующим образом: (4.3.9)

$$L_{11}(u_1^c) + L_{12}(u_2^c) = \rho_c \ddot{u}_1^c,$$

$$\begin{aligned} & B \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{1nm}^c \cos(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right) + B \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{1nm}^c \cos(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right) + \\ & + B \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{2nm}^c \sin(\lambda_{1n} x) \cos(\lambda_{2m} y) \right) = -\rho_c \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{1nm}^c \cos(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y), \\ & - B \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_n)^2 u_{1nm}^c \cos(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right) - B \frac{1-\nu}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_m)^2 u_{1nm}^c \cos(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right) - \\ & - B \frac{1+\nu}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_n \lambda_m) u_{2nm}^c \cos(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right) = -\rho_c \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{1nm}^c \cos(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y), \\ & - B (\lambda_{1n})^2 u_{1nm}^c - B \frac{1-\nu}{2} (\lambda_{2m})^2 u_{1nm}^c - B \frac{1+\nu}{2} (\lambda_{1n} \lambda_{2m}) u_{2nm}^c + \rho_c \omega^2 u_{1nm}^c = 0. \end{aligned}$$

Второе уравнение системы (4.3.1) выводится следующим образом: (4.3.10)

$$L_{21}(u_1^c) + L_{22}(u_2^c) = \rho_c \ddot{u}_2^c,$$

$$\begin{aligned} & B \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{1nm}^c \cos(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right) + B \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{2nm}^c \sin(\lambda_{1n} x) \cos(\lambda_{2m} y) \right) + \\ & + B \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{2nm}^c \sin(\lambda_{1n} x) \cos(\lambda_{2m} y) \right) = -\rho_c \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{2nm}^c \sin(\lambda_{1n} x) \cos(\lambda_{2m} y), \\ & -B \frac{1+\nu}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_n \lambda_m) u_{1nm}^c \sin(\lambda_{1n} x) \cos(\lambda_{2m} y) \right) - B \frac{1-\nu}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_n)^2 u_{2nm}^c \sin(\lambda_{1n} x) \cos(\lambda_{2m} y) \right) - \\ & -B \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_m)^2 u_{2nm}^c \sin(\lambda_{1n} x) \cos(\lambda_{2m} y) \right) = -\rho_c \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{2nm}^c \sin(\lambda_{1n} x) \cos(\lambda_{2m} y), \\ & -B \frac{1+\nu}{2} (\lambda_{1n} \lambda_{2m}) u_{1nm}^c - B \frac{1-\nu}{2} (\lambda_{1n})^2 u_{2nm}^c - B \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\lambda_{2m})^2 u_{2nm}^c + \rho_c \omega^2 u_{2nm}^c = 0. \end{aligned}$$

Третье уравнение системы (4.3.1) выводится в коэффициентах рядов так: (4.3.11)

$$\begin{aligned} & L_{11}(u_1^a) + L_{12}(u_2^a) + 2q^1 = \rho_a \ddot{u}_1^a, \\ & B \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{1nm}^a \cos(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right) + B \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{1nm}^a \cos(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right) + \\ & + B \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{2nm}^a \sin(\lambda_{1n} x) \cos(\lambda_{2m} y) \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_{nm}^1 \cos(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) = - \\ & -\rho_a \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{1nm}^a \cos(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y), \\ & -B \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_n)^2 u_{1nm}^a \cos(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right) - B \frac{1-\nu}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_m)^2 u_{1nm}^a \cos(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right) - \\ & -B \frac{1+\nu}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_n \lambda_m) u_{2nm}^a \cos(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_{nm}^1 \cos(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) = - \\ & -\rho_a \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{1nm}^a \cos(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y), \\ & -B (\lambda_{1n})^2 u_{1nm}^a - B \frac{1-\nu}{2} (\lambda_{2m})^2 u_{1nm}^a - B \frac{1+\nu}{2} (\lambda_{1n} \lambda_{2m}) u_{2nm}^a + 2q_{nm}^1 + \rho_a \omega^2 u_{1nm}^a = 0. \end{aligned}$$

Четвертое уравнение системы (4.3.1) выводится в коэффициентах рядов так:

(4.3.12)

$$\begin{aligned}
& L_{21}(u_1^a) + L_{22}(u_2^a) + 2q^2 = \rho_a \ddot{u}_2^a, \\
& B \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{1nm}^a \cos(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right) + B \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{2nm}^a \sin(\lambda_{1n} x) \cos(\lambda_{2m} y) \right) + \\
& + B \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{2nm}^a \sin(\lambda_{1n} x) \cos(\lambda_{2m} y) \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_{nm}^2 \sin(\lambda_{1n} x) \cos(\lambda_{2m} y) = - \\
& - \rho_a \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{2nm}^a \sin(\lambda_{1n} x) \cos(\lambda_{2m} y), \\
& - B \frac{1+\nu}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_{1n} \lambda_{2m}) u_{1nm}^a \sin(\lambda_{1n} x) \cos(\lambda_{2m} y) \right) - B \frac{1-\nu}{2} \left(= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_{1n})^2 u_{2nm}^a \sin(\lambda_{1n} x) \cos(\lambda_{2m} y) \right) - \\
& - B \left(= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_{2m})^2 u_{2nm}^a \sin(\lambda_{1n} x) \cos(\lambda_{2m} y) \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_{nm}^2 \sin(\lambda_{1n} x) \cos(\lambda_{2m} y) = - \\
& - \rho_a \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{2nm}^a \sin(\lambda_{1n} x) \cos(\lambda_{2m} y), \\
& - B \frac{1+\nu}{2} (\lambda_{1n} \lambda_{2m}) u_{1nm}^a - B \frac{1-\nu}{2} (\lambda_{1n})^2 u_{2nm}^a - B (\lambda_{2m})^2 u_{2nm}^a + 2q_{nm}^2 + \rho_a \omega^2 u_{2nm}^a = 0;
\end{aligned}$$

Пятое уравнение системы (4.3.1) выводится следующим образом: (4.3.13)

$$\begin{aligned}
& -D \Delta^2 w_c + 2k_1 (q_{,x}^1 + q_{,y}^2) + p_{10} - p_{20} = \rho_c \ddot{w}_c, \\
& -D \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{cnm} \sin(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right) - 2D \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{cnm} \sin(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right) - \\
& -D \frac{\partial^4}{\partial y^4} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{cnm} \sin(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right) + \\
& + 2k_1 \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_{nm}^1 \cos(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right)_{,x} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_{nm}^2 \sin(\lambda_{1n} x) \cos(\lambda_{2m} y) \right)_{,y} \right) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[p_{*0nm} - \rho_0 \omega^2 w_{cnm} \Gamma_{nm} \right] \sin(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) = -\rho_c \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{cnm} \sin(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -D \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_{1n})^4 w_{cmm} \sin(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right) - 2D \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_{1n})^2 (\lambda_{2m})^2 w_{cmm} \sin(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right) - \\
& -D \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_{2m})^4 w_{cmm} \sin(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right) + \\
& + 2k_1 \left(\left(-1 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_{1n}) q_{nm}^1 \sin(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right) + \left(-1 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_{2m}) q_{nm}^2 \sin(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right) \right) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[p_{*0nm} - \rho_0 \omega^2 w_{cmm} \Gamma_{nm} \right] \sin(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) = -\rho_c \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{cmm} \sin(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y), \\
& -D (\lambda_{1n})^4 w_{cmm} - 2D (\lambda_{1n})^2 (\lambda_{2m})^2 w_{cmm} - D (\lambda_{2m})^4 w_{cmm} - 2k_1 \left((\lambda_{1n}) q_{nm}^1 + (\lambda_{2m}) q_{nm}^2 \right) + \\
& + p_{*0nm} - \rho_0 \omega^2 w_{cmm} \Gamma_{nm} + \rho_c \omega^2 w_{cmm} = 0.
\end{aligned}$$

Шестое уравнение системы (4.3.1) выводится следующим образом: (4.3.14)

$$\begin{aligned}
& -D \Delta^2 w_a - 2c_3 w_a + p_{10} + p_{20} = \rho_{aw} \ddot{w}_a, \\
& -D \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{amm} \sin(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right) - 2D \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{amm} \sin(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right) - \\
& -D \frac{\partial^4}{\partial y^4} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{amm} \sin(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right) - 2c_3 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{amm} \sin(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[p_{*0nm} - \rho_0 \omega^2 w_{amm} \Gamma_{nm} \right] \sin(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) = -\rho_{aw} \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{amm} \sin(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y), \\
& -D \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_{1n})^4 w_{amm} \sin(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right) - 2D \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_{1n})^2 (\lambda_{2m})^2 w_{amm} \sin(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right) - \\
& -D \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_{2m})^4 w_{amm} \sin(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right) - 2c_3 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{amm} \sin(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[p_{*0nm} - \rho_0 \omega^2 w_{amm} \Gamma_{nm} \right] \sin(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) = -\rho_{aw} \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{amm} \sin(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y), \\
& -D (\lambda_{1n})^4 w_{amm} - 2D (\lambda_{1n})^2 (\lambda_{2m})^2 w_{amm} - D (\lambda_{2m})^4 w_{amm} - 2c_3 w_{amm} + p_{*0nm} - \\
& -\rho_0 \omega^2 w_{amm} \Gamma_{nm} + \rho_{aw} \omega^2 w_{amm} = 0.
\end{aligned}$$

