

На правах рукописи



БИЗЯЕВ ИВАН АЛЕКСЕЕВИЧ

МЕТОДЫ КАЧЕСТВЕННОГО АНАЛИЗА  
РАЗЛИЧНЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Специальность 01.02.01 — Теоретическая механика

**Автореферат**

диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Ижевск — 2016 год

Работа выполнена на кафедре теоретической физики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Удмуртский государственный университет»

Научный руководитель: **Мамаев Иван Сергеевич**  
доктор физико-математических наук,  
доцент

Официальные оппоненты: **Буров Александр Анатольевич**,  
доктор физико-математических наук,  
доцент, Федеральный исследовательский  
центр «Информатика и управление»  
Российской академии наук, отдел  
механики, старший научный сотрудник

**Соколовский Михаил Абрамович**,  
доктор физико-математических наук,  
доцент, Федеральное государственное  
бюджетное учреждение науки  
Институт водных проблем  
Российской академии наук,  
отдел динамики водной среды,  
главный научный сотрудник

Ведущая организация: Федеральное государственное  
бюджетное учреждение науки Институт  
механики Уральского отделения  
Российской академии наук

Защита диссертации состоится «\_\_» \_\_\_\_\_ 2016 г. в \_\_ ч 00 мин на заседании диссертационного совета Д 212.125.14 в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке Московского авиационного института (национального исследовательского университета) и на сайте института <http://www.mai.ru>.

Автореферат разослан «\_\_» \_\_\_\_\_ 2016 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
к. ф.-м. н., доцент

В. Ю. Гидаспов

## Общая характеристика работы

### Актуальность работы

Рассмотрим последовательно актуальность каждой из задач, рассмотренных в диссертационной работе. Прежде всего остановимся на задаче об (осесимметричных) фигурах равновесия самогравитирующей идеальной жидкости со стратификацией плотности.

Для однородной жидкости хорошо известны эллипсоидальные фигуры равновесия, для которых вся масса равномерно вращается, как твердое тело вокруг неподвижной оси: сфероид Маклорена (1742 г.), эллипсоид Якоби (1834 г.). Кроме того, в случае однородной жидкости существуют фигуры равновесия с внутренними течениями: эллипсоид Дедекинда (1861 г.), эллипсоиды Римана (1861 г.).

Хотя исследованиям несимметричных фигур равновесия было посвящено огромное количество работ в XIX и XX веке, наиболее значимым с точки зрения приложений к теории фигур планет остается сфероид Маклорена. Тем не менее, хорошо известно, что для всех планет Солнечной системы реальное сжатие отличается от сжатия соответствующего сфероида Маклорена, полученного по характеристикам планеты. Традиционно это расхождение связывают со стратификацией плотности планеты, что приводит к необходимости исследования неоднородных фигур равновесия.

Для стратифицированной массы жидкости, вращающейся как твердое тело с малой угловой скоростью  $\omega$ , А. Клеро было получено уравнение сфероида, который в первом порядке по  $\omega^2$ , является фигурой равновесия. Впоследствии исследования таких фигур были продолжены П. С. Лапласом и А. М. Лежандром.

Позже А. М. Ляпунов получил решение этой проблемы в форме рядов

по малому параметру  $\omega^2$ , которое было издано в пятом (посмертном) томе собраний сочинений, подготовленном к публикации В. А. Стекловым и выполнившим обзор этой работы.

Следует отметить, что с другой стороны в работах М. Ами, В. Вольтерра и П. Пицетти было показано, что для стратифицированной жидкой массы вращающейся, как твердое тело, фигуры равновесия в классе эллипсоидов не существует.

Если допустить возможность, что угловая скорость частиц жидкости не является постоянной для всей жидкой массы, то возможны фигуры равновесия для произвольной осесимметричной формы поверхности и стратификации плотности. Так, С. А. Чаплыгин явно указал сфероидальную фигуру равновесия с неоднородным распределением угловых скоростей для случая гомотетической стратификации плотности. При этом оказывается, что поверхности равной плотности не совпадают с поверхностями равной угловой скорости. С. А. Чаплыгин пытался использовать полученное решение для объяснения зависимости от широты угловой скорости вращения поверхностных слоев Солнца.

