

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)

На правах рукописи



Харченко Николай Анатольевич

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АЭРОТЕРМОДИНАМИКИ
ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ**

01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук, профессор
Молчанов Александр Михайлович

Москва
2021

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	4
ГЛАВА 1. АНАЛИЗ РАЗВИТИЯ МОДЕЛЕЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ АЭРОТЕРМОДИНАМИКИ	10
Выводы по главе.....	22
ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ АЭРОТЕРМОДИНАМИКИ	23
2.1 Математическая модель течения вязкого газа	23
2.2 Математическая модель течения химически неравновесного газа	25
2.3 Теплофизические свойства	26
2.4 Граничные и начальные условия.....	29
Выводы по главе.....	29
ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД.....	30
3.1 Аппроксимация уравнений газовой динамики	30
3.1.1 Аппроксимация конвективных потоков	32
3.1.2 Повышение порядка аппроксимации.....	33
3.1.3 Аппроксимация вязких потоков	34
3.2 Аппроксимация уравнений химической кинетики.....	35
3.3 Вычисление температуры газовой смеси	36
3.4 Численная реализация граничных условий.....	37
Выводы по главе.....	38
ГЛАВА 4. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК	39
4.1 Трансзвуковое обтекание реактивного снаряда.....	39
4.1.1 Постановка задачи	40
4.1.2 Результаты валидации	41
4.2 Сверхзвуковое и гиперзвуковое обтекание затупленных тел	54
4.2.1 Постановка задачи	54
4.2.2 Результаты валидации	58
Выводы по главе.....	62

ГЛАВА 5. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИСТЕНОЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ	64
5.1 Численное моделирование ламинарного течения вдоль плоской пластины	64
5.1.1 Постановка задачи	64
5.1.2 Результаты валидации	65
5.2 Численное моделирование обтекания гиперзвуковым потоком цилиндрически – конического тела и двойного конуса.....	66
5.2.1 Постановка задачи	67
5.2.2 Результаты валидации	70
Выводы по главе.....	79
ГЛАВА 6. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕАГИРУЮЩИХ ТЕЧЕНИЙ	80
6.1 Численное моделирование аэротермодинамики спускаемого аппарата Аполлон-4	80
6.1.1 Постановка задачи	80
6.1.2 Результаты расчётов	86
Выводы по главе.....	102
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	103
Литература	105

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность

На сегодняшний день создание высокоскоростной ракетно – космической техники проводится при постоянном использовании инструментов численного моделирования. Проведение натурных и наземных испытаний при создании такой техники связано с множеством технических трудностей, а результаты, полученные в процессе данных испытаний, имеют ограничения, связанные с невозможностью в полной мере оценить аэротермодинамические характеристики высокоскоростных летательных аппаратов на сверхзвуковых и гиперзвуковых режимах. Поэтому в дальнейшем потребность численного моделирования при создании новых образцов такого рода техники будет только повышаться, а соответственно и совершенствоваться методы физико – математического моделирования.

При гиперзвуковом движении высокоскоростных летательных аппаратов в плотных слоях атмосферы вследствие повышения температуры происходит диссоциация и ионизация воздуха, что приводит к невозможности рассматривать воздух как совершенный газ с постоянными теплоёмкостями. В связи с этим возникает необходимость учёта теплофизических и термохимических свойств высокотемпературного воздуха при проведении расчётов аэротермодинамических характеристик данного типа техники. Разработка вычислительных моделей, позволяющих проводить подобные расчёты для летательных аппаратов сложных геометрических форм, в настоящее время является актуальной задачей, над решением которой интенсивно работают ведущие научные организации в области аэрокосмических исследований как в мире, так и в нашей стране.

Цель работы заключается в построении математической модели, описывающей физико – химические процессы в гиперзвуковых течениях, протекающих в высокотемпературном воздухе при интенсивном нагреве высокоскоростных летательных аппаратов и разработке численного метода,

основанного на решении системы уравнений движения вязкого, химически реагирующего газа для проведения численных исследований в рамках данной модели.

Основные задачи исследования:

1. Построение математической модели вычислительной аэротермодинамики, описывающей трёхмерные, нестационарные, вязкие, химически реагирующие течения гиперзвуковых потоков.
2. Построение и реализация численного метода повышенного порядка аппроксимации по пространству для решения систем уравнений газовой динамики и химической кинетики на базе разработанного компьютерного кода ГРАТ.
3. Адаптация модели аналитического представления термодинамических функций равновесного воздуха для учёта физико – химических процессов в высокотемпературном воздухе.
4. Построение метода, позволяющего устранить численную неустойчивость сильных ударных волн при гиперзвуковом обтекании затупленных тел.
5. Проведение численных исследований высокоскоростного обтекания тел с помощью разработанного компьютерного кода ГРАТ. Выполнение сравнительного анализа реализованных математических моделей учёта физико – химических процессов в высокотемпературном воздухе.

Научная новизна:

1. Построена математическая модель вычислительной аэротермодинамики, описывающая трёхмерные, нестационарные, вязкие, химически реагирующие течения гиперзвуковых потоков.
2. Построен численный метод повышенного порядка аппроксимации по пространству для решения систем уравнений газовой динамики и химической кинетики на неструктурированных сетках. Для

проведения расчётов аэротермодинамических характеристик высокоскоростных летательных аппаратов сложных геометрических форм реализован данный метод на базе разработанного компьютерного кода ГРАТ.

3. Проведена адаптация модели аналитического представления термодинамических функций равновесного воздуха для учёта физико – химических процессов в высокотемпературном воздухе применительно к численному решению задач гиперзвукового обтекания высокоскоростных летательных аппаратов.
4. Построен метод, позволяющий устранить численную неустойчивость сильных ударных волн при гиперзвуковом обтекании затупленных тел. Проведены исследования влияния нерегулярности расчётной сетки на проявление численной неустойчивости.
5. Проведены численные исследования высокоскоростного обтекания тел с помощью разработанного компьютерного кода ГРАТ. Выполнен сравнительный анализ реализованных математических моделей учёта физико – химических процессов в высокотемпературном воздухе.

Практическая значимость работы

Разработанный компьютерный код ГРАТ (*Гиперзвуковая Ракетная АэроТермодинамика*) имеет практическое применение при расчёте аэротермодинамических характеристик высокоскоростных летательных аппаратов сложных геометрических форм, что позволяет в дальнейшем провести оценку и анализ аэродинамических и тепловых нагрузок сверхзвуковых и гиперзвуковых летательных аппаратов.

Достоверность полученных в работе результатов численного моделирования подтверждается проведением тщательной верификации и валидации:

соответствия точным аналитическим решениям, сравнением с расчётами других авторов и сопоставлением с экспериментальными данными.

Основные защищаемые положения

1. Метод расчёта трёхмерных, вязких, химически реагирующих течений гиперзвуковых потоков. Сопоставление результатов расчётов с данными экспериментальных исследований высокоскоростного обтекания тел.
2. Адаптация модели аналитического представления термодинамических функций равновесного воздуха для численного моделирования гиперзвукового обтекания высокоскоростных летательных аппаратов.
3. Метод устранения численной неустойчивости сильных ударных волн при гиперзвуковом обтекании затупленных тел.

Апробация работы

Основные результаты работы докладывались на всероссийских научных конференциях:

- Всероссийская школа-семинар «Аэрофизика и физическая механика классических и квантовых систем» (АФМ), Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, 2017, 2018, 2019 г.
- 60-я, 61-я, 62-я и 63-я, всероссийская научная конференция МФТИ, Московский физико-технический институт, 2017, 2018, 2019, 2020 г.

Публикации

Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 5 работах, из которых 4 в изданиях, рекомендованных ВАК РФ, 3 публикации в трудах конференций.

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы. Объём представленной работы составляет 112 листов, включая 105 рисунков и 3 таблицы. Список литературы содержит 89 наименований.

Во **введении** показана актуальность и практическая значимость работы, формулируются цель и задачи исследования.

В **первой главе** проводится анализ развития моделей вычислительной аэротермодинамики.

Во **второй главе** описывается математическая модель вычислительной аэротермодинамики, основанная на трёхмерной нестационарной системе дифференциальных уравнений движения вязкого, теплопроводного, химически реагирующего газа, формулируются граничные и начальные условия.

В **третьей главе** формулируется численный метод конечного объёма для решения систем уравнений газовой динамики и химической кинетики. Описывается процедура повышения порядка аппроксимации численной схемы по пространству. Приводится численная аппроксимация решаемой системы дифференциальных уравнений и граничных условий на неструктурированных сетках.

В **четвертой главе** проводится численное моделирование распределенных и интегральных аэродинамических характеристик. Представлено сопоставление результатов численного моделирования трансзвукового обтекания реактивного снаряда по распределению коэффициента давления на поверхности объекта и коэффициента сопротивления сферы при сверхзвуковом и гиперзвуковом обтекании с экспериментальными данными центров авиационных исследований NASA Langley Research Center и ЦАГИ. Описывается метод позволяющий устранить численную неустойчивость сильных ударных волн при гиперзвуковом обтекании затупленных тел.

В пятой главе проводится численное моделирование пристеночных течений. Показано соответствие точному аналитическому решению результатов численного моделирования ламинарного течения вдоль плоской пластины. Представлено сопоставление результатов численного моделирования гиперзвукового обтекания цилиндрически – конического тела и двойного конуса по распределению давления и теплового потока на поверхности объектов с экспериментальными данными центра исследований аэронавтики CUBRC. Проводится сравнение результатов численного решения с расчётными данными, полученными компьютерными кодами вычислительной аэротермодинамики NASA.

В шестой главе представлены результаты численного моделирования компьютерным кодом ГРАТ гиперзвукового обтекания спускаемого космического аппарата Аполлон-4. Проводится сравнение моделей равновесной термодинамики Крайко и химической кинетики 11-ти компонентного воздуха Парка. Показаны распределения массовых концентраций частично ионизированного воздуха и плотности полного теплового потока на поверхности спускаемого аппарата.

В заключении формулируются основные выводы, проведенных численных исследований в диссертации.

Благодарность

Автор выражает благодарность коллективу лаборатории радиационной газовой динамики Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН за большой вклад и ценную помощь в научном становлении.

ГЛАВА 1. АНАЛИЗ РАЗВИТИЯ МОДЕЛЕЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ АЭРОТЕРМОДИНАМИКИ

Создание космических кораблей, таких как Буран и Space Shuttle, побудило к серьезным исследованиям возможных модификаций конструкций такого типа космических аппаратов, проводимых на протяжении последующих лет (рисунок 1.1).

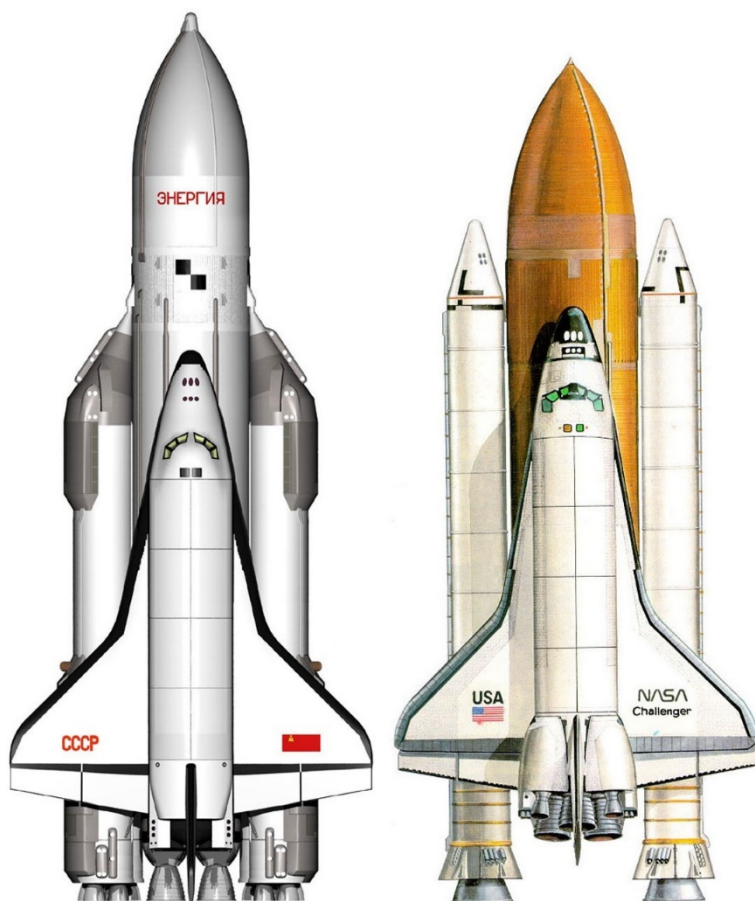


Рисунок 1.1 – Космические корабли Буран и Space Shuttle

Долгое время считалось, что заменой этих многоразовых аппаратов станет космический корабль более совершенный, более эффективный, и конечно же, более многоразовый. Одной из таких конструкций, которая привлекла большое внимание в последние годы, была конструкция орбитального транспортного средства – беспилотный космический корабль многоразового использования. Предполагалось, что такие аппараты будут взлетать с взлетно-посадочной полосы и разгоняться до орбитальных скоростей с использованием различных типов двигательных установок. Технологии,

необходимые для создания подобного рода космических аппаратов, все ещё находится на стадии разработки, но работы в этом направлении непрерывно ведутся, о чём свидетельствуют научно-исследовательские и опытно-конструкторские работы по созданию орбитального космического аппарата Boeing X-37 (рисунок 1.2).



Рисунок 1.2 – Космический аппарат Boeing X-37

Трагическая авария Space Shuttle Columbia произошедшая в 2003 году со всей очевидностью продемонстрировала, что космическая программа США не может ждать завершения разработки летательных аппаратов для замены космического корабля типа Space Shuttle. По причине решения завершить эксплуатацию космических шаттлов в короткие сроки, в качестве немедленной замены была выбрана конструкция космических аппаратов капсульного типа для доставки космонавтов на Международную космическую станцию и возвращения их на Землю. Выбор такого типа космических аппаратов основан на их исторической безопасности, продемонстрированной Россией и США, их низкой стоимостью обслуживания и производства, а также доступности технологий для их создания.

После завершения в США программы полётов космических кораблей типа Space Shuttle в 2011 году, единственным средством для доставки космонавтов на Международную космическую станцию остались спускаемые аппараты Союз, создаваемые в Ракетно-космической корпорации «Энергия», разработка которых началась ещё в 1962 году под руководством

С.П. Королёва. В России, в настоящее время для пилотируемых полетов используют спускаемые аппараты Союз, но в РКК «Энергия» им. С.П. Королёва ведутся работы по созданию многоразового пилотируемого космического корабля Орёл (рисунок 1.3).



Рисунок 1.3 – Спускаемые аппараты Союз и Орёл

Космическая программа NASA использовала пилотируемые спускаемые аппараты для программ Mercury, Gemini и Apollo, а также беспилотные спускаемые аппараты меньшего размера для нескольких миссий на другие планеты. Но акцент на программе Space Shuttle в США не позволял использовать научно-технические ресурсы при разработке новых типов спускаемых аппаратов для пилотируемых полетов. Следовательно, есть возможности для улучшения существующих конструкций и разработке новых форм, которые были бы оптимальными в конструктивном смысле, способствовали минимизации нагрева и потери связи, а также повышению аэродинамической устойчивости. Такой разработкой стали конструкции многоразовых пилотируемых космических кораблей Orion, разрабатываемого компанией Lockheed Martin и Crew Dragon, разработанного компанией SpaceX, совершивший свой первый полёт не так давно (рисунок 1.4).



Рисунок 1.4 – Спускаемые аппараты Orion и Crew Dragon

Численное моделирование динамики жидкости и газа является неотъемлемой частью при создании конструкции любого летательного аппарата, включая спускаемые аппараты. Экстремальные условия, в которых находится спускаемый аппарат при входе в атмосферу, трудно или невозможно воспроизвести в экспериментальных установках и в ходе лётных испытаний. Стоимость экспериментальных исследований для создания высокоскоростных потоков в испытательных стендах значительно выше, чем низкоскоростных потоков, вследствие огромного количества требуемой энергии, которая необходима для воспроизведения условий сверхзвукового и гиперзвукового полета, а также вследствие того, что количество оборудования, используемого для проведения таких экспериментов, очень ограничено.

Применение инструментов численного моделирования, таких как вычислительная гидродинамика, позволяет сократить количество дорогостоящих экспериментов, помогая инженерам и конструкторам получить оценку характеристик при проектировании конструкции летательного аппарата. Действительно, методы вычислительной гидродинамики широко использовались в последние два десятилетия в

качестве инструмента проектирования спускаемых аппаратов, таких как Galileo [1], Mars Pathfinder [2, 3], Stardust [4, 5, 6] и другие. Существенное увеличение вычислительной мощности за последние 10 лет позволило расширить возможности численного моделирования и учесть в математической модели большее количество физических процессов. В идеальном случае экспериментальные и летные испытания в атмосфере Земли могут стать средством подтверждения соответствия характеристик ракетно-космической техники, разрабатываемой с использованием инструментов численного моделирования. В настоящее время инструменты численного моделирования в России и США используются для расчёта аэродинамических и тепловых нагрузок при проектировании многоразовых ступеней ракет (рисунок 1.5) и пилотируемых космических кораблей: Орёл, Orion и Crew Dragon.

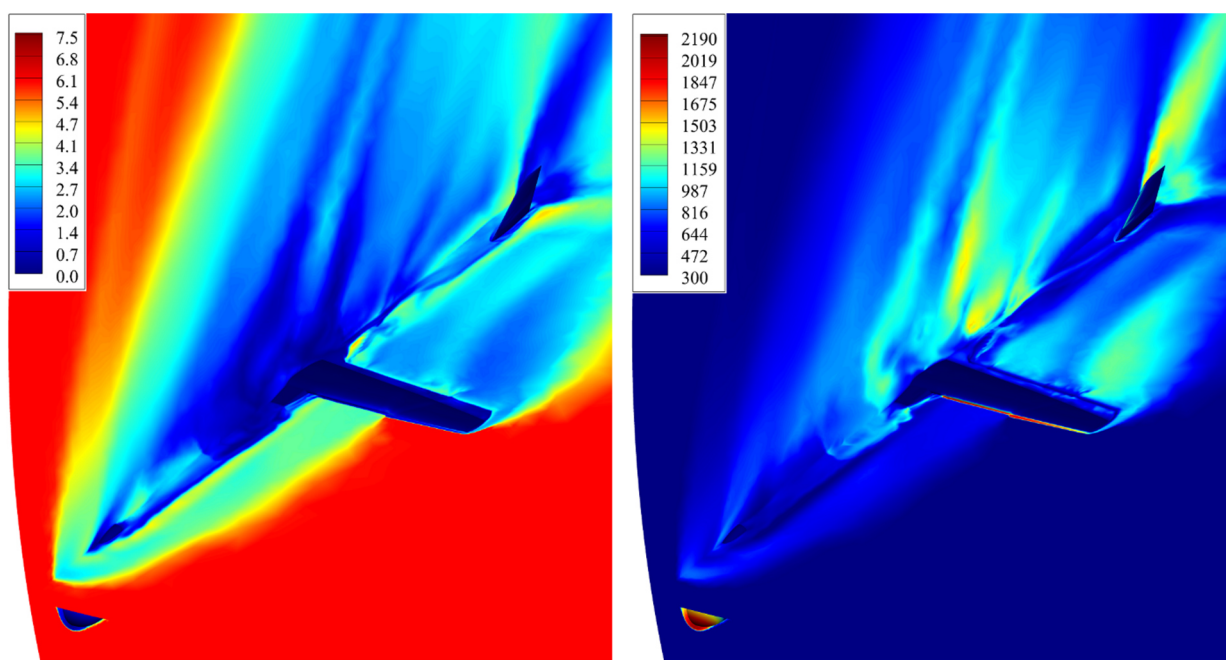


Рисунок 1.5 – Распределение числа Маха и температуры при гиперзвуковом обтекании многоразовой ступени ракеты в атмосфере

Вследствие экстремальных скоростей течения численное моделирование гиперзвуковых потоков требует учёта различных физико – химических процессов, которые обычно не включаются в большинство инструментов численного анализа. Обычно такие течения

находятся в термодинамическом неравновесном состоянии, ионизируются и имеют электронное возбуждение. Некоторые физические модели являются приближёнными, а многие из них не изменились с 1980 годов. Кроме того, численное моделирование гиперзвуковых течений представляет определенные проблемы, которые до сих пор не решены. Развитие старых моделей или создание новых позволит обеспечить более точное моделирование гиперзвуковых потоков, используемых при проектировании новых космических аппаратов и других гиперзвуковых летательных аппаратов. Влияние физических и численных моделей можно проверить на основе сопоставления результатов численного моделирования с имеющимися экспериментальными и летными данными, которые учитывают все физические процессы, необходимые для правильного описания течения. Космическая программа Аполлон в 1960 годах позволила получить большой объем экспериментальных и летных данных, в процессе наземных и натурных испытаний, которые в дальнейшем использовали для численных исследований соответствия физико – математических моделей реальным физическим процессам. Поскольку создаваемые пилотируемые космические корабли, вероятно, будут похожи на спускаемый аппарат Аполлон, то есть большой интерес узнать, как результаты, полученные инструментами численного моделирования, соответствуют этим данным.

Типичные значения скорости входа космического корабля в атмосферу планеты составляют от 7 до 12 км/с, а соответствующие числа Маха находятся в диапазоне от 20 до 50. При входе космического корабля в атмосферу, возникают разные режимы течения (рисунок 1.6). Для высот более 120 км число Кнудсена, которое характеризует степень разреженности газа и является отношением длины свободного пробега газовых частиц к характерной длине спускаемого аппарата (около 4 м для капсулы Аполлон), может достигать значений выше 10. В этом режиме течения происходит так называемые свободномолекулярные столкновения между частицами газа. На высоте от 120 до 90 километров значение числа Кнудсена

составляет от 1 до 0.01, режим течения становится переходным. В свободномолекулярном и переходном режимах хорошо известные уравнения Навье-Стокса для описания движения жидкости и газов неприменимы. Такие течения необходимо моделировать с использованием различных наборов уравнений, таких как уравнения Барнетта или уравнение Больцмана. Уравнение Больцмана можно решить численно, используя метод прямого моделирования Монте-Карло (DSMC) [7]. Атмосфера настолько разрежена во время этих режимов, что почти не наблюдается снижения скорости, а интенсивность нагрева незначительна.

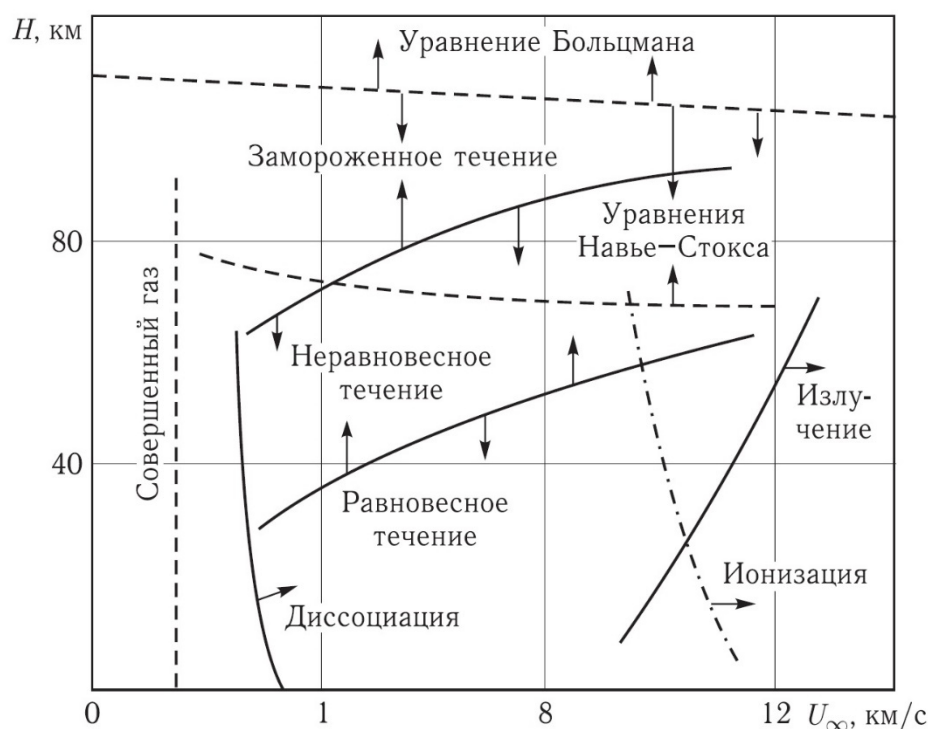


Рисунок 1.6 – Ориентировочные границы возникновения физико – химических процессов при обтекании спускаемого аппарата в атмосфере

Для высот ниже 90 км значение числа Кнудсена меньше 0.01, что соответствует режиму течения сплошной среды. Плотность частиц в газе достаточно велика, так что газ можно моделировать как сплошную среду, за исключением локализованных областей, таких как течения в донной области и зоне разреженного следа. Локальная характерная длина этих областей может быть того же порядка, что и длина свободного пробега, что делает недействительным использование приближения сплошной среды для

описания течения в данных областях. Моделирование данных областей можно успешно провести с помощью DSMC метода. На высоте около 80 км спускаемый аппарат уже испытывает значительное снижение скорости. Огромное количество кинетической энергии преобразуется в тепловую энергию за счёт сильного сжатия потока в ударной волне, генерирующей температуры в ударном слое до 50 000 К. Большая часть тепловой энергии остаётся в потоке и отводится конвекцией, но часть её передается поверхности спускаемого аппарата за счет конвективного и радиационного нагрева. Максимальный конвективный нагрев поверхности спускаемого аппарата достигается в точке торможения и обычно происходит на высоте от 70 до 60 км, что находится в диапазоне моделирования сплошной среды.

Вследствие очень высоких значений скоростей и относительно низкой плотности потока расстояние отхода ударной волны невелико на границе режимов течения переходного и сплошной среды. В данный период расстояние отхода ударной волны и толщина пограничного слоя могут быть примерно одинаковыми, что приводит к образованию так называемого ударного слоя. В гиперзвуковом потоке принято называть область между стенкой и ударной волной ударным слоем, даже если ударная волна не находится на границе пограничного слоя. Высокая температура в ударном слое вследствие сильно сжатия вызывает интенсивные химические реакции, диссоциацию и ионизацию газа, возбуждение колебательной и электронной энергии. Химические реакции и процессы передачи энергии между различными энергетическими модами газа происходят с конечной скоростью, которая зависит от межмолекулярных столкновений, зависящих от плотности газа. Вследствие высоких скоростей и относительно низкой плотности характеристическое время потока может быть того же порядка, что и характеристическое время химических процессов и процессов передачи энергии, что приводит к термическому и химическому неравновесию внутри ударного слоя. По мере того, как спускаемый аппарат входит в атмосферу,

скорость межмолекулярных столкновений увеличивается, и в конечном итоге на малых высотах поток достигает теплового и химического равновесия.

Присутствие ионизированного и электронно – возбужденного газа в ударном слое способствует испусканию излучения, которое частично поглощается в виде радиационного нагрева лобовым аэродинамическим щитом спускаемого аппарата. Кроме того, поверхность спускаемого аппарата может быть катализатором химических реакций, которые приводят к экзотермическим реакциям вблизи стенки и как следствие дополнительному нагреву поверхности. С большой тепловой нагрузкой поверхности спускаемых аппаратов можно справиться за счет уноса теплозащитного материала, который вследствие разрушения вводит в поток различные химические вещества. Все эти физико – химические процессы оказывают существенное влияние на структуру течения. Химическое неравновесие влияет на температуру, состав и свойства переноса потока, такие как вязкость, теплопроводность и диффузия. Термическое неравновесие влияет на скорость протекания химических реакций в потоке. Испускаемое излучение влияет на изменение температурного поля, где интенсивность излучения зависит от термической неравновесности потока. Унос теплозащитного материала с поверхности является причиной протекания различных химических реакций вблизи стенки и может приводить к изменению формы аппарата, а вдув продуктов вследствие разрушения может способствовать турбулизации пограничного слоя. В связи с этим эффективное моделирование гиперзвуковых течений должно учитывать взаимозависимость всех физико – химических процессов, возникающих в высокотемпературном потоке.

Хотя трудности физического моделирования огромны, нельзя игнорировать численные проблемы, возникающие при моделировании высокоскоростных течений. Чрезвычайно высокие числа Маха вызывают проблемы численной неустойчивости сильных ударных волн [8, 9]. Численная неустойчивость проявляется в виде возмущений на ударной волне, что

приводит к появлению нефизических осцилляций газодинамических параметров. Данные проблемы еще более выражены при использовании схем повышенного порядка точности и сильно нерегулярных неструктурированных сеток, состоящих из тетраэдральных элементов. Проблемы численной неустойчивости сильных ударных волн можно свести к минимуму, используя методы, описанные в работах [8, 9].

Кроме того, моделирование химических реакций требует подробных расчётных сеток в пристеночной области, что приводит к увеличению вычислительной сложности. Большое количество химических компонент и реакций также приводит к необходимости увеличения вычислительных ресурсов. Большинство спускаемых аппаратов летят под углом атаки для создания подъемной силы, поскольку это позволяет получить максимальный нагрев на больших высотах, что важно, так как максимальный нагрев пропорционален плотности газа. Вследствие наличия угла атаки, детальный расчёт аэротермодинамики таких аппаратов требует проведения трёхмерного численного моделирования. Кроме того, у большинства аппаратов есть конструктивные элементы, которые могут представлять локальную тепловую нагрузку. Наличие такие конструктивных особенностей в геометрии приводит к дополнительной сложности при построении расчётной сетки.

Численное моделирование течений жидкости и газа для решения прикладных задач в аэрокосмической отрасли проводится десятилетиями. Оно началось с численного решения упрощенных форм уравнений Навье-Стокса, таких как линеаризованный потенциальный поток, трансзвуковые уравнения малых возмущений и уравнения полного потенциала [10]. Первое моделирование гиперзвуковых течений было проведено на основе решения упрощённых уравнений Навье-Стокса, названное уравнениями вязкого ударного слоя. На основе такого подхода проводилось моделирование для анализа зонда Galileo [1] и космического корабля Space Shuttle [11]. Большинство идей, которые определяют современную вычислительную гидродинамику и которые используются в

настоящее время, такие как расщепление вектора потока [12, 13], приближенные методы решения задачи о распаде произвольного разрыва [14, 15] и устойчивые схемы более высокого порядка точности [16, 17] были разработаны примерно в это же время. Данные методы позволяют проводить моделирование на основе численного решения полных уравнений Навье-Стокса для произвольных геометрических форм и условий потока, но приводят к значительно большей вычислительной сложности, чем методы решения упрощённых уравнений.

По мере совершенствования численного моделирования и увеличения вычислительной мощности более сложные модели физических явлений постепенно включались в моделирование уравнений Навье-Стокса. Первыми попытками моделирования гиперзвуковых течений были методы с использованием современных слабосвязанных химических источников [18] или упрощенной химической модели [19]. Первый расчет многомерного поля течения, включающего термохимическую неравновесность и ионизацию, был выполнен Candler [20]. В своей работе Candler, используя современные методы вычислительной гидродинамики, решил систему уравнений, которые связывали уравнения теплового и химического неравновесия с уравнениями гидродинамики. Система уравнений неравновесного течения разработанная Lee [21] аналогична, но не учитывает различную колебательную температуру для каждой многоатомной частицы.

Примерно в то же время другой компьютерный код для моделирования высокоскоростных потоков, названный LAURA (Langley Aerothermodynamic Upwind Relaxation Algorithm), был разработан Gnoffo [22] в NASA Langley Research Center. Компьютерный код LAURA решает систему уравнений, разработанную Lee [21], поскольку передача энергии между колебательными модами происходит достаточно быстро. Данный инструмент численного моделирования использовался при проектировании нескольких спускаемых аппаратов [23] и для анализа системы тепловой защиты космического корабля

Space Shuttle [24]. В основе вычислительного кода лежат неявные методы решения уравнений на структурированных сетках.

С повышением доступности параллельных вычислительных машин в 1990 годах появилась потребность в разработке неявных алгоритмов с возможностью эффективного распараллеливания решаемых задач. Wright [25] показал, что линейная система уравнений, возникающая в результате неявного интегрирования задач гидродинамики с использованием структурированных сеток, может быть эффективно решена путем вычисления системы уравнений в нормальном направлении к поверхности объекта. Но данный подход поддается распараллеливанию до того момента, пока структурированная сетка разбивается вдоль направлений по нормали к поверхности объекта. Разработанный на основе данных алгоритмов компьютерный код DPLR (Data-Parallel Line Relaxation) в настоящее время используется в исследовательском центре NASA Ames Research Center при разработке тепловой защиты спускаемых аппаратов [23].

С другой стороны, другие исследователи [26] разработали неявные алгоритмы для компьютерных кодов вычислительной гидродинамики с использованием неструктурированных сеток. Неструктурированные сетки позволяют осуществлять автоматизированные построения для сложных геометрических форм. Алгоритмы, разработанные в то время, в основном основывались на решении разреженной системы уравнений и не использовали физические свойства задачи. Разработанные алгоритмы выявили проблемы устойчивости и сходимости для расчетов идеального газа. Nompelis в своей работе [27] показал, что алгоритм, разработанный Wright [25], также очень эффективен для моделирования гиперзвуковых потоков с использованием неструктурированных сеток и требует только построения вычислений в нормальном направлении к поверхности объекта. Данный подход широко использовался при моделировании высокоскоростных течений методом конечных элементов [28, 29]. Разработанный алгоритм был ограничен использованием неструктурированных трехмерных сеток, состоящих из

гексаэдральных элементов, но расширение на неструктурированные сетки, состоящие из тетраэдральных или призматических элементов тривиально. Для моделирования гиперзвуковых течений на неструктурированных сетках не так давно был разработан компьютерный код US3D в NASA Ames Research Center, основанный на физико – химических моделях, реализованных в вычислительном коде DPLR [30]. Кроме того, постоянное увеличение мощности вычислительной техники позволило в последние годы использовать более сложные модели химической кинетики [31] и пристеночного катализа [32, 33, 34], транспортных свойств [35, 36, 37] и диффузионных моделей [33, 38, 39]. Связанные решения, включающие излучение [40] и унос теплозащитного материала [41], были выполнены, но до сих пор не получили широкого распространения.

Выводы по главе

Проведён анализ развития моделей вычислительной аэротермодинамики. Описан механизм возникновения физико – химических процессов и влияние на параметры потока при входе космического корабля в атмосферу. Выделены основные направления и проблемы в области разработки инструментов численного моделирования гиперзвуковых течений.

ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ АЭРОТЕРМОДИНАМИКИ

В данной главе приводится трёхмерная нестационарная система уравнений движения вязкого, теплопроводного, химически реагирующего газа, лежащая в основе используемой математической модели вычислительной аэротермодинамики. Формулируются граничные и начальные условия для данной системы дифференциальных уравнений.

2.1 Математическая модель течения вязкого газа

Течение вязкого, теплопроводного газа описывается системой дифференциальных уравнений Навье – Стокса. Система уравнений Навье – Стокса, выражающая законы сохранения массы, импульса и полной энергии, для ламинарного течения сжимаемого газа записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial F^x(w)}{\partial x} + \frac{\partial F^y(w)}{\partial y} + \frac{\partial F^z(w)}{\partial z} = \frac{\partial G^x(w)}{\partial x} + \frac{\partial G^y(w)}{\partial y} + \frac{\partial G^z(w)}{\partial z}, \quad (1)$$

$$w = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix},$$

$$F^x = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho uE + pu \end{pmatrix}, \quad F^y = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho vE + pv \end{pmatrix}, \quad F^z = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho w^2 + p \\ \rho wE + pw \end{pmatrix},$$

$$G^x = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{yx} \\ \tau_{zx} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{yx} + w\tau_{zx} - q_x \end{pmatrix}, \quad G^y = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zy} \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + w\tau_{zy} - q_y \end{pmatrix},$$

$$G^z = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zz} \\ u\tau_{xz} + v\tau_{yz} + w\tau_{zz} - q_z \end{pmatrix},$$

где w – столбец консервативных переменных, F – вектор конвективного потока, G – вектор вязкого потока.

Входящие в вектор вязкого потока компоненты тензора вязких напряжений записываются как:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \frac{2}{3} \frac{\mu}{\text{Re}_\infty} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right), & \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \frac{\mu}{\text{Re}_\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \tau_{yy} &= \frac{2}{3} \frac{\mu}{\text{Re}_\infty} \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right), & \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \frac{\mu}{\text{Re}_\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \tau_{zz} &= \frac{2}{3} \frac{\mu}{\text{Re}_\infty} \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right), & \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \frac{\mu}{\text{Re}_\infty} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Вектор плотности теплового потока q пропорционален градиенту температуры и записывается в виде закона Фурье:

$$q_x = -\frac{\lambda}{\text{Pr}_\infty \text{Re}_\infty} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -\frac{\lambda}{\text{Pr}_\infty \text{Re}_\infty} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad q_z = -\frac{\lambda}{\text{Pr}_\infty \text{Re}_\infty} \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (3)$$

Приведение решаемой системы уравнений к безразмерному виду осуществляется отношением:

- декартовых координат $x = \frac{\tilde{x}}{L}$, $y = \frac{\tilde{y}}{L}$, $z = \frac{\tilde{z}}{L}$;
- времени $t = \frac{\tilde{t} V_\infty}{L}$;
- компонент вектора скорости $u = \frac{\tilde{u}}{V_\infty}$, $v = \frac{\tilde{v}}{V_\infty}$, $w = \frac{\tilde{w}}{V_\infty}$;
- плотности $\rho = \frac{\tilde{\rho}}{\rho_\infty}$;
- давления $p = \frac{\tilde{p}}{\rho_\infty V_\infty^2}$;
- температуры $T = \frac{\tilde{T} C_p}{V_\infty^2}$;
- энергии $E = \frac{\tilde{E}}{V_\infty^2}$;
- коэффициентов вязкости и теплопроводности $\mu = \frac{\tilde{\mu}}{\mu_\infty}$, $\lambda = \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda_\infty}$,

к некоторым характерным величинам, где верхним символом « $\tilde{\sim}$ » обозначены размерные переменные, а нижним символом « ∞ » обозначены переменные в невозмущенном потоке. Такое определение безразмерных величин приводит к

появлению в уравнениях критериев подобия течения чисел Рейнольдса

$Re_\infty = \frac{\rho_\infty V_\infty L}{\mu_\infty}$ и Прандтля $Pr_\infty = \frac{\mu_\infty C_p}{\lambda_\infty}$, где L – характерный линейный размер.

2.2 Математическая модель течения химически неравновесного газа

В случае протекания в высокотемпературном газовом потоке неравновесных химических процессов, таких как диссоциация и ионизация частиц, газ рассматривается как смесь химически реагирующих газов с конечными скоростями реакций [42, 43, 44]. В решаемой системе уравнений Навье – Стокса, уравнение сохранения массы газовой смеси, записывается относительно сохранения массы химических компонент газа в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \text{div}(\rho_i \mathbf{V}) = -\text{div} J_i + \dot{\omega}_i. \quad (4)$$

Плотность диффузионного потока J_i записывается в виде закона Фика $J_i = -\rho D_i \text{grad} Y_i$, где $Y_i = \frac{\rho_i}{\rho}$ – массовая концентрация химического компонента газовой смеси и $\sum_{i=1}^{N_s} Y_i = 1$. В безразмерном виде выражение для

плотности диффузионного потока запишется как: $J_i = -\frac{\rho D_i}{Sc_\infty Re_\infty} \text{grad} Y_i$, где

$D_i = \frac{\tilde{D}_i}{D_\infty}$ – коэффициент диффузии химического компонента газовой смеси, а

критерий подобия течения число Шмидта – $Sc_\infty = \frac{\mu_\infty}{D_\infty \rho_\infty} = 1$.

Массовая скорость образования химического компонента газовой смеси определяется как [42, 44]:

$$\dot{\omega}_i = M_i \sum_{n=1}^{N_r} (v_{i,n}'' - v_{i,n}') S_n, \quad (5)$$

$$S_n = \left(k_{f,n} \prod_j \left(\frac{\rho_j}{M_j} \right)^{v_{j,n}'} - k_{r,n} \prod_j \left(\frac{\rho_j}{M_j} \right)^{v_{j,n}''} \right),$$

где M_i – молекулярный вес i -го компонента газовой смеси, S_n – скорость протекания n -ой химической реакции, $\nu'_{i,n}$ и $\nu''_{i,n}$ – стехиометрические коэффициенты i -го компонента смеси в n -ой химической реакции, $k_{f,n}$ и $k_{r,n}$ – константы скорости прямой и обратной реакций, N_s и N_r – количество химических компонент и реакций.

Расчёт константы скорости прямой и обратной реакций проводится из обобщённого закона Аррениуса [43, 45]:

$$k_f = A_f T^{n_f} \exp(-E_f/T), \quad k_r = A_r T^{n_r} \exp(-E_r/T), \quad (6)$$

что позволяет использовать кинетические схемы для определения скорости протекания химических реакций.

Вследствие того, что плазма считается квазинейтральной, концентрация электронов равна суммарной концентрации ионов, то система уравнений химической кинетики решается для $N_s - 1$ компоненты газовой смеси.

В такой постановке вектор плотности полного теплового потока q есть сумма потоков, тепловыделение которых обусловлено процессами теплопроводности и диффузии химических компонент газовой смеси [42, 46]:

$$\begin{aligned} q_x &= -\frac{\lambda}{\text{Pr}_\infty \text{Re}_\infty} \frac{\partial T}{\partial x} - \sum_{i=1}^{N_s} \frac{h_i \rho D_i}{\text{Sc}_\infty \text{Re}_\infty} \frac{\partial Y_i}{\partial x}, \\ q_y &= -\frac{\lambda}{\text{Pr}_\infty \text{Re}_\infty} \frac{\partial T}{\partial y} - \sum_{i=1}^{N_s} \frac{h_i \rho D_i}{\text{Sc}_\infty \text{Re}_\infty} \frac{\partial Y_i}{\partial y}, \\ q_z &= -\frac{\lambda}{\text{Pr}_\infty \text{Re}_\infty} \frac{\partial T}{\partial z} - \sum_{i=1}^{N_s} \frac{h_i \rho D_i}{\text{Sc}_\infty \text{Re}_\infty} \frac{\partial Y_i}{\partial z}. \end{aligned} \quad (7)$$

2.3 Теплофизические свойства

В задачах гиперзвукового моделирования, не требующих учёта физико – химических процессов в газе, решаемая система уравнений замыкается термическим и калорическим уравнениями состояния совершенного газа [47]:

$$\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} = (\gamma - 1) \tilde{e}, \quad \tilde{e} = C_v \tilde{T}, \quad (8)$$

где внутренняя энергия:
$$\tilde{e} = \tilde{E} - \frac{1}{2}(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + \tilde{w}^2),$$

а показатель адиабаты:
$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}.$$

В случае, когда газ рассматривается как смесь химически реагирующих газов, решаемая система уравнений замыкается термическим и калорическим уравнениями состояния следующего вида [45]:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} &= \tilde{T} \frac{R_0}{M_\Sigma}, \quad \frac{1}{M_\Sigma} = \sum_{i=1}^{N_s} \frac{Y_i}{M_i}, \\ \tilde{e} &= \tilde{h} - \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} = \sum_{i=1}^{N_s} Y_i \tilde{h}_i - \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}}, \end{aligned} \quad (9)$$

где внутренняя энергия:
$$\tilde{e} = \tilde{E} - \frac{1}{2}(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + \tilde{w}^2),$$

а показатель адиабаты:
$$\gamma = \frac{\tilde{h}}{\tilde{e}}.$$

Для расчёта термодинамических свойств химических компонент используется полиномиальная аппроксимация температурной зависимости приведённой энергии Гиббса:

$$\tilde{h}_i = \tilde{T} (\varphi_{2,i} - 2\varphi_{3,i} x^{-2} - \varphi_{4,i} x^{-1} + \varphi_{5,i} x + 2\varphi_{6,i} x^2 + 3\varphi_{7,i} x^3) + \varphi_{8,i} \cdot 10^3, \quad (10)$$

где $x = \tilde{T} \cdot 10^{-4}$, а $\varphi_{n,i}$ – коэффициенты аппроксимации для расчёта энтальпии

i -го компонента газовой смеси \tilde{h}_i , $\left(\frac{\text{Дж}}{\text{моль}} \right)$. Коэффициенты аппроксимации

в широком температурном диапазоне для различных веществ представлены в [48].