Седьмое уравнение системы (4.3.1) выводится в коэффициентах рядов так:
(4.3.15)

$$u_1^a - k_1 w_{c,x} - k_2 (q_{,x}^1 + q_{,y}^2)_{,x} + k_3 q^1 = 0;$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{1nm}^a \cos(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) - k_1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{cnm} \sin(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right)_{,x} - \\ & - k_2 \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_{nm}^1 \cos(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right)_{,x} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_{nm}^2 \sin(\lambda_{1n} x) \cos(\lambda_{2m} y) \right)_{,y} \right)_{,x} + \\ & + k_3 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_{nm}^1 \cos(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{1nm}^a \cos(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) - k_1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_n) w_{cnm} \cos(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right) - \\ & - k_2 \left(\left(-1 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_{1n}) q_{nm}^1 \sin(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_{2m}) q_{nm}^2 \sin(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right) \right)_{,x} + \\ & + k_3 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_{nm}^1 \cos(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{1nm}^a \cos(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) - k_1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_{1n}) w_{cnm} \cos(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right) - \\ & - k_2 \left(\left(-1 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_{1n})^2 q_{nm}^1 \cos(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_{1n} \lambda_{2m}) q_{nm}^2 \cos(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right) \right) + \\ & + k_3 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_{nm}^1 \cos(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) = 0, \end{aligned}$$

$$u_{1nm}^a - k_1 (\lambda_{1n}) w_{cnm} - k_2 \left(\left(-(\lambda_{1n})^2 q_{nm}^1 \right) + (\lambda_{1n} \lambda_{2m}) q_{nm}^2 \right) + k_3 q_{nm}^1 = 0.$$

Восьмое уравнение системы (4.3.1) выводится в коэффициентах рядов так:
(4.3.16)

$$u_2^a - k_1 w_{c,y} - k_2 (q_{,x}^1 + q_{,y}^2) + k_3 q^2 = 0,$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} u_{2nm}^a \sin(\lambda_{1n} x) \cos(\lambda_{2m} y) - k_1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{cnm} \sin(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right) - \\ & - k_2 \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_{nm}^1 \cos(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right)_{,x} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_{nm}^2 \sin(\lambda_{1n} x) \cos(\lambda_{2m} y) \right)_{,y} \right) + \\ & + k_3 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_{nm}^2 \sin(\lambda_{1n} x) \cos(\lambda_{2m} y) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{2nm}^a \sin(\lambda_{1n} x) \cos(\lambda_{2m} y) - k_1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_{2m}) w_{cnm} \sin(\lambda_{1n} x) \cos(\lambda_{2m} y) \right) - \\ & - k_2 \left(\left(-1 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_n) q_{nm}^1 \sin(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right) + \left(-1 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_{2m}) q_{nm}^2 \sin(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y) \right) \right)_{,y} + \\ & + k_3 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_{nm}^2 \sin(\lambda_{1n} x) \cos(\lambda_{2m} y) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{2nm}^a \sin(\lambda_{1n} x) \cos(\lambda_{2m} y) - k_1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_{2m}) w_{cnm} \sin(\lambda_{1n} x) \cos(\lambda_{2m} y) \right) - \\ & - k_2 \left(\left(-1 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_{1n} \lambda_{2m}) q_{nm}^1 \sin(\lambda_{1n} x) \cos(\lambda_{2m} y) \right) + \left(-1 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_{2m})^2 q_{nm}^2 \sin(\lambda_{1n} x) \cos(\lambda_{2m} y) \right) \right) + \\ & + k_3 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_{nm}^2 \sin(\lambda_{1n} x) \cos(\lambda_{2m} y) = 0, \end{aligned}$$

$$u_{2nm}^a - k_1 (\lambda_{2m}) w_{cnm} + k_2 \left(((\lambda_{1n} \lambda_{2m}) q_{nm}^1) + ((\lambda_{2m})^2 q_{nm}^2) \right) + k_3 q_{nm}^2 = 0.$$

Согласно результатам полученных в (4.3.9-4.3.16) из системы дифференциальных уравнений (4.3.1) имеем систему алгебраических уравнений в коэффициентах рядов:

$$\begin{aligned}
(b_{11nm} - \rho_c \omega^2)u_{1nm}^c + b_{12nm}u_{2nm}^c &= 0, \\
(b_{22nm} - \rho_c \omega^2)u_{2nm}^c + b_{21nm}u_{1nm}^c &= 0, \\
(b_{11nm} - \rho_a \omega^2)u_{1nm}^a + b_{12nm}u_{2nm}^a - 2q_{nm}^1 &= 0, \\
(b_{22nm} - \rho_a \omega^2)u_{2nm}^a + b_{21nm}u_{1nm}^a - 2q_{nm}^2 &= 0, \\
(D\mu_{nm}^4 - \rho_c \omega^2 + \rho_0 \omega^2 \Gamma_{nm})w_{cnm} + 2k_1 (\lambda_{1n} q_{nm}^1 + \lambda_{2m} q_{nm}^2) - p_{*0nm} &= 0, \\
(D\mu_{nm}^4 - \rho_{aw} \omega^2 + \rho_0 \omega^2 \Gamma_{nm} + 2c_3)w_{anm} - p_{*0nm} &= 0, \\
u_{1nm}^a - k_1 \lambda_{1n} w_{cnm} + (k_2 \lambda_{1n}^2 + k_3)q_{nm}^1 - k_2 \lambda_{1n} \lambda_{2m} q_{nm}^2 &= 0, \\
u_{2nm}^a - k_1 \lambda_{2m} w_{cnm} + (k_2 \lambda_{2m}^2 + k_3)q_{nm}^2 + k_2 \lambda_{1n} \lambda_{2m} q_{nm}^1 &= 0.
\end{aligned} \tag{4.3.17}$$

где:

$$\begin{aligned}
b_{11nm} &= B \left(\lambda_{1n}^2 + \frac{1-\nu}{2} \lambda_{2m}^2 \right), \\
b_{12nm} &= b_{21nm} = B \frac{1+\nu}{2} \lambda_{1n} \lambda_{2m}, \\
b_{22nm} &= B \left(\frac{1-\nu}{2} \lambda_{1n}^2 + \lambda_{2m}^2 \right), \\
\mu_{nm} &= \sqrt{\lambda_{1n}^2 + \lambda_{2m}^2}.
\end{aligned}$$

Выражение для w_{cnm} находим из системы (4.3.17):

$$w_{anm} = \frac{p_{*0nm}}{D\mu_{nm}^4 - \rho_{aw} \omega^2 + 2c_3 + \rho_0 \omega^2 \Gamma_{nm}}.$$

Выражение для w_{cnm} выводим из (4.3.17) при помощи программы Maple на ПК. Полученные выражения позволяют определить амплитуду давления прошедшей волны в коэффициентах рядов (4.2.14) с учетом (1.3.2), в зависимости от формы набегающей волны (4.3.4 - 4.3.6):

$$\begin{aligned}
p_{20nm} &= \rho_0 \omega^2 \Gamma_{nm}(k) w_{nm}^{(2)}, \\
\Gamma_{nm}(k) &= \frac{\varepsilon(k, \mu_{nm})}{\beta_{nm}}, \quad \varepsilon(k, \mu_{nm}) = \begin{cases} i & \text{при } k > \mu_{nm}, \\ -1 & \text{при } k \leq \mu_{nm}, \end{cases}
\end{aligned}$$

а затем и амплитуду давления прошедшей волны (4.3.7):

$$P_{20} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} p_{20nm} \sin(\lambda_{1n} x) \sin(\lambda_{2m} y).$$

Это позволяет анализировать звукоизоляционные свойства прямоугольно трехслойной пластины конечных размеров по формулам (1.2.2) и (1.2.4):

$$\eta = \left| \frac{P_{20}}{P_{*0}} \right|,$$

$$R_p = -20 \cdot \lg(\eta),$$

где амплитуда давления набегающей звуковой волны на поверхности пластины P_{*0} определяется в зависимости от ее формы по формулам (4.1.1-4.1.3).

§ 4.4. Пример расчета и анализ влияния формы набегающей звуковой волны на звукоизоляционные свойства пластины

Рассмотрим пластину сотовой структуры (см. рис. 1.3.1), окруженную с двух сторон воздухом: $\rho_0 = 1.2041 \text{ кг/м}^3$, $c = 343 \text{ м/с}$. Пластина имеет следующие параметры: $l_1 = 1.2 \text{ м}$, $l_2 = 0.4 \text{ м}$, $t = 0.3 \text{ мм}$, $h = 4 \text{ мм}$. Материал несущих слоев – сталь Ст0, материал заполнителя – сплав АМц: $E = 200 \text{ ГПа}$, $\nu = 0.3$, $E_z = 71 \text{ ГПа}$, $\nu_z = 0.34$, $\rho_b = 7850 \text{ кг/м}^3$, $\rho_z = 2730 \text{ кг/м}^3$. Осредненные характеристики сотового заполнителя из сплава АМц с длиной и толщиной стенки $a = 6.3 \text{ мм}$ и $d = 0.05 \text{ мм}$, а также углом между стенками $\varphi = 120^\circ$ определяются на основании работы [2]: $E_3 = 981 \text{ МПа}$, $G = 202 \text{ МПа}$, $\rho = 33.36 \text{ кг/м}^3$.

Соответствующие коэффициенты в системе уравнений (1.3.13) согласно (1.3.4-1.3.6, 1.3.8, 1.3.9, 1.3.12), имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} \rho_a &= 4.71, \rho_c = 4.78, \rho_{aw} = 4.73, \\ B &= 13.19 \cdot 10^7, D = 3.97, c_3 = 2.45 \cdot 10^{11}, \\ k_1 &= 0.0023, k_2 = 5.44 \cdot 10^{-18}, k_3 = 1.98 \cdot 10^{-11}. \end{aligned}$$

Для сферической и цилиндрической набегающих звуковых волн принимаются следующие значения геометрических параметров расположения источника звука относительно пластины: $x_c = 0.6$, $y_c = 0.2$, $L = 0.5 \text{ м}$.

Определим звукоизоляционные свойства такой пластины и построим графики зависимости показателя звукоизоляции от частоты набегающей сферической волны по линии cd , в т. k , и по поверхности пластины (см. рис. 4.4.1).

