

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)»**

На правах рукописи



Иванюхин Алексей Викторович

**Методы проектирования траекторий КА с электроракетными
двигателями на основе анализа области существования решений и
исследования задачи о минимальной тяге**

Специальность 05.07.09

Динамика, баллистика, управление движением летательных аппаратов

Диссертация

на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель

д.т.н., профессор Константинов М.С.

Москва – 2015

СОДЕРЖАНИЕ

Основные обозначения и сокращения.....	3
Введение.....	4
1. Математические основы оптимизации траекторий КА с ЭРД.....	10
1.1 Математические модели КА с ЭРД.....	10
1.2 Оптимальное движение КА.....	15
1.3 Краевая задача.....	26
1.3.1 Метод продолжения по параметру.....	26
1.3.2 Ветвление решений.....	33
2 Существование решений задач оптимизации траекторий КА с ЭРД.....	36
2.1 Проблема существования решений.....	36
2.2 Задача минимизации тяги.....	43
2.3 Вычисление границы области существования.....	51
2.4. Переход к задаче с заданным значением тяги.....	56
3. Результаты расчетов и анализ полученных решений.....	58
3.1. Прямые перелёты к планетам.....	61
3.2. Перелёты по сложным маршрутам.....	83
Заключение.....	95
Список использованных источников.....	96

Основные обозначения и сокращения

АЕ	- астрономическая единица,
ДУ	- двигательная установка,
ЭУ	- энергетическая установка,
ТО	- топливный отсек,
ИР	- идеально-регулируемый,
КА	- космический аппарат,
КПД	- коэффициент полезного действия,
ОМ	- ограниченная мощность,
ОТ	- ограниченная тяга,
ПН	- полезная нагрузка,
СЭРДУ	- солнечная электроракетная двигательная установка,
ЭРД	- электрический ракетный двигатель,
ЭРДУ	- электроракетная двигательная установка,
ЭДУ	- энергодвигательная установка,
ЯЭРДУ	- ядерная электроракетная двигательная установка,
T	- вектор тяги (T – модуль вектора тяги),
c	- скорость истечения,
I	- удельный импульс тяги,
N_j	- реактивная мощность двигательной установки,
g_0	- стандартное ускорение свободного падения (9.80665 м/с^2),
x, v	- векторы положения и скорости,
m	- масса,
t	- время,
ϕ	- угловая дальность,
Ω	- силовая функция гравитационного поля,
μ	- гравитационный параметр центрального тела,
δ, \mathbf{e}	- функция тяги и единичный вектор направления (управление),
p	- вектор сопряженных переменных.

Введение

Возможности применения электроракетных двигательных установок (ЭРДУ) для обеспечения космических транспортных операций начали рассматриваться ещё пионерами космонавтики в начале 20-го века. Интерес к этим двигателям и их использованию сохраняется до сих пор и продиктован их основным преимуществом – высоким удельным импульсом тяги, не доступным химическим двигателям. В связи с этим применение ЭРДУ в качестве основной двигательной установки, обеспечивающей наибольший вклад в транспортные операции КА, гарантирует уменьшение расхода топлива. Однако, из-за низкого уровня тяги, свойственного ЭРДУ, наиболее эффективно использовать их оказывается возможным только на достаточно больших удалениях от притягивающих объектов (планет и массивных спутников), то есть в первую очередь на гелиоцентрических участках межпланетных перелётов. Так, в случае использования маршевого ЭРДУ в сильном гравитационном поле в окрестности массивного небесного тела, располагаемое реактивное ускорение может оказаться крайне малым по отношению к гравитационному ускорению притягивающего центра и быть на уровне 10^{-5} - 10^{-4} . В этих условиях траектории перелета в окрестности массивных тел содержат большое количество витков и часто называются задачами перелета с малой тягой. На межпланетных траекториях уровень реактивного ускорения ЭРДУ не сильно уступает притяжению Солнца, и их отношение может иметь порядок 10^{-2} – 10^{-1} . В этих случаях можно говорить о перелёте не с малой, а с конечной тягой.

Именно в задачах исследования Солнечной системы на рубеже веков ЭРДУ стали широко применяться в качестве маршевых, первыми такими аппаратами стали Deep Space 1 (пролет астероида и 2 комет), Smart-1 (выход на окололунную орбиту), Hayabusa (доставка образцов грунта с астероида Итокава), Dawn (последовательный перелет к астероидам Веста и Церера).

При этом подходы к решению задач оптимального управления КА с двигателем малой тяги существенно отличаются от методов, применяемых к задачам с большой тягой (соответствующим КА с химическим маршевым двигателем). Для задач оптимизации траекторий с двигателями большой тяги, ввиду малой продолжительности активных участков, общепринятым является использование в расчётах импульсного приближения [20, 37] – допущения о том, что участки работы ДУ могут быть заменены мгновенным изменением скорости КА. В этом случае задача оптимизации сводится к минимизации характеристической скорости и заключается в определении последовательности импульсов

– величины, направления и времени их приложения, что является существенным упрощением. Кроме того, как показано в работе [20], такая задача в случае движения в центральном гравитационном поле при помощи методов вариационного исчисления и оптимального управления, а также особенностей ограниченной задачи двух тел, может быть сведена к системе нелинейных уравнений и вообще не требовать использования интегрирования уравнений движения для определения траектории КА.

Задача оптимизации перелётов с двигателем малой тяги не позволяет использовать импульсное приближение, так как для неё продолжительности активных и пассивных участков оказываются сопоставимы, что приводит к необходимости управления вектором тяги не в конечном числе точек, а в каждой точке траектории.

На сегодняшний день механике полёта с малой тягой посвящено достаточно много работ (например, [16, 22, 23, 30, 34, 37, 46, 47]) в которых развиваются различные методы решения:

- параметризации и дискретизации процесса управления (замена активного участка серией микроимпульсов) с применением методов, основанных на идеях математического программирования для определения параметров на выделенном участке [30];
- линеаризации вокруг опорной орбиты («метод транспортирующей траектории» и его аналоги) с последующим решением линейной системы с помощью принципа максимума Понтрягина [47];
- осреднении системы дифференциальных уравнений по быстрой переменной и решении осреднённой задачи [41];
- сведение задачи оптимального управления к краевой с помощью принципа максимума Понтрягина и решение её различными методами – методом Ньютона [10-15, 20, 34], продолжением по параметру [24-28, 41-44, 58, 61, 62, 69, 70] и т.д.

Все методы оптимизации траекторий КА с малой тягой так или иначе сталкиваются при их практической реализации с рядом свойственных этой задаче проблем. Одна из них заключается в том, что обычно существует множество траекторий, удовлетворяющих необходимым и достаточным условиям оптимальности, что приводит к необходимости проведения глубокого качественного анализа каждой задачи и зачастую прямого перебора как можно большего количества подходящих решений. Кроме того, задачи оптимизации траектории и основных проектных параметров во многих случаях не могут быть разделены, что приводит к необходимости проведения их совместной оптимизации.

Часто требуется рассмотрение задач перелетов по сложным маршрутам – либо ввиду назначения миссии (исследование нескольких небесных тел одним КА, замкнутые перелёты) или для повышения эффективности перелёта и максимизации конечной массы КА (гравитационные маневры). Следует отметить, что такие постановки свойственны большинству современных проектов межпланетных КА с маршевой ЭРДУ. При этом постановка задачи по ограничениям на управление, составу КА и математическим моделям движения могут отличаться на разных участках. Такие задачи отличаются существенным увеличением размерности и требуют проведения сквозной оптимизации.

К сожалению, задачи оптимального управления КА с малой тягой, как правило, не имеют аналитических решений и обычно могут быть решены только с помощью численных методов, использование которых осложняется разрывностью правых частей системы дифференциальных уравнений движения КА (при включении и выключении ДУ), наличием особой точки в притягивающем центре, их знакопеременностью и осцилляцией в случае использования декартовой системы координат. Всё это может приводить к накоплению значительных ошибок при длительных периодах интегрирования и невозможности достоверного определения производных от краевых условий по начальным параметрам (зачастую необходимых для решения краевой задачи). Однако, необходимо заметить, что на сегодняшний день эти проблемы достаточно легко устраняются благодаря сглаживанию релейной функции тяги, использованию равноденственных переменных, регулярных переменных Кустаанхеймо-Штифеля [25] или Шперлинга–Боде, а также методов интегрирования с переменным шагом и контролем точности.

Куда более сложной и важной представляется проблема существования искомого решения, так как в настоящее время гарантировать это априори, до проведения каких-либо расчётов невозможно; какие именно это могут быть расчёты и как выглядит типичная область существования - непонятно. В этих условиях, при отказе численного метода обычно не удаётся достоверно понять, произошло ли это вследствие его внутренних причин или из-за отсутствия решения.

Вместе с тем **актуальность** миссий с использованием ЭРДУ растёт с развитием технических возможностей космонавтики и продвижением исследовательских интересов человечества все дальше от Земли. Растёт и необходимость в развитии методов проектирования, оптимизации траекторий КА с ЭРДУ (малой тягой), повышения их безотказности, устойчивости вычислительных процедур и получении новых качественных результатов, отражающих принципиальные черты и особенности траекторий с малой тягой.

Прикладное значение задач расчета траекторий КА с малой тягой заключается в проведении проектно-баллистического анализа, подготовке исходных данных для проектирования систем КА, выработке требований к основным его элементам (энергодвигательной установке и командно-измерительной системе, системе обеспечения теплового режима и т.д.), разработке бортового и наземного программно-математического обеспечения для управления полетом, сопровождения полета и анализа телеметрической информации.

На этапе проектно-баллистического анализа задачи оптимизации траекторий играют особую роль, что связано не только с естественным требованием достижения наилучших характеристик КА, но и с необходимостью достоверно оценивать влияние вариации различных проектных параметров КА на основные характеристики проекта. Корректную оценку влияния вариации какого-либо проектного параметра на показатели качества проекта (масса полезной нагрузки, длительность перелета и т.д.) можно получить только при условии оптимальности вариантов траектории КА со сравниваемыми проектными параметрами. В противном случае разница в показателях качества может быть вызвана не изменением проектных параметров, а различной степенью неоптимальности траекторий в сравниваемых вариантах.

Целью настоящей диссертационной работы является разработка методики определения области существования решений в пространстве основных параметров ЭРДУ в задачах перелёта КА с ограниченной тягой и формирование на её основе устойчивого алгоритма проектирования траекторий перелета.

Для достижения поставленной цели проводится анализ существования решений в задачах перелёта КА с ограниченной тягой на основе общих теорем существования теории оптимального управления и вариационного исчисления, изучается математическая модель КА с двигателем ограниченной тягой, влияние её параметров на оптимальные траектории перелёта, формулируется и решается ряд специфических (модельных) задач для построения границы области существования.

Методы проведения исследования, использованные в рамках данной диссертационной работы, относятся к непрямым методам оптимизации, численного решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и численного интегрирования. Так задача оптимального управления КА с ограниченной тягой с помощью принципа максимума Понтрягина сводилась к краевой задаче, которая в свою очередь редуцировалась к задаче Коши методом продолжения по параметру.

Достоверность полученных результатов следует из аргументированной и корректной формулировки задач, использования хорошо обоснованных фундаментальных подходов и методов их решения, таких как принцип максимума Понтрягина и метод продолжения по параметру. Численные результаты подвергались неоднократной прямой проверке. Многие результаты, полученные в диссертации, сравнивались с результатами, опубликованными другими авторами.

Научная новизна и практическая значимость работы состоит в разработке методики определения области существования решений задач перелётов КА с двигателем ограниченной тяги, формулировке на её основе единого подхода к поиску оптимального управления КА с двигателем ограниченной тяги, разработке программного обеспечения на языке программирования C/C++, обладающего высокой степенью автоматизации процесса поиска решений, обеспечивающего построение границы области существования решений задач межпланетных перелётов [26] и перехода с границы области существования в её внутреннюю часть – к решению с заданными характеристиками. В работе получен ряд решений для межпланетных перелётов, характеризующих качественные свойства этих задач.

Все результаты, приведенные в диссертации, **получены лично автором**. Основные результаты содержатся в 4-х научных работах, опубликованных в научных журналах, входящих в перечень рецензируемых научных изданий ВАК [24, 25, 27, 28], а также обсуждались в рамках научных семинаров, на российских и международных конференциях:

- семинар Механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова «Механика космического полета им. В.А. Егорова», Москва, май 2014;
- семинар кафедры Прикладной математики РУДН, Москва, ноябрь 2014;
- семинар кафедры Космических систем и ракетостроения МАИ, Москва, январь 2015;
- международная конференция «Системный анализ, управление и навигация», Анапа, июль 2014;
- The seventh international conference on differential and functional differential equations, International Workshop «Spatio-temporal dynamical systems» (DFDE-2014), Москва, август 2014;
- XLIX научные чтения памяти К.Э. Циолковского, Калуга, сентябрь 2014;
- XXXIX академические чтения по космонавтике, посвященные памяти С.П. Королева, Москва, январь 2015;
- XII Конференция молодых ученых «Фундаментальные и прикладные космические исследования», Москва, апрель 2015.

Основные научные положения, выносимые на защиту:

- формулировка и метод решения задачи на минимум тяги с ограничением на величину конечной массы КА;
- методика построения области существования решений перелётов КА с ограниченной тягой;
- методика перехода с границы области существования в её внутреннюю часть с помощью сглаженного управления;
- результаты качественного анализа области существования решения для ряда задач прямых межпланетных перелётов (Земля-Меркурий, Земля-Венера, Земля-Марс) и решения межпланетных перелётов по сложным маршрутам (замкнутым перелётам к Марсу и астероидам).

Работа состоит из введения, трёх глав, заключения и списка использованных источников. Текст диссертации содержит 101 страницу, включая 11 таблиц и 36 рисунков. Список литературы состоит из 74 наименований.

В первой главе рассматриваются основные математические модели КА с малой тягой и постановка задачи оптимизации его траектории. Вторая глава посвящена вопросу существования решений в описанных ранее постановках оптимизационных задач. Формулируется задача на минимум тяги, на её основе предлагается методика построения границы области существования и гладкого перехода с границы во внутреннюю область. Примеры реализации этой методики и гладкого перехода с границы во внутреннюю область для задач прямых межпланетных перелётов и замкнутых перелётов к планетам и астероидам находятся в третьей главе. В заключении приводятся основные результаты диссертационной работы.

1. Математические основы оптимизации траекторий КА с ЭРД

1.1 Математические модели КА с ЭРД

Обычно математическая модель КА с ЭРД включает в себя две основные части: динамические уравнения движения КА и массовую модель КА. В рамках данной работы КА рассматривается как материальная точка переменной массы, движение вокруг центра масс не рассматривается.

Математическая модель движения центра масс в инерциальной декартовой системе координат, связанной с барицентром системы, может быть представлена в виде следующих дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \Omega_x + \frac{\mathbf{T}}{m}, \\ \frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c}, \end{cases} \quad (1.1)$$

где \mathbf{x} – вектор положения КА, t – время, m – масса КА, Ω – силовая функция гравитационного поля (нижний индекс обозначает производную), \mathbf{T} – вектор тяги (T – модуль вектора тяги), c – скорость истечения.

Часто для описания ДУ вместо скорости истечения используется удельный импульс тяги, равный отношению скорости истечения к стандартному ускорению свободного падения (9.80665 м/с^2):

$$I = \frac{c}{g_0}. \quad (1.2)$$

Реактивная мощность ЭРДУ N_j связана с тягой и скоростью истечения следующим соотношением:

$$N_j = \frac{Tc}{2}. \quad (1.3)$$

С другой стороны, реактивная мощность может быть представлена как произведение КПД электроракетной двигательной установки ($\eta_{КПД}$) на потребляемую ЭРДУ электрическую мощность.

$$N_j = \eta_{КПД} N_e. \quad (1.4)$$

И тот и другой член этого произведения может зависеть от вектора положения КА и

времени. Зависимость электрической мощности ЭРДУ от фазовых координат КА и времени обычно связана с типом бортовой энергоустановки КА и с эффектами деградации энергетической и двигательной установок. Наиболее распространенные типы бортовых энергоустановок КА основаны на солнечных и ядерных источниках энергии. Электрическая мощность солнечной энергоустановки зависит от гелиоцентрического удаления КА, а мощность ядерной энергоустановки обычно принимается постоянной. Проектно-баллистический анализ перелетов КА с ЭРДУ, как правило, проводится в предположении постоянства КПД ЭРДУ, поэтому, случаю переменной электрической мощности соответствует использование солнечной электроракетной двигательной установки (СЭРДУ), а случаю постоянной реактивной мощности – использование ядерной электроракетной двигательной установки (ЯЭРДУ). Другой причиной изменения электрической мощности ЭРДУ является деградация характеристик бортовой энергоустановки и двигателей. Поэтому, в общем случае, N_j также зависит от положения и времени:

$$N_j = N_j(\mathbf{x}, t). \quad (1.5)$$

Различия в математических моделях движения КА связаны с режимами функционирования ЭРД и ограничениями на управление. Традиционно рассматриваются следующие модели функционирования ЭРД [16, 20, 30, 34, 37, 46]:

- **идеально-регулируемый двигатель ограниченной мощности** – управлением является величина и направление тяги и величина скорости истечения (или массового расхода), при этом они ограничены только величиной располагаемой реактивной мощности

$$\frac{Tc}{2} = N_j(\mathbf{x}, t); \quad (1.6)$$

- **двигатель ограниченной тяги** – управлением является направление тяги и её значение, при этом направление тяги не ограничено, а величина тяги ограничена максимально допустимым значением, это ограничение может включать или не включать промежуточные значения величины тяги, в общем случае максимальная величина тяги и значение скорости истечения могут быть функциями координат КА и времени

$$T \in \{0, T(\mathbf{x}, t)\} \quad \text{или} \quad T \in [0, T(\mathbf{x}, t)], \quad c = c(\mathbf{x}, t). \quad (1.7)$$

Задача нахождения оптимальной траектории КА с ЭРД прямого перелёта, сформулированная в наиболее общем виде, может содержать следующие краевые условия:

- в начальный момент времени

$$\mathbf{g}_0(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{v}(t_0)) = 0, \quad m(t_0) = m_0; \quad (1.8)$$

- и конечный момент времени

$$t_k = t_0 + \Delta t, \quad \mathbf{g}_k(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{v}(t_k)) = 0, \quad m(t_k) \geq m_k^*. \quad (1.9)$$

Эти моменты времени, в свою очередь, могут быть выбраны из некоторых замкнутых интервалов, ограниченными допустимыми датами старта и времени перелёта

$$t_0 \in [t_0^*; t_0^{**}], \quad \Delta t \in [\Delta t^*; \Delta t^{**}]. \quad (1.10)$$

Помимо прямых перелётов важны задачи с промежуточными ограничениями на траекторию, которые можно представить в виде заданных условий в ряде точек:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_i(\mathbf{x}(t_i^-), \mathbf{v}(t_i^-), \mathbf{x}(t_i^+), \mathbf{v}(t_i^+)) &= 0, \\ m(t_i^-) - m(t_i^+) + \Delta m_i &= 0, \\ t_i^+ - t_i^- - \Delta t_i &\geq 0, \quad \Delta t_i = \text{const}, \\ i &= 1 \dots k-1 \end{aligned} \quad (1.11)$$

В выражениях (1.8) - (1.11) приняты следующие обозначения: t_0 - момент начала манёвра, t_i^- и t_i^+ - моменты выхода и схода с промежуточного ограничения, t_k - момент окончания манёвра, Δm_i - изменение массы во время промежуточного ограничения, i - номер промежуточного ограничения.

Задачам с промежуточными ограничениями соответствуют такие постановки, как облет заданных орбит или групп КА при межорбитальных манёврах, межпланетные траектории, включающие гравитационные манёвры, замкнутые перелёты и облёты групп астероидов.

Изменение массы при прохождении промежуточного ограничения (1.11) в зависимости от рассматриваемой задачи может отражать сброс составных частей КА или забор пробы грунта, а также некоторые динамические операции, такие как выход с подлётной траектории на заданную орбиту с помощью двигателя большой тяги или скрутка-раскрутка с помощью двигателей малой тяги. В последнем случае изменение массы

будет являться функцией от характеристик КА в момент выхода на промежуточное ограничение (массы КА, располагаемой тяги и скорости истечения).

Функциями, ограничивающими положение и скорость аппарата, могут выступать различные уравнения, задающие параметры орбит частично или полностью, положение на этих орбитах, помимо строгих равенств могут быть ограничения типа нестрогого неравенства.

Основным критерием оптимизации в задачах механики космического полета, как с большой, так и малой тягой является конечная масса КА

$$m(t_k) \rightarrow \max, \quad (1.12)$$

помимо этого, рассматривается и классическая для теории оптимального управления задача оптимального быстродействия

$$\Delta t \rightarrow \min. \quad (1.13)$$

Массовая модель КА может быть представлена в виде суммы масс его систем в начальный момент времени:

$$m_0 = m_{ПН} + m_{ДУ} + m_{ЭУ} + m_T + m_{ТО} + m_{const}, \quad (1.14)$$

где $m_{ПН}$ - масса полезной нагрузки, $m_{ДУ}$ и $m_{ЭУ}$ - массы двигательной и энергетических установок, m_T и $m_{ТО}$ - массы топлива и топливного отсека, m_{const} - постоянная масса, включающая в себя части конструкции КА и прочие системы и элементы не связанные напрямую с характеристиками перелёты и режимами работы ДУ.

Задавшись удельными характеристиками ДУ, ЭУ и топливного отсека, можно записать соответствующие им массы

$$m_{ДУ} = \gamma_{ДУ} N_j, \quad m_{ЭУ} = \gamma_{ЭУ} N_e, \quad m_{ТО} = a_{ТО} m_T, \quad (1.15)$$

где - N_j - реактивная мощность ДУ, N_e - электрическая мощность ЭУ, $\gamma_{ДУ}$, $\gamma_{ЭУ}$, $a_{ТО}$ - удельные массы ДУ, ЭУ и топливного отсека (ТО) соответственно.

Поскольку целью диссертационной работы является задача траекторной оптимизации и массовая модель рассматривается в укрупнённом виде, удобно объединить ДУ и ЭУ в одну систему, имея ввиду, что масса части ЭУ обеспечивающей питание ПН или прочих систем на участке активного полёта, если это необходимо, может быть учтена в

массе ПН или части постоянной массы аппарата m_{const} и не зависит от вида траектории. Тогда, используя это предположение и соотношения (1.3), (1.15), (1.4) можно объединить ДУ и ЭУ в одну энергодвигательную установку (ЭДУ)

$$\gamma_{ЭДУ} = \gamma_{ДУ} \eta_{КПД} + \gamma_{ЭУ}, \quad (1.16)$$

и переписать (1.14) следующим образом

$$m_0 = m_{ПН} + \gamma_{ЭДУ} \frac{Tc}{2\eta_{КПД}} + (1 + a_{ТО}) m_T + m_{const}. \quad (1.17)$$

Имея массовую модель КА легко получить условие для оптимального значения скорости истечения, максимизирующее массу ПН при фиксированном значении начальной массы КА и заданной величине тяги:

$$\frac{\partial m_{ПН}}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial^2 m_{ПН}}{\partial c^2} < 0. \quad (1.18)$$

Однако, определение оптимального значения скорости истечения возможно только совместно с оптимизацией траектории, так как вид траектории оказывает влияние на массу необходимого топлива m_T , непосредственно входящую в весовую модель, а величина скорости истечения может влиять на структуру управления и, следовательно, на вид траектории. Таким образом, получить в аналитическом виде производную массы топлива по скорости истечения в общем случае невозможно.

1.2 Оптимальное движение КА

Идеально-регулируемый (ИР) двигатель ограниченной мощности (ОМ-задача) является математической моделью электроракетного двигателя, в рамках которой предполагается, что на скорость истечения и тягу ЭРД накладывается единственное ограничение – начальная реактивная мощность ЭРД считается фиксированной. В рамках указанного ограничения скорость истечения и тяга ИР-двигателя могут произвольно изменяться. Оптимизация траекторий КА с ИР-двигателем рассматривалась во многих работах, например, [16, 41, 42, 44, 63, 67], привлекая к себе внимание относительной простотой оптимального управления.

Самостоятельно эта задача может иметь мало приложений на практике ввиду сложности реализации регулирования ЭРД в большом диапазоне по удельному импульсу и массовому расходу. Тем не менее, для современных КА с ЭРД ОМ-задача позволяет определить максимально возможную величину конечной массы КА при заданной начальной мощности ДУ, а также даёт достаточно хорошее начальное приближение для постановок задач с более реальными моделями работы ЭРД.

Учитывая зависимости (1.3) и (1.5), дифференциальное уравнение для массы КА из системы (1.1) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T^2}{2N_j} = -\frac{m^2 a^2}{2N_{j0}\eta(\mathbf{x}, t)}, \quad (1.19)$$

где $a = T/m$ – величина реактивного ускорения, N_{j0} – начальная реактивная мощность ДУ, $\eta(\mathbf{x}, t)$ – функция зависимости мощности от положения и скорости ($N_j(\mathbf{x}, t) = N_{j0}\eta(\mathbf{x}, t)$, (1.5)).

Это уравнение имеет следующее решение:

$$m(t) = \frac{m_0}{1 + \frac{m_0}{N_{j0}} J(t)}, \quad (1.20)$$

где

$$J(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \frac{a^2}{\eta(\mathbf{x}, t)} dt \quad (1.21)$$

– функционал (показатель качества) ОМ-задачи, чей минимум соответствует максимальной конечной массе.

Возможность записать отдельно выражение для массы (1.20) и отсутствие

зависимости правых частей дифференциальных уравнений для положения и скорости от мощности приводит к разделению задачи на две независимые части [16, 42, 63]:

- 1) динамическую – нахождение оптимальной программы ускорения от реактивной тяги, минимизирующей интегральный критерий (1.21) для заданного динамического манёвра;
- 2) весовую – определение оптимальных весовых соотношений и уровня мощности, проверка удовлетворения условия на конечную массу (1.9).

Такое разделение задачи существенно упрощает её решение и оправдывает идеализацию работы ЭРД.

Далее будет сформулирована динамическая часть ОМ-задачи как задача оптимального управления. Именно её решению будет использоваться в дальнейшем в данной диссертации, также далее в тексте она будет именоваться просто "ОМ-задача", весовая часть как таковая рассматриваться не будет.

ОМ-задача (динамическая часть). Среди всех управлений, переводящих КА с ИР-двигателем с начального многообразия (1.8) в конечное (1.9), найти управление, позволяющее максимизировать функционал (1.21) и соответствующую этому управлению траекторию перелёта. Время перелёта фиксировано.

$$\left\{ \begin{array}{l} J(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_k} \frac{a^2}{\eta(\mathbf{x}, t)} dt \rightarrow \min, \\ \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{\Omega}_x + \mathbf{a}, \\ \mathbf{g}_0(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{v}(t_0)) = 0, \quad \mathbf{g}_k(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{v}(t_k)) = 0, \\ t_k - t_0 - \Delta t = 0, \quad \Delta t = \text{const}, \quad \eta(\mathbf{x}, t) > 0, \quad \mathbf{a} \in U = \mathbf{R}^3. \end{array} \right. \quad (1.22)$$

Рассмотрим эту задачу в рамках принципа максимума [2, 45], запишем функцию Понтрягина

$$H = -\lambda_J \frac{a^2}{2\eta} + \mathbf{p}_v^T \mathbf{\Omega}_x + \mathbf{p}_v^T \mathbf{a} + \mathbf{p}_x^T \mathbf{v}, \quad (1.23)$$

и терминант (краевую функцию Лагранжа)

$$l = \mathbf{g}_0(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{v}(t_0))^T \boldsymbol{\lambda}^0 + \mathbf{g}_k(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{v}(t_k))^T \boldsymbol{\lambda}^k + (t_k - t_0 - \Delta t) \lambda_t, \quad (1.24)$$

где, $\mathbf{P}_x, \mathbf{P}_v$ – непрерывные кусочно-гладкие функции (сопряженные переменные к \mathbf{x} и \mathbf{v} соответственно), λ_t, λ_t^0 и векторы $\boldsymbol{\lambda}^0, \boldsymbol{\lambda}^k$ – множители Лагранжа.

Условия принципа максимума принимают следующий вид:

- условия оптимальности по управлению $\mathbf{a}_{opt} = \max_{\mathbf{e}, \delta} H :$

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\lambda_j} \eta \mathbf{p}_v, \quad (1.25)$$

- уравнения Эйлера-Лагранжа (сопряженная система):

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{p}_x}{dt} = -\mathbf{\Omega}_{xx} \mathbf{p}_v - \frac{p_v^2}{2\lambda_j} \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}}, \\ \frac{d\mathbf{p}_v}{dt} = -\mathbf{p}_x, \end{cases} \quad (1.26)$$

- условия трансверсальности

$$\begin{cases} \mathbf{p}_x(t_0) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(t_0)} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{v}(t_0))^T \boldsymbol{\lambda}^0, & \mathbf{p}_x(t_k) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(t_k)} \mathbf{g}_k(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{v}(t_k))^T \boldsymbol{\lambda}^k, \\ \mathbf{p}_v(t_0) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}(t_0)} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{v}(t_0))^T \boldsymbol{\lambda}^0, & \mathbf{p}_v(t_k) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}(t_k)} \mathbf{g}_k(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{v}(t_k))^T \boldsymbol{\lambda}^k, \end{cases} \quad (1.27)$$

- условия стационарности

$$H(t_0) = -\frac{\partial l}{\partial t_0} = -\frac{\partial g_0}{\partial t_0} + \lambda_t, \quad H(t_k) = \frac{\partial l}{\partial t_k} = \frac{\partial g_k}{\partial t_k} + \lambda_t \quad (1.28)$$

- условия нетривиальности и неотрицательности

$$\lambda_j + |\boldsymbol{\lambda}^0| + |\boldsymbol{\lambda}^k| > 0, \quad \lambda_j \geq 0, \quad (1.29)$$

- условие нормировки: в связи с однородностью по сопряженным переменным функции Понтрягина, можно ввести одно условие нормировки, в ОМ-задачи всегда будет приниматься следующая нормировка

$$\lambda_j = 1. \quad (1.30)$$

Рассмотрим отдельно **ОМ-задачу** с промежуточными условиями. Её можно сформулировать таким образом: среди всех управлений, переводящих КА с ИР-двигателем с начального многообразия в конечное и обеспечивающих прохождение в некоторые заранее не заданные моменты времени через ряд промежуточных многообразий, найти управление, позволяющее максимизировать функционал (1.21) и соответствующую этому управлению траекторию перелёта. Общее время перелёта фиксировано, минимальное время нахождения на промежуточном условии ограничено.

$$\left\{ \begin{array}{l} J(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_k} \frac{a^2}{\eta(\mathbf{x}, t)} dt \rightarrow \min, \\ \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{\Omega}_x + \mathbf{a}, \\ \mathbf{g}_0(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{v}(t_0)) = 0, \\ \mathbf{g}_i(\mathbf{x}(t_i^-), \mathbf{v}(t_i^-), \mathbf{x}(t_i^+), \mathbf{v}(t_i^+)) = 0, \quad i = 1 \dots k-1 \\ \mathbf{g}_k(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{v}(t_k)) = 0, \\ t_k - t_0 - \Delta t = 0, \quad t_i^+ - t_i^- - \Delta t_i \geq 0, \quad \Delta t = \text{const}, \quad \Delta t_i = \text{const}, \\ \eta(\mathbf{x}, t) > 0, \quad \mathbf{a} \in U = \mathbf{R}^3. \end{array} \right. \quad (1.31)$$

Рассматривая эту задачу аналогичным образом, имеем функцию Понтрягина

$$H = -\lambda_J \frac{a^2}{2\eta} + \mathbf{p}_v^T \mathbf{\Omega}_x + \mathbf{p}_v^T \mathbf{a} + \mathbf{p}_x^T \mathbf{v}, \quad (1.32)$$

и терминант (краевую функцию Лагранжа)

$$\begin{aligned} l = & \mathbf{g}_0(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{v}(t_0))^T \boldsymbol{\lambda}^0 + \sum_i \mathbf{g}_i(\mathbf{x}(t_i^-), \mathbf{v}(t_i^-), \mathbf{x}(t_i^+), \mathbf{v}(t_i^+))^T \boldsymbol{\lambda}^i + \\ & + \mathbf{g}_k(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{v}(t_k))^T \boldsymbol{\lambda}^k + \sum_i (t_i^+ - t_i^- - \Delta t_i) \lambda_i^i + (t_k - t_0 - \Delta t) \lambda_i^k, \end{aligned} \quad (1.33)$$

где, $\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_v$ – непрерывные кусочно-гладкие функции (сопряженные переменные к \mathbf{x} и \mathbf{v} соответственно), $\lambda_J, \lambda_i^i, \lambda_i^k$ и векторы $\boldsymbol{\lambda}^0, \boldsymbol{\lambda}^i, \boldsymbol{\lambda}^k$ – множители Лагранжа.