Помимо термического и калорического уравнений состояния важным моментом в постановке задачи является способ вычисления свойств переноса химических компонент газовой смеси, коэффициентов вязкости, теплопроводности и диффузии [45].

Коэффициенты вязкости, теплопроводности и бинарной диффузии рассчитываются из соотношений, полученных в первом приближении теории Чепмена – Энскога [49]:

$$\tilde{\mu}_i = 2.670 \cdot 10^{-6} \sqrt{\tilde{T} M_i} / \Omega_{i,i}^{(2,2)}, \quad \left(\frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}} \right) \quad (11)$$

где выражения для коэффициента теплопроводности с учётом фактора Эйкена [49]:

$$\text{для двухатомных газов } \tilde{\lambda}_i = 1.055 \cdot 10^{-1} \sqrt{\tilde{T} / M_i} / \Omega_{i,i}^{(2,2)}, \quad \left(\frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К}} \right) \quad (12)$$

$$\text{для одноатомных газов } \tilde{\lambda}_i = 8.330 \cdot 10^{-2} \sqrt{\tilde{T} / M_i} / \Omega_{i,i}^{(2,2)}, \quad \left(\frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К}} \right) \quad (13)$$

$$\tilde{D}_{i,j} = 1.858 \cdot 10^{-7} \sqrt{\tilde{T}^3 \left(\frac{1}{M_i} + \frac{1}{M_j} \right)} / \left(P \Omega_{i,j}^{(1,1)} \right), \quad \left(\frac{\text{м}^2}{\text{с}} \right) \quad (14)$$

Коэффициент диффузии i -го компонента газовой смеси рассчитывается по формуле Уилки [50]:

$$\tilde{D}_i = (1 - x_i) / \sum_{i \neq j}^{N_s} (x_j / \tilde{D}_{i,j}) \quad (15)$$

Для расчёта коэффициентов вязкости и теплопроводности газовой смеси используются соотношения [46]:

$$\tilde{\mu} = 1 / \sum_{i=1}^{N_s} (Y_i / \tilde{\mu}_i), \quad (16)$$

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{N_s} x_i \tilde{\lambda}_i + 1 / \sum_{i=1}^{N_s} (x_i / \tilde{\lambda}_i) \right], \quad (17)$$

где $x_i = \frac{M_\Sigma}{M_i} Y_i$.

Для расчёта потенциалов взаимодействия частиц $\Omega_{i,j}^{(1,1)}$ и $\Omega_{i,i}^{(2,2)}$ используется полиномиальная аппроксимация температурной зависимости:

$$\Omega_{i,j}^{(n,n)} = D_{\Omega_{i,j}^{(n,n)}} \tilde{T} \left[A_{\Omega_{i,j}^{(n,n)}} (\ln \tilde{T})^2 + B_{\Omega_{i,j}^{(n,n)}} \ln \tilde{T} + C_{\Omega_{i,j}^{(n,n)}} \right], \quad (18)$$

где $A_{\Omega_{i,j}^{(n,n)}}, B_{\Omega_{i,j}^{(n,n)}}, C_{\Omega_{i,j}^{(n,n)}}, D_{\Omega_{i,j}^{(n,n)}}$ – коэффициенты аппроксимации для расчёта интегралов столкновения частиц. Коэффициенты аппроксимации в широком температурном диапазоне для различных веществ представлены в [35].

В случае, когда газ рассматривается как совершенный для расчёта свойств переноса, коэффициентов вязкости и теплопроводности, используются соотношения [47]:

$$\tilde{\mu} = C \frac{\tilde{T}^{3/2}}{\tilde{T} + 110.4}, \quad C = 1.458 \cdot 10^{-6} \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с} \cdot \sqrt{\text{К}}}, \quad (19)$$

$$\tilde{\lambda} = \frac{\tilde{\mu} C_p}{\text{Pr}}, \quad C_p = \frac{\gamma}{(\gamma - 1)} \left(\frac{R}{M} \right),$$

где принимаются постоянными: $\text{Pr} = 0.72$, $\gamma = 1.4$, $\left(\frac{R}{M} \right) = 286.7 \left(\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \right)$.

2.4 Граничные и начальные условия

Используется несколько типов граничных условий:

- условие на стенке – $u = v = w = 0$, $T = \text{const}$, $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$, $f = (p, Y_i)$;
- условие невозмущённого потока – $f = f_\infty$, $f = (u, v, w, p, T, Y_i)$;
- условие линейной экстраполяции – $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$, $f = (u, v, w, p, T, Y_i)$;
- условие симметрии при $z = 0$ – $w = 0$, $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$, $f = (u, v, p, T, Y_i)$.

В качестве начального приближения задаются параметры невозмущённого потока во всей расчётной области.

Выводы по главе

Сформулирована математическая модель, описывающая трёхмерные, нестационарные, вязкие, химически реагирующие течения гиперзвуковых потоков в приближении термического равновесия газа.

ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

В данной главе описывается численный метод решения системы уравнений движения вязкого, теплопроводного, химически реагирующего газа. Приводится численная аппроксимация решаемой системы дифференциальных уравнений.

3.1 Аппроксимация уравнений газовой динамики

Решение системы уравнений газовой динамики основано на численном интегрировании методом конечного объёма [51]. В следствии того, что решение проводится на установление используется явный метод интегрирования по времени. В результате конечно – объёмная аппроксимация системы уравнений газовой динамики записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \rho_l^{n+1} &= \rho_l^n - \frac{\Delta t_l}{V_l} \left(\sum_{j=1}^N F(\rho u)_{l,j}^n n_{x_{l,j}} S_{l,j} + \sum_{j=1}^N F(\rho v)_{l,j}^n n_{y_{l,j}} S_{l,j} + \sum_{j=1}^N F(\rho w)_{l,j}^n n_{z_{l,j}} S_{l,j} \right); \\
 u_l^{n+1} &= \left[u_l^n \rho_l^n - \frac{\Delta t_l}{V_l} \left(\sum_{j=1}^N F(p)_{l,j}^n n_{x_{l,j}} S_{l,j} + \sum_{j=1}^N F(\rho u^2)_{l,j}^n n_{x_{l,j}} S_{l,j} - \sum_{j=1}^N \tau_{xx}^n n_{x_{l,j}} S_{l,j} + \right. \right. \\
 &+ \left. \sum_{j=1}^N F(\rho uv)_{l,j}^n n_{y_{l,j}} S_{l,j} - \sum_{j=1}^N \tau_{yx}^n n_{y_{l,j}} S_{l,j} + \sum_{j=1}^N F(\rho uw)_{l,j}^n n_{z_{l,j}} S_{l,j} - \sum_{j=1}^N \tau_{zx}^n n_{z_{l,j}} S_{l,j} \right) \right] \frac{1}{\rho_l^{n+1}}; \\
 v_l^{n+1} &= \left[v_l^n \rho_l^n - \frac{\Delta t_l}{V_l} \left(\sum_{j=1}^N F(p)_{l,j}^n n_{y_{l,j}} S_{l,j} + \sum_{j=1}^N F(\rho uv)_{l,j}^n n_{x_{l,j}} S_{l,j} - \sum_{j=1}^N \tau_{xy}^n n_{x_{l,j}} S_{l,j} + \right. \right. \\
 &+ \left. \sum_{j=1}^N F(\rho v^2)_{l,j}^n n_{y_{l,j}} S_{l,j} - \sum_{j=1}^N \tau_{yy}^n n_{y_{l,j}} S_{l,j} + \sum_{j=1}^N F(\rho vw)_{l,j}^n n_{z_{l,j}} S_{l,j} - \sum_{j=1}^N \tau_{zy}^n n_{z_{l,j}} S_{l,j} \right) \right] \frac{1}{\rho_l^{n+1}}; \\
 w_l^{n+1} &= \left[w_l^n \rho_l^n - \frac{\Delta t_l}{V_l} \left(\sum_{j=1}^N F(p)_{l,j}^n n_{z_{l,j}} S_{l,j} + \sum_{j=1}^N F(\rho uw)_{l,j}^n n_{x_{l,j}} S_{l,j} - \sum_{j=1}^N \tau_{xz}^n n_{x_{l,j}} S_{l,j} + \right. \right. \\
 &+ \left. \sum_{j=1}^N F(\rho vw)_{l,j}^n n_{y_{l,j}} S_{l,j} - \sum_{j=1}^N \tau_{yz}^n n_{y_{l,j}} S_{l,j} + \sum_{j=1}^N F(\rho w^2)_{l,j}^n n_{z_{l,j}} S_{l,j} - \sum_{j=1}^N \tau_{zz}^n n_{z_{l,j}} S_{l,j} \right) \right] \frac{1}{\rho_l^{n+1}}; \\
 E_l^{n+1} &= \left[E_l^n \rho_l^n - \frac{\Delta t_l}{V_l} \left(\sum_{j=1}^N F(pu)_{l,j}^n n_{x_{l,j}} S_{l,j} + \sum_{j=1}^N F(pv)_{l,j}^n n_{y_{l,j}} S_{l,j} + \sum_{j=1}^N F(pw)_{l,j}^n n_{z_{l,j}} S_{l,j} + \right. \right. \\
 &+ \left. \sum_{j=1}^N F(\rho uE)_{l,j}^n n_{x_{l,j}} S_{l,j} + \sum_{j=1}^N F(\rho vE)_{l,j}^n n_{y_{l,j}} S_{l,j} + \sum_{j=1}^N F(\rho wE)_{l,j}^n n_{z_{l,j}} S_{l,j} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{j=1}^N (u\tau_{xx})_{l,j}^n n_{x_{l,j}} S_{l,j} - \sum_{j=1}^N (u\tau_{yx})_{l,j}^n n_{y_{l,j}} S_{l,j} - \sum_{j=1}^N (u\tau_{zx})_{l,j}^n n_{z_{l,j}} S_{l,j} + \sum_{j=1}^N q_{x_{l,j}}^n n_{x_{l,j}} S_{l,j} - \\
& - \sum_{j=1}^N (v\tau_{xy})_{l,j}^n n_{x_{l,j}} S_{l,j} - \sum_{j=1}^N (v\tau_{yy})_{l,j}^n n_{y_{l,j}} S_{l,j} - \sum_{j=1}^N (v\tau_{zy})_{l,j}^n n_{z_{l,j}} S_{l,j} + \sum_{j=1}^N q_{y_{l,j}}^n n_{y_{l,j}} S_{l,j} - \\
& - \sum_{j=1}^N (w\tau_{xz})_{l,j}^n n_{x_{l,j}} S_{l,j} - \sum_{j=1}^N (w\tau_{yz})_{l,j}^n n_{y_{l,j}} S_{l,j} - \sum_{j=1}^N (w\tau_{zz})_{l,j}^n n_{z_{l,j}} S_{l,j} + \sum_{j=1}^N q_{z_{l,j}}^n n_{z_{l,j}} S_{l,j} \left. \right] \frac{1}{\rho_l^{n+1}}, \quad (20)
\end{aligned}$$

где N – количество граней в конечном объеме, n – номер временного слоя, а l – номер расчётной ячейки.

Шаг по времени Δt_l с учетом ограничения на конвекцию и диффузию определяется следующим образом:

$$\Delta t_l = \text{CFL} \left(\frac{h_l}{\frac{2(\mu_l/\rho_l)}{h_l} + |\vec{V}_l| + c_l} \right), \quad (21)$$

где CFL – число Куранта, c_l – скорость звука, h_l – минимальное расстояние между центром и гранями расчётной ячейки.

Численно интегрирование проводится на неструктурированных сетках, важным преимуществом которых является автоматизация построения для сложных геометрических форм [52]. В качестве конечных объёмов используются элементы, тетраэдры, пирамиды и призмы, показанные на рисунке 3.1.1.

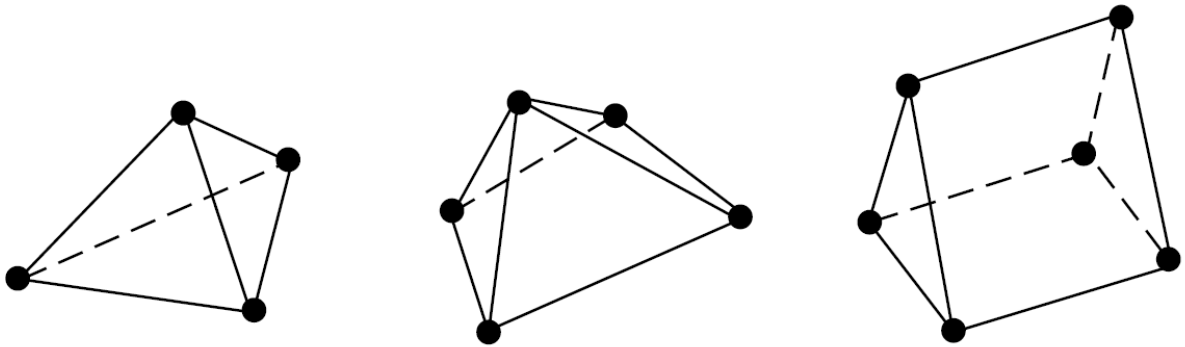


Рисунок 3.1.1 – Конечные объёмы: тетраэдр, пирамида и призма

Для расчёта геометрических параметров элементов неструктурированной сетки, V_l – объёма, $n_{x_{l,j}}$, $n_{y_{l,j}}$, $n_{z_{l,j}}$, $S_{l,j}$ – компонент

единичного вектора внешней нормали и площади граней, проводится разбиение объёмных и плоских объектов на тетраэдры и треугольники [53]. Расчёт координат центров масс объёмных и плоских геометрических объектов основан на вычислении средневзвешенного значения:

$$\vec{r} = \frac{\sum_{j=1}^N \vec{r}_j f_j}{\sum_{j=1}^N f_j}, \quad (22)$$

где \vec{r} – радиус-вектор, определяющий положение центров масс объёмных и плоских геометрических объектов, $f = (V, S)$.

3.1.1 Аппроксимация конвективных потоков

Для аппроксимации конвективных потоков системы уравнений газовой динамики используется метод HLLE [54]. Используемый для численного интегрирования конвективных потоков метод HLLE является приближенным методом решения задачи о распаде произвольного разрыва. Такой подход относится к типам методов [55], развивающих идею вычисления потоков через грани конечного объема из решения задачи о распаде произвольного разрыва, предложенного С. К. Годуновым [56]. Предложенный Harten – Lax – van Leer приближенный метод решения задачи о распаде произвольного разрыва HLL [57] основан на рассмотрении упрощённой, двухволновой конфигурации распространения возмущений, без рассмотрения контактного разрыва. Основное отличие метода HLLE (Harten – Lax – van Leer – Einfeldt) заключается в осреднении по плотности скорости звука, используемой для нахождения наименьшей и наибольшей скорости распространения волновых возмущений [54].

Численный поток HLLE определяется из соотношения [58]:

$$F_{HLLE} = \begin{cases} F_L(w) & \text{при } 0 \leq S_L \\ \frac{S_R F_L(w) - S_L F_R(w) + S_L S_R (w_R - w_L)}{S_R - S_L} & \text{при } S_L \leq 0 \leq S_R, \\ F_R(w) & \text{при } 0 \geq S_R \end{cases} \quad (23)$$

Оценка скорости распространения левой и правой волн S_L и S_R проводится следующим образом [58]:

$$S_L = \bar{V}_L - c_\rho, \quad S_R = \bar{V}_R + c_\rho, \quad (24)$$

$$\begin{cases} S_L = \min(\bar{V}_\rho - c_\rho, \bar{V}_L - c_L) \\ S_R = \max(\bar{V}_\rho + c_\rho, \bar{V}_R + c_R) \end{cases}$$

$$\bar{V}_\rho = \frac{\sqrt{\rho_L} \bar{V}_L + \sqrt{\rho_R} \bar{V}_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad H_\rho = \frac{\sqrt{\rho_L} H_L + \sqrt{\rho_R} H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad c_\rho = \sqrt{(\gamma - 1) \left(H_\rho - \frac{\bar{V}_\rho^2}{2} \right)},$$

где \bar{V}_ρ – вектор скорости, H_ρ – полная энтальпия, c_ρ – скорость звука осреднённые по методу Роу.

3.1.2 Повышение порядка аппроксимации

Применение численных схем повышенного порядка аппроксимации позволяет уменьшить размазывание газодинамических и контактных разрывов [59]. Для получения более высокого порядка аппроксимации численного решения по пространству задается линейное распределение газодинамических параметров внутри ячейки [60]:

$$f_j = f_l + \alpha \left(\frac{\partial f_l}{\partial x} (x_j - x_l) + \frac{\partial f_l}{\partial y} (y_j - y_l) + \frac{\partial f_l}{\partial z} (z_j - z_l) \right). \quad (25)$$

При линейной реконструкции значения газодинамических параметров, используемые для вычисления потоков через грани конечного объема, определяются на каждой грани из задаваемого распределения, что приводит к схеме второго порядка точности в областях, где решение гладкое [52]. Но при этом для сохранения свойства монотонности численной схемы на газодинамических разрывах необходимо использовать ограничитель задаваемого распределения [59, 52].

Коэффициент ограничения задаваемого распределения вычисляется из соотношения:

$$\alpha_j = \begin{cases} \frac{\max(f_k, f_l) - f_l}{f_j - f_l}, & \text{если } f_j - f_l > 0 \\ \frac{\min(f_k, f_l) - f_l}{f_j - f_l}, & \text{если } f_j - f_l < 0, \\ 1.5, & \text{если } f_j - f_l = 0 \end{cases} \quad (26)$$

где с индексами « l » и « k » значения функций в центрах расчётной и соседней ячеек, а с индексом « j » значения функций, вычисленные в центре j -ой грани.

Но отсутствие дифференцируемости записанной функции – ограничителя приводит к ухудшению монотонности схемы. Обеспечить монотонность численной схемы позволило использование дополнительной дифференцируемой функции – ограничителя [61]:

$$\alpha = \begin{cases} \min(\alpha_j) - \frac{1}{2} \left(\frac{\min(\alpha_j)}{1.5} \right)^3, & \text{если } \min(\alpha_j) < 1.5 \\ 1, & \text{иначе} \end{cases} \quad (27)$$

Линейная реконструкция проводится по неконсервативным переменным $f = (u, v, w, p, \rho, e, T, Y_i)$.

3.1.3 Аппроксимация вязких потоков

Для расчета вязких слагаемых необходимо вычислять производные скорости и температуры по пространству в центрах граней конечного объема. Вычисление производных основывалось на численном интегрировании по конечному объёму, состоящему из двух смежных ячеек, относительно центра общей грани и является решением системы уравнений [59, 62]:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_l}{\partial x} \sum_{j=1}^N X_j^2 + \frac{\partial f_l}{\partial y} \sum_{j=1}^N X_j Y_j + \frac{\partial f_l}{\partial z} \sum_{j=1}^N X_j Z_j = \sum_{j=1}^N X_j F_j \\ \frac{\partial f_l}{\partial x} \sum_{j=1}^N X_j Y_j + \frac{\partial f_l}{\partial y} \sum_{j=1}^N Y_j^2 + \frac{\partial f_l}{\partial z} \sum_{j=1}^N Y_j Z_j = \sum_{j=1}^N Y_j F_j, \\ \frac{\partial f_l}{\partial x} \sum_{j=1}^N X_j Z_j + \frac{\partial f_l}{\partial y} \sum_{j=1}^N Y_j Z_j + \frac{\partial f_l}{\partial z} \sum_{j=1}^N Z_j^2 = \sum_{j=1}^N Z_j F_j \end{cases} \quad (28)$$

$$X_j = (x_j - x_l), Y_j = (y_j - y_l), Z_j = (z_j - z_l), F_j = (f_j - f_l),$$

где с индексом «*l*» значения переменных в точке вычисления производных.

3.2 Аппроксимация уравнений химической кинетики

В решении системы уравнений химической кинетики используется двухшаговый подход расщепления по физическим процессам [63], вследствие чего вычисления, связанные с химическими реакциями, проводятся на отдельном шаге.

На первом шаге учитываются вклады источников членов в изменение химических компонент газовой смеси:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} = \dot{\omega}_i. \quad (29)$$

В следствии того, что процессы превращения, связанные с быстро и медленно протекающими химическими реакциями, имеют существенно различные характерные времена, решаемая система дифференциальных уравнений становится жёсткой [43]. Для численного решения жестких систем дифференциальных уравнений используют неявные методы, что приводит к системе нелинейных уравнений:

$$\rho_{i,l}^{n+1/2} = \rho_{i,l}^n + \dot{\omega}_{i,l}(\rho_{i,l}^{n+1/2}) \Delta t_{\min}. \quad (30)$$

Для решения данной системы нелинейных уравнений используется итерационный метод Ньютона, в основе которого лежит линеаризация исходной системы уравнений [64]:

$$\rho_{i,l}^{n+1/2} = \tilde{\rho}_{i,l}^n - W^{-1}(\tilde{\rho}_{i,l}^n) f(\tilde{\rho}_{i,l}^n), \quad (31)$$

где матрица Якоби –

$$W_l = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\tilde{\rho}_1^n)}{\partial \tilde{\rho}_1^n} & \dots & \frac{\partial f(\tilde{\rho}_1^n)}{\partial \tilde{\rho}_{N_s-1}^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(\tilde{\rho}_{N_s-1}^n)}{\partial \tilde{\rho}_1^n} & \dots & \frac{\partial f(\tilde{\rho}_{N_s-1}^n)}{\partial \tilde{\rho}_{N_s-1}^n} \end{pmatrix},$$

$$f(\tilde{\rho}_{i,l}^n) = \tilde{\rho}_{i,l}^n - \rho_{i,l}^n - \dot{\omega}_{i,l}^n(\tilde{\rho}_{i,l}^n) \Delta t_{\min}.$$

Записав, что $\rho_{i,l}^{n+1/2} = \tilde{\rho}_{i,l}^n + \Delta x_{i,l}$ получаем СЛАУ $\Delta x_{i,l} W_l(\tilde{\rho}_{i,l}^n) = -f(\tilde{\rho}_{i,l}^n)$, решающуюся относительно вектора поправки $\Delta x_{i,l}$. Для решения данной СЛАУ используется классический метод исключения Гаусса, относящийся к прямым методам.

В качестве начального приближения используются значения с n -го временного слоя. Критерием останковки итерационного процесса является условие максимальной относительной погрешности изменения химических компонент газовой смеси – $\max \left| \frac{\rho_{i,l}^{n+1/2} - \tilde{\rho}_{i,l}^n}{\tilde{\rho}_{i,l}^n} \right| < 10^{-2}$.

$$\max \left| \frac{\rho_{i,l}^{n+1/2} - \tilde{\rho}_{i,l}^n}{\tilde{\rho}_{i,l}^n} \right| < 10^{-2}.$$

На втором шаге учитываются вклады конвективных и диффузионных членов в изменение химических компонент газовой смеси. Проводится численное интегрирование методом конечного объёма, аналогично описанного ранее. В результате конечно – объёмная аппроксимация системы уравнений химической кинетики записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \rho_{i,l}^{n+1} = \rho_{i,l}^{n+1/2} - \frac{\Delta t_l}{V_l} & \left(\sum_{j=1}^N F(\rho u Y_i)_{l,j}^n n_{x_{l,j}} S_{l,j} + \sum_{j=1}^N F(\rho v Y_i)_{l,j}^n n_{y_{l,j}} S_{l,j} + \sum_{j=1}^N F(\rho w Y_i)_{l,j}^n n_{z_{l,j}} S_{l,j} + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^N J_{x_{i,l,j}}^n n_{x_{l,j}} S_{l,j} + \sum_{j=1}^N J_{y_{i,l,j}}^n n_{y_{l,j}} S_{l,j} + \sum_{j=1}^N J_{z_{i,l,j}}^n n_{z_{l,j}} S_{l,j} \right) \end{aligned} \quad (32)$$

3.3 Вычисление температуры газовой смеси

Расчёт температуры смеси химически реагирующих газов основан на решении системы нелинейных уравнений. Система нелинейных уравнений состоит из аппроксимаций температурной зависимости энтальпий химических компонент газовой смеси, для решения которой используется итерационный метод Ньютона:

$$\tilde{T}_l^{n+1} = \tilde{T}_l^n - \frac{f(\tilde{T}_l^n)}{f'(\tilde{T}_l^n)}, \quad (33)$$

где $f(\tilde{T}_l^n) = \sum_{i=1}^{N_s} Y_{i,l}^{n+1} \left[\tilde{T}_l^n \left(\varphi_{2,i} - 2\varphi_{3,i} x^{-2} - \varphi_{4,i} x^{-1} + \varphi_{5,i} x + 2\varphi_{6,i} x^2 + 3\varphi_{7,i} x^3 \right) + \varphi_{8,i} \cdot 10^3 \right] -$

$$-\tilde{T}_l^n \frac{R_0}{M_\Sigma} - \tilde{\epsilon}_l^{n+1},$$

$$f'(\tilde{T}) = \sum_{i=1}^{N_s} Y_{i,l}^{n+1} \left[\varphi_{2,i} + 2\varphi_{3,i} x^{-2} + 2\varphi_{5,i} x + 6\varphi_{6,i} x^2 + 12\varphi_{7,i} x^3 \right] - \frac{R_0}{M_\Sigma}.$$

В качестве начального приближения используются значения с n -го временного слоя. Критерием остановки итерационного процесса является условие относительной погрешности изменения температуры газовой смеси

$$- \left| \frac{\tilde{T}_l^{n+1} - \tilde{T}_l^n}{\tilde{T}_l^n} \right| < 10^{-2}.$$

3.4 Численная реализация граничных условий

Численная реализация граничных условий основана на использование фиктивных ячеек, прилегающих к каждой границе расчётной области [62]. В фиктивных ячейках задаются значения функций, соответствующие типу граничного условия.

Для входной границы значения функций задаются в соответствии с условиями невозмущённого потока.

На выходной границе значения функций в фиктивных ячейках задаются линейной экстраполяцией переменных из расчётной области.

На границе симметрии обеспечивается условие равенства нулю нормальной составляющей вектора скорости:

$$\vec{V}_k = \vec{V}_l - 2(\vec{V}_l \cdot \vec{n}_{l,j}) \vec{n}_{l,j}, \quad (34)$$

где с индексом « k » значение вектора скорости в фиктивной ячейке. Значения остальных функций в фиктивных ячейках задаются линейной экстраполяцией переменных из расчётной области.

На поверхности обтекаемого тела задаются условия прилипания и изотермической стенки:

$$u_k = -u_l, \quad v_k = -v_l, \quad w_k = -w_l, \quad T_k = 2T_w - T_l, \quad (35)$$

где T_w – температура стенки.

Выводы по главе

Описан численный метод конечного объема повышенного порядка аппроксимации по пространству для решения систем уравнений газовой динамики и химической кинетики. Данный численный метод реализован в компьютерном коде ГРАТ.

ГЛАВА 4. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Одним из способов проверки достоверности вычислительной модели является проведение валидации, анализа соответствия результатов численного моделирования экспериментальным данным. Валидация полученных результатов расчетов является одним из основных моментов при моделировании аэротермодинамических характеристик высокоскоростных летательных аппаратов [65, 66].

В данной главе представлены результаты валидации компьютерного кода ГРАТ, подтверждающие достоверность используемой вычислительной модели для моделирования аэродинамических характеристик на трансзвуковых, сверхзвуковых и гиперзвуковых режимах обтекания.

4.1 Трансзвуковое обтекание реактивного снаряда

Экспериментальные исследования трансзвукового обтекания реактивного снаряда SOCBT проводились в центре авиационных исследований NASA Langley Research Center [67], на базе которого разрабатывался и тестировался гиперзвуковой летательный аппарат X-43. Обтекание реактивного снаряда SOCBT проводилось в установке 8-Foot Transonic Pressure Tunnel, способной обеспечить необходимые трансзвуковые режимы. Основной целью серии экспериментальных исследований являлось создание валидационного базиса для проверки достоверности вычислительных моделей на околозвуковых скоростях, на основе экспериментально полученных поверхностных распределений коэффициента давления. В широком диапазоне трансзвуковых скоростей и углов атаки были получены экспериментальные данные по распределению коэффициента давления на поверхности реактивного снаряда, на основе которых проводилась валидация вычислительной модели, представленной в данной работе.

4.1.1 Постановка задачи

На основе численного решения системы уравнений Навье – Стокса, описанного в главе 1, было проведено моделирование обтекания реактивного снаряда транзвуковым потоком вязкого совершенного газа. Геометрические размеры объекта приведены на рисунке 4.1.1.

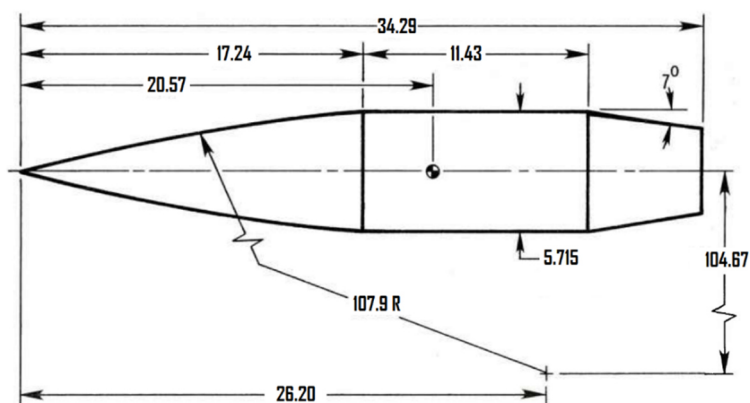


Рисунок 4.1.1 – Геометрические размеры реактивного снаряда SOCBT

В качестве начальных условий для численного моделирования использовались данные, взятые из работы [67], приведённые в таблице 4.1.1. Расчеты проводились для четырёх режимов транзвукового обтекания под тремя углами атаки: 0, 6 и 10 градусов.

Таблица 4.1.1 – Исходные данные для моделирования транзвукового обтекания реактивного снаряда SOCBT

M_∞	1.10	0.98	0.96	0.94
P_∞ , атм	0.47	0.54	0.55	0.57
T_∞ , К	272	272	272	272

Численное моделирование трёхмерного поля течения около реактивного снаряда проводилось на неструктурированной сетке. Вблизи поверхности снаряда для более детального описания поля течения в пристеночной области осуществлялось сгущение расчётной сетки. Трёхмерная сетка состояла из тетраэдральных элементов, где количество ячеек в расчётной области составило 8 968 601 (рисунок 4.1.2).

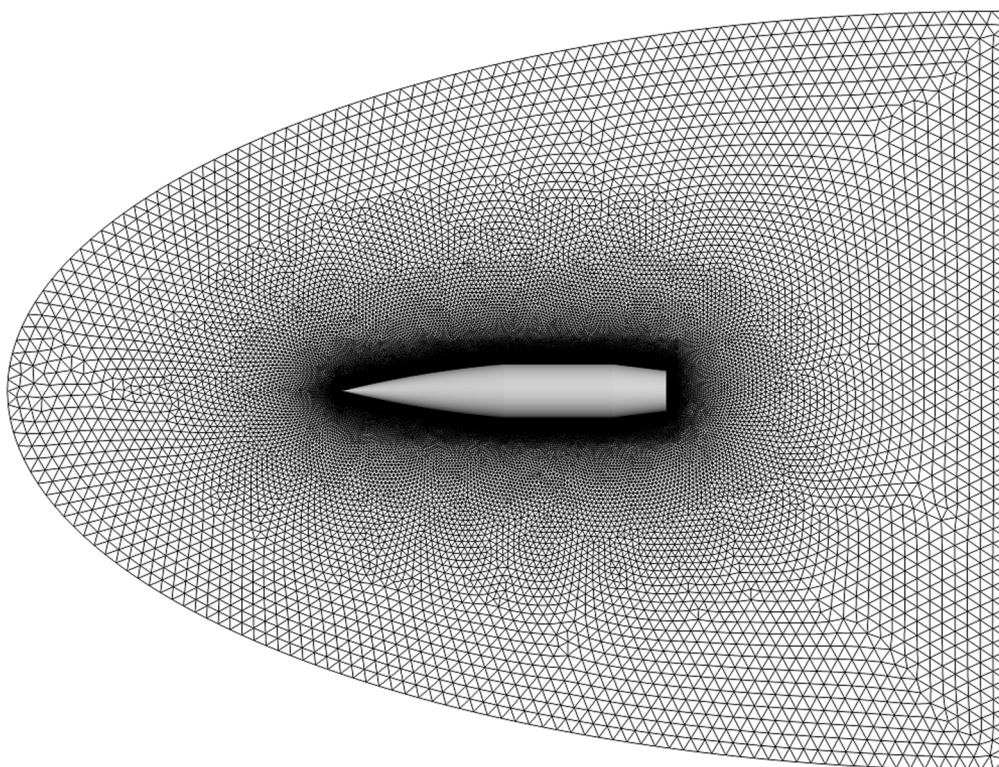


Рисунок 4.1.2 – Расчётная сетка реактивного снаряда SOCBT

На поверхности обтекаемого тела ставились граничные условия прилипания. Температура поверхности задавалась постоянной, 300 К. С целью исключения влияния граничных условий на распределение давления на поверхности снаряда, дополнительно проводились расчёты с теплоизолированной стенкой.

Квазистационарное поле течения было получено в результате численного решения методом установления.

4.1.2 Результаты валидации

На рисунках 4.1.3 – 4.1.26 представлены распределения коэффициента давления, полученные в результате численного моделирования четырёх режимов трансзвукового обтекания снаряда под тремя углами атаки. Как видно на графиках полученное в результате расчётов квазистационарное поле течения валидировалось с экспериментальными данными поверхностного распределения коэффициента давления.

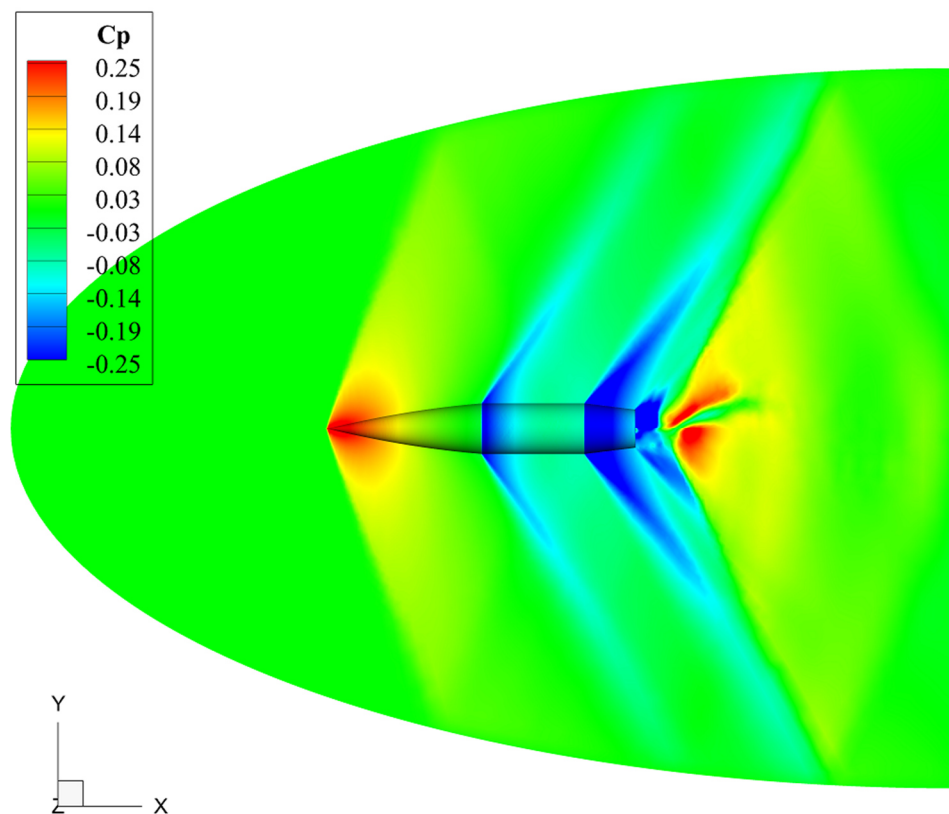


Рисунок 4.1.3 – Распределение коэффициента давления в окрестности снаряда, $M = 1.1$, угол атаки $\alpha = 0^\circ$

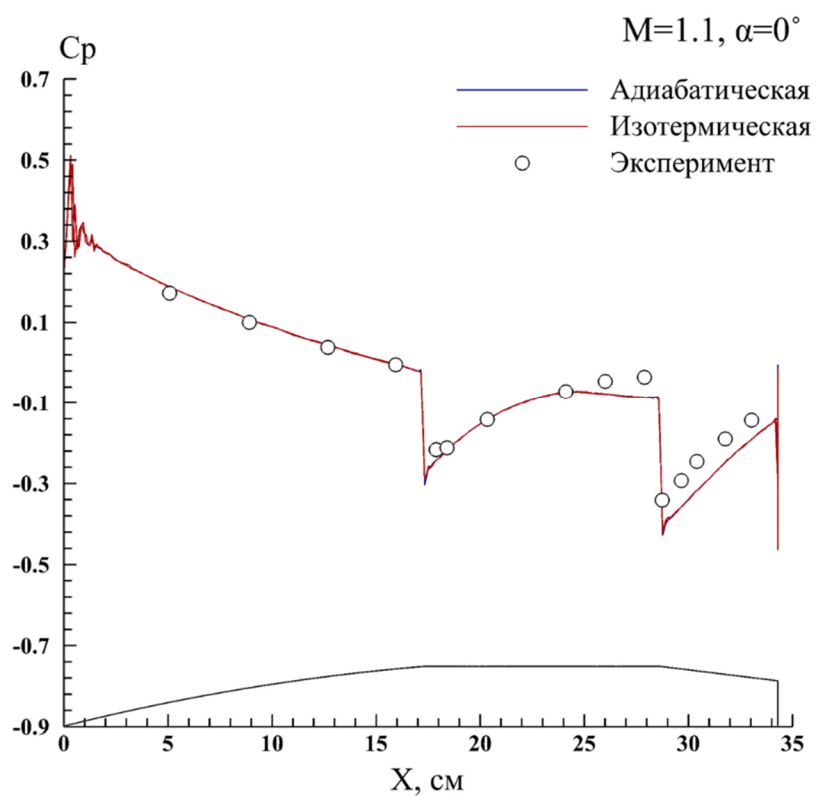


Рисунок 4.1.4 – Распределение коэффициента давления на поверхности снаряда, $M = 1.1$, угол атаки $\alpha = 0^\circ$

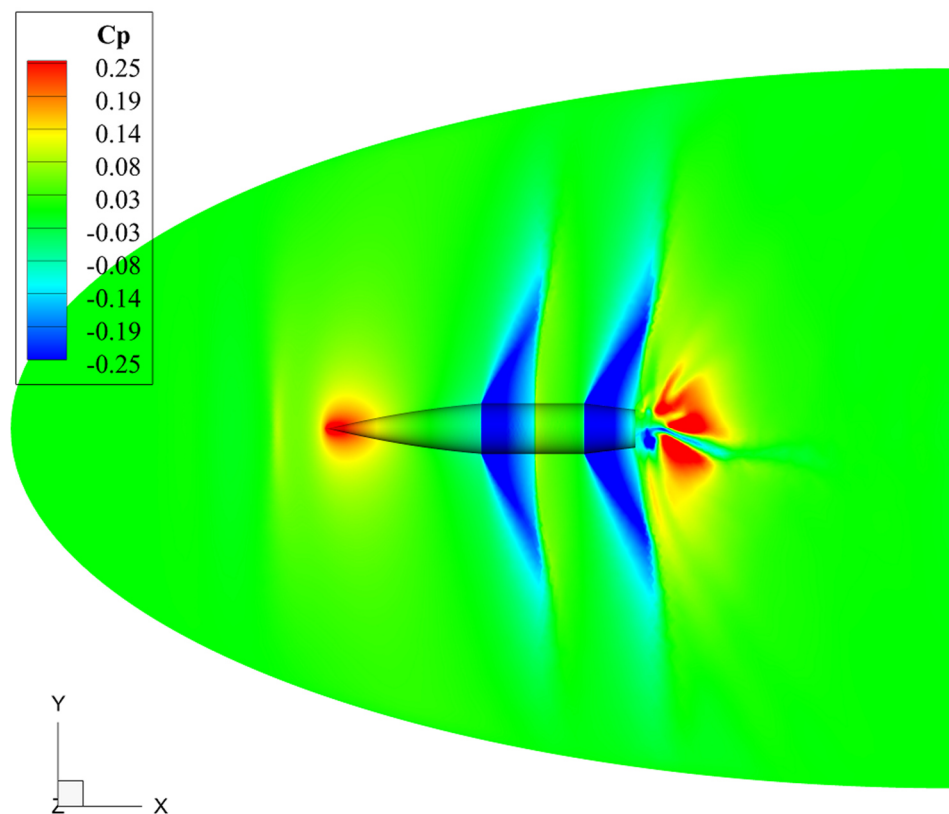


Рисунок 4.1.5 – Распределение коэффициента давления в окрестности снаряда, $M = 0.98$, угол атаки $\alpha = 0^\circ$