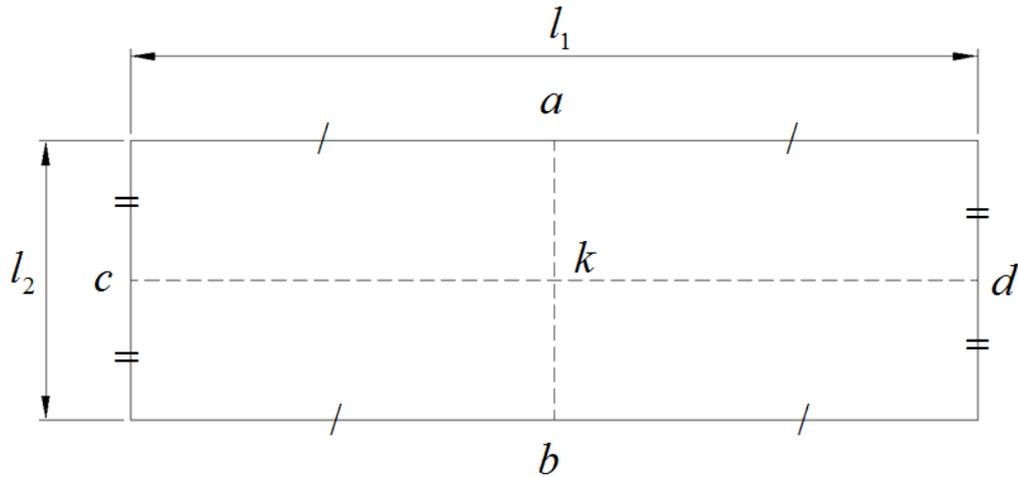


Рис. 4.4.1. Пластина в плане.

На рис. 4.4.2 представлен график зависимости показателя звукоизоляции R_p от частоты при сферическом типе набегающей волны по линии cd , а на рис. 4.4.3 в т. k . Для цилиндрической и плоской типов волн зависимости выглядят аналогичным образом и незначительно отличаются численно. На рис. 4.4.4 продемонстрировано распределение той же величины по поверхности пластины при сферическом типе набегающей с частотой 500 Гц волны.

Все результаты получены при учете двенадцати членов рядов по каждому из индексов. Больше их количество приводит к уточнению решения менее чем на 2 %.

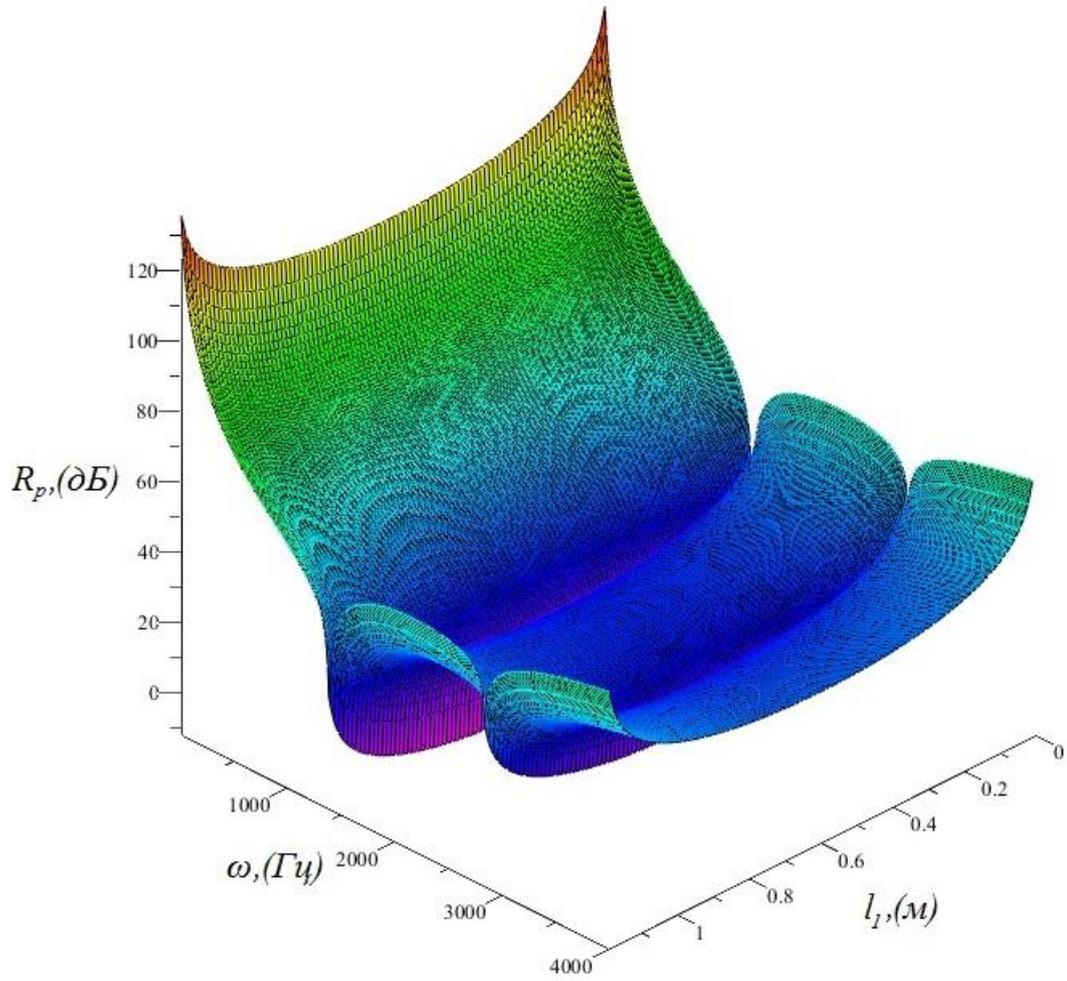


Рис. 4.4.2. Показатель R_p при набегающей сферической волне.

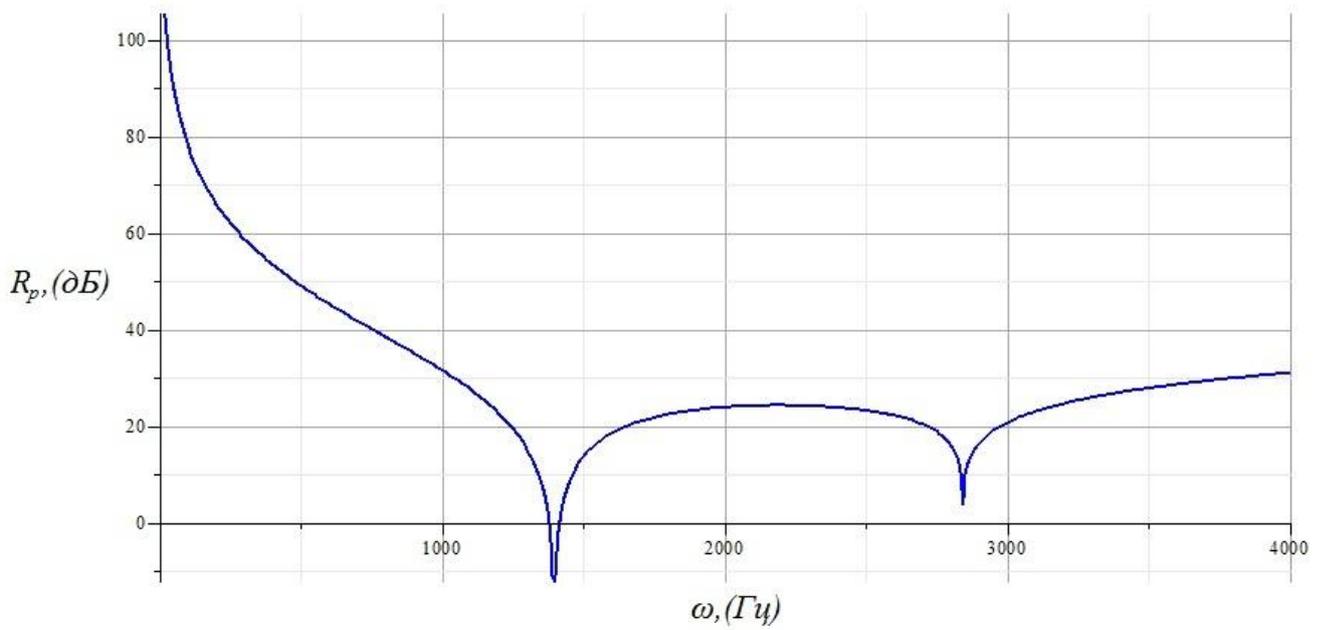


Рис. 4.4.3. Показатель R_p при набегающей сферической волне.