Далее рассмотрим системы гидродинамического типа (сводящиеся к конечному числу степеней свободы). Случаи, в которых точные решения гидродинамики описывается динамической системой с конечным числом степеней свободы встречаются крайне редко. Они реализуются, как правило, при специальных типах начальных и граничных условий.

Другой подход основан на галеркинской аппроксимации уравнений гидродинамики. В результате которой, вместо исходной гидродинамической системы (обладающей бесконечным числом степеней свободы) рассматривается конечная система обыкновенных дифференциальных уравнений. В случае идеальной жидкости эта система обладает (стандартной) инвариантной мерой и интегралом энергии.

В плоской постановке задачи системы гидродинамического типа допускают дополнительный квадратичный интеграл, отвечающий сохранению энтропии (интеграл от квадрата вихря по области течения).

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с указанными свойствами принято называть системами гидродинамического типа. Это название было предложено академиком А. М. Обуковым

В различных аспектах системы гидродинамического типа возникали в трудах связанных с моделированием турбулентности и восходят к работам А. Н. Колмогорова и Э. Н. Лоренца. В дальнейшем это направление развивалось Е. Б. Гледзером и Ф. В. Должанским.

Кроме того, в диссертационной работе рассмотрена задача о динамике трех вихресточников. В классической гидродинамике идеальной жидкости равно, как и в геофизической гидродинамике, для описания многих эффектов используется модель точечных вихрей, восходящая к Г. Гельмгольцу и Г. Кирхгофу. Не так широко известна более общая постановка задачи, в которой описывается движение в жидкости более сложных особенностей, сочетающих в себе вихревые свойства, а также свойства источников и стоков. Эта модель иногда является более предпочтительной для целей гидрометеорологии и впервые была предложена знаменитым русским гидродинамиком и космологом А. А. Фридманом и его ученицей П. Я. Полубариновой

Уравнения движения источников-стоков в гамильтоновой форме обсуждаются в работе А. А. Богомолова. При этом основные закономерности движения источников и стоков применяются для моделирования тепловой конвекции в плоском горизонтальном слое жидкости, например, периодических конвективных ячеек.

## **Цель работы**

Целью диссертационной работы является исследование возможных фигур равновесия самогравитирующей идеальной жидкости со стратификации плотности и стационарным полем скоростей. Получение новых случаев интегрируемости в квадратурах, систем гидродинамического типа, а также изучить вопрос представления их в гамильтоновой форме. Исследовать системы уравнений описывающих три вихреисточника и исследовать их динамику.

## **Методы исследования**

Для решения поставленных, в рамках диссертационной работы, задач использовались аналитические и численные методы теории динамических систем. Большинство аналитических преобразований и вычислений, а также численное исследование системы трех вихрей были выполнены с помощью пакета программ Maple v. 15.

## **Научная новизна и основные результаты**

Получено совместное решение уравнений гидродинамики для неоднородного самогравитирующего эллипсоид вращения (сфероида), со стационарным полем скоростей. Показано, что в случае эллипсоида вращения с конфокальной стратификацией плотности, каждый слой вращается с собственной постоянной угловой скоростью. При этом из найденного решения следует, что угловая скорость на внешней поверхности совпадает со значением угловой скорости сфероида Маклорена.

Рассмотрен однородный сфероид в пространстве постоянной положительной кривизны. Показано, что в этом случае распределение угловой скорости частиц жидкости зависит от расстояния до оси симметрии.

Изучены системы гидродинамического типа. В пятимерном ( $n = 5$ ) случае найден приводящий множитель, после умножения на который уравнения движения можно представить в гамильтоновой форме. Кроме того указаны новые интегрируемые случаи, в частности показана интегрируемость в квадратурах системы гидродинамического типа, предложенной Е. Б. Гледзером.

Показана интегрируемость в квадратурах уравнений движения системы трех вихреисточников (аналогичной трех вихрей). При помощи редукции, получена приведенная система на форм-сфере, описывающая эволюцию конфигураций системы с точностью до подобия. Приведены возможные фазовые портреты и различные относительные равновесия системы (обобщающие известные относительные равновесия задачи трех вихрей).