Условия принципа максимума принимают следующий вид:

- условия оптимальности по управлению $\mathbf{a}_{opt} = \max_{\mathbf{e}, \delta} H$:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\lambda_J} \eta \mathbf{p}_v, \quad (1.34)$$

- уравнения Эйлера-Лагранжа (сопряженная система):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{p}_x}{dt} = -\mathbf{\Omega}_{xx} \mathbf{p}_v - \frac{p_v^2}{2\lambda_J} \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}}, \\ \frac{d\mathbf{p}_v}{dt} = -\mathbf{p}_x, \end{array} \right. \quad (1.35)$$

- условия трансверсальности

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}_x(t_0) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(t_0)} \mathbf{g}_0^T \boldsymbol{\lambda}^0, \\ \mathbf{p}_x(t_i^-) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(t_i^-)} \mathbf{g}_i^T \boldsymbol{\lambda}^i, \\ \mathbf{p}_x(t_i^+) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(t_i^+)} \mathbf{g}_i^T \boldsymbol{\lambda}^i, \\ \mathbf{p}_x(t_k) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(t_k)} \mathbf{g}_k^T \boldsymbol{\lambda}^k, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}_v(t_0) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}(t_0)} \mathbf{g}_0^T \boldsymbol{\lambda}^0, \\ \mathbf{p}_v(t_i^-) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}(t_i^-)} \mathbf{g}_i^T \boldsymbol{\lambda}^i, \\ \mathbf{p}_v(t_i^+) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}(t_i^+)} \mathbf{g}_i^T \boldsymbol{\lambda}^i, \\ \mathbf{p}_v(t_k) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}(t_k)} \mathbf{g}_k^T \boldsymbol{\lambda}^k, \end{array} \right. \quad (1.36)$$

- условия стационарности

$$\left\{ \begin{array}{l} H(t_0) = -\frac{\partial l}{\partial t_0} = -\frac{\partial}{\partial t_0} \mathbf{g}_0^T \boldsymbol{\lambda}^0 + \lambda_t^k, \quad H(t_i^-) = \frac{\partial l}{\partial t_i^-} = \frac{\partial}{\partial t_i^-} \mathbf{g}_i^T \boldsymbol{\lambda}^i - \lambda_t^i, \\ H(t_i^+) = -\frac{\partial l}{\partial t_i^+} = -\frac{\partial}{\partial t_i^+} \mathbf{g}_i^T \boldsymbol{\lambda}^i - \lambda_t^i, \quad H(t_k) = \frac{\partial l}{\partial t_k} = \frac{\partial}{\partial t_k} \mathbf{g}_k^T \boldsymbol{\lambda}^k + \lambda_t^i, \end{array} \right. \quad (1.37)$$

- условия нетривиальности и неотрицательности

$$\lambda_j + |\boldsymbol{\lambda}^0| + \sum_i |\boldsymbol{\lambda}^i| + \sum_i \lambda_t^i + |\boldsymbol{\lambda}^k| + \lambda_t^k > 0, \quad \lambda_j \geq 0, \quad \lambda_t^i \geq 0, \quad (1.38)$$

- условие нормировки: в связи с однородностью по сопряженным переменным функции Понтрягина, можно ввести одно условие нормировки, в ОМ-задачи всегда будет приниматься следующая нормировка

$$\lambda_j = 1. \quad (1.39)$$

Таким образом с помощью принципа максимума задача с промежуточными условиями сводится к многоточечной краевой задаче.

В рассматриваемой задаче не фиксированы моменты выхода на промежуточные ограничения и, следовательно, времена перелётов, удобного совместного интегрирования участков траекторий можно перейти от $\Delta t_i = [t_i^+; t_{i+1}^-]$, $i = 0..k-1$ к новому времени, фиксированному и одинаковому для всех участков $\rho \in [0;1]$, связанному с исходным «физическим» временем следующим уравнением

$$\frac{dt_i}{d\rho} = \Delta t_i. \quad (1.40)$$

Окончательно краевая задача принципа максимума с учётом преобразования времени и после подстановки оптимального управления принимает вид

$$\begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{x}^i}{d\rho} \\ \frac{d\mathbf{v}^i}{d\rho} \\ \frac{d\mathbf{p}_x^i}{d\rho} \\ \frac{d\mathbf{p}_v^i}{d\rho} \\ \frac{dt^i}{d\rho} \end{pmatrix} = \Delta t_i \begin{pmatrix} \mathbf{v}^i \\ \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{x}^i} + \eta(\mathbf{x}^i, t^i) \mathbf{p}_v^i \\ -\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{x}^i} \mathbf{p}_v^i - \frac{(p_v^i)^2}{2} \frac{\partial \eta(\mathbf{x}^i, t^i)}{\partial \mathbf{x}^i} \\ -\mathbf{p}_x^i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.41)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{g}(\mathbf{x}^i(0), \mathbf{v}^i(0), t^i(0), \mathbf{x}^i(1), \mathbf{v}^i(1), t^i(1)) = 0, \\ \mathbf{p}_x^i(0) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^i(0)} \mathbf{g}^T \boldsymbol{\lambda}, \quad \mathbf{p}_v^i(0) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}^i(0)} \mathbf{g}^T \boldsymbol{\lambda}, \\ \mathbf{p}_x^i(1) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^i(1)} \mathbf{g}^T \boldsymbol{\lambda}, \quad \mathbf{p}_v^i(1) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}^i(1)} \mathbf{g}^T \boldsymbol{\lambda}, \\ H^{i+1}(0) + \frac{\partial}{\partial t^{i+1}(0)} \mathbf{g}^T \boldsymbol{\lambda} = H^i(1) - \frac{\partial}{\partial t^i(1)} \mathbf{g}^T \boldsymbol{\lambda}, \quad (i \neq k), \\ t_i^+ - t_i^- - \Delta t_i = 0 \quad \text{или} \quad H^i(1) + \frac{\partial}{\partial t^i(1)} \mathbf{g}^T \boldsymbol{\lambda} = 0, \quad \text{если } t_i^+ - t_i^- - \Delta t_i > 0, \quad (i \neq k, i \neq 0), \\ H^0(0) + \frac{\partial}{\partial t^0(0)} \mathbf{g}_0^T \boldsymbol{\lambda}^0 = H^k(1) - \frac{\partial}{\partial t^k(1)} \mathbf{g}_k^T \boldsymbol{\lambda}^k, \\ t^k(1) - t^0(0) = \Delta t, \\ \rho \in [0; 1], \quad i = 0 \dots k. \end{array} \right. \quad (1.42)$$

Такое представление оказывается достаточно удобным и сводит многоточечную краевую задачу 12-го порядка к двухточечной порядка $12k$ [19]; это позволяет унифицировать подход к решению таких задач и разработать более эффективные и быстрые реализации их численного решения с использованием параллельных вычислительных технологий, что может быть особенно ценным при достаточно большом количестве промежуточных условий.

Как отмечалось ранее, ОМ-задача использует идеализированную математическую модель ЭРДУ, задача о перелете КА с ЭРДУ **ограниченной тягой (ОТ-задача)** существенно реалистичнее. Выражения (1.5) и (1.7) определяют математическую модель регулировочных характеристик ЭРДУ для этой задачи как зависимость доступной для ЭРДУ мощности, тяги и скорости истечения от условий полета КА (фазовых координат и времени).

Математическая модель ОТ-задачи, достаточно адекватно представляет основные особенности функционирования современных и перспективных ЭРДУ, поэтому оптимизация ОТ-траекторий представляет значительный практический интерес. Однако, с методической точки зрения, оптимизация ОТ-траекторий осложняется невозможностью разделения задачи на динамическую и весовую части и более жесткими ограничениями на управление.

Частным случаем ОТ-задачи является задача о перелете с заданными постоянными значениями скорости истечения и максимально допустимой тяги. В более общем случае, значения реактивной мощности, тяги и скорости истечения в каждый момент времени можно считать согласованными между собой функциями, далее будет рассмотрен именно такой вариант для задачи максимизации конечной массы КА.

ОТ-задача. Среди всех управлений, переводящих КА с начального многообразия в конечное, найти управление, позволяющее максимизировать массу КА в конечный момент времени и соответствующую ему траекторию перелёта. Время перелёта фиксировано.

$$\left\{ \begin{array}{l} m(t_k) \rightarrow \max, \\ \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \Omega_{\mathbf{x}} + \delta \frac{\eta(\mathbf{x}, t) T_0}{m} \mathbf{e}, \quad \frac{dm}{dt} = -\delta \frac{\eta(\mathbf{x}, t) T_0}{w(\mathbf{x}, t) c_0}, \\ \mathbf{g}_0(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{v}(t_0)) = 0, \quad m(t_0) = m_0, \quad \mathbf{g}_k(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{v}(t_k)) = 0, \quad m(t_k) \geq m_k^*, \\ t_k - t_0 - \Delta t = 0, \quad \Delta t = \text{const}, \\ \eta(\mathbf{x}, t) > 0, \quad w(\mathbf{x}, t) > 0, \\ (\mathbf{e}, \delta) \in U = \{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}, |\mathbf{e}| = 1, \delta \in [0; 1]\}. \end{array} \right. \quad (1.43)$$

где δ – функция тяги, \mathbf{e} – единичный вектор в направлении вектора тяги, T_0 и c_0 – начальные значения тяги и скорости истечения, $\eta(\mathbf{x}, t)$ и $w(\mathbf{x}, t)$ – функции, задающие изменения тяги и скорости истечения (1.7).

Рассмотрим эту задачу в рамках принципа максимума [2, 45], запишем функцию Понтрягина

$$H = \mathbf{p}_x^T \mathbf{v} + \mathbf{p}_v^T \Omega_{\mathbf{x}} + \delta \eta(\mathbf{x}, t) T_0 \left(\frac{\mathbf{p}_v^T \mathbf{e}}{m} - \frac{p_m}{w(\mathbf{x}, t) c_0} \right), \quad (1.44)$$

и терминант (краевую функцию Лагранжа)

$$\begin{aligned} l = & \mathbf{g}_0(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{v}(t_0))^T \boldsymbol{\lambda}^0 + (m(t_0) - m_0) \lambda_m^0 + \\ & + \mathbf{g}_k(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{v}(t_k))^T \boldsymbol{\lambda}^k + (m_k^* - m(t_k)) \lambda_m^k + (t_k - t_0 - \Delta t) \lambda_t. \end{aligned} \quad (1.45)$$

где, как всегда, $\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_v, p_m$ – непрерывные кусочно-гладкие функции (сопряженные

переменные), числа $\lambda_m^0, \lambda_m^k, \lambda_t$ и векторы λ^0, λ^k – множители Лагранжа.

Условия принципа максимума принимают следующий вид:

- условия оптимальности по управлению $\{\mathbf{e}, \delta\}_{opt} = \max_{\mathbf{e}, \delta} H$:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{p}_v}{p_v}, \quad p_v = |\mathbf{p}_v|, \quad \Psi = \frac{p_v}{m} - \frac{p_m}{wc}, \quad \delta = \begin{cases} 1, \Psi > 0 \\ \forall [0;1], \Psi = 0. \\ 0, \Psi < 0 \end{cases} \quad (1.46)$$

- уравнения Эйлера-Лагранжа (сопряженная система):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{p}_x}{dt} = -\mathbf{\Omega}_{xx}\mathbf{p}_v - \delta \frac{T_0}{m} |\mathbf{p}_v| \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}} + \delta \frac{T_0}{wc_0} p_m \left(\frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\eta}{w} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{x}} \right), \\ \frac{d\mathbf{p}_v}{dt} = -\mathbf{p}_x, \\ \frac{dp_m}{dt} = \delta \frac{\eta T_0}{m^2} |\mathbf{p}_v|, \end{array} \right. \quad (1.47)$$

- условия трансверсальности

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}_x(t_0) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(t_0)} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{v}(t_0))^T \lambda^0, \\ \mathbf{p}_v(t_0) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}(t_0)} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{v}(t_0))^T \lambda^0, \\ p_m(t_0) = \lambda_m^0, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}_x(t_k) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(t_k)} \mathbf{g}_k(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{v}(t_k))^T \lambda^k, \\ \mathbf{p}_v(t_k) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}(t_k)} \mathbf{g}_k(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{v}(t_k))^T \lambda^k, \\ p_m(t_k) = \lambda_m^k, \end{array} \right. \quad (1.48)$$

- условия стационарности

$$H(t_0) = -\frac{\partial l}{\partial t_0} = -\frac{\partial}{\partial t_0} \mathbf{g}_0^T \lambda^0 + \lambda_t, \quad H(t_k) = \frac{\partial l}{\partial t_k} = \frac{\partial}{\partial t_k} \mathbf{g}_k^T \lambda^k + \lambda_t \quad (1.49)$$

- условие дополняющей нежесткости

$$(m_1^* - m(t_k)) \lambda_m^k = 0, \quad (1.50)$$

- условия неотрицательности

$$|\lambda_m^0| + |\lambda^0| + |\lambda^k| + \lambda_m^k > 0, \quad \lambda_m^k \geq 0, \quad (1.51)$$

- условие нормировки: в связи с однородностью по сопряженным переменным функции Понтрягина, можно ввести одно условие нормировки связывающее сопряженные переменные.

Рассмотрим теперь отдельно **ОТ-задачу** в постановке с промежуточными условиями, заключающуюся в том, что среди всех управлений, переводящих КА с

начального многообразия в конечное и обеспечивающих прохождение в некоторые заранее не заданные моменты времени через ряд промежуточных многообразий, найти управление, позволяющее максимизировать массу КА в конечный момент времени и соответствующую ему траекторию перелёта. Общее время перелёта фиксировано, минимальное время нахождения на промежуточном условии ограничено.

$$\left\{ \begin{array}{l} m(t_k) \rightarrow \max, \\ \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \Omega_{\mathbf{x}} + \delta \frac{\eta(\mathbf{x}, t) T_0}{m} \mathbf{e}, \quad \frac{dm}{dt} = -\delta \frac{\eta(\mathbf{x}, t) T_0}{w(\mathbf{x}, t) c_0}, \\ \mathbf{g}_0(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{v}(t_0)) = 0, \quad m(t_0) = m_0, \\ \mathbf{g}_i(\mathbf{x}(t_i^-), \mathbf{v}(t_i^-), \mathbf{x}(t_i^+), \mathbf{v}(t_i^+)) = 0, \quad m(t_i^-) - m(t_i^+) + \Delta m_i = 0, \quad i = 1 \dots k-1 \\ \mathbf{g}_k(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{v}(t_k)) = 0, \quad m(t_k) \geq m_k^*, \\ t_k - t_0 - \Delta t = 0, \quad t_i^+ - t_i^- - \Delta t_i \geq 0, \quad \Delta t = \text{const}, \quad \Delta t_i = \text{const}, \\ \eta(\mathbf{x}, t) > 0, \quad w(\mathbf{x}, t) > 0, \\ (\mathbf{e}, \delta) \in U = \{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}, |\mathbf{e}| = 1, \delta \in [0; 1]\}. \end{array} \right. \quad (1.52)$$

Функция Понтрягина имеет аналогичный вид

$$H = \mathbf{p}_x^T \mathbf{v} + \mathbf{p}_v^T \Omega_{\mathbf{x}} + \delta \eta(\mathbf{x}, t) T_0 \left(\frac{\mathbf{p}_v^T \mathbf{e}}{m} - \frac{p_m}{w(\mathbf{x}, t) c_0} \right), \quad (1.53)$$

терминант отличается только дополнительными слагаемыми

$$\begin{aligned} l = & \mathbf{g}_0(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{v}(t_0))^T \boldsymbol{\lambda}^0 + (m(t_0) - m_0) \lambda_m^0 + \\ & + \sum_i \mathbf{g}_i(\mathbf{x}(t_i^-), \mathbf{v}(t_i^-), \mathbf{x}(t_i^+), \mathbf{v}(t_i^+))^T \boldsymbol{\lambda}^i + \sum_i (m(t_i^-) - m(t_i^+) + \Delta m_i) \lambda_m^i + \\ & \sum_i (t_i^+ - t_i^- - \Delta t_i) \lambda_t^i + \mathbf{g}_k(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{v}(t_k))^T \boldsymbol{\lambda}^k + (m_k^* - m(t_k)) \lambda_m^k + (t_k - t_0 - \Delta t) \lambda_t. \end{aligned} \quad (1.54)$$

где, как всегда, $\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_v, p_m$ – непрерывные кусочно-гладкие функции (сопряженные переменные), числа $\lambda_m^0, \lambda_m^k, \lambda_m^i, \lambda_t^i, \lambda_t$ и векторы $\boldsymbol{\lambda}^0, \boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{\lambda}^i$ – множители Лагранжа.

Условия принципа максимума принимают следующий вид:

- условия оптимальности по управлению $\{\mathbf{e}, \delta\}_{opt} = \max_{\mathbf{e}, \delta} H$:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{p}_v}{p_v}, \quad p_v = |\mathbf{p}_v|, \quad \Psi = \frac{p_v}{m} - \frac{p_m}{c}, \quad \delta = \begin{cases} 1, \Psi > 0 \\ \forall [0; 1], \Psi = 0. \\ 0, \Psi < 0 \end{cases} \quad (1.55)$$

- уравнения Эйлера-Лагранжа (сопряженная система):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{p}_x}{dt} = -\mathbf{\Omega}_{xx}\mathbf{p}_v - \delta \frac{T_0}{m} |\mathbf{p}_v| \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}} + \delta \frac{T_0}{wc_0} p_m \left(\frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\eta}{w} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{x}} \right), \\ \frac{d\mathbf{p}_v}{dt} = -\mathbf{p}_x, \\ \frac{dp_m}{dt} = \delta \frac{\eta T_0}{m^2} |\mathbf{p}_v|, \end{array} \right. \quad (1.56)$$

- условия трансверсальности

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}_x(t_0) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(t_0)} \mathbf{g}_0^T \boldsymbol{\lambda}^0, \\ \mathbf{p}_x(t_i^-) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(t_i^-)} \mathbf{g}_i^T \boldsymbol{\lambda}^i, \\ \mathbf{p}_x(t_i^+) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(t_i^+)} \mathbf{g}_i^T \boldsymbol{\lambda}^i, \\ \mathbf{p}_x(t_k) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(t_k)} \mathbf{g}_k^T \boldsymbol{\lambda}^k, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}_v(t_0) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}(t_0)} \mathbf{g}_0^T \boldsymbol{\lambda}^0, \\ \mathbf{p}_v(t_i^-) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}(t_i^-)} \mathbf{g}_i^T \boldsymbol{\lambda}^i, \\ \mathbf{p}_v(t_i^+) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}(t_i^+)} \mathbf{g}_i^T \boldsymbol{\lambda}^i, \\ \mathbf{p}_v(t_k) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}(t_k)} \mathbf{g}_k^T \boldsymbol{\lambda}^k, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} p_m(t_0) = \lambda_m^0, \\ p_m(t_i^-) = -\lambda_m^i, \\ p_m(t_i^+) = -\lambda_m^i, \\ p_m(t_k) = \lambda_m^k, \end{array} \right. \quad (1.57)$$

- условия стационарности

$$\left\{ \begin{array}{l} H(t_0) = -\frac{\partial l}{\partial t_0} = -\frac{\partial}{\partial t_0} \mathbf{g}_0^T \boldsymbol{\lambda}^0 + \lambda_t^k, \quad H(t_i^-) = \frac{\partial l}{\partial t_i^-} = \frac{\partial}{\partial t_i^-} \mathbf{g}_i^T \boldsymbol{\lambda}^i - \lambda_t^i, \\ H(t_i^+) = -\frac{\partial l}{\partial t_i^+} = -\frac{\partial}{\partial t_i^+} \mathbf{g}_i^T \boldsymbol{\lambda}^i - \lambda_t^i, \quad H(t_k) = \frac{\partial l}{\partial t_k} = \frac{\partial}{\partial t_k} \mathbf{g}_k^T \boldsymbol{\lambda}^k + \lambda_t^i, \end{array} \right. \quad (1.58)$$

- условия дополняющей нежесткости

$$(m_1^* - m(t_k)) \lambda_m^k = 0, \quad (t_i^+ - t_i^- - \Delta t_i) \lambda_t^i = 0 \quad (1.59)$$

- условия неотрицательности

$$\begin{aligned} |\lambda^0| + \sum_i |\lambda^i| + |\lambda^k| + |\lambda_m^0| + \sum_i |\lambda_m^i| + \lambda_m^k + \sum_i |\lambda_t^i| + |\lambda_t^k| > 0, \\ \lambda_m^k \geq 0, \quad \lambda_t^i \geq 0, \end{aligned} \quad (1.60)$$

- условие нормировки: в связи с однородностью по сопряженным переменным функции Понтрягина, можно ввести одно условие нормировки связывающее сопряженные переменные.

Здесь, как и ранее в ОМ-задаче, удобно перейти к фиксированному интервалу времени (1.40), и заменить многоточечную задачу 14-го порядка на двухточечную порядка $14k$

$$\begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{x}^i}{d\rho} \\ \frac{d\mathbf{v}^i}{d\rho} \\ \frac{dm^i}{d\rho} \\ \frac{d\mathbf{p}_x^i}{d\rho} \\ \frac{d\mathbf{p}_v^i}{d\rho} \\ \frac{dp_m^i}{d\rho} \\ \frac{dt^i}{d\rho} \end{pmatrix} = \Delta t_i \begin{pmatrix} \mathbf{v}^i \\ \Omega_{\mathbf{x}^i} + \delta^i \frac{\eta T_0}{m^i} \frac{\mathbf{p}_v^i}{p_v^i} \\ -\delta^i \frac{\eta T_0}{wc_0} \\ -\Omega_{\mathbf{x}^i} \mathbf{p}_v^i - \delta^i \frac{T_0}{m^i} p_v^i \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}^i} + \delta^i \frac{T_0}{wc_0} p_m^i \left(\frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}^i} - \frac{\eta}{w} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{x}^i} \right) \\ -\mathbf{p}_x^i \\ \delta^i \frac{\eta T_0}{(m^i)^2} p_v^i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.61)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \mathbf{g}(\mathbf{x}^i(0), \mathbf{v}^i(0), t^i(0), \mathbf{x}^i(1), \mathbf{v}^i(1), t^i(1)) = 0, \\ & \mathbf{p}_x^i(0) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^i(0)} \mathbf{g}^T \boldsymbol{\lambda}, \quad \mathbf{p}_v^i(0) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}^i(0)} \mathbf{g}^T \boldsymbol{\lambda}, \\ & \mathbf{p}_x^i(1) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^i(1)} \mathbf{g}^T \boldsymbol{\lambda}, \quad \mathbf{p}_v^i(1) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}^i(1)} \mathbf{g}^T \boldsymbol{\lambda}, \\ & \mathbf{p}_m^0(0) = \lambda_m^0, \quad \mathbf{p}_m^i(1) = \mathbf{p}_m^{i+1}(0), \quad \mathbf{p}_m^k(1) = \lambda_m^k, \\ & H^{i+1}(0) + \frac{\partial}{\partial t^{i+1}(0)} \mathbf{g}^T \boldsymbol{\lambda} = H^i(1) - \frac{\partial}{\partial t^i(1)} \mathbf{g}^T \boldsymbol{\lambda}, \\ & t_i^+ - t_i^- - \Delta t_i = 0 \text{ или } H^{i+1}(0) + \frac{\partial}{\partial t^{i+1}(0)} \mathbf{g}^T \boldsymbol{\lambda} = 0, \text{ если } t_i^+ - t_i^- - \Delta t_i > 0, (i \neq k, i \neq 0), \\ & H^0(0) + \frac{\partial}{\partial t^0(0)} \mathbf{g}_0^T \boldsymbol{\lambda}^0 = H^k(1) - \frac{\partial}{\partial t^k(1)} \mathbf{g}_k^T \boldsymbol{\lambda}^k, \\ & t^k(1) - t^0(0) = \Delta t, \\ & \rho \in [0; 1], \quad i = 0 \dots k. \end{aligned} \right. \quad (1.62)$$

Приведённые выше соотношения (1.22) – (1.30) и (1.43) – (1.51) сводят ОМ- и ОТ-задачи к краевым, в которых необходимо определить недостающие значения переменных, удовлетворяющие краевые условия (1.8), (1.9) и соответствующие условия оптимальности (1.27) – (1.30) и (1.48) – (1.51). При этом, если начальное и конечное многообразие не имеют особых точек [45], то число неизвестных краевой задачи всегда совпадает с числом условий.

1.3 Краевая задача

1.3.1 Метод продолжения по параметру

Полученные краевые задачи можно решать любым соответствующим способом. Различные варианты методов решения краевых задач приведены, например, в [39].

В данной работе все краевые задачи принципа максимума будут решаться методом продолжения по параметру (гомотопии). Этот метод широко применяется для решения краевых задач и исследования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром, входящим в сами уравнения или в граничные условия. Он заключается в том, что, имея сначала известное решение для некоторого значения параметра, интегрированием производной решения по параметру можно найти решение для другого значения параметра.

Идея метода продолжения прослеживается в литературе ещё с работ Шварца (1869 г.), Леверье (1886 г.) и Пуанкаре (1892 г.), известно его активное применение в аналитических доказательствах существования решений. Однако, для численного решения задач этим методом стали пользоваться только во второй половине прошлого века в связи с расширением возможностей ЭВМ. Для случая решения систем нелинейных уравнений в непрерывном виде этот метод был предложен Д.Ф. Давиденко [17] и М.К. Гавуриным [7], а в дальнейшем развит во многих работах [33, 39, 40, 53, 57], в том числе и для решения краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В частности, последние 20 лет метод продолжения активно применяется в задачах механики космического полёта с малой тягой, например, [41-44, 58, 62, 61, 70].

Применение метода продолжения по параметру к краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений заключается в следующем.

Для того чтобы найти решение нелинейной краевой задачи

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \tau, t), \quad t \in [t_0; t_1], \\ \mathbf{g}(\tau, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_1)) = 0, \\ (\mathbf{x}, \tau, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}, \quad \mathbf{g} : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n, \end{array} \right. \quad (1.63)$$

с вектором неизвестных начальных значений \mathbf{p} ($\mathbf{p} \in \mathbf{R}^k$, $k \leq n$), её можно представить в виде некоторой нелинейной системы

$$\Phi(\mathbf{p}, \tau) = 0. \quad (1.64)$$

Причём, если известно решение краевой задачи (1.63) при каком-либо значении параметра τ , то функция (1.64) совпадает с краевыми условиями задачи

$$\Phi(\mathbf{p}, \tau) = \mathbf{g}(\tau, \mathbf{p}, \mathbf{x}(t_1)) = 0, \quad (1.65)$$

если это решение неизвестно, то функция (1.64) может быть представлена в виде

$$\Phi(\mathbf{p}, \tau) = \mathbf{g}(\tau, \mathbf{p}, \mathbf{x}(t_1)) - \tau \mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{b} = \mathbf{g}(\tau, \mathbf{p}_0, \mathbf{x}(t_1)), \quad \tau \in [1; 0], \quad (1.66)$$

где \mathbf{p}_0 – вектор начального приближения неизвестных значений, а \mathbf{b} – вектор начальных невязок, параметр τ и уравнения краевой задачи (1.63) нормированы и преобразованы соответствующим образом, чтобы обеспечить выполнение принадлежности параметра заданному отрезку $\tau \in [1; 0]$.

Продифференцировав соотношение (1.64), легко получить производную решения от параметра

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = - \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{p}} \right]^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}, \quad (1.67)$$

это выражение в первом случае функции $\Phi(\mathbf{p}, \tau)$ (1.65) принимает вид

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = - \left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{p}} \right]^{-1} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \tau}, \quad (1.68)$$

а в случае (1.66)

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = - \left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{p}} \right]^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \tau} - \mathbf{b} \right). \quad (1.69)$$

Таким образом, процесс построения неявной функции $\Phi(\mathbf{p}, \tau)$ на интересующем отрезке изменения параметра сводится к интегрированию системы уравнений (1.67). При этом должны быть выполнены локальные условия существования неявной функции на всём отрезке продолжения [30, 40, 51, 53]

$$\text{rank} \left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{p}}, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \tau} \right] = k, \quad (1.70)$$

и задача (1.63) должна иметь непрерывные производные по начальным условиям и параметру, что накладывает ограничения на гладкость правых частей и краевых условий [33, 50]

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \tau, t) \in C^1, \quad \mathbf{g}(\tau, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_1)) \in C^1. \quad (1.71)$$

Эти условия необходимы для локальной продолжаемости по параметру. Что касается нелокальной продолжаемости на весь участок изменения параметра, этот вопрос более сложный и никакими условиями гладкости не может быть гарантирован.

Как отмечается в ряде работ [17, 51, 53, 57] во многих случаях рационально переходить к продолжению по длине дуги или менять параметр в процессе продолжения (чередую по необходимости τ с компонентами вектора \mathbf{p}), для организации немонотонного изменения параметра τ вдоль линии продолжения. Такой метод способен проходить точки разворота (предельные точки), характеризующиеся вырождением матрицы чувствительности по начальным значениям на единицу, при сохранении полного ранга расширенной матрицы

$$\text{rank} \left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{p}} \right] = k - 1, \quad \text{rank} \left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{p}}, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \tau} \right] = k. \quad (1.72)$$

Для построения кривой продолжения совершенно неважно, какая именно переменная выступает в роли параметра продолжения: им может быть и их некоторая комбинация. Производная от (1.63) по абстрактному параметру продолжения s будет иметь вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{p}} \frac{d\mathbf{p}}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \frac{d\tau}{ds} = 0. \quad (1.73)$$

Определить s , вообще говоря, можно любым удобным способом, присоединив к системе (1.73) соответствующее условие. Часто в качестве такого параметра используется длина дуги (или как его называют в работе [53] наилучший параметр), тогда определяющее его уравнение, имеет вид

$$(ds)^2 = (d\mathbf{p})^2 + (d\tau)^2. \quad (1.74)$$

Недостатком такого определения параметра продолжения является нелинейность уравнения (1.74).

Можно указать ещё один достаточно оригинальный способ выбора параметра продолжения (в некоторых источниках именуемый методом Драгилева). Решение уравнений (1.73) по методу Крамера имеет вид

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = - \frac{\Delta}{\Delta} \frac{d\tau}{ds} \quad (1.75)$$

где Δ - определитель матрицы $\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{p}}$, Δ_i - определитель матрицы в которой i -ый столбец матрицы $\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{p}}$ заменён на $\frac{\partial \Phi}{\partial \tau}$. Теперь можно ввести параметр s приняв производную от τ по s равной определителю Δ , тогда система уравнений примет следующий вид

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{p}}{ds} = \Delta, \\ \frac{d\tau}{ds} = -\Delta. \end{cases} \quad (1.76)$$

Параметры, заданные таким образом (длина дуги, метод Драгилева), как уже отмечалось ранее, допускают немонотонное изменение τ и позволяют проходить точки разворота кривой продолжения, что оказывается полезным в некоторых случаях.

Для повышения точности процесса продолжения можно организовать по схеме предиктор-корректор, такой вариант рассматривается, например, в книге [51]. Поскольку известен вид неявной функции (1.64), это выражение должно выполняться при каждом значении параметра τ . Тогда, в качестве предиктора можно использовать выполнение одного или нескольких шагов выбранного для решения системы (1.67) метода численного интегрирования, а в качестве корректора, с целью уточнения текущего значения \mathbf{p} – численный метод для решения системы нелинейных уравнений (1.64). Эту систему можно решать, например, методом Ньютона, тогда итерации корректора имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} & \text{пока } |\Phi(\mathbf{p}_k, \tau)| \geq h, \\ & \mathbf{p}_k = \mathbf{p}_{k-1} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{p}} \Big|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_{k-1}} \right)^{-1} \Phi(\mathbf{p}_{k-1}, \tau), \end{aligned} \quad (1.77)$$

где h - точность процесса продолжения, k – номер итерации.

Вычисление матрицы чувствительности $d\Phi/d\mathbf{p}$ и вектора $d\Phi/d\tau$ может производиться разными способами, например, с использованием конечных разностей, совместного интегрирования дифференциальных уравнений для элементов этой матрицы с уравнениями оптимального движения КА (например, [42]), либо с помощью метода комплексного шага для высокоточного численного дифференцирования [64, 65, 72].

Из перечисленных способов самым простым в реализации и наименее точным является метод конечных разностей. Его использование в большинстве случаев оказывается удовлетворительным, однако, следует помнить, что при использовании прямых разностей с оптимальным шагом точность вычисленной производной имеет в два раза меньшую степень точности, чем вычисленная функция, из-за вычисления разности от близких аргументов при машинном представлении чисел с ограниченным числом разрядов. Другой

причиной невысокой эффективности метода конечных разностей является наличие «шума» в вычисленных значениях фазового и сопряженного векторов, проявляющегося при численном интегрировании траекторий с варьируемыми значениями параметров. Вероятно, этот эффект можно снизить совместным интегрированием систем с исходными и варьируемыми начальными значениями (при использовании методов с автоматическим подбором шага), вследствие вычисления значений функций в одинаковых точках интервала интегрирования [49]. Из-за накопления ошибок эффективность метода конечных разностей будет снижаться с увеличением длительности рассматриваемого перелёта.

Совместное интегрирование дифференциальных уравнений для элементов матрицы чувствительности с уравнениями оптимального движения даёт наиболее точные результаты, однако, требует наибольшей подготовительной работы, в смысле вывода выражений для правых частей дифференциальных уравнений матрицы чувствительности.

Компромиссом между точностью вычислений и трудоёмкостью подготовки является метод комплексного шага – аналог конечных разностей с приращением в мнимой области. Формула для дифференцирования функции $f(x)$ с помощью этого метода может быть получена из её разложения в ряд Тейлора, и имеет следующий вид

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{\text{Im}[f(x+ih)]}{h} + o(h^2), \quad (1.78)$$

где h – шаг дифференцирования, $i = \sqrt{-1}$.

Конечно, дифференцирование методом комплексного шага требует вычисления вектора невязок краевой задачи в комплексной области и следовательно, интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной области. Однако, эту проблему можно решить чисто формальным образом – разделив систему дифференциальных уравнений для комплексных переменных

$$\frac{d(a+ib)}{dt} = \mathbf{y}(a+ib) \quad (1.79)$$

на две части

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \text{Re}[\mathbf{y}(a+ib)], \\ \frac{db}{dt} = \text{Im}[\mathbf{y}(a+ib)], \end{cases} \quad (1.80)$$

что позволяет использовать для интегрирования этой системы любой метод без какой-либо доработки. В данной работе использовался метод Дормана – Принса 8(7) порядка.