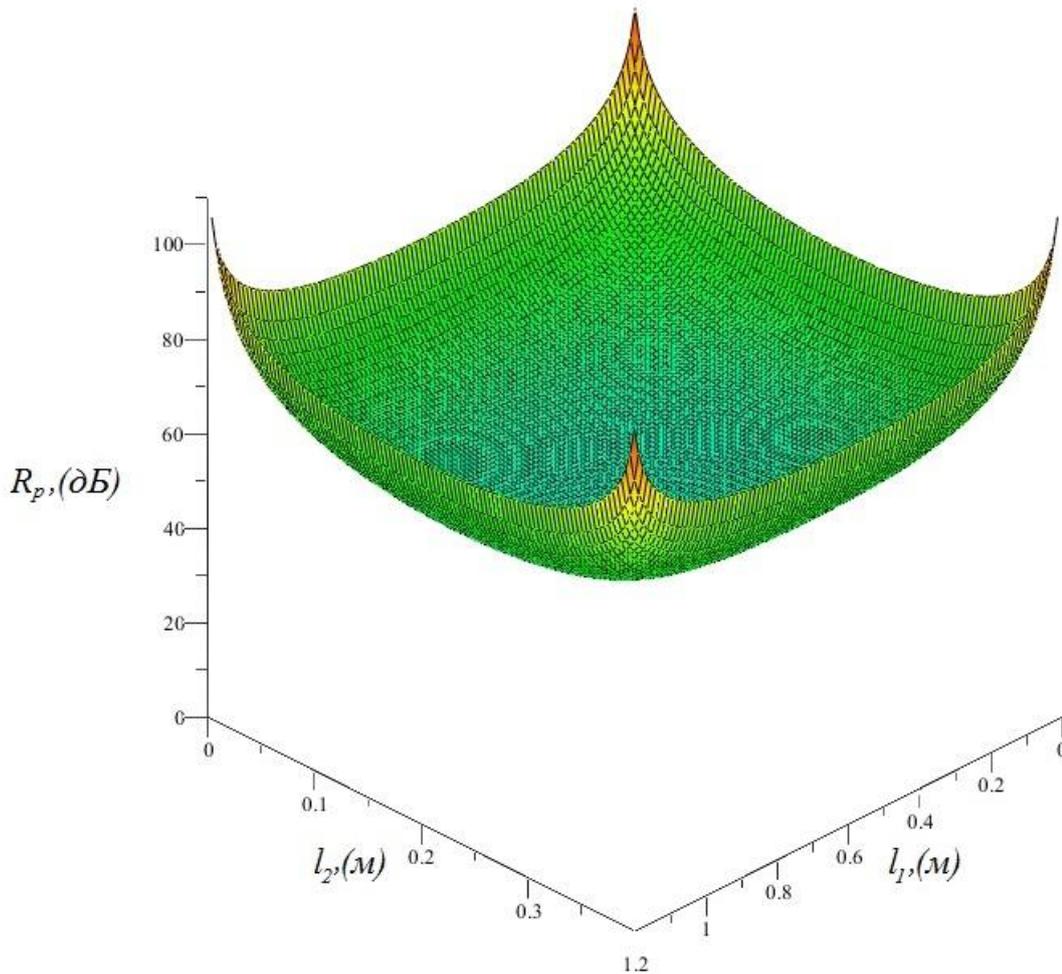


Рис. 4.4.4. Распределение показателя R_p по поверхности пластины.

Графики, представленные на рис. 4.4.2 и 4.4.4 иллюстрируют неравномерность распределения показателя звукоизоляции. На краях пластина лучше поглощает звук, чем в центре. Наиболее слабым местом в данных условиях с точки зрения звукоизоляции является центр пластины.

Из рис. 4.4.3 видно, что пластина данной конфигурации не на всем рассмотренном диапазоне частот эффективно поглощает звук. Это связано с совпадением частоты набегающей волны с собственной частотой колебаний трехслойной пластины с мягким ортотропным наполнителем. Наиболее эффективным является слышимый диапазон частот от 16 до 750 Гц. В этом диапазоне пластина поглощает от 40 до 105 дБ.

На рис. 4.4.5 представлены результаты расчета минимального по пластине показателя звукоизоляции для цилиндрической и сферической набегающих волн с

частотой 1000 Гц в зависимости от расстояния между источником звука и пластиной. Прямая линия для плоской волны изображена для сравнения.

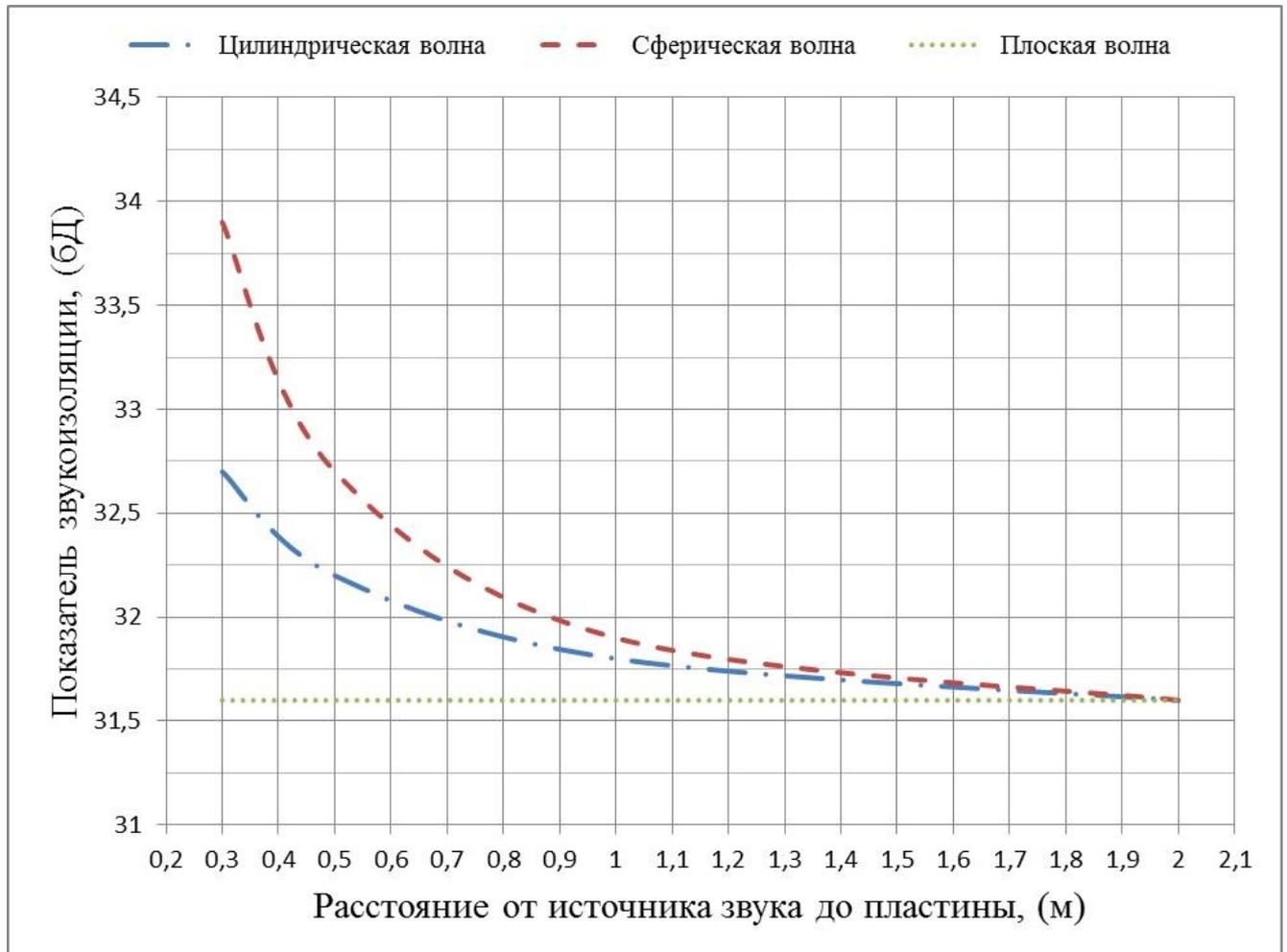
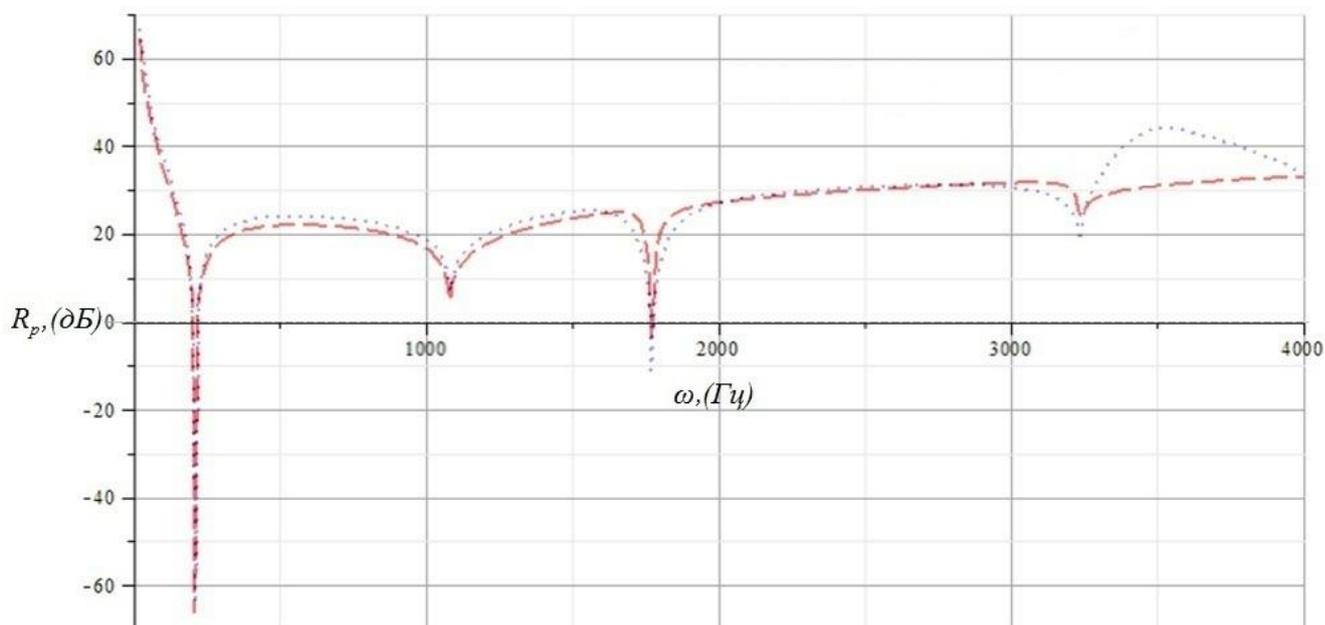


Рис. 4.4.5. Зависимость показателя звукоизоляции от расстояния между источником звука и пластиной.

По представленным на рис. 4.4.5 результатам можно сделать следующие выводы – до тех пор, пока фронт волны приходящий на поверхность пластины имеет выраженную геометрию сферы или цилиндра, ранжирование эффективности следующее: наиболее эффективно происходит изоляция сферической волны, менее эффективно цилиндрической, плоская волна проходит через преграду лучше всего. При этом по мере удаления источника звука от пластины, фронт сферической и цилиндрической волны становится менее выраженным, и эффективность их изоляции снижается до уровня плоской набегающей волны.