#### **Положения и результаты, выносимые на защиту.**

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

- 1) Доказано, что самогравитирующий эллипсоида вращения с конфокальной стратификацией плотности, в котором каждый слой вращается с собственной постоянной угловой скоростью является фигурой равновесия.
- 2) Найдено обобщение сфероида Маклорена на пространство постоянной положительной кривизны.
- 3) Найден новые интегрируемые случаи систем гидродинамического типа. В случае размерности фазового пространства равной пяти найден приводящий множитель, после умножения на который уравнения движения представляются в гамильтоновой форме.
- 4) Доказана интегрируемость в квадратурах уравнений движения системы трех вихреисточников.

- 5) Найдены новые относительные положения равновесия системы трех вихреисточников (обобщающие известные относительные равновесия задачи трех вихрей).

### **Аргументированность, обоснованность и достоверность диссертации**

Достоверность и обоснованность полученных в диссертационной работе результатов обеспечивается использованием строго доказанных теорем и утверждений. Разработанные математические модели имеют ясную физическую трактовку и не противоречат известным ранее.

### **Теоретическая и практическая ценность**

Работа носит теоретический характер. Ее методы и результаты могут быть использованы в теоретической и математической физике. Аналитические результаты, относительно фигур равновесия полученные в первой главе, целесообразно использовать в качестве примеров для апробации различных численных методов по исследованию динамики жидких тел. Полученные результаты о приведений к гамильтоновой форме систем гидродинамического типа стимулируют дальнейшее их изучение с помощью развитых методов гамильтоновой механики: методов топологического анализа, теории устойчивости и теории возмущений.

### **Апробация результатов**

Основные результаты работы обсуждались на семинарах Института компьютерных исследований ФГБОУ ВПО «Удмуртский государственный университет». Кроме того результаты исследований, изложенные в диссертации докладывались на российских и международных конференциях:



- Всероссийская научная конференция студентов физиков – ВНКСФ 17, 25 марта – 1 апреля 2011, г. Екатеринбург, Россия.
- Fourth International Conference «Geometry, Dynamics, Integrable System» – GDIS 2013, 10–14 июня 2013, г. Ижевск, Россия.
- Fourth International Conference «Geometry, Dynamics, Integrable System» – GDIS 2014, 16–27 июня 2014, г. Триест, Италия.
- Нелинейные методы в физике и механике, 1–3 октября 2015, г. Ярославль, Россия.

## Публикации

Результаты диссертации отражены в 4 научных публикациях в изданиях, рекомендованных ВАК, включая 3 публикации, опубликованных в журналах Web of Science. Список приведен в конце автореферата.

## Объем и структура работы

Диссертация изложена на 98 страницах и состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитируемой литературы (84 наименований).

## Содержание диссертации

В первой главе исследуются фигуры равновесия самогравитирующей идеальной жидкости. Рассмотрен эллипсоид вращения (сфероид) со стратификацией плотности  $\rho$  и стационарным полем скоростей  $\mathbf{v}$ .

Выберем криволинейную систему координат  $(r, \mu, \varphi)$ , которая связана с декартовыми координатами следующим образом

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = Z(r, \mu).$$

Здесь функция  $Z(r, \mu)$  выбирается таким образом, чтобы при одном фиксированном значении координаты  $\mu = \mu_0$  получалась свободная поверхность жидкой массы, а ее конкретный вид будет определяться соответствующей стратификацией плотности.

Пусть стационарное поле скоростей имеет вид:

$$\mathbf{v} = (0, 0, \omega(r, \mu)),$$

где  $\omega(r, \mu)$  функция задающая распределение угловой скорости частиц жидкости. Кроме того, полагаем, что плотность  $\rho$ , а следовательно гравитационный потенциал  $U$  и давление  $p$  не зависят от  $\varphi$ . В этом случае, искомое решение удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = r\omega^2, \quad \frac{\partial U}{\partial \mu} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \mu} = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{r\mu} U &= 4\pi G\rho(r, \mu), \\ \Delta_{r\mu} &= \frac{1}{rZ_\mu} \frac{\partial}{\partial r} \left( rZ_\mu \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{Z_\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{1 + Z_r^2}{Z_\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{rZ_\mu} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( rZ_r \frac{\partial}{\partial \mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left( rZ_r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right), \end{aligned} \quad (2)$$

$$p(r, \mu)|_{\mu=\mu_0} = 0. \quad (3)$$

Здесь система (1) представляет собой уравнения Эйлера, записанные в выбранной криволинейной системе координат. При этом гравитационный потенциал  $U$  удовлетворяет уравнению Пуассона (2), а на внешней границе сфероида давление обращается в нуль (3).