Как видно из предыдущего раздела 1.2, в ОТ-задаче правые части дифференциальных уравнений содержат ступенчатую (релейную) функцию тяги δ , которая

приводит к их разрывам, что противоречит условиям гладкости метода продолжения (1.71). И чтобы иметь возможность воспользоваться им, необходимо использовать сглаженные правые части, вернее, сглаженное управление, так как разрывность обусловлена только включением-выключением двигателя. Можно использовать следующую сглаженную функцию тяги

$$\delta = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\Psi}{|\Psi| + \varepsilon} \right), \quad (1.81)$$

где ε - параметр сглаживания, Ψ - функция переключения.

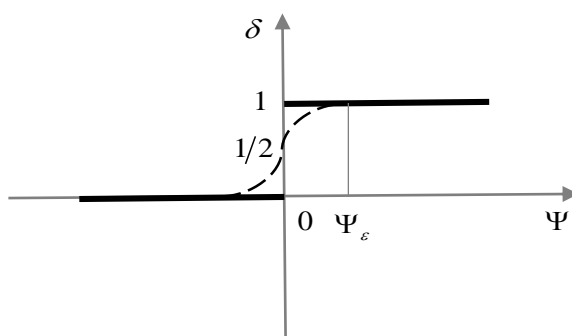


Рисунок 1.3.1 Сглаженная (прерывистая линия) и релейная (сплошная линия) функция тяги.

На рисунке 1.3.1 показаны релейная (сплошная линия) и сглаженная (прерывистая линия) функция переключения. При этом, введение параметра сглаживания, разумеется, приводит к неточностям в вычислении тяги и правых частей, теоретически эта неточность сохранится вплоть до бесконечного значения переменной $\Psi \rightarrow \infty$, но на практике существует характерная точка Ψ_ε после которой эти линии сливаются и неточность пропадает. Координата этой точки равна отношению параметра сглаживания ε к машинной точности представления числа ζ - $\Psi_\varepsilon = \varepsilon/\zeta$.

Используя этот подход, всегда можно получить функцию сколь угодно близкую к релейной, устремляя параметр сглаживания к нулю на столько, на сколько это позволит устойчивость метода продолжения.

Наиболее наглядно преимущество метода продолжения по сравнению с остальными численными методами решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений проявляется в проблеме выбора начального приближения – метод продолжения позволяет выбирать достаточно тривиальное начальное приближение и задавать путь его продолжения в искомое решение вводя параметризацию краевых условий и системы дифференциальных уравнений.

Конкретная реализация численного метода продолжения существенно зависит от рассматриваемой задачи, поэтому детали реализации метода для конкретных задач будут рассматриваться далее при описании методов их решения.

1.3.2 Ветвление решений

Одной из особенностей задач механики перелёта является возможность существования множества локальных экстремумов рассматриваемой задачи оптимального управления при заданном времени перелета, соответствующих различному количеству целых витков вокруг гравитирующего центра. Эти локальные экстремумы образуют изолированные семейства решений (семейства экстремалей). В качестве примера таких решений для межорбитальных и межпланетных задач можно привести работы [16, 31, 32, 44].

О существовании ещё какого-либо рода семейства решений, кроме отличающихся числом витков встречаются разные мнения, однако чёткого и единого понимания по этому вопросу пока нет.

Иногда рассматривают семейства решений с разным числом включений ДУ, но эта классификация относится в основном к импульсной постановки и наиболее актуальна для задач с наперёд заданным числом активных участков. В данной работе число активных участков определяется оптимальным образом из условий принципа максимума Понтрягина, поэтому такая классификация рассматриваться не будет.

Для регуляризации процесса решения задачи оптимального управления и более полного анализа семейств экстремалей необходим алгоритм, обеспечивающий при заданном начальном приближении сходимость к решению с заданной угловой дальностью перелета (числом витков).

Из полученного в главе 1.2 оптимального управления видно, что для рассматриваемых задач нулевое начальное приближение для начальных значений сопряженных переменных соответствует нулевому реактивному ускорению на всей траектории перелета и в конечный момент времени КА останется на начальной орбите. Для того, чтобы использовать пассивное движение аппарата на всём участке траектории кроме начальной и конечной точки – т.е. нулевое начальное приближение для вектора сопряженных переменных – можно воспользоваться двумя видами параметризации:

- модификацией гравитационного параметра – изменением параметра притягивающего центра таким образом, чтобы угловая дальность пассивного движения по начальной орбите совпадала с заданной величиной с точностью до 2π [41, 42, 44];
- изменением начальной и конечной скорости КА – заменой их на скорости, полученные из решения задачи Ламберта.

Первый приём достаточно хорошо апробирован и использовался в разного рода задачах [41, 42, 44]. Его легко проиллюстрировать следующими рассуждениями.

Предположим известны начальные приближения положения и скорости КА в начальный и конечный момент времени $(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0), (\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1)$ и время перелёта, тогда можно найти угол между этими двумя положениями $\angle \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1$ и зная параметры начальной орбиты перейти от него к средней аномалии, которая связана с гравитационным параметром следующим соотношением

$$\Delta M + 2\pi n = \sqrt{\frac{\mu}{a_0^3}} \Delta t, \quad (1.82)$$

где ΔM – угол средней аномалии между начальным и конечным положением ($\Delta M \in [0; 2\pi]$), n – число целых витков, a_0 – большая полуось начальной орбиты, μ – гравитационный параметр, Δt – время перелёта.

Из этой формулы видно, что задавая время перелёта и число целых витков можно всегда подобрать подходящее значение гравитационного параметра.

Для реализации гладкого продолжения по гравитационному параметру центрального тела можно предложить следующую параметризацию

$$\mu(\tau) = \mu + (\mu_0 - \mu)\tau, \quad \tau \in [1; 0], \quad (1.83)$$

где μ_0 – модифицированное значение гравитационного параметра, а τ – параметр продолжения. Или использовать в качестве параметра продолжения сам гравитационный параметр.

Для того, чтобы начальная и конечная орбиты были инвариантны относительно преобразования гравитационного параметра, достаточно положить, что скорость $\mathbf{v}(t, \tau)$ точки, движущейся по какой-либо из этих орбит, равна

$$\mathbf{v}(t, \tau) = \sqrt{\mu(\tau)} \mathbf{v}(t). \quad (1.84)$$

Как отмечается в работах [41, 42, 44], для центрального ньютоновского гравитационного поля приведенные выше соотношения выполняются точно, для других полей, мало отличающихся от центрального – приближенно. Причем если во втором случае возмущения по сравнению с ньютоновским полем не велики, то проблем не возникает.

Другой вариант априорного выбора решения, соответствующего определённому числу витков вокруг центрального тела – это использование решения задачи Ламберта. Задача Ламберта относится к классическим задачам небесной механики и заключается в

определении кеплеровской траектории движения по двум известным векторам положения и заданному интервалу времени, за которое КА перемещается между этими положениями (после определения орбиты находятся и векторы скорости в граничных положениях). Эта задача хорошо описана в литературе, например, в [4, 47] подробно приведены эффективные методы её решения.

После решения задачи Ламберта и нахождения векторов скорости в начальный и конечный момент времени можно использовать следующую параметризацию скорости:

$$\mathbf{v}(\tau) = (1 - \tau)\mathbf{v} + \tau\mathbf{v}_{Lamb}, \quad \tau \in [1; 0], \quad (1.85)$$

где \mathbf{v}_{Lamb} - скорость на кеплеровской орбите из решения задачи Ламберта.

Следует отметить, что при достаточно большом времени перелета задача Ламберта может быть решена для разного числа витков вокруг центрального тела, однако, в отличие от модификации гравитационного параметра она имеет по два решения для каждого числа витков больше нуля. Кроме того, задача Ламберта может не иметь решения при достаточно большом числе витков и достаточно малом времени перелёта, что связано с геометрическими ограничениями кеплеровского движения. Метод модификации гравитационной постоянной избавлен от этого недостатка, так как использует меньше соотношений кеплеровского движения, но по этой причине он не определяет точное значение векторов скорости и не удовлетворяет условиям по положению на правом конце траектории. Преимуществом использования задачи Ламберта является то, что с её помощью можно удовлетворить все краевые условия по положению и скорости, используя в качестве начального приближения двухимпульсный перелёт, полученный на её основе, что может способствовать численной устойчивости метода продолжения.

Оба приёма фактически сводятся к различного рода параметризации постоянной энергии h начальной орбиты КА

$$h = v^2 - \frac{2\mu}{r}. \quad (1.86)$$

2 Существование решений задач оптимизации траекторий КА с ЭРД

2.1 Проблема существования решений

В предыдущих разделах была сформулирована «основная» задача механики космического полёта с малой тягой для двух моделей работы двигательной установки (ОМ- и ОТ- задачи) и рассмотрено необходимое условие оптимальности – принцип максимума Понтрягина [2, 45]. Однако, пока всё вышеизложенное не касалось вопроса существования оптимального управления в классе допустимых функций, и класс этот никак не оговаривался.

Сам вопрос существования решений занимает важную часть теории оптимального управления, перешедший к ней по наследству из вариационного исчисления. На сегодняшний день в этом направлении получены важные результаты в виде теорем существования оптимального управления [5, 6, 8, 29, 36, 48, 59] в классе измеримых функций управления и непрерывных траекторий. Здесь необходимо отметить работу Филиппова 1959 года [48], по-видимому, послужившую некоторым толчком в развитии и широко цитируемую в литературе. Существование решений широко обсуждается в работах Вапнярского [5], Ли и Маркуса [36], Cesari [59].

Проблема существования оптимальных управлений играет важную практическую роль при решении конкретных задач, так как теория необходимых условий оптимальности может оказаться бесполезной и не приводить к желаемому результату, если не выяснен вопрос о существовании решения в заданном классе допустимых функций, поскольку все необходимые условия априори предполагают существование экстремума. В случае отсутствия решения численные алгоритмы, основанные на необходимых условиях оптимальности, очевидно не приводят, к построению оптимизирующей последовательности допустимых элементов даже тогда, когда необходимые условия позволяют получить все соотношения, необходимые для работы численного метода. Не обоснованно также делать вывод о существовании решений задачи оптимизации, исходя из физических соображений. Математическая задача оптимизации представляет собой модель реального процесса, и нельзя быть уверенным, что построенная модель в точности отражает физическую ситуацию. Если из физических соображений ясно, что решение существует, то отсюда не вытекает существование решения в соответствующей математической задаче. И даже наоборот, как отмечено в [6], существование решения в математической задаче оптимизации является первым критерием того, что построенная модель адекватно отражает физический процесс.

Надо признать, что в задачах механики космического полёта вопрос существования оптимальных решений поднимается чрезвычайно редко. Так в этом направлении можно отметить работы Злацкого [23], Oberle и Taubert [68], Caillau, Gergaud, Noailles, Haberkorn [58, 62], где на основе теоремы Филиппова [48] делается вывод о существовании оптимального решения в ОТ-задаче.

Ниже без доказательства приведены некоторые теоремы являющиеся модификацией теоремы Филиппова доказанной в 1959 году (доказательство смотри в [8, 18, 29, 36, 48, 59]).

Теорема 1. Случай ограниченного множества управлений. На фиксированном отрезке времени рассмотрим следующую задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} J = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) dt + \varphi(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_1)) \rightarrow \min, \\ \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{a}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{B}(t, \mathbf{x})\mathbf{u}, \\ \mathbf{u}(t) \in U \quad \text{для п.в. } t \in [t_0, t_1], \\ (\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_1)) \in M, \quad \mathbf{x}(t) \in S(t) \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Здесь предполагается $\mathbf{x}: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbf{R}^n$ - абсолютно непрерывной, а управление $\mathbf{u}: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbf{R}^r$ измеримая ограниченная функция. Так же, выполнены следующие условия:

- 1) функция $L(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ непрерывна на $[t_0, t_1] \times \mathbf{R}^n \times U$ и выпукла по \mathbf{u} ,
- 2) вектор-функция $\mathbf{a}(t, \mathbf{x})$ и матрица $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ (соответствующих размерностей) непрерывны на $[t_0, t_1] \times \mathbf{R}^n$, конечная вектор-функция $\varphi(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_1))$ непрерывна на \mathbf{R}^{2n} ,
- 3) множество $M \subset \mathbb{R}^{2n}$ замкнуто,
- 4) при каждом $t \in [t_0, t_1]$ множество $S(t) \subset \mathbf{R}^n$ замкнуто, и хотя бы при одном $t \in [t_0, t_1]$ оно ограничено: $|S(t_0)| \leq \text{const}$,
- 5) множество $U \subset \mathbf{R}^r$ есть выпуклый компакт,
- 6) тройка (\mathbf{f}, S, U) удовлетворяет условию Филиппова: существует такое число K , что $\forall t \in [t_0, t_1], \mathbf{x} \in S(t), \mathbf{u} \in U$ выполнена оценка

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}))| \leq K(|\mathbf{x}|^2 + 1). \quad (2.2)$$

(В случае, когда $S(t)$ равномерно ограничено, слева в (2.2) стоит ограниченная величина, поэтому условие Филиппова автоматически выполнено.)

При выполнении этих условий, если в этой задаче существует хотя бы один

допустимый процесс, тогда существует и (глобально) оптимальный процесс, т.е. функционал достигает своего минимума.

Теорема 2. Случай неограниченного множества управлений. В условиях теоремы 1, предположим множество U неограниченным, например, $U = \mathbf{R}^r$. Тогда необходимо чтобы, тем не менее, на минимизирующей последовательности норма $\|\mathbf{u}_k\|_p$ при некотором $p > 1$ была равномерно ограничена, и тогда можно считать, что множество управлений $\mathbf{u}(\cdot)$ лежит в некотором шаре пространства L_p , и следовательно, компактно в слабой топологии. Для этого на функцию $L(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ накладываются условия достаточно быстрого роста по \mathbf{u} :

$$L(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \geq a|\mathbf{u}|^p, \quad a > 0, \quad p > 1. \quad (2.3)$$

И оптимальное управление будет существовать.

Такой случай рассматривался еще в вариационном исчислении, где была установлена теорема Тонелли и ее различные варианты [8, 29, 36].

Рассмотрим существование оптимальных решений в описанных ранее задачах механики полёта с малой тягой используя эти теоремы.

Так в **ОТ-задаче** множество управлений является замкнутым шаром единичного радиуса

$$\mathbf{u} \in U = \{(\delta, \mathbf{e}) : 0 \leq \delta \leq 1, |\mathbf{e}| = 1\}, \quad (2.4)$$

правые части дифференциальных уравнений непрерывны по фазовым переменным везде кроме центра координат, поэтому естественно рассматривать следующее множество траекторий

$$\forall t \quad S(t) = \{\mathbf{x} \neq 0, m(t) \geq m_k^*\}, \quad (2.5)$$

выполнено условие Филиппова

$$|(\mathbf{x}, f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, \mathbf{u}))| \leq K|(\mathbf{x}, \mathbf{v})|^2 + \frac{T}{m_1}|\mathbf{v}| - \frac{Tm_1}{c}, \quad (2.6)$$

где константа K зависит от минимального радиуса на возможных траекториях

$K = K\left(\frac{1}{|\mathbf{x}_{\min}|^3}\right)$ и считается наперёд заданным. Выражение (2.6) можно вовсе опустить,

если ограничить область возможных траекторий или их тип (подобное допущение использовалось, например, в [58, 62], где область ограничивалась эллиптическими траекториями) с заданной величиной максимального удаления от центра, тогда множество

траекторий примет вид

$$\forall t \quad S(t) = \{|\mathbf{x}|_{\min} \leq |\mathbf{x}| \leq |\mathbf{x}|_{\max}, |\mathbf{v}| \leq |\mathbf{v}|_{\max}, m(t) \geq m_k^*\}, \quad (2.7)$$

и является равномерно ограниченным [36], а значит, условие Филиппова выполняется автоматически. Очевидно, что такого рода допущения имеет место в подавляющем большинстве задач межорбитальных и межпланетных перелётов, так как слишком близкие и слишком далёкие удаления от центра как правило заранее не интересны по тем или иным причинам.

Также понятно, что функционалы в задаче Майера на максимум конечной массы (1.12) и оптимального быстродействия (1.13) непрерывны при любых допустимых управлениях и траекториях из рассматриваемых областей (2.4), (2.5).

В **ОМ-задаче** сохраняются все проведённые для ОТ-задачи рассуждения, однако, управление в ней не принадлежит выпуклому компакт и никак не ограничено. Для выполнения условий теоремы 2, необходимо удовлетворение условия (2.3), легко видеть, что для этой задачи оно выполнено

$$L(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = |\mathbf{u}|^2, \quad \mathbf{u} \in L_2. \quad (2.8)$$

Таким образом, теоремы существования 1 и 2 доказывают наличие оптимальных решений в ОТ- и ОМ- задачах в классе измеримых управлений и непрерывных траекторий, если существует хотя бы одно подходящее управление, удовлетворяющее краевым условиям задачи.

В динамической части ОМ-задачи такое пробное управление существует всегда, так как всегда можно провести кривую соединяющую начальное и конечное положение, и по этой кривой восстановить управление с помощью уравнений (1.22), а значит, оптимальное управление в рамках динамической части ОМ-задачи существует всегда. А учитывая вид зависимости конечной массы от функционала динамической части ОМ-задачи (1.20), из которой видно, что она не может быть меньше нуля, можно сделать заключение, что оптимальное решение ОМ-задачи всегда существует при отсутствии ограничений на конечную массу.

В ОТ-задачи с функционалом в виде максимума конечной массы и ограниченном времени перелёта наличие пробного управления, как правило, без дополнительных исследований гарантировать невозможно.

Для подтверждения существования допустимых управлений, помимо аналитических рассуждений, в общем можно указать только два пути: построение области достижимости и определение области существования решения на множестве параметров системы. Оба эти

подхода применимы к задачам механики полета с малой тягой. Однако построить область достижимости – значит определить все возможные положения, в которые можно попасть из начальной точки за заданное время, управляя системой допустимым образом. Очевидно, что определение такой области фазового пространства для задач механики полёта с малой тягой является очень трудоёмким и сложным процессом, в основном из-за «проклятия размерности» и существенной нелинейности уравнений (1.1). Построение областей достижимости рассматривается в различных задачах и довольно хорошо представлено в литературе, например, этому посвящена работа [52], где рассматриваются различные задачи управления, в том числе и нелинейные, и предлагаются методы определения множеств достижимости. В работе [38] некоторые идеи [52] применены к задачам управления КА с двигателем малой тяги, в ней на основе линеаризации вокруг начальной орбиты строится множество достижимости при относительно небольших изменениях параметров орбиты, однако, переход к более значительным их изменениям неизбежно будет сопряжен с увеличением неточностей, вызванных линеаризацией, для парирования которых потребуется существенный рост объема вычислений. Из-за этих недостатков представляется, что задачи построения множеств достижимости в механике полёта с малой тягой на практике могут носить только весьма ограниченный характер и в рамках данной работы рассматриваться не будут.

Для оценки проектных параметров КА с двигателем малой тяги в ОТ-задаче и существования допустимого управления для заданного перелёта часто используются решения задачи с идеально регулируемым двигателем [41], оптимального быстрогодействия [43, 62, 68] и импульсные траектории [10, 11]. При этом в работах [41, 43, 10, 11] эти решения используются, в первую очередь, в качестве начального приближения, и вопрос существования допустимого управления решается в них только косвенно. При этом решения с импульсной тягой не являются для ОТ-задачи допустимыми управлениями, а решения ОМ-задачи будут таковыми, только если изменение реактивного ускорения на траектории ОМ-задачи не превышает допустимых значений ОТ-задачи, то есть, если траекторию ОМ-задачи можно реализовать с моделью двигателя ограниченной тяги, что выполняется далеко не всегда. В этих условиях нельзя гарантировать успешность перехода от задачи перелета с идеально-регулируемой или импульсной тягой к задаче с ограниченной тягой, а при неудаче нельзя достоверно установить, произошло это вследствие отсутствия решения или из-за отказа численного метода. Такой проблемы не возникает при использовании задачи оптимального быстрогодействия, в работах [62, 68] она рассматривается в качестве гарантии существования допустимого управления – если есть решение оптимального быстрогодействия, то есть и пробное управление с любым временем

перелёта, большим минимального.

Что касается самой ОТ-задачи оптимального быстрогодействия, то без ограничения на конечную массу можно предполагать существование её решения всегда, имея ввиду сколь угодно большой рост ускорения в конце траектории, эта идея развивается в работе [58], где рассматривается решение этой задачи.

Однако, использование в качестве проверки осуществимости перелёта задачи оптимального быстрогодействия имеет один существенный недостаток – в процессе её решения неизбежно будет происходить изменение угловой дальности перелёта. А как отмечалось ранее, существует деление семейств экстремалей, отличающихся числом целых витков вокруг притягивающего центра. И изменение угловой дальности в процессе решения может приводить к неконтролируемому переходу от одного семейства экстремалей к другому, что осложняет анализ задачи. Чтобы гарантировать в процессе решения нахождение в рамках выбранного семейства экстремалей, необходимо зафиксировать угловую дальность или, по крайней мере, минимизировать и отслеживать её изменения.

Более конструктивным и оправданным представляется метод, основанный на том, что решение ОТ-задачи может существовать не всегда, а точнее, не для всех значений тяги и скорости истечения. Область существования решения ограничена минимальными значениями тяги и скорости истечения, так как, во-первых, для осуществления заданного перелета требуется некоторое конечное приращение характеристической скорости, для реализации которого за определённое время Δt требуется достаточная величина реактивного ускорения, а следовательно – тяги. Во-вторых, из условий (1.9) следует, что допустимый расход рабочего тела ограничен сверху, следовательно, скорость истечения также имеет предельное минимальное значение. Более того, для каждого значения скорости истечения $c \in [c_{\min}; \infty)$ существует минимальное значение тяги T_{\min} и реактивной мощности $N_{j\min}$, при котором существует решение:

$$T_{\min}(c), N_{j\min}(T_{\min}(c), c), c \in [c_{\min}, \infty). \quad (2.9)$$

Минимальное значение скорости истечения c_{\min} определяется выходом на предельное значение конечной массы КА при бесконечной величине тяги (импульсное решение)

$$c_{\min} = -\frac{\Delta v_{umn}}{\ln(m_k/m_0)}, \quad (2.10)$$

где Δv_{umn} - затраты характеристической скорости для импульсного решения.

Тогда можно привести следующие рассуждения относительно существования

решений ОТ-задачи. Предположим, есть решение ОМ-задачи и известно значение максимальной тяги на этом решении T_{\max}^{OM} , тогда всегда есть допустимое управление в задаче с минимальной тягой без массового расхода

$$T \in [0; T_{\max}^{OM}], \quad c = \infty, \quad m(t_k) = m_0. \quad (2.11)$$

Решив задачу на минимум тяги без массового расхода можно продолжить это решение по скорости истечения, получив семейство решений, являющееся нижней границей области существования ОТ-задачи

$$T_{\min}(c), \quad c \in [c_{\min}, \infty]. \quad (2.12)$$

После этого можно сделать заключение, что для каждого значения тяги больше минимального при заданной скорости истечения в ОТ-задаче максимизации конечной массы решение с минимальной тягой является допустимым (но не оптимальным) управлением и из теоремы 1 следует существование оптимального управления этой задачи с тягой больше минимальной

$$T^* \geq T_{\min}(c), \quad T \in [0; T^*]. \quad (2.13)$$

Отсутствие решений с тягой меньше минимальной следует из постановки ОТ-задачи с минимальной тягой.

Также необходимо отметить, что задача минимизации тяги, как и задача оптимального быстродействия даёт оценку для нижнего значения конечной массы, то есть при увеличении мощности ДУ, её тяги или скорости истечения будет увеличиваться и конечная масса КА, равно как и при увеличении времени перелёта, за счёт появления пассивных участков и их оптимального распределения по траектории. Кроме того, как хорошо известно, максимальное значение конечной массы для перелёта КА с конечной тягой, при заданной величине мощности даёт ОМ-задача за счет своей неограниченной «гибкости» в управлении режимами работы ДУ. Таким образом, для заданного времени перелёта можно получить исчерпывающую информацию о всей совокупности его возможных решений, включающую в себя минимальную и максимальную конечную массу КА, величину минимальной тяги ДУ как функции от скорости истечения и наиболее эффективный режим работы ДУ при постоянной мощности с помощью решения этих двух задач – ОМ-задачи и задачи минимизации тяги.

2.2 Задача минимизации тяги

Можно сформулировать задачу минимизации тяги следующим образом, аналогично работам [24, 27, 28, 69].

Задача на минимум тяги.

В рамках модели ограниченной тяги (ОТ-задачи) найти управление, переводящее КА из начального положения (1.8) в конечное (1.9), за заданное время с минимально возможной величиной начальной реактивной тяги:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_0 \rightarrow \min, \\ \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \Omega_{\mathbf{x}} + \delta \frac{\eta(\mathbf{x}, t) T_0}{m} \mathbf{e}, \quad \frac{dm}{dt} = -\delta \frac{\eta(\mathbf{x}, t) T_0}{w(\mathbf{x}, t) c_0}, \\ \mathbf{g}_0(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{v}(t_0)) = 0, \quad m(t_0) = m_0, \quad \mathbf{g}_k(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{v}(t_k)) = 0, \quad m(t_k) \geq m_k^*, \\ t_k = t_0 + \Delta t, \quad \Delta t = \text{const}, \\ \eta(\mathbf{x}, t) > 0, \quad w(\mathbf{x}, t) > 0, \\ (\mathbf{e}, \delta) \in U = \{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}, |\mathbf{e}| = 1, \delta \in [0; 1]\}. \end{array} \right. \quad (2.14)$$

В соответствии с идеями принципа максимума [2, 45] введём дополнительное дифференциальное уравнение

$$\frac{dT_0}{dt} = 0, \quad (2.15)$$

запишем функцию Понтрягина

$$H = \mathbf{p}_x^T \mathbf{v} + \mathbf{p}_v^T \Omega_{\mathbf{x}} + \delta \eta(\mathbf{x}, t) T_0 \left(\frac{\mathbf{p}_v^T \mathbf{e}}{m} - \frac{p_m}{w(\mathbf{x}, t) c_0} \right), \quad (2.16)$$

и терминант (краевую функцию Лагранжа)

$$l = T_0 \lambda_T + \mathbf{g}_0(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{v}(t_0))^T \boldsymbol{\lambda}^0 + (m(t_0) - m_0) \lambda_m^0 + \\ + \mathbf{g}_k(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{v}(t_k))^T \boldsymbol{\lambda}^k + (m_k^* - m(t_k)) \lambda_m^k, \quad (2.17)$$

где, как всегда, $\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_v, p_m$ – непрерывные кусочно-гладкие функции (сопряженные переменные), числа $\lambda_T, \lambda_m^0, \lambda_m^k$ и векторы $\boldsymbol{\lambda}^0, \boldsymbol{\lambda}^k$ – множители Лагранжа.

Условия принципа максимума принимают следующий вид:

- условия оптимальности по управлению $\{\mathbf{e}, \delta\}_{opt} = \max_{\mathbf{e}, \delta} H$:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{p}_v}{p_v}, \quad p_v = |\mathbf{p}_v|, \quad \Psi = \frac{p_v}{m} - \frac{p_m}{wc}, \quad \delta = \begin{cases} 1, \Psi > 0 \\ \delta \in [0; 1], \Psi = 0, \\ 0, \Psi < 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

- уравнения Эйлера-Лагранжа (сопряженная система):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{p}_x}{dt} = -\mathbf{\Omega}_{xx}\mathbf{p}_v - \delta \frac{T_0}{m} |\mathbf{p}_v| \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}} + \delta \frac{T_0}{wc_0} p_m \left(\frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\eta}{w} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{x}} \right), \\ \frac{d\mathbf{p}_v}{dt} = -\mathbf{p}_x, \\ \frac{dp_m}{dt} = \delta \frac{\eta T_0}{m^2} |\mathbf{p}_v|, \\ \frac{dp_T}{dt} = -\delta \eta \Psi, \end{array} \right. \quad (2.19)$$

- условия трансверсальности

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}_x(t_0) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(t_0)} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{v}(t_0))^T \boldsymbol{\lambda}^0, \\ \mathbf{p}_v(t_0) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}(t_0)} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{v}(t_0))^T \boldsymbol{\lambda}^0, \\ p_m(t_0) = \lambda_m^0, \quad p_T(t_0) = \lambda_T, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}_x(t_k) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(t_k)} \mathbf{g}_k(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{v}(t_k))^T \boldsymbol{\lambda}^k, \\ \mathbf{p}_v(t_k) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}(t_k)} \mathbf{g}_k(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{v}(t_k))^T \boldsymbol{\lambda}^k, \\ p_m(t_k) = \lambda_m^k, \quad p_T(t_k) = 0, \end{array} \right. \quad (2.20)$$

- условия стационарности

$$H(t_0) = -\frac{\partial l}{\partial t_0} = -\frac{\partial g_0}{\partial t_0} + \lambda_t, \quad H(t_k) = \frac{\partial l}{\partial t_k} = \frac{\partial g_k}{\partial t_k} + \lambda_t \quad (2.21)$$

- условие дополняющей нежесткости

$$(m_k^* - m(t_k)) \lambda_m^k = 0, \quad (2.22)$$

- условия неотрицательности

$$|\lambda_m^0| + |\boldsymbol{\lambda}^0| + \lambda_T + |\boldsymbol{\lambda}^k| + \lambda_m^k > 0, \quad \lambda_T \geq 0, \quad \lambda_m^k \geq 0, \quad (2.23)$$

- условие нормировки: в связи с однородностью по сопряженным переменным функции Понтрягина, можно ввести одно условие нормировки связывающее сопряженные переменные.

Из условий трансверсальности (2.20) и дополняющей нежесткости (2.22) видно, что задача распадается на два случая:

- 1) конечная масса больше минимально допустимой

$$m(t_k) > m_k^*, \quad \lambda_m^k = 0, \quad (2.24)$$

в этом случае, из-за неотрицательности правой части дифференциального уравнения для сопряженной переменной к массе (2.19) и её равенства нулю в конечной точке следует, что на всей траектории она не положительна, а функция переключения всегда неотрицательна,

значит двигатель на траектории всегда включен

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad p_m(t) \leq 0, \quad \Psi > 0 \Rightarrow \delta \equiv 1, \quad (2.25)$$

2) конечная масса равна минимально допустимой

$$m(t_k) = m_k^*, \quad \lambda_m^k \geq 0, \quad (2.26)$$

при этом оптимальное управление определяется по общему правилу (2.18) и траектория может содержать участки нулевой тяги.

У этих двух вариантов есть одна общая точка $m(t_k) = m_k^*$, $\lambda_m^1 = 0$, так же являющаяся для них предельным случаем.

Можно проинтегрировать уравнение для сопряженной переменной к тяге, и записать условие для минимума тяги:

$$\int_{t_0}^{t_f} \delta \eta \Psi dt = \lambda_T, \quad \lambda_T = \text{const} \geq 0. \quad (2.27)$$

Рассмотренная задача на минимум тяги связана с описанными в главе 1 задачами оптимального быстрогодействия и максимизации конечной массы, если рассмотреть следующие очевидные ограничения на величину конечной массы, длительность перелёта и тривиальную неотрицательность начальной тяги

$$m_k^* \leq m(t_k), \quad t_k - t_0 \leq \Delta t^*, \quad 0 \leq T_0 < \infty, \quad (2.28)$$

где m_k^* - минимальное потребное значение конечной массы, Δt^* - максимальное значение времени перелёта.

$$l = T_0 \lambda_T + (m_k^* - m(t_k)) \lambda_m^1 + (t_k - t_0 - \Delta t^*) \lambda_t + \\ + \mathbf{g}_0(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{v}(t_0))^T \lambda^0 + (m(t_0) - m_0) \lambda_m^0 + \mathbf{g}_k(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{v}(t_k))^T \lambda^k. \quad (2.29)$$

Тогда вне зависимости от вида, выбранного из числа ограничений (2.28) функционала, терминант (2.29) и соответственно условия трансверсальности будут одинаковы для любой из перечисленных задач:

- минимум тяги при ограниченных значениях времени перелёта и конечной массы,
- максимум конечной массы с ограниченным временем перелёта и оптимальной тягой,
- оптимальное быстродействие с ограниченной конечной массой и оптимальной тягой.

Очевидно, что сопряжённая система уравнений и оптимальное управление так же будут одинаковы, а значит, краевая задача принципа максимума для них полностью совпадает и эти задачи приводят к одним и тем же решениям. В работах [13, 15] такие задачи называются «взаимными». И рассматриваемую в них идею компромиссного

функционала, связывающего быстродействие и максимум конечной массы, можно воспринимать как одну из первых попыток введения параметра и дискретного продолжения по нему от задачи быстродействия к задаче на максимум конечной массы. Однако, в полной мере метод продолжения для задач механики полёта был применён в тот же период времени в других работах (в частности в [70]) и немного в другом виде.

В работах автора [24, 27, 28] и статье [69] свойство совпадения решения задачи минимизации тяги с траекторией оптимального быстродействия для величины тяги, обеспечивающей перелет за заданное время, называется «двойственностью», что, по-видимому, не совсем верно, так как этот термин уже имеет определённое значение в выпуклом анализе [29].

Можно показать, что условия оптимальности задач для минимума времени перелёта и минимума тяги связаны через условия нормировки, то есть приводят к одинаковым решениям, у которых по-разному нормированы значения сопряжённых переменных. Тогда справедливо следующее

$$\mathbf{p}^T(t_0) = G\mathbf{p}^{t_k}(t_0), \quad (2.30)$$

где $\mathbf{p}^T(t_0)$ и $\mathbf{p}^{t_k}(t_0)$ - векторы начальных значений сопряжённых параметров для задачи на минимум тяги и оптимального быстродействия, G – некоторая неотрицательная константа.

Справедливость (2.30) можно легко проверить простым сравнением соответствующих решений.