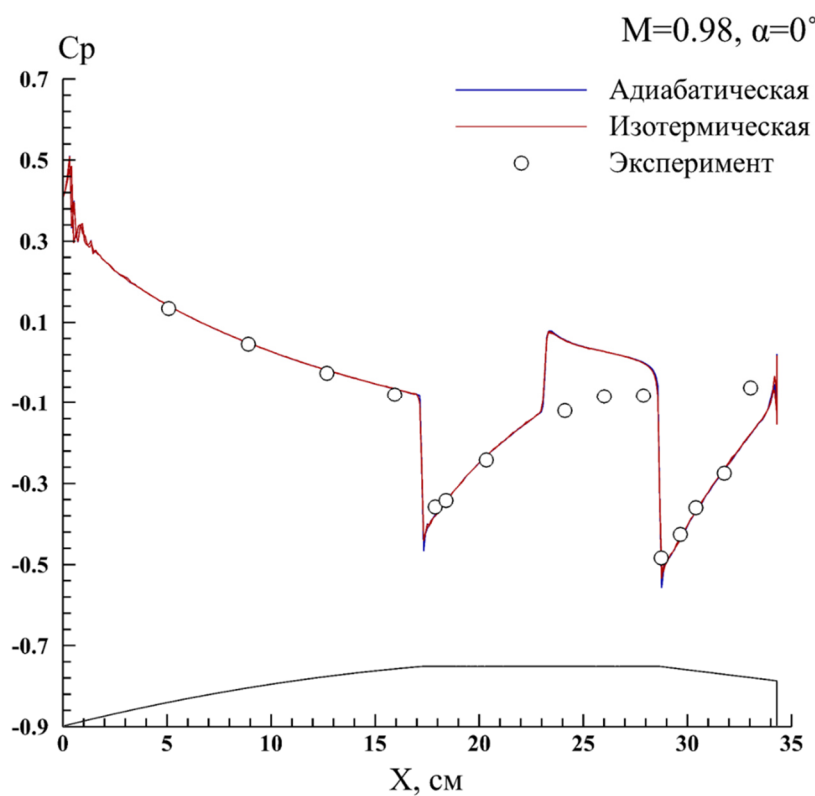


Рисунок 4.1.6 – Распределение коэффициента давления на поверхности снаряда, $M = 0.98$, угол атаки $\alpha = 0^\circ$

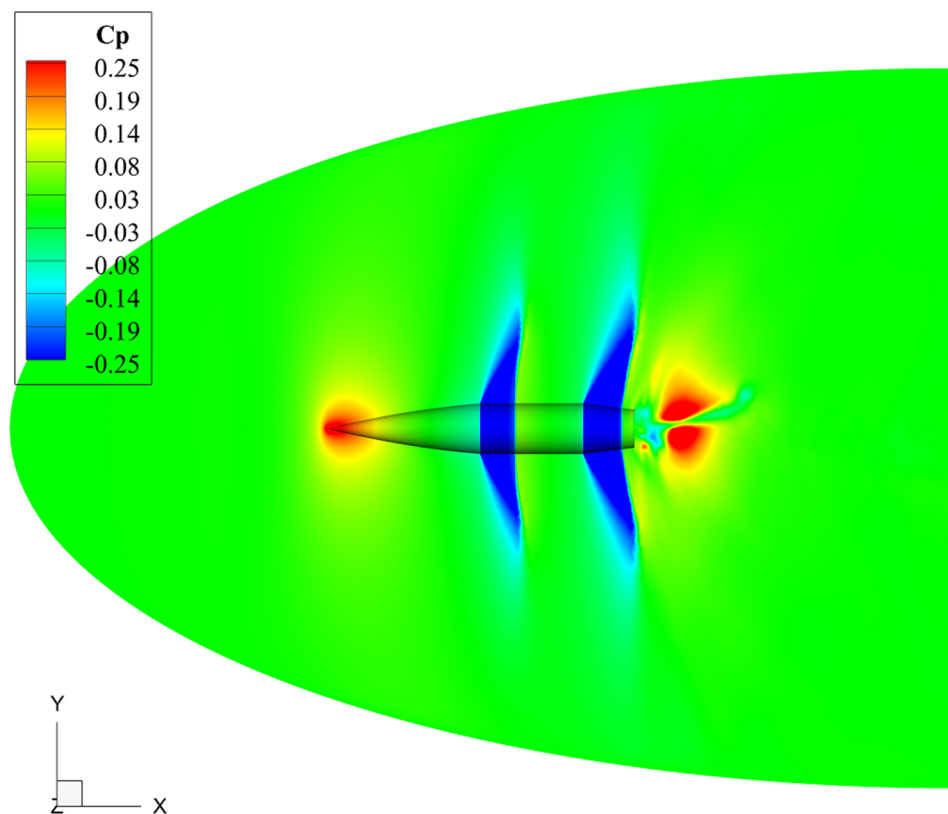


Рисунок 4.1.7 – Распределение коэффициента давления в окрестности снаряда, $M = 0.96$, угол атаки $\alpha = 0^\circ$

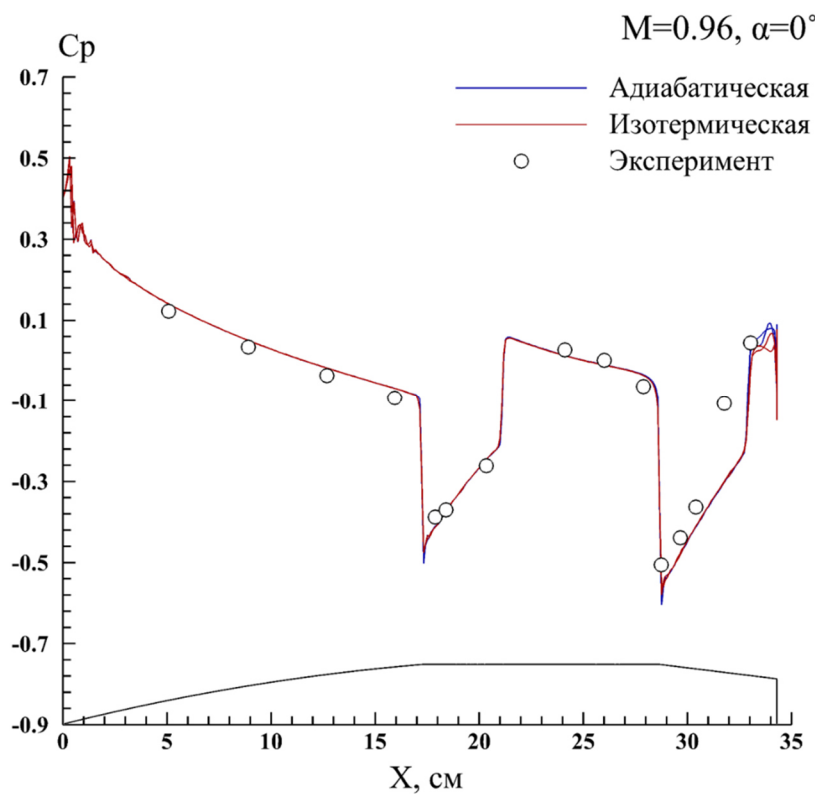


Рисунок 4.1.8 – Распределение коэффициента давления на поверхности снаряда, $M = 0.96$, угол атаки $\alpha = 0^\circ$

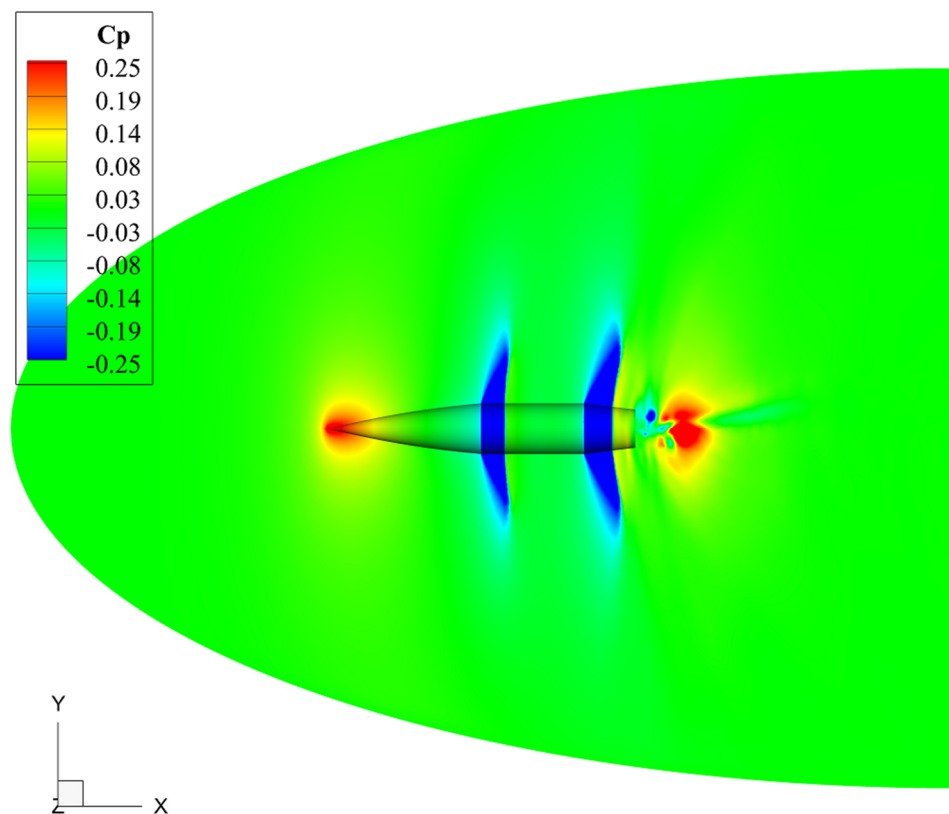


Рисунок 4.1.9 – Распределение коэффициента давления в окрестности снаряда, $M = 0.94$, угол атаки $\alpha = 0^\circ$

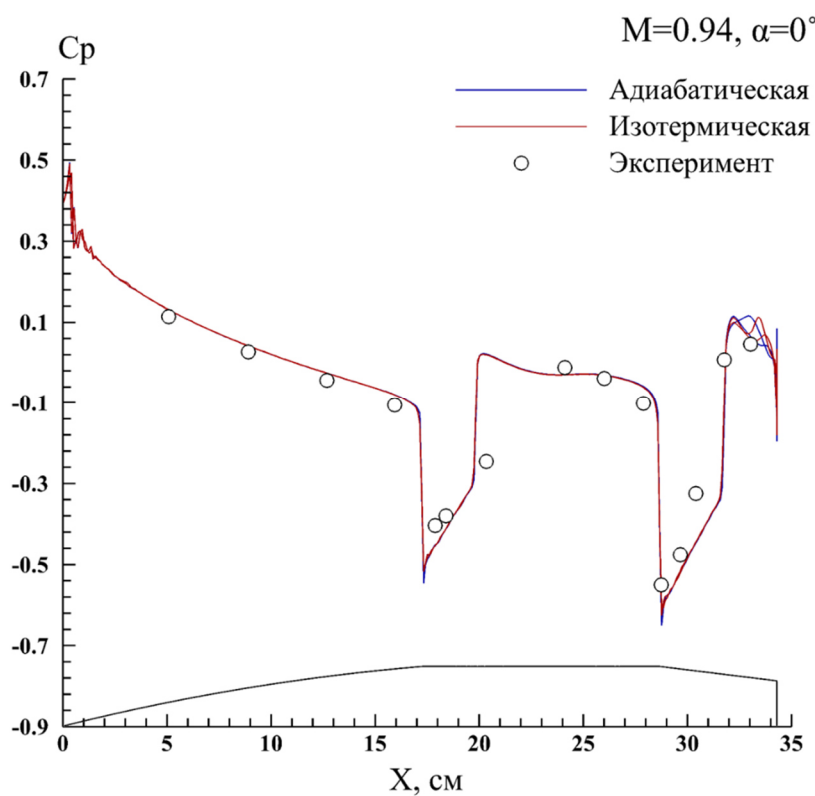


Рисунок 4.1.10 – Распределение коэффициента давления на поверхности снаряда, $M = 0.94$, угол атаки $\alpha = 0^\circ$

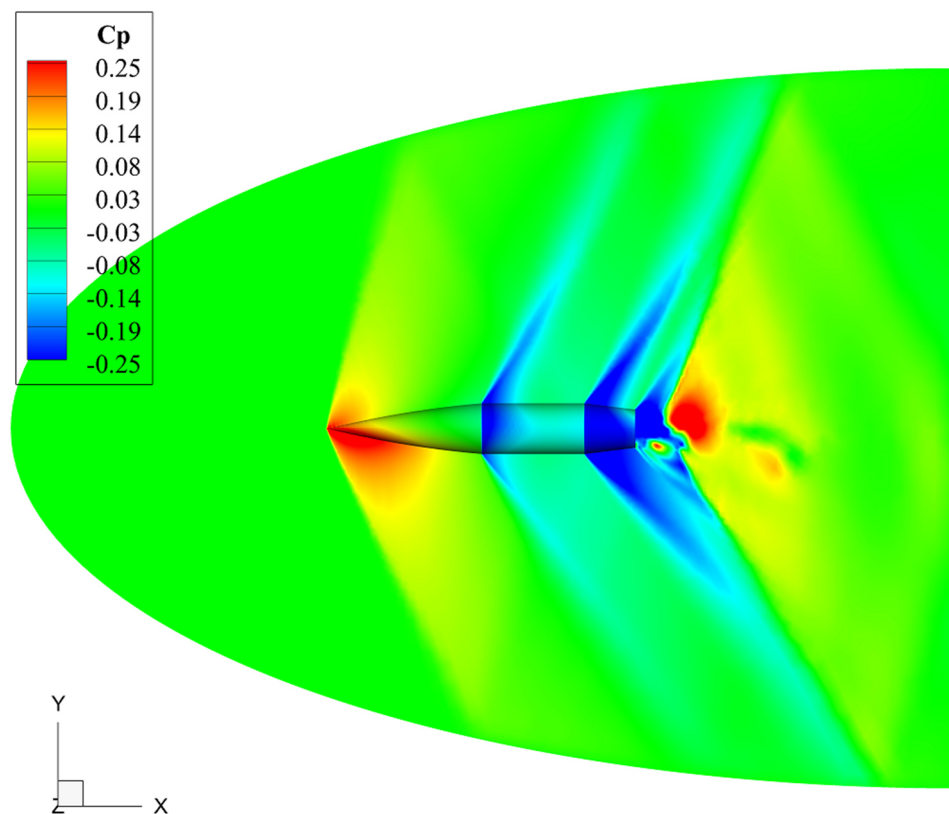


Рисунок 4.1.11 – Распределение коэффициента давления в окрестности снаряда, $M = 1.1$, угол атаки $\alpha = 6^\circ$

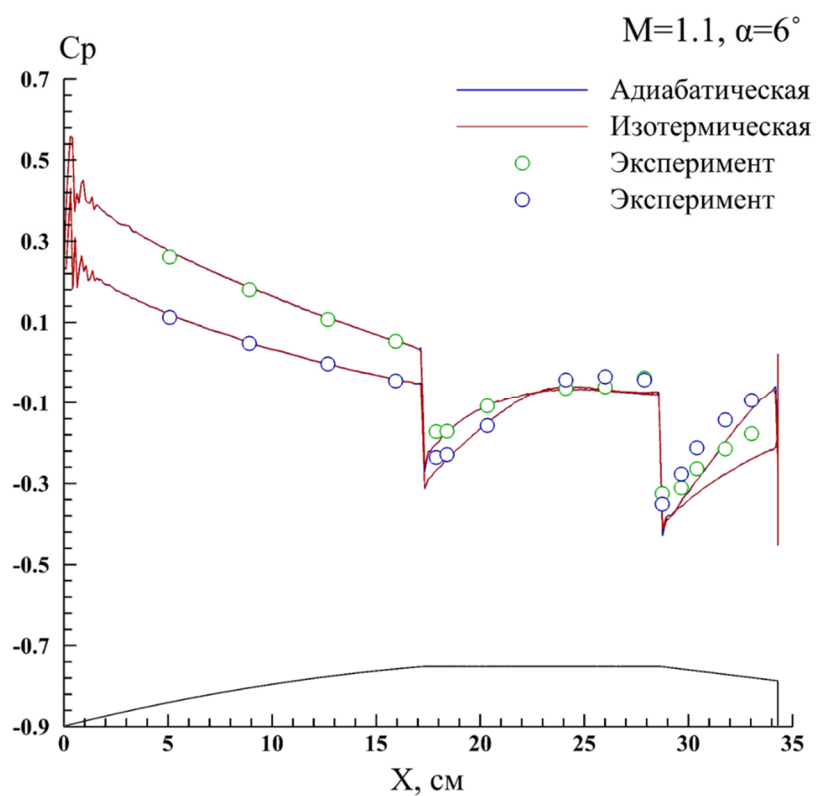


Рисунок 4.1.12 – Распределение коэффициента давления на поверхности снаряда, $M = 1.1$, угол атаки $\alpha = 6^\circ$

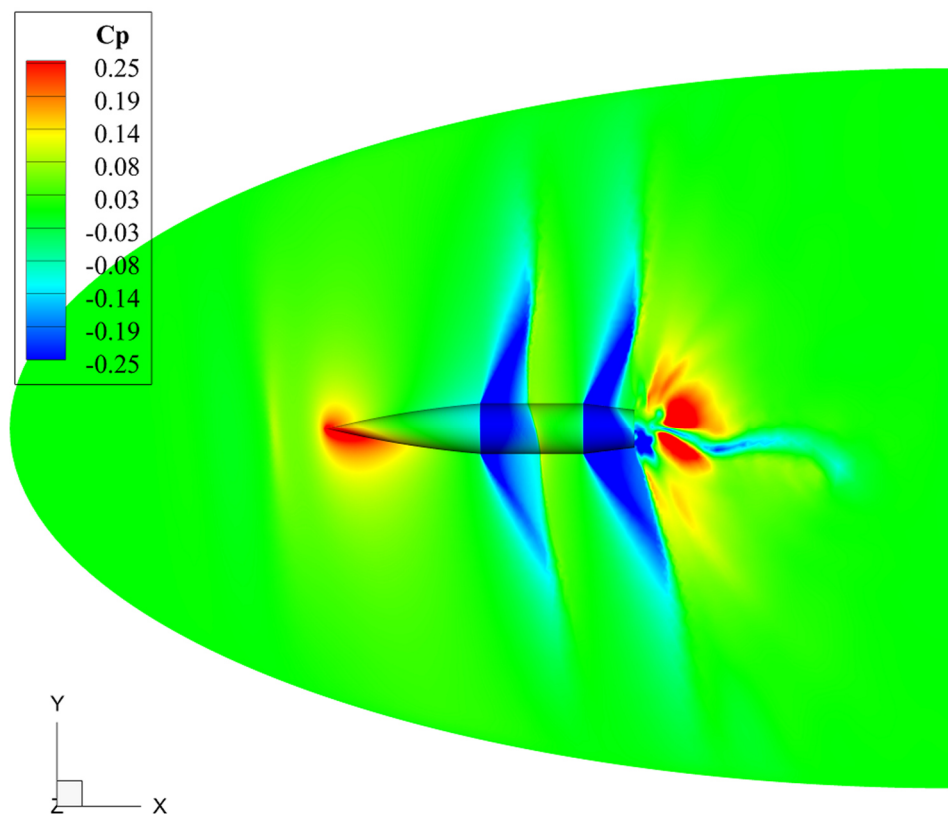


Рисунок 4.1.13 – Распределение коэффициента давления в окрестности снаряда, $M = 0.98$, угол атаки $\alpha = 6^\circ$

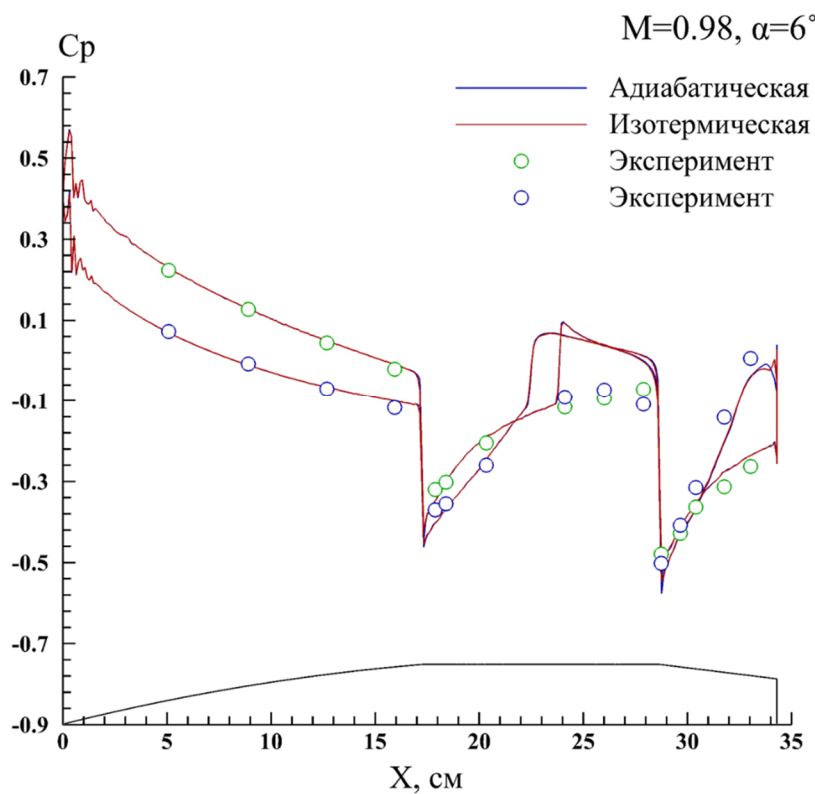


Рисунок 4.1.14 – Распределение коэффициента давления на поверхности снаряда, $M = 0.98$, угол атаки $\alpha = 6^\circ$

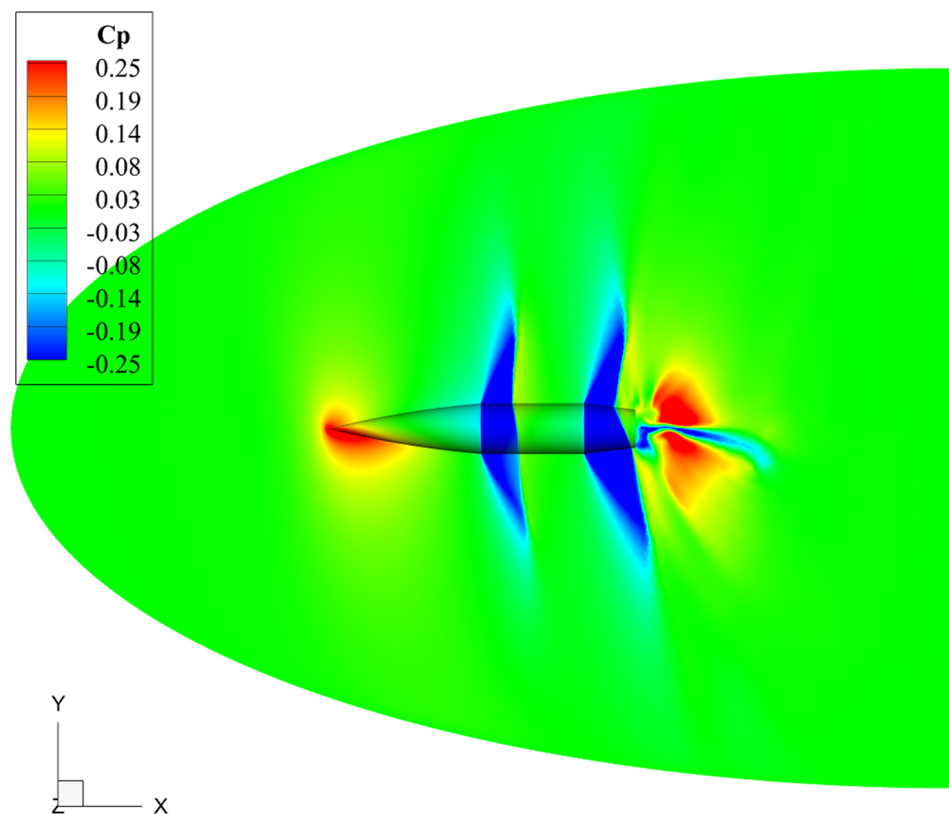


Рисунок 4.1.15 – Распределение коэффициента давления в окрестности снаряда, $M = 0.96$, угол атаки $\alpha = 6^\circ$

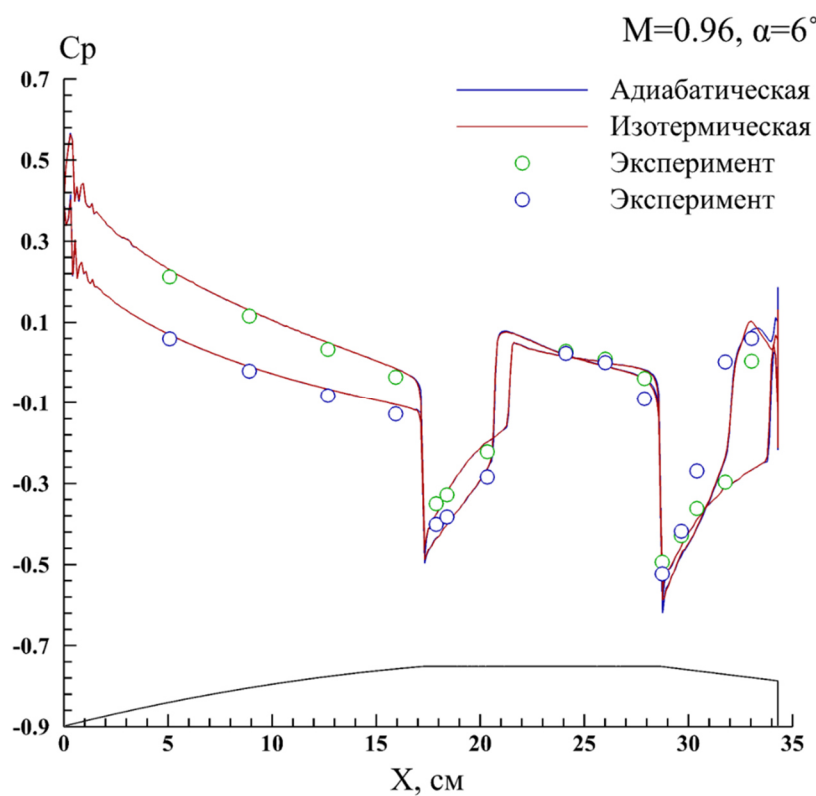


Рисунок 4.1.16 – Распределение коэффициента давления на поверхности снаряда, $M = 0.96$, угол атаки $\alpha = 6^\circ$

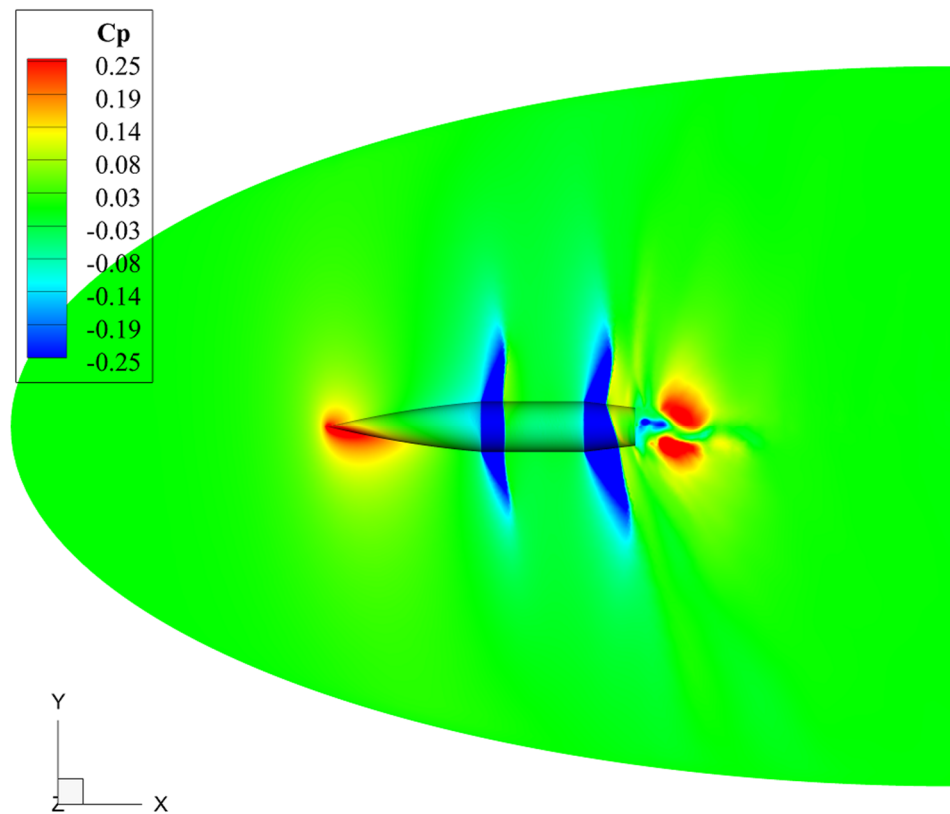


Рисунок 4.1.17 – Распределение коэффициента давления в окрестности снаряда, $M = 0.94$, угол атаки $\alpha = 6^\circ$

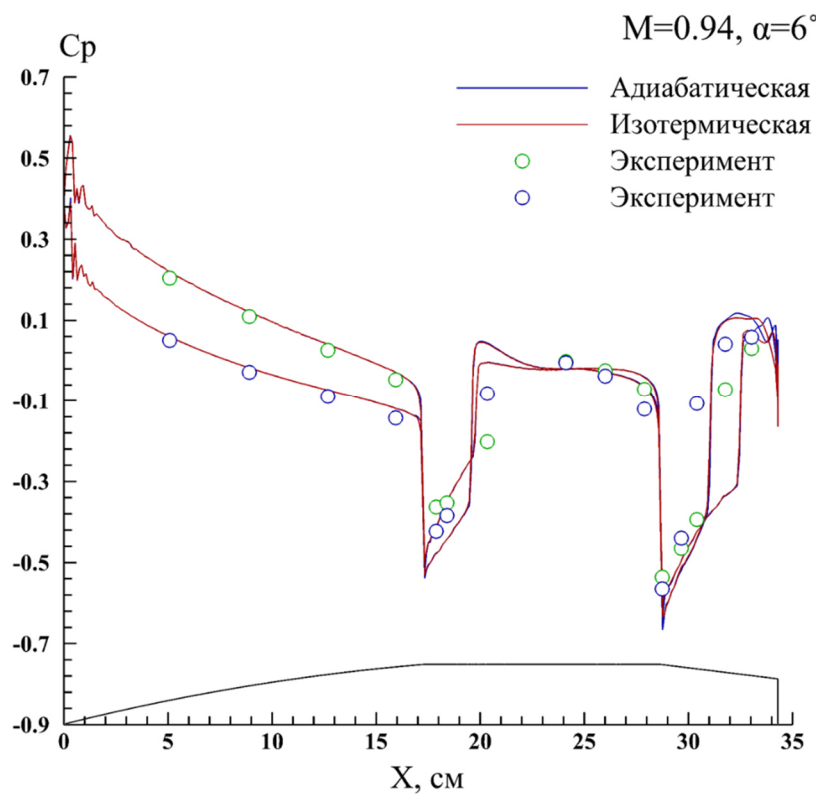


Рисунок 4.1.18 – Распределение коэффициента давления на поверхности снаряда, $M = 0.94$, угол атаки $\alpha = 6^\circ$

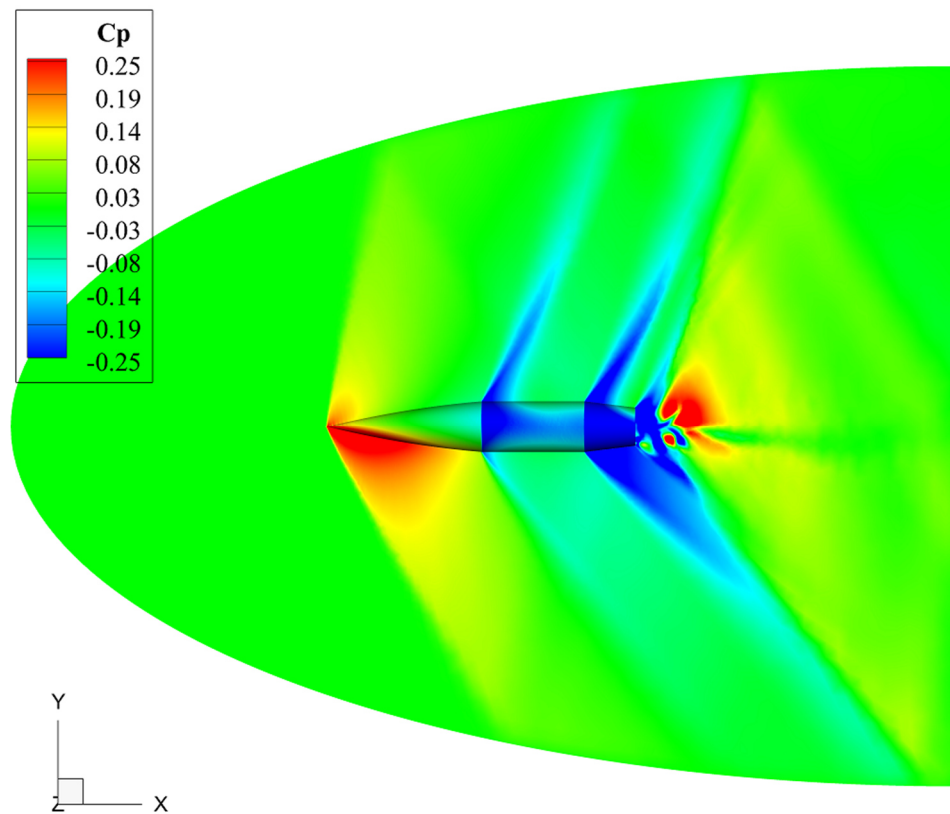


Рисунок 4.1.19 – Распределение коэффициента давления в окрестности снаряда, $M = 1.1$, угол атаки $\alpha = 10^\circ$

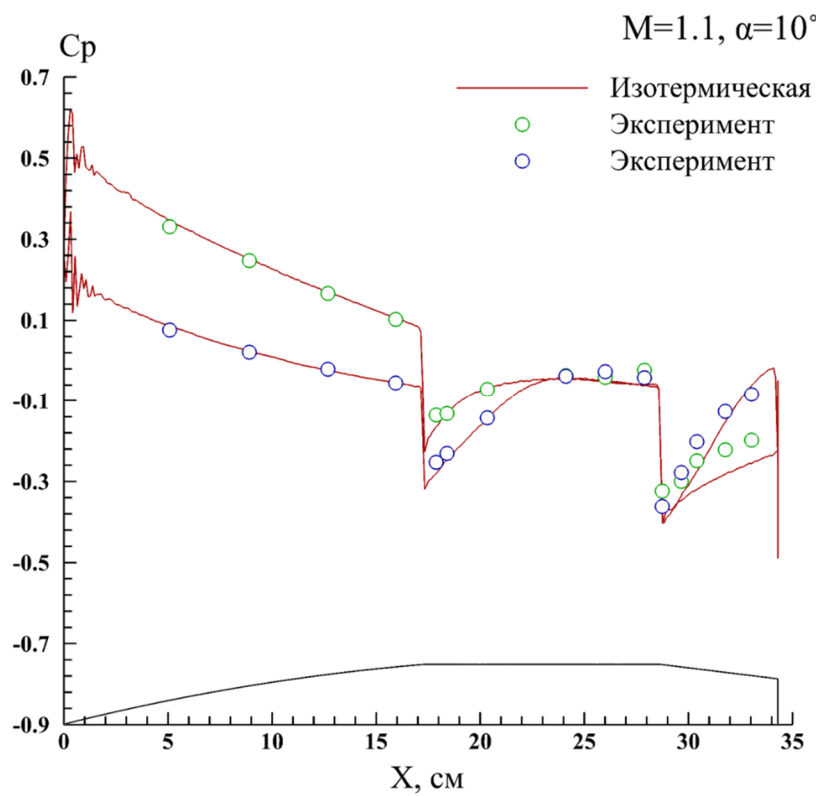


Рисунок 4.1.20 – Распределение коэффициента давления на поверхности снаряда, $M = 1.1$, угол атаки $\alpha = 10^\circ$

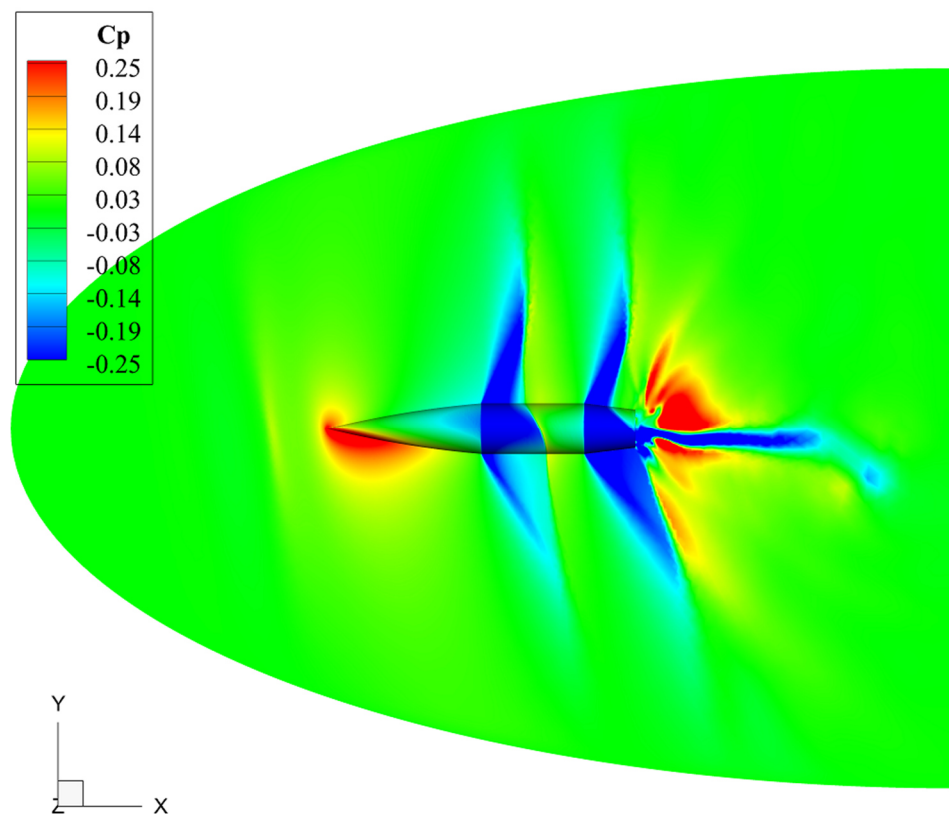


Рисунок 4.1.21 – Распределение коэффициента давления в окрестности снаряда, $M = 0.98$, угол атаки $\alpha = 10^\circ$

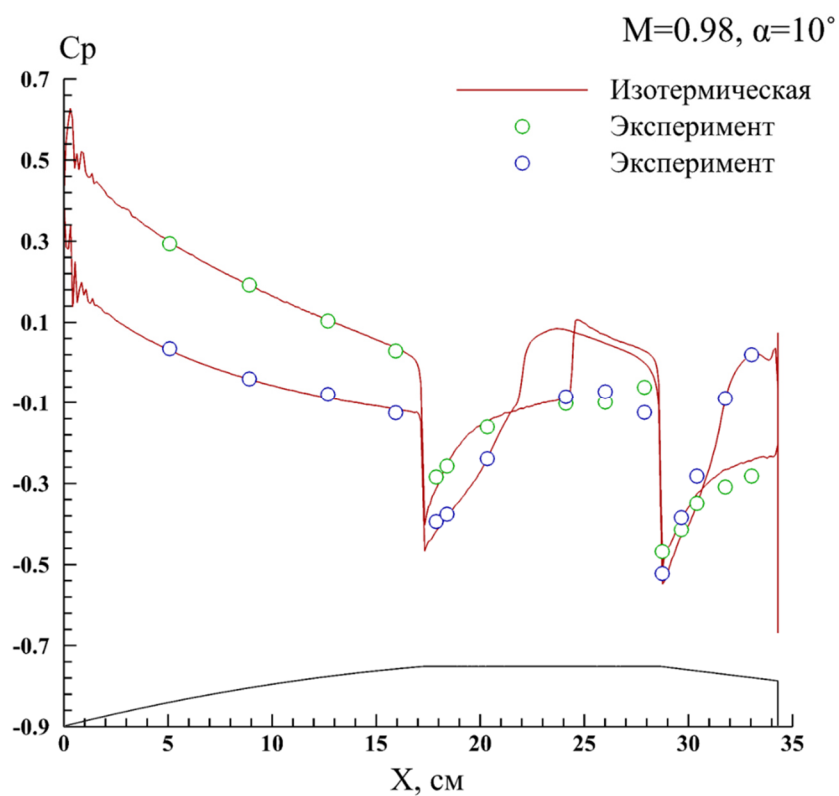


Рисунок 4.1.22 – Распределение коэффициента давления на поверхности снаряда, $M = 0.98$, угол атаки $\alpha = 10^\circ$

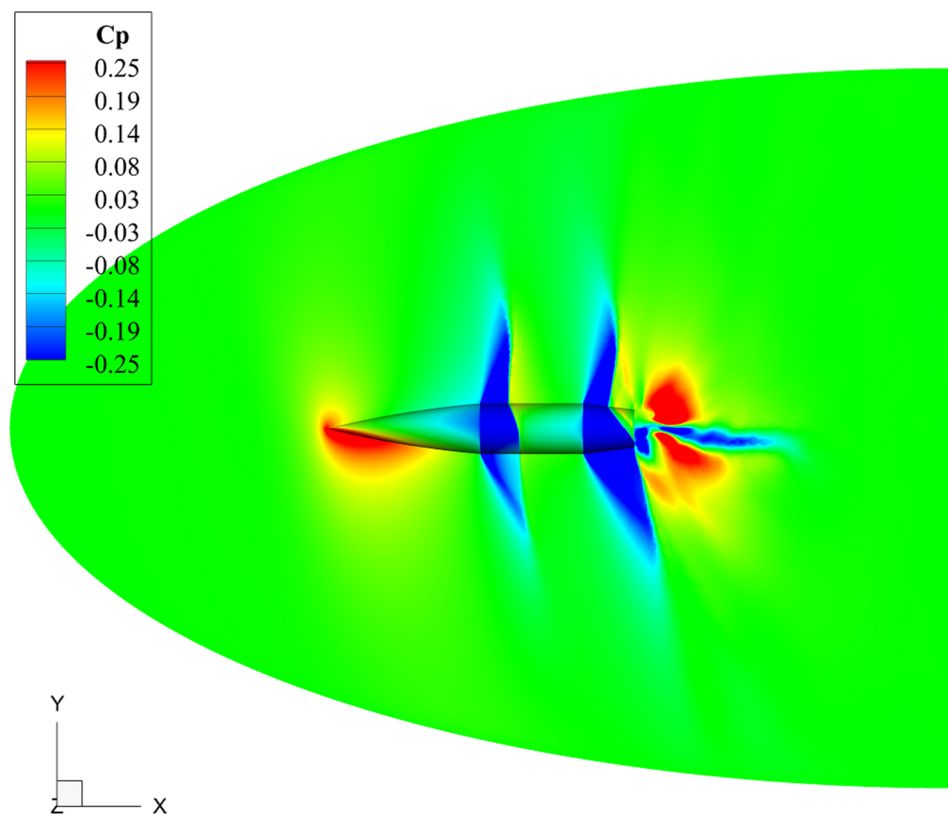


Рисунок 4.1.23 – Распределение коэффициента давления в окрестности снаряда, $M = 0.96$, угол атаки $\alpha = 10^\circ$