Пусть функции  $Z(r, \mu)$  и  $\rho(r, \mu)$  заданы, тогда, система (1) и (3) имеет

следующее решение:

$$p(r, \mu) = \int_{\mu_0}^{\mu} \rho \frac{\partial U}{\partial \mu} d\mu,$$

$$\omega^2(r, \mu) = \frac{1}{r\rho} \left( \rho_0 \frac{\partial U}{\partial r}(r, \mu_0) + \int_{\mu_0}^{\mu} \left( \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial \rho}{\partial \mu} - \frac{\partial U}{\partial \mu} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) d\mu \right), \quad \rho_0 = \rho(r, \mu_0).$$

Рассмотрим конфокальную стратификацию плотности, которую параметризуем следующим образом

$$\frac{x^2 + y^2}{d^2(1 + \mu^2)} + \frac{z^2}{d^2\mu^2} = 1, \quad \mu \in [0, +\infty),$$

где  $d$  — фокальное расстояние меридионального сечения (см. рис. 1).

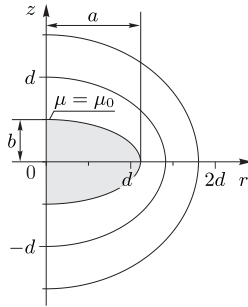


Рис. 1. Меридиональные сечения поверхностей  $\mu = \text{const}$

Таким образом,  $\mu$  определяет отношение малой полуоси сфероида к фокальному расстоянию, а эксцентриситет  $e$  выражается по формуле

$$e = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}. \quad (4)$$

Выражая  $z$ , находим

$$Z(r, \mu) = \pm \sqrt{d^2 \mu^2 - r^2 \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1}}. \quad (5)$$

Пусть  $\rho = \rho(\mu)$ , тогда справедливо

**Предложение 1.** *Потенциал поля тяжести для сфероида с конфокальной стратификацией имеет вид:*

$$U = \frac{k}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{r^2 \tilde{u}(\mu)}{1 + \mu^2} + d^2 \tilde{v}(\mu) \right), \quad k = 4\pi G \quad (6)$$

*Для внутренних точек*

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{\text{in}} &= I_0(\mu)((1 + 3\mu^2)\text{arccot}(\mu) - 3\mu) - I_1(\mu)(1 + 3\mu^2) \\ \tilde{v}^{\text{in}} &= -I_0(\mu)((1 + \mu^2)\text{arctg}(\mu) - \mu) + I_1(\mu)(1 + \mu^2) + 2I_2(\mu) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} I_0(\mu) &= \int_0^\mu \rho(\xi)(1 + 3\xi^2) d\xi, & I_1(\mu) &= \int_{\mu_0}^\mu \rho(\xi)((1 + 3\xi^2)\text{arctg}(\xi) - 3\xi) d\xi, \\ I_2(\mu) &= \int_{\mu_0}^\mu \xi \rho(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

*Для внешних точек*

$$\tilde{u}^{\text{out}} = I_0(\mu_0)((1 + 3\mu^2)\text{arctg}(\mu) - 3\mu), \quad \tilde{v}^{\text{out}} = I_0(\mu_0)(\mu - (1 + \mu^2)\text{arctg}(\mu)). \quad (8)$$

В результате выражение для угловой скорости примет вид:

$$\frac{\omega(\mu)^2}{2\pi G} = I_0(\mu_0) \frac{\rho(\mu_0)}{\rho(\mu)} \frac{(1 + 3\mu_0^2)\text{arcctg}(\mu_0) - 3\mu_0}{1 + \mu_0^2} - \frac{2}{\rho(\mu)} \int_{\mu}^{\mu_0} \rho'(\xi) \frac{I_0(\xi)((1 + 3\xi^2)\text{arcctg}(\xi) - 3\xi) - I_1(\xi)(1 + 3\xi^2)}{1 + \xi^2} d\xi \quad (9)$$