В вычислительном плане, решение краевой задачи для минимальной тяги выгодно отличается от случая оптимального быстродействия тем, что в процессе её решения краевые условия во многих постановках (с фиксированной датой старта и временем перелёта) остаются постоянными.

Кроме того, задача на минимум тяги позволяет более устойчиво исследовать семейства экстремалей с заданным числом витков, так как даже в случае подвижности краевых условий, например, при поиске оптимальной даты старта, изменение угловой дальности носит более предсказуемый характер, по сравнению с задачей оптимального быстродействия.

Очевидно, что все рассуждения раздела 2.1 сохраняются и в случае задач с промежуточными ограничениями рассматриваемых в рамках настоящей диссертации и задача на минимум тяги может быть в этом случае сформулирована следующим образом.

$$\left\{ \begin{array}{l}
T_0 \rightarrow \min, \\
\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \Omega_{\mathbf{x}} + \delta \frac{\eta(\mathbf{x}, t) T_0}{m} \mathbf{e}, \quad \frac{dm}{dt} = -\delta \frac{\eta(\mathbf{x}, t) T_0}{w(\mathbf{x}, t) c_0}, \\
\mathbf{g}_0(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{v}(t_0)) = 0, \quad m(t_0) = m_0, \\
\mathbf{g}_i(\mathbf{x}(t_i^-), \mathbf{v}(t_i^-), \mathbf{x}(t_i^+), \mathbf{v}(t_i^+)) = 0, \quad m(t_i^-) - m(t_i^+) + \Delta m_i = 0, \quad i = 1 \dots k-1 \\
\mathbf{g}_k(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{v}(t_k)) = 0, \quad m(t_k) \geq m_k^*, \\
t_k - t_0 - \Delta t = 0, \quad t_i^+ - t_i^- - \Delta t_i \geq 0, \quad \Delta t = \text{const}, \quad \Delta t_i = \text{const}, \\
\eta(\mathbf{x}, t) > 0, \quad w(\mathbf{x}, t) > 0, \\
(\mathbf{e}, \delta) \in U = \{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}, |\mathbf{e}| = 1, \delta \in [0; 1]\}.
\end{array} \right. \quad (2.31)$$

Введём дополнительное дифференциальное уравнение

$$\frac{dT_0}{dt} = 0, \quad (2.32)$$

функция Понтрягина имеет аналогичный вид

$$H = \mathbf{p}_x^T \mathbf{v} + \mathbf{p}_v^T \Omega_{\mathbf{x}} + \delta \eta(\mathbf{x}, t) T_0 \left(\frac{\mathbf{p}_v^T \mathbf{e}}{m} - \frac{p_m}{w(\mathbf{x}, t) c_0} \right), \quad (2.33)$$

терминант отличается только дополнительными слагаемыми

$$\begin{aligned}
l = & T_0 \lambda_T + \mathbf{g}_0(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{v}(t_0))^T \boldsymbol{\lambda}^0 + (m(t_0) - m_0) \lambda_m^0 + (T_0(t_i^-) - T_0(t_i^+)) \lambda_T^i + \\
& + \sum_i \mathbf{g}_i(\mathbf{x}(t_i^-), \mathbf{v}(t_i^-), \mathbf{x}(t_i^+), \mathbf{v}(t_i^+))^T \boldsymbol{\lambda}^i + \sum_i (m(t_i^-) - m(t_i^+) + \Delta m_i) \lambda_m^i + \\
& \sum_i (t_i^+ - t_i^- - \Delta t_i) \lambda_t^i + \mathbf{g}_k(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{v}(t_k))^T \boldsymbol{\lambda}^k + (m_k^* - m(t_k)) \lambda_m^k + (t_k - t_0 - \Delta t) \lambda_t.
\end{aligned} \quad (2.34)$$

где, как всегда, $\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_v, p_m$ – непрерывные кусочно-гладкие функции (сопряженные переменные), числа $\lambda_m^0, \lambda_m^k, \lambda_m^i, \lambda_t^i, \lambda_t, \lambda_T^i, \lambda_T$ и векторы $\boldsymbol{\lambda}^0, \boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{\lambda}^i$ – множители Лагранжа.

Условия принципа максимума принимают следующий вид:

- условия оптимальности по управлению $\{\mathbf{e}, \delta\}_{opt} = \max_{\mathbf{e}, \delta} H$:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{p}_v}{p_v}, \quad p_v = |\mathbf{p}_v|, \quad \Psi = \frac{p_v}{m} - \frac{p_m}{wc}, \quad \delta = \begin{cases} 1, \Psi > 0 \\ \delta \in [0; 1], \Psi = 0. \\ 0, \Psi < 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

- уравнения Эйлера-Лагранжа (сопряженная система):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{p}_x}{dt} = -\mathbf{\Omega}_{xx}\mathbf{p}_v - \delta \frac{T_0}{m} |\mathbf{p}_v| \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}} + \delta \frac{T_0}{wc_0} p_m \left(\frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\eta}{w} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{x}} \right), \\ \frac{d\mathbf{p}_v}{dt} = -\mathbf{p}_x, \\ \frac{dp_m}{dt} = \delta \frac{\eta T_0}{m^2} |\mathbf{p}_v|, \\ \frac{dp_T}{dt} = -\delta \eta \Psi, \end{array} \right. \quad (2.36)$$

- условия трансверсальности

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}_x(t_0) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(t_0)} \mathbf{g}_0^T \boldsymbol{\lambda}^0, \\ \mathbf{p}_x(t_i^-) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(t_i^-)} \mathbf{g}_i^T \boldsymbol{\lambda}^i, \\ \mathbf{p}_x(t_i^+) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(t_i^+)} \mathbf{g}_i^T \boldsymbol{\lambda}^i, \\ \mathbf{p}_x(t_k) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(t_k)} \mathbf{g}_k^T \boldsymbol{\lambda}^k, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}_v(t_0) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}(t_0)} \mathbf{g}_0^T \boldsymbol{\lambda}^0, \\ \mathbf{p}_v(t_i^-) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}(t_i^-)} \mathbf{g}_i^T \boldsymbol{\lambda}^i, \\ \mathbf{p}_v(t_i^+) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}(t_i^+)} \mathbf{g}_i^T \boldsymbol{\lambda}^i, \\ \mathbf{p}_v(t_k) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}(t_k)} \mathbf{g}_k^T \boldsymbol{\lambda}^k, \end{array} \right. \quad (2.37)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_m(t_0) = \lambda_m^0, \\ p_m(t_i^-) = -\lambda_m^i, \\ p_m(t_i^+) = -\lambda_m^i, \\ p_m(t_k) = \lambda_m^k, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} p_T(t_0) = \lambda_T, \\ p_T(t_i^-) = -\lambda_T^i, \\ p_T(t_i^+) = -\lambda_T^i, \\ p_T(t_k) = 0, \end{array} \right.$$

- условия стационарности

$$\left\{ \begin{array}{l} H(t_0) = -\frac{\partial l}{\partial t_0} = -\frac{\partial}{\partial t_0} \mathbf{g}_0^T \boldsymbol{\lambda}^0 + \lambda_t^k, \quad H(t_i^-) = \frac{\partial l}{\partial t_i^-} = \frac{\partial}{\partial t_i^-} \mathbf{g}_i^T \boldsymbol{\lambda}^i - \lambda_t^i, \\ H(t_i^+) = -\frac{\partial l}{\partial t_i^+} = -\frac{\partial}{\partial t_i^+} \mathbf{g}_i^T \boldsymbol{\lambda}^i - \lambda_t^i, \quad H(t_k) = \frac{\partial l}{\partial t_k} = \frac{\partial}{\partial t_k} \mathbf{g}_k^T \boldsymbol{\lambda}^k + \lambda_t, \end{array} \right. \quad (2.38)$$

- условия дополняющей нежесткости

$$(m_1^* - m(t_k)) \lambda_m^k = 0, \quad (t_i^+ - t_i^- - \Delta t_i) \lambda_t^i = 0 \quad (2.39)$$

- условия неотрицательности

$$|\boldsymbol{\lambda}^0| + \sum_i |\boldsymbol{\lambda}^i| + |\boldsymbol{\lambda}^k| + |\lambda_m^0| + \sum_i |\lambda_m^i| + \lambda_m^k + \sum_i |\lambda_t^i| + |\lambda_t| + \sum_i \lambda_T^i + \lambda_T > 0, \quad (2.40)$$

$$\lambda_m^k \geq 0, \quad \lambda_t^i \geq 0, \quad \lambda_T \geq 0,$$

- условие нормировки: в связи с однородностью по сопряженным переменным функции Понтрягина, можно ввести одно условие нормировки связывающее сопряженные переменные.

Как это делалось ранее удобно перейти к фиксированному интервалу времени (1.40),
и заменить многоточечную задачу 15 порядка на двухточечную порядка $16k$

$$\begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{x}^i}{d\rho} \\ \frac{d\mathbf{v}^i}{d\rho} \\ \frac{dm^i}{d\rho} \\ \frac{d\mathbf{p}_x^i}{d\rho} \\ \frac{d\mathbf{p}_v^i}{d\rho} \\ \frac{dp_m^i}{d\rho} \\ \frac{dp_T^i}{d\rho} \\ \frac{dt^i}{d\rho} \end{pmatrix} = \Delta t_i \begin{pmatrix} \mathbf{v}^i \\ \Omega_{\mathbf{x}^i} + \delta^i \frac{\eta T_0}{m^i} \frac{\mathbf{p}_v^i}{p_v^i} \\ -\delta^i \frac{\eta T_0}{wc_0} \\ -\Omega_{\mathbf{x}^i} \mathbf{p}_v^i - \delta^i \left(\Psi^i T_0 \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}^i} + \frac{\eta T_0 p_m^i}{w^2 c_0} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{x}^i} \right) \\ -\mathbf{p}_x^i \\ \delta^i \frac{\eta T_0}{(m^i)^2} p_v^i \\ \delta^i \eta \Psi^i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

$$\Psi^i = \frac{p_v^i}{m^i} - \frac{p_m^i}{wc}, \quad \delta^i = \begin{cases} 1, \Psi^i > 0 \\ \forall [0;1], \Psi^i = 0, \\ 0, \Psi^i < 0 \end{cases} \quad (2.42)$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\mathbf{g}(\mathbf{x}^i(0), \mathbf{v}^i(0), t^i(0), \mathbf{x}^i(1), \mathbf{v}^i(1), t^i(1)) = 0, \\ &\mathbf{p}_x^i(0) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^i(0)} \mathbf{g}^T \boldsymbol{\lambda}, \quad \mathbf{p}_v^i(0) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}^i(0)} \mathbf{g}^T \boldsymbol{\lambda}, \\ &\mathbf{p}_x^i(1) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^i(1)} \mathbf{g}^T \boldsymbol{\lambda}, \quad \mathbf{p}_v^i(1) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}^i(1)} \mathbf{g}^T \boldsymbol{\lambda}, \\ &\mathbf{p}_m^0(0) = \lambda_m^0, \quad \mathbf{p}_m^i(1) = \mathbf{p}_m^{i+1}(0), \quad \mathbf{p}_m^k(1) = \lambda_m^k, \\ &\mathbf{p}_T^i(0) = 0, \quad \sum_i \mathbf{p}_T^i(1) = \lambda_T, \\ &H^{i+1}(0) + \frac{\partial}{\partial t^{i+1}(0)} \mathbf{g}^T \boldsymbol{\lambda} = H^i(1) - \frac{\partial}{\partial t^i(1)} \mathbf{g}^T \boldsymbol{\lambda}, \\ &t_i^+ - t_i^- - \Delta t_i = 0 \quad \text{или} \quad H^{i+1}(0) + \frac{\partial}{\partial t^{i+1}(0)} \mathbf{g}^T \boldsymbol{\lambda} = 0, \quad \text{если } t_i^+ - t_i^- - \widetilde{\Delta t_i} > 0, \\ &H^0(0) + \frac{\partial}{\partial t^0(0)} \mathbf{g}_0^T \boldsymbol{\lambda}^0 = H^k(1) - \frac{\partial}{\partial t^k(1)} \mathbf{g}_k^T \boldsymbol{\lambda}^k, \\ &t^k(1) - t^0(0) = \Delta t, \\ &\rho \in [0;1], \quad i = 0 \dots k. \end{aligned} \right. \quad (2.43)$$

Таким образом, в данной главе сформулирована задача минимизации тяги в постановке прямого перелёта и перелёта с промежуточными ограничениями.

2.3 Вычисление границы области существования

Построение решений задачи на минимум тяги на интервале $c \in [c_{min}; \infty)$ удобно начинать со случая бесконечной скорости истечения (нулевого массового расхода). Этому случаю соответствует перелет с постоянной массой КА m_0 и, следовательно, соответствующее уравнение может быть исключено, а задача минимизации начальной тяги переписана относительно начального реактивного ускорения в следующем виде

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 \rightarrow \min, \\ \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \Omega_{\mathbf{x}} + \delta\eta(\mathbf{x}, t)a_0\mathbf{e}, \quad m(t) = m_0, \\ \mathbf{g}_0(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{v}(t_0)) = 0, \quad \mathbf{g}_k(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{v}(t_k)) = 0, \\ t_k = t_0 + \Delta t, \quad \Delta t = \text{const}, \\ \eta(\mathbf{x}, t) > 0, \\ (\mathbf{e}, \delta) \in U = \{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}, |\mathbf{e}| = 1, \delta \in [0; 1]\}. \end{array} \right. \quad (2.44)$$

С функцией Понтрягина

$$H = \mathbf{p}_x^T \mathbf{v} + \mathbf{p}_v^T \Omega_{\mathbf{x}} + \delta\eta(\mathbf{x}, t)a_0\mathbf{p}_v^T \mathbf{e}, \quad (2.45)$$

и терминантом (краевой функцией Лагранжа)

$$l = a_0\lambda_a^0 + \mathbf{g}_0(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{v}(t_0))^T \boldsymbol{\lambda}^0 + \mathbf{g}_k(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{v}(t_k))^T \boldsymbol{\lambda}^k. \quad (2.46)$$

где, $\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_v$ – непрерывные кусочно-гладкие функции (сопряженные переменные), λ_a^0 и векторы $\boldsymbol{\lambda}^0, \boldsymbol{\lambda}^k$ – множители Лагранжа.

Понятно, что условия принципа максимума этой задачи являются частным случаем полученных ранее:

- условия оптимальности по управлению $\{\mathbf{e}, \delta\}_{opt} = \max_{\mathbf{e}, \delta} H$:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{p}_v}{p_v}, \quad p_v = |\mathbf{p}_v|, \quad \Psi = p_v, \quad \delta = \begin{cases} 1, \Psi > 0 \\ \delta \in [0; 1], \Psi = 0, \\ 0, \Psi < 0 \end{cases} \quad (2.47)$$

- уравнения Эйлера-Лагранжа (сопряженная система):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{p}_x}{dt} = -\Omega_{\mathbf{xx}}\mathbf{p}_v - \delta a_0 |\mathbf{p}_v| \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}}, \\ \frac{d\mathbf{p}_v}{dt} = -\mathbf{p}_x, \\ \frac{dp_a}{dt} = -\delta\eta\Psi, \end{array} \right. \quad (2.48)$$

- условия трансверсальности

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}_x(t_0) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(t_0)} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{v}(t_0))^T \boldsymbol{\lambda}^0, \\ \mathbf{p}_v(t_0) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}(t_0)} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{v}(t_0))^T \boldsymbol{\lambda}^0, \\ p_a(t_0) = \lambda_a^0, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}_x(t_k) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(t_k)} \mathbf{g}_k(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{v}(t_k))^T \boldsymbol{\lambda}^k, \\ \mathbf{p}_v(t_k) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}(t_k)} \mathbf{g}_k(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{v}(t_k))^T \boldsymbol{\lambda}^k, \\ p_a(t_k) = 0, \end{array} \right. \quad (2.49)$$

- условия неотрицательности

$$|\boldsymbol{\lambda}^0| + \lambda_a^0 + |\boldsymbol{\lambda}^k| > 0, \quad \lambda_a^0 \geq 0, \quad (2.50)$$

- условие нормировки: в связи с однородностью по сопряженным переменным функции Понтрягина, можно ввести одно условие нормировки связывающее сопряженные переменные.

Условие для минимума начального ускорения можно записать отдельно как

$$\int_{t_0}^{t_f} \eta |\mathbf{p}_v| dt = \lambda_a, \quad \lambda_a = \text{const} \geq 0. \quad (2.51)$$

Для решения краевой задачи (2.44), (2.48) – (2.50) можно использовать метод продолжения по параметру (раздел 1.3.1) с начальным приближением в виде ОМ-задачи (1.22), для этого необходимо параметризовать правые части системы следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \Omega_x + \eta(\mathbf{x}, t) \left(\tau + \frac{a_0}{p_v} (1 - \tau) \right) \mathbf{p}_v, \\ \frac{d\mathbf{p}_x}{dt} = -\Omega_{xx} \mathbf{p}_x - \left(\frac{p_v^2}{2} \tau + a_0 p_v (1 - \tau) \right) \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}}, \\ \frac{d\mathbf{p}_v}{dt} = -\mathbf{p}_x, \end{array} \right. \quad (2.52)$$

$$\tau \in [1; 0],$$

где τ – параметр продолжения. Тогда при $\tau = 1$ уравнения (2.52) совпадают с уравнениями оптимального движения КА в ОМ-задаче (1.22), (1.26), а при $\tau = 0$ – с уравнениями оптимального движения для задачи на минимум реактивного ускорения (2.44), (2.48). Краевые условия для этих задач совпадают, за исключением условия на минимум ускорения. Для его удовлетворения и обеспечения непрерывности продолжения необходимо выбрать значение константы λ_a в условии (2.51) равным соответствующему интегралу на траектории ОМ-задачи

$$\lambda_a = \int_{t_0}^{t_f} \eta p_v^{LP} dt, \quad (2.53)$$

где p_v^{LP} – модуль базис-вектора для задачи о перелете с идеально-регулируемым двигателем. Это никак не противоречит условиям оптимальности, так как этот интеграл всегда неотрицателен, а на активной траектории положителен.

Вектор начального приближения в этой задаче, удовлетворяющий краевым условиям, может иметь вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p}_x(t_0) \\ \mathbf{p}_v(t_0) \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_x^{PL}(t_0) \\ \mathbf{p}_v^{PL}(t_0) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.54)$$

Дифференциальные уравнения метода продолжения в данном случае имеют форму (1.69). Их интегрирование и даёт решение задачи на минимум ускорения.

Для продолжения по скорости истечения $c \in [c_{min}; \infty)$ и представления задачи минимизации начальной тяги как однопараметрического семейства также используется методика раздела 1.3.1 со скоростью истечения в качестве параметра продолжения

$$\Phi(\mathbf{z}, c) = 0, \quad (2.55)$$

где вектор Φ составлен из компонентов краевых условий (2.14), (2.20), (2.27), а $\mathbf{z} = (\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_v, p_m, T_0)^T$. При этом понятно, что никакая дополнительная параметризация задачи не требуется, и для получения всех её решений с конечной массой принадлежащей отрезку $m(t_1) \in [m_1^*; m_0]$, заданному условием (1.9), достаточно проинтегрировать соответствующую систему (1.67) для задачи минимизации тяги при начальных значениях вектора \mathbf{z} в точке $c^{-1} = 0$, соответствующих задачи минимизации начального ускорения:

$$\frac{d\mathbf{z}}{dc^{-1}} = - \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \right] \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial c^{-1}}, \quad c^{-1} \in [0; c_{min}^{-1}], \quad (2.56)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p}_x^T(t_0) \\ \mathbf{p}_v^T(t_0) \\ p_m(t_0) \\ T_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_x^a(t_0) \\ \mathbf{p}_v^a(t_0) \\ -\frac{a_0}{m_0} \int_{t_0}^{t_k} \eta |\mathbf{p}_v^a| dt \\ m_0 a_0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_T = \lambda_a, \quad (2.57)$$

где индексы T и a соответствуют задачам на минимум тяги и ускорения.

Как уже отмечалось ранее, на пути этого продолжения есть два характерных участка: без выхода на ограничение по конечной массе и с выходом на ограничение по конечной

массе. В первом случае все решения являются гладкими и не содержат пассивных участков (что следует из условий оптимальности, раздел 2.2), во втором - могут содержать пассивные участки и правые части внутренней задачи Коши метода продолжения (2.14), (2.19) будут претерпевать разрыв в моменты включения и выключения двигателя, это приводит к необходимости использования сглаженной формы функции тяги (1.81), в остальном продолжение на этих участках осуществляется аналогичным образом.

Кроме предельного значения скорости истечения c_{\min} , также представляет интерес её оптимальное значение в рамках заданных параметров массовой модели аппарата (1.17). В случае задачи на минимум тяги можно определить точку $c_{opt}^{T_{\min}}$ на кривой $T_{\min}(c)$ соответствующую максимуму полезной нагрузки при фиксированной начальной массе, условие для её определения соответствует (1.18) и имеет вид

$$\frac{\partial m_{\text{ПН}}}{\partial c} = -\frac{\gamma_{\text{ЭДВ}} c}{2\eta_{\text{КПД}}} \left[\frac{\partial T_{\min}}{\partial c} c + T_{\min} \right] - (1 + a_{\text{ТО}}) \frac{\partial m(t_k)}{\partial c} = 0. \quad (2.58)$$

При отсутствии ограничения на конечную массу двигатель работает всё время перелёта, и производная от конечной массы по скорости истечения может быть записана в явном виде

$$\frac{\partial m_{\text{ПН}}}{\partial c} = \frac{\partial T_{\min}}{\partial c} \left[(1 + a_{\text{ТО}}) \frac{\Delta t}{c} - \frac{\gamma_{\text{ЭДВ}} c}{2\eta_{\text{КПД}}} \right] - T_{\min} \left[\frac{\gamma_{\text{ЭДВ}}}{2\eta_{\text{КПД}}} - (1 + a_{\text{ТО}}) \frac{\Delta t}{c^2} \right] = 0. \quad (2.59)$$

Для заданных массовых характеристик КА можно осуществлять продолжение по скорости истечения до достижения его оптимальной величины, в этом случае выражения (2.58) и (2.59) служат условием выхода из интегрирования уравнений (2.56).

Так как обычно задача проектно-баллистического анализа перелёта с малой тягой формулируется на некотором множестве дат старта и интервалов перелёта, необходимо иметь удобный и эффективный подход к полному исследованию этих интервалов, таким подходом может быть метод продолжения по параметру, в роли которого и выступают дата старта и время перелёта. Для задачи на минимум тяги уравнения метода продолжения могут быть записаны в соответствии с разделом 1.3.1 следующим образом

$$\Phi(\mathbf{p}, t_0, t_k) = 0, \quad \mathbf{p} = (\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_v, \mathbf{p}_m, T_0), \quad (2.60)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt_0} = - \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right]^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial t_0}, \quad t_0 \in [t_0^*; t_0^{**}], \quad (2.61)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt_k} = - \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right]^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial t_k}, \quad t_k \in [t_k^*; t_k^{**}]. \quad (2.62)$$

Использование продолжения по дате старта и времени перелёта позволяют экономить время при переходе между смежными решениями, это очевидно окажется полезно, например, при построении поля изолиний по дате старта и времени перелёта. При этом такой подход позволяет не только сократить время вычислений, но и позволяет строить и исследовать целые семейства решений, порождённые начальным вариантом траектории.

Для задачи с промежуточными ограничениями методика вычисления границы области существования аналогична, к приведённым здесь рассуждениям необходимо добавить лишь условия в промежуточных точках.

2.4. Переход к задаче с заданным значением тяги

Задача с минимальной тягой помимо самостоятельного интереса и определения границы области существования даёт хорошее начальное приближение для ряда задач с заданным значением величины тяги.

После получения зависимости минимальной тяги от скорости истечения $T_{\min}(c)$, $c \in [c_{\min}, \infty)$, можно организовать переход к случаю с большей тягой, используя метод продолжения – продолжая по её величине вплоть до заданного значения $T \in [T_{\min}(c), T^*]$. Такой переход может быть реализован только для сглаженного управления (1.81) и каждая точка такой кривой продолжения будет решением ОТ-задачи для текущей величины тяги, с учётом погрешностей, вносимых сглаживанием.

Уравнения, описывающие процесс продолжения по величине тяги состоят из:

- внутренней задачи Коши – сглаженной дифференциальной системы ОТ-задачи (1.43), (1.81) и присоединённых к ней уравнений сопряжённой системы (1.47):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{p}_x}{dt} = -\mathbf{\Omega}_{xx}\mathbf{p}_v - \delta\Psi T_0 \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}} - \delta \frac{\eta T_0}{w^2 c_0} p_m \frac{\partial w}{\partial \mathbf{x}}, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{\Omega}_x + \delta \frac{\eta(\mathbf{x}, t) T_0}{m} \mathbf{e}, \quad \frac{d\mathbf{p}_v}{dt} = -\mathbf{p}_x, \\ \frac{dm}{dt} = -\delta \frac{\eta(\mathbf{x}, t) T_0}{w(\mathbf{x}, t) c_0}, \quad \frac{dp_m}{dt} = \delta \frac{\eta T_0}{m^2} |\mathbf{p}_v|, \end{array} \right. \quad (2.63)$$

$$\Psi = \frac{p_v}{m} - \frac{p_m}{wc}, \quad \delta = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\Psi}{|\Psi| + \varepsilon} \right), \quad (2.64)$$

- внешней задачи Коши, соответствующей случаю (1.68), где система краевых условий

$$\mathbf{g}(T_0, \tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{x}}) = 0 \quad (2.65)$$

составлена из исходных условий **ОТ-задачи** (1.43), условий трансверсальности принципа максимума (1.48) и соответствует числу неизвестных $\tilde{\mathbf{p}}$ из числа фазовых и сопряженных переменных в зависимости от формы исходных краевых условий, $\tilde{\mathbf{x}}$ - часть известных фазовых переменных, а сама система дифференциальных уравнений внешней задачи Коши получается её дифференцированием

$$\frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{dT_0} = - \left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \tilde{\mathbf{p}}} \right]^{-1} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial T_0}, \quad T_0 \in [T_{\min}(c), T^*], \quad (2.66)$$

и в начальной точке вектор неизвестных соответствует случаю минимальной тяги.

Из всех условий входящих в краевую задачу отдельно необходимо остановиться на

условии $p_m(t_k) = \lambda_m^k \geq 0$ из (1.48), так как на решении ОТ-задачи оно может быть выполнено в виде равенства только в случае работы двигателя на всей траектории перелёта, что соответствует задачи с минимальной тягой. А при продолжении по величине тяги необходимо обеспечить возможность появления пассивных участков что может быть, как следует из вида оптимального управления (1.46), только при $\lambda_m^k > 0$. Следовательно для организации непрерывного продолжения по тяге необходимо обеспечить увеличение λ_m^k вместе с ростом тяги. Поскольку в **ОТ-задаче** ещё не было выбрано условие нормировки, это можно сделать достаточно произвольным образом, например, положив его равным текущему изменению тяги $\lambda_m^k = T_0 - T_{\min}(c)$, или в отнормированном к 1 случае $\lambda_m^k = (T_0 - T_{\min}(c)) / (T^* - T_{\min}(c))$. Это обеспечит непрерывный сход с решения на минимум тяги для **ОТ-задачи**.

Другой очевидный вариант использования решения с минимальной тягой в качестве начального приближения состоит в том, что продолжать его можно и по времени перелёта, причём единственным отличием от предыдущего случая (2.63) - (2.66) будет формальная замена T_0 на Δt . Увеличивать время перелёта можно не только до какого-либо наперёд заданного значения, но и до характерного случая – оптимального времени перелёта, условие для которого можно записать (аналогично (1.48)) в виде:

$$H(t_k) = \frac{\partial l}{\partial t_k} = \frac{\partial}{\partial t_k} \mathbf{g}_k^T \boldsymbol{\lambda}^k, \quad (2.67)$$

это условие будет служить условием выхода из продолжения. После этого можно получить серию решений задач с оптимальным временем перелёта, продолжая по тяге и выполняя условие (2.67).

Кроме того, как уже отмечалось ранее, на кривой минимальной тяги есть характерная точка, соответствующая максимуму полезной нагрузке при заданных параметрах массовой модели КА (2.58). Используя в качестве начальной именно эту точку и выполняя условие оптимальности по скорости истечения при продолжении по величине тяги, можно получить всё семейство соответствующих решений.

Таким образом, решение задачи на минимум тяги оказывается подходящим начальным приближением для достаточно большого ряда задач и может служить основой для построения методов их решения.

3. Результаты расчетов и анализ полученных решений

В этой главе будут рассмотрены прямые перелёты к планетам и перелёты по сложным маршрутам. Для задач прямых перелётов получены области существования и построены системы изолиний, характеризующие величину минимальной тяги в зависимости от даты старта и времени перелёта. Продемонстрирована возможность перехода с кривой минимальной тяги к большим значениям тяги. В качестве примеров оптимизации перелётов по сложным маршрутам рассмотрены замкнутые перелёты к Марсу и экспедиции к астероидам, для которых также оцениваются значения минимальной тяги и реактивной мощности ДУ.

Некоторые решения и зависимости получены для конкретной величины удельного импульса – 3100 с, что соответствует ДУ межпланетных КА Deep Space 1 и Dawn, созданных на основе ионного двигателя NSTAR (NASA).

В качестве инерциальной декартовой системы координат в расчётах использовалась гелиоцентрическая эклиптическая система J2000. Движение КА рассматривалось в ньютоновском гравитационном поле, силовая функция имела вид: $\Omega = \mu/r$, где μ – гравитационный параметр центрального тела, $r = |\mathbf{x}|$ – удаление КА от центрального тела.

Для уменьшения вычислительной ошибки при численном интегрировании уравнений движения КА, использовались уравнения в безразмерных переменных. В качестве единицы расстояния была взята 1 астрономическая единица (АЕ) равная 149 597 870.691 км. Гравитационный параметр Солнца считался равным $1.32712440018 \cdot 10^{11}$ км³/с². В качестве единицы скорости принята круговая скорость орбитального движения на гелиоцентрическом удалении 1 АЕ. При выбранных таким образом единицах расстояния L^* и скорости V^* , единица времени становится равным $\Delta t^* = L^*/V^*$, а единица ускорения – $A^* = V^*/\Delta t^*$. В качестве масштаба массы принималась начальная масса КА. В введенных таким образом безразмерных переменных гравитационный параметр притягивающего центра равен 1.

Для определения движения планет и малых тел солнечной системы использовались базы данных готового эфемеридного обеспечения JPL DE405/LE405 и каталог орбит малых планет MPCORB.

Эфемериды JPL DE405/LE405 содержат данные о положении планет солнечной системы и Луны – они получены путём интегрирования задачи n-тел на большом интервале времени от JED 2305424.5 (9 дек. 1599) до JED 2525008.5 (20 фев. 2201). Результаты

интегрирования интерполированы полиномами Чебышева, коэффициенты этой интерполяции и содержатся в файле данных эфемерид. Для получения скорости и ускорения достаточно продифференцировать полиномы, задающие положения, необходимое число раз.

Каталог орбит малых планет MPCORB содержит значения кеплеровских элементов орбит известных малых тел солнечной системы и является одним из наиболее полных и периодически обновляемых каталогов астероидов.

Как отмечалось ранее, на современном этапе для межпланетных миссий могут использоваться два типа ЭРДУ – на основе ядерной энергоустановки (ЯЭРДУ) и системы солнечных батарей (СЭРДУ). Для этих вариантов в данной работе принимаются такие виды зависимости, располагаемой на борту электроэнергии:

- для СЭРДУ (переменная мощность)

$$N_e(\mathbf{x}, t) = \frac{1 - \alpha(t - t_0)}{|\mathbf{x}|^n} N_{e0}; \quad (3.1)$$

- для ЯЭРДУ (постоянная мощность)

$$N_e(\mathbf{x}, t) = N_{e0}; \quad (3.2)$$

где N_{e0} – начальная электрическая мощность в момент t_0 на расстоянии одной астрономической единицы от Солнца, α – параметр, характеризующий скорость деградации солнечных батарей, n – параметр, связанный с зависимостью мощности солнечных батарей от гелиоцентрического удаления КА (обычно находящийся в диапазоне 1,7...2).

Отличие реактивной мощности от располагаемой электрической зависит от КПД преобразования энергии. В данной диссертации КПД преобразования энергии считается постоянным, и в связи с этим соотношения (3.1) и (3.2) сохраняют свой вид и для реактивной мощности, а начальная реактивная мощность получается умножением электрической на КПД согласно уравнению (1.4).

На большей части межпланетных перелётов возмущающие ускорения, действующие на КА, слабы по сравнению с ускорением притягивающего центра, поэтому для расчета межпланетных траекторий КА с ЭРДУ может эффективно применяться метод сфер действия, в частности метод точечных сфер действия. Он и был использован в данной работе. Основные допущения этого метода заключаются в следующем:

1) при расчете гелиоцентрической траектории считается, что КА движется в центральном ньютоновском гравитационном поле Солнца, а притяжение других тел не учитывается;

2) в начальной точке гелиоцентрической траектории положение КА совпадает с положением тела отправления, а вектор гелиоцентрической скорости КА определяется как векторная сумма гелиоцентрической скорости этого тела и отлетного гиперболического избытка скорости КА;

3) в конечной точке гелиоцентрической траектории положение КА совпадает с положением цели, а вектор подлетного гиперболического избытка скорости КА определяется как векторная разность гелиоцентрической скорости КА и гелиоцентрической скорости цели;

4) длительность движения КА по гиперболической траектории внутри сферы действия планеты принимается равной нулю.

Траектория планетоцентрического участка при использовании точечных сфер действия обычно рассматриваются отдельно, на основе результатов гелиоцентрического участка. В настоящей работе планетоцентрические участки как таковые не рассматриваются, задаются только величины отлётного гиперболического избытка скорости и в случае замкнутых перелётов общее изменение массы аппарата за время его нахождения у заданной планеты.