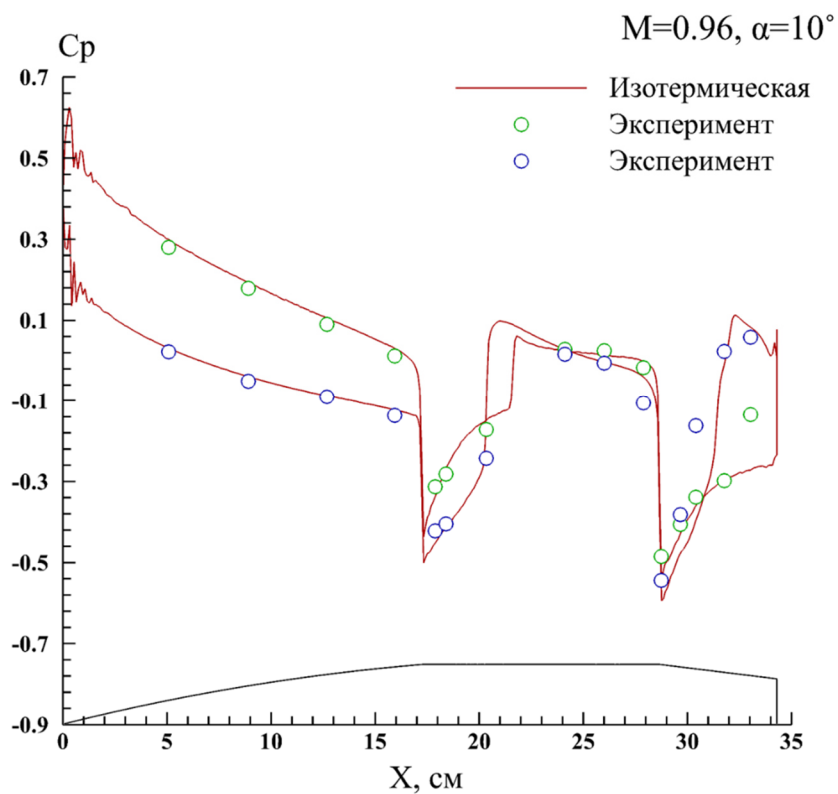


Рисунок 4.1.24 – Распределение коэффициента давления на поверхности снаряда, $M = 0.96$, угол атаки $\alpha = 10^\circ$

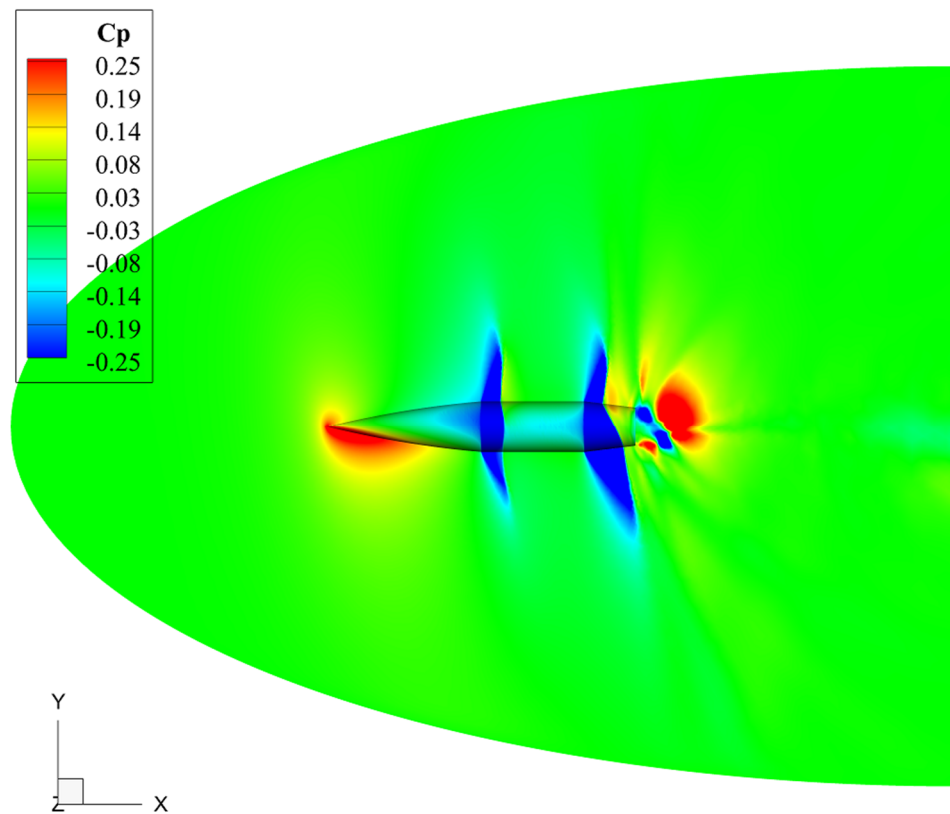


Рисунок 4.1.25 – Распределение коэффициента давления в окрестности снаряда, $M = 0.94$, угол атаки $\alpha = 10^\circ$

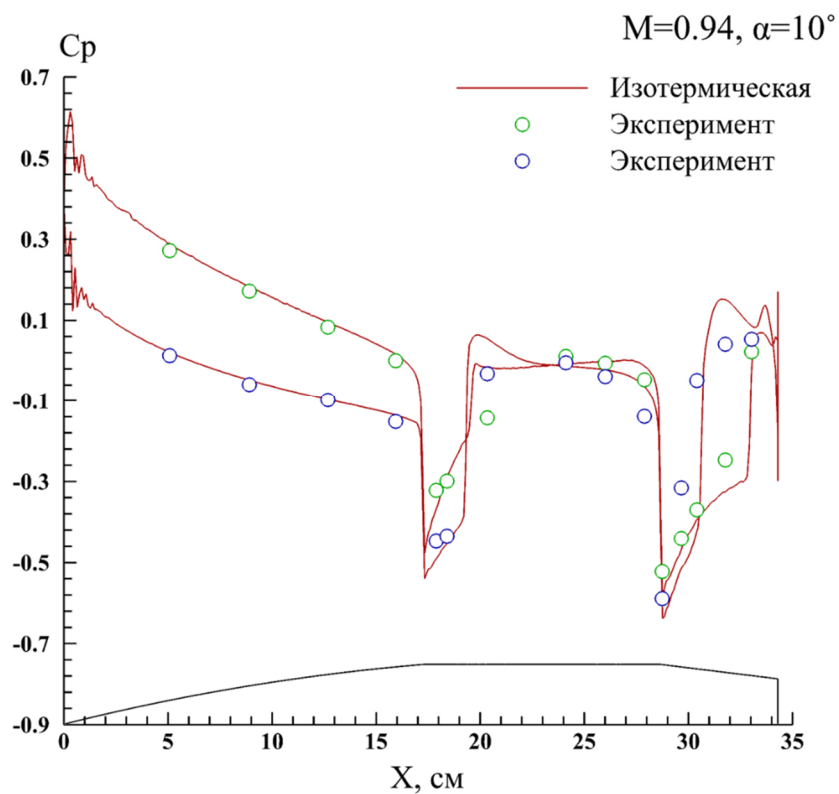


Рисунок 4.1.26 – Распределение коэффициента давления на поверхности снаряда, $M = 0.94$, угол атаки $\alpha = 10^\circ$

На распределении поверхностного давления в области носовой части тела наблюдаются осцилляции вследствие того, что расчётная сетка не позволяет с высокой точностью описать острую конфигурацию поверхности носовой части объекта. Из представленных результатов видно, что поверхностные распределения, полученные в результате расчётов, проводимых с теплоизолированной стенкой, практически полностью соответствуют расчётам с постоянной температурой стенки и хорошо согласуются с экспериментальными данными во всём диапазоне трансзвуковых режимов.

4.2 Сверхзвуковое и гиперзвуковое обтекание затупленных тел

Созданию первых аэродинамических установок в ЦАГИ позволяющих обеспечить гиперзвуковые режимы обтекания способствовала необходимость определения коэффициента сопротивления головных частей баллистических ракет и спускаемых аппаратов. В результате серии экспериментальных исследований аэродинамических характеристик затупленных тел вращения в гиперзвуковых потоках, проводившихся в аэродинамической трубе ЦАГИ [68], были получены данные по коэффициенту сопротивления для широкого диапазона высокоскоростных режимов. На основе экспериментальных данных ЦАГИ, представленных в работе [68] по обтеканию сферы высокоскоростным потоком проводилась валидация вычислительной модели, представленной в данной работе.

4.2.1 Постановка задачи

На основе численного решения системы уравнений газовой динамики, описанного в главе 1, было проведено моделирование обтекания сферы диаметром 1 см высокоскоростным потоком вязкого совершенного газа. Расчёты проводилось в диапазоне чисел Маха от 2 до 12, с шагом в один Мах, для $Re = 10^6$.

Численное моделирование трёхмерного поля течения около сферы проводилось на неструктурированной сетке, со сгущением в пристеночной

области для повышения точности получения интегральной характеристики течения. Трёхмерная сетка состояла из тетраэдральных элементов, где количество ячеек в расчётной области составило 2 920 576 (рисунок 4.2.1).

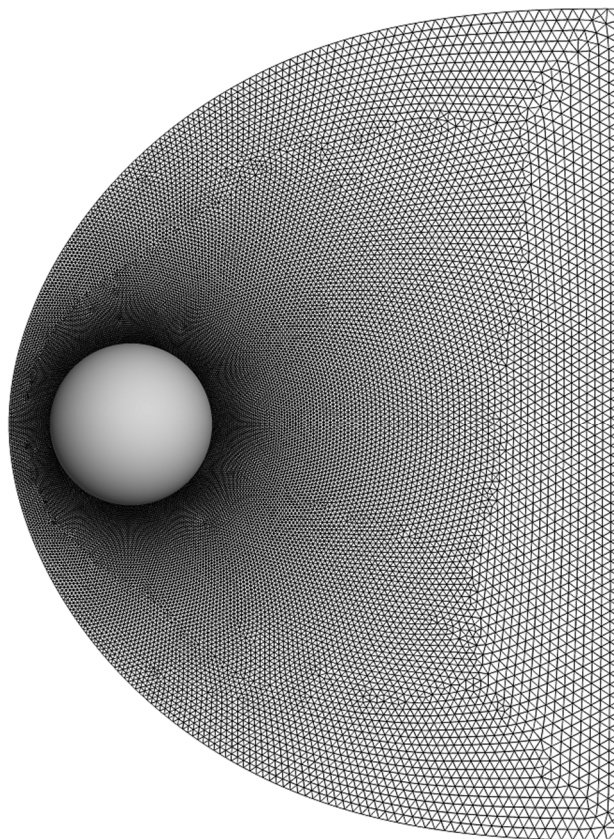


Рисунок 4.2.1 – Тетраэдральная расчётная сетка

На поверхности обтекаемого тела ставились граничные условия прилипания. Температура поверхности задавалась постоянной, 300 К.

Вследствие того, что в решаемой задаче вклад трения в суммарный коэффициент сопротивления на порядок меньше вклада давления, в расчётах, проводимых на тетраэдральной сетке, отсутствовало разрешение пограничного слоя. Но для оценки влияния сеточной зависимости проводились дополнительные расчёты на квазирегулярной неструктурированной сетке со сгущением призматическими элементами в градиентных областях течения обтекаемого тела. Такой тип сетки позволяет разрешить тонкие области течения, образующиеся в ударном слое и у поверхности обтекаемого тела на сверхзвуковых и гиперзвуковых режимах, сократив при этом количество расчётных элементов. Количество ячеек в расчётной области квазирегулярной сетки составило 1 117 730 (рисунок 4.2.2).

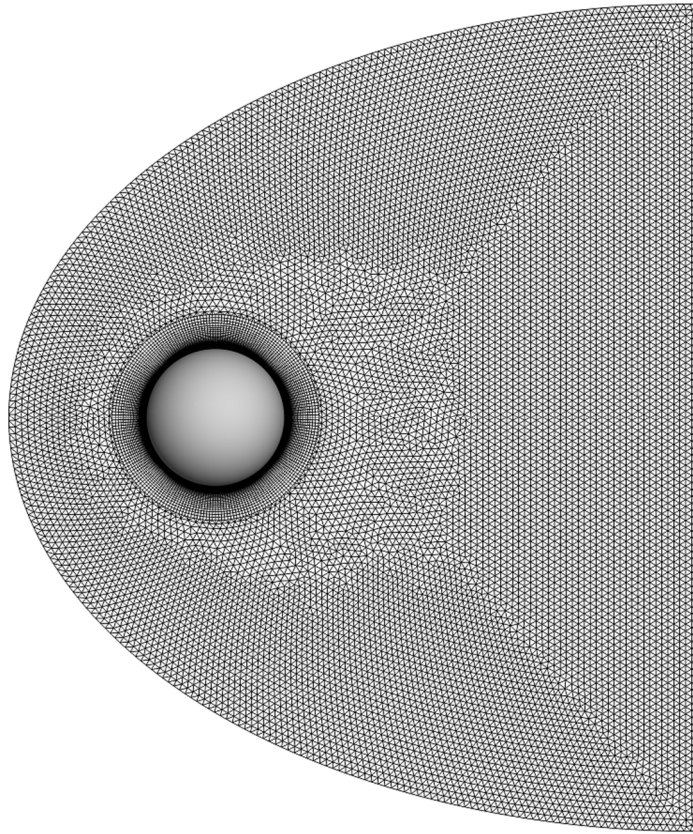


Рисунок 4.2.2 – Квазирегулярная расчётная сетка

Так же в решаемой задаче имеет место проявление численной неустойчивости сильных ударных волн зависимой от вносимой в численную схему методом пространственной аппроксимации невязкого потока искусственной вязкости [8, 9]. С повышением порядка точности пространственной аппроксимации на сильно нерегулярных тетраэдральных сетках численная неустойчивость может усиливаться [69] (рисунок 4.2.3). В связи с этим для сохранения свойств монотонности численной схемы в области сильных ударных волн использовался дополнительный ограничитель, позволяющий сохранить первый порядок точности в области сильного сжатия дозвукового течения [70] (рисунок 4.2.4).

$$\alpha_j = \begin{cases} 0, & \text{если } M_l < 1 \text{ и } \frac{\rho_l}{\rho_\infty} > 2 \\ 0, & \text{если } M_k < 1 \text{ и } \frac{\rho_k}{\rho_\infty} > 2 \\ \alpha, & \text{иначе} \end{cases} \quad (36)$$

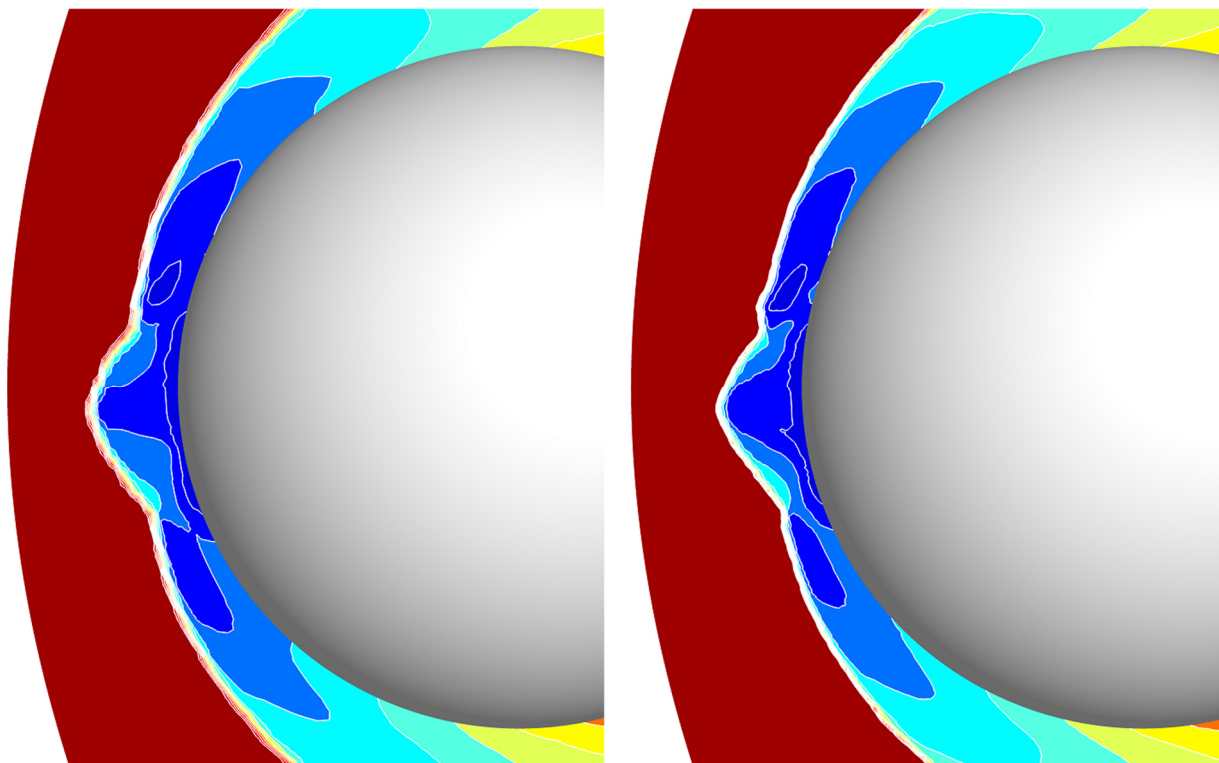


Рисунок 4.2.3 – Распределение числа Маха при обтекании сферы гиперзвуковым потоком, (слева) $M = 6$, (справа) $M = 9$

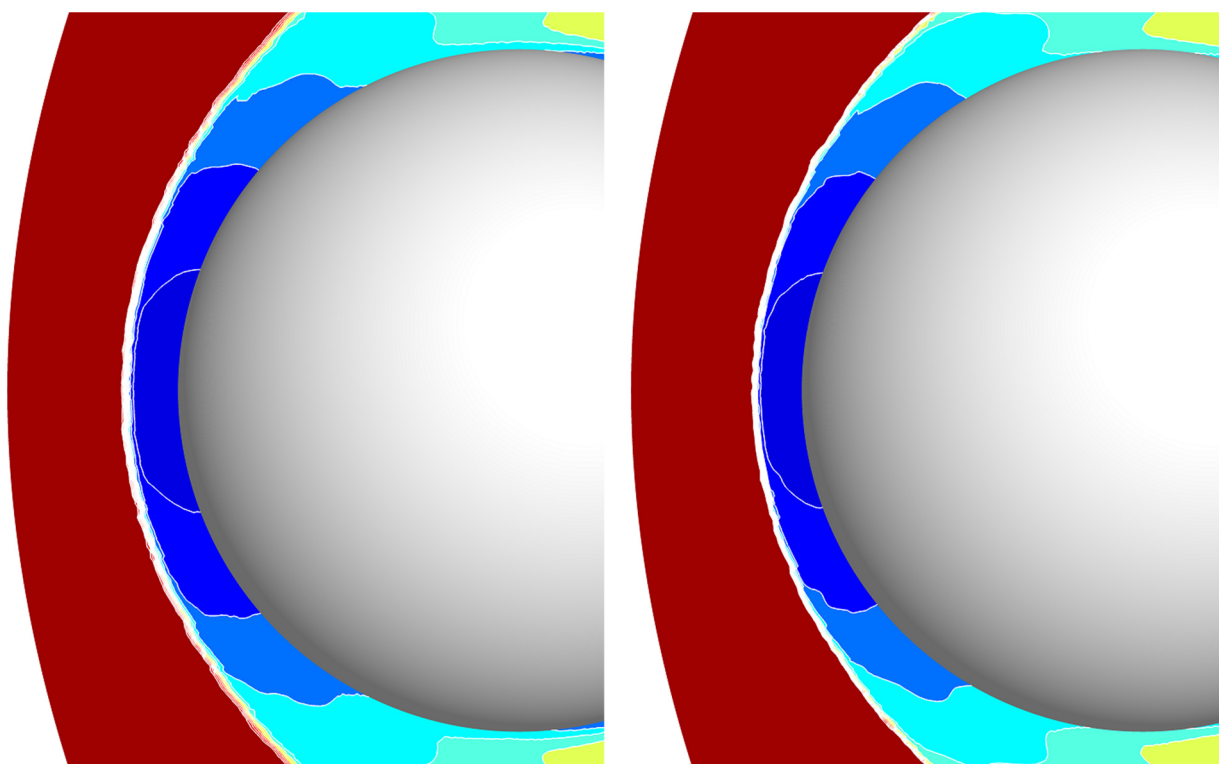


Рисунок 4.2.4 – Распределение числа Маха при обтекании сферы гиперзвуковым потоком, (слева) $M = 6$, (справа) $M = 9$

Квазистационарное поле течения было получено в результате численного решения методом установления.

4.2.2 Результаты валидации

На рисунках 4.2.5 – 4.2.8 представлены распределения числа Маха и температуры, полученные в результате численного моделирования на тетраэдральной расчётной сетке.

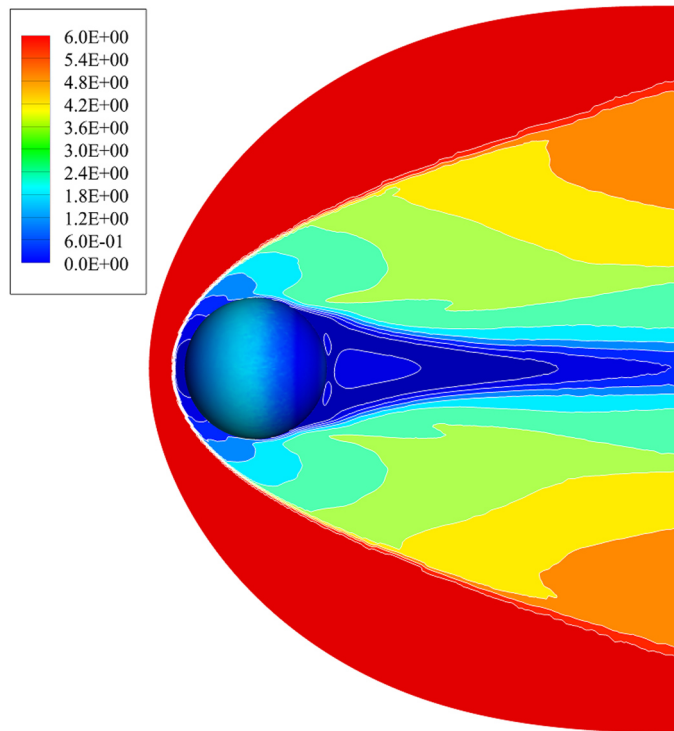


Рисунок 4.2.5 – Распределение числа Маха при обтекании сферы гиперзвуковым потоком, $M = 6$

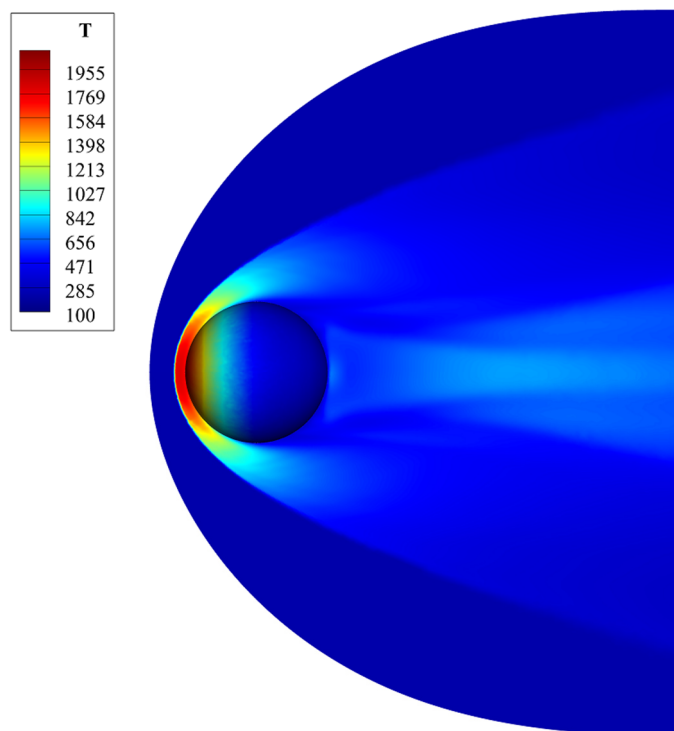


Рисунок 4.2.6 – Распределение температуры при обтекании сферы гиперзвуковым потоком, $M = 6$

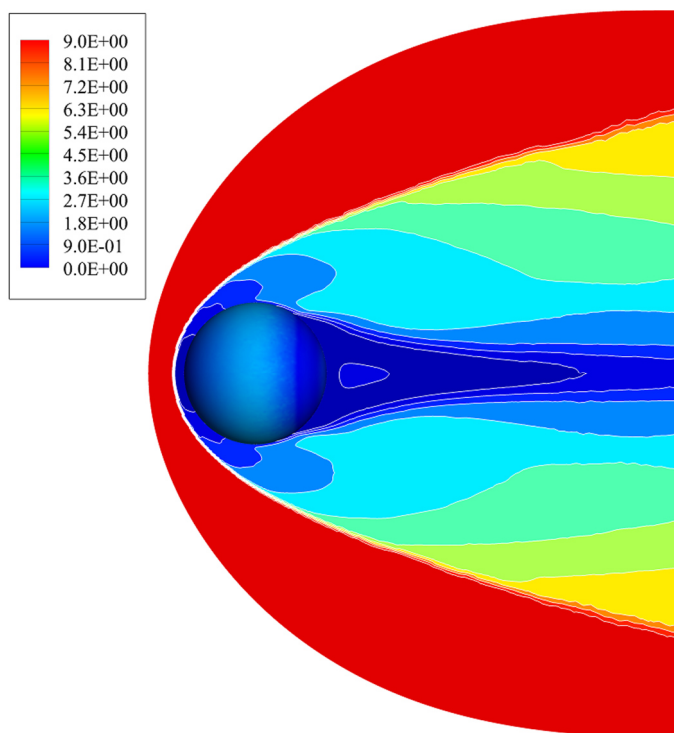


Рисунок 4.2.7 – Распределение числа Маха при обтекании сферы гиперзвуковым потоком, $M = 9$

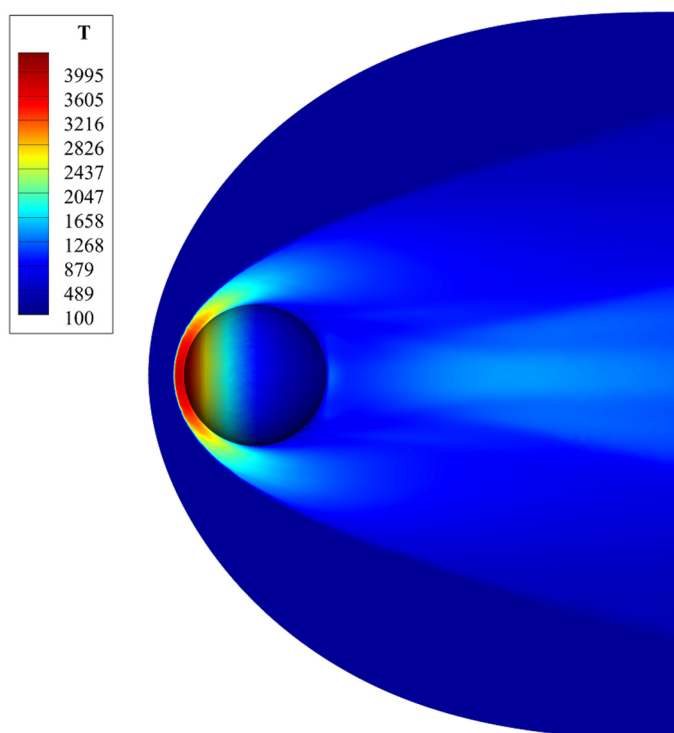


Рисунок 4.2.8 – Распределение температуры при обтекании сферы гиперзвуковым потоком, $M = 9$

Использование квазирегулярной неструктурированной сетки позволило сохранить монотонность численной схемы в области сильных ударных волн без применения выражения 36, что даёт возможность сохранить повышенный порядок точности в дозвуковых зонах течения (рисунки 4.2.9 и 4.2.11).

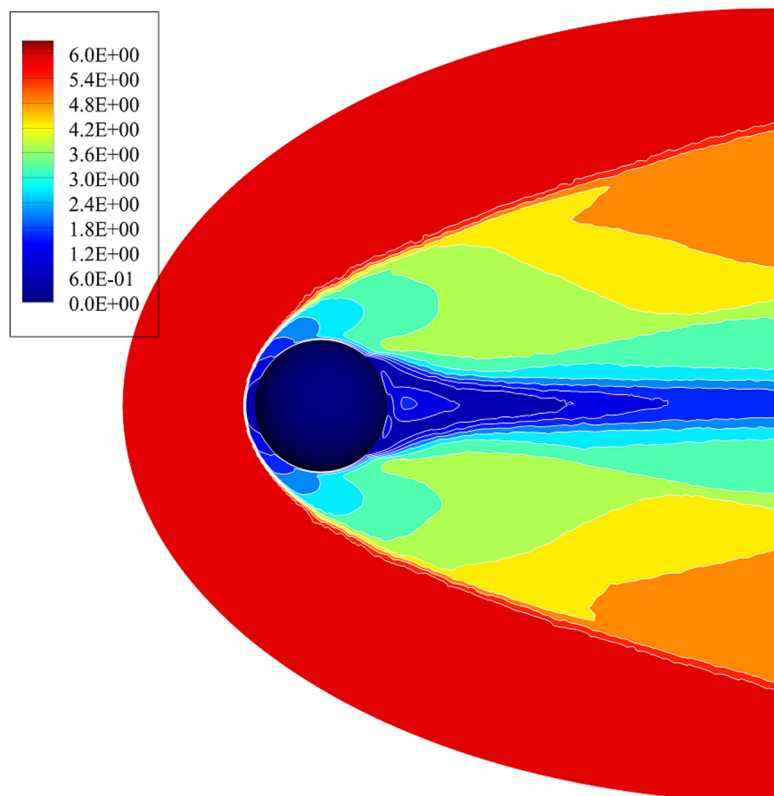


Рисунок 4.2.9 – Распределение числа Маха при обтекании сферы гиперзвуковым потоком, $M = 6$

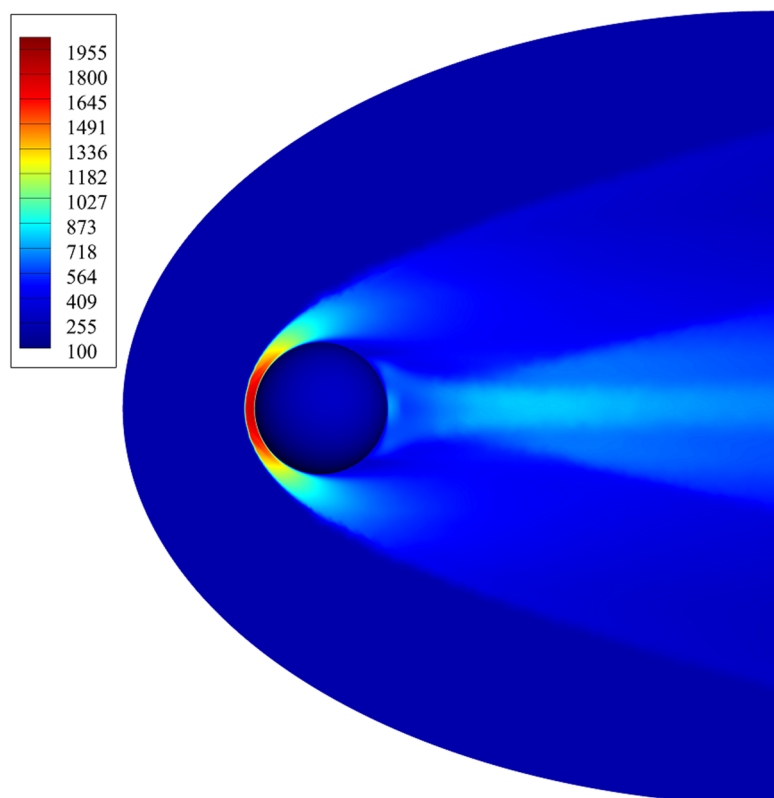


Рисунок 4.2.10 – Распределение температуры при обтекании сферы гиперзвуковым потоком, $M = 6$

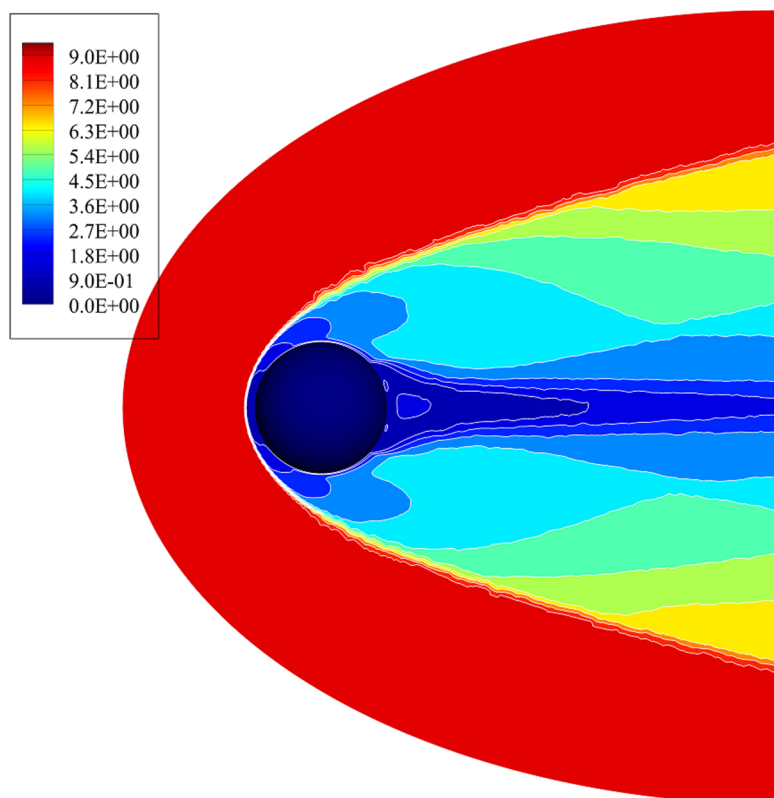


Рисунок 4.2.11 – Распределение числа Маха при обтекании сферы гиперзвуковым потоком, $M = 9$

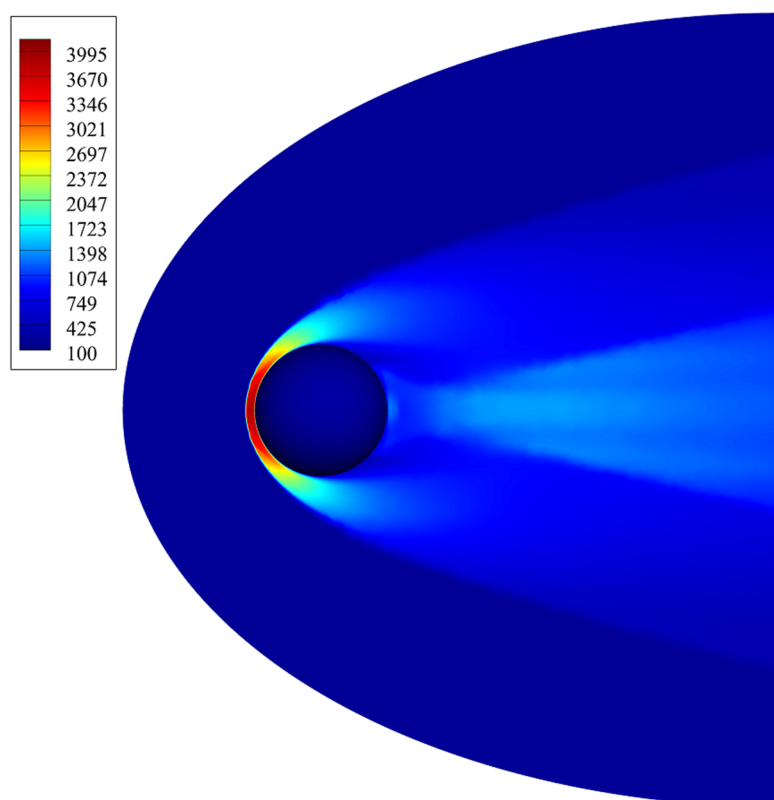


Рисунок 4.2.12 – Распределение температуры при обтекании сферы гиперзвуковым потоком, $M = 9$

Вследствие того, что в решаемой задаче вклад трения в суммарный коэффициент сопротивления на порядок меньше вклада давления, интегральные характеристики, полученные при расчёте на квазирегулярной неструктурированной сетке, не имеют существенного отличия от данных, полученных при расчёте на тетраэдральной сетке.

Проводилась оценка величины отхода ударной волны в области критической точки. В расчёте для $M = 6$ она составила 0.085 см, что хорошо соответствует экспериментальным данным, представленным в работе [68].

Полученные в результате численного моделирования интегральные характеристики по коэффициенту сопротивления сферы хорошо согласуются с экспериментальными данными во всём диапазоне чисел Маха сверхзвуковых и гиперзвуковых режимов (рисунок 4.2.13).

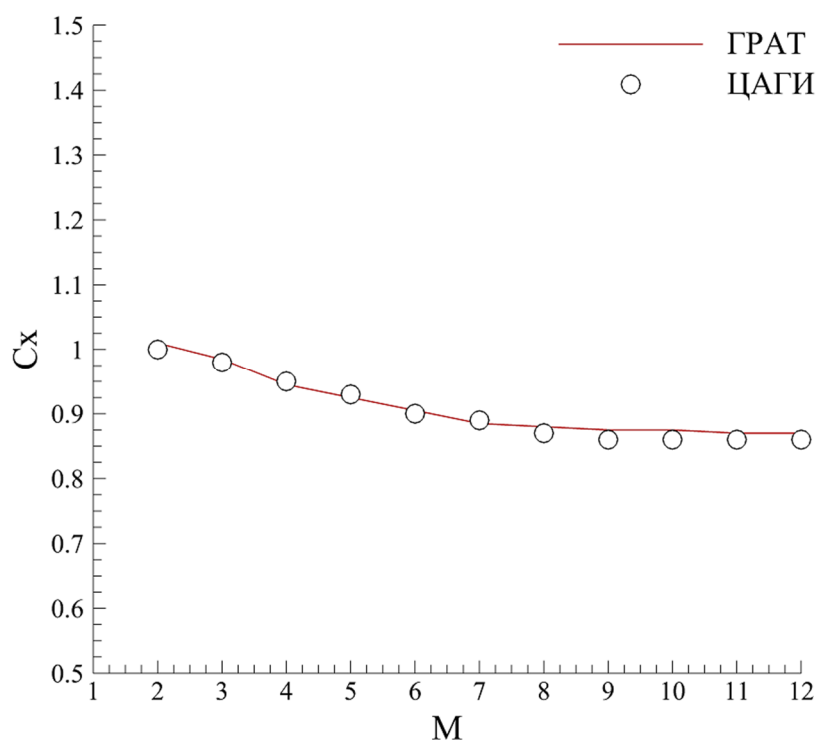


Рисунок 4.2.13 – Изменение коэффициента сопротивления сферы в зависимости от числа Маха

Выводы по главе

В результате проведенной валидации на основе экспериментальных данных центров авиационных исследований NASA Langley Research Center и ЦАГИ по высокоскоростному обтеканию реактивного снаряда и сферы,

подтверждена достоверность используемой вычислительной модели, реализованной в компьютерном коде ГРАТ для моделирования аэродинамических характеристик на трансзвуковых, сверхзвуковых и гиперзвуковых режимах обтекания.

ГЛАВА 5. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИСТЕНОЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ

В данной главе представлены результаты валидации компьютерного кода ГРАТ, подтверждающие достоверность используемой вычислительной модели для моделирования пристеночных течений на сверхзвуковых и гиперзвуковых режимах.

5.1 Численное моделирование ламинарного течения вдоль плоской пластины

В данной части работы представлена классическая валидационная задача моделирования ламинарного течения вдоль плоской пластины. Представленная задача является одной из основных тестовых задач, используемых для подтверждения достоверности результатов численного моделирования пристеночных течений [64]. На основе аналитически полученного решения Блазиуса для ламинарного пограничного слоя на плоской пластине проводилась валидация вычислительной модели, представленной в данной работе.

5.1.1 Постановка задачи

На основе численного решения системы уравнений Навье – Стокса, описанного в главе 1, было проведено моделирование обтекания плоской пластины длиной 1 м сверхзвуковым потоком вязкого совершенного газа, с числом Маха 2 для $Re = 10^3$.

Численное моделирование трёхмерного ламинарного течения вдоль плоской пластины проводилось на неструктурированной сетке, где количество элементов в расчётной области составило 1 597 686 (рисунок 5.1.1).

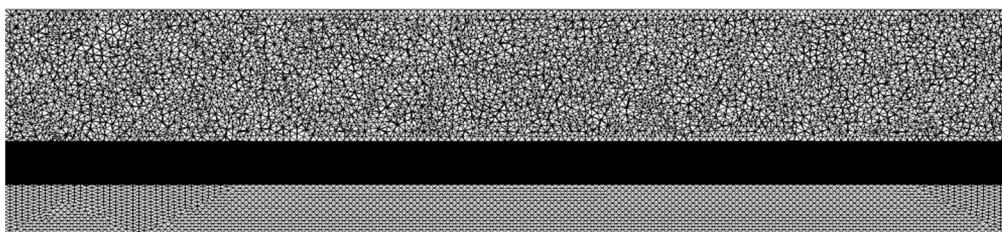


Рисунок 5.1.1 – Квазирегулярная расчётная сетка

На поверхности обтекаемого тела ставились граничные условия прилипания. Температура поверхности задавалась постоянной, 300 К.

Квазистационарное поле течения было получено в результате численного решения методом установления.

5.1.2 Результаты валидации

На рисунках 5.1.2 и 5.1.3 представлены распределение и изменение продольной компоненты скорости в пограничном слое, полученные в результате численного моделирования сверхзвукового обтекания плоской пластины на квазирегулярной расчётной сетке.