Из этого соотношения, полагая  $\mu = \mu_0$ , получим следующий результат:

**Теорема 1.** *При произвольной конфокальной стратификации угловая скорость на внешней поверхности неоднородного сфероида совпадает с значением угловой скорости сфероида Маклорена плотности  $\langle \rho \rangle$ :*

$$\frac{\omega_0^2}{2\pi G \langle \rho \rangle} = \mu_0((1 + 3\mu_0^2)\text{arcctg}(\mu_0) - 3\mu_0), \quad (10)$$

где  $\langle \rho \rangle$  — средняя плотность сфероида:

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{\mu_0(1 + \mu_0^2)} \int_0^{\mu_0} (1 + 3\xi^2)\rho(\xi) d\xi.$$

Для того, чтобы проследить зависимость угловой скорости слоев в зависимости от изменения плотности для полученного решения, рассмотрим неоднородный сфероид с различными функциями распределения плотности следующего вида:

$$\rho(\mu) = \rho_n^{(0)}(1 - \alpha_n \mu^n), \quad n = 2, 4, 6, \quad (11)$$

где  $\rho_n^{(0)}$  и  $\alpha_n$  — некоторые постоянные (причем  $\rho_n^{(0)}$  имеет смысл плотности в центре сфероида). Их значения будем определять, исходя из того, что

заданы: средняя плотность тела  $\langle \rho \rangle$  и отношение плотности на поверхности к средней плотности тела  $\epsilon$ .

В качестве примера возьмем эксцентриситет  $e_0$  и  $\epsilon$  совпадающими с Землей:

$$e_0 = 0.08181, \quad \epsilon = 2.5.$$

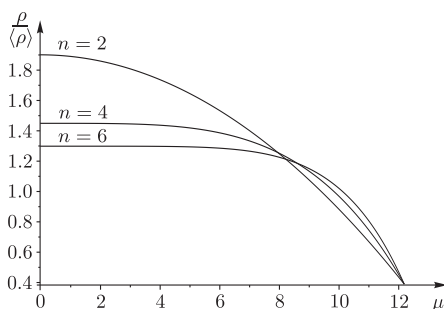


Рис. 2. График зависимости отношения  $\frac{\rho}{\langle \rho \rangle}$  от слоя  $\mu$

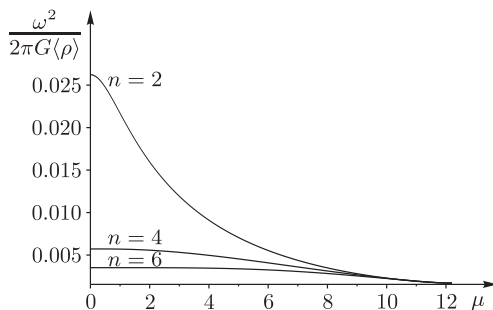


Рис. 3. График зависимости угловой скорости от слоя  $\mu$

На рис. 2 представлены зависимости  $\frac{\rho}{\langle \rho \rangle}$  от координаты слоя  $\mu$  для (11). Как видим сильнее всего плотность возрастает в центре сфероида при  $n = 2$  и далее по мере увеличения  $n$  она уменьшается.

Зависимость квадрата угловой скорости от слоя представлена на рис. 3.

Для угловой скорости при плотностях (11) из рис. 3 можно сделать следующий вывод: угловая скорость возрастает по мере приближения к центру сфероида и возрастает она тем сильнее, чем большее значение принимает плотность в центре сфероида (при  $n = 2$ ).