В качестве верификации способа исследования звукоизоляционных свойств прямоугольной пластины конечных размеров, изложенного в данной главе, выполним расчет пластины высотой $l_2 = 1$ м, и длиной $l_1 = 1 \times 10^6$ м, и сравним полученные результаты с результатами, полученными в главе 3 для пластины имеющей высоту $l = 1$ м и бесконечную длину (см. рис. 3.4.3). Результаты сравнения представлены на рис. 4.4.6.



Пунктирная кривая – пластина в виде бесконечной полосы.

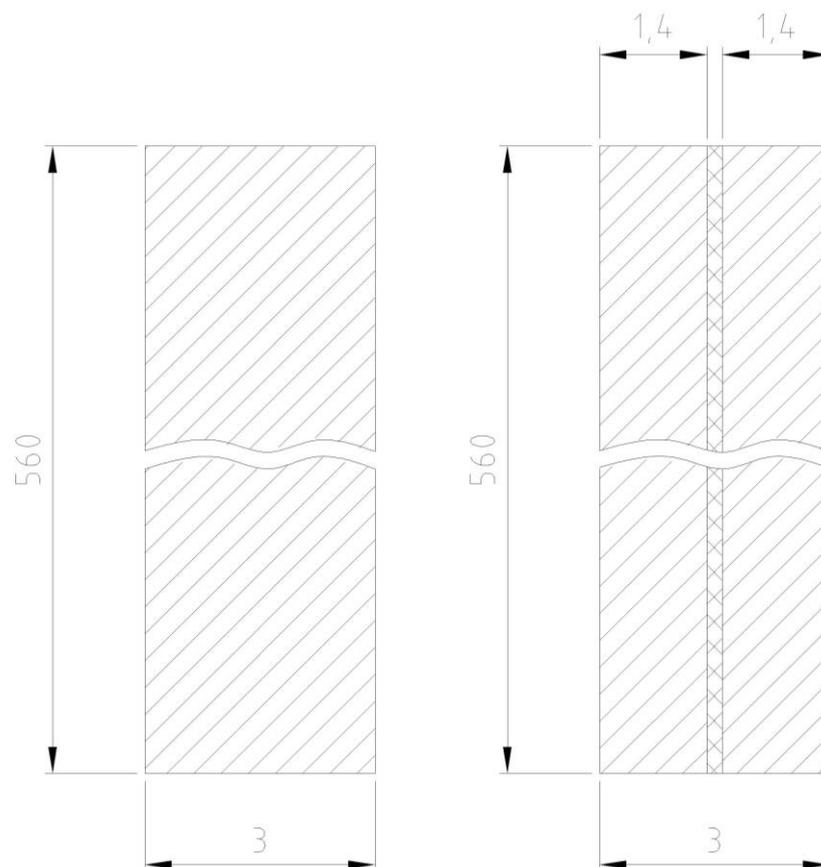
Штриховая кривая – пластина ограниченных размеров.

Рис. 4.4.6. Показатели звукоизоляции при набегающей цилиндрической волне.

Из рис. 4.4.6 видно, что способы исследования звукоизоляционных свойств трехслойных пластин не противоречат друг другу – графики в основном имеют одинаковый характер и совпадают численно.

В качестве проверки способа исследования звукоизоляционных свойств трехслойной пластины ограниченных размеров, изложенного в главе 4, выполним сравнение результатов получаемых расчетным путем с экспериментальными данными. В работах [45,46] экспериментальным путем исследуются звукоизоляционные свойства шарнирно опертой однослойной пластины из Стали 20 размером $480 \times 560 \times 3$ мм в третьоктавных полосах частот (Гц): 50, 63, 80, 100,

125, 160, 200, 250, 315, 400, 500, 630, 800, 1000, 1250, 1600, 2000, 2500, 3150. Для сравнения звукоизоляционных свойств трёхслойной пластины с однослойной, сведем влияние заполнителя трёхслойной пластины к минимуму путем задания малых значений его толщины. В результате получим трехслойную пластину эквивалентную по жесткости однослойной (см. рис. 4.4.7).

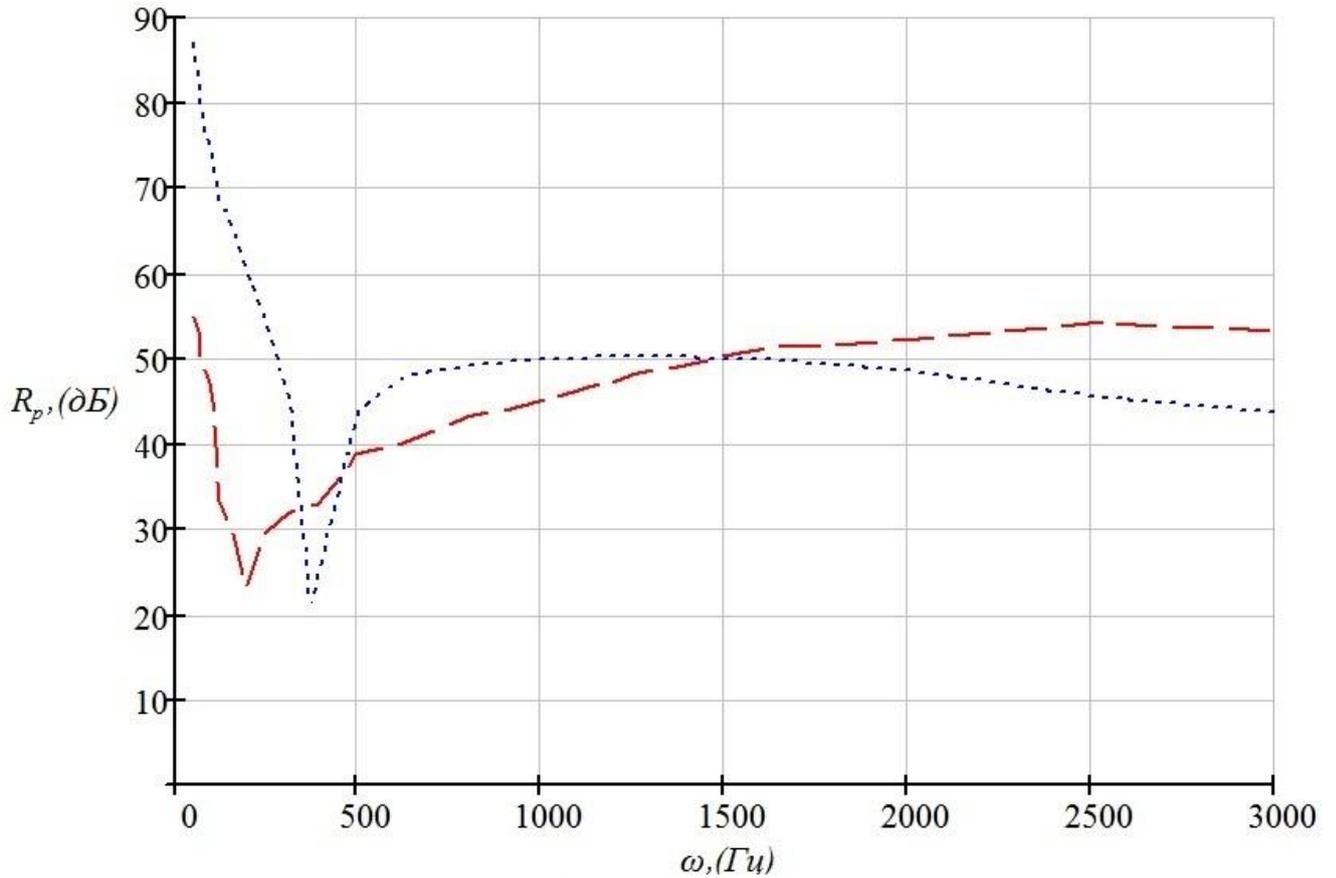


Слева – однослойная пластина.

Справа – эквивалентная трехслойная пластина.

Рис. 4.4.7. Сечения исследуемых пластин.

Расчет трехслойной пластины выполнен для частот аналогичных частотам звуковых волн воздействующих на однослойную пластину в эксперименте. Результаты расчета и эксперимента представлены на рисунке 4.4.8. Штриховой кривой соответствует показатель звукоизоляции однослойной пластины, пунктирной – среднее значение показателя звукоизоляции эквивалентной трехслойной пластины.



Пунктирная кривая – расчет.

Штриховая кривая – эксперимент.

Рис. 4.4.8. Результаты эксперимента и расчета.

Из рисунка 4.4.8 видно, что порядок значений R_p и характер кривой для эквивалентной трехслойной пластины сопоставим с экспериментальными данными. А при некоторых частотах решение соответствует экспериментальным данным. Существенные различия в значениях показателя звукоизоляции на частотах до 250 Гц эквивалентной трехслойной пластины по сравнению с однослойной пластиной можно объяснить тем, что в расчете не учитывается податливость опор. А как показано в [44], податливость опор оказывает существенное влияние при низких частотах набегающих волн.

Следует отметить значительное ухудшение звукоизоляционных свойств однослойной пластины и эквивалентной ей трехслойной пластины в диапазоне частот 200 – 400 Гц. В [45, 46] предполагается, что это связано с резонансными процессами.