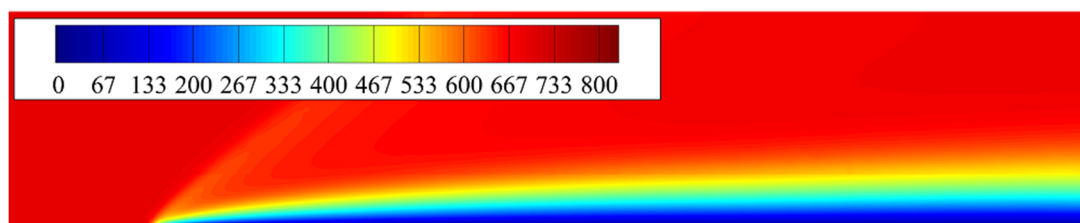


Рисунок 5.1.2 – Распределение продольной компоненты скорости (м/с) при сверхзвуковом обтекании плоской пластины

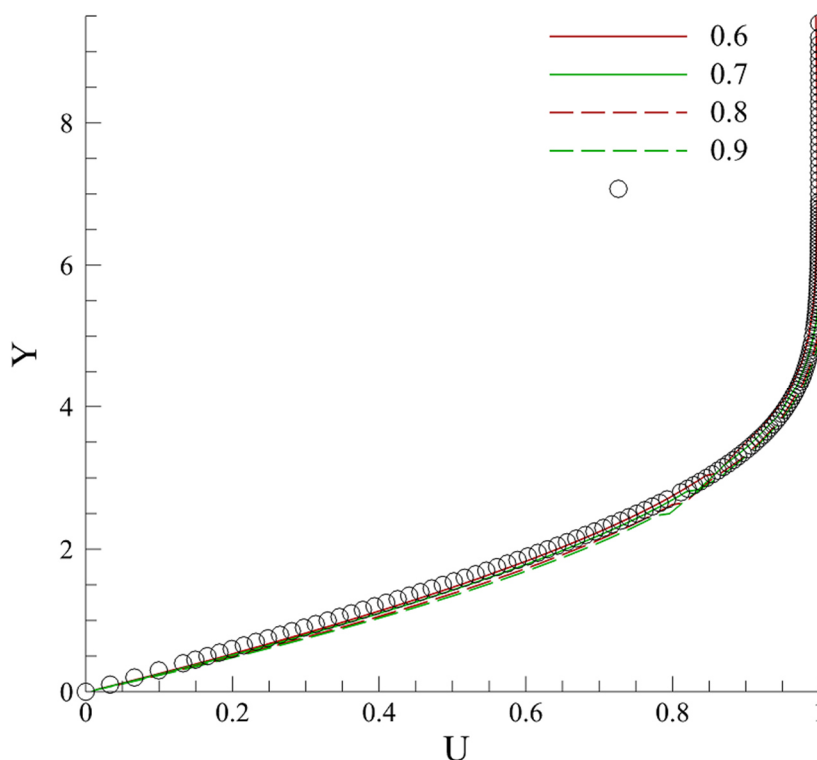


Рисунок 5.1.3 – Профиль скорости в пограничном слое, полученный в результате численного решения (сплошная и штриховая линии) и аналитического решения (символьная линия)

Из графика видно, что полученные в результате численного моделирования профили скорости в пограничном слое хорошо согласуются с аналитическим решением для ламинарного пограничного слоя на плоской пластине (рисунок 5.1.3).

Проводилась оценка толщины ламинарного пограничного слоя на плоской пластине:

$$\delta = \frac{5x}{\sqrt{\text{Re}_x}}. \quad (37)$$

Для $x=0.9$ м она составила 0.15 м, что отличается от результата численного решения не более чем на 1%.

5.2 Численное моделирование обтекания гиперзвуковым потоком цилиндрически – конического тела и двойного конуса

Целью серии экспериментальных исследований [71, 72], проводимых в CUBRC на установке LENS XX, было создание валидационного базиса, используемого для подтверждения в задачах гиперзвукового моделирования возможностей компьютерных кодов вычислительной аэротермодинамики [73, 74, 75]. В результате проведённых экспериментальных исследований были получены распределения поверхностных характеристик давления и теплового потока при обтекании гиперзвуковым потоком цилиндрически – конического тела и двойного конуса.

В данной части работы представлена классическая валидационная задача гиперзвукового моделирования о взаимодействии ударной волны с пограничным слоем при ламинарном обтекании воздушным потоком цилиндрически – конического тела и двойного конуса. На основе экспериментальных данных, представленных в работах [71, 72] по обтеканию цилиндрически – конического тела и двойного конуса гиперзвуковым потоком проводилась валидация вычислительной модели, представленной в данной работе. Основной вычислительной сложностью рассматриваемой

задачи является подробное разрешение течения в пристеночной области с целью дальнейшего воспроизведения экспериментальных распределений поверхностных характеристик давления и теплового потока. В зависимости от условий невозмущенного потока исследуемого режима обтекания, в задаче имеет место наличие рециркуляционной зоны, представляющей собой область возвратного течения, оказывающую существенное влияние на структуру потока в пристеночной области [76].

5.2.1 Постановка задачи

На основе численного решения системы уравнений газовой динамики, описанного в главе 1, было проведено моделирование обтекания гиперзвуковым потоком цилиндрически – конического тела и двойного конуса. В данной задаче вычислительной аэротермодинамики численное моделирование гиперзвуковых режимов не требует учёта физико – химических процессов, вследствие чего обтекание исследуемых объектов проводилось потоком вязкого совершенного газа. Геометрические размеры объектов приведены на рисунке 5.2.1.

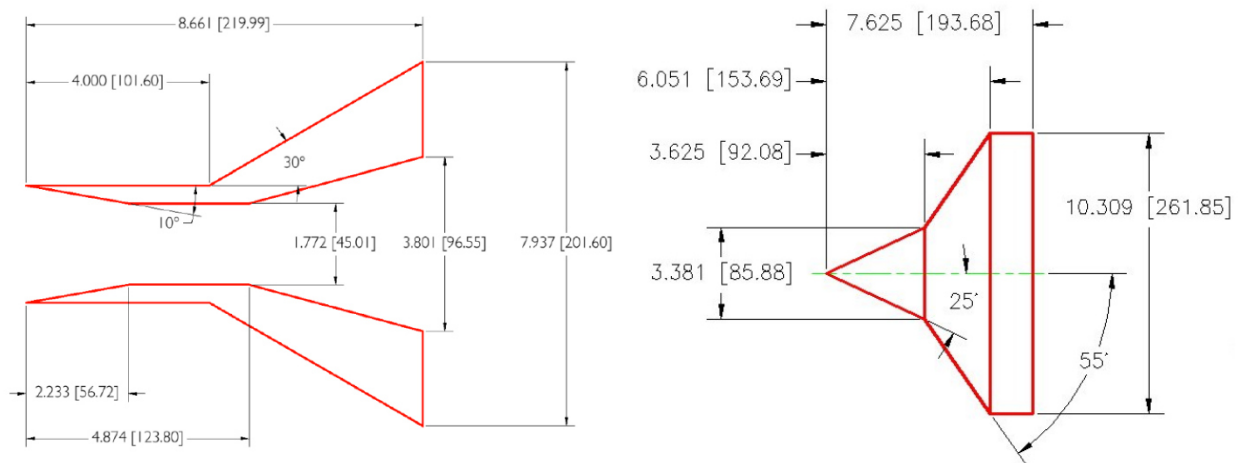


Рисунок 5.2.1 – Геометрические размеры цилиндрически – конического тела и двойного конуса

В качестве начальных условий для численного моделирования использовались данные, взятые из работ [71, 72], приведённые в таблице 5.2.1. Расчеты проводились для двух режимов гиперзвукового обтекания, цилиндрически – конического тела (режим 1) и двойного конуса (режим 2).

Таблица 5.2.1 – Исходные данные для моделирования гиперзвукового обтекания цилиндрически – конического тела и двойного конуса

Режим	M_∞	V_∞ , км/с	P_∞ , Па	T_∞ , К
1	11.3	3.11	34.4	189
2	12.2	3.25	25.1	175

Численное моделирование трёхмерного поля течения проводилось на неструктурированных сетках, важным преимуществом которых является автоматизация построения для сложных геометрических форм. Сгущение расчётной сетки осуществлялось вблизи поверхности исследуемых объектов для более детального описания поля течения в пристеночной области. Трёхмерная сетка состояла из тетраэдральных элементов, где количество ячеек в расчётной области составило 41 861 043 для цилиндрически – конического тела (рисунок 5.2.2) и 32 896 827 для двойного конуса (рисунок 5.2.3).

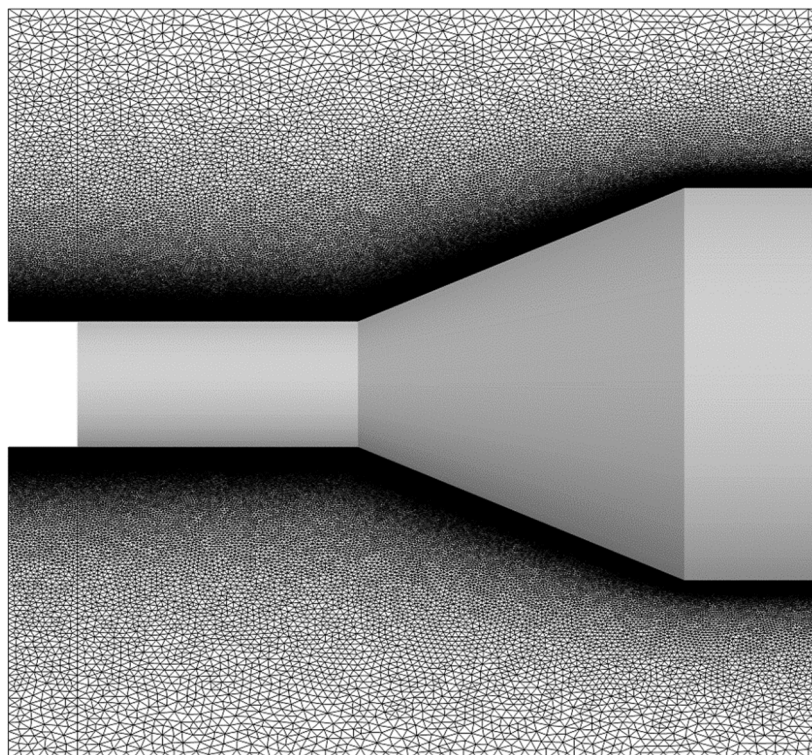


Рисунок 5.2.2 – Расчётная сетка цилиндрически – конического тела

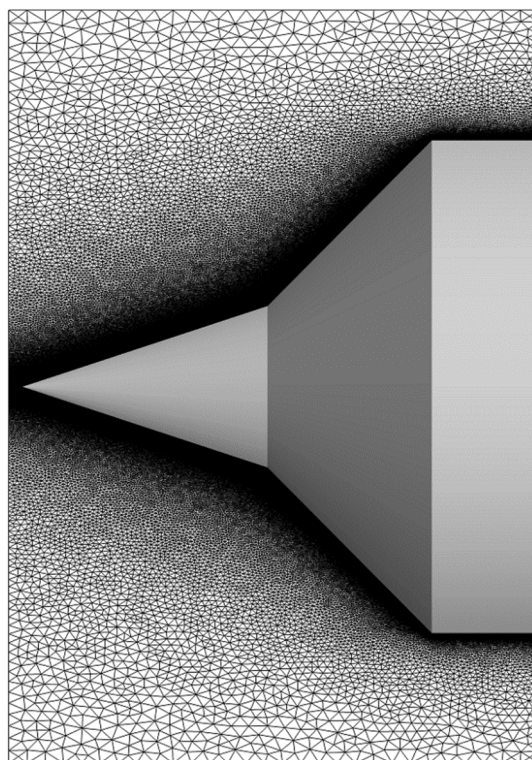


Рисунок 5.2.3 – Расчётная сетка двойного конуса

Но для оценки влияния сеточной зависимости на распределения поверхностных характеристик давления и теплового потока проводились дополнительные расчёты обтекания цилиндрически – конического тела на квазирегулярной неструктурированной сетке (рисунок 5.2.4).

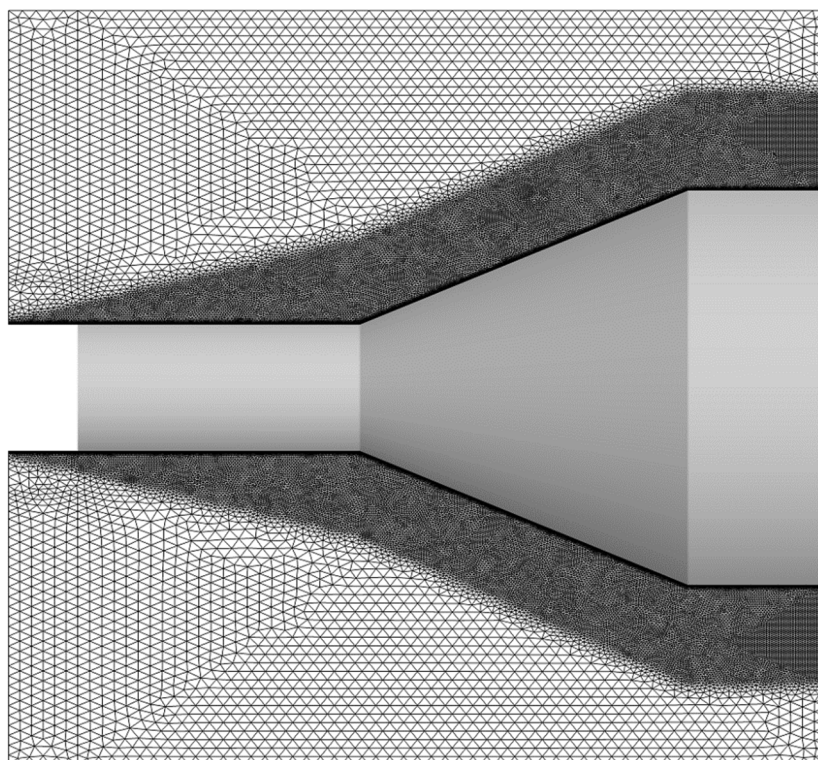


Рисунок 5.2.4 – Квазирегулярная расчётная сетка

Сгущение квазирегулярной расчётной сетки проводилось призматическими элементами вблизи поверхности тела для более детального разрешения структуры течения в пристеночной области (рисунок 5.2.5). Количество ячеек в расчётной области квазирегулярной сетки составило 10 888 786 (рисунок 5.2.4).

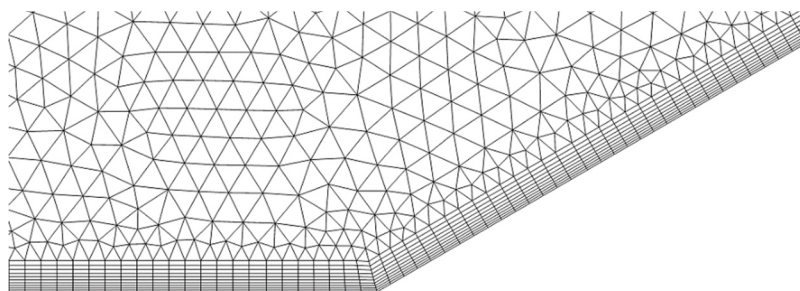


Рисунок 5.2.5 – Сгущение квазирегулярной расчётной сетки

На поверхности обтекаемого тела ставились граничные условия прилипания. Температура поверхности задавалась постоянной, 300 К.

Квазистационарное поле течения было получено в результате численного решения методом установления.

5.2.2 Результаты валидации

На рисунках 5.2.6 – 5.2.9 представлены распределения числа Маха, давления, плотности и продольной компоненты скорости, полученные в результате численного моделирования гиперзвукового обтекания цилиндрически – конического тела на тетраэдральной расчётной сетке.

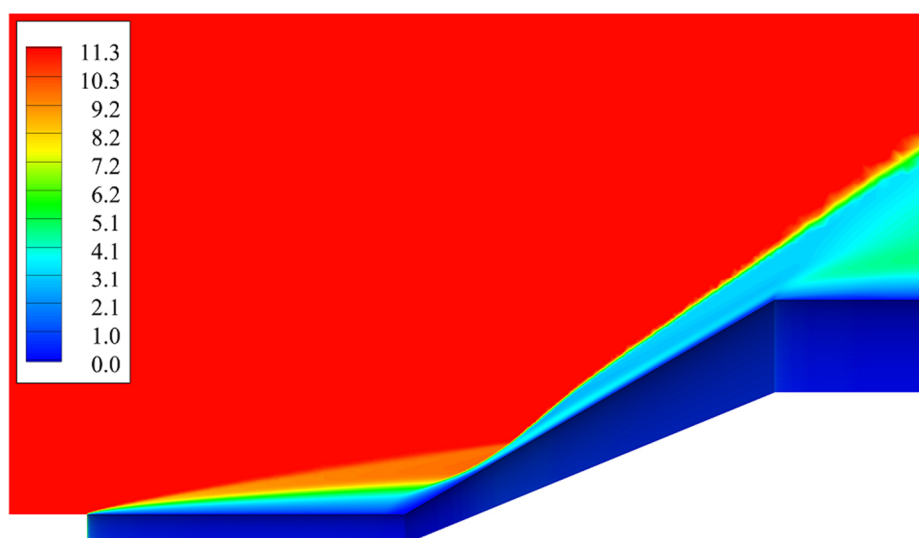


Рисунок 5.2.6 – Распределение числа Маха при гиперзвуковом обтекании цилиндрически – конического тела

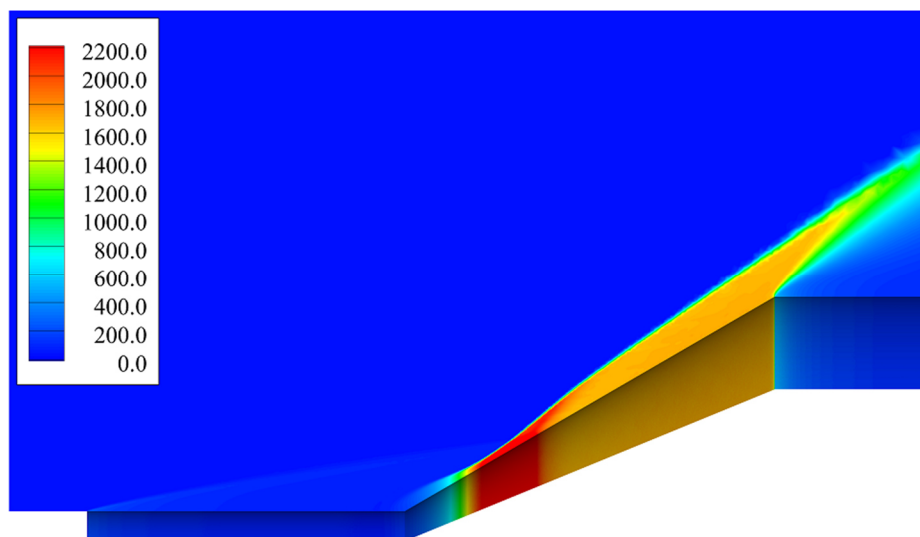


Рисунок 5.2.7 – Распределение давления (Па) при гиперзвуковом обтекании цилиндрически – конического тела

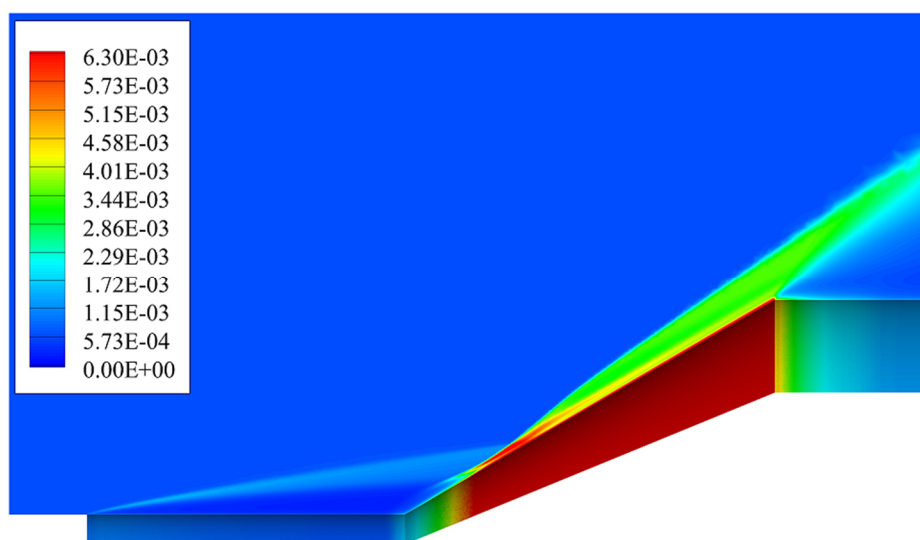


Рисунок 5.2.8 – Распределение плотности (кг/м³) при гиперзвуковом обтекании цилиндрически – конического тела

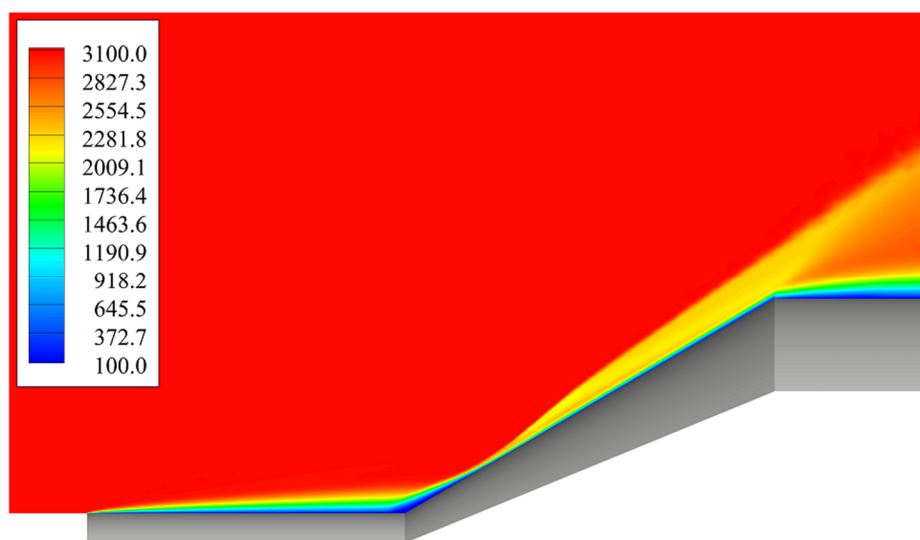


Рисунок 5.2.9 – Распределение продольной компоненты скорости (м/с) при гиперзвуковом обтекании цилиндрически – конического тела

На графиках показаны распределения поверхностных характеристик давления и теплового потока, полученные в результате численного моделирования на тетраэдральной расчётной сетке (рисунки 5.2.10 и 5.2.11).

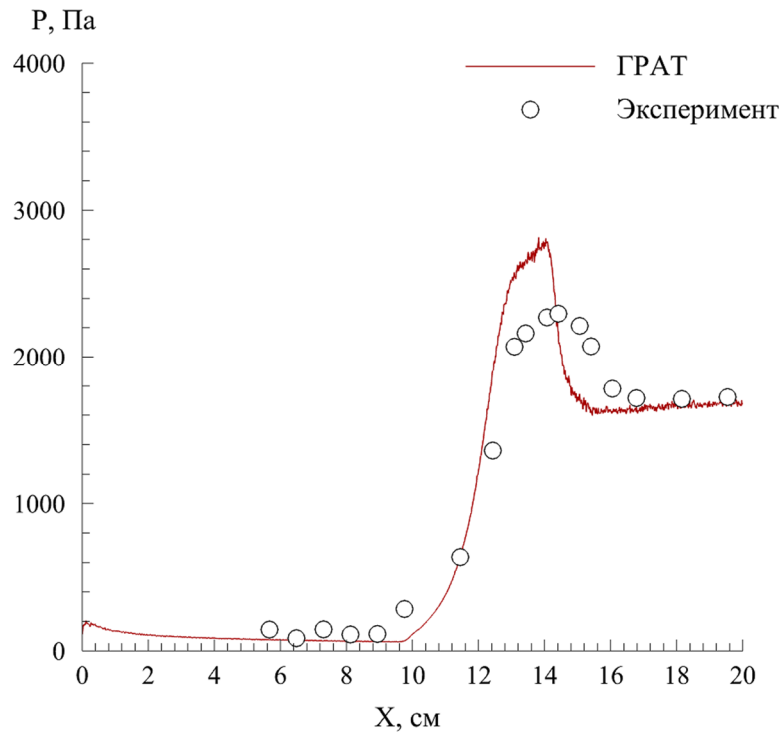


Рисунок 5.2.10 – Поверхностное распределение давления при гиперзвуковом обтекании цилиндрически – конического тела

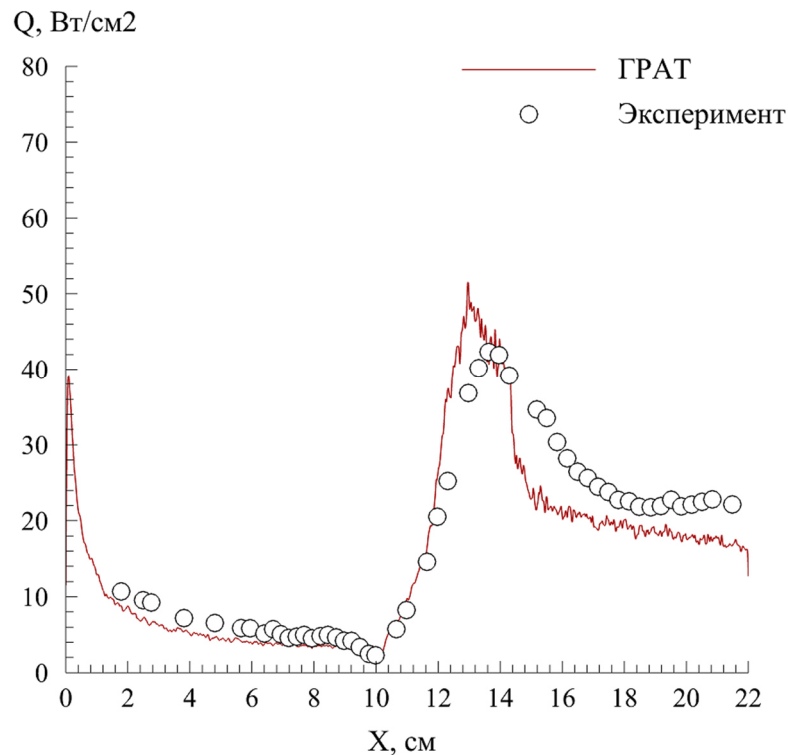


Рисунок 5.2.11 – Поверхностное распределение теплового потока при гиперзвуковом обтекании цилиндрически – конического тела

Вследствие сильной нерегулярности тетраэдральной расчётной сетки наблюдаются колебания в распределение теплового потока (рисунок 5.2.11).

На рисунках 5.2.12 – 5.2.15 представлены распределения числа Маха, давления, плотности и продольной компоненты скорости, полученные в результате численного моделирования гиперзвукового обтекания цилиндрически – конического тела на квазирегулярной расчётной сетке.

На рисунке 5.2.16 показана область возвратного течения, возникающая вследствие отрыва пограничного слоя при взаимодействии с ударной волной. Область возвратного течения образует рециркуляционную зону, изменяющую положение ударной волны.

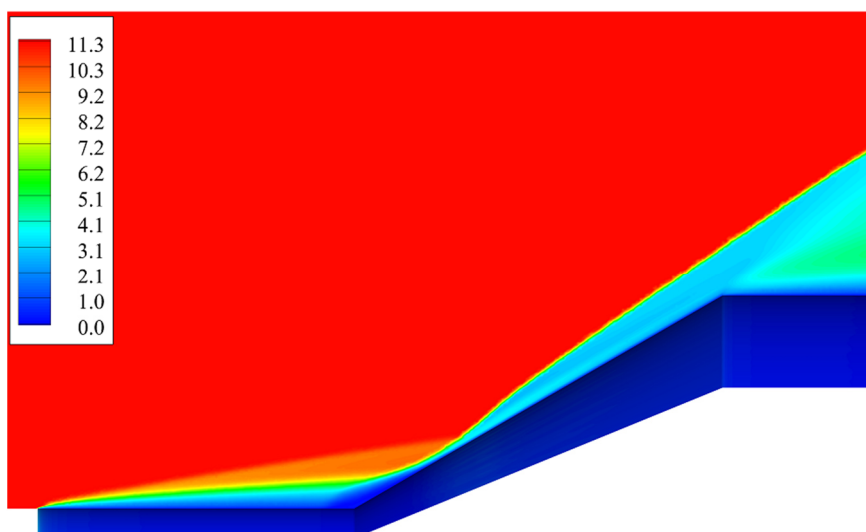


Рисунок 5.2.12 – Распределение числа Маха при гиперзвуковом обтекании цилиндрически – конического тела

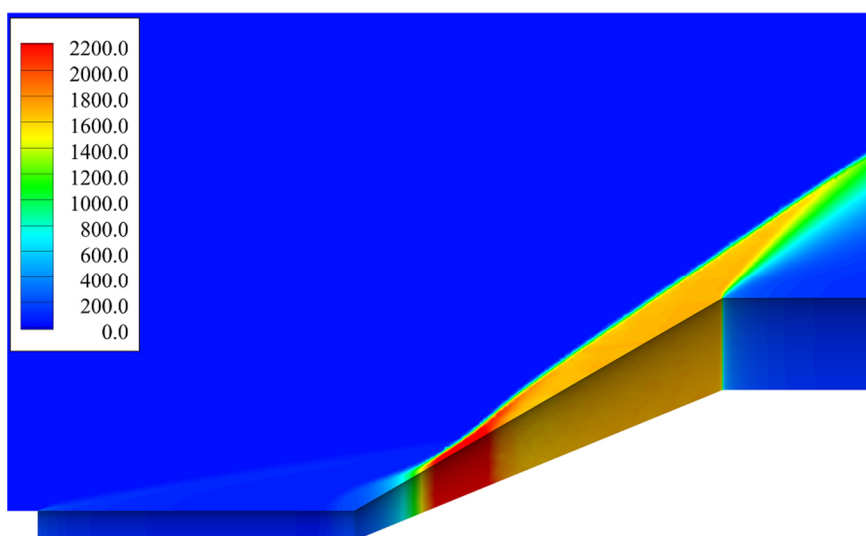


Рисунок 5.2.13 – Распределение давления (Па) при гиперзвуковом обтекании цилиндрически – конического тела

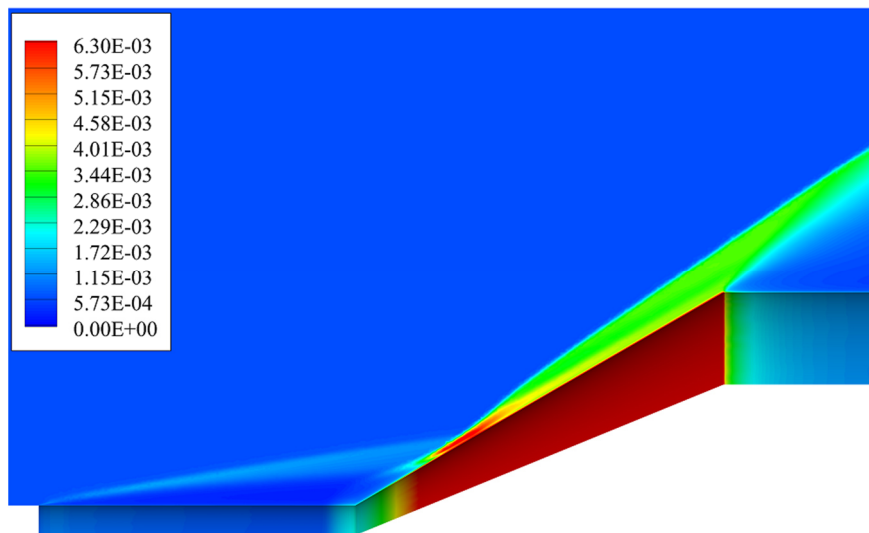


Рисунок 5.2.14 – Распределение плотности (кг/м^3) при гиперзвуковом обтекании цилиндрически – конического тела

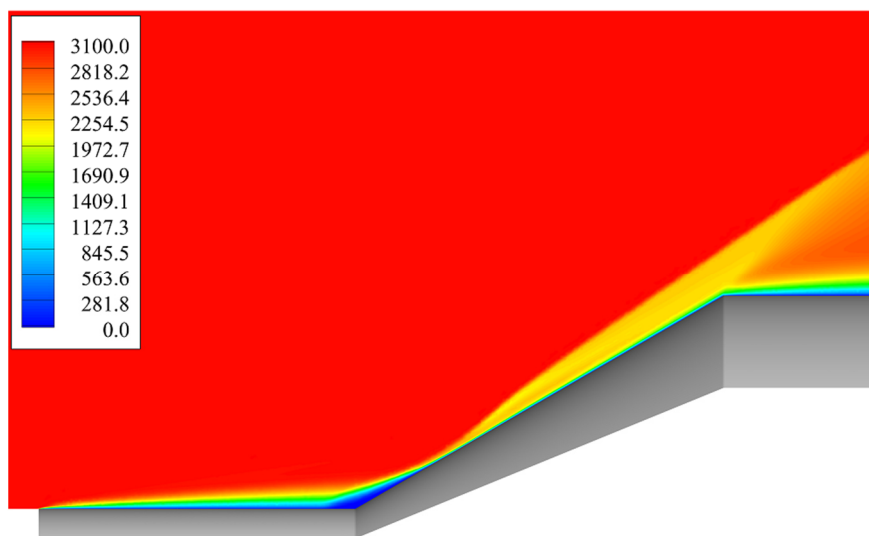


Рисунок 5.2.15 – Распределение продольной компоненты скорости (м/с) при гиперзвуковом обтекании цилиндрически – конического тела

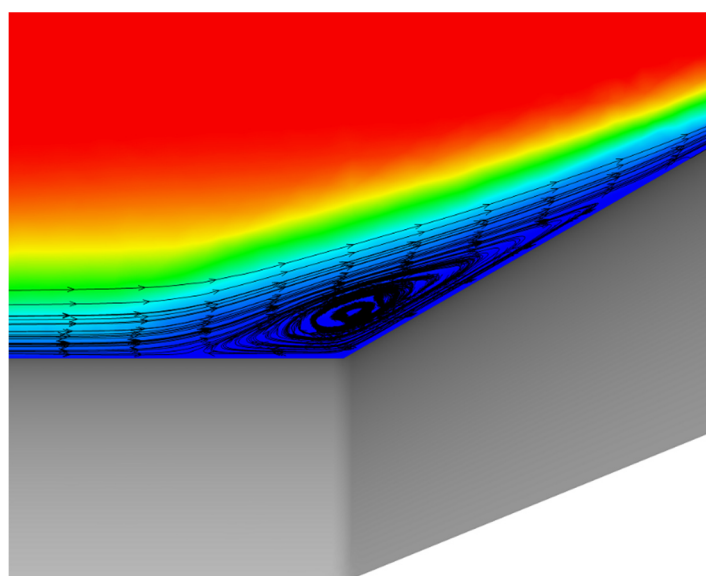


Рисунок 5.2.16 – Рециркуляционная зона

На графиках показаны распределения поверхностных характеристик давления и теплового потока, полученные в результате численного моделирования на квазирегулярной расчётной сетке (рисунки 5.2.17 и 5.2.18).

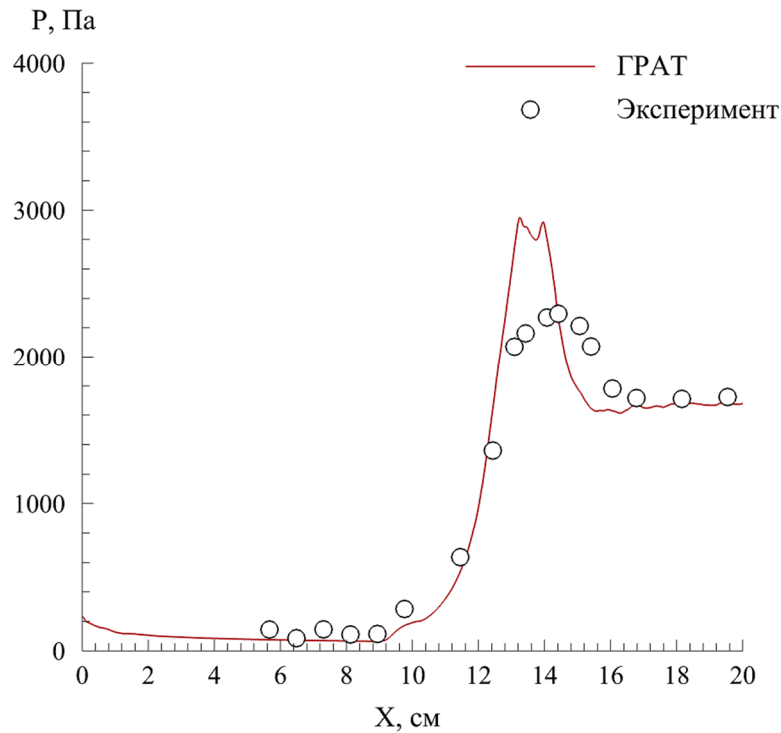


Рисунок 5.2.17 – Поверхностное распределение давления при гиперзвуковом обтекании цилиндрически – конического тела

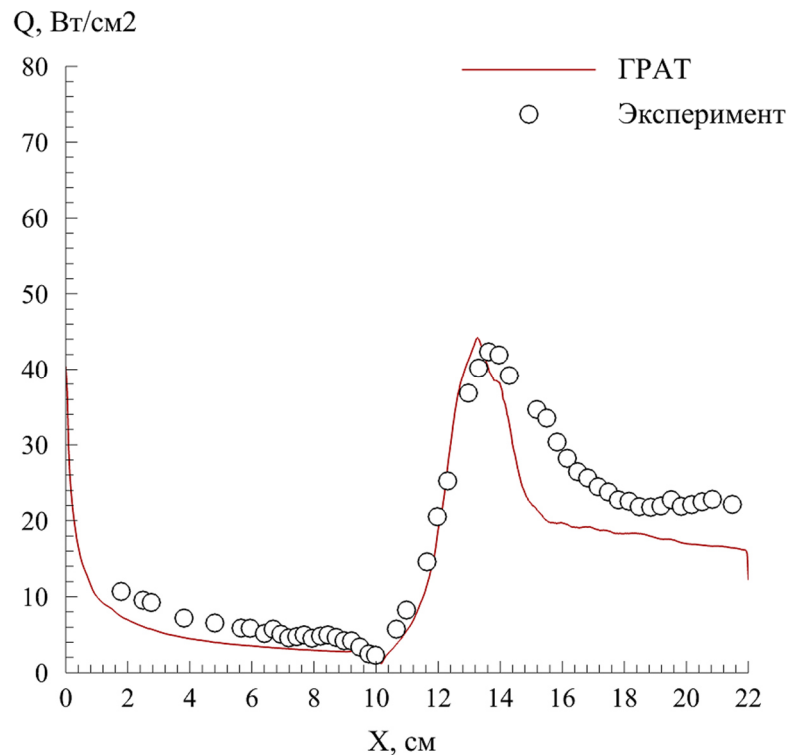


Рисунок 5.2.18 – Поверхностное распределение теплового потока при гиперзвуковом обтекании цилиндрически – конического тела

Использование квазирегулярной расчётной сетки позволило значительно снизить колебания в распределение теплового потока и повысить соответствие экспериментальным данным полученного распределения (рисунок 5.2.18).

Как видно из графиков полученные результаты распределений поверхностных характеристик давления и теплового потока хорошо согласуются с экспериментальными данными по обтеканию цилиндрически – конического тела и коррелируют с расчётными данными центра авиационных исследований NASA Langley Research Center, полученными в рамках валидации компьютерных кодов вычислительной аэротермодинамики: LAURA, DPLR, US3D (рисунок 5.2.19).

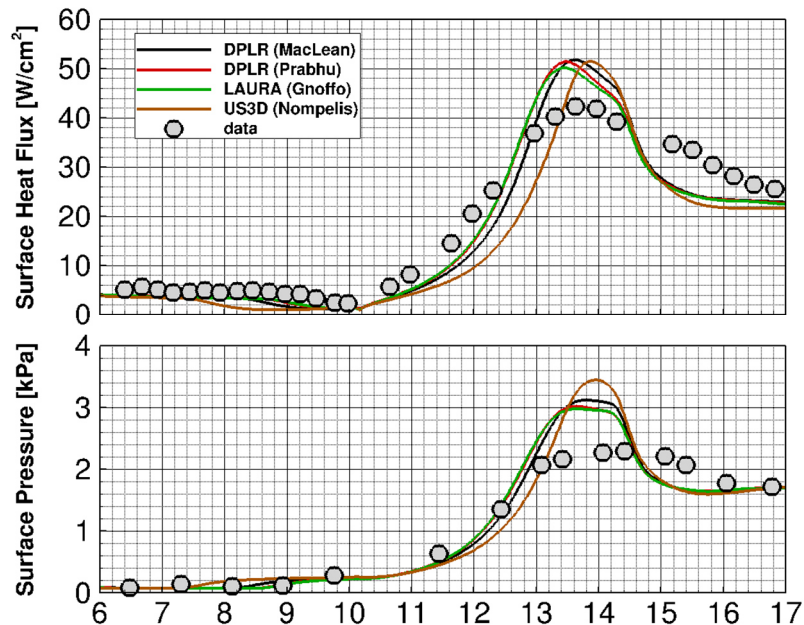


Рисунок 5.2.19 – Поверхностные распределения давления и теплового потока, полученные компьютерными кодами вычислительной аэротермодинамики NASA

На рисунках 5.2.20 и 5.2.21 представлены распределения плотности и продольной компоненты скорости, полученные в результате численного моделирования гиперзвукового обтекания двойного конуса на тетраэдральной расчётной сетке.

На распределении плотности показана картина ударно – волнового взаимодействия при гиперзвуковом обтекании двойного конуса (рисунок 5.2.20). Скачок уплотнения, возникающий вследствие

отрыва пограничного слоя, взаимодействует с косым скачком уплотнения первого конуса, вследствие чего образуется результирующая ударная волна. Результирующая ударная волна взаимодействует с головным скачком уплотнения второго конуса формируя на втором конусе прошедшую ударную волну, которая взаимодействует со скачком уплотнения, возникающим вследствие присоединения потока.