В заключений первой главы рассмотрен однородный сфероид в пространстве постоянной положительной кривизны  $\mathbf{S}^2$ . Показано, что в этом случае сфероид не может вращаться как твердое тело, так как распределение угловой скорости частиц жидкости зависит от расстояния до оси симметрии  $r$ , которое можно представить в форме

$$\frac{\omega^2(r)}{2\pi G\rho_0} = \omega_{00} + K^2 (\omega_{11}r^2 + \omega_{10}a^2) + O(K^4d^2),$$

$$\omega_{00} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left(2 - \frac{3}{e^2}\right) \arcsin e - \frac{3}{e^2}(1-e^2),$$

$$\omega_{11} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left(12 - \frac{30}{e^2} + \frac{35}{2e^4}\right) \arcsin e + \left(\frac{4}{3} - \frac{55}{3e^2} + \frac{35}{2e^4}\right) (1-e^2),$$

$$\omega_{10} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left(16 - \frac{27}{2e^2} + \frac{10}{e^4}\right) \arcsin e - \left(\frac{1}{3} - \frac{41}{6e^2} + \frac{10}{e^4}\right) (1-e^2),$$

где  $K$  – кривизна,  $e$  – эксцентриситет. Зависимость каждой из поправок в угловой скорости от эксцентриситета приведены на рис. 4.

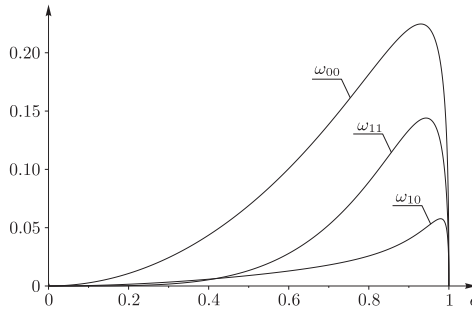


Рис. 4. Зависимости  $\omega_{00}$ ,  $\omega_{11}$ ,  $\omega_{10}$  от эксцентриситета  $e$ .

Во второй главе рассматриваются системы гидродинамического типа сводящиеся к конечному числу степеней свободы и обладающие двумя квадратичными интегралами. С помощью линейной замены переменных интегралы приводятся к виду:

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2,$$

где  $n$  — размерность фазового пространства и среди  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  нет равных. Система дифференциальных уравнений в этом случае представляется в форме

$$\dot{x}_k = \sum_{i < j}'' c_{ij}^k (\lambda_i - \lambda_j) x_i x_j, \quad (12)$$

где

$$c_{ki}^j = c_{jk}^i = c_{ij}^k = -c_{ik}^k = -c_{kj}^i = -c_{jk}^i, \quad (13)$$

остальные  $c_{ij}^k$  равны нулю, а символ  $\sum''$  означает, что в сумме пропущены слагаемые с номерами  $i = k$  или  $j = k$ .

Систему (12) можно представить в кососимметричной форме:

$$J_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k x_k, \quad \dot{x}_i = \sum_{j=1}^n J_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j}.$$

В случае  $n = 3$  система (12) с помощью замены переменных приводится к уравнениям Эйлера на алгебре  $so(3)$ .

Если размерность фазового пространства равна четырем ( $n = 4$ ), тогда справедлива следующая теорема:

**Теорема 2.** *Для  $n = 4$  имеют место следующие утверждения:*



1) Уравнения (12) допускают дополнительный линейный интеграл

$$G = c_{23}^1 x_1 + c_{14}^2 x_2 + c_{41}^3 x_3 + c_{32}^4 x_4.$$

2) Уравнения (12) допускают представление

$$\dot{x}_j = \frac{\partial(x_j, G, F, H)}{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)}; \quad 1 \leq j \leq 4. \quad (14)$$

3) Система (12) представляется в гамильтоновой форме со скобкой Ли–Пуассона алгебры Ли  $\mathbb{R} \oplus so(3)$  с функциями Казимира  $G$  и  $F$ .

4) Решения системы (12) — эллиптические функции от  $t$ .

Дополнительный интеграл  $G$  был указан С. М. Вишиком (1981 г.).