3.1. Прямые перелёты к планетам

Элементарной единицей всех миссий в рамках Солнечной системы является прямой межпланетный перелёт, четкое и полное понимание его свойств – гарантия успешного баллистического проектирования любой сколь угодно сложной миссии от отправки зондов к ближайшим планетам до пилотируемой экспедиции на Марс и доставки астероидов в околоземное пространство.

В рассматриваемых далее примерах краевые условия, записанные ранее в общем виде, соответствуют отлёту от Земли с заданной величиной гиперболического избытка скорости и нулевой стыковкой с планетой назначения, они имеют следующий вид

- в начальный

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_0(t_0) \\ \mathbf{v}(t_0) - \mathbf{v}_0(t_0) - \mathbf{v}_{\infty 0} \\ m(t_0) - m_0 \end{pmatrix} = 0, \quad |\mathbf{v}_{\infty 0}| = v_{\infty 0}; \quad (3.3)$$

- и конечный

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}_k(t_k) \\ \mathbf{v}(t_k) - \mathbf{v}_k(t_k) \end{pmatrix} = 0, \quad m_k^* - m(t_k) \leq 0; \quad (3.4)$$

моменты времени, где $(\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i)$, $i = 0, k$ - положение и скорость начальной ($i = 0$) и конечной ($i = k$) точки (планеты, астероида и т.д.). Время перелёта фиксировано

$$t_k = t_0 + \Delta t, \quad \Delta t = \text{const}. \quad (3.5)$$

Направление вектора гиперболического избытка скорости заданной величины, выбирается оптимальным образом. Дата старта в некоторых примерах остаётся постоянной, а в некоторых выбирается оптимальным образом.

Итак, задача прямого межпланетного перелёта с минимальной тягой описывается приведённым ранее образом (2.14) с краевыми условиями (3.3) (3.4), и может быть решена с помощью, предложенной в разделе 2 последовательности:

- решение ОМ-задачи (1.22),
- переход от ОМ-задачи к задаче на минимум тяги с бесконечной скоростью истечения (без массового расхода) (2.52),
- продолжение по скорости истечения до необходимого значения (2.55).

Из условий трансверсальности (1.27), (1.48), (2.20) следует, что во всех задачах (ОМ, ОТ- и минимальной тяги) вектор гиперболического избытка скорости должен быть направлен вдоль вектора сопряжённых переменных к скорости (базис вектору Лоудена) в начальный момент времени:

$$\mathbf{v}(t_0) - \mathbf{v}_0(t_0) - v_{\infty} \frac{\mathbf{p}_v(t_0)}{p_v(t_0)} = 0. \quad (3.6)$$

Условие стационарности по дате старта при фиксированном времени перелёта имеет следующий вид

- для ОМ-задачи

$$\frac{1}{2} \eta(\mathbf{x}_0, t_0) \mathbf{p}_v(t_0)^T \mathbf{p}_v(t_0) + v_{\infty} \frac{\mathbf{p}_v(t_0)^T \mathbf{p}_x(t_0)}{p_v(t_0)} - \frac{1}{2} \eta(\mathbf{x}_k, t_k) \mathbf{p}_v(t_k)^T \mathbf{p}_v(t_k) = 0, \quad (3.7)$$

- для задачи ОТ-задачи на минимум тяги и максимум конечной массы

$$\delta(t_0) \eta(\mathbf{x}_0, t_0) T_0 \Psi(t_0) + v_{\infty} \frac{\mathbf{p}_v(t_0)^T \mathbf{p}_x(t_0)}{p_v(t_0)} - \delta(t_k) \eta(\mathbf{x}_k, t_k) T_0 \Psi(t_k) = 0. \quad (3.8)$$

При этом, в приведённых условиях стационарности (оптимальности) по дате старта не учитывается тот факт, что для КА и планет используются, вообще говоря, разные модели движения. Так, движение КА рассматривается в рамках ограниченной задачи двух тел, в то время как движение планет, определяемое по эфемеридам JPL DE405/LE405 и учитывает значительно больше факторов, таких как наличие других планет и тел солнечной системы, зональные гармоники, релятивистские эффекты и т.д. Однако, как показали расчёты, отсутствие соответствующих членов в условиях стационарности приводит к незначительным погрешностям в определении оптимальной даты старта, обычно не превышающим одного часа.

В качестве первого примера прямого межпланетного перелёта рассматривается перелёт Земля-Мартс. На рисунке 3.1.1 показана зависимость минимального начального реактивного ускорения от удельного импульса в случае заданных даты старта и времени перелёта, при постоянных значениях тяги и скорости истечения (ЯЭРДУ) на траектории перелёта. Датой отлёта от Земли выбрано 13.04.2020, время перелёта – 380 суток, отлётный гиперболический избыток скорости равен нулю.

Как видно, кривая минимального начального ускорения для ограниченной конечной массы ограничивается асимптотами, соответствующими бесконечному удельному импульсу и бесконечной тяге. При этом, координаты асимптоты, соответствующей

бесконечной скорости истечения определены точно из последовательности решения задачи, а асимптота бесконечной тяги (импульсное решение) оценена примерно из поведения самой кривой минимального начального ускорения при движении по ограничению на конечную массу. Приведённая на графике асимптота бесконечной тяги соответствует ограничению на конечную массу – не меньше 0.3 от начальной.

На рисунке 3.1.1 голубым цветом выделена линия, соответствующая отсутствию ограничения на конечную массу, она построена вплоть до значения относительной конечной массы 0.0001, на всей этой линии оптимальные решения не имеют пассивных участков на траектории перелёта. Красным цветом выделены линии, соответствующие случаям выхода решения с минимальной тягой на ограничение по конечной массе: на каждой красной линии она остаётся постоянной и равна на приведённых вариантах 0.9, 0.7, 0.5, и 0.3 от начальной массы. Все возможные решения ОТ-задачи данного перелёта находятся над этими линиями, и область над графиком является областью существования решений.

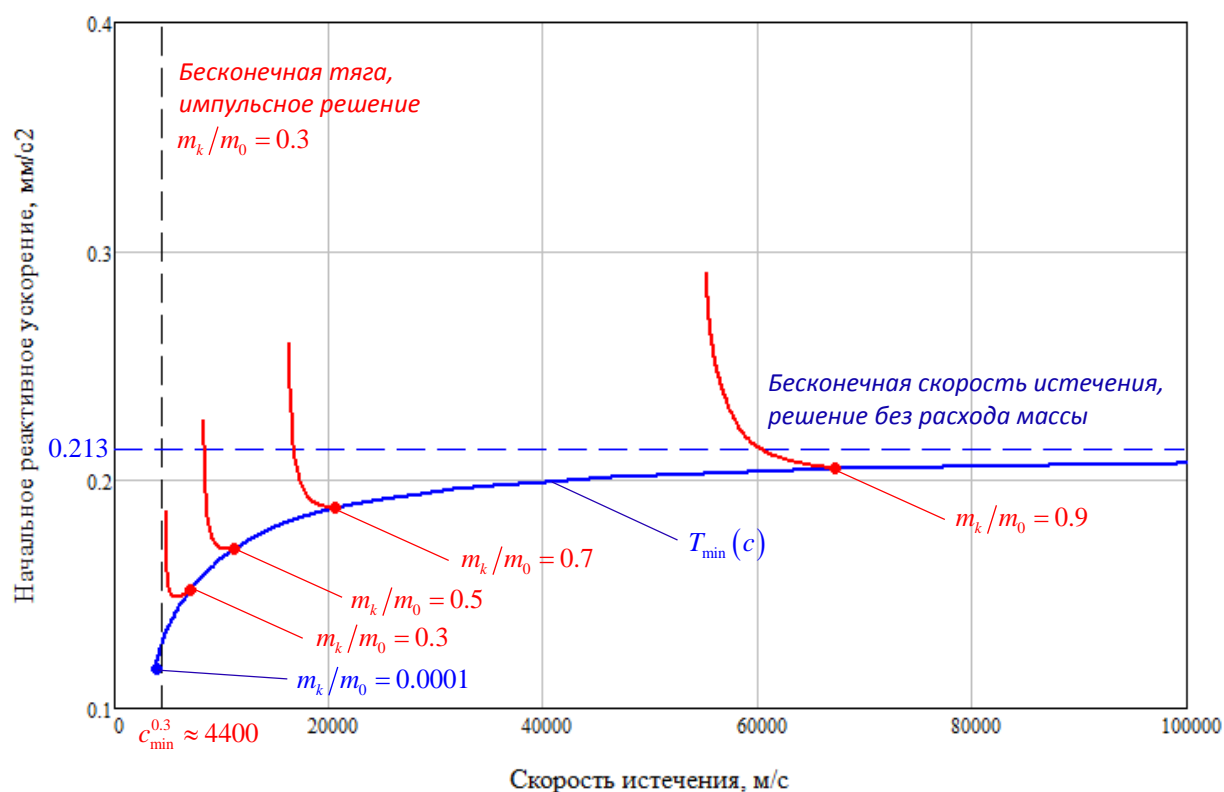


Рисунок 3.1.1 – Зависимость минимального начального реактивного ускорения от скорости истечения, перелёт Земля – Марс (ЯЭРДУ, дата старта 13.04.2020, время перелёта 380 дней)

На рисунке 3.1.2 приведён график зависимости минимальной начальной энерговооруженности КА (отношение реактивной мощности ДУ к начальной массе КА) от скорости истечения. Диапазон необходимой начальной минимальной энерговооруженности в рассматриваемых примерах изменяется от ~75.1 Вт/кг при почти

отсутствующем расходе массы до 0.226 Вт/кг при предельном её расходовании (в данном случае 0.0001 от начальной). Как видно, при отсутствии активного ограничения на конечную массу, изменение реактивной мощности носит монотонный линейный характер (синяя линия), а при выходе на ограничение – немонотонный и нелинейный (красные линии), с ярко выраженными экстремумами. Наиболее наглядно это видно на линии, соответствующей ограничению в 0.9 от начальной массы, из её вида в частности следует, что одинаковой конечной массы можно достигнуть при меньших значениях скорости истечения и мощности, если увеличить тягу. Это свойство сохраняется для всех рассмотренных ограничений, но с уменьшением требуемой конечной массы проявляется все меньше.

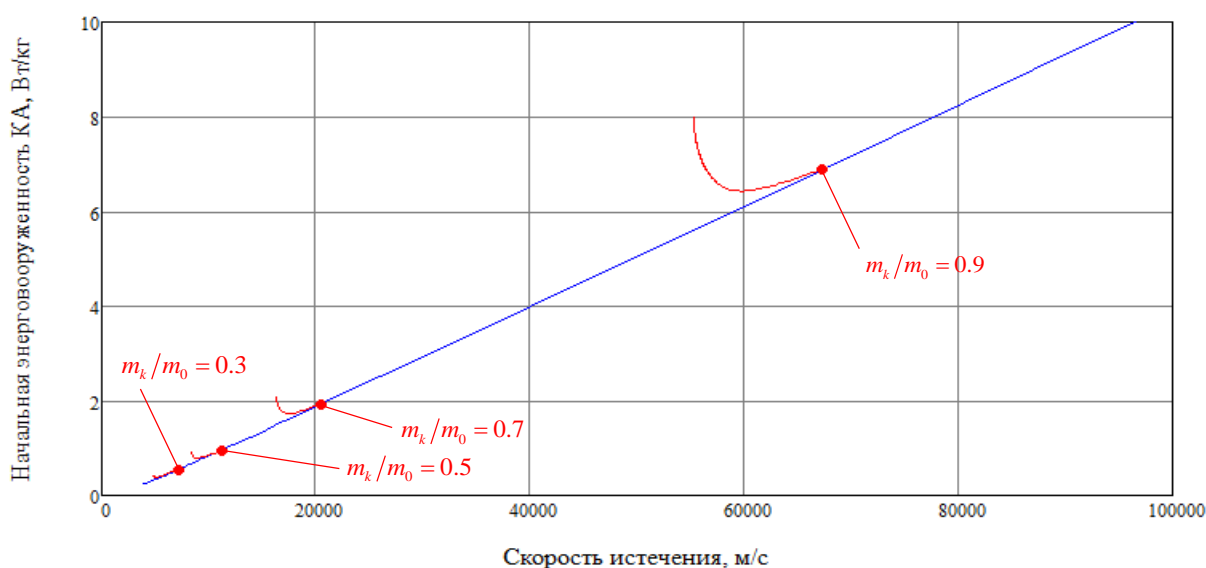


Рисунок 3.1.2 – Зависимость начальной энерговооруженности КА от скорости истечения, перелёт Земля – Марс (ЯЭРДУ, дата старта 13.04.2020, время перелёта 380 дней)

На рисунке 3.1.3 показано изменение относительной конечной массы для ОМ-задачи (прерывистые линии) и задачи на минимум тяги (сплошные линии).

Однако, более интересен вид зависимости массы ПН КА от скорости истечения для ОМ-задачи и задачи на минимум тяги при заданных значениях параметров массовой модели, описанной в разделе 1.1 (1.17). На рисунке 3.1.4 приведена такая зависимость при КПД ДУ 0.8, постоянной массе КА 10% от начальной, удельной массе ЭДУ равной 40 кг/кВт и топливного отсека – 0.13. Эти зависимости имеют ряд локальных максимумов и минимумов, соответствующих одному из возможных вариантов: отсутствию ограничения на конечную массу (синяя линия) и движению по ограничению на неё (красные линии), это сохраняется при разных значениях параметров массовой модели КА.

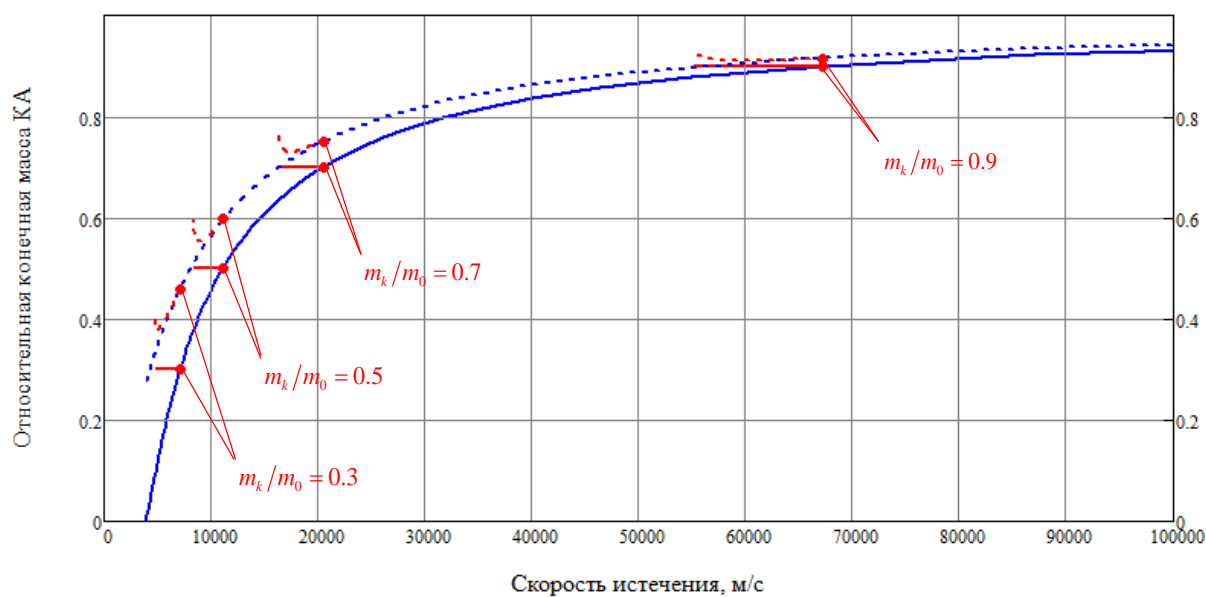


Рисунок 3.1.3 – Зависимость относительной конечной массы КА от скорости истечения для ОМ-задачи (прерывистые линии) и задачи на минимум тяги (сплошные линии), перелёт Земля – Марс (ЯЭРДУ, дата старта 13.04.2020, время перелёта 380 дней)

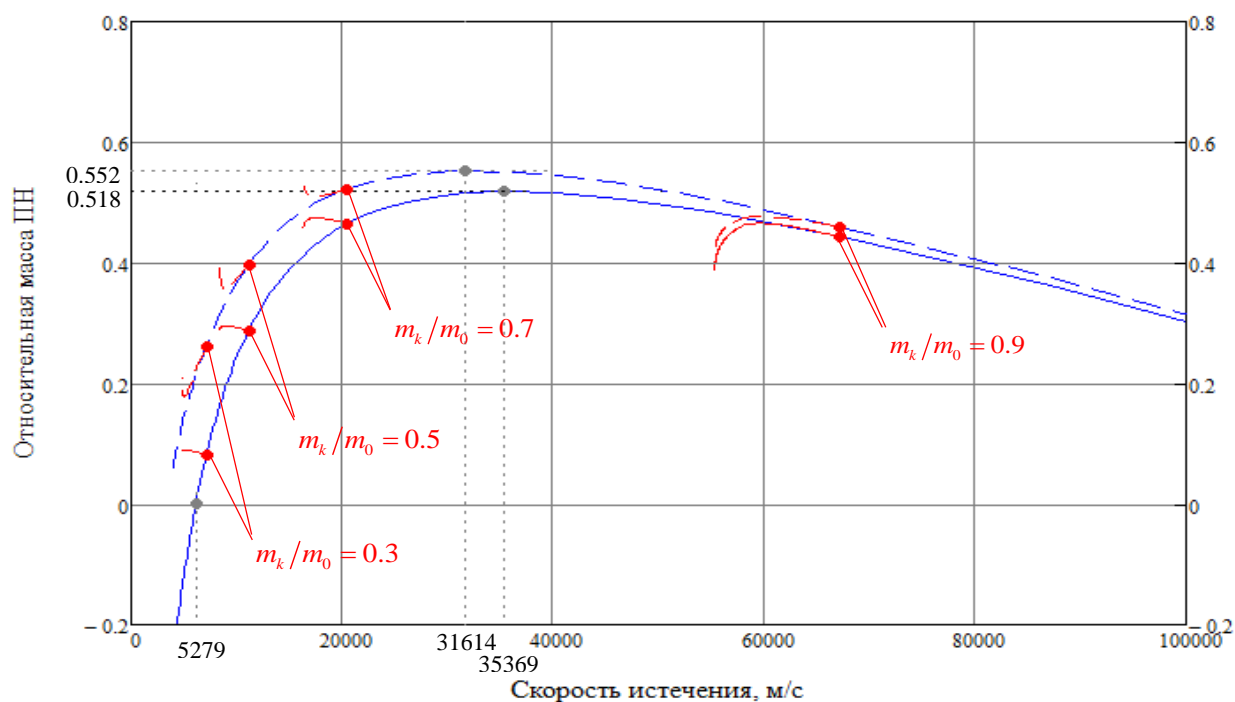


Рисунок 3.1.4 – Зависимость относительной массы ПН КА от скорости истечения для ОМ-задачи (прерывистые линии) и задачи на минимум тяги (сплошные линии), перелёт Земля – Марс (ЯЭРДУ, дата старта 13.04.2020, время перелёта 380 дней)

Графики для ОМ-задачи и задачи на минимум тяги на рисунках 3.1.3 и 3.1.4 построены для одних и тех же значений реактивной мощности, полученных из решения задачи на минимум тяги, и определяют максимальные и минимальные значения относительной конечной массы и относительной массы ПН. Функционал ОМ-задачи равен $0.63824 \text{ м}^2/\text{с}^3$.

Ниже на рисунке 3.1.5 приведена траектория, соответствующая точке на линии минимальной тяги с величиной удельного импульса 3100 с и реактивным ускорением 0.195 мм/с², удельная конечная масса при этом равна 0.789. На всей этой траектории двигатель постоянно включён. Как отмечалось ранее, можно продолжить это решение, используя сглаженное управление, до тяги больше минимальной, при этом на траектории будут появляться пассивные участки. Так, на рисунках 3.1.6, 3.1.7 приведены зависимости функции тяги от времени при величине тяги в 1.2 (рисунок 3.1.6) и 2 (рисунок 3.1.7) раза больше минимальной при значении параметра сглаживания равном 10⁻⁵.

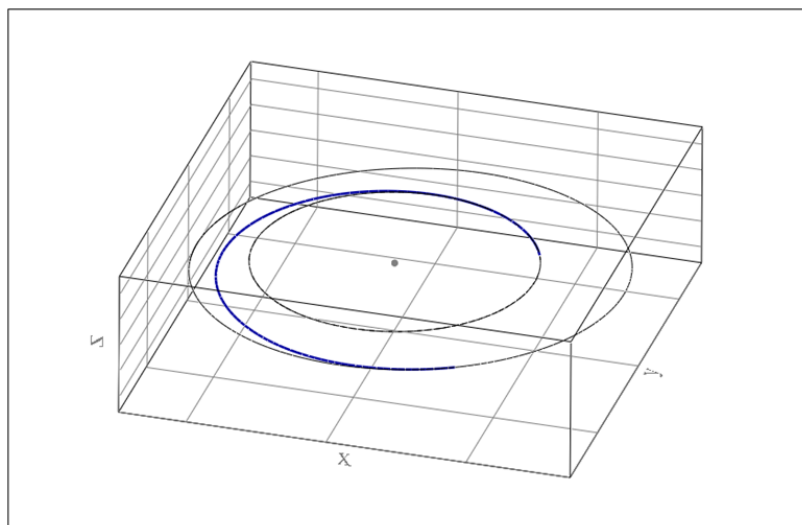


Рисунок 3.1.5 – Траектория перелёта Земля – Марс



Рисунок 3.1.6 – Сглаженная функция тяги ($T = 1.2T_{\min}$, $\varepsilon = 10^{-5}$), перелёт Земля – Марс

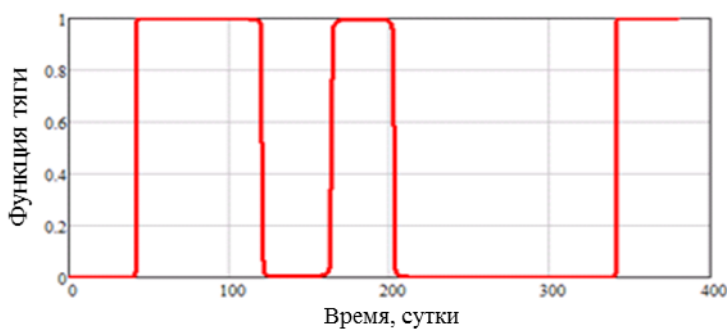


Рисунок 3.1.7 – Сглаженная функция тяги ($T = 2T_{\min}$, $\varepsilon = 10^{-5}$), перелёт Земля – Марс

По приведённым рисункам 3.1.6 и 3.1.7 можно проследить эволюцию решения задачи, изменение структуры управления на траектории, появление пассивных участков и их распределение. В частности, с увеличением тяги перестройка решения происходит таким образом, что в начале образуется и растёт пассивный участок, в связи с чем сокращается время перелёта и определяется оптимальная дата старта. На начальной траектории (с минимальной тягой) относительная конечная масса КА равнялась 0.789, при увеличении тяги в 1.2 раза она составила 0.823, а при росте тяги в 2 раза – 0.827.

Помимо самой области существования, наглядную и достаточно полную информацию о влиянии даты старта и длительности перелета на величину минимальной тяги можно представить в форме изолиний основных характеристик таких траекторий (минимального значения тяги или начального реактивного ускорения, характеристической скорости перелета, минимальной реактивной мощности ЭРДУ и т.д.) на плоскости дата старта t_0 – длительность перелета Δt . Для построения таких изолиний достаточно вычислить траектории с минимальной тягой на достаточно частой сетке по t_0 и Δt . Прямой подход к решению этой задачи приводит к большим вычислительным затратам. Так, если вычисления производятся на равномерной сетке по t_0 и Δt , содержащей n_1 узлов по t_0 и n_2 узлов по Δt , то требуется вычислить $n_1 n_2$ траекторий с минимальной тягой, решив $n_1 n_2$ задач о перелете с идеально-регулируемым двигателем, $n_1 n_2$ задач продолжения траекторий с идеально-регулируемым двигателем в траектории с минимальным реактивным ускорением (решение без массового расхода) и $n_1 n_2$ задач продолжения траекторий с минимальным реактивным ускорением в траектории с минимальной тягой.

Для сокращения вычислительных затрат был реализован метод, заключающийся в вычислении для заданного значения t_0 траектории с минимальной тягой для минимальной длительности перелета из рассматриваемого диапазона с ее последующим продолжением по дате старта и длительности перелета для охвата всей заданной области. Таким образом, требуется решить всего по одной задаче оптимизации траектории с идеально-регулируемым двигателем, её продолжения в траекторию с минимальным реактивным ускорением и минимальной тягой. В результате, из базового решения задачи с минимальной тягой получается семейство траекторий, параметризующееся скоростью истечения (или удельным импульсом), датой старта и временем перелёта. Для построения системы изолиний из этого семейства выбирается траектория с заданной скоростью истечения. В результате двух последовательных продолжений вычисляются параметры всех траекторий с минимальной тягой с заданной скоростью истечения в необходимом диапазоне изменения даты старта и длительности перелета. Разумеется, для построения

поля изолиний необходимо решить базовую задачу минимизации тяги и обеспечить её продолжение по дате старта и времени перелёта до заданных величин.

Этот подход оказывается достаточно плодотворным. Например, для построения поля изолиний в рамках одного синодического периода требуется порядка 100 точек по дате старта и 100 точек по длительности перелета. Поэтому применение описанного здесь алгоритма позволяет уменьшить число решаемых задач на 2 порядка, с $3n_1n_2$ до $3+n_1$ или $3+n_2$ задач продолжения. Для типичных одно- или двухвитковых траекторий, время вычисления одной траектории с минимальной тягой и фиксированной датой старта на современном многопроцессорном персональном компьютере составляет 5-10 секунд. В этом случае прямое вычисление траекторий с минимальной тягой в каждом узле сетки 100×100 по t_0 и Δt занимает 14-28 часов, а применение продолжения по времени перелета и дате старта позволяет сократить время вычислений до 10-20 минут (для перелёта Земля-Марс).

Следует отметить, что метод продолжения по времени перелета, обеспечивая существенное ускорение вычислений поля изолиний, имеет и ряд недостатков по сравнению с прямым вычислением траекторий с минимальной тягой в каждом узле заданной сетке. Во-первых, метод продолжения как по времени перелета, так и по дате старта позволяет определять решения только для заранее заданного значения скорости истечения ЭРДУ, а прямой метод дает характеристики для всех траекторий в допустимом диапазоне изменения удельного импульса. Во-вторых, угловая дальность перелета, вычисленная в точке с некоторой датой старта t_0 и длительностью перелета Δt однозначно определяется как угловая дальность перелета с минимальным временем Δt^* плюс угловая дальность смещения планеты-цели за интервал времени $\Delta t - \Delta t^*$, аналогично и при продолжении по дате старта. Таким образом, для анализа экстремалей с различным числом целых витков вокруг притягивающего центра при использовании методов продолжения по времени перелета и дате старта необходимо повторять серию процедур продолжения, начиная с другой экстремали задачи о перелете с идеально-регулируемым двигателем. В ряде случаев это может привести к вычислительным сложностям, связанным с вычислением многооборотных траекторий для малого времени перелета. При использовании прямого метода все необходимые экстремали в каждом узле сетки могут вычисляться независимо, что позволяет использовать для их вычисления методы параллельного программирования, однако, для значительного сокращения общего времени расчётов это потребует существенно больших вычислительных мощностей.

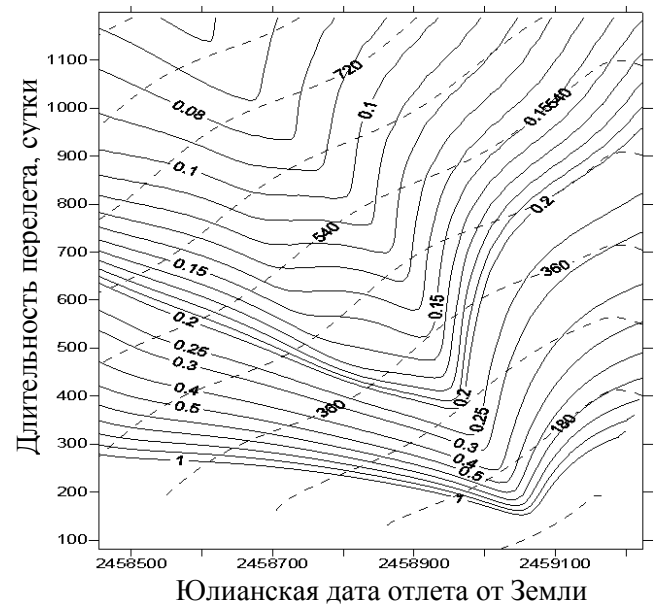
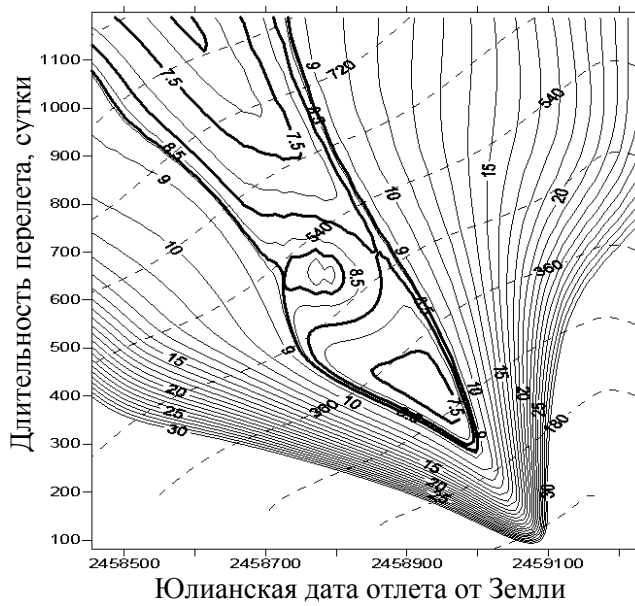


Рисунок 3.1.8 – Изолинии затрат характеристической скорости [км/с] (слева) и минимального реактивного ускорения [мм/с²] (справа) для траекторий с минимальной тягой на поле дата старта – длительность перелета (перелет к Марсу, удельный импульс ЭРДУ 3100 с, $V_{\infty} = 0$)

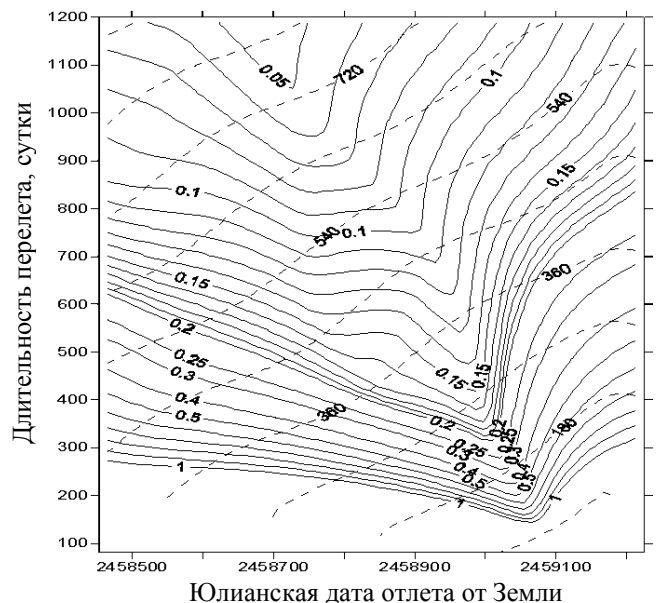
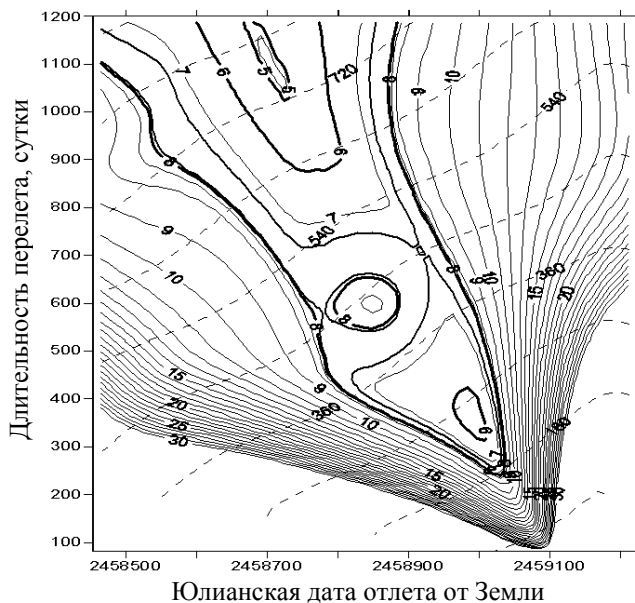


Рисунок 3.1.9 – Изолинии затрат характеристической скорости [км/с] (слева) и минимального реактивного ускорения [мм/с²] (справа) для траекторий с минимальной тягой на поле дата старта – длительность перелета (перелет к Марсу, удельный импульс ЭРДУ 3100 с, $V_{\infty} = 1$ км/с)

На рисунках 3.1.8 и 3.1.9 приведены изолинии затрат характеристической скорости (слева) и изолинии минимального начального ускорения (справа) для траектории перелета к Марсу (задача сопровождения) с минимальной тягой на поле дата старта – длительность перелета. Удельный импульс ЭРДУ равен 3100 с, мощность ДУ на всей траектории постоянна (ЯЭРДУ). Изолинии на рисунке 3.1.8 соответствуют отлетному гиперболическому избытку скорости $V_{\infty} = 0$, а на рисунке 3.1.9 – $V_{\infty} = 1$ км/с. Пунктиром на этих рисунках обозначены изолинии угловой дальности перелета, значения этих линий уровня на рисунках приведены в градусах.