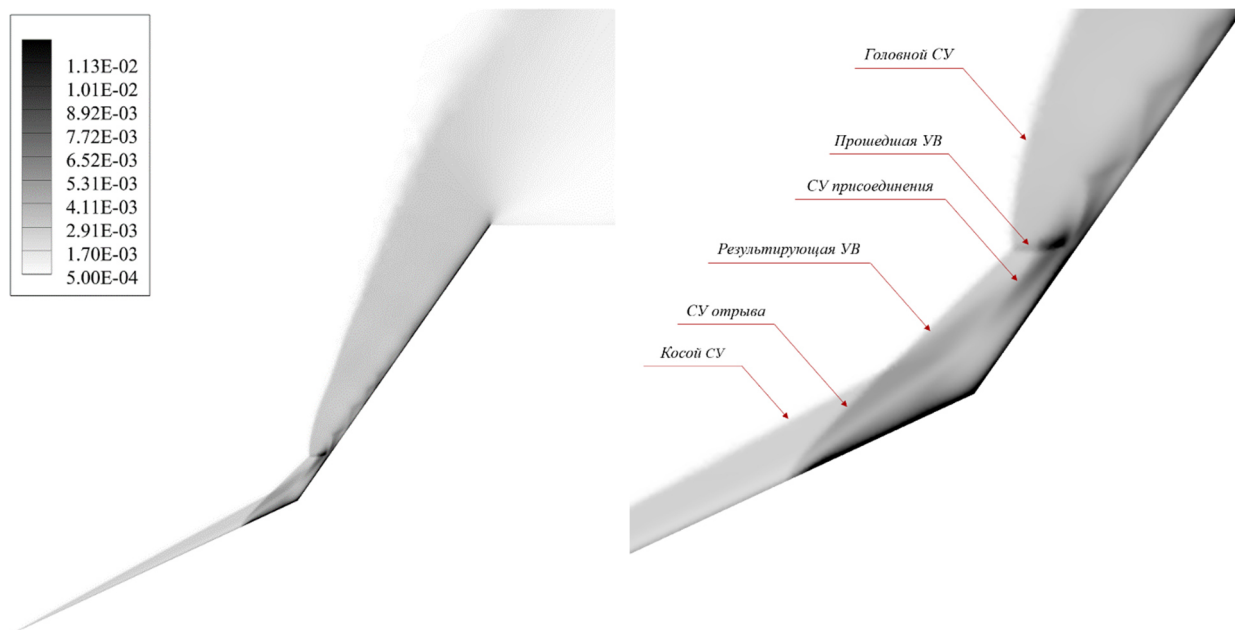


Рисунок 5.2.20 – Ударно – волновое взаимодействие при гиперзвуковом обтекании двойного конуса. Распределение плотности (кг/м^3)

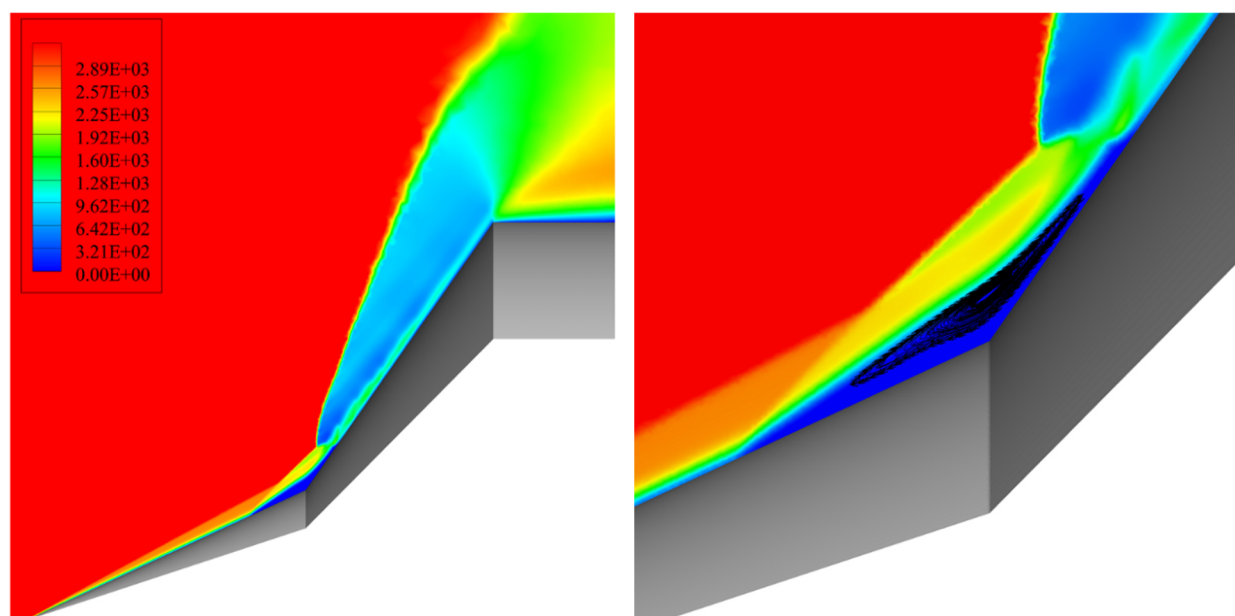


Рисунок 5.2.21 – Распределение продольной компоненты скорости (м/с) при гиперзвуковом обтекании двойного конуса

На графиках показаны распределений поверхностных характеристик давления и теплового потока полученные в результате численного моделирования на тетраэдральной расчётной сетке (рисунки 5.2.22 и 5.2.23).

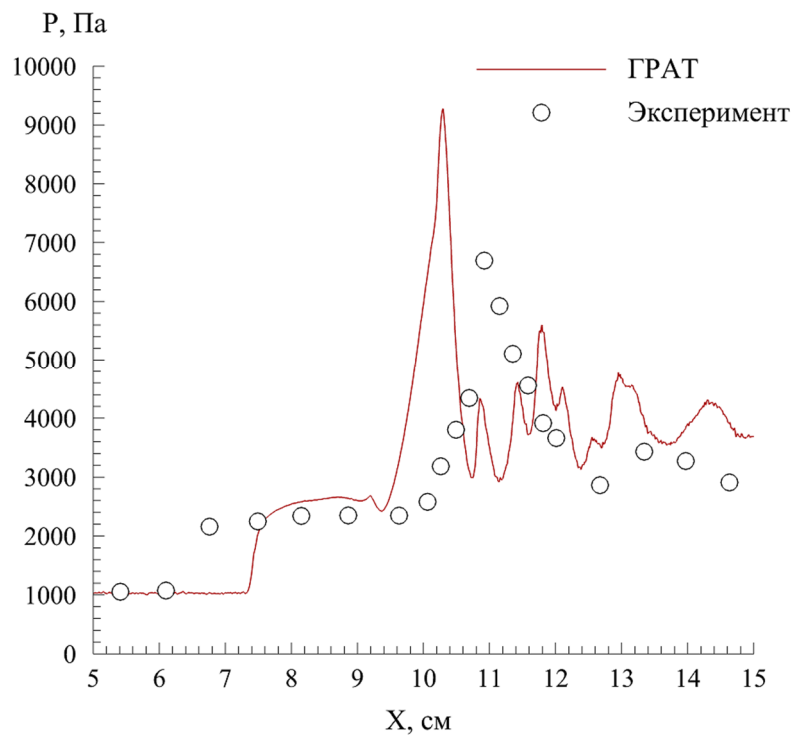


Рисунок 5.2.22 – Поверхностное распределение давления при гиперзвуковом обтекании двойного конуса

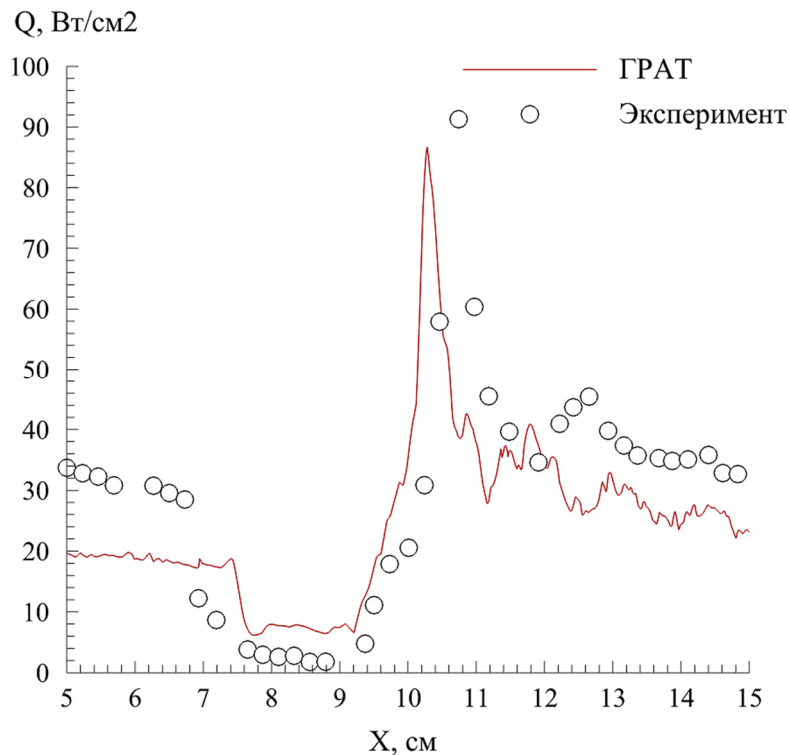


Рисунок 5.2.23 – Поверхностное распределение теплового потока при гиперзвуковом обтекании двойного конуса

Как видно из графиков полученные результаты распределений поверхностных характеристик давления и теплового потока хорошо согласуются с экспериментальными данными по обтеканию двойного конуса и коррелируют с расчётными данными центра авиационных исследований NASA Langley Research Center, полученными в рамках валидации компьютерных кодов вычислительной аэротермодинамики: LAURA, DPLR, US3D, FUN3D (рисунок 5.2.24).

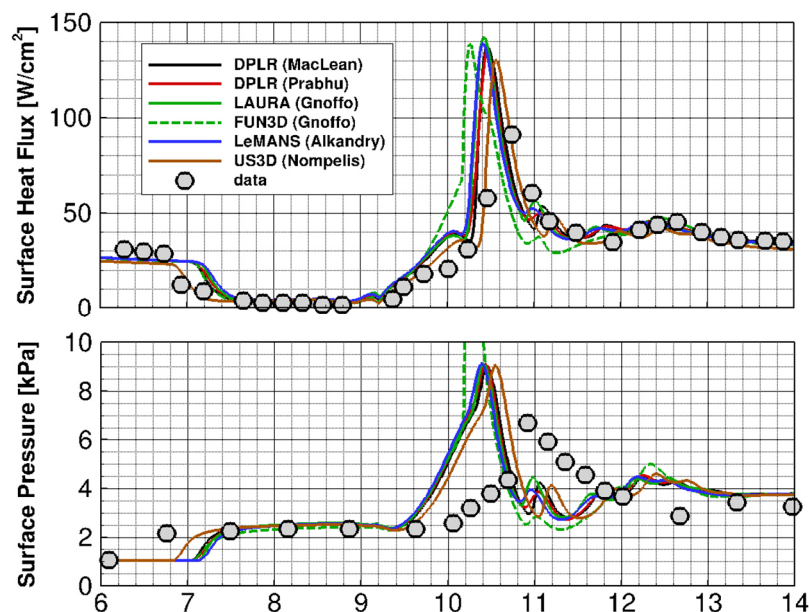


Рисунок 5.2.24 – Поверхностные распределения давления и теплового потока, полученные компьютерными кодами вычислительной аэротермодинамики NASA

Выводы по главе

В результате проведенной валидации на основе экспериментальных данных центра исследований авионики CUBRC по гиперзвуковому обтеканию цилиндрически – конического тела и двойного конуса, а также сравнения с расчётными данными, полученными компьютерными кодами вычислительной аэротермодинамики NASA, подтверждена достоверность используемой вычислительной модели, реализованной в компьютерном коде ГРАТ для моделирования пристеночных течений на сверхзвуковых и гиперзвуковых режимах.

ГЛАВА 6. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕАГИРУЮЩИХ ТЕЧЕНИЙ

В данной главе представлены результаты численного решения компьютерным кодом ГРАТ задачи гиперзвукового моделирования с учётом неравновесных химических процессов, протекающих в высокотемпературном газовом потоке.

6.1 Численное моделирование аэротермодинамики спускаемого аппарата Аполлон-4

Одной из основных задач американской программы Аполлон было создание командного модуля для возвращения экипажа на Землю. В связи с этим требовалось обеспечить спускаемый аппарат необходимой тепловой защитой, способной выдержать интенсивный нагрев величиною в несколько тысяч градусов. В одном из серии полётов космической программы NASA при входе в плотные слои атмосферы спускаемый аппарат Аполлон-4 развил скорость более 11 км/с. Достигнутая скорость была наибольшей в серии полётов космической программы Аполлон.

В данной части работы представлены результаты расчётов аэротермодинамики спускаемого космического аппарата Аполлон-4 [77, 78], входящего в атмосферу на скорости более 10 км/с под углом атаки 25° . В следствие интенсивного нагрева [79] задача аэротермодинамики гиперзвукового входа в плотные слои атмосферы командного модуля Аполлон-4 численно решалась с учётом физико-химических процессов, возникающих в высокотемпературном газе при входе космических аппаратов в атмосферу на орбитальных [80] и сверхорбитальных [81] скоростях.

6.1.1 Постановка задачи

На основе численного решения систем уравнений газовой динамики и химической кинетики, описанного в главе 1, было проведено моделирование обтекания гиперзвуковым потоком спускаемого космического аппарата

Аполлон-4. В данной задаче вычислительной аэротермодинамики численное моделирование гиперзвуковых режимов требует учёта физико – химических процессов [82], протекающих в высокотемпературном газе. В таких условиях происходят процессы диссоциации и ионизации газа в следствие чего для определения скорости протекания химических реакций использовалась модель кинетики Парка [33]. В данной модели константы скорости прямой и обратной реакций аппроксимированы в виде обобщённого закона Аррениуса:

$$k = AT^n \exp(-E/T) \quad (38)$$

где A , n , E , – коэффициенты аппроксимации для расчёта константы скорости прямой и обратной реакций. Используемая модель химической кинетики включает в себя 48 реакций 11-ти компонентного воздуха, состоящего из: N_2 , O_2 , NO , N , O , N^+ , O^+ , N_2^+ , O_2^+ , NO^+ , e^- (рисунок 6.1.1). Данная кинетическая схема использовалась в приближении термического равновесия, детальное описание представлено в работе [83].

COMPONENT	[N2]	[O2]	[NO]	[N]	[O]	[N+]	[O+]	[N2+]	[O2+]	[NO+]	[E-]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	
REACTIONS																					
1	[N2]	+	[N2]	<=>	[N]	+	[N]	+	[N2]	[0.70000E+22]	[-0.16000E+01]	[0.11320E+06]	[0.74287E+17]	[-0.60000E+00]	[0.00000E+00]						
2	[N2]	+	[O2]	<=>	[N]	+	[N]	+	[O2]	[0.70000E+22]	[-0.16000E+01]	[0.11320E+06]	[0.74287E+17]	[-0.60000E+00]	[0.00000E+00]						
3	[N2]	+	[NO]	<=>	[N]	+	[N]	+	[NO]	[0.70000E+22]	[-0.16000E+01]	[0.11320E+06]	[0.74287E+17]	[-0.60000E+00]	[0.00000E+00]						
4	[N2]	+	[N]	<=>	[N]	+	[N]	+	[N]	[0.30000E+23]	[-0.16000E+01]	[0.11320E+06]	[0.31837E+18]	[-0.60000E+00]	[0.00000E+00]						
5	[N2]	+	[O]	<=>	[N]	+	[N]	+	[O]	[0.30000E+23]	[-0.16000E+01]	[0.11320E+06]	[0.31837E+18]	[-0.60000E+00]	[0.00000E+00]						
6	[N2]	+	[N+]	<=>	[N]	+	[N]	+	[N+]	[0.30000E+23]	[-0.16000E+01]	[0.11320E+06]	[0.31837E+18]	[-0.60000E+00]	[0.00000E+00]						
7	[N2]	+	[O+]	<=>	[N]	+	[N]	+	[O+]	[0.30000E+23]	[-0.16000E+01]	[0.11320E+06]	[0.31837E+18]	[-0.60000E+00]	[0.00000E+00]						
8	[N2]	+	[N2+]	<=>	[N]	+	[N]	+	[N2+]	[0.70000E+22]	[-0.16000E+01]	[0.11320E+06]	[0.74287E+17]	[-0.60000E+00]	[0.00000E+00]						
9	[N2]	+	[O2+]	<=>	[N]	+	[N]	+	[O2+]	[0.70000E+22]	[-0.16000E+01]	[0.11320E+06]	[0.74287E+17]	[-0.60000E+00]	[0.00000E+00]						
10	[N2]	+	[NO+]	<=>	[N]	+	[N]	+	[NO+]	[0.70000E+22]	[-0.16000E+01]	[0.11320E+06]	[0.74287E+17]	[-0.60000E+00]	[0.00000E+00]						
11	[O2]	+	[N2]	<=>	[O]	+	[O]	+	[N2]	[0.20000E+22]	[-0.15000E+01]	[0.59500E+05]	[0.26705E+17]	[-0.50000E+00]	[0.00000E+00]						
12	[O2]	+	[O2]	<=>	[O]	+	[O]	+	[O2]	[0.20000E+22]	[-0.15000E+01]	[0.59500E+05]	[0.26705E+17]	[-0.50000E+00]	[0.00000E+00]						
13	[O2]	+	[NO]	<=>	[O]	+	[O]	+	[NO]	[0.20000E+22]	[-0.15000E+01]	[0.59500E+05]	[0.26705E+17]	[-0.50000E+00]	[0.00000E+00]						
14	[O2]	+	[N]	<=>	[O]	+	[O]	+	[N]	[0.10000E+23]	[-0.15000E+01]	[0.59500E+05]	[0.13353E+18]	[-0.50000E+00]	[0.00000E+00]						
15	[O2]	+	[O]	<=>	[O]	+	[O]	+	[O]	[0.10000E+23]	[-0.15000E+01]	[0.59500E+05]	[0.13353E+18]	[-0.50000E+00]	[0.00000E+00]						
16	[O2]	+	[N+]	<=>	[O]	+	[O]	+	[N+]	[0.10000E+23]	[-0.15000E+01]	[0.59500E+05]	[0.13353E+18]	[-0.50000E+00]	[0.00000E+00]						
17	[O2]	+	[O+]	<=>	[O]	+	[O]	+	[O+]	[0.10000E+23]	[-0.15000E+01]	[0.59500E+05]	[0.13353E+18]	[-0.50000E+00]	[0.00000E+00]						
18	[O2]	+	[N2+]	<=>	[O]	+	[O]	+	[N2+]	[0.20000E+22]	[-0.15000E+01]	[0.59500E+05]	[0.26705E+17]	[-0.50000E+00]	[0.00000E+00]						
19	[O2]	+	[O2+]	<=>	[O]	+	[O]	+	[O2+]	[0.20000E+22]	[-0.15000E+01]	[0.59500E+05]	[0.26705E+17]	[-0.50000E+00]	[0.00000E+00]						
20	[O2]	+	[NO+]	<=>	[O]	+	[O]	+	[NO+]	[0.20000E+22]	[-0.15000E+01]	[0.59500E+05]	[0.26705E+17]	[-0.50000E+00]	[0.00000E+00]						
21	[NO]	+	[N2]	<=>	[N]	+	[O]	+	[N2]	[0.50000E+16]	[0.00000E+00]	[0.75500E+05]	[0.25807E+12]	[0.10000E+01]	[0.00000E+00]						
22	[NO]	+	[O2]	<=>	[N]	+	[O]	+	[O2]	[0.50000E+16]	[0.00000E+00]	[0.75500E+05]	[0.25807E+12]	[0.10000E+01]	[0.00000E+00]						
23	[NO]	+	[NO]	<=>	[N]	+	[O]	+	[NO]	[0.11000E+18]	[0.00000E+00]	[0.75500E+05]	[0.56774E+13]	[0.10000E+01]	[0.00000E+00]						
24	[NO]	+	[N]	<=>	[N]	+	[O]	+	[N]	[0.11000E+18]	[0.00000E+00]	[0.75500E+05]	[0.56774E+13]	[0.10000E+01]	[0.00000E+00]						
25	[NO]	+	[O]	<=>	[N]	+	[O]	+	[O]	[0.11000E+18]	[0.00000E+00]	[0.75500E+05]	[0.56774E+13]	[0.10000E+01]	[0.00000E+00]						
26	[NO]	+	[N+]	<=>	[N]	+	[O]	+	[N+]	[0.11000E+18]	[0.00000E+00]	[0.75500E+05]	[0.56774E+13]	[0.10000E+01]	[0.00000E+00]						
27	[NO]	+	[O+]	<=>	[N]	+	[O]	+	[O+]	[0.11000E+18]	[0.00000E+00]	[0.75500E+05]	[0.56774E+13]	[0.10000E+01]	[0.00000E+00]						
28	[NO]	+	[N2+]	<=>	[N]	+	[O]	+	[N2+]	[0.50000E+16]	[0.00000E+00]	[0.75500E+05]	[0.25807E+12]	[0.10000E+01]	[0.00000E+00]						
29	[NO]	+	[O2+]	<=>	[N]	+	[O]	+	[O2+]	[0.50000E+16]	[0.00000E+00]	[0.75500E+05]	[0.25807E+12]	[0.10000E+01]	[0.00000E+00]						
30	[NO]	+	[NO+]	<=>	[N]	+	[O]	+	[NO+]	[0.50000E+16]	[0.00000E+00]	[0.75500E+05]	[0.25807E+12]	[0.10000E+01]	[0.00000E+00]						
31	[N2]	+	[O]	<=>	[NO]	+	[N]	+	[]	[0.64000E+18]	[-0.10000E+01]	[0.38400E+05]	[0.13159E+18]	[-0.10000E+01]	[0.49744E+03]						
32	[NO]	+	[O]	<=>	[O2]	+	[N]	+	[]	[0.84000E+13]	[0.00000E+00]	[0.19450E+05]	[0.32469E+14]	[0.00000E+00]	[0.34780E+04]						
33	[N]	+	[O]	<=>	[NO+]	+	[E-]	+	[]	[0.88000E+09]	[0.10000E+01]	[0.31900E+05]	[0.36997E+13]	[0.10000E+01]	[0.00000E+00]						
34	[N]	+	[N]	<=>	[N2+]	+	[E-]	+	[]	[0.44000E+08]	[0.15000E+01]	[0.67500E+05]	[0.48044E+11]	[0.15000E+01]	[0.00000E+00]						
35	[O]	+	[O]	<=>	[O2+]	+	[E-]	+	[]	[0.71000E+03]	[0.27000E+01]	[0.80600E+05]	[0.21358E+07]	[0.27000E+01]	[0.00000E+00]						
36	[N2]	+	[O2+]	<=>	[N2+]	+	[O2]	+	[]	[0.99000E+13]	[0.00000E+00]	[0.40700E+05]	[0.28561E+13]	[0.00000E+00]	[0.00000E+00]						
37	[N2]	+	[O+]	<=>	[N2+]	+	[O]	+	[]	[0.91000E+12]	[0.36000E+00]	[0.22800E+05]	[0.19774E+12]	[0.36000E+00]	[0.59851E+03]						
38	[O2]	+	[NO+]	<=>	[O2+]	+	[NO]	+	[]	[0.24000E+14]	[0.41000E+00]	[0.32600E+05]	[0.44426E+13]	[0.41000E+00]	[0.00000E+00]						
39	[NO]	+	[O+]	<=>	[N+]	+	[O2]	+	[]	[0.14000E+06]	[0.19000E+01]	[0.26600E+05]	[0.13322E+06]	[0.19000E+01]	[0.00000E+00]						
40	[N]	+	[O2+]	<=>	[N+]	+	[O2]	+	[]	[0.87000E+14]	[0.14000E+00]	[0.28600E+05]	[0.28434E+14]	[0.14000E+00]	[0.00000E+00]						
41	[N]	+	[NO+]	<=>	[O+]	+	[N2]	+	[]	[0.34000E+14]	[-0.18000E+01]	[0.12800E+05]	[0.40638E+14]	[-0.18000E+01]	[0.00000E+00]						
42	[O]	+	[O2+]	<=>	[O+]	+	[O2]	+	[]	[0.40000E+13]	[-0.90000E-01]	[0.18000E+05]	[0.53106E+13]	[-0.90000E-01]	[0.00000E+00]						
43	[O]	+	[NO+]	<=>	[N+]	+	[O2]	+	[]	[0.10000E+13]	[0.50000E+00]	[0.77200E+05]	[0.23385E+12]	[0.50000E+00]	[0.00000E+00]						
44	[N]	+	[NO+]	<=>	[N2+]	+	[O]	+	[]	[0.72000E+14]	[0.00000E+00]	[0.35500E+05]	[0.18700E+14]	[0.00000E+00]	[0.00000E+00]						
45	[O]	+	[NO+]	<=>	[O2+]	+	[N]	+	[]	[0.72000E+13]	[0.29000E+00]	[0.48600E+05]	[0.51518E+13]	[0.29000E+00]	[0.00000E+00]						
46	[N]	+	[E-]	<=>	[N+]	+	[E-]	+	[E-]	[0.25000E+35]	[-0.38200E+01]	[0.16860E+06]	[0.32819E+33]	[-0.28200E+01]	[0.00000E+00]						
47	[O]	+	[E-]	<=>	[O+]	+	[E-]	+	[E-]	[0.39000E+34]	[-0.37800E+01]	[0.15850E+06]	[0.20798E+33]	[-0.27800E+01]	[0.00000E+00]						
48	[N2]	+	[E-]	<=>	[N]	+	[N]	+	[E-]	[0.12000E+26]	[-0.16000E+01]	[0.11320E+06]	[0.12735E+21]	[-0.60000E+00]	[0.00000E+00]						

Рисунок 6.1.1 – Модель химической кинетики Парка

Первые тридцать реакций – реакции диссоциации молекул азота, кислорода и оксида азота, 31 и 32 – обменные реакции, 33, 34, 35 – реакции ассоциативной ионизации и диссоциативной рекомбинации, с 36 по 45 – реакции обмена зарядом, 46, 47, 48 – реакции ионизации и диссоциации электронным ударом [43, 45, 84].

Механизм протекания химических реакций в высокотемпературном воздухе при давлении в 1 атм, следующий: при температуре в 2000 К начинается диссоциация O_2 . Когда температура достигает 4000 К практически весь кислород становится атомарным и начинается диссоциация N_2 . В диапазоне температур от 4000 К до 6000 К образование электронов происходит вследствие ионизации NO . При достижении температуры в 9000 К основная часть молекул азота диссоциирована, начинается ионизация кислорода и азота. С последующим ростом температуры более 9000 К мы имеем частично ионизированную плазму, состоящую в основном из O , O^+ , N , N^+ и электронов [85] (рисунок 6.1.2).

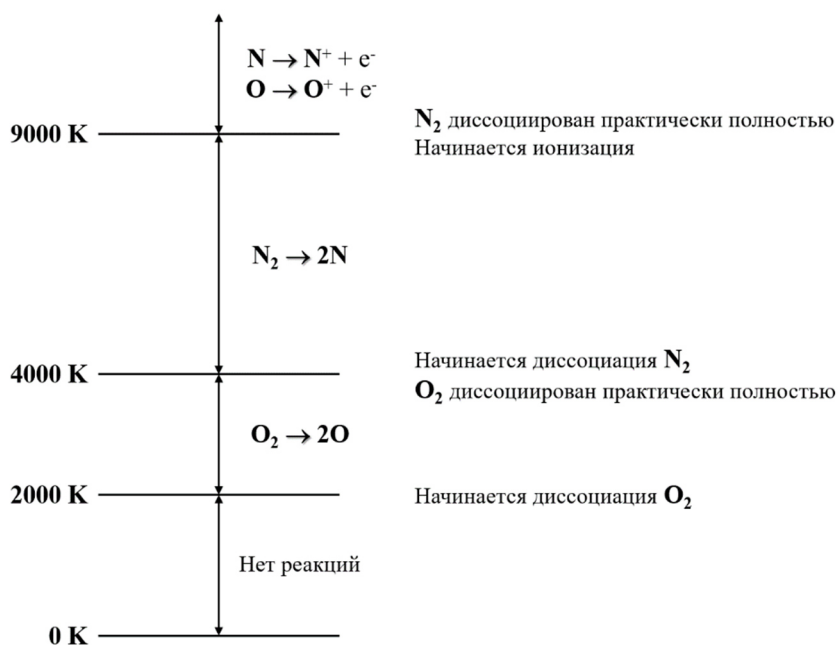


Рисунок 6.1.2 – Диапазон диссоциации и ионизации воздуха

Для расчёта свойств переноса химических компонент высокотемпературного воздуха использовалась методика, применяемая компьютерными кодами вычислительной аэротермодинамики NASA, LAURA и DPLR [86]. Значения коэффициентов аппроксимации для вычисления

интегралов столкновения нейтральных и заряженных частиц 11-ти компонентного воздуха были заимствованы из работ [37, 87].

Так же в рамках решения данной задачи анализировался и более простой способ учёта реальных эффектов газа в гиперзвуковом потоке [88]. Для замыкания системы уравнений газовой динамики использовалась термодинамическая модель равновесного воздуха А.Н. Крайко [89], в которой термическое и калорическое уравнения состояния записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \frac{p}{\rho} &= \frac{R}{M} T (1 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4), \\
 e &= \frac{R}{M} T \left[(0.21 - C_1) H_{O_2} + (0.79 - C_2) H_{N_2} + \right. \\
 &\quad + 2(C_1 - 0.21 C_3) H_O + 2(C_2 - 0.79 C_3) H_N + \\
 &\quad \left. + 2 C_3 H_{M+} + 5(C_3 + C_4) \right] + \\
 &\quad + \frac{R}{M} (59000 C_1 + 113200 C_2 + 333000 C_3 + 687000 C_4) - \\
 &\quad - \frac{R}{M} T (1 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4),
 \end{aligned} \tag{39}$$

где выражения для расчёта энтальпий компонентов газовой смеси имеют вид:

$$\begin{aligned}
 H_{O_2} &= 3.076 + 1.19 \cdot 10^{-3} T - 9.00 \cdot 10^{-8} T^2, \\
 H_{N_2} &= 3.415 + 2.17 \cdot 10^{-4} T - 1.20 \cdot 10^{-8} T^2, \\
 H_O &= 2.514 + 1.00 \cdot 10^{-5} T + 1.20 \cdot 10^{-10} T^2, \\
 H_N &= 2.117 + 1.00 \cdot 10^{-4} T - 1.97 \cdot 10^{-9} T^2, \\
 H_{M+} &= 2.460 + 2.00 \cdot 10^{-5} T,
 \end{aligned} \tag{40}$$

а равновесные концентрации компонентов газовой смеси вычисляются по следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= 1 / \left[1.88 + \sqrt{8.3 + \frac{p}{T} \exp\left(\frac{57800}{T} - 4.02 + 1.32 \cdot 10^{-4} T\right)} \right], \\
 C_2 &= 1 / \left[0.22 + \sqrt{1.096 + \frac{p}{T} \exp\left(\frac{113300}{T} - 5.94\right)} \right], \\
 C_3 &= 1 / \sqrt{1 + \frac{p}{T^{5/2}} \exp\left(\frac{166530 - 10p}{T} + 13.77\right)}, \\
 C_4 &= -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1.58 / \left[1 + \frac{p}{T^{5/2}} \exp\left(\frac{343500}{T} + 14.84\right) \right]},
 \end{aligned} \tag{41}$$

где C_1 и C_2 концентрации диссоциированных молекул на атомы O и N, а C_3 и C_4 концентрации ионизированных атомов однократно и двукратно.

Данные выражения аналитического представления термодинамических функций равновесного воздуха [89] имеют следующие размерности величин:

$$p(\text{атм}), \rho\left(\frac{\text{кг} \cdot \text{атм}}{\text{Дж}}\right), e\left(\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}\right), T(\text{К}), \frac{R}{M}\left(\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}\right).$$

Получение данных выражений основывалось на следующих предположениях:

- недиссоциированный воздух состоит из N_2 и O_2 с концентрациями 0.79 и 0.21;
- отсутствуют соединения N и O;
- реакции идут последовательно:
 - диссоциация O_2 ;
 - диссоциация N_2 ;
 - однократная ионизация N и O;
 - двукратная ионизация N.
- двукратная ионизация O не учитывается;
- однократная ионизация N и O заменяется ионизацией некоторого газа, свойства которого получаются осреднением по числу частиц;
- для каждого компонента выполняется уравнение состояния совершенного газа.

Для вычисления корней термодинамических функций используется итерационный численный метод Ньютона, записанный в следующем виде:

$$p^{n+1} = p^n + \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad T^{n+1} = T^n + \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1(p,T)}{\partial p} & \frac{\partial F_1(p,T)}{\partial T} \\ \frac{\partial F_2(p,T)}{\partial p} & \frac{\partial F_2(p,T)}{\partial T} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -R_1(p,T) & \frac{\partial F_1(p,T)}{\partial T} \\ -R_2(p,T) & \frac{\partial F_2(p,T)}{\partial T} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1(p,T)}{\partial p} & -R_1(p,T) \\ \frac{\partial F_2(p,T)}{\partial p} & -R_2(p,T) \end{vmatrix}, \quad (42)$$

где $F_1(p,T) = \rho$, $F_2(p,T) = e$, $R_1(p,T) = F_1(p,T) - \rho^{n+1}$, $R_2(p,T) = F_2(p,T) - e^{n+1}$.

Геометрические размеры спускаемого космического аппарата Аполлон-4 приведены на рисунке 6.1.3.

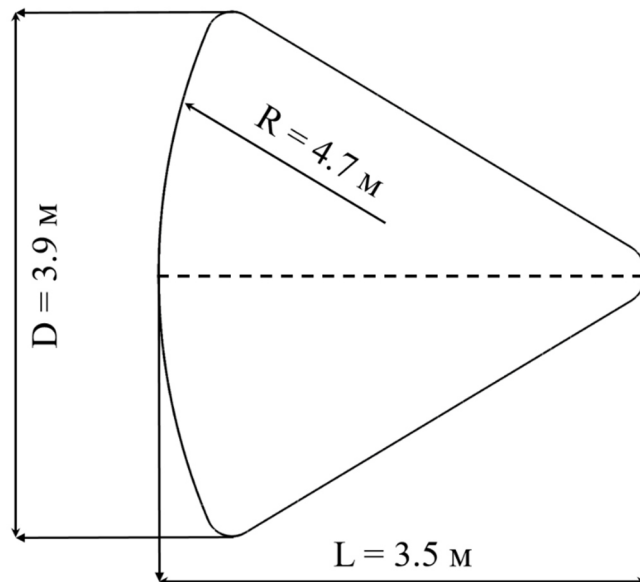


Рисунок 6.1.3 – Геометрические размеры спускаемого аппарата Аполлон-4

В качестве начальных условий для численного моделирования гиперзвукового обтекания спускаемого космического аппарата Аполлон-4 использовались данные, соответствующие вхождению в атмосферу на высоте 61 км под углом атаки 25° , приведённые в таблице 6.1.1.

Таблица 6.1.1 – Исходные данные для моделирования гиперзвукового обтекания космического аппарата Аполлон-4

M_∞	V_∞ , км/с	ρ_∞ , кг/м ³	P_∞ , Па	T_∞ , К
32.5	10.2	$2.71 \cdot 10^{-4}$	19.1	244

Численное моделирование трёхмерного поля течения около спускаемого аппарата проводилось на неструктурированных сетках двух типов: тетраэдральная и квазирегулярная. В обоих типах сгущение расчётной сетки осуществлялось вблизи поверхности лобового аэродинамического щита аппарата для более детального описания поля течения в сжатом слое и пристеночной области. Сгущение квазирегулярной расчётной сетки проводилось призматическими элементами с равномерным шагом по нормали к поверхности, на расстоянии от стенки в 0.3 м и количеством ячеек поперёк призматического слоя в 300 элементов, с целью более подробного разрешения фронта ударной волны. Количество ячеек в расчётной области составило

4 615 178 для тетраэдральной сетки и 27 199 620 для квазирегулярной сетки (рисунок 6.1.4).

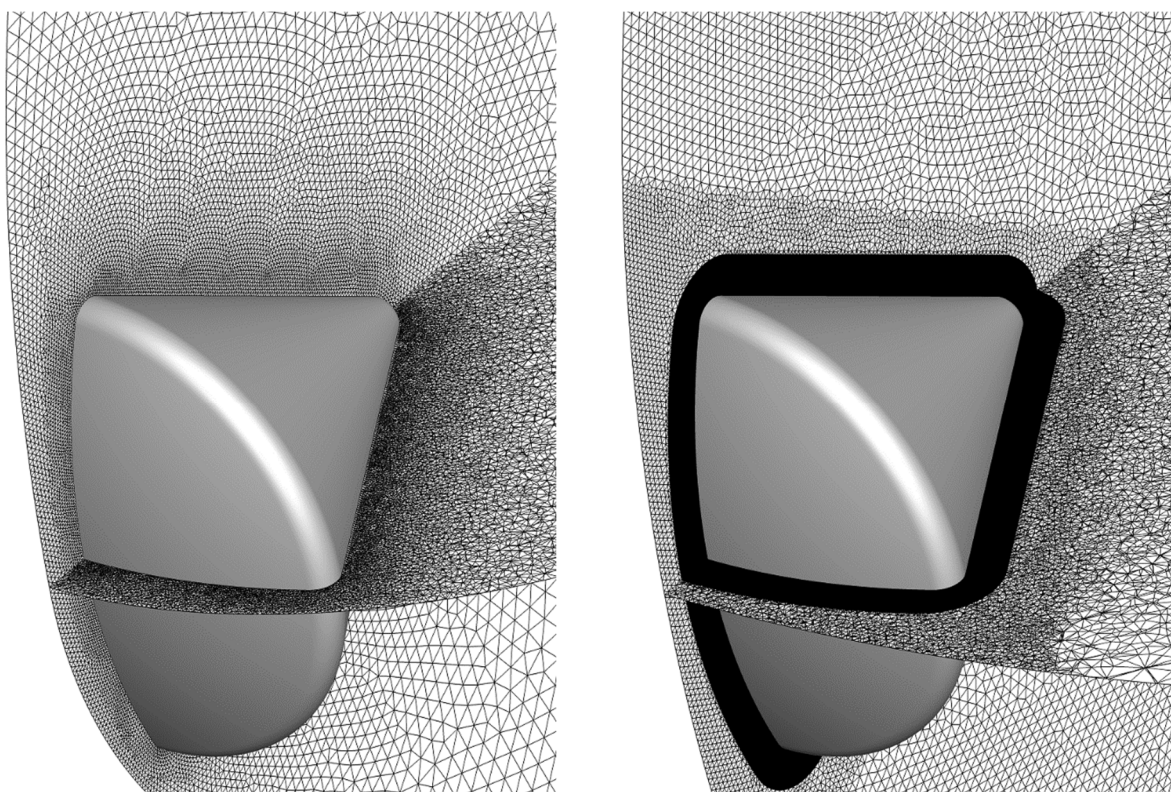


Рисунок 6.1.4 – Тетраэдральная и квазирегулярная расчётные сетки

На поверхности обтекаемого тела ставились граничные условия прилипания. Поверхность считалась некаталитической. Численное моделирование проводилось в два этапа. На первом этапе расчёт проводился с постоянной температурой поверхности, 300 К. На втором этапе температура поверхности T_w вычислялась из условия равновесно излучающей поверхности:

$$\varepsilon \sigma T_w^4 = |q_w|, \quad (43)$$

где q_w – плотность полного теплового потока на поверхности обтекаемого тела, ε – степень черноты поверхности задавалась равной 0.8, σ – постоянная Стефана–Больцмана.

Квазистационарное поле течения было получено в результате численного решения методом установления.

6.1.2 Результаты расчётов

На рисунках 6.1.5 – 6.1.10 представлены распределения продольной компоненты скорости, давления, плотности, температуры, показателя

адиабаты и числа Маха полученные в результате численного моделирования на тетраэдральной расчётной сетке с использованием моделей равновесной термодинамики Крайко (слева) и химической кинетики Парка (справа).