Если  $n = 5$ , тогда матрица  $J_{ij}$  не удовлетворяет тождеству Якоби. Тем не менее, существует приводящий множитель:

$$\mathcal{N} = (\tilde{c}_1 x_1 + \tilde{c}_2 x_2 + \tilde{c}_3 x_3 + \tilde{c}_4 x_4 + \tilde{c}_5 x_5)^{-1},$$

$$\tilde{c}_1 = c_{23}^1 c_{45}^1 - c_{24}^1 c_{35}^1 + c_{25}^1 c_{34}^1, \quad \tilde{c}_2 = c_{23}^1 c_{45}^2 - c_{24}^1 c_{35}^2 + c_{25}^1 c_{34}^2,$$

$$\tilde{c}_3 = c_{23}^1 c_{45}^3 - c_{34}^1 c_{35}^2 + c_{35}^1 c_{34}^2, \quad \tilde{c}_4 = c_{24}^1 c_{45}^3 - c_{34}^1 c_{45}^2 + c_{45}^1 c_{34}^2,$$

$$\tilde{c}_5 = c_{25}^1 c_{45}^3 - c_{35}^1 c_{45}^2 + c_{45}^1 c_{35}^2,$$

такой что  $\tilde{J}_{ij} = \mathcal{N} J_{ij}$  удовлетворяет тождеству Якоби. Следовательно, после замены времени  $d\tau = \mathcal{N} dt$  в этом случае система представляется в гамильтоновой форме.

Если  $\tilde{c}_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, 5$  тогда система (12) обладает дополнительными

интегралами

$$G_1 = -c_{45}^3 x_1 + c_{45}^1 x_3 - c_{35}^1 x_4 + c_{34}^1 x_5, \quad G_2 = -c_{45}^3 x_2 + c_{45}^2 x_3 - c_{35}^2 x_4 + c_{34}^2 x_5$$

и  $J_{ij}$  определяет скобку Пуассона алгебры  $so(3) \oplus \mathbb{R}^2$ .

В общем случае при  $n > 5$  доказано отсутствие приводящего множителя. Кроме того указана интегрируемость частного случая системы гидродинамического типа, предложенной Е. Б. Гледзером.

В третьей главе рассмотрена системы трех вихреисточников. Уравнения движения  $n$  вихреисточников на плоскости имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{1}{\Gamma_i} \frac{\partial H}{\partial y_i} + \frac{1}{K_i} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}, \quad \dot{y}_i = -\frac{1}{\Gamma_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{1}{K_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \quad i = 1..n \\ H &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{i < j} \Gamma_i \Gamma_j \ln((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2), \quad \Phi = \frac{1}{2\pi} \sum_{i < j} K_i K_j \theta_{ij}, \quad (15) \\ \theta_{ij} &= \arctg \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}, \end{aligned}$$

где  $(x_i, y_i)$  — декартовы координаты  $i$ -го вихреисточника, а  $\Gamma_i$  и  $K_i$  его завихренность и интенсивность источника, которые всюду в данной работе полагаются постоянными. Показано, что в случае  $n = 3$  система трех вихреисточников является интегрируемой по теореме Эйлера-Якоби-Ли.

Найдены относительные положения равновесия системы трех вихреисточников (обобщающие известные относительные равновесия задачи трех вихрей). При помощи редукции получена приведенная система на форм-сфере, описывающая эволюцию конфигураций системы с точностью до подобия. Приведены возможные фазовые портреты и различные .

Фазовый портрет для источников ( $\Gamma = 0, K_i > 0, i = 1, 2, 3$ ) представлен на рис. 5. Как видим в случае источников экватор форм-сферы является

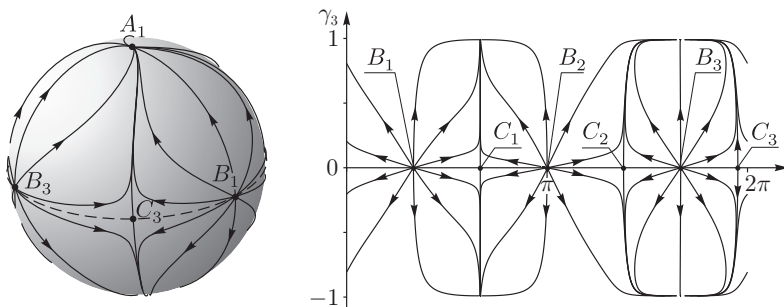


Рис. 5. Траектории на форм-сфере и ее цилиндрической развертке для источников ( $\Gamma_1 = 0, \Gamma_2 = 0, \Gamma_3 = 0, K_1 = 1, K_2 = 1, K_3 = 2$ ),  $A_1$  – равносторонняя конфигурация,  $B_1, B_2, B_3$  – точки, в которых вихри сливаются,  $C_1, C_2, C_3$  – коллинеарные конфигурации

инвариантным многообразием. При этом равносторонняя конфигурация является узлом, к которому стремятся все траектории на форм-сфере.