Определим первую собственную частоту колебаний трехслойной пластины, звукоизоляционные характеристики которой представлены на рис. 4.4.8. Систему (4.3.17) перепишем следующим образом:

$$\begin{aligned}
& (b_{11nm} - \rho_c \omega^2) u_{1nm}^c + b_{12nm} u_{2nm}^c + 0 \cdot u_{1nm}^a + 0 \cdot u_{2nm}^a + 0 \cdot q_{nm}^1 + 0 \cdot q_{nm}^2 + 0 \cdot w_{cnm} + 0 \cdot w_{anm} = 0, \\
& b_{21nm} u_{1nm}^c + (b_{22nm} - \rho_c \omega^2) u_{2nm}^c + 0 \cdot u_{1nm}^a + 0 \cdot u_{2nm}^a + 0 \cdot q_{nm}^1 + 0 \cdot q_{nm}^2 + 0 \cdot w_{cnm} + 0 \cdot w_{anm} = 0, \\
& 0 \cdot u_{1nm}^c + 0 \cdot u_{2nm}^c + (b_{11nm} - \rho_a \omega^2) u_{1nm}^a + b_{12nm} u_{2nm}^a - 2q_{nm}^1 + 0 \cdot q_{nm}^2 + 0 \cdot w_{cnm} + 0 \cdot w_{anm} = 0, \\
& 0 \cdot u_{1nm}^c + 0 \cdot u_{2nm}^c + b_{21nm} u_{1nm}^a + (b_{22nm} - \rho_a \omega^2) u_{2nm}^a + 0 \cdot q_{nm}^1 - 2q_{nm}^2 + 0 \cdot w_{cnm} + 0 \cdot w_{anm} = 0, \\
& 0 \cdot u_{1nm}^c + 0 \cdot u_{2nm}^c + 0 \cdot u_{1nm}^a + 0 \cdot u_{2nm}^a + 2k_1 \lambda_{1n} q_{nm}^1 + 2k_1 \lambda_{2m} q_{nm}^2 + \\
& + (D\mu_{nm}^4 - \rho_c \omega^2 + \rho_0 \omega^2 \Gamma_{nm}) w_{cnm} + 0 \cdot w_{anm} = P_{*0nm}, \\
& 0 \cdot u_{1nm}^c + 0 \cdot u_{2nm}^c + 0 \cdot u_{1nm}^a + 0 \cdot u_{2nm}^a + 0 \cdot q_{nm}^1 + 0 \cdot q_{nm}^2 + 0 \cdot w_{cnm} + \\
& + (D\mu_{nm}^4 - \rho_{av} \omega^2 + \rho_0 \omega^2 \Gamma_{nm} + 2c_3) w_{anm} = P_{*0nm}, \\
& 0 \cdot u_{1nm}^c + 0 \cdot u_{2nm}^c + u_{1nm}^a + 0 \cdot u_{2nm}^a + (k_2 \lambda_{1n}^2 + k_3) q_{nm}^1 - k_2 \lambda_{1n} \lambda_{2m} q_{nm}^2 - k_1 \lambda_{1n} w_{cnm} + 0 \cdot w_{anm} = 0, \\
& 0 \cdot u_{1nm}^c + 0 \cdot u_{2nm}^c + 0 \cdot u_{1nm}^a + u_{2nm}^a + k_2 \lambda_{1n} \lambda_{2m} q_{nm}^1 + (k_2 \lambda_{2m}^2 + k_3) q_{nm}^2 - k_1 \lambda_{2m} w_{cnm} + 0 \cdot w_{anm} = 0.
\end{aligned}$$

С учетом отсутствия воздействия на пластину давления звуковой волны ($P_{*nm} = 0$) составим матрицу для этой системы уравнений:

$$M = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & b_{12nm} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21nm} & \gamma_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{33} & b_{12nm} & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{21nm} & \gamma_{44} & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2k_1 \lambda_{1n} & 2k_1 \lambda_{2m} & \gamma_{57} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{68} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \gamma_{75} & \gamma_{76} & -k_1 \lambda_{1n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \gamma_{85} & \gamma_{86} & -k_1 \lambda_{2m} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.4.1)$$

где:

$$\begin{aligned}
\gamma_{11} &= b_{11nm} - \rho_c \omega^2, \quad \gamma_{22} = b_{22nm} - \rho_c \omega^2, \\
\gamma_{33} &= b_{11nm} - \rho_a \omega^2, \quad \gamma_{44} = b_{22nm} - \rho_a \omega^2, \\
\gamma_{75} &= k_2 \lambda_{1n}^2 + k_3, \quad \gamma_{85} = k_2 \lambda_{1n} \lambda_{2m}, \\
\gamma_{76} &= -k_2 \lambda_{1n} \lambda_{2m}, \quad \gamma_{86} = k_2 \lambda_{2m}^2 + k_3, \\
\gamma_{57} &= D\mu_{nm}^4 - \rho_c \omega^2 + \rho_0 \omega^2 \Gamma_{nm}, \\
\gamma_{68} &= D\mu_{nm}^4 - \rho_{av} \omega^2 + \rho_0 \omega^2 \Gamma_{nm} + 2c_3.
\end{aligned} \quad (4.4.2)$$

Для матрицы (4.4.1), с учетом (4.4.2), запишем определитель $|M|$. В результате получим уравнение зависящие от ω , корни которого являются собственными частотами пластины. Решение уравнения проведено на ПК при помощи программного пакета системы компьютерной алгебры Maple, при этом первая собственная частота составила около 374 Гц. Следовательно, в районе этой частоты амплитуда колебания пластины будет возрастать, это приведет к снижению ее звукоизоляционных свойств, что и наблюдается на рис. 4.4.8.

При этом стоит отметить, что нули функции η и есть собственные частоты колебаний пластины. Это выявляется при нахождении функций w_{cnn} и w_{ann} методом Крамера. В этом случае выражение для коэффициента поглощения примет вид:

$$\eta = \frac{(|w_c| - |w_a|) \rho_0 \omega^2 \Gamma}{2|M| p_*},$$

где $|w_c|$ и $|w_a|$ – определители матрицы (4.4.1), где седьмой и восьмой столбец соответственно заменен столбцом свободных членов.

На основании полученных результатов можно сделать вывод, что предложенный способ исследования звукоизоляционных свойств трехслойных пластин конечных размеров не дает схожий результат со способом, описанном в главе 3 для исследования звукоизоляционных свойств пластин в виде бесконечной полосы и сопоставим с экспериментальными данными.

Основные выводы

1. Разработана модель процесса взаимодействия акустической волны с трехслойной пластиной, которая позволяет учитывать влияние на этот процесс параметров самой пластины, особенностей акустической волны и параметров окружающей акустической среды. При этом использовались уточнённые уравнения движения пластины, учитывающие влияния поперечного обжатия заполнителя и сдвиг слоев.

2. Решены задачи о прохождении гармонических волн через пластины различной конфигурации: бесконечную, ограниченную по одной координате и прямоугольную.

3. Проанализирован характер поглощения волн при прохождении их через трехслойную пластину с различными геометрическими и физическими параметрами.

4. Выполнена верификация полученных результатов сравнением коэффициентов звукопоглощения и параметров звукоизоляции при различных конфигурациях пластин, а так же сопоставлением полученных результатов с известными из литературы экспериментальными данными.

5. Полученные результаты позволяют исследовать весь спектр задач поглощения гармонических волн для проектирования эффективной звукоизоляции различных объектов.

Условные обозначения

ρ_1 – плотность акустической среды с источником звука.

ρ_2 – плотность “звукоизолируемой” акустической среды.

p_* – амплитуда давления набегающей звуковой волны.

ω – частота набегающей звуковой волны.

i – мнимая единица.

p_1 – сумма амплитуд давлений падающей и отраженной волны.

p_2 – амплитуда давления прошедшей волны.

p_{1w} – амплитуда давления отраженной волны.

η – коэффициент поглощения.

R_p – показатель звукоизоляции.

E – модуль упругости первого рода несущих слоев.

ν – коэффициент Пуассона несущих слоев.

t – толщина несущего слоя пластины.

E_z – модуль упругости первого рода заполнителя.

ν_z – коэффициент Пуассона заполнителя.

h – полутолщина сотового заполнителя.

E_3 – модуль обжатия заполнителя.

$u_1^{(k)}, u_2^{(k)}$ – амплитуды тангенциальных перемещений в k -м несущем слое вдоль осей Ox и Oy .

$w^{(1)}, w^{(2)}$ – амплитуды нормальных перемещений в k -ом несущем слое.

q^1, q^2 – амплитуды постоянных по толщине поперечных касательных напряжений в заполнителе, направленных по осям Ox и Oy .

B – жесткость несущих слоев на растяжение-сжатие.

D – жесткость несущих слоев на изгиб.

ρ_b – плотность несущих слоев.

ρ – осредненная плотность заполнителя.

d – толщина стенки заполнителя.

a – длина стенки заполнителя.

ρ_z – плотность заполнителя.

φ – угол между стенками заполнителя.

G – модуль поперечного сдвига заполнителя.

G_z – модуль сдвига материала заполнителя.

Φ – потенциал скорости.

Φ_a – амплитуда волны потенциала скорости.

c – скорость звука в акустической среде.

ρ_0 – плотность акустической среды.

k – волновое число.

L – расстояние от источника звука до пластины.

A_φ, B_φ – произвольные постоянные.

l_2, l – высота трехслойной пластины (по оси Ox).

l_1 – длина трехслойной пластины (по оси Oy).

Библиографический список

1. **Абрамовиц М.** Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 830 с.
2. **Акишев Н.И., Закиров И.И., Паймушин В.Н., Шишов М.А.** Теоретико-экспериментальный метод определения осредненных упругих и прочностных характеристик сотового заполнителя трехслойных конструкций // Механика композитных материалов. – 2011. – 47, № 4. – С. 543 – 556.
3. **Алумяэ Н.А.** Теория упругих оболочек и пластинок // Механика в СССР за 50 лет: В 4 т. / Под ред. Л. И. Седова. – Т. 3: Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1972. – С. 227 – 266.
4. **Бешенков С.Н., Голоскоков Е.Г., Ольшанский В.П.** Определение граничных частот трехслойных ограждений // Динамика и прочность машин. – Харьков, 1973. Вып. 18. – С. 21 – 26.
5. **Бешенков С.Н., Голоскоков Е.Г., Ольшанский В.П.** Исследование звукоизоляционных свойств трехслойных конструкций // Акустический журнал. – 1974. – Т.20, вып. 2. – С. 184 – 189.
6. **Бешенков С.Н., Голоскоков Е.Г.** Прохождение звука через трехслойные панели // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1974, №12. – С. 70 – 75.
7. **Бобылев В.Н., Седов М.С.** О влиянии изгибной жесткости ограждений на их звукоизоляцию в области частот ниже граничной // Тезисы докладов VIII Всесоюзной акустической конференции. М., 1973. – С. 27 – 29.
8. **Бобылев В.Н.** О звукоизоляции однослойных ограждений в области частот ниже граничной частоты диффузности звукового поля // Звукоизоляция конструкций зданий. Труды ГИСИ, вып. 71. Горький: ГИСИ, 1974. – С. 44 – 50.