Помимо случая с фиксированной датой отлёта представляют интерес траектории с её оптимальным значением. Используя полученные ранее условие (3.8), были проведены независимые вычисления и с помощью продолжения по времени перелёта получена зависимость минимальной тяги от времени перелёта для оптимальной даты старта. Результаты этих вычислений были нанесены на ранее представленные изолинии (рисунок 3.1.8) и приведены ниже на рисунке 3.1.10 в виде линии точек.

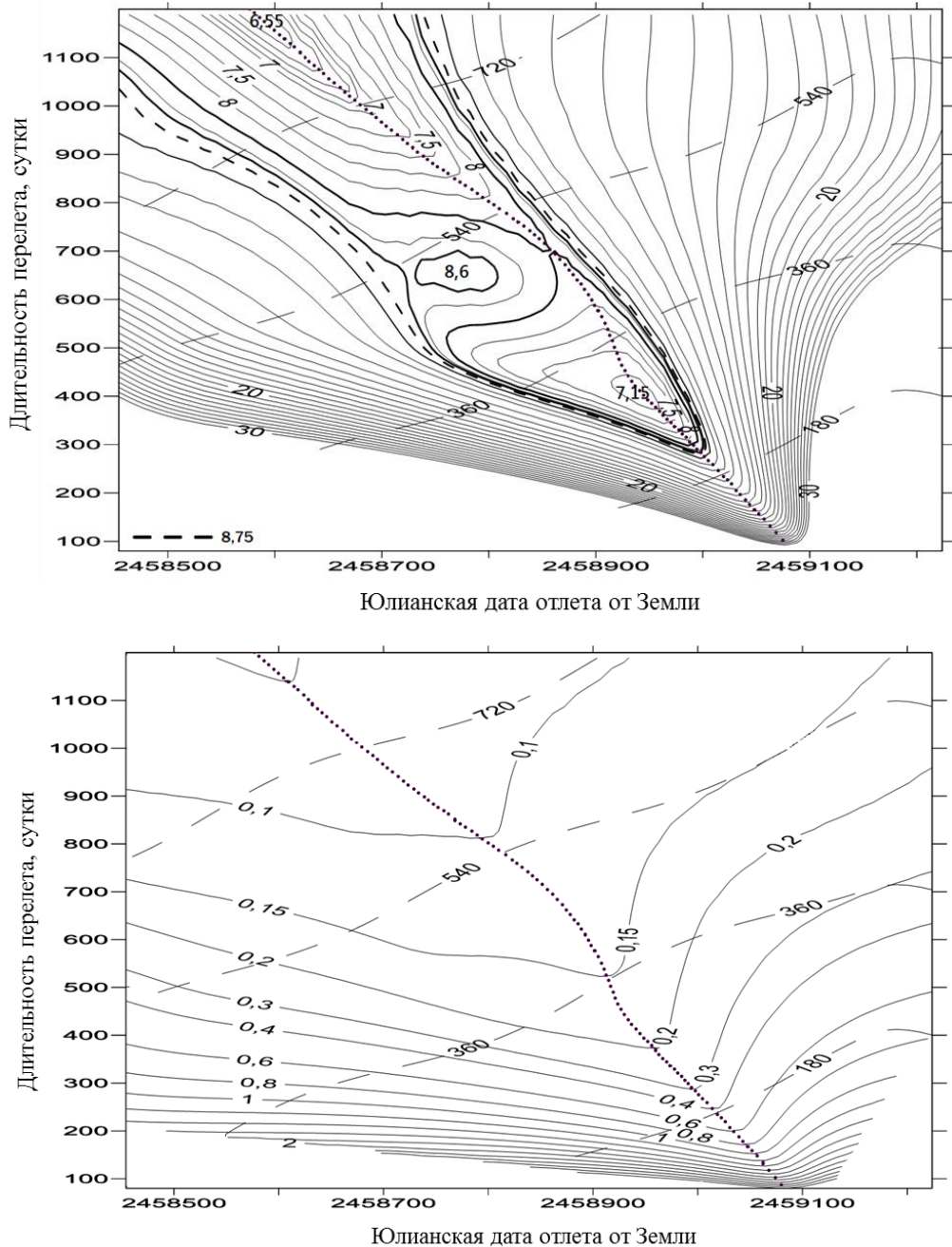


Рисунок 3.1.10 – Изолинии затрат характеристической скорости [км/с] (сверху) и минимального реактивного ускорения [мм/с²] (снизу) для траекторий с минимальной тягой на поле дата старта – длительность перелета (перелет к Марсу, удельный импульс ЭРДУ 3100 с, $V_{\infty 0} = 0$)

С точки зрения построения изолиний и получения вида качественной зависимости представляет интерес задача перелёта Земля-Меркурий, так как орбита Меркурия имеет

заметный эксцентриситет и наклонение относительно плоскости эклиптики, а орбитальный период Меркурия самый маленький из всех планет Солнечной системы, что позволяет ожидать более плотного и «выпуклого» проявления основных особенностей задачи прямого межпланетного перелёта с минимальной тягой (или оптимального быстрогодействия).

Аналогичным Марсу образом на рисунке 3.1.11 приведены изолинии перелёта Земля-Меркурий на двух синодических периодах.

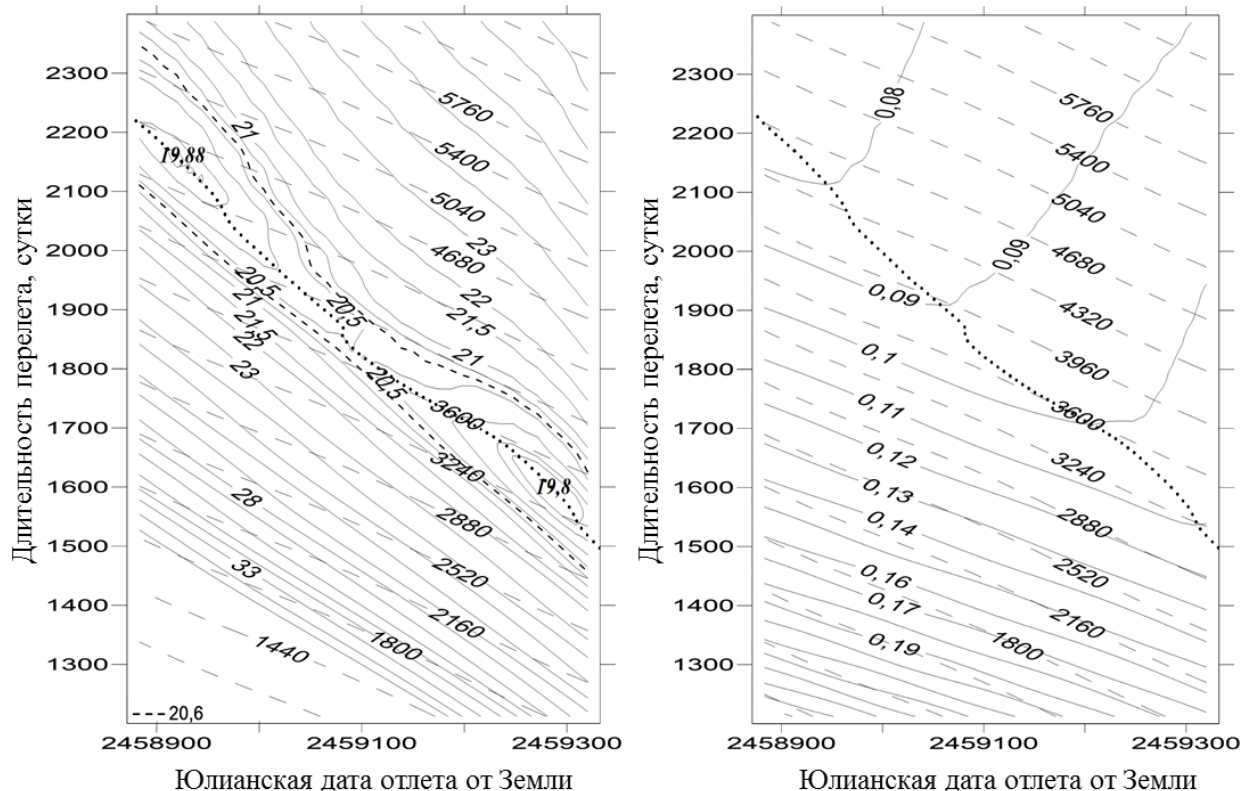


Рисунок 3.1.11 – Изолинии затрат характеристической скорости [км/с] (слева) и минимального реактивного ускорения [мм/с²] (справа) для траекторий с минимальной тягой на поле дата старта – длительность перелета (перелет к Меркурию, удельный импульс ЭРДУ 3100 с, $V_{\infty} = 0$)

Как видно из этих рисунков, характеристическая скорость перелета имеет локальные минимумы, соответствующие оптимальным датам старта и длительностям перелета для различного числа целых витков вокруг Солнца, разделённые энергетическим хребтом. Неожиданным оказалось наличие пологого локального максимума между этими минимумами, окаймленного двумя седловыми точками, отчётливо проявившемся на изолиниях Земля-Мерс. Наличие двух седловых точек говорит о возможности существования двух локально оптимальных путей преодоления энергетического хребта, на изолиниях приведён только один из путей, судя по графику лучший. По-видимому, этот хребет связан с периодом неудачного фазирования планет и его минимальная «высота» совпадает со случаем оптимальной даты старта при заданном времени перелёта, то есть локально оптимальному случаю по угловой дальности. Также можно отметить, что этот

энергетический хребет в данном случае оказался легко преодолим при продолжении по времени перелёта с оптимальной датой старта. Однако, его «высота» и трудность преодоления может меняться для конкретного синодического периода.

Минимальная тяга (или начальное реактивное ускорение), необходимая для реализации перелета, имеет минимум только по дате старта и при увеличении длительности перелета монотонно уменьшается.

Во всех точках изолиний (рисунки 3.1.8 – 3.1.11) конечная масса не меньше 10% от начальной.

Для Меркурия интересно отметить несовпадение локальных минимумов по времени перелёта и числу витков для разных синодических периодов, и при этом их близость по значению характеристической скорости. Минимальные значения характеристической скорости составляют 19.88 и 19.8 км/с для времени перелёта ~2150 и ~1600 суток, при 12 и 9 витках вокруг Солнца соответственно. При этом разница в минимальном начальном ускорении для этих решений также заметна ~0.08 и 0.11 мм/с². Таким образом, отношение времён перелёта и уровней ускорения оказывается достаточно близки и обратно пропорциональны друг другу.

На рисунке 3.1.12 приведена траектория перелёта Земля-Меркурий, для даты старта и времени перелёта взятых из области одного из минимумов изолиний (рисунок 3.1.11) – дата старта JD 2458927.5, время перелёта 2140 дней, удельный импульс 3100 с, начальное реактивное ускорение 0.078 мм/с², относительная конечная масса 0.5199. Так же, как и для Марса, для этого перелёта интересно проследить эволюцию управления, вида траектории и изменение относительной конечной массы при увеличении тяги, на рисунках 3.1.13 и 3.1.14 приведены вид проекции траектории на плоскость XY и зависимость функции тяги при увеличении тяги до 1.2 и 2 от минимальной, при этом относительная конечная масса увеличилась до 0.532 и 0.545 соответственно.

На рисунке 3.1.14 прослеживается очевидная локализация активных участков в районах апоцентра и перицентра траектории перелёта, что иллюстрирует эволюцию в сторону импульсного решения с их приложением в этих точках при асимптотическом стремлении тяги к бесконечности. Кроме того, аналогично случаю с Марсом, при увеличении тяги появляются пассивные участки на концах траектории и тем самым определяются оптимальные дата старта и время перелёта.

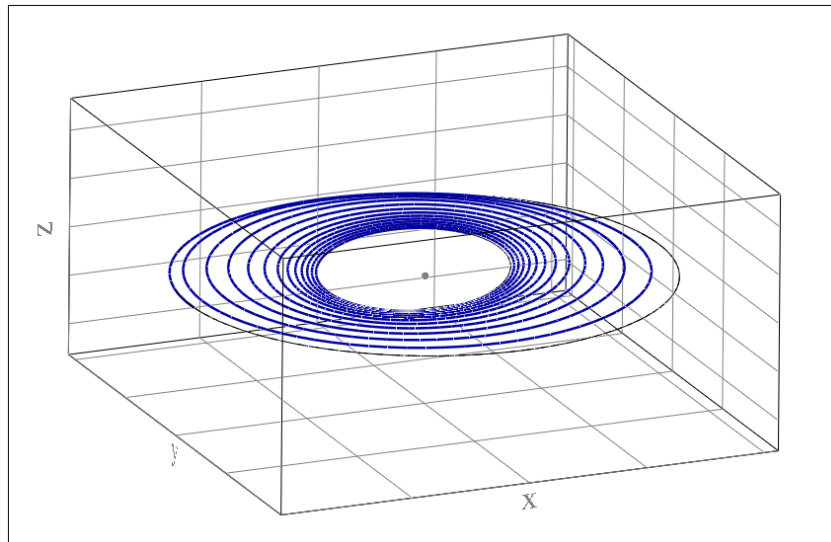


Рисунок 3.1.12 – Траектория перелёта Земля – Меркурий

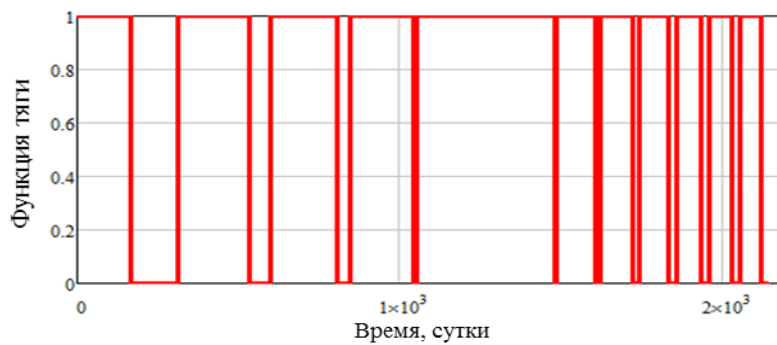
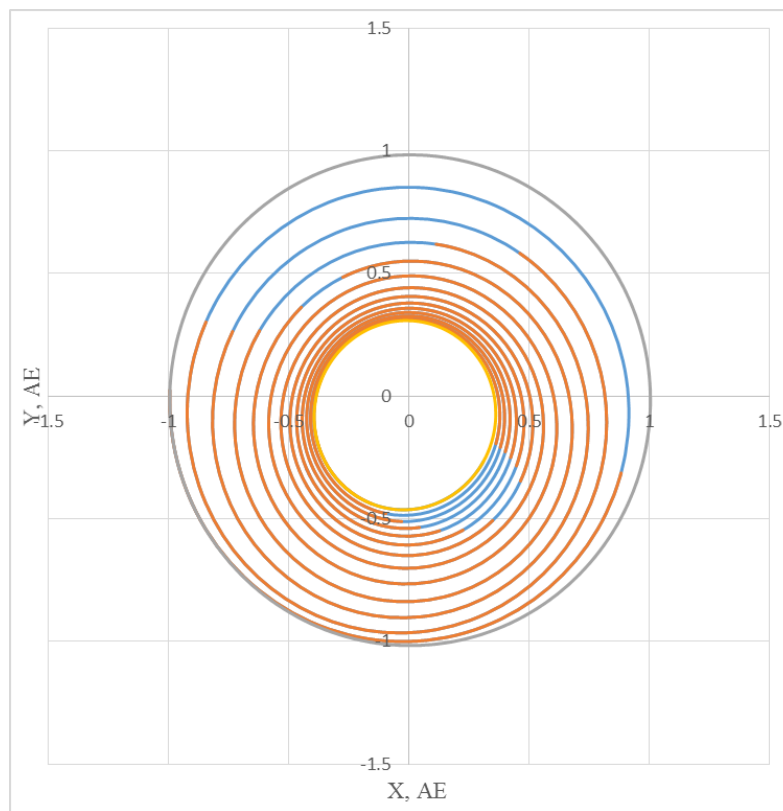


Рисунок 3.1.13 – Проекция траектории перелета Земля – Меркурий на плоскость эклиптики и функция тяги ($T = 1.2T_{\min}$, $\varepsilon = 0$).

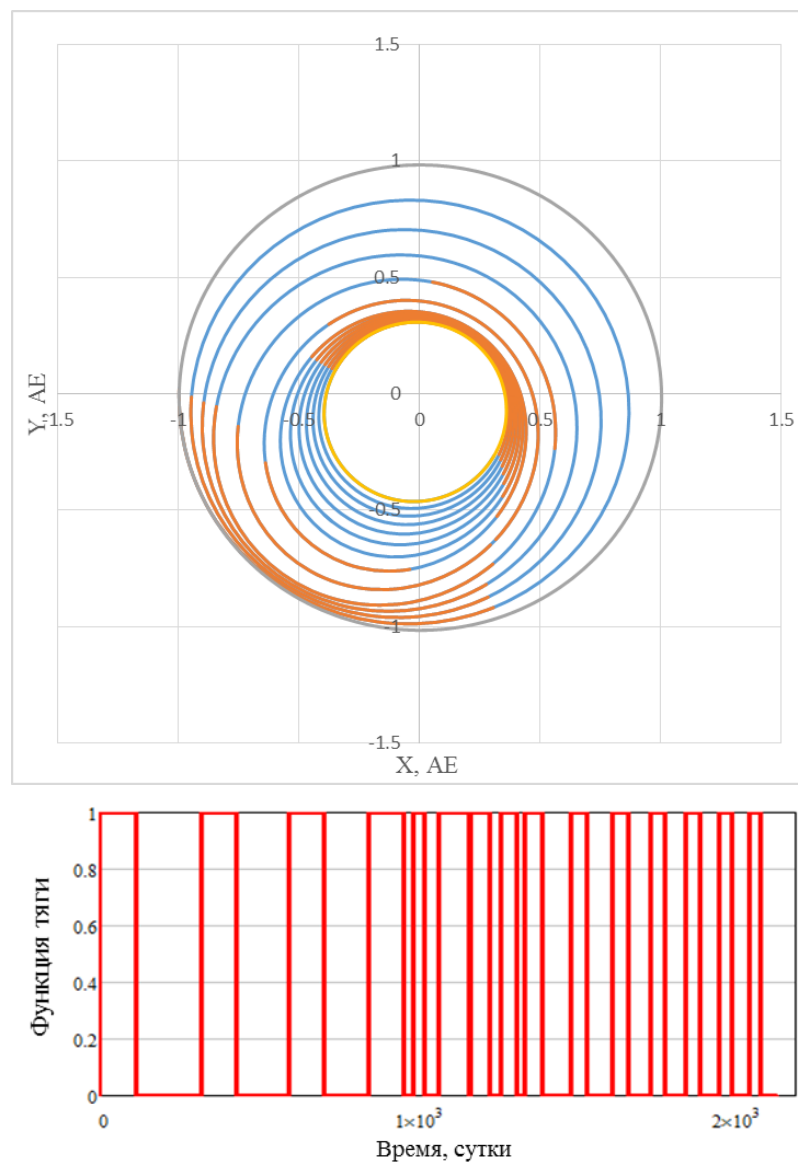


Рисунок 3.1.14 – Проекция траектории перелета Земля – Меркурий на плоскость эклиптики и функция тяги ($T = 2T_{\min}$, $\varepsilon = 0$).

Имеет смысл привести отдельно кривые продолжения по времени перелёта с оптимальной датой старта, так как они довольно полно отражают картину энергетических характеристик для совершения межпланетного перелёта. Графики зависимости начального реактивного ускорения и мощности двигательной установки, а также относительной конечной массы (отношение конечной массы КА при подлёте к планете назначения к начальной массе при отлёте от Земли) приведены на рисунках 3.1.15, 3.1.16, 3.1.17 для Марса и 3.1.18, 3.1.19, 3.1.20 для Меркурия. Они соответствуют зависимостям, приведённым на изолиниях (рисунки 3.1.10, 3.1.11) и были дополнены случаем с переменной мощности ДУ на траектории (СЭРДУ), при этом коэффициент n был принят равным 1.7, деградация солнечных батарей - 5% в год, удельный импульс остался прежним – 3100 с.

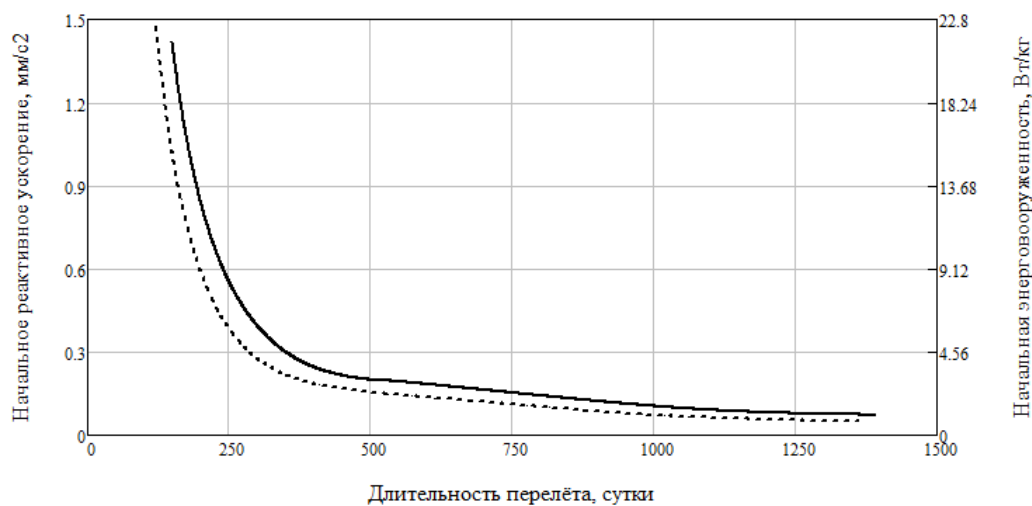


Рисунок 3.1.15 – Зависимость минимальных тяги и мощности для случая постоянной мощности (пунктир) и солнечной энергоустановки (сплошная) от длительности перелета при оптимальной дате старта (перелет к Марсу, удельный импульс ЭРДУ 3100 с)

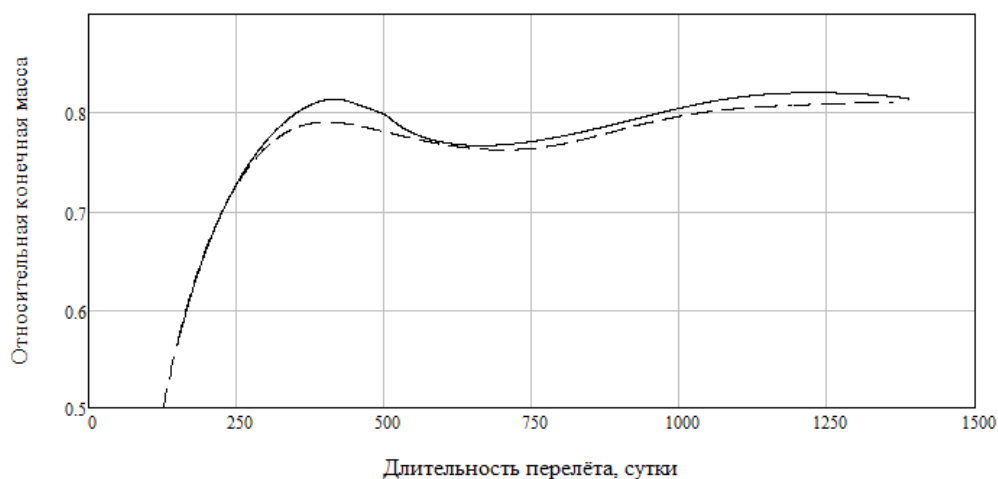


Рисунок 3.1.16 – Зависимость относительной конечной массы для случая постоянной мощности (пунктир) и солнечной энергоустановки (сплошная) от длительности перелета при оптимальной дате старта (перелет к Марсу, удельный импульс ЭРДУ 3100 с)

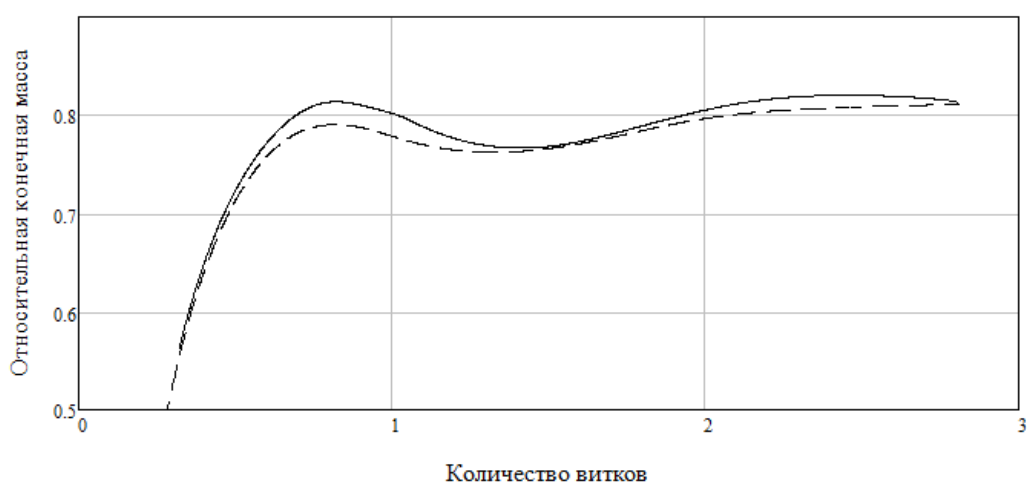


Рисунок 3.1.17 – Зависимость относительной конечной массы для случая постоянной мощности (пунктир) и солнечной энергоустановки (сплошная) от количества витков вокруг Солнца при оптимальной дате старта (перелет к Марсу, удельный импульс ЭРДУ 3100 с)

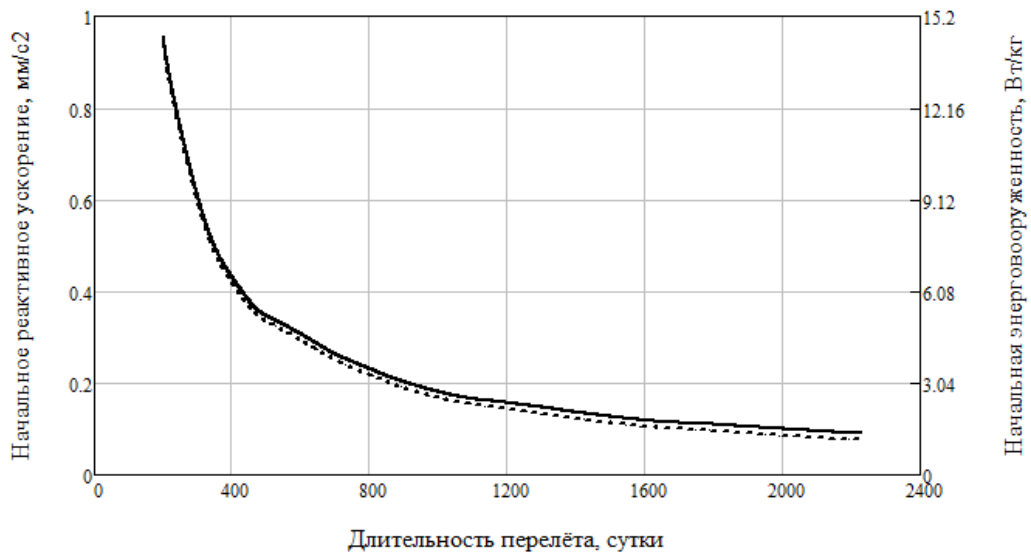


Рисунок 3.1.18 – Зависимость минимальных тяги и мощности для случая постоянной мощности (пунктир) и солнечной энергоустановки (сплошная) от длительности перелета при оптимальной дате старта (перелет к Меркурию, удельный импульс ЭРДУ 3100 с)

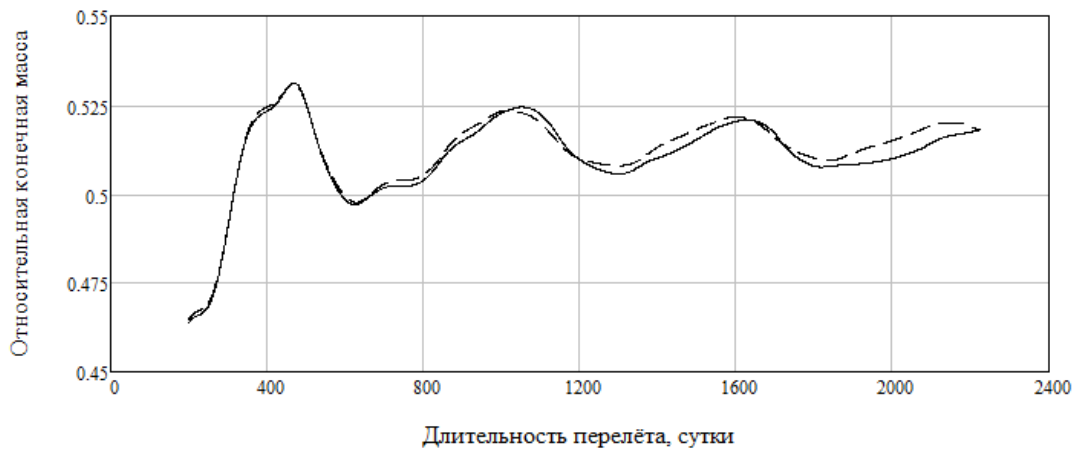


Рисунок 3.1.19 – Зависимость относительной конечной массы для случая постоянной мощности (пунктир) и солнечной энергоустановки (сплошная) от длительности перелета при оптимальной дате старта (перелет к Меркурию, удельный импульс ЭРДУ 3100 с)

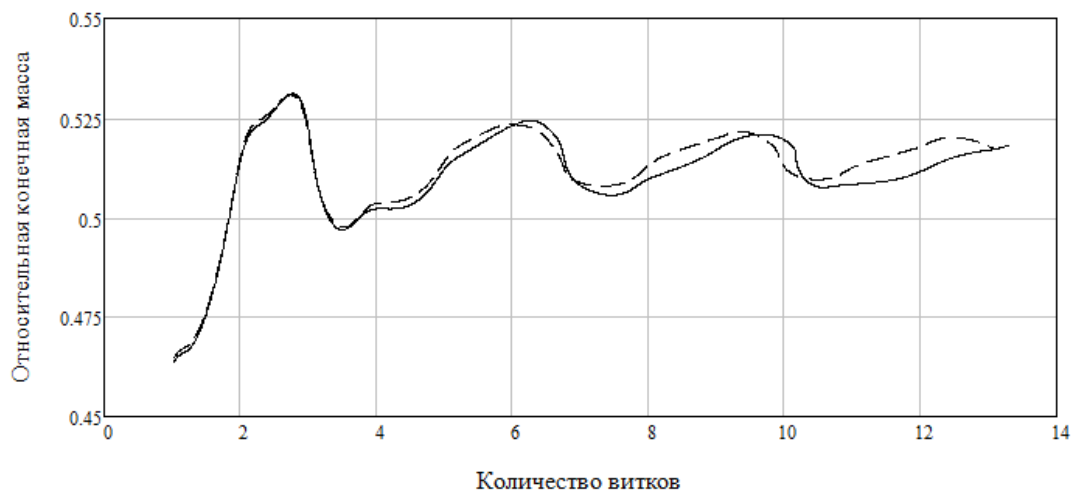


Рисунок 3.1.20 – Зависимость относительной конечной массы для случая постоянной мощности (пунктир) и солнечной энергоустановки (сплошная) от количества витков вокруг Солнца при оптимальной дате старта (перелет к Меркурию, удельный импульс ЭРДУ 3100с)

В случае Марса потребность в большей величине минимального начального реактивного ускорения и мощности для СЭРДУ легко объясняется заметным удалением от Солнца при перелёте, при этом оба графика показывают тенденцию к уменьшению этих величин при увеличении времени перелёта. Для разницы в уровне ускорения и мощности есть яркий переломный момент при длительности около 270 суток длительности перелёта, после которого разница в ЯЭРДУ и СЭРДУ вариантах становится всё менее заметной. С точки зрения конечной массы для траекторий с минимальной тягой (оптимального быстродействия) более эффективным оказалось использование СЭРДУ, что может быть связано с неравномерностью массового расхода и величины тяги из-за зависимости от расстояния до Солнца, оказавшегося в данном случае «удачным». Так относительно плохие траектории оказываются близки по конечной массе, а относительно хорошие показывают некоторое преимущество СЭРДУ, хотя оно и не превосходит разницы в ~0.01 от начальной массы.

Для Меркурия отличие в использовании разных типов энергоустановок для рассматриваемой задачи оказалась в целом не существенным. Так как по начальному реактивному ускорению оба варианта неотличимы, особенно для быстрых перелётов, некоторое отличие нарастает только к временам перелёта существенно за 1000 суток, а графики относительной конечной массы для ЯЭРДУ и СЭРДУ оказываются сдвинутыми относительно друг друга по времени перелёта и угловой дальности, но показывают приблизительно одни уровни.

Между тем, основной областью применения СЭРДУ часто называется часть Солнечной системы в пределах орбиты Марса или главного пояса астероидов, что очевидно связано с недостаточной мощностью солнечного потока за его пределами. Хотя использование маршевых ЭРД в сочетании с ядерными источниками энергии тоже сопряжено с трудностями обеспечения на борту достаточной мощности, в данной работе использование СЭРДУ рассматривается только в пределах Марса.

Далее на рисунках 3.1.21 – 3.1.29 представлены зависимости начальной энерговооружённости и относительной конечной массы КА в зависимости от времени перелёта с оптимальной датой старта для перелётов с СЭРДУ к Венере, Марсу и Меркурию при разных значениях скорости истечения: 3000, 4500, 6000, 7500, 9000 с. Коэффициент n равен 1.7, деградация солнечных батарей - 5% в год.