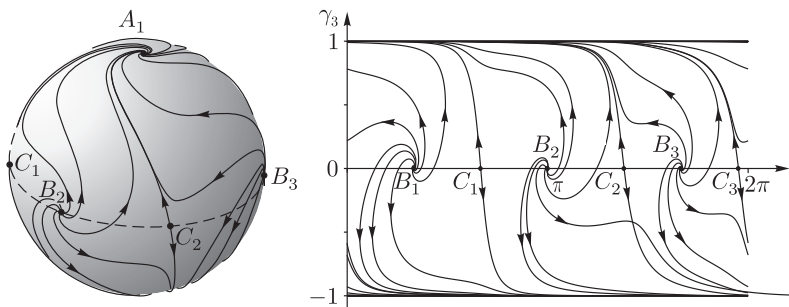


Рис. 6. Траектории на форм-сфере и ее цилиндрической развертке для вихреисточников ( $\Gamma_1 = 1, \Gamma_2 = 1, \Gamma_3 = 2, K_1 = 1, K_2 = 2, K_3 = 3$ ),  $A_1$  – равносторонняя конфигурация,  $B_1, B_2, B_3$  – точки, в которых вихри сливаются,  $C_1, C_2, C_3$  – коллинеарные конфигурации

Фазовые портреты на форм-сфере для вихреисточников приведены на рис. 6 и рис. 7. При этом экватор форм-сферы уже не является инвариантным многообразием. В случае произвольных завихренностей и интенсивно-

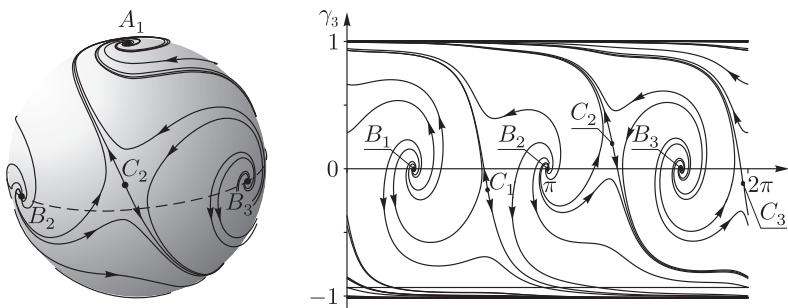


Рис. 7. Траектории на форм-сфере и ее цилиндрической развертке для вихреисточников ( $\Gamma_1 = 4, \Gamma_2 = 2, \Gamma_3 = 3, K_1 = 1, K_2 = 1, K_3 = 2$ ),  $A_1$  — равносторонняя конфигурация,  $B_1, B_2, B_3$  — точки, в которых вихри сливаются,  $C_1, C_2, C_3$  — конфигурации обобщающие коллинеарные

стей, как следует из рис. 7, возникают новые гомотетические конфигурации ( $C_1, C_2, C_3$ ), обобщающие коллинеарные.

## Публикации автора по теме диссертации

Основные результаты диссертации опубликованные в журналах входящих Web of Science:

- 1) Bizyaev I. A., Borisov A. V., Mamaev I. S. The Dynamics of Three Vortex Sources Regular and Chaotic Dynamics, 2014, vol. 19, no. 6, pp. 694–701.
- 2) Bizyaev I. A., Borisov A. V., Mamaev I. S. Figures of equilibrium of an inhomogeneous self-gravitating fluid Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2015, vol. 122, no. 1, pp. 1–26.
- 3) Бизяев И. А., Козлов В. В., Однородные системы с квадратичными интегралами, квазискобки Ли–Пуассона и метод Ковалевской, Математический сборник, 2015, т. 206, №. 12, С. 29–54.

в журналах из перечня ВАК:

- 1) Бизяев И. А., Иванова Т. Б. Фигуры равновесия жидких самогравитирующих неоднородных масс //Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки, 2011, №. 3, С. 142–153.