9. **Бобылев В.Н., Моисеев В.А.** Расчет звукоизоляции однослойных ограждающих конструкций: Методическая разработка. Н. Новгород: ННГАСУ, 2000. – 55 с.
10. **Бешенков С.Н., Голоскоков Е.Г.** Упругоакустические задачи динамики трехслойных конструкций – Харьков: Вища школа, 1980. – 118 с.
11. **Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В.** Волны в сплошных средах: Учеб. пособ.: Для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.
12. **Градштейн И.С., Рыжик И.М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука. Гл. ред. физ. – матем. лит-ры, 1971. – 1108 с.
13. **Григолюк Э.И.** К расчету трехслойных пластин с жёстким наполнителем. – Известия АН СССР. Механика и машиностроение, М., 1964. – С. 67 – 74.
14. **Григолюк Э.И., Чулков П.П.** Устойчивость и колебания трехслойных оболочек – М.: Машиностроение, 1973. – 172 с.
15. **Гурович Ю.А.** О звукоизоляции прямоугольной пластины на низких частотах // Акустический журнал. – 1978. – Т.24, вып. 4. – С. 508 – 515.
16. **Заборов В.И.** Теория звукоизоляции слоистых ограждений от воздушного шума // Известия Академии строительства и архитектуры СССР. – 1961, вып. 2. – С. 94 – 104.
17. **Заборов В.И.** Теория звукоизоляции ограждающих конструкций. – М.: Стройиздат, 1969. – 185 с.
18. **Заборов В.И., Лалаев Э.М., Никольский В.Н.** Звукоизоляция в жилых и общественных зданиях – М.: Стройиздат, 1979. – 254 с.
19. **Иванов В.А., Паймушин В.Н.** Уточненная постановка динамических задач трехслойных оболочек с трансверсально-мягким наполнителем численно-аналитический метод их решения. – Прикладная механика и техническая физика. – 1995, Т. 36, №4. – С. 147 – 151.

20. **Иванов В.А., Паймушин В.Н.** Уточнение уравнений динамики многослойных оболочек с трансверсально-мягким наполнителем. – Изв. РАН. МТТ, 1995, №3. – С. 142 – 152.
21. **Игумнов Л.А., Локтева Н.А., Паймушин В.Н., Тарлаковский Д.В.** Звукоизоляционные свойства одномерной трехслойной пластины // Математические методы и физико-механические поля. – 2013, Т.56, № 2. – С. 86 – 93.
22. **Кочкин А.А.** Звукоизоляция слоистых пластин ограниченных размеров с промежуточным вибродемпфирующим слоем: дис... канд. техн. наук / А. А. Кочкин; ГИСИ. – Горький, 1983. – 172 с.
23. **Кочкин А.А.** О звукоизоляции слоистых вибродемпфированных ограждений // Композиционные строительные материалы. Теория и практика: сб. науч. тр. междунар. науч.-техн. конф. – Пенза, 2002. – С. 198 – 201.
24. **Кочкин А.А.** Легкие звукоизолирующие ограждающие конструкции из элементов с вибропоглощающими слоями // Известия Юго-Западного государственного университета. – Курск, 2011. – № 5 (38). – С. 152 – 156.
25. **Кочкин А.А.** Звукоизоляция легких ограждающих конструкций зданий из элементов с вибродемпфирующими слоями: дис... докт. техн. наук / А. А. Кочкин; ФГБОУ ВПО. – Вологда, 2013. – 320 с.
26. **Локтева Н.А., Сердюк Д.О., Тарлаковский Д.В.** Определение параметра звукопоглощения трехслойной пластины при воздействии на нее цилиндрической волны // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: Материалы XIX междунар. симп. им. А.Г. Горшкова. – М., 2013. – Т. 2. – С. 29 – 30.
27. **Локтева Н.А., Сердюк Д.О., Тарлаковский Д.В.** Исследование звукопоглощающих свойств пластины сложной структуры под воздействием цилиндрической волны // Научная конференция «Ломоносовские чтения», секция механики: Тезисы докладов. – М., 2013. – С. 129 – 130.

28. **Локтева Н.А., Паймушин В.Н., Сердюк Д.О.** Определение показателя звукопоглощения пластины сложной структуры под воздействием цилиндрической волны // *Современные проблемы механики и математики: Тезисы докл. междунар. науч. конф.* – Львов, 2013. – Т. 1. – С. 131 – 135.

29. **Локтева Н.А., Сердюк Д.О., Старовойтов Э.И.** Определение суммарного параметра звукоизоляции трехслойной пластины под воздействием плоской гармонической волны // *Теория оболочек и мембран в механике и биологии: от макро- до наноразмерных структур: Материалы междунар. науч. конф.* – Минск, 2013. – С. 87 – 89.

30. **Локтева Н.А., Паймушин В.Н., Сердюк Д.О., Тарлаковский Д.В.** Определение показателя звукоизоляции одномерной трехслойной пластины под воздействием цилиндрической волны // *«Проблемы и перспективы развития транспортных систем и строительного комплекса»: материалы III междунар. науч. -практ. конф.* – 2013. – С. 365 – 367.

31. **Локтева Н.А., Сердюк Д.О., Тарлаковский Д.В.** Определение показателя звукопоглощения пластины сложной структуры под воздействием цилиндрической волны // *«Сучасні проблеми механіки та математики».* – 2013, Т. 1. – С. 131 – 135.

32. **Локтева Н.А., Кубенко В.Д., Сердюк Д.О., Мейш В.Ф.** Влияние типа набегающей волны на звукоизоляционные характеристики тонкостенного препятствия // *Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: Материалы XX междунар. симп. им. А.Г. Горшкова.* – М., 2014. – Т. 2. – С. 101 – 109.

33. **Локтева Н.А., Сердюк Д.О., Тарлаковский Д.В.** Анализ влияния расположения источника излучения сферической волны на значение параметра звукоизоляции пластины сложной структуры // *Научная конференция «Ломоносовские чтения», секция механики: Тезисы докладов.* – М., 2014. – С. 105 – 105.

34. **Локтева Н.А., Сердюк Д.О., Тарлаковский Д.В.** Определение суммарного показателя звукоизоляции трехслойной пластины, ограниченной

по одной координате, при воздействии на нее плоской, цилиндрической и сферической набегающей волны // Материалы международной научной конференции: «Современные проблемы математики, механики, информатики». – ТулГУ Тула, 2014. – С. 309 – 311.

35. **Локтева Н.А., Сердюк Д.О., Тарлаковский Д.В.** Оценка влияния особенностей конструкции заполнителя трехслойной пластины на ее звукопоглощающие свойства // Тезисы докладов междунар. науч. семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». – М., 2014. – С. 42 – 42.

36. **Локтева Н.А., Сердюк Д.О., Тарлаковский Д.В.** Анализ влияния конструкции сотового блока трехслойной пластины, ограниченной по одной координате, на ее звукоизоляционные свойства // Материалы XI-того всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоритической и прикладной механики. – Казань, 2015. – С. 2351 – 2352.

37. **Локтева Н.А., Сердюк Д.О., Тарлаковский Д.В.** Влияние формы набегающей волны на звукоизоляционные свойства прямоугольной пластины сложной структуры // – Электронный журнал «Труды МАИ», 2015, № 82, <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=58602>.

38. **Локтева Н.А., Сердюк Д.О., Тарлаковский Д.В.** Исследование звукоизоляционных свойств трехслойной пластины при воздействии плоской волны // – Известия высших учебных заведений. – М., 2016, № 1. – С. 167 – 171.

39. **Локтева Н.А., Сердюк Д.О., Тарлаковский Д.В.** Взаимодействие плоской гармонической волны с конечной пластиной в грунте // Материалы XXI международного симпозиума: «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. – М., 2015, Т. 2. – С. 167 – 171.

40. **Лямшев Л.М.** Отражение звука тонкими пластинками и оболочками в жидкости. Изд-во АН СССР, 1955. – 73 с.

41. **Морозова Н.Н., Рыбак С.А.** Метод расчёта колебаний слоистых пластин с потерями, – Тр. // ЦАГИ, 1968, вып. 1092. – С. 59 – 64.
42. **Морозова Н.Н.** Некоторые вопросы применения матриц перехода для расчёта колебательных характеристик слоистых пластин. – Акустический журнал. – 1968, Т.14, вып.4. – С. 620 – 622.
43. **Осипов Л.Г.** Звукоизоляция и звукопоглощение: Учебное пособие для студентов вузов. – М.: ООО «Издательства АСТ», 2004. – 450 с.
44. **Паймушин В.Н., Газизулин Р.К.** Исследование звукоизоляционных свойств абсолютно жесткой пластины, помещенной на деформируемых опорных элементах между двумя преградами // Ученые записки казанского университета. – 2013, Т. 155. – С. 126 – 141.
45. **Паймушин В.Н., Газизулин Р.К., Шарапов А.А.** Математическое моделирование и экспериментальное исследование прохождения звуковой волны сквозь деформируемую пластину, находящуюся между двумя камерами // Ученые записки казанского университета. – 2014, Т. 156. – С. 102 – 119.
46. **Паймушин В.Н., Газизулин Р.К., Шарапов А.А.** Экспериментальное определение параметров звукоизоляции прямоугольной пластины с энергопоглощающим покрытием // Ученые записки казанского университета. – 2015, Т. 157. – С. 114 – 127.
47. **Рыбак С.А., Тартаковский Б.Д.** Об, одном случае полной звукоизоляции при прохождении звука через слоисто-симметричную перегородку. – Акустический журнал. – 1961, Т.7, вып.4. – С. 497 – 499.
48. **Седов М.С.** Звукоизоляция тонких однослойных ограждений от воздушного шума: Дис. канд. техн. наук. – М., 1963. – /НИИСФ/.
49. **Седов М.С.** Звукоизоляция тонких однослойных пластин ограниченных размеров, – Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1964, № 5. – С. 130 – 134.