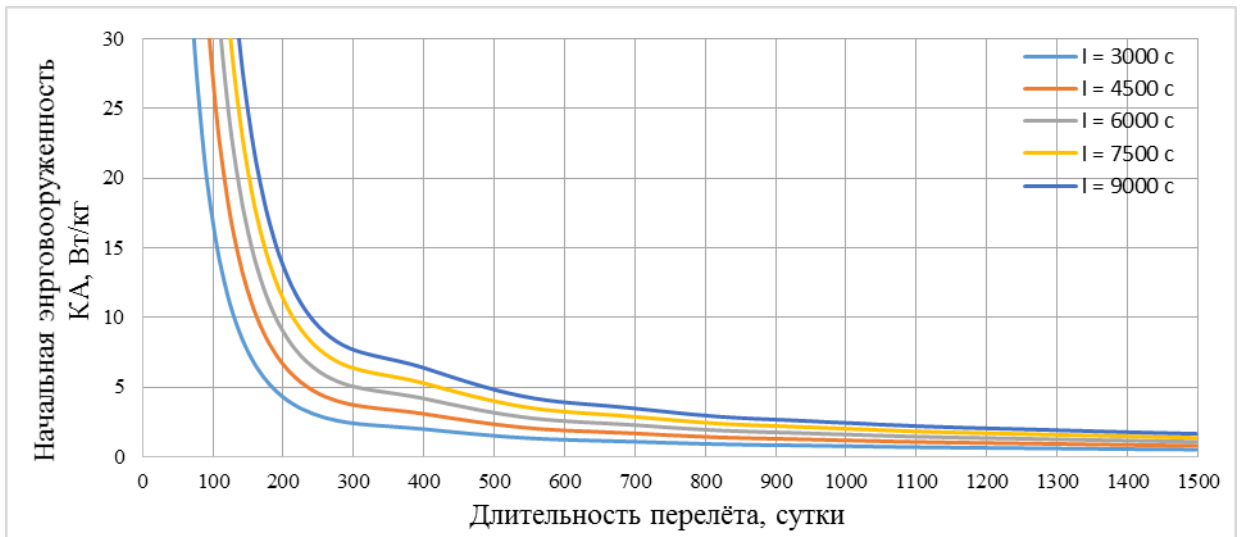


Рисунок 3.1.21 – Перелет Земля – Венера, зависимость минимальной энерговооруженности КА от времени перелёта, оптимальная дата старта

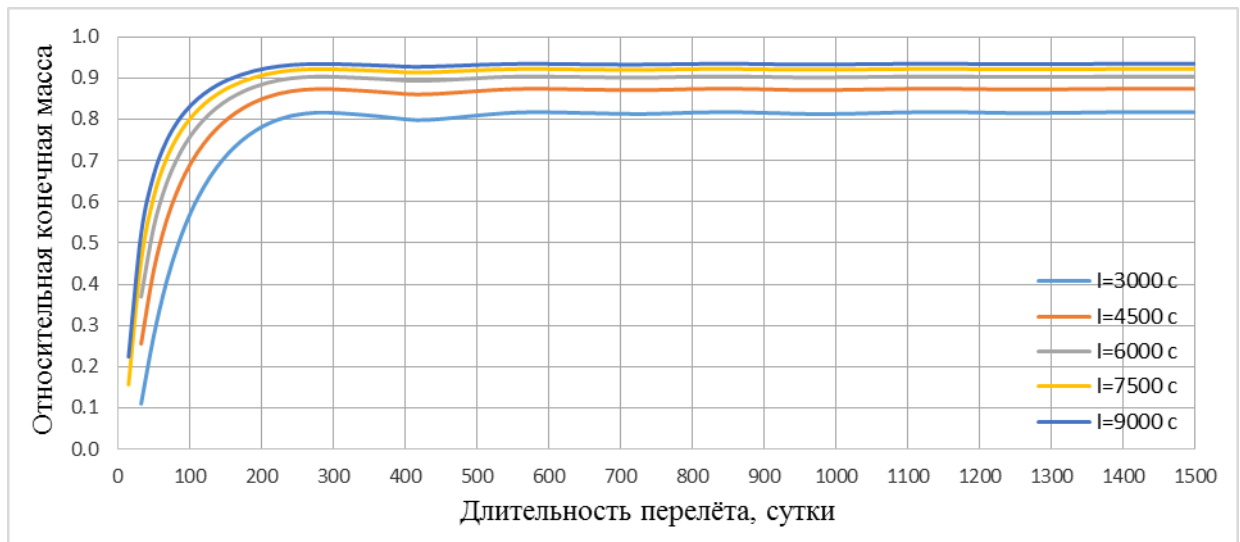


Рисунок 3.1.22 – Перелет Земля – Венера, зависимость относительной конечной массы КА от времени перелёта, оптимальная дата старта

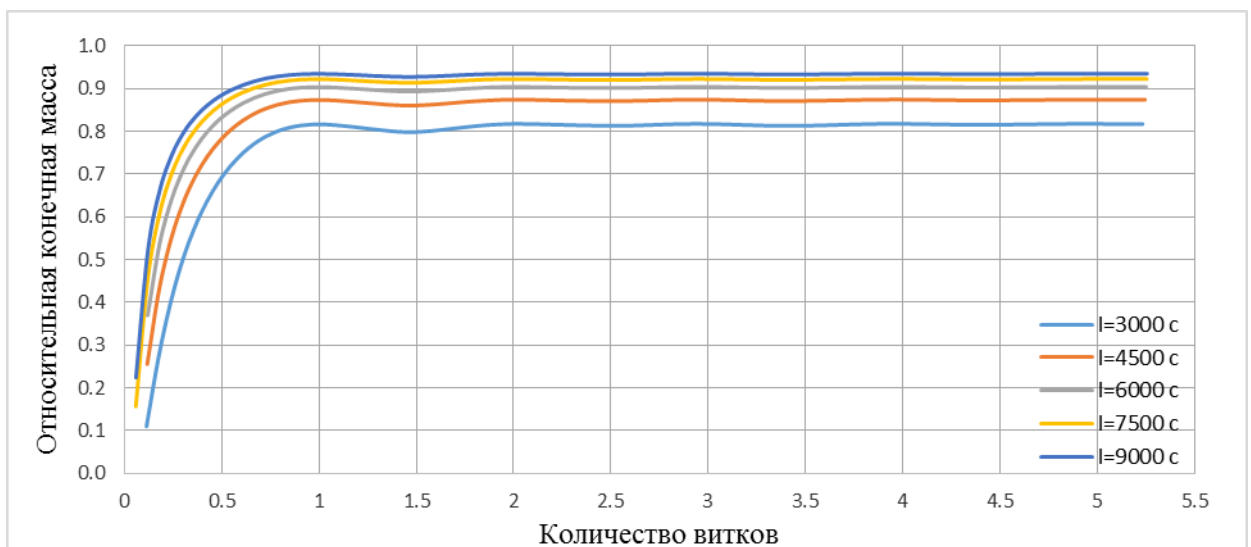


Рисунок 3.1.23 – Перелет Земля – Венера, зависимость относительной конечной массы КА от числа витков вокруг Солнца, оптимальная дата старта

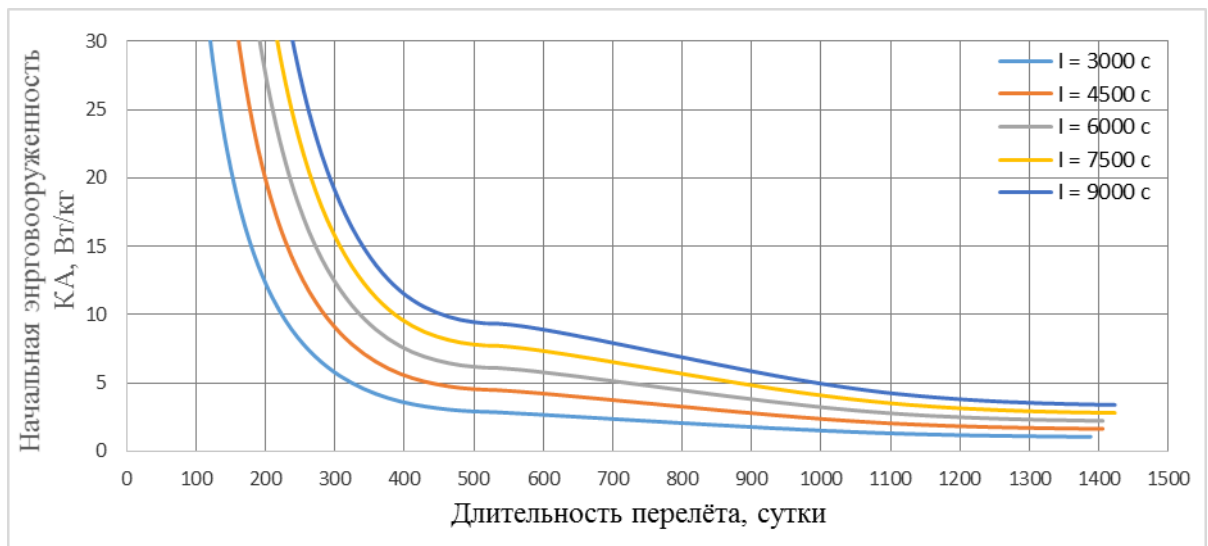


Рисунок 3.1.24 – Перелет Земля – Марс, зависимость минимальной энерговооруженности КА от времени перелета, оптимальная дата старта

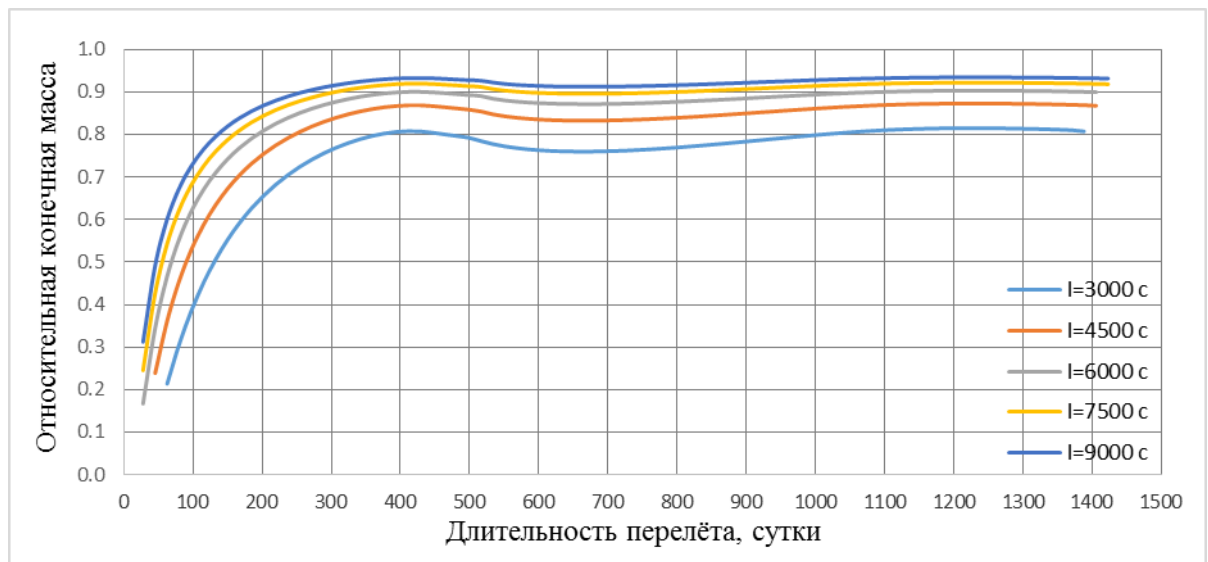


Рисунок 3.1.25 – Перелет Земля – Марс, зависимость относительной конечной массы КА от времени перелета, оптимальная дата старта

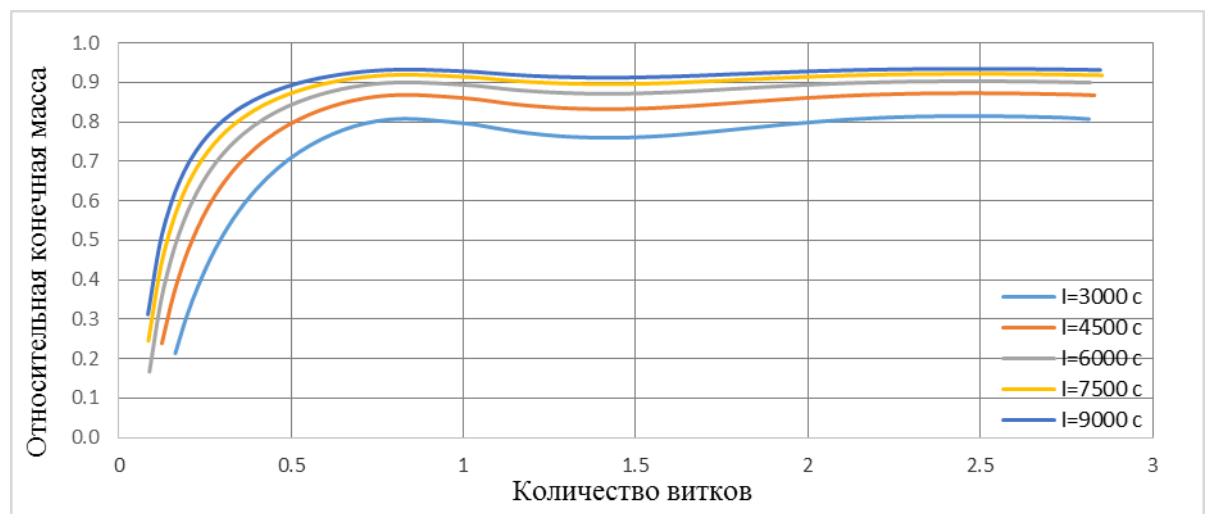


Рисунок 3.1.26 – Перелет Земля – Марс, зависимость относительной конечной массы КА от числа витков вокруг Солнца, оптимальная дата старта

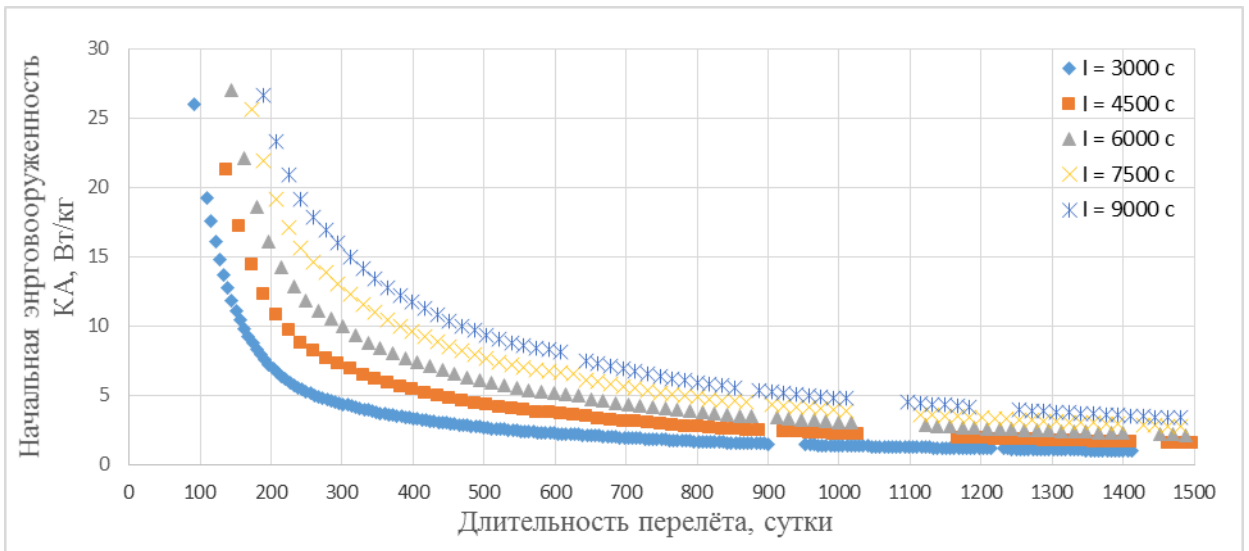


Рисунок 3.1.27 – Перелет Земля – Меркурий, зависимость минимальной энерговооруженности КА от времени перелёта, оптимальная дата старта

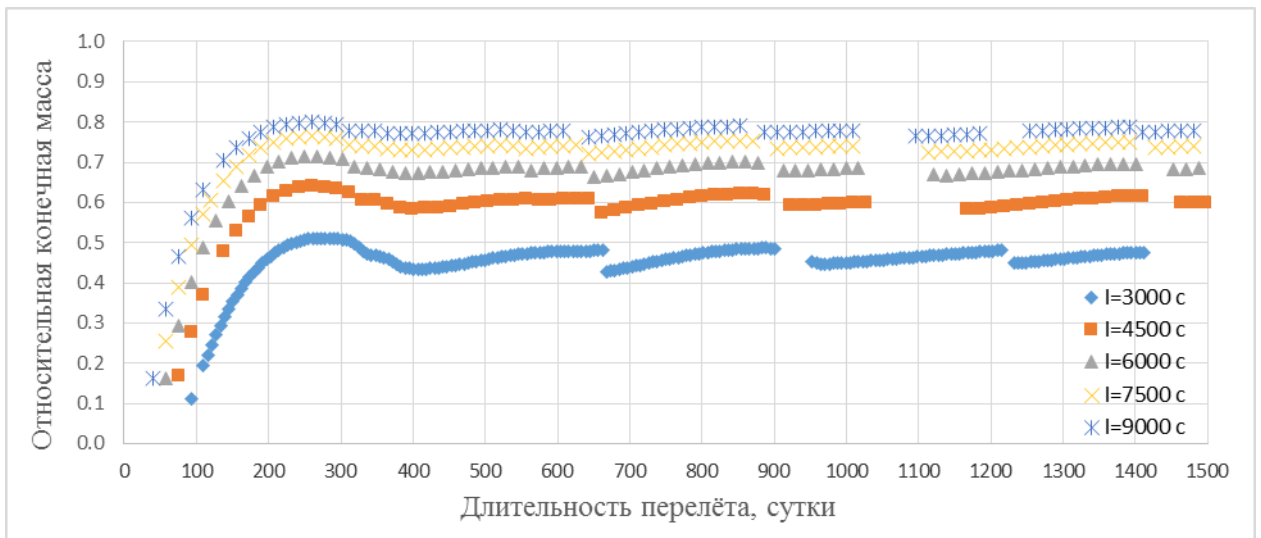


Рисунок 3.1.28 – Перелет Земля – Меркурий, зависимость относительной конечной массы КА от времени перелёта, оптимальная дата старта

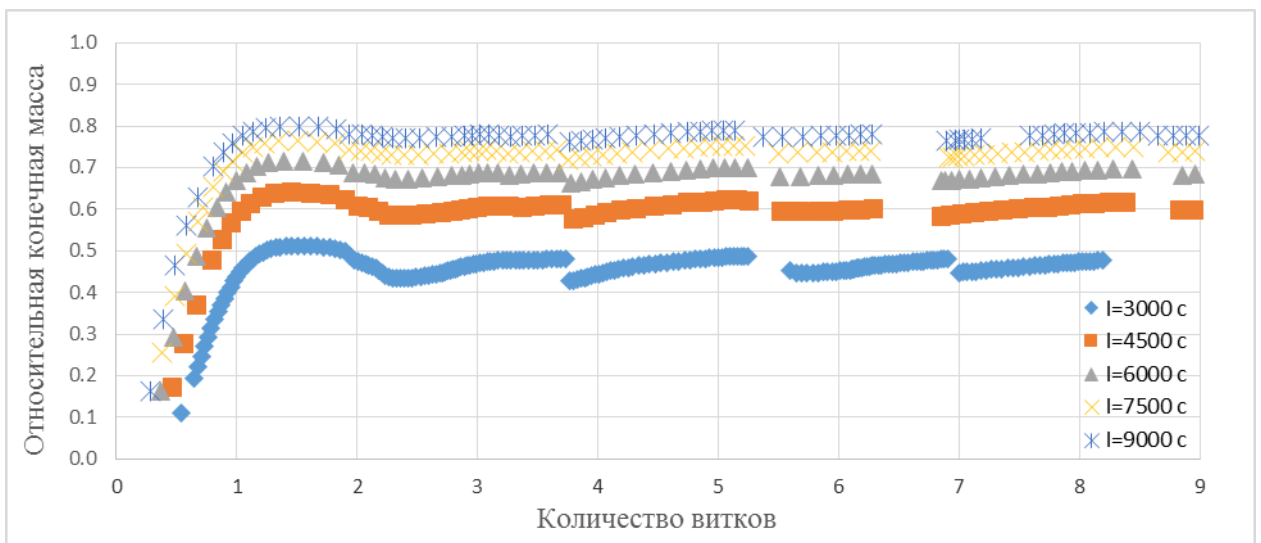


Рисунок 3.1.29 – Перелет Земля – Меркурий, зависимость относительной конечной массы КА от числа витков вокруг Солнца, оптимальная дата старта

Приведённые на рисунках 3.1.21 – 3.1.29 результаты были получены с помощью метода продолжения, со временем перелёта в качестве его параметра, поэтому, как и ранее на аналогичных графиках, они гладкие и изменение числа витков происходит так же непрерывно, так как обусловлено оно движением планет. Однако, в случае Меркурия данное решение оказалось невозможно получить полностью непрерывным продолжением, поэтому оно строилось фрагментами, которые могут принадлежать разным семействам экстремалей и не имеют гладких соединений. Особенно хорошо это видно для удельного импульса 3000 с и времени перелёта ~ 670 суток. Также, исходя из наклона линий, максимальных и минимальных значений в окрестностях разрывов, можно предположить, что их провоцируют энергетические хребты (в этом случае непреодоленные методом продолжения). Кроме того, на графиках есть области, где решения полностью отсутствуют, это объясняется тем, что не удалось получить ни одного решения с близкими параметрами. Это не значит, что их нет, но возможно они не являются достаточно гладкими для используемого в данной работе метода продолжения.

Из графиков видно, что для всех планет и значений удельного импульса при достаточно большой продолжительности перелета (больше нескольких сотен суток), дальнейшее увеличение длительности перелета не приводит к росту конечной массы КА, а решение становится колеблющимся вблизи асимптотического значения. Очевидно, что увеличение конечной массы в этих случаях может быть достигнуто увеличением мощности и тяги выше минимальных.

Для разных планет эффект от изменения удельного импульса оказался различным: так, например, при его увеличении в три раза с 3000 с до 9000 с конечная масса КА у Меркурия увеличивается примерно в три раза больше, чем в случае Венеры или Марса.

Во всех приведённых случаях зависимость тяги и мощности от времени перелёта носит монотонный, экспоненциальный характер. Отсутствие экстремумов на этих зависимостях говорит о том, что любая их оптимизация будет носить компромиссный характер, с необходимостью учета других факторов. Например, дополнительным критерием может выступать относительная конечная масса или ограничения на максимально допустимую мощность и длительность перелёта.

Использование условия оптимальности по дате старта позволяет говорить о локальной оптимальности найденных решений по угловой дальности при ограниченном времени перелёта, так как в этом случае начальная и конечная точки подвижны и всегда подбирается их лучшее положение.

Необходимо отметить, что приведенные решения оптимизационных задач не являются для них единственными, так как эти задачи имеют многоэкстремальный характер, и во многих случаях можно получать разные решения, отличающиеся разным числом витков для одной и той же продолжительности перелёта.

3.2. Перелёты по сложным маршрутам

Следующим рассматриваемым классом задач являются траектории перелётов по сложным маршрутам, сформулированные как задачи оптимизации с промежуточными условиями. К такому классу задач относятся замкнутые перелёты, траектории с гравитационными манёврами и другие задачи облёта группы объектов.

В рамках данной работы рассмотрен ряд замкнутых перелётов: Земля-Марс-Земля, Земля-астероид-Земля, соответствующих пилотируемой экспедиции и задаче доставки проб грунта на Землю.

Задачи этого раздела, как и прежде, рассматриваются в рамках метода грависфер нулевой протяжённости и включают в себя только гелиоцентрические участки. Краевые и промежуточные условия соответствуют условиям «стыковки», и были приняты в следующем виде:

- в начальный

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_0(t_0) \\ \mathbf{v}(t_0) - \mathbf{v}_0(t_0) - \mathbf{v}_{\infty 0} \\ m(t_0) - m_0 \end{pmatrix} = 0, \quad |\mathbf{v}_{\infty 0}| = v_{\infty 0}; \quad (3.9)$$

- промежуточный

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_i^-) - \mathbf{x}_i(t_i^-) \\ \mathbf{v}(t_i^-) - \mathbf{v}_i(t_i^-) \\ \mathbf{x}(t_i^+) - \mathbf{x}_i(t_i^+) \\ \mathbf{v}(t_i^+) - \mathbf{v}_i(t_i^+) \\ m(t_i^-) - m(t_i^+) + \Delta m_i \end{pmatrix} = 0; \quad (3.10)$$

- и конечный

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}_k(t_k) \\ \mathbf{v}(t_k) - \mathbf{v}_k(t_k) \end{pmatrix} = 0, \quad m_k^* - m(t_k) \leq 0; \quad (3.11)$$

моменты времени, где $(\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i)$, $i = 0, 1 \dots k$ - положение и скорость тела отправления ($i = 0$), промежуточного ($i = 1 \dots k-1$) и конечного объекта ($i = k$). Общая длительность экспедиции и время пребывания на промежуточном ограничении фиксированы

$$t_k - t_0 - \Delta t = 0, \quad t_i^+ - t_i^- - \Delta t_i = 0, \quad \Delta t = \text{const}, \quad \Delta t_i = \text{const}. \quad (3.12)$$

Легко видеть, что единственным отличием от предыдущей постановки является присутствие промежуточных ограничений (3.10). С учётом приведённых краевых условий окончательно условия стационарности (оптимальности по времени) для промежуточного ограничения принимают вид

- для ОМ-задачи

$$\frac{1}{2}\eta(\mathbf{x}_i^-, t_i^-)\mathbf{p}_v(t_i^-)^T \mathbf{p}_v(t_i^-) - \frac{1}{2}\eta(\mathbf{x}_i^+, t_i^+)\mathbf{p}_v(t_i^+)^T \mathbf{p}_v(t_i^+) = 0, \quad (3.13)$$

- для задачи на минимум тяги без массового расхода

$$\eta(\mathbf{x}_i^-, t_i^-)\frac{p_v(t_i^-)}{m_0} - \eta(\mathbf{x}_i^+, t_i^+)\frac{p_v(t_i^+)}{m_0 + \Delta m_i} = 0, \quad (3.14)$$

- для задач на минимум тяги и максимум конечной массы

$$\delta(t_i^-)\eta(\mathbf{x}_i^-, t_i^-)T_0\Psi(t_i^-) - \delta(t_i^+)\eta(\mathbf{x}_i^+, t_i^+)T_0\Psi(t_i^+) = 0. \quad (3.15)$$

Можно отметить, что особенностью задачи с рассматриваемыми промежуточными условиями (3.10) является непрерывность сопряжённой переменной к массе и разрывность сопряженных переменных к положению и скорости при выходе на промежуточное ограничение и при сходе с него (2.37).

Первой рассматриваемой задачей является замкнутый перелёт к Марсу с оптимальной датой отлёта от Земли, подлёта к Марсу и отлёта от него, заданными временем ожидания у Марса и общей длительности экспедиции. Для начала экспедиции был выбран 2035 год.

Как уже отмечалось ранее, такая постановка соответствует задачам доставки грунта с поверхности Марса или его спутников, а также пилотируемой экспедиции. При этом, все необходимые затраты топлива для проведения операций по выходу на ареоцентрическую орбиту и посадку, равно как и изменение в «сухой» массе КА за счёт отброса ступеней или посадочного модуля учитываются в величине изменения массы в промежуточных условиях. В приведенных ниже расчётах эта переменная является заранее задаваемым параметром и её величина не зависит от других условий.

На рисунке 3.2.1 приведена зависимость минимального начального реактивного ускорения от скорости истечения для замкнутого перелёта Земля – Марс – Земля при времени пребывания у Марса - 400 суток и общей длительности экспедиции 1000 суток. Для задачи с переменной мощностью на траектории (СЭРДУ) коэффициент n был принят равным 2, деградация солнечных батарей не учитывалась.

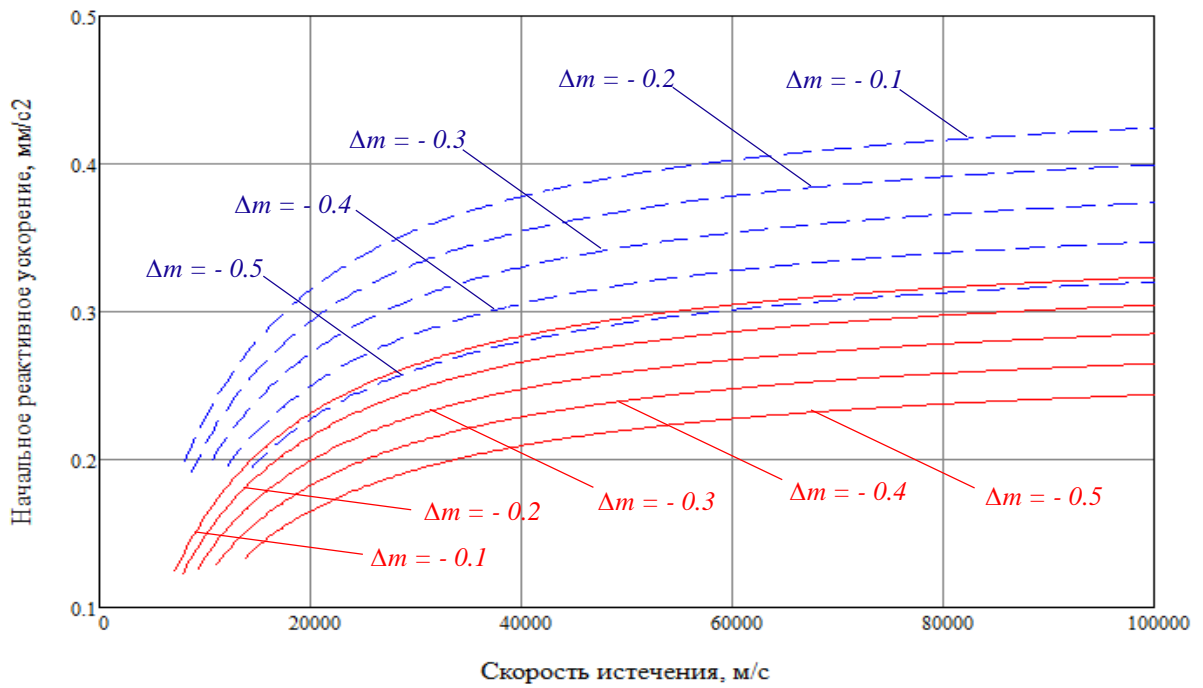


Рисунок 3.2.1 – Перелет Земля – Марс – Земля, зависимость минимального начального реактивного ускорения от скорости истечения для ЯЭРДУ (сплошные линии) и СЭРДУ (пунктирные линии).

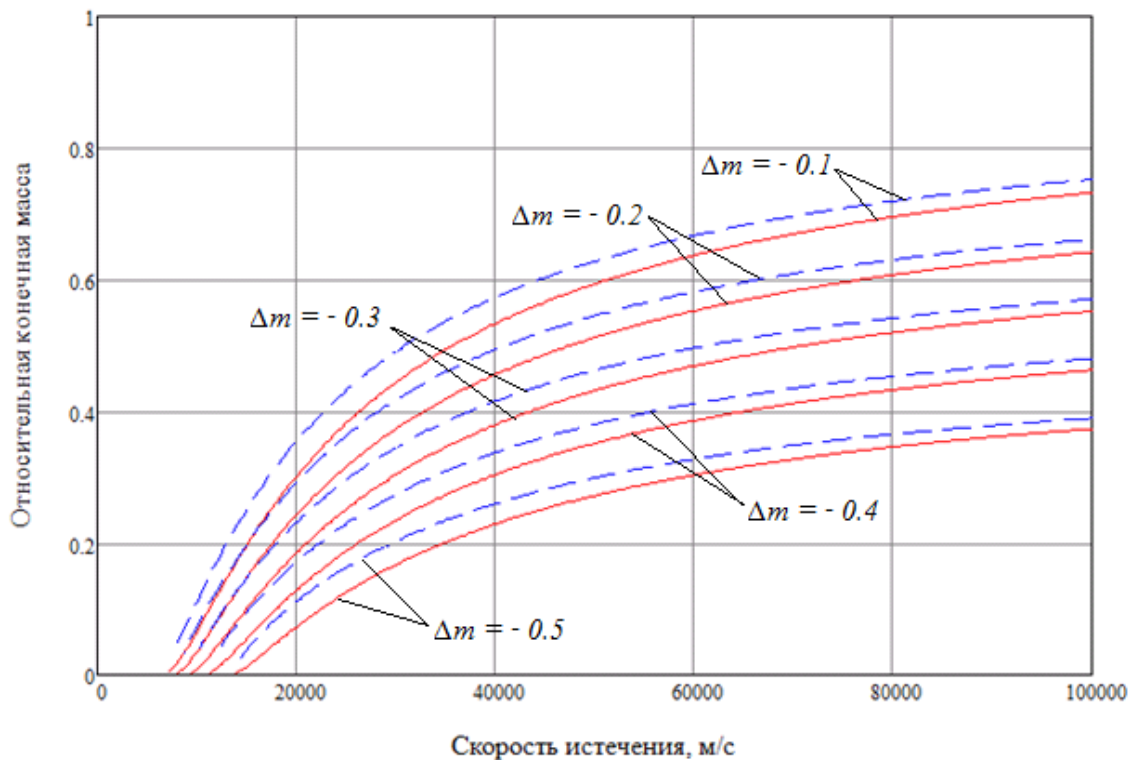


Рисунок 3.2.2 – Перелет Земля – Марс – Земля, зависимость относительной конечной массы от скорости истечения для ЯЭРДУ (сплошные линии) и СЭРДУ (пунктирные линии).