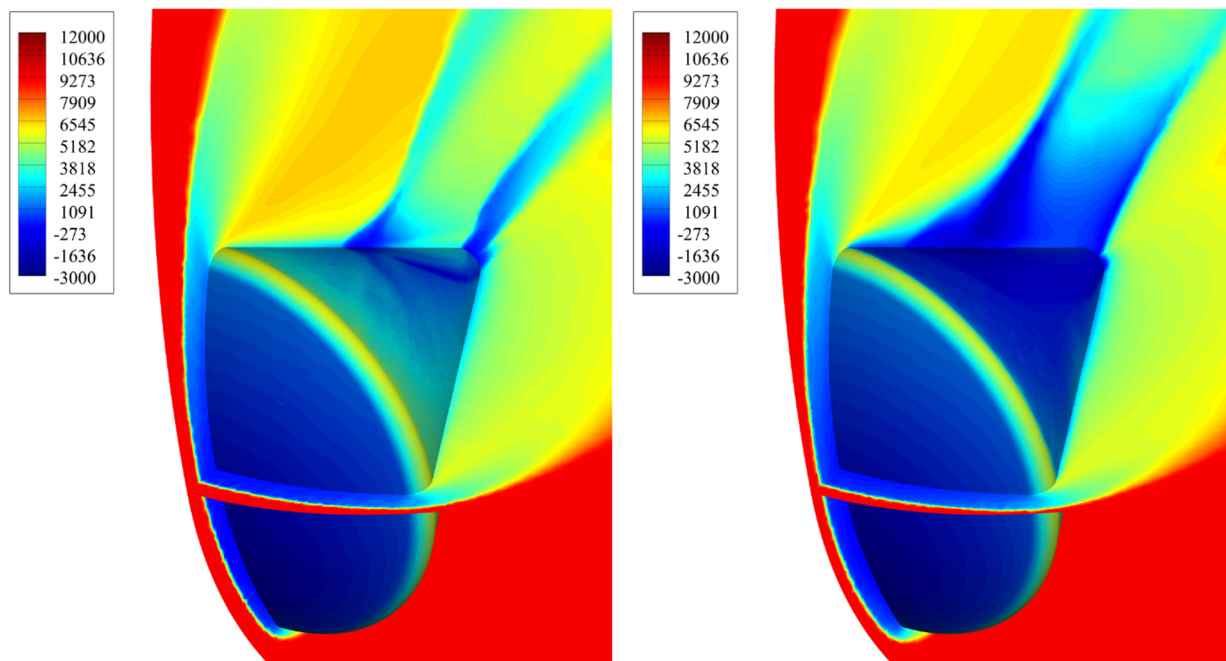


Рисунок 6.1.5 – Распределение продольной компоненты скорости (м/с) в окрестности спускаемого космического аппарата Аполлон-4

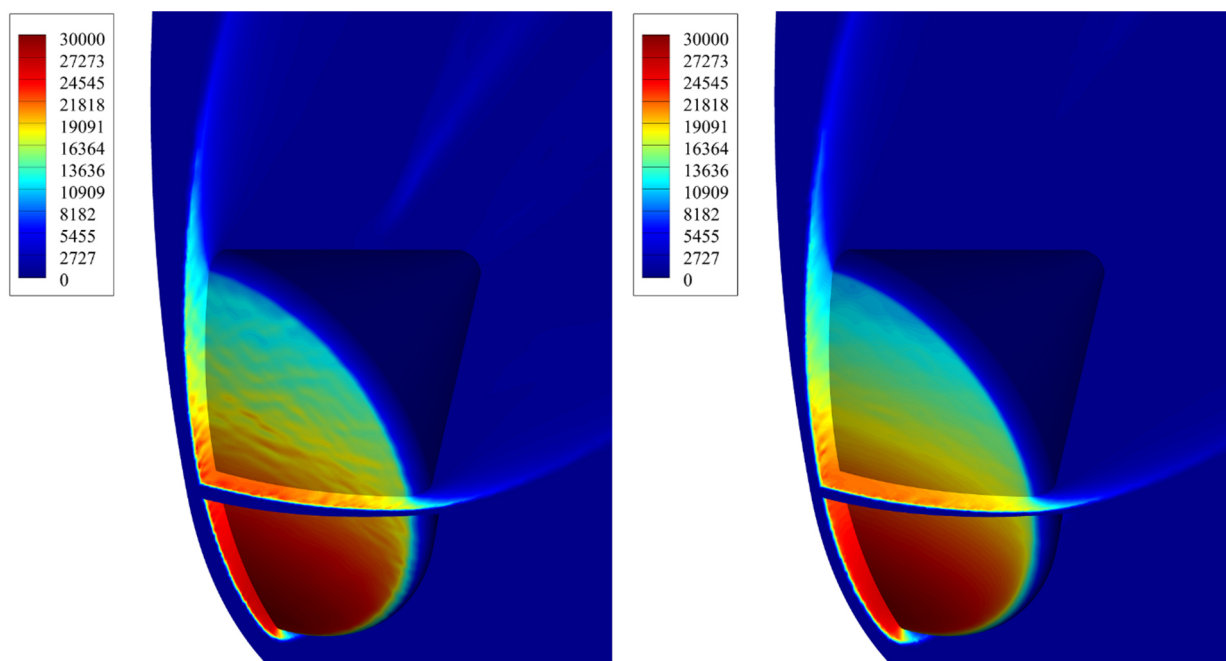


Рисунок 6.1.6 – Распределение давления (Па) в окрестности спускаемого космического аппарата Аполлон-4

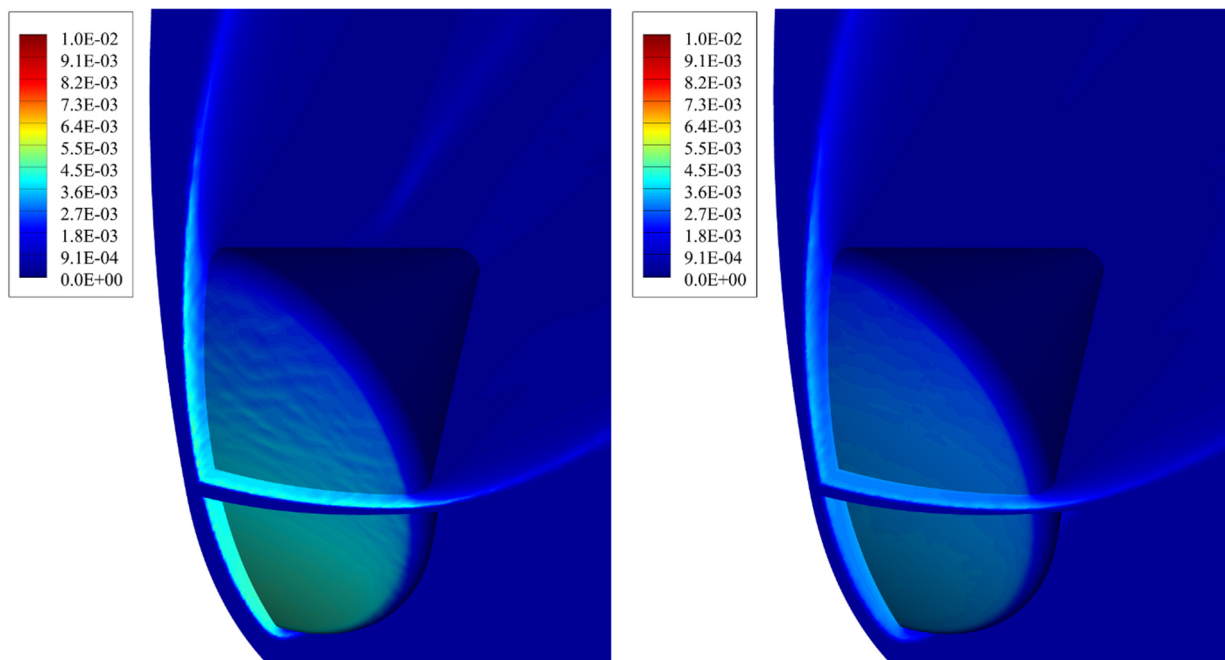


Рисунок 6.1.7 – Распределение плотности (кг/м^3) в окрестности спускаемого космического аппарата Аполлон-4

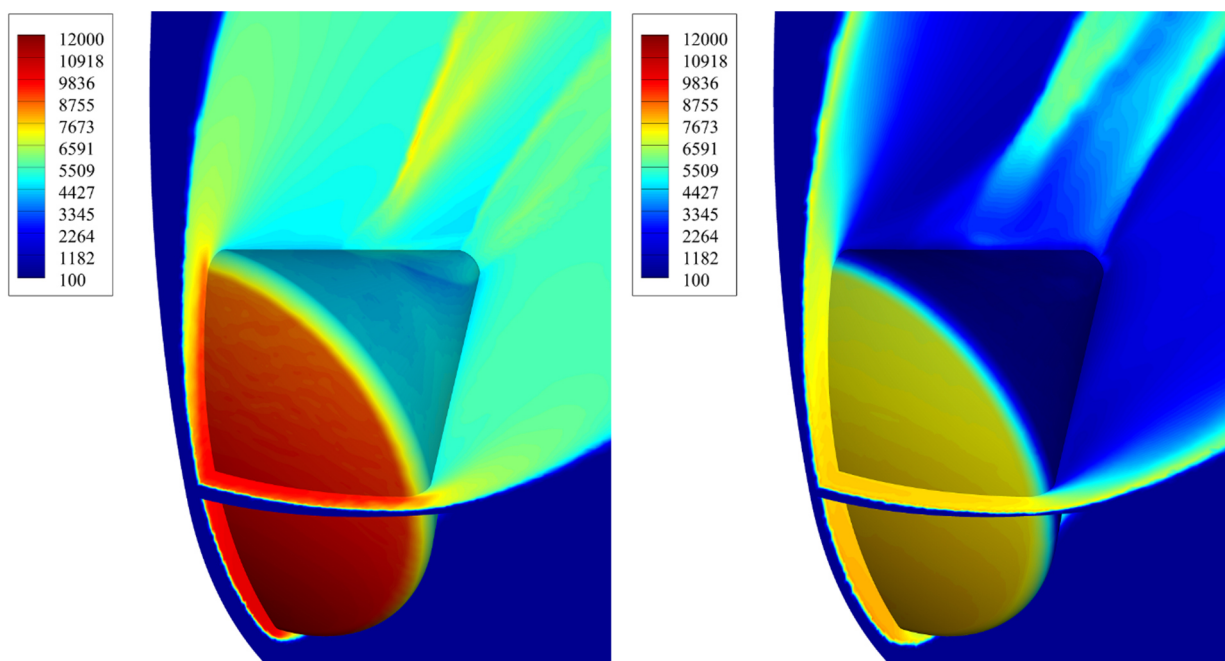


Рисунок 6.1.8 – Распределение температуры (K) в окрестности спускаемого космического аппарата Аполлон-4

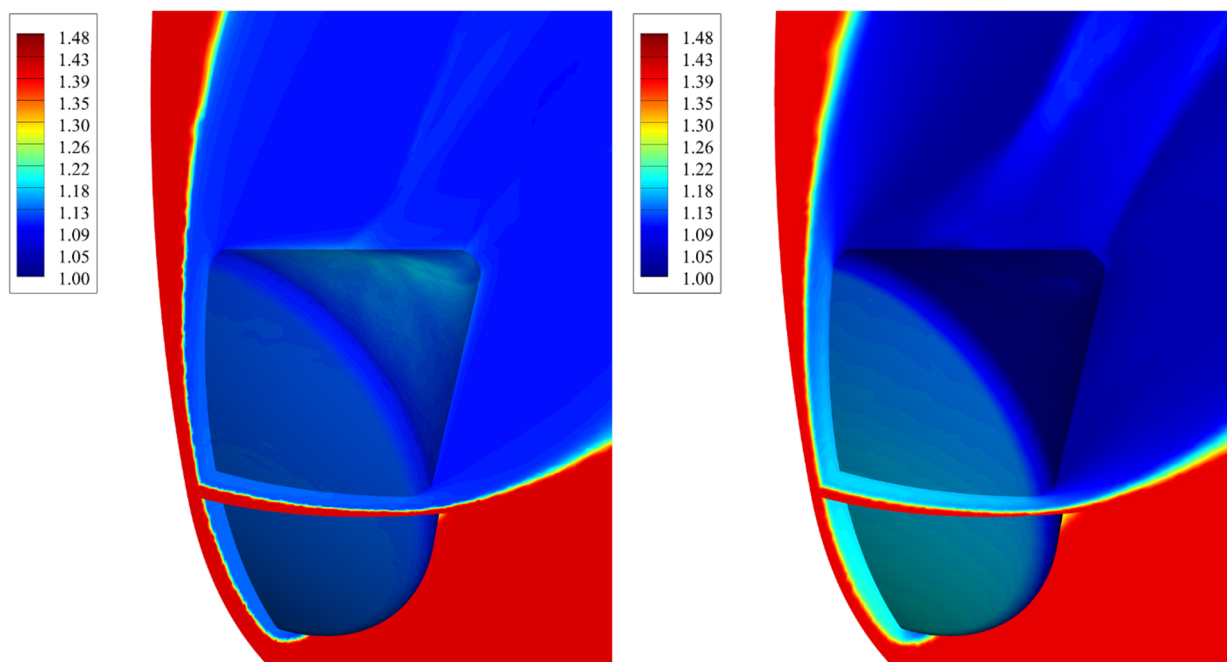


Рисунок 6.1.9 – Распределение показателя адиабаты в окрестности спускаемого космического аппарата Аполлон-4

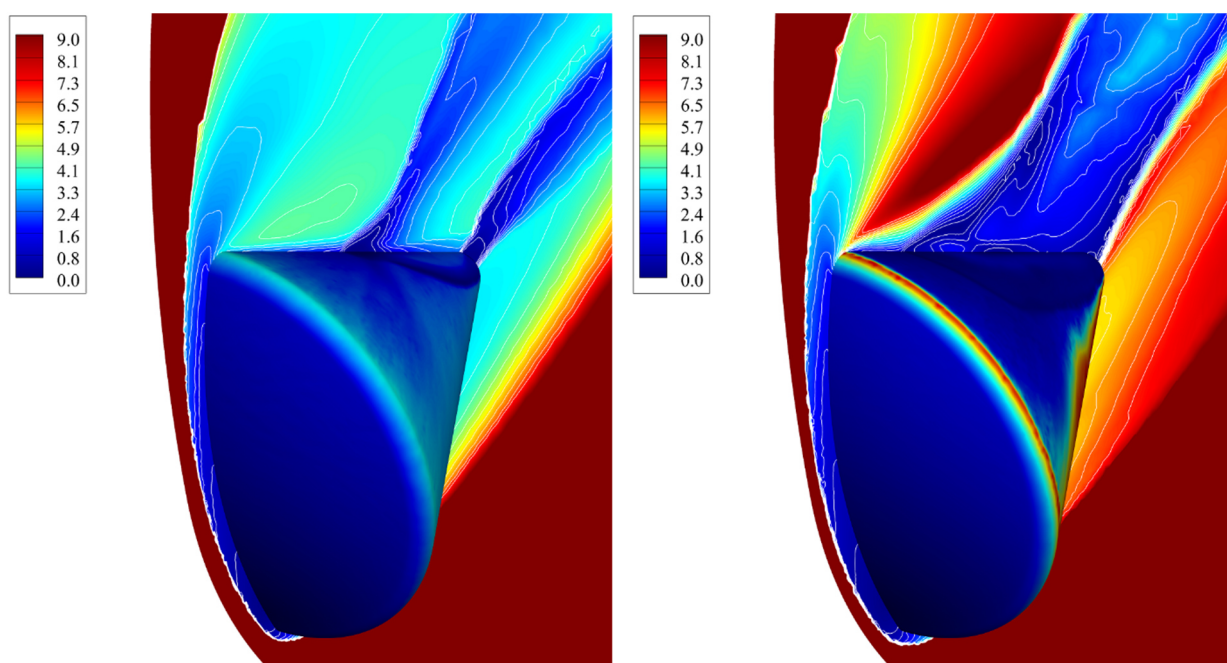


Рисунок 6.1.10 – Распределение числа Маха в окрестности спускаемого космического аппарата Аполлон-4

На графиках показаны распределения давления (рисунок 6.1.11) и температуры (рисунок 6.1.12) вдоль критической линии тока, полученные в результате численного моделирования на тетраэдральной (символ ▲)

расчётной сетке с использованием моделей равновесной термодинамики Крайко и химической кинетики Парка.

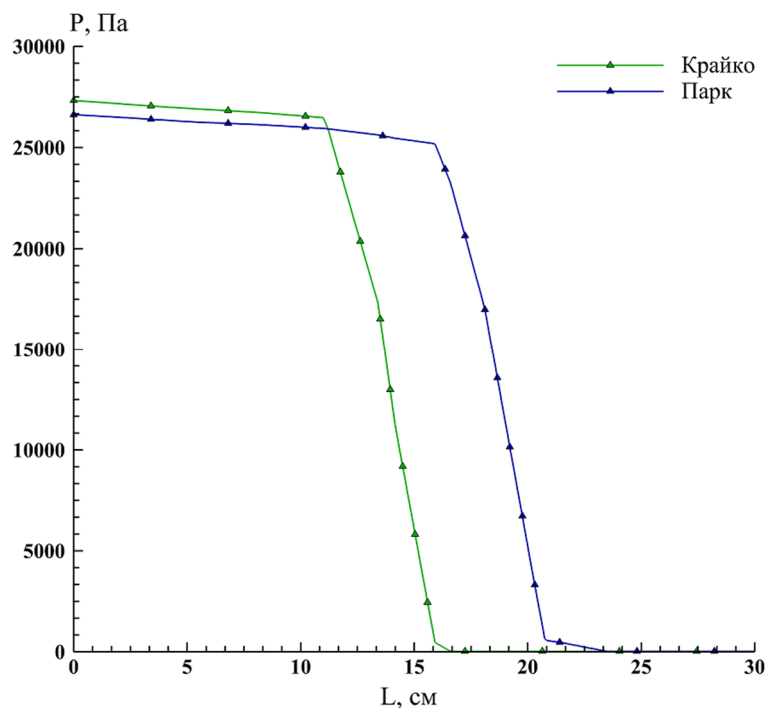


Рисунок 6.1.11 – Распределение давления в сжатом слое вдоль критической линии тока

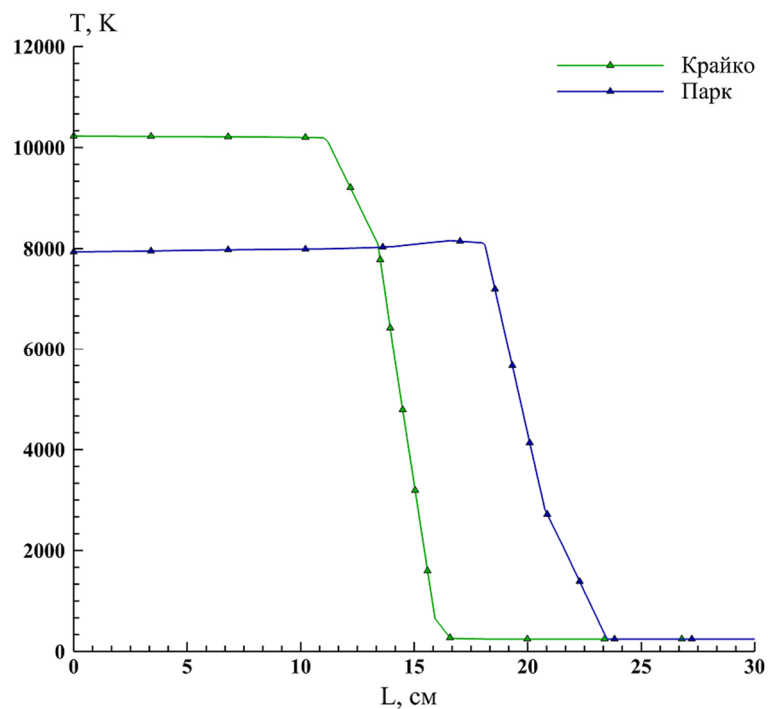


Рисунок 6.1.12 – Распределение температуры в сжатом слое вдоль критической линии тока

Как видно из графика (рисунок 6.1.12) профили температуры в сжатом слое, полученные с использованием моделей равновесной термодинамики Крайко и химической кинетики Парка, отличаются более чем на 2000 К. В случае использования модели равновесной термодинамики Крайко рост температуры в сжатом слое происходит по причине мгновенного протекания химических реакций в газовом потоке.

Вследствие того, что в расчётах, проводимых на тетраэдральной сетке, отсутствовало разрешение пограничного слоя, на распределение температуры в сжатом слое не наблюдается снижения температуры вблизи поверхности спускаемого аппарата (рисунок 6.1.12).

На рисунках 6.1.13 – 6.1.15 представлены распределения продольной компоненты скорости, числа Маха, давления, плотности, температуры и показателя адиабаты, полученные в результате численного моделирования на квазирегулярной расчётной сетке с использованием модели химической кинетики Парка.

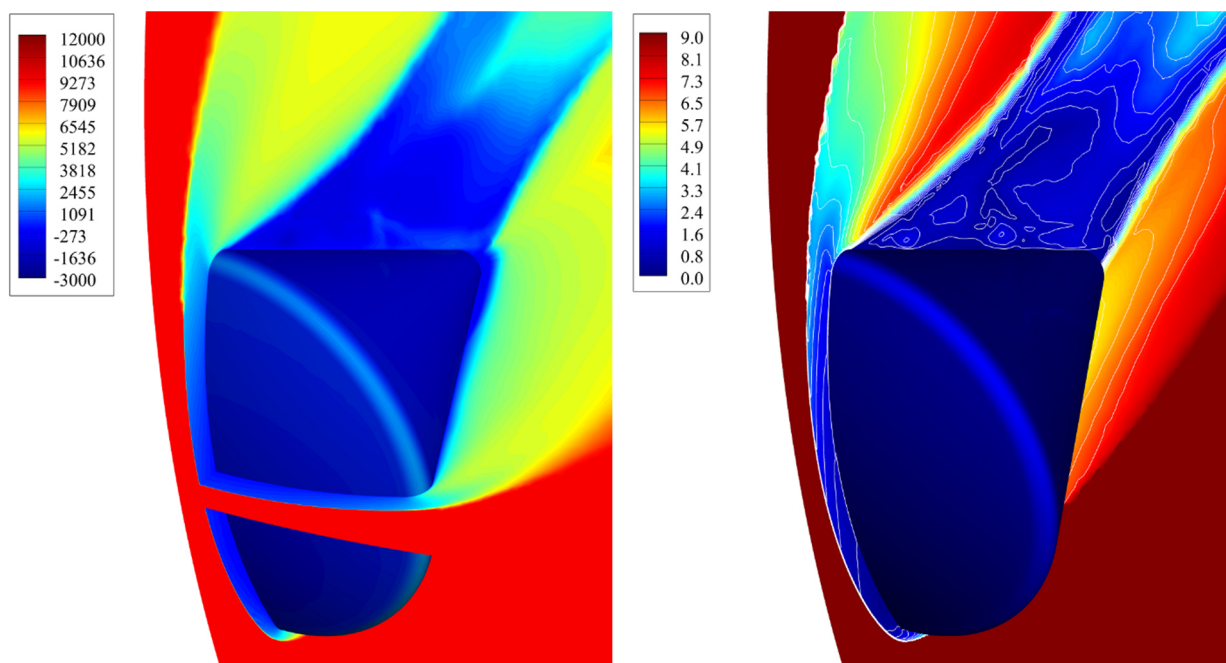


Рисунок 6.1.13 – Распределение продольной компоненты скорости (м/с) и числа Маха в окрестности спускаемого космического аппарата Аполлон-4

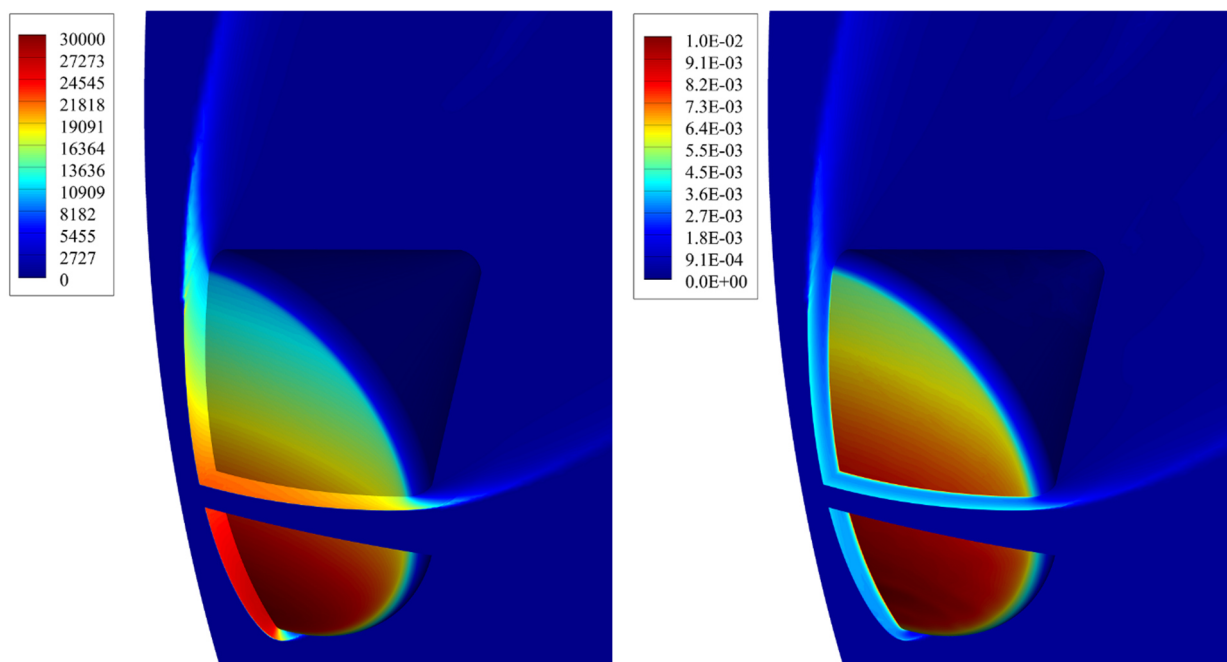


Рисунок 6.1.14 – Распределение давления (Па) и плотности (кг/м^3) в окрестности спускаемого космического аппарата Аполлон-4

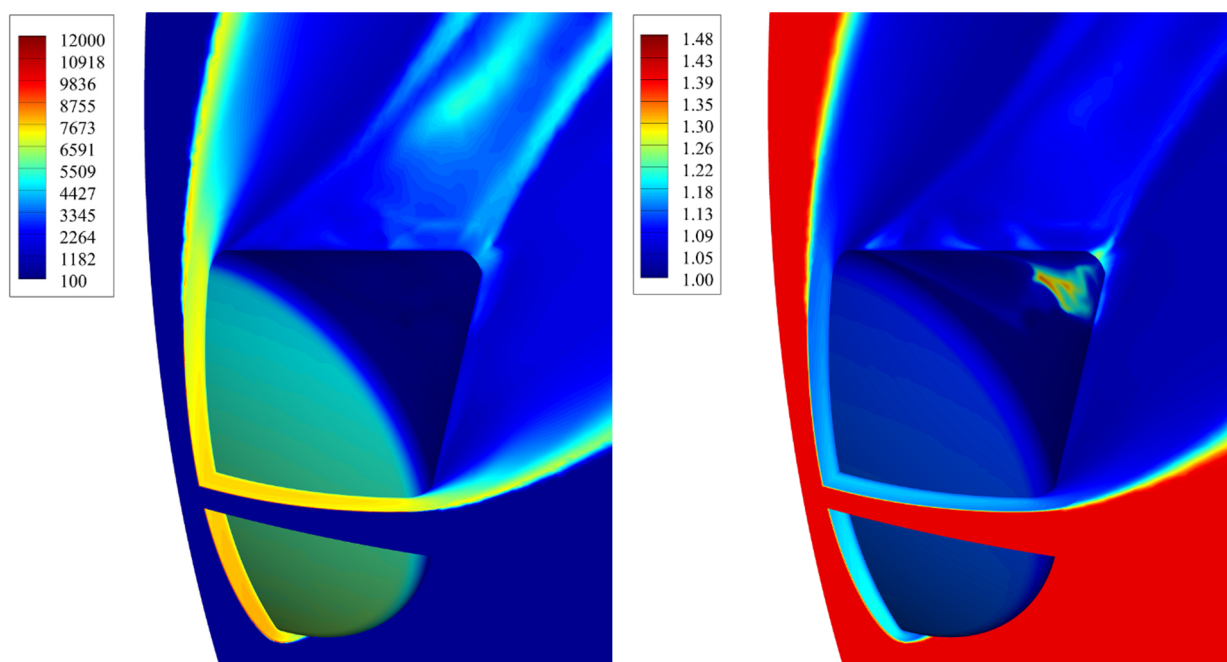


Рисунок 6.1.15 – Распределение температуры (К) и показателя адиабаты в окрестности спускаемого космического аппарата Аполлон-4

На графиках показаны распределения давления (рисунок 6.1.16) и температуры (рисунок 6.1.17) вдоль критической линии тока, полученные в результате численного моделирования на квазирегулярной (символ ■)

и тетраэдральной (символ ▲) расчётных сетках с использованием моделей равновесной термодинамики Крайко и химической кинетики Парка.

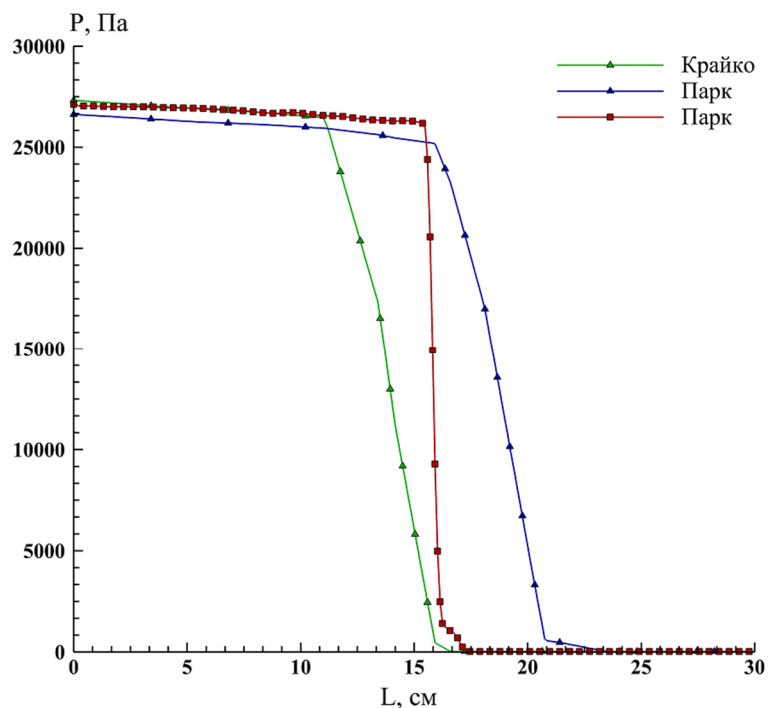


Рисунок 6.1.16 – Распределение давления в сжатом слое вдоль критической линии тока

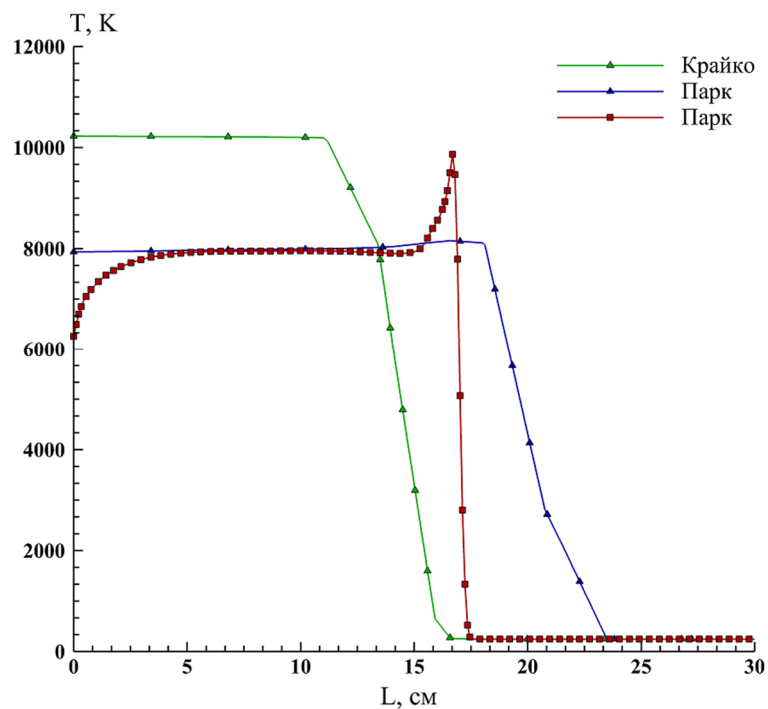


Рисунок 6.1.17 – Распределение температуры в сжатом слое вдоль критической линии тока

На рисунках 6.1.18 – 6.1.22 представлены распределения массовых концентраций химических компонент газовой смеси: N_2 , O_2 , NO , N , O , полученные в результате численного моделирования на квазирегулярной (слева) и тетраэдральной (справа) расчётных сетках с использованием модели химической кинетики Парка.

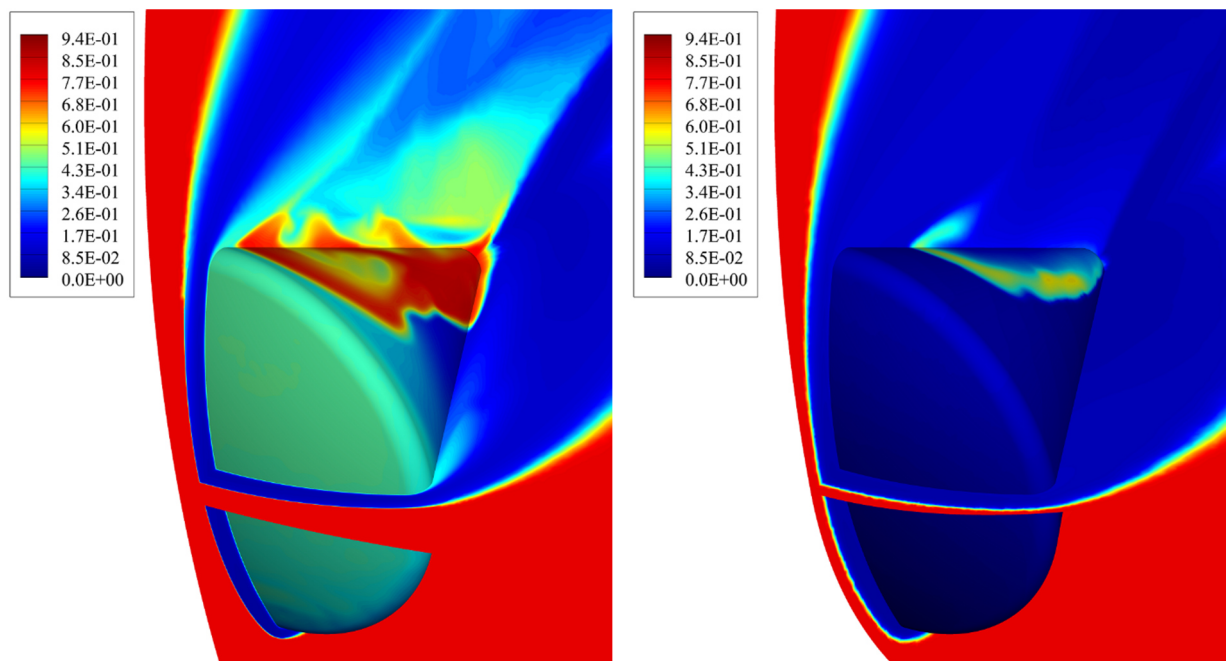


Рисунок 6.1.18 – Распределение массовой концентрации N_2 в окрестности спускаемого космического аппарата Аполлон-4

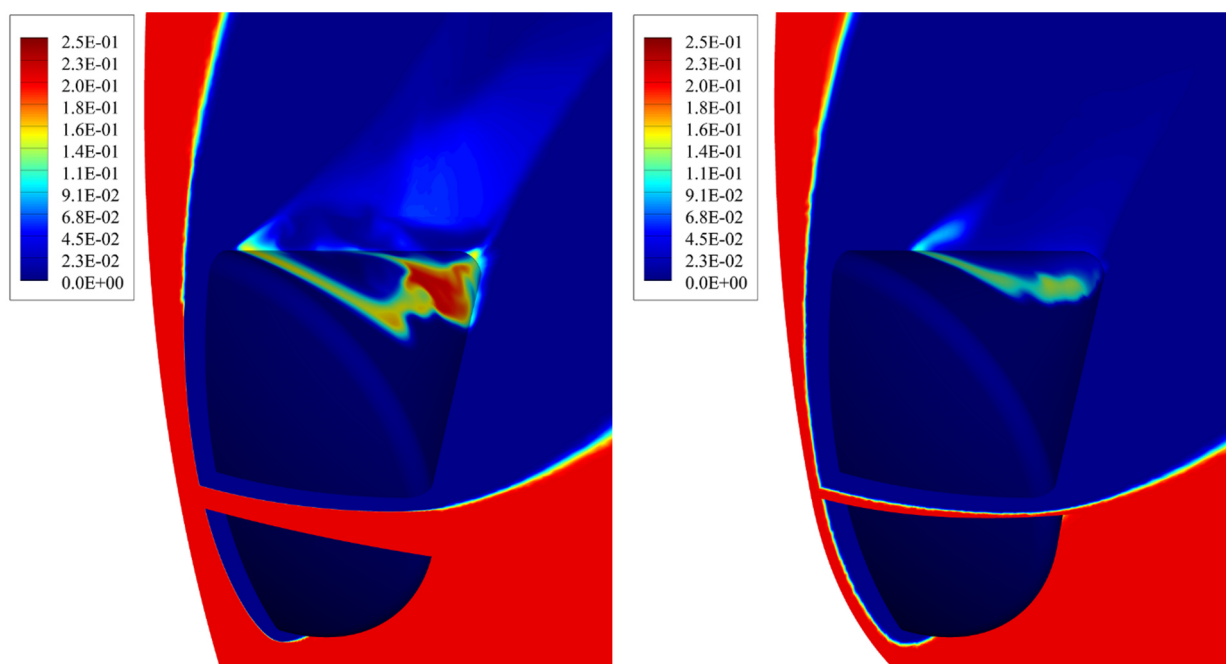


Рисунок 6.1.19 – Распределение массовой концентрации O_2 в окрестности спускаемого космического аппарата Аполлон-4

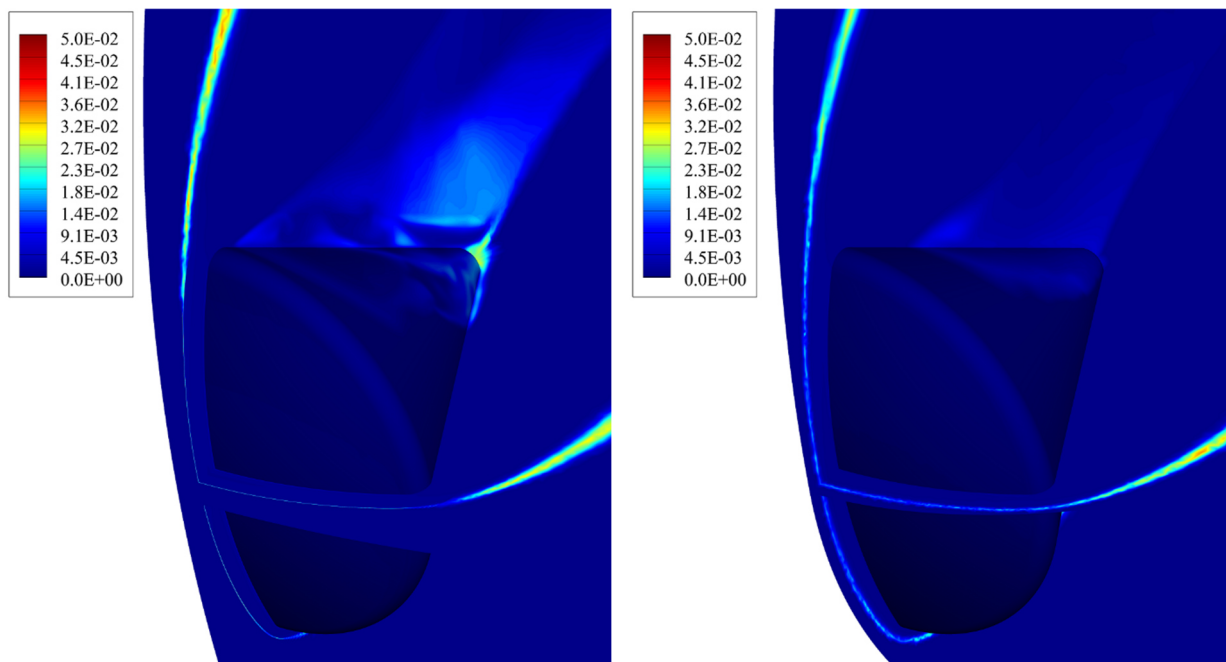


Рисунок 6.1.20 – Распределение массовой концентрации NO в окрестности спускаемого космического аппарата Аполлон-4

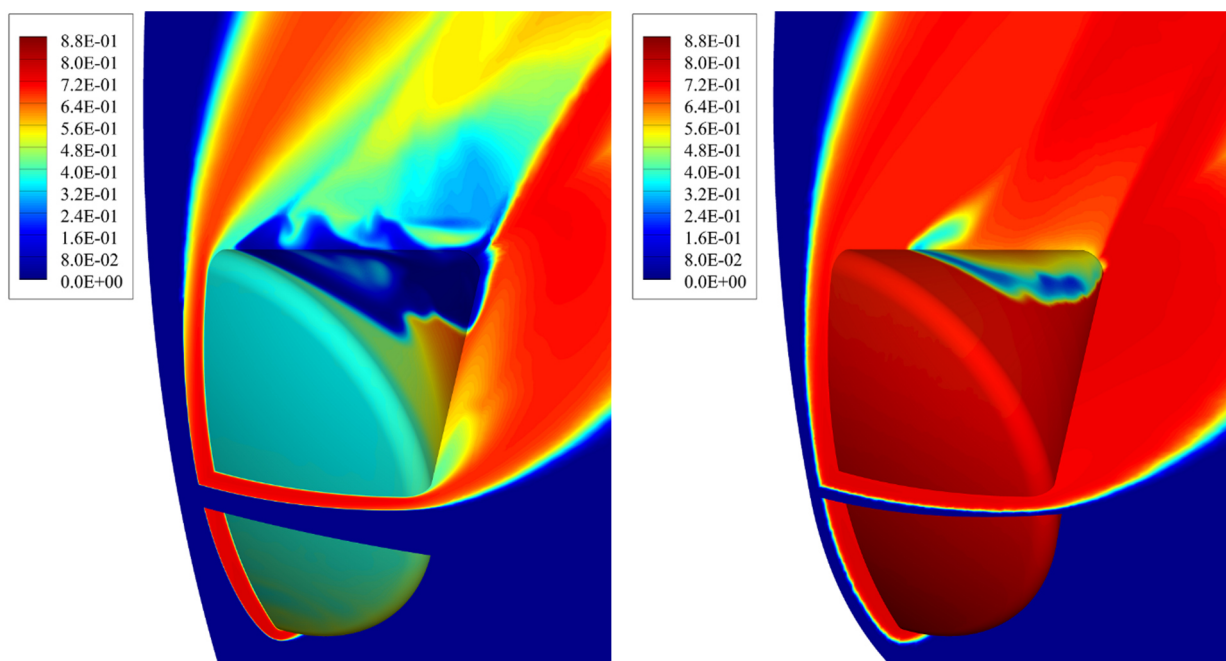


Рисунок 6.1.21 – Распределение массовой концентрации N в окрестности спускаемого космического аппарата Аполлон-4

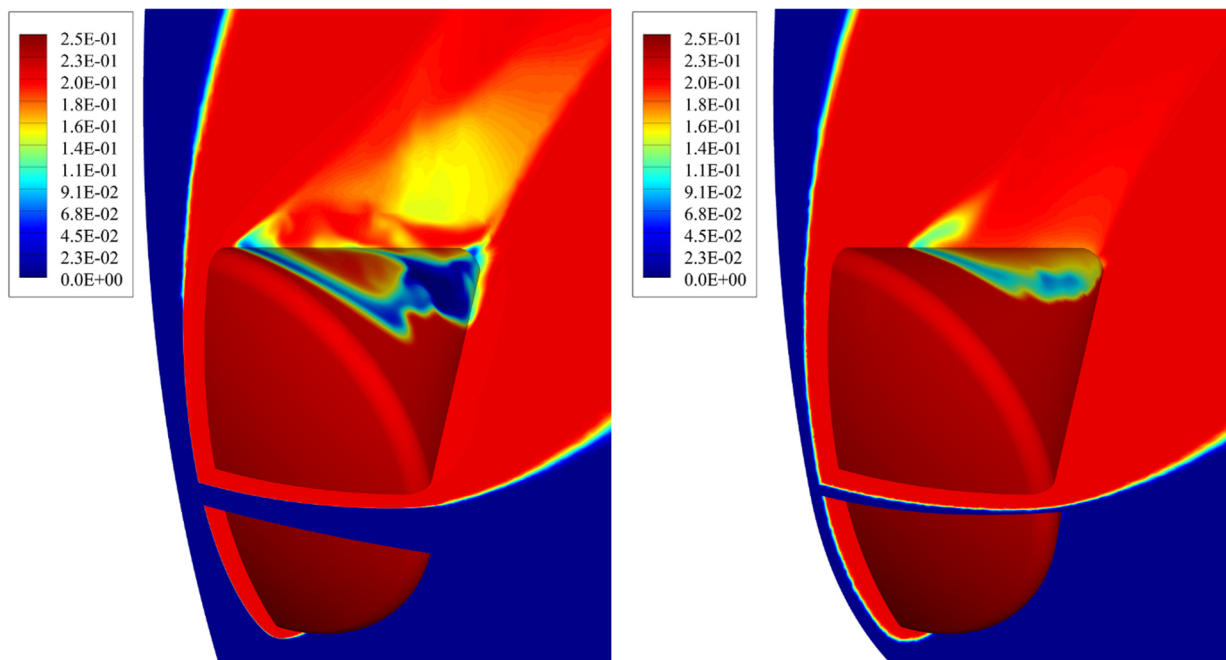


Рисунок 6.1.22 – Распределение массовой концентрации O в окрестности спускаемого космического аппарата Аполлон-4

На рисунках 6.1.23 – 6.1.28 представлены распределения массовых концентраций химических компонент газовой смеси: N^+ , O^+ , N_2^+ , O_2^+ , NO^+ , e^- , полученные в результате численного моделирования на квазирегулярной (слева) и тетраэдральной (справа) расчётных сетках с использованием модели химической кинетики Парка.