50. **Седов М.С.** Механизм прохождения звука через тонкую пластинку ограниченного размера. – Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1964, № 7. – С. 67 – 73.
51. **Седов М.С.** Влияние размеров ограждений на их звукоизоляцию от воздушного звука. – Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1965, № 2. – С. 87 – 93.
52. **Седов М.С.** Звукоизоляция облегчённых ограждающих конструкций: Дис. докт. техн. наук – Горький, 1971. – 343 с. – /ГИСИ им.В.П. Чкалова/.
53. **Седов М.С., Бобылёв В.Н.** Исследование звукоизоляции ограждающих конструкций в больших и малых реверберационных камерах ГИСИ. – В кн.: Звукоизоляция конструкций зданий: Тр. / ГИСИ им. В. П. Чкалова, 1974, вып.71. – С. 58 – 62.
54. **Седов М.С., Бобылёв В.Н.** Расчёт звукоизоляции однослойных ограждений на низких частотах.– Горький: Изд-во ГГУ, 1976. – 46 с.
55. **Седов М.С., Бобылёв В.Н., Морщихин В.Н.** Влияние способа закрепления алюминиевой пластины на величину звукоизоляции. - В кн.: Малоэтажные здания с применением стали, алюминия и эффективных материалов. Сб. научных трудов/ ЛЕНЗНИИЭП. – Л., 1977.
56. **Стретт Д.В.** Теория звука: в 2т. / Д.В. Стретт; пер. с англ.; под ред. С. М. Рытова. – М.: Гостехтеориздат, 1955, – Т. 2.
57. **Тартаковский В.Д., Гельфгат В.И.** О распространении колебаний в трехслойной пластине. – В кн.: Вибрации и шумы. М.: Наука, 1969. – С. 73 – 87.
58. **Юлин В.И.** О звукоизоляции трехслойной пластины с жестким наполнителем. – В кн.: Исследования в области строительства: Труды /ГИСИ им. В.П. Чкалова. – Горький, 1973, вып.64, ч. 2. – С. 39 – 43.
59. **Юлин В.И.** Исследование колебаний трехслойных пластин с жестким наполнителем // Исследования в области строительства: Труды / ГИСИ. – Горький, 1973, вып. 64, ч. 2. – С. 43 – 47.

60. **Юлин В.И.** О возможности управления граничной частотой трехслойной пластины // Звукоизоляция конструкций зданий: Труды / ГИСИ им. В.П. Чкалова. – Горький, 1974, вып. 71. – С. 13 – 16.
61. **Юлин В.И.** Звукоизоляция трехслойных ограждающих конструкций с жестким наполнителем: автореф. дис. канд. техн. наук / В. И. Юлин. – Горький, 1975. – 23 с.
62. **Beranek L.L.** Acoustical properties of homogeneous isotropic rigid tiles and flexible Blankets // IASA. – 1947, vol. 19, №. 4. – P. 558 – 568.
63. **Beranek L.L.** Sound control in airplanes // IASA. – 1947, vol. 19, № 2. – P. 357 – 364.
64. **Beranek L.L., Work G.** Sound transmission through multiple structures containing flexible blankets // IASA. – 1949, vol. 21, №.4. – P. 419 – 428.
65. **Beranek L.L.** Noise Reduction, New York-Toronto-London. Mc.Graw - Hill Book Company. –1960. – 752 p.
66. **Bobran H.W.** Die kritischen Frequenzen schalldammen der Bauteile. Boden // Band und Decke. – 1957, № 11. – P. 331 – 335.
67. **Cremer L.** Theorie der Schalldämmung dünner Wände bei schrägem Einfall // Akustische Zeitschrift. – 1942, №3. – P. 81 – 104.
68. **Cremer L.** Theorie der Schalldämmung dünner Wände bei schrägem Einfall / L. Cremer // Akustische Zeitschrift. – 1942, №.7. – P. 81 – 125.
69. **Cremer L., Eisenberg A.** Verbesserung der Schalldämmung dünner Wände durch Verringerung ihrer Biegesteifigkeit // Bauplanung und Bautechnik. 1948, № 8. – P. 235 – 281.
70. **Cremer L.** Structure-borne sound / L. Cremer, M. Heckl, E.E. Ungar. – Berlin: Sringer-Verlag, 1988. – 573 p.
71. **Fleming F.** Nat phus. Lab. Teddington, private communication. – 1950. – P. 27.
72. **Gotz J.** Akustische Zeitschrift. – 1943, № 11. – P. 75 – 87.

73. **Guyader I.L., Lesueur C.** Acoustic transmission through orthotropic multilayered plates. Part II. Transmission loss // *Sound and Vibration*. – 1978, vol. 58, № 1. – P. 69 – 86.
74. **Guyader I.L., Lesueur C.** Transmission of reverberant sound through orthotropic, viscoelastic multilayers plates // *Sound and Vibration*. – 1980, vol. 70, № 3. – P. 319 – 332.
75. **Heckl M.** Die Schalldämmung von homogenen einfachwandigen endlicher Fläche // *Acustica*. – 1960. – Bd.10, № 2. – P. 98 – 108.
76. **Heckl M.** Untersuchung an orthotropen Platten // *Acustica*. – 1960, vol. 10, № 2. – P. 109 – 115.
77. **Josse R., Lamure C.** Transmission du son par une paroi simple // *Acustica*. – 1964, № 14. – P. 226 – 243.
78. **Kerwin I.M.** Damping of flexural waves by a constrained visco-elastic layer // *IASA*. – 1959, vol. 31, № 7. – P. 952 – 955.
79. **Kihlman T.K.** Sound Radiation into a Rectangular Room. Applicative to Airborne Sound Transmission in Buildings // *Acustica*. – 1967, vol. 18, № 1. – P. 1 – 20.
80. **Kihlman T.K., Nilsson A.C.** The effects of some laboratory designs and mounting conditions on reduction index measurements // *The journal of sound and vibration*. – 1972, vol. 24, № 3. – P. 349 – 364.
81. **London A.** Transmission of reverberant sound through single walls // *Journal of Research of the National Bureau of Standards*. – 1949, vol. 42, № 6. – P. 605 – 615.
82. **London A.** Transmission of reverberant sound through double walls /A. London // *IASA*. – 1950, vol. 22, № 2. – P. 270 – 279.
83. **Mulholland K.A., Lyon R.H.** Sound insulation at low frequencies // *The Journal of the Acoustical Society of America*. – 1973, vol. 54, № 4. – P. 867 – 878.
84. **Mulholland K.A., Price A.J., Parbrook H.D.** Transmission loss of multiple panels in a random incidence field // *IASA*. – 1968, vol. 43, № 6. – P. 1030 – 1036.

85. **Nilsson A.C.** Reduction index and boundary conditions for a wall between two rectangular rooms. Part I, Theoretical results // *Acustica*. – 1972, vol. 26, № 1. – P. 1 – 18.
86. **Nilsson A.C.** Reduction index and boundary conditions for a wall between two rectangular rooms. Part II, Experimental results// *Acustica*. – 1972, vol. 26, № 1. – P. 19 – 23.
87. **Nilsson A.C., Kihlman T.K.** Influence of boundary conditions upon the reduction index of a wall between two rectangular rooms // *Proc. 7-th Int. Congr. Acoust., Budapest*. – 1971. – P. 33 – 36.
88. **Park J., Mongeau L.** Vibration and sound radiation of viscoelastically supported Mindlin plates // *J. Sound Vib.* – 2008. – 318, No. 4-5. – P. 1230 – 1249.
89. **Peutz V.M.** Some fundamental measurements on single and double plate structures // *Acustica*. – 1954, vol.4, № 1. – P. 281 – 292.
90. **Peutz V.M.** Letter to the editor concerning the article by W. Kuhl “Fehlermöglichkeiten bei Schalldammungsmessungen bei tiefen Frequenzen” // *Acustica*. – 1955, vol. 5, № 1. – P. 46 – 55.
91. **Picó R., Gautier F.** The vibroacoustics of slightly distorted cylindrical shells: A model of the acoustic input impedance // *J. Sound Vib.* – 2007. – 302, No. 1-2. – P. 18 – 38.
92. **Plaut R.H., Cotton S.A.** Two-dimensional vibrations of air-filled geomembrane tubes resting on rigid or deformable foundations // *J. Sound Vib.* – 2005. – 282, No. 1-2. – P. 265 – 276.
93. **Reissner H.** Der senkrechte und schräge Durchtritt einer in einem flüssigen Medium erzeugten ebenen Dilatations (longitudinal) Welle durch eine in diesem Medium befindliche planparallele feste Platte // *Helv. Phys. Acta*. – 1938, № 11. – P. 140 – 149.
94. **Ross D., Ungar E.E., Kerwin I.M.** Damping of Plate flexural vibrations by Means of viscoelastic Laminac // *Structural Damping: Pergamon Press*. – 1960. – P. 49 – 87.
95. **Sanders F.H., Can. J. Research.** – 1939, – vol. 1. – P. 74 – 85.

96. **Schoch A.** Der Schalldurchgang durch Platten // *Acustica*. – 1952, Bd.2, № 1. – p. 1.
97. **Schoch A., Feher K.** The mechanism of sound transmission through single leaf partitions investigated using small scale models // *Acustica*. – 1952, vol. 2, №5. – P. 189 –195.
98. **Stamm K., Witte H.** Sandwichkonstruktionen. Berechnung, Fertigung, Ausführung. – Wien–New York: Springer-Verlag, 1974. – 337 p.
99. **Thomson W.T.** Transmission of elastic waves through a stratified solid Medium // *Journal of Applied Physics*. – 1950, vol. 21, № 2. – P. 89 – 93.
100. **Utley W.A.** Single leaf transmission loss at low frequencies // *The Journal of sound and vibration*. – 1968, vol. 8, № 2. – P. 256 – 261.