Конечная масса КА в момент подлёта к Земле не ограничивалась и в представленных результатах доходит до ~ 0.001 начальной массы КА. Сплошные линии на рисунке 3.2.1 соответствуют случаю постоянной мощности (ЯЭРДУ), а прерывистые – переменной

(СЭРДУ). Они приведены в зависимости от величины изменения массы КА у Марса, которая принималась равной $-0.1, -0.2, -0.3, -0.4, -0.5$ от начальной. Как и ранее с прямыми перелётами область существования для каждой из этих задач находится над соответствующей линией. Для каждого значения скорости истечения выполняется условие оптимальности по дате старта.

На рисунке 3.2.2 приведена зависимость относительной конечной массы КА от скорости истечения для задачи на минимум тяги (или соответствующей ей задачи оптимального быстрогодействия). Оба этих графика имеют схожий вид со случаем прямого перелёта, рассмотренным ранее.

Далее на рисунке 3.2.3 приведены графики зависимости относительной массы полезной нагрузки при удельной массе ЭДУ равной 40 кг/кВт и топливного отсека -0.13 , КПД ДУ -0.75 и постоянной массе КА 5% от начальной (1.17). Как и ранее были взяты достаточно консервативные параметры КА и ЭДУ.

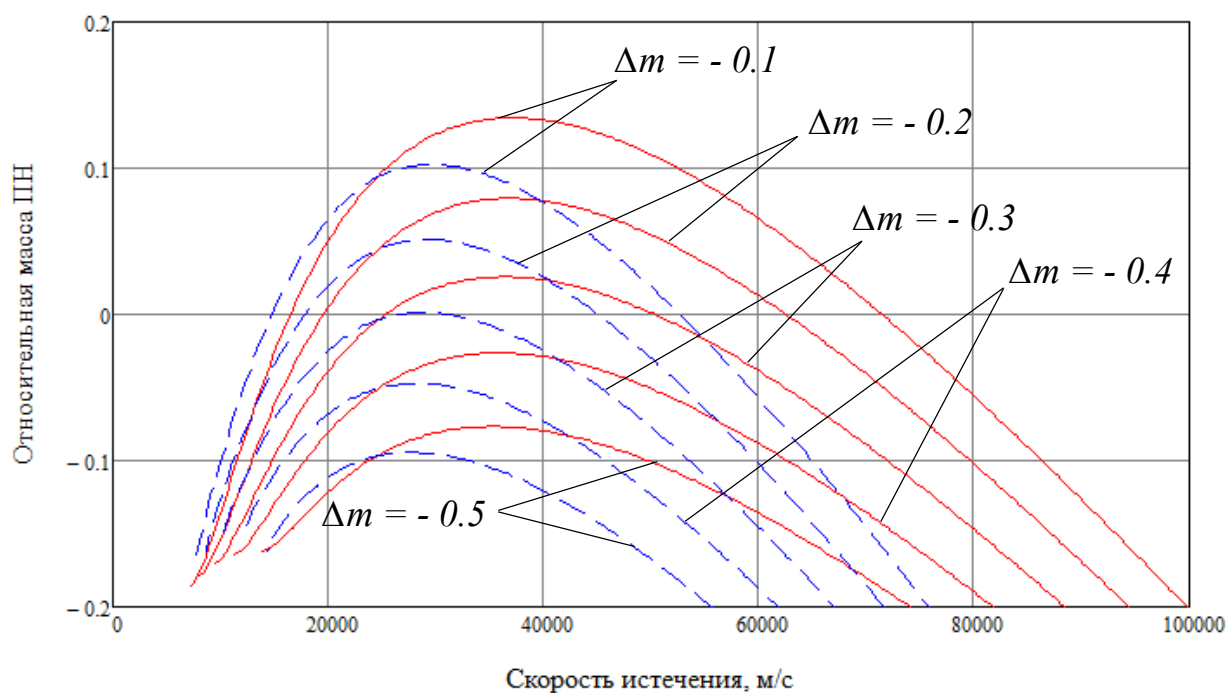


Рисунок 3.2.3 – Перелет Земля – Марс – Земля, зависимость относительной массы ПН от скорости истечения для ЯЭРДУ (сплошные линии) и СЭРДУ (пунктирные линии).

Как видно при таких характеристиках модели КА положительную массу ПН имеют только варианты с изменением массы у Марса не более чем на -0.3 от начальной. И несмотря на то, что относительная конечная масса КА в случае с СЭРДУ всегда больше чем у ЯЭРДУ в связи с большим начальным реактивным ускорением, по этой же причине относительная масса ПН у СЭРДУ всегда меньше.

В таблицах 3.2.1 и 3.2.2 приведены значения масс КА на разных этапах полёта для ОМ-задачи и задачи на минимум тяги. Массы в случае ОМ-задачи вычислялись для уровней мощности, взятых из задачи на минимум тяги, однако, они могут быть пересчитаны для любого её значения, так как приведены значения необходимых для этого интегралов (1.21). Также в таблице 3.2.2 приведены значения минимальной тяги и скорости истечения для максимальных значений ПН. В таблицах J_{01} и J_{1k} обозначают значения функционалов ОМ-задачи для прямой и обратной траекторий соответственно, φ_{01} и φ_{1k} – угловые дальности перелётов.

Таблица 3.2.1 ОМ-задача Земля – Марс – Земля.

	ЯЭРДУ			СЭРДУ	
t_0 , JED	2464484.754			2464485.587	
$t_1^- - t_0$, сутки	282.403			287.913	
$t_k - t_1^+$, сутки	317.597			312.087	
φ_{01} , рад.	3.4756			3.5152	
φ_{1k} , рад.	4.1046			4.0528	
J_{01} , м ² /с ³	1.11243			1.48962	
J_{1k} , м ² /с ³	1.15220			1.59328	
$\Delta m/m_0$	- 0.1	- 0.2	- 0.3	- 0.4	- 0.5
ЯЭРДУ					
$m(t_1^-)/m_0$	0.8235	0.8109	0.7980	0.7813	0.7616
$m(t_1^+)/m_0$	0.7235	0.6109	0.4980	0.3813	0.2616
$m(t_k)/m_0$	0.6234	0.5323	0.4405	0.3433	0.2412
$m_{ПН}$	0.2606	0.1931	0.1224	0.048	-0.032
СЭРДУ					
$m(t_1^-)/m_0$	0.7797	0.7658	0.7477	0.7268	0.7057
$m(t_1^+)/m_0$	0.6797	0.5658	0.4477	0.3268	0.2057
$m(t_k)/m_0$	0.5638	0.4775	0.3854	0.2889	0.1884
$m_{ПН}$	0.189	0.1258	0.0591	-0.0129	-0.0926

Таблица 3.2.2 Задача на минимум тяги Земля – Марс - Земля

$\Delta m/m_0$	- 0.1	- 0.2	- 0.3	- 0.4	- 0.5
ЯЭРДУ					
c , сек	3796.492	3735.748	3705.376	3644.632	3583.888
T_0/m_0 , мм/с ²	0.278859	0.260377	0.241891	0.222353	0.202275
N_{j0}/m_0 , Вт/кг	5.1911	4.7695	4.3948	3.9736	3.5546
$m(t_1^-)/m_0$	0.811	0.814	0.819	0.823	0.826
$m(t_1^+)/m_0$	0.711	0.614	0.519	0.423	0.326
$m(t_k)/m_0$	0.512	0.432	0.355	0.277	0.202
$m_{ПН}$	0.134	0.079	0.026	-0.026	-0.077
t_0 , JED	2464458.66	2464453.443	2464447.449	2464440.011	2464430.504
$t_1^- - t_0$, сутки	292.7715	302.6866	314.4711	329.6187	350.0963
$t_k - t_1^+$, сутки	307.2285	297.3134	285.5289	270.3813	249.9037
φ_{01} , рад.	3.7786	3.9074	4.0585	4.2504	4.5046
φ_{1k} , рад.	3.8070	3.6666	3.5007	3.2885	3.0040
СЭРДУ					
c , сек	3037.193	3006.821	2946.078	2885.334	2854.962
T_0/m_0 , мм/с ²	0.353943	0.33041	0.30552	0.28011	0.255122
N_{j0}/m_0 , Вт/кг	5.2710	4.8714	4.4134	3.9629	3.5714
$m(t_1^-)/m_0$	0.789	0.795	0.799	0.803	0.809
$m(t_1^+)/m_0$	0.689	0.595	0.499	0.403	0.309
$m(t_k)/m_0$	0.487	0.411	0.334	0.258	0.187
$m_{ПН}$	0.102	0.051	0.0012	-0.047	-0.095
t_0 , JED	2464466.699	2464461.972	2464456.246	2464449.229	2464440.296
$t_1^- - t_0$, сутки	311.9565	322.9717	336.1952	352.3647	372.7765
$t_k - t_1^+$, сутки	288.0435	277.0283	263.8048	247.6353	227.2235
φ_{01} , рад.	3.8748	4.0066	4.1648	4.3580	4.6021
φ_{1k} , рад.	3.6664	3.5162	3.3346	3.1114	2.8277

Всем решениям задачам на минимум тяги для случаев ЯЭРДУ и СЭРДУ, приведённым в таблице 3.2.2 и на рисунках 3.2.1 – 3.2.3 соответствует по одному решению динамической части ОМ-задачи, из таблицы 3.2.1.

Необходимо отдельно отметить, что приведённые в таблицах 3.2.1 и 3.2.2 относительные значения масс КА ограничивают все их возможные значения для данной задачи с данной мощностью, так как массы из решения на минимум тяги являются минимальными для КА с ЭДУ, а массы из решения с ИР-двигателем – максимальными.

На рисунке 3.2.3 видно, что максимумы относительной массы ПН для СЭРДУ смещены влево относительно максимумов ЯЭРДУ, в область меньших скоростей истечения и начальных реактивных ускорений (меньших тяг), а также из приведённой таблицы 3.2.1 видно, что величины мощности, соответствующие максимумам ПН для ЯЭРДУ и СЭРДУ оказываются близки – это, по-видимому, и объясняет расположение максимумов на графике.

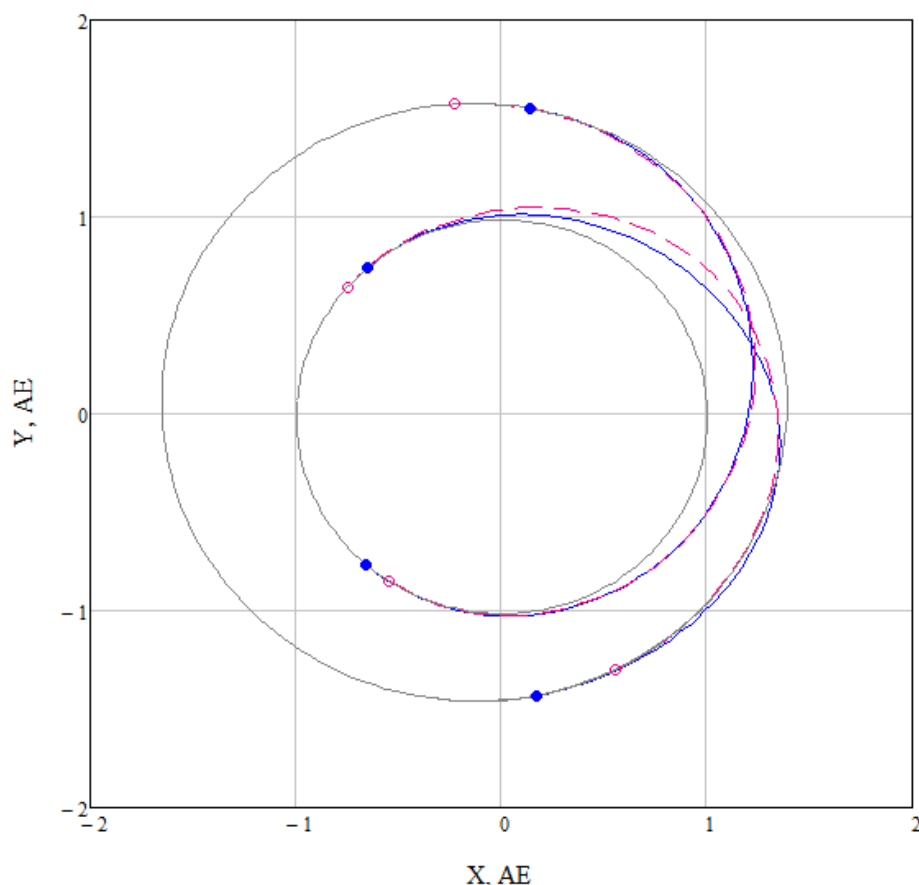


Рисунок 3.2.3 – Проекция траектории перелета Земля – Марс – Земля на плоскость эклиптики, ЯЭРДУ (сплошные линии) и СЭРДУ (пунктирные линии).

Для вариантов из области максимальных значений ПН на рисунке 3.2.3 показаны проекции траекторий с минимальной тягой на плоскость эклиптики и отмечены точки

подлёта КА к Земле и Марсу и отлёта от них. Сплошная линия соответствует варианту задачи с постоянной мощностью (ЯЭРДУ) и удельному импульсу 3700 с, а прерывистая – СЭРДУ и удельному импульсу 2900 с. Обе траектории соответствуют случаю с уменьшением массы КА у Марса на 0.1 от начальной.

Таким образом для данного замкнутого перелёта к Марсу были оценены минимальная тяга и реактивная мощность (определена область существования), оптимальная величина скорости истечения, а также минимальная и максимальная конечная масса КА, в зависимости от изменения массы у Марса.

Далее рассматриваются перелёты с минимальной тягой и идеально-регулируемым двигателем (ОМ-задача) к малым телам Солнечной системы (астероидам) для получения соответствующих оценок по массам и параметрам КА.

Важность таких миссий отмечается во множестве работ (например, [1, 21, 54, 55]), и в первую очередь связана с фундаментальными вопросами понимания развития Солнечной системы и распределения в ней химических элементов, формирования и эволюции Земли. Ответить на них может помочь подробное изучение вещества, доставленного из различных областей Солнечной системы. При этом наибольший интерес с точки зрения её эволюции представляет именно вещество малых тел, так как оно, вероятно, не подвергалось воздействию геологических процессов и до сих пор находится в состоянии близком к первоначальному.

На сегодняшний день уже был реализован ряд проектов по изучению малых тел, однако, эти задачи всё ещё остаются недостаточно изученными, и предложенная в данной работе методика оценки области существования может оказаться полезной при анализе будущих миссий.

В качестве примера рассматриваются замкнутые перелёты к астероидам из главного пояса: (4) Веста (внутренний), (3) Юнона (средний), (10) Гигея (внешний). Кеплеровские элементы орбит этих астероидов были получены из каталога малых планет MPCORB [74], и на момент января 2015 года составляли значения, приведенные в таблице 3.2.3.

Для каждого из астероидов проводился поиск оптимальных дат отлёта от Земли на интервале времени с 2018 по 2030. Этот промежуток делился на равные участки по 50 или 25 суток и каждый узел полученного разбиения использовался в качестве начального приближения для поиска оптимальной даты старта. Время нахождения у астероида было зафиксировано для всех вариантов 300 сутками, длительность всей экспедиции также было задано для всех случаев одинаковым – 1300 суток, удельный импульс равен 3100 с,

гиперболический избыток равен нулю, мощность ЭРД постоянна на траектории (ЯЭРДУ), изменение массы у астероида не происходит.

Таблица 3.2.3. Элементы орбит астероидов на JD 2456658.0

	Большая полуось (АЕ)	Эксцентриситет	Наклонение (град.)	Аргумент перигелия (град.)	Долгота восходящего узла, (град.)	Средняя аномалия, (град.)
(4) Веста	2.3624458	0.0882571	7.13991	150.94009	103.85019	218.17155
(3) Юнона	2.6707341	0.2553054	12.97937	248.30984	141.59723	257.63928
(10) Гигея	3.1370348	0.1161087	3.84190	312.75812	283.41815	121.95663

В результате этого поиска было найдено 7 решений для замкнутого перелёта Земля – Веста – Земля, 7 решений для перелёта Земля – Юнона – Земля и 9 решений для перелёта Земля – Гигея – Земля для ОМ-задачи и задачи на минимум тяги. Все они удовлетворяют условиям стационарности (оптимальности) (3.7), (3.8), (3.13), (3.15).

Решения приведены в таблицах 3.2.4 – 3.2.9, полужирным шрифтом выделены решения с максимальной конечной массой, при этом лучшие решения для ОМ-задачи и задачи на минимум тяги оказываются близки по дате старта, то есть относятся к одному семейству решений. Массы для решения ОМ-задачи рассчитаны для уровней мощности, полученных из задач на минимум тяги.

Для лучших решений задачи на минимум тяги построены траектории перелёта – рисунки 3.2.4, 3.2.5, 3.2.6.

Таблица 3.2.4. ОМ-задача Земля – Веста – Земля

t_0 , JED	J_{01} , м ² /с ³	J_{1k} , м ² /с ³	N_{j0}/m_0 , Вт/кг	$m(t_k)/m_0$	$t_1^- - t_0$, сутки	$t_k - t_1^+$, сутки	φ_{01} , рад.	φ_{1k} , рад.
2459551.728	2.1202	2.4348	3.87440	0.4596	464.815	535.185	4.2212	4.1952
2460061.160	2.2711	2.1988	3.92938	0.4678	537.843	462.157	4.2344	4.1824
2460561.642	2.9677	2.9686	4.22500	0.4158	491.090	508.910	4.0978	4.0985
2461066.266	2.0790	2.0846	3.77951	0.4758	474.169	525.831	4.2274	4.2900
2461575.384	2.5560	2.3392	4.11308	0.4566	533.269	466.731	4.1140	4.1537
2462071.344	2.5213	2.8062	4.04747	0.4317	476.392	523.608	4.2138	4.1031
2462579.596	2.2434	2.1431	3.83695	0.4666	515.568	484.432	4.2674	4.2407

Таблица 3.2.5. ОТ-задача Земля – Веста – Земля

t_0 , JED	T_0/m_0 , мм/с ²	N_{j0}/m_0 , Вт/кг	$m(t_k)/m_0$	$t_1^- - t_0$, сутки	$t_k - t_1^+$, сутки	φ_{01} , рад.	φ_{1k} , рад.
2459509.8187	0.2549	3.8744	0.2756	552.3295	447.6705	5.1916	3.3080
2460008.6825	0.2585	3.9294	0.2653	610.4066	389.5934	5.2213	3.1752
2460510.8795	0.2780	4.2250	0.2100	582.7488	417.2512	5.1813	3.0054
2461020.2665	0.2486	3.7795	0.2933	567.8342	432.1658	5.2582	3.3338
2461516.7355	0.2706	4.1131	0.2310	585.7775	414.2225	5.0736	3.1515
2462030.3186	0.2663	4.0475	0.2432	582.1389	417.8611	5.2789	3.1227
2462530.9154	0.2524	3.8370	0.2826	607.0435	392.9565	5.2959	3.2259

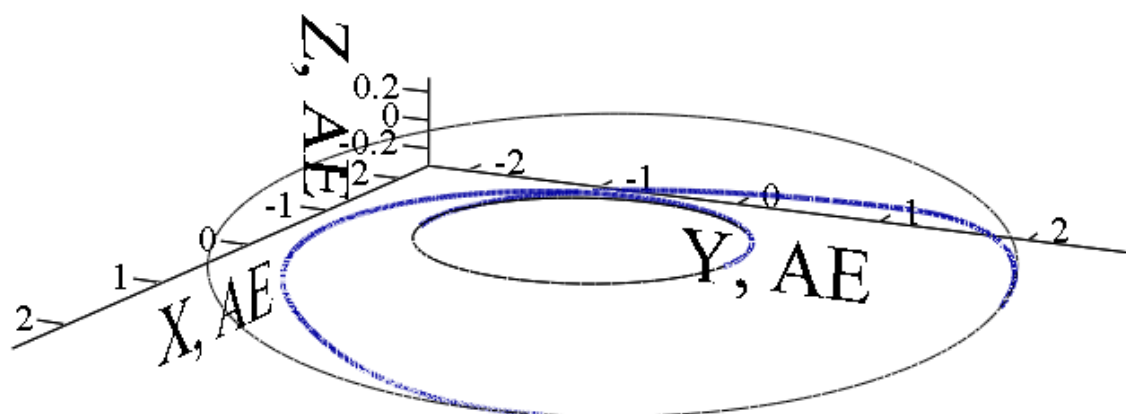


Рисунок 3.2.4 – Траектория перелёта Земля – Веста – Земля.

Таблица 3.2.6. ОМ-задача Земля – Юнона – Земля

t_0 , JED	J_{01} , $\text{м}^2/\text{с}^3$	J_{1k} , $\text{м}^2/\text{с}^3$	N_{j0}/m_0 , Вт/кг	$m(t_k)/m_0$	$t_1^- - t_0$, сутки	$t_k - t_1^+$, сутки	φ_{01} , рад.	φ_{1k} , рад.
2459115.070	4.5355	3.3407	4.1472	0.3449	604.980	395.020	4.7075	4.1657
2459610.300	4.2339	4.2480	4.4018	0.3417	515.954	484.046	3.9257	3.8997
2460089.924	3.7418	4.2243	4.1451	0.3423	404.723	595.277	4.2604	4.3631
2461034.951	4.3910	4.0845	4.3660	0.3400	561.261	438.739	3.9884	4.1083
2461500.634	3.5560	3.8360	4.1085	0.3572	422.327	577.673	4.0910	4.0228
2461935.705	5.2228	5.8250	4.4561	0.2874	498.279	501.721	5.2053	3.8205
2462446.089	4.3726	3.3432	4.1669	0.3507	593.879	406.121	4.3328	4.2571

Таблица 3.2.7. ОТ-задача Земля – Юнона – Земля

t_0 , JED	T_0/m_0 , $\text{мм}/\text{с}^2$	N_{j0}/m_0 , Вт/кг	$m(t_k)/m_0$	$t_1^- - t_0$, сутки	$t_k - t_1^+$, сутки	φ_{01} , рад.	φ_{1k} , рад.
2459060.205	0.27284	4.1472	0.2246	703.2152	296.7848	5.7552	3.0254
2459554.596	0.28958	4.4018	0.1770	605.9589	394.0411	5.1088	2.7776
2460034.332	0.27270	4.1451	0.2250	520.7639	479.2361	5.5036	3.2169
2460977.087	0.28723	4.3660	0.1837	652.9145	347.0855	5.1585	2.9187
2461455.034	0.27029	4.1085	0.2318	513.1313	486.8687	5.1912	3.0793
2461891.392	0.29316	4.4561	0.1668	623.2888	376.7112	6.1640	2.8328
2462392.183	0.27413	4.1669	0.2209	690.3131	309.6869	5.4079	3.0937

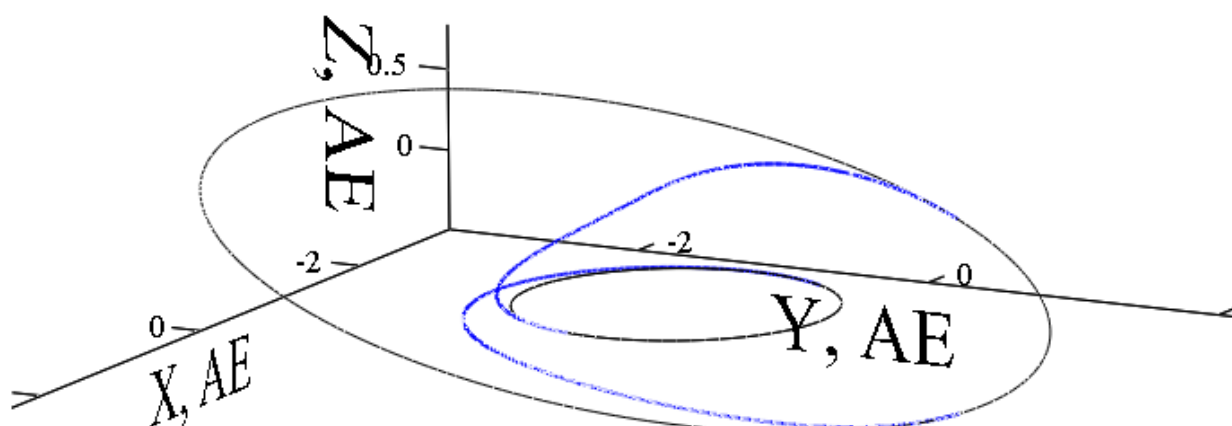


Рисунок 3.2.5 – Траектория перелёта Земля – Юнона – Земля.

Таблица 3.2.8. ОМ-задача Земля – Гигея – Земля

t_0, JED	$J_{01}, \text{м}^2/\text{с}^3$	$J_{1k}, \text{м}^2/\text{с}^3$	$N_{j0}/m_0, \text{Вт/кг}$	$m(t_k)/m_0$	$t_1^- - t_0, \text{сутки}$	$t_k - t_1^+, \text{сутки}$	$\varphi_{01}, \text{рад.}$	$\varphi_{1k}, \text{рад.}$
2458489.414	8.2481	7.2805	4.800275	0.23613	553.689	446.311	5.5020	3.5173
2459004.571	6.0119	5.3057	4.527965	0.28576	529.086	470.914	4.2120	4.5512
2459445.799	4.9200	5.0154	4.437628	0.30875	493.635	506.365	4.3590	4.3307
2459880.619	4.5863	9.2607	4.599800	0.24935	460.068	539.932	4.5978	4.4925
2460274.102	8.2970	7.3584	4.834702	0.23595	531.795	468.205	5.5787	3.4666
2460727.077	7.4729	6.4186	4.691438	0.25246	564.789	435.211	5.2361	3.6641
2461221.947	5.3328	4.8307	4.454409	0.30472	525.443	474.557	4.3766	4.2998
2461678.162	4.9124	5.5263	4.471375	0.29989	469.632	530.368	4.3684	4.4123
2462071.782	6.8996	7.2163	4.738632	0.25133	503.015	496.985	5.3549	3.6758

Таблица 3.2.9. ОТ-задача Земля – Гигея – Земля

t_0, JED	$T_0/m_0, \text{мм/с}^2$	$T_0c_0/2m_0, \text{Вт/кг}$	$m(t_k)/m_0$	$t_1^- - t_0, \text{сутки}$	$t_k - t_1^+, \text{сутки}$	$\varphi_{01}, \text{рад.}$	$\varphi_{1k}, \text{рад.}$
2458434.735	0.315801	4.800275	0.10248	674.167	325.833	6.6334	2.4270
2458909.071	0.297886	4.527965	0.15339	661.414	338.586	5.9563	2.7431
2459375.657	0.291943	4.437628	0.17028	601.425	398.575	5.6762	2.9546
2459801.936	0.302612	4.599800	0.13996	594.275	405.725	6.2219	2.7250
2460217.591	0.318066	4.834702	0.09604	655.777	344.223	6.7286	2.3878
2460671.14	0.308641	4.691438	0.12283	676.389	323.611	6.3735	2.5502
2461149.812	0.293047	4.454409	0.16715	636.097	363.903	5.7232	2.8706
2461599.527	0.294163	4.471375	0.16397	584.967	415.033	5.8341	2.9258
2462012.929	0.311746	4.738632	0.11400	621.983	378.017	6.5389	2.5206

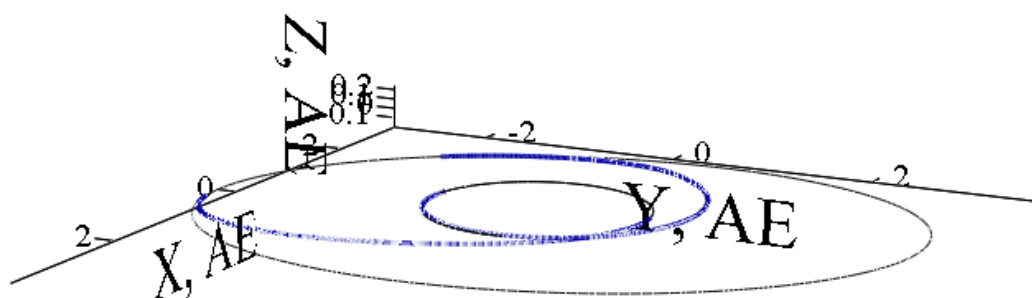


Рисунок 3.2.6 – Траектория перелёта Земля – Гигея – Земля.

Заключение

Таким образом, в диссертационной работе рассмотрена проблема анализа области существования решений межпланетных перелётов КА с малой (ограниченной) тягой ЭРДУ в пространстве основных параметров двигательной установки и предложен подход к построению оптимальных траекторий КА с малой (ограниченной) тягой.

Основные результаты работы состоят в следующем:

- сформулирована и решена задача о минимуме реактивной тяги с ограничением на конечную массу КА в постановках с постоянной (ЯЭРДУ) и переменной (СЭРДУ) мощностью ДУ, получены необходимые условия оптимальности в виде принципа максимума Понтрягина;
- разработан метод построения границы области существования в пространстве основных параметров ЭРДУ прямых и сложных межпланетных перелётов КА с малой (ограниченной) на основе задачи о минимальной тяге и метода продолжения по параметру;
- реализованы методы построения границы области существования в рассмотренных формулировках (решения задачи на минимум тяги) и перехода с этой границы во внутреннюю часть области существования (решение задачи с ограниченной тягой со сглаженным управлением) в виде программно-математического обеспечения написанного на языке программирования C/C++;
- получен ряд качественных результатов для задач прямых перелётов к планетам Солнечной системы (Меркурию, Венере, Марсу);
- получены решения с минимальной тягой и оптимальной датой старта для замкнутых перелётов к Марсу и астероидам главного пояса.

Список использованных источников

1. Ахметшин Р.З., Ефимов Г.Б., Энеев Т.М. Траектории экспедиций космических аппаратов с двигателем малой тяги по доставке образцов грунта с астероидов Главного пояса и Фобоса. Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2008. № 40. 23 с. Электронный ресурс: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2008-40>.
2. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969, 408 с.
3. Брайсон А., Хо Ю Ши. Прикладная теория оптимального управления. Оптимизация, оценка и управление. М.: Мир, 1972, 544 с.
4. Бэттин Р. Наведение в космосе. М.: Машиностроение, 1966, 449 с.
5. Вапнярский И. Б. Теорема существования оптимального управления в задаче Больца, некоторые ее применения и необходимые условия оптимальности скользящих и особых режимов, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, том 7, № 2, с. 259–283.
6. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы оптимального управления, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат., том 6, 1976, с. 133–259.
7. Гавурин М.К. Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итеративных методов. Известия вузов. Математика. 1958, № 5, с. 18-31.
8. Галеев Э.М., Зеликин М.И., Конягин С.В., Магарил-Ильяев Г.Г., Осмоловский Н.П., Протасов В.Ю., Тихомиров В.М., Фурсиков А.В. Оптимальное управление. М.: МЦНМО, 2008, 320.
9. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Физматлит, 2004, 560 с.
10. Григорьев И.С., Григорьев К.Г. Об использовании решений задач оптимизации траекторий КА импульсной постановки при решении задач оптимального управления траекториями КА с реактивным двигателем ограниченной тяги I. Космические исследования. 2007. Т. 45, № 4, с. 358-366.
11. Григорьев И.С., Григорьев К.Г. Об использовании решений задач оптимизации траекторий КА импульсной постановки при решении задач оптимального управления траекториями КА с реактивным двигателем ограниченной тяги II. Космические исследования. 2007. Т. 45, № 6, с. 553-563.
12. Григорьев И.С., Григорьев К.Г. Об условиях принципа максимума в задачах оптимального управления совокупностью динамических систем и их применении к решению задач оптимального управления движением космических аппаратов. Космич. исслед., 2003, том 41, № 3, с. 307-331.

13. Григорьев И.С., Григорьев К.Г., Петрикова Ю.Д. О наискорейших маневрах космического аппарата с реактивным двигателем большой ограниченной тяги в гравитационном поле в вакууме. Космич. исслед., 2000, том 38, № 2, с. 171-192.
14. Григорьев И.С., Заплетин М.П. Проблема построения экстремалей Понтрягина в задачах оптимизации перелетов космического аппарата к астероидам. Автоматика и телемеханика, 2009, № 9, с 69-84.
15. Григорьев К.Г. О маневрах космического аппарата при минимальных затратах массы и ограниченном времени. Космич. исслед. 1994, том 32, № 2, с. 45–60.
16. Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полёта с малой тягой. М.: Наука, 1969, 680 с.
17. Давиденко Д.Ф. Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений. ДАН СССР. 1953, т. 88, № 4, с. 601-602.
18. Дмитрук А.В. Курс лекций: Математическая теория оптимального управления. Существование решения в задачах на экстремум. 2014, 10 с. Электронный ресурс: <http://dmvn.mexmat.net/varcalculus.php>.
19. Дмитрук А.В., Каганович А.М. Принцип максимума для задач оптимального управления с промежуточными ограничениями. Нелинейная динамика и управление (Ред. С. В. Емельянов, С. К. Коровин), М: Физматлит, вып. 6, 2008, с. 101-136.
20. Захаров Ю.А. Проектирование межорбитальных космических аппаратов. Выбор траекторий и проектных параметров. М.: Машиностроение, 1984, 176 с.
21. Зелёный Л.М., Захаров А.В., Ксанфомалити Л.В. Исследования Солнечной системы, состояние и перспективы. Успехи физических наук, 2009, Т. 179, № 10, с. 1118-1140.
22. Злацкий В. Т., Кифоренко Б. Н. Оптимальные траектории с сингулярными