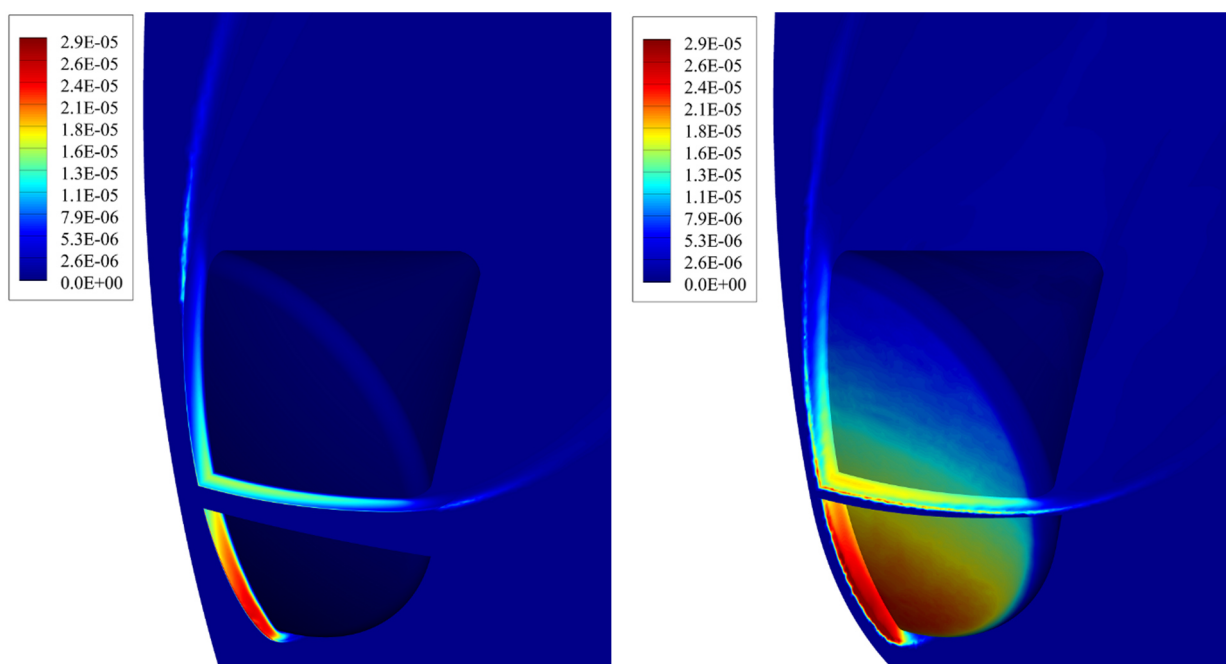


Рисунок 6.1.23 – Распределение массовой концентрации N^+ в окрестности спускаемого космического аппарата Аполлон-4

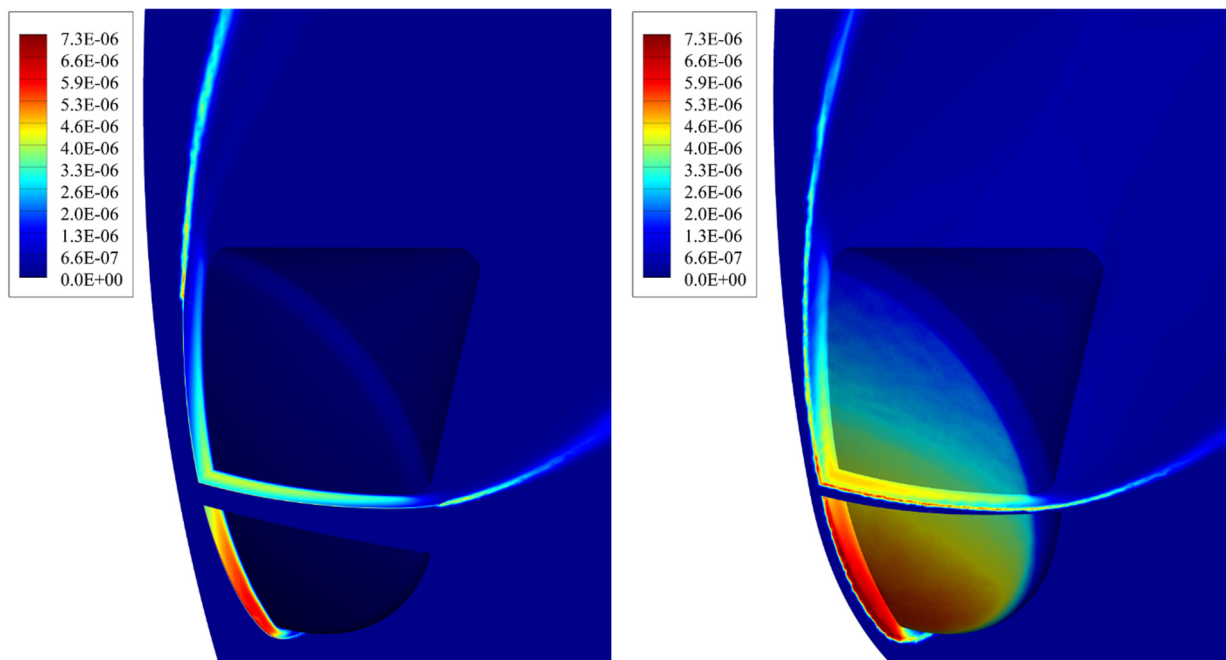


Рисунок 6.1.24 – Распределение массовой концентрации O^+ в окрестности спускаемого космического аппарата Аполлон-4

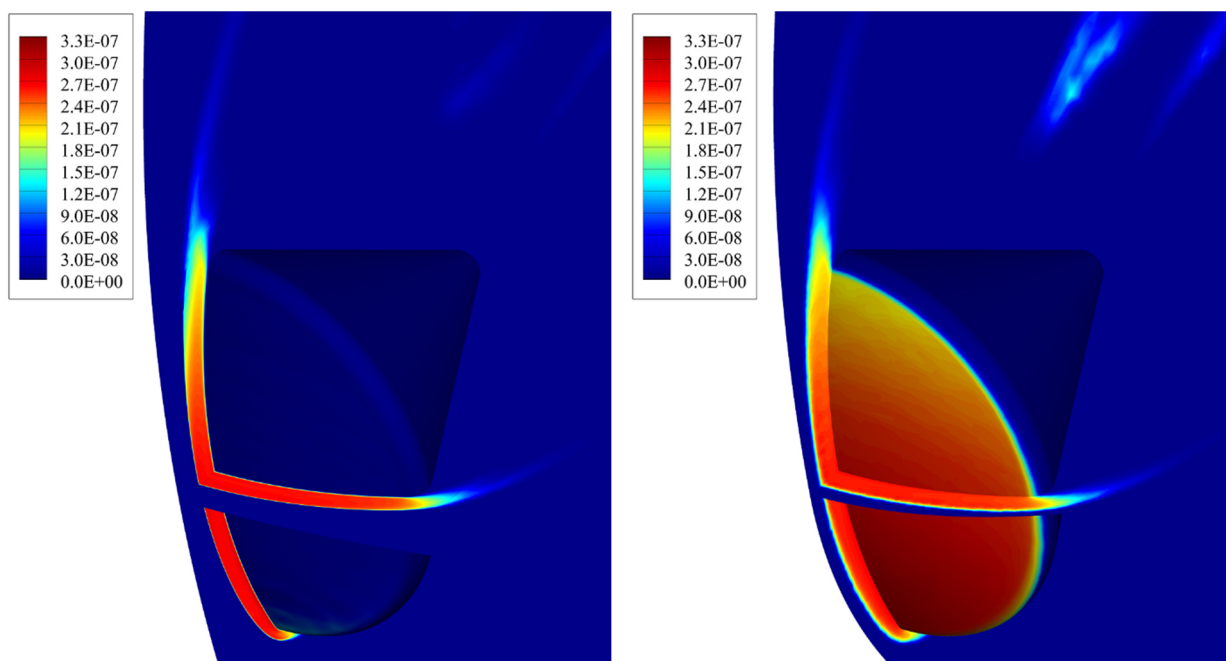


Рисунок 6.1.25 – Распределение массовой концентрации N_2^+ в окрестности спускаемого космического аппарата Аполлон-4

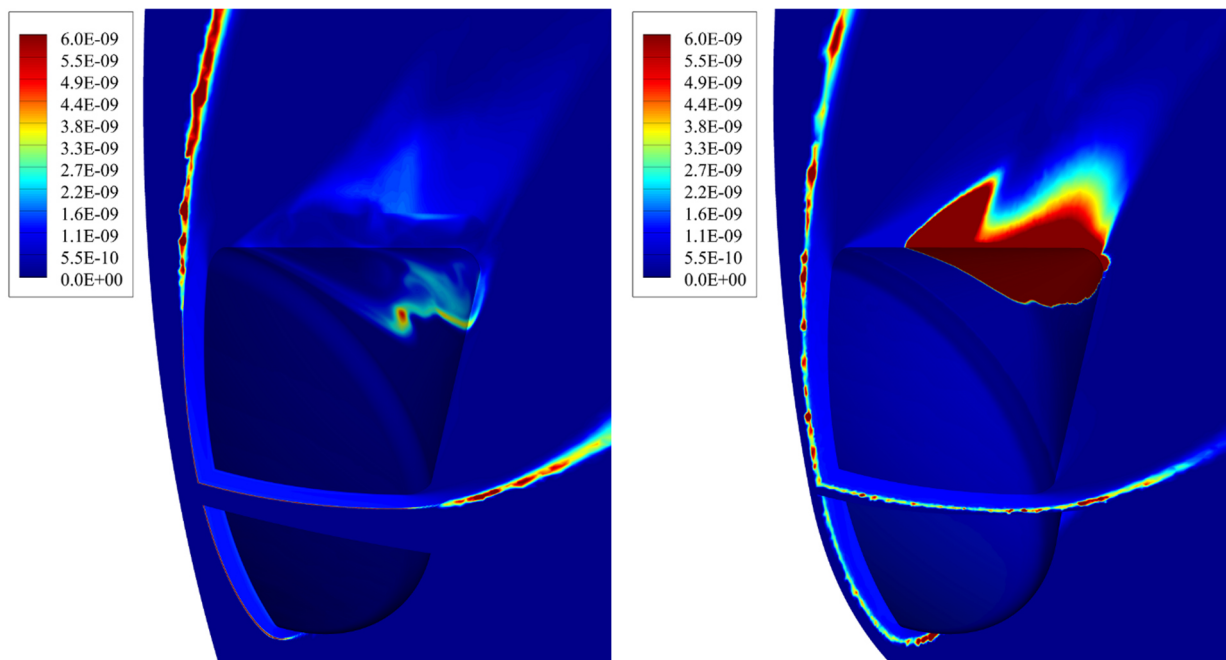


Рисунок 6.1.26 – Распределение массовой концентрации O_2^+ в окрестности спускаемого космического аппарата Аполлон-4

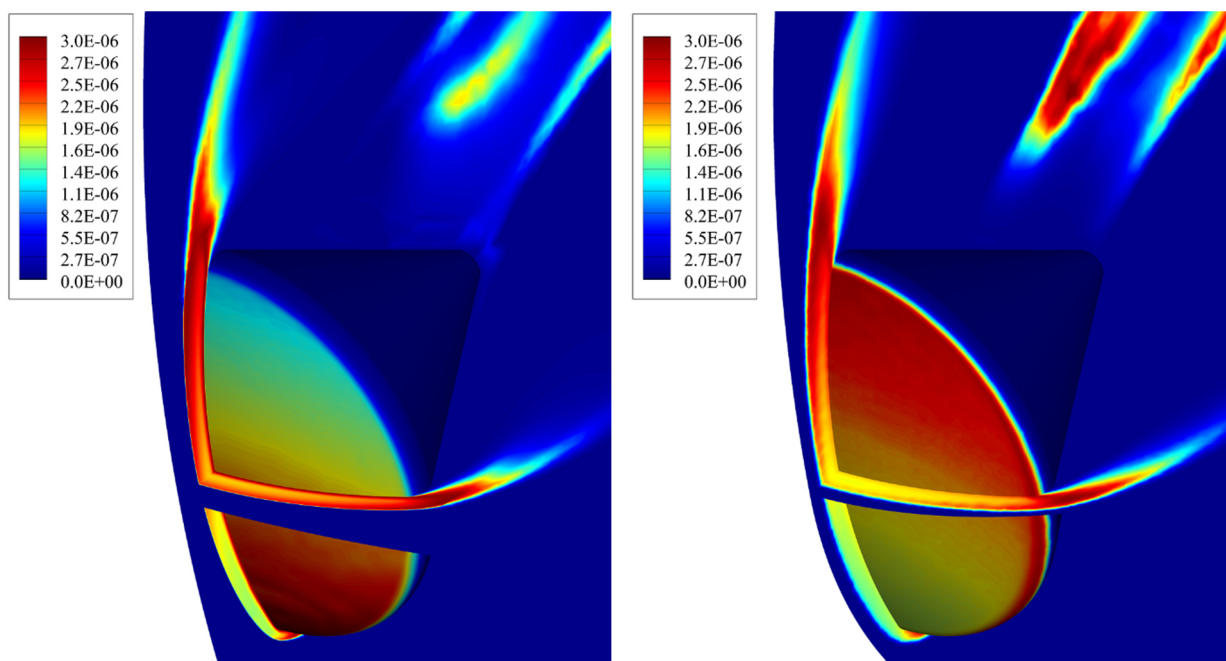


Рисунок 6.1.27 – Распределение массовой концентрации NO^+ в окрестности спускаемого космического аппарата Аполлон-4

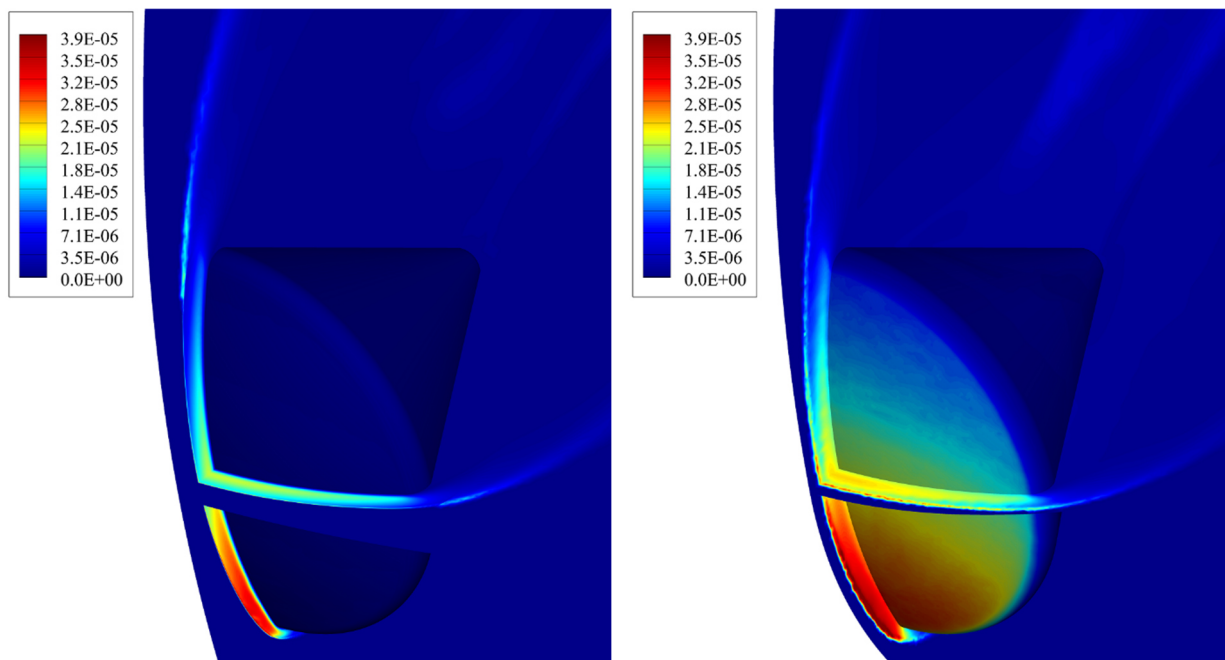


Рисунок 6.1.28 – Распределение массовой концентрации e^- в окрестности спускаемого космического аппарата Аполлон-4

На графиках показаны распределения массовых концентраций химических компонент газовой смеси вдоль критической линии тока, полученные в результате численного моделирования на квазирегулярной и тетраэдральной расчётных сетках (рисунки 6.1.29 и 6.1.30).

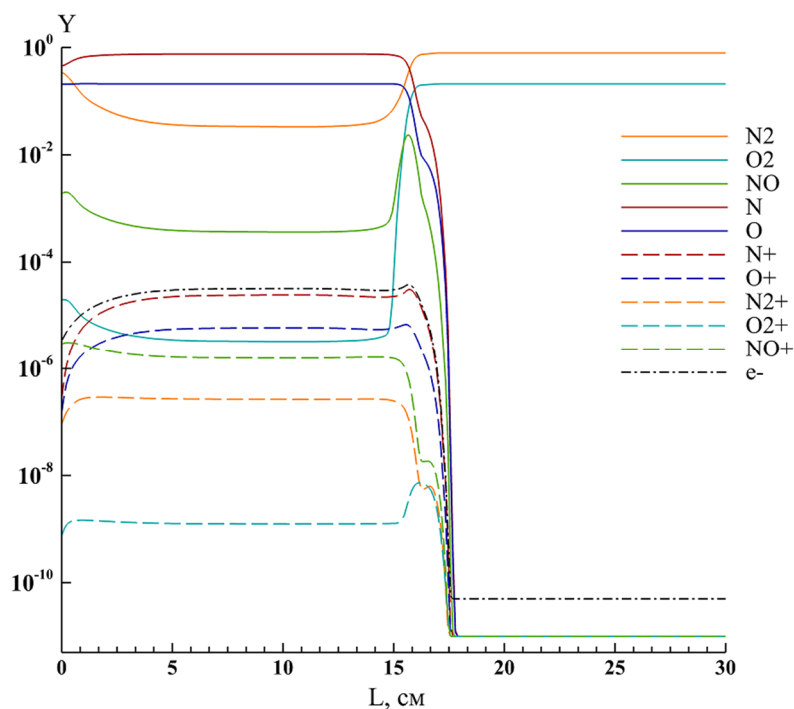


Рисунок 6.1.29 – Распределение массовых концентраций в сжатом слое вдоль критической линии тока

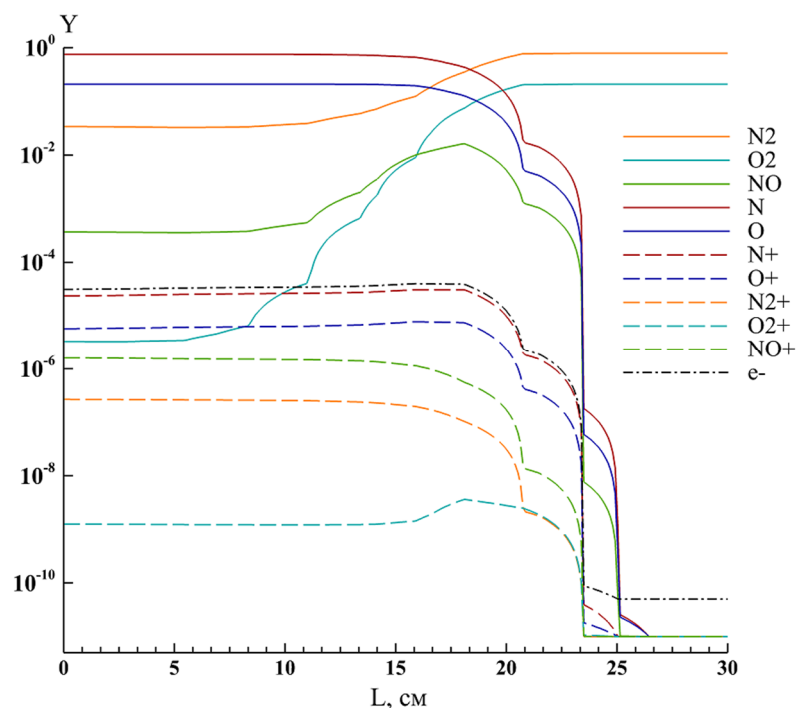


Рисунок 6.1.30 – Распределение массовых концентраций в сжатом слое вдоль критической линии тока

Как видно из распределений (рисунки 6.1.29 и 6.1.30), профили массовых концентраций химических компонент газовой смеси, полученные с использованием модели химической кинетики Парка на квазирегулярной и тетраэдральной расчётных сетках, хорошо согласуются по величине концентраций в сжатом слое.

По причине того, что в расчётах, проводимых на тетраэдральной сетке, отсутствовало разрешение пограничного слоя и как следствие снижение температуры в пристеночной области, на распределение массовых концентраций в сжатом слое не наблюдается изменение концентраций вблизи поверхности спускаемого аппарата (рисунок 6.1.30).

На рисунках 6.1.31 и 6.1.32 представлены распределения плотности полного теплового потока, обусловленного процессами теплопроводности и диффузии химических компонент газовой смеси, полученные в результате численного моделирования на квазирегулярной расчётной сетке.

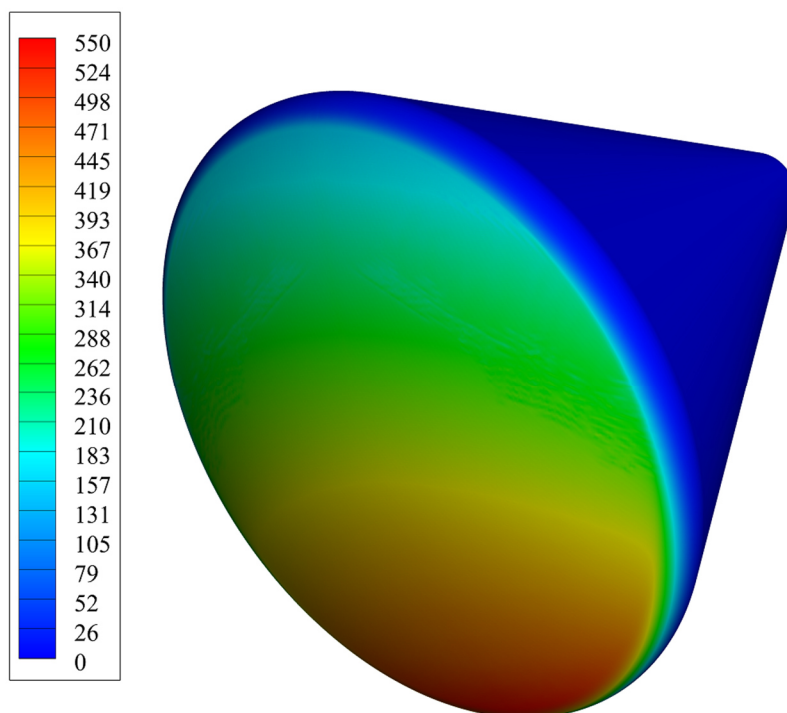


Рисунок 6.1.31 – Распределение плотности полного теплового потока на поверхности спускаемого аппарата Аполлон-4

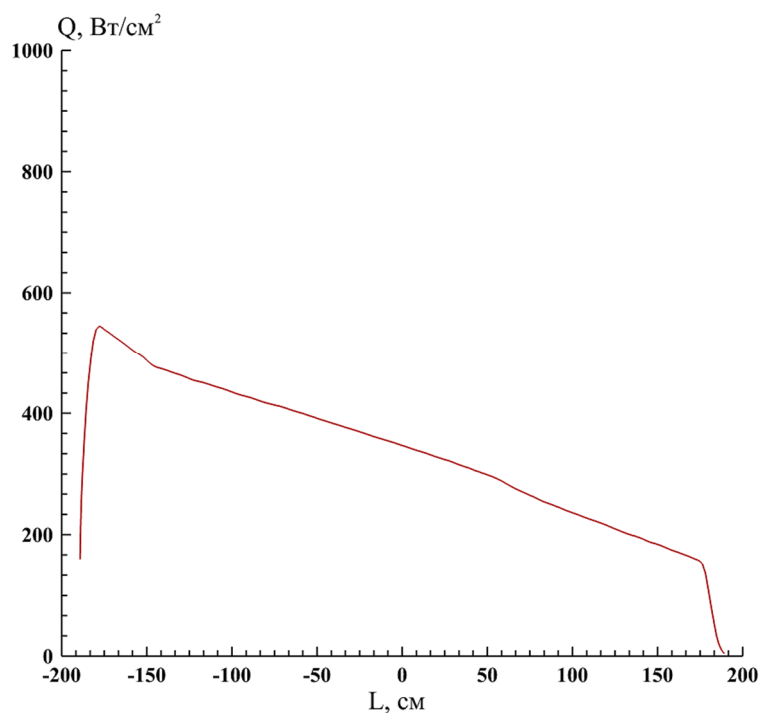


Рисунок 6.1.32 – Распределение плотности полного теплового потока вдоль поверхности лобового аэродинамического щита космического аппарата Аполлон-4

Максимальное значение плотности полного теплового потока на поверхности лобового аэродинамического щита спускаемого аппарата достигает $q_w = 545 \text{ Вт/см}^2$, а температура поверхности $T_w = 3311 \text{ К}$.

Выводы по главе

В результате численного моделирования задачи вычислительной аэротермодинамики входа в плотные слои атмосферы спускаемого аппарата Аполлон-4 были получены поля течения для наиболее теплонапряженного режима гиперзвукового обтекания космического аппарата.

Использование неструктурированной квазирегулярной расчётной сетки позволило разрешить фронт ударной волны и исключить проявление численной неустойчивости сильных ударных волн в полученном решении.

На основе полученных численных решений компьютерным кодом ГРАТ данной задачи гиперзвукового моделирования было проведено сравнение моделей равновесной термодинамики Крайко и химической кинетики 11-ти компонентного воздуха Парка. Сравнение моделей по распределению давления и температуры в сжатом слое показало, что модель равновесной термодинамики Крайко можно использовать на начальном этапе оценки аэротермодинамических характеристик гиперзвуковых летательных аппаратов. Использование данной модели в случае неравновесных режимов течения даёт верхнюю оценку тепловых нагрузок и позволяет существенно сократить вычислительные ресурсы в сравнении с решением системы уравнений химической кинетики 11-ти компонентного воздуха.

Получены распределения массовых концентраций частично ионизированного воздуха в сжатом слое и плотности полного теплового потока на поверхности лобового аэродинамического щита спускаемого аппарата.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Построена математическая модель вычислительной аэротермодинамики, описывающая трёхмерные, нестационарные, вязкие, химически реагирующие течения гиперзвуковых потоков.
2. Построен численный метод повышенного порядка аппроксимации по пространству для решения систем уравнений газовой динамики и химической кинетики на неструктурированных сетках. Для проведения расчётов аэротермодинамических характеристик высокоскоростных летательных аппаратов сложных геометрических форм реализован данный метод на базе разработанного компьютерного кода ГРАТ.
3. Проведена адаптация модели аналитического представления термодинамических функций равновесного воздуха для учёта физико – химических процессов в высокотемпературном воздухе применительно к численному решению задач гиперзвукового обтекания высокоскоростных летательных аппаратов.
4. Построен метод, позволяющий устранить численную неустойчивость сильных ударных волн при гиперзвуковом обтекании затупленных тел. Проведены исследования влияния нерегулярности расчётной сетки на проявление численной неустойчивости.
5. Проведены численные исследования высокоскоростного обтекания тел с помощью разработанного компьютерного кода ГРАТ. Выполнено сопоставление результатов численного моделирования аэродинамических и тепловых характеристик с экспериментальными данными и с расчётами других авторов.
6. Выполнен сравнительный анализ реализованных математических моделей равновесной термодинамики Крайко и химической кинетики 11-ти компонентного воздуха Парка для учёта физико – химических процессов в высокотемпературном воздухе.

7. Получены распределения массовых концентраций частично ионизированного воздуха и плотности полного теплового потока на поверхности спускаемого аппарата Аполлон-4 при вхождении в атмосферу на гиперзвуковой скорости более 10 км/с.

Литература

1. *Moss J. and Simmonds A.* Galileo probe forebody flowfield predictions during Jupiter entry // AIAA Paper. 1982.
2. *Chen Y.K., Henline W.D. and Tauber M.E.* Trajectory based heating and ablation calculation for Mars Pathfinder aeroshell // Journal of Spacecraft and Rockets. 1995. p. 225 – 230
3. *Gnoffo P.A., Weilmuenster K.J., Braun R.D. and Cruz C.I.* Influence of sonic-line location on Mars pathfinder probe aerothermodynamics // Journal of Spacecraft and Rockets. 1996. p. 169 – 177
4. *Olynick D.R.* Aerothermodynamics of the Stardust sample return capsule // AIAA Paper. 1998.
5. *Olynick D.R., Chen Y.K. and Tauber M.* Forebody TPS sizing with radiation and ablation for the Stardust sample return capsule // AIAA Paper. 1997.
6. *Olynick D.R., Chen Y.K. and Tauber M.* Wake flow calculations with radiation and ablation for the Stardust sample return capsule // AIAA Paper. 1997.
7. *Dietrich S. and Boyd I.D.* Scalar and parallel optimized implementation of the direct simulation Monte Carlo method // J. Comput. Phys. 1996. p. 328 – 342
8. *Родионов А.В.* Разработка методов и программ для численного моделирования неравновесных сверхзвуковых течений в приложении к аэрокосмическим и астрофизическим задачам. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук: 05.03.18. – Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ ИТМФ, 2019. – 299 с.
9. *Kitamura K.* Advancement of Shock Capturing Computational Fluid Dynamics Methods: Numerical Flux Functions in Finite Volume Method. Springer. 2020. p. 142
10. *Hirsch C.* Numerical Computation of Internal and External Flows. N.Y.: Wiley. 1991. p. 672
11. *Kim M.D., Bhutta B.A. and Lewis C.H.* Three-dimensional effects upon real gas flows past the Space Shuttle // AIAA Paper. 1984.

12. *Steger J.L. and Warming R.F.* Flux vector splitting for the inviscid gasdynamic equations with applications to finite difference methods // *J. Comput. Phys.* 1981. p. 263 – 293
13. *Leer B.V.* Flux vector splitting for the Euler equations // *LNP.* 1982. p. 507 – 512
14. *Roe P.L.* Approximate Riemman solvers, parameter vectors and difference schemes // *J. Comput. Phys.* 1981. p. 357 – 372
15. *Roe P.L.* The use of the Riemann problem in finite difference schemes // *LNP.* 2006. p. 354 – 359
16. *Leer B.V.* Towards the ultimate conservative scheme IV: A new approach to numerical convection // *J. Comput. Phys.* 1977. p. 276 – 299
17. *Leer B.V.* Towards the ultimate conservative scheme V: A second order sequel to godunov's method // *J. Comput. Phys.* 1979. p. 101 – 136
18. *Gnoffo P.A. and McCandless R.S.* Three-dimensional AOTV flow fields in chemical nonequilibrium // *AIAA Paper.* 1986.
19. *Eberhardt S. and Brown K.* A shock capturing technique for hypersonic, chemically relaxing flows // *AIAA Paper.* 1986.
20. *Candler G.V.* The Computational of Weakly Ionized Flow in Nonequilibrium. Stanford University, 1988.
21. *Lee J.H.* Basic governing equations for the flight regimes of aeroassisted orbital transfer vehicles vol. 19th *AIAA Thermophysics Conference.* 1985. p. 3 – 53
22. *Gnoffo P.A., Gupta R.N. and Shinn J.L.* Conservation equations and physical models for hypersonic air flows in thermal and chemical nonequilibrium. *NASA-TP-2867.* 1989. p 58
23. *Gnoffo P.A., Weilmuenster K.J., Hamilton H.H., Olynick, D.R. and Venkatapathy E.* Computational aerothermodynamic design issues for hypersonic vehicles // *Journal of Spacecraft and Rockets.* 1999. p. 21 – 43
24. *Gnoffo P.A., Weilmuenster K.J. and Alter S.J.* A multiblock analysis for Shuttle orbiter re-entry heating from Mach 24 to Mach 12 // *AIAA Paper.* 1993.

25. *Wright M.J.* A Family of Data-Parallel Relaxation Methods for the Navier-Stokes Equations. University of Minnesota, 1997.
26. *Venkatakrishnan V.* Convergence to steady state solutions of the Euler equations on unstructured grids with limiters // *J. Comput. Phys.* 1995. p. 120 – 130
27. *Nompelis I., Drayna T.W. and Candler G.V.* A parallel unstructured implicit solver for reacting flow simulation // *AIAA Paper.* 2005. p. 389 – 395
28. *Hassan O., Morgan K. and Peraire J.* An adaptive implicit/explicit finite element scheme for compressible high speed flows // *AIAA Paper.* 1989.
29. *Martin D. and Lohner R.* An implicit linelet-based solver for incompressible flows // *AIAA Paper.* 1992.
30. *Candler G.V., Johnson H.B., Nompelis I., Subbareddy P.K., Drayna T.W., Gidzak V.M. and Barnhardt M.D.* Development of the US3D code for advanced compressible and reacting flow simulations // 53rd *AIAA Aerospace Sciences Meeting.* 2015. p. 25
31. *Бессонов О.А., Харченко Н.А.* Программная платформа для суперкомпьютерного моделирования задач аэротермодинамики // *Программная инженерия.* 2021. Т. 12, № 6 с. 302 – 310
32. *Park C.* Nonequilibrium Hypersonic Aerothermodynamics. N.Y.: Wiley. 1990. p. 358
33. *Park C., Jaffe R.L., Partridge H.* Chemical-Kinetic Parameters of Hyperbolic Earth Entry // *J. of Thermophysics and Heat Transfer.* 2001. Vol. 15. № 1. p. 76 – 90
34. *Park C., Howe J., Jaffe R.L. and Candler G.* Review of chemical kinetic problems of future NASA missions, II: Mars entries // *J. of Thermophysics and Heat Transfer.* 1994. Vol. 8. № 1. p. 9 – 23
35. *Gupta R.N., Yos J.M., Thompson R.A., Lee K.* A Review of Reaction Rates and Thermodynamic and Transport Properties for an 11-Species Air Model for Chemical and Thermal Nonequilibrium Calculations to 30000 K. NASA RP-1232. 1990. p. 86

36. *Palmer G. and Wright M.* Comparisons of methods to compute high temperature gas viscosity // *J. of Thermophysics and Heat Transfer*. 2003. Vol. 17. № 2. p. 232 – 239
37. *Wright M.J., Bose D., Palmer G.E., Levin E.,* Recommended Collision Integrals for Transport Property Computations, Part 1: Air Species // *AIAA Journal*. 2005. Vol. 43, № 12. p. 2558 – 2564
38. *Sutton K. and Gnoffo P.A.* Multi-component diffusion with application to computational aerothermodynamics // *AIAA Paper*. 1998. p. 14
39. *Gosse, R. and Candler, G.* Diffusion flux modeling: Application to direct entry problems // *AIAA Paper*. 2005. p. 11
40. *Olynick D.R., Henline W.D., Chambers L.H. and Candler G.V.* Comparison of coupled radiative flow solutions with project FIRE II flight data // *J. of Thermophysics and Heat Transfer*. 1995. Vol. 9. № 1. p. 586– 594
41. *Hassan B., Kuntz D.W. and Potter D.L.* Coupled fluid/thermal prediction of ablating hypersonic vehicles // *AIAA Paper* 1998.
42. *Землянский Б.А., Лунев В.В., Власов В.И., Горшков А.Б., Залогин Г.Н., Ковалев Р.В., Маринин В.П., Мурзинов И.Н.* Конвективный теплообмен летательных аппаратов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. – 377 с.
43. *Лунев В.В.* Течение реальных газов с большими скоростями. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 760 с.
44. *Тирский Г.А., Сахаров В.И., Ковалев В.Л., Власов В.И., Горшков А.Б., Ковалев Р.В., Боровой В.Я., Егоров И.В., Белошицкий А.В., Горский В.В., Брыкина И.Г., Афонина Н.Е., Громов В.Г., Кирютин Б.А., Лунев В.В., Скуратов А.С., Алексин В.А., Рогов Б.В., Дядькин А.А., Журин С.В.* Гиперзвуковая аэродинамика и теплообмен современных космических аппаратов и зондов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 548 с.
45. *Дегтярь В.Г., Сон Э.Е.* Гиперзвуковые летательные аппараты. – М.: Янус-К. 2018. – 984 с.
46. *Demirel Y.* Nonequilibrium Thermodynamics. Transport and Rate Processes in Physical, Chemical and Biological Systems 3rd ed. Elsevier. 2014. p. 766

47. *Hirschel E.H.* Basics of Aerothermodynamics. 2nd ed. Springer.2015. p. 446
48. *Гурвич Л.В., Вейц И.В., Медведев В.А. и др.* Термодинамические свойства индивидуальных веществ. – М.: Наука, 1978. – 495 с.
49. *Жданов В.М., Галкин В.С., Гордеев О.А., Соколова И.А.* Физико-химические процессы в газовой динамике. Справочник. Т. 3. Модели процессов молекулярного переноса в физико-химической газодинамике / Под редакцией С.А. Лосева. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 284 с.
50. *Bird R.B., Stewart W.E. and Lightfoot E.W.* Transport Phenomena. 2nd ed. N.Y.: Wiley. 2002. p. 912
51. *Волков К.Н., Емельянов В.Н.* Вычислительные технологии в задачах механики жидкости и газа. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 468 с.
52. *Кудрявцев А.Н.* Вычислительная аэродинамика сверхзвуковых течений с сильными ударными волнами. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук: 01.02.05. – Новосибирск: ИТПМ СО РАН, 2014. – 336 с.
53. *Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н., Емельянов В.Н., Карпенко А.Г., Козелков А.С., Тетерина И.В.* Методы ускорения газодинамических расчетов на неструктурированных сетках. / Под редакцией проф. В.Н. Емельянова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. – 536 с.
54. *Einfeldt B., Munz C.D., Roe P.L., Sjögren B.* On Godunov-type methods near low densities // J. Comput. Phys. Vol. 92, 1991. p. 273 – 295
55. *Pulliam T.H., Zingg D.W.* Fundamental Algorithms in Computational Fluid Dynamics. Springer. 2014. p. 220
56. *Годунов С.К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб. 1959. Т. 47, № 3, с. 271 – 306
57. *Harten A., Lax P.D. and van Leer B.* On Upstream Differencing and Godunov–Type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws // SIAM Review. Vol. 25. 1983. p. 35 – 61
58. *Toro E.F.* Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Springer. 2009. p. 724

59. *Крюков И.А., Иванов И.Э., Ларина Е.В.* Программный комплекс расчета высокоскоростных течений *hySol* // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2021. Т. 22, № 1. 28 с.
60. *Боровиков С.Н., Иванов И.Э., Крюков И.А.* Моделирование пространственных течений идеального газа с использованием тетраэдральных сеток // Математическое моделирование. 2006. Т. 18, № 8. с. 37 – 48
61. *Michalak K. and Ollivier-Gooch C.* Limiters for unstructured higher-order accurate solutions of the Euler equations // 46th AIAA Aerospace Sciences Meeting. 2008. p. 14
62. *Blazek J.* Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications. 3rd ed. Elsevier. 2015. p. 451
63. *Борисов В.Е., Кулешов А.А., Савенков Е.Б., Якуш С.Е.* Программный комплекс TCS3D: математическая модель // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2015. № 6. 20 с.
64. *Новиков А.В.* Численное моделирование устойчивости и ламинарно-турбулентного перехода в гиперзвуковом пограничном слое. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук: 01.02.05. – Жуковский: ЦАГИ, 2017. – 229 с.
65. *Крюков И.А., Ермаков М.К.* Верификация и валидация аэродинамических расчетных комплексов на примере задачи обтекания острых и затупленных конусов // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2021. Т. 22, № 4. 22 с.
66. *Макеич Г.С., Харченко Н.А., Крюков И.А.* Расчет аэродинамики и динамики полета спускаемого летательного аппарата EXPERT // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2017. Т. 18, № 2. 19 с.
67. *Kayser L.D., Whiton F.* Surface Pressure Measurements on a Boattailed Projectile Shape at Transonic Speeds. 1982. p. 84

68. Красильщиков А.П., Гурьяшкин Л.П. Экспериментальные исследования тел вращения в гиперзвуковых потоках. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 208 с.
69. *Kharchenko N., Kotov M.* Analysis of the High Speed Gas Flow over a Sphere in the Range of Mach Numbers 2–12 // J. Phys.: Conf. Ser. 2018.Vol. 1009, p. 6
70. Харченко Н.А. Особенности моделирования гиперзвукового обтекания затупленных тел // Труды 62-й Всероссийской научной конференции МФТИ. – М.: МФТИ, 2019. с. 13 – 15
71. *MacLean M., Holden M., Dufrene A.* Comparison between CFD and Measurements for Real-gas Effects on Laminar Shockwave Boundary Layer Interaction // AIAA Aviation. 2014. p. 49
72. *MacLean M., Holden M., Dufrene A.* Measurements of Real Gas Effects on Region of Laminar Shock Wave/Boundary Layer Interaction in Hypervelocity Flows // AIAA Aviation. 2014. p. 16
73. *Kianvashradand N. Knight D.* Simulation of Hypersonic Shock Wave Laminar Boundary Layer Interaction on Hollow Cylinder Flare // 54th AIAA Aerospace Sciences Meeting. 2016. p. 21
74. *Youssefi M.R. Knight D.* Assessment of CFD Capability for Hypersonic Shock Wave Boundary Layer Interactions, Part II // 54th AIAA Aerospace Sciences Meeting. 2016. p. 23
75. *Kianvashradand N. Knight D.* Simulation of Hypersonic Shock Wave Laminar Boundary Layer Interaction on Hollow Cylinder Flare, Part II // 47th AIAA Fluid Dynamics Conference. 2017. p. 20
76. Харченко Н.А. Компьютерное моделирование обтекания гиперзвуковым потоком двойного конуса // Труды 63-й Всероссийской научной конференции МФТИ. – М.: МФТИ, 2020. с. 18 – 20
77. Харченко Н.А., Рыбаков А.Н. Аэротермодинамика спускаемого космического аппарата «Аполлон-4» // Точно в цель. 2020. № 1, с. 77 – 88

78. *Kharchenko N., Kotov M.* Aerothermodynamics of the Apollo-4 spacecraft at earth atmosphere conditions with speed more than 10 km/s // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. Vol. 1250, p. 10
79. *Park C.* Stagnation-Point Radiation for Apollo 4 // J. of Thermophysics and Heat Transfer. 2004. Vol. 18. № 3. p. 349 – 357
80. *Lee D.B., Bertin J.J., Goodrich W.D.* Heat-Transfer Rate and Pressure Measurements Obtained During Apollo Orbital Entries. NASA TN D-6028. 1970. p 94
81. *Lee D.B., Goodrich W.D.* The Aerothermodynamic Environment of the Apollo Command Module During Superorbital Entry. NASA TN D-6792. 1972. p 90
82. *Kharchenko N., Kryukov I.* Aerothermodynamics calculation of the EXPERT reentry flight vehicle // J. Phys.: Conf. Ser. 2018. Vol. 1009, p. 8
83. *Суржиков С.Т.* Компьютерная аэрофизика спускаемых космических аппаратов. Двухмерные модели. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2018. – 544 с.
84. *Josyula E.* Hypersonic Nonequilibrium Flows: Fundamentals and Recent Advances. AIAA. 2015. p. 552
85. *Anderson J.D.* Hypersonic and High Temperature Gas Dynamics. 2nd ed. AIAA. 2006. p. 811
86. *Hash D., Olejniczak J., Wright M., Prabhu D., Pulsonetti M., Hollis B., Gnoffo P., Barnhardt M., Nompelis I., Candler G.* FIRE II Calculations for Hypersonic Nonequilibrium Aerothermodynamics Code Verification: DPLR, LAURA, and US3D // 45th AIAA Aerospace Sciences Meeting. 2007. p. 18
87. *Scalabrin L.C.* Numerical Simulation of Weakly Ionized Hypersonic Flow for Reentry Configurations. Michigan: Department of Aerospace Engineering, University of Michigan, 2007. – p. 182
88. *Харченко Н.А.* Аэротермодинамика спускаемого космического аппарата Аполлон-4 входящего в атмосферу на скорости свыше 10 км/с // Труды 61-й Всероссийской научной конференции МФТИ. – М.: МФТИ, 2018. с. 11 – 12
89. *Крайко А.Н.* Аналитическое представление термодинамических функций воздуха // Инж. журн. 1964. Т. 4, № 3. с. 548 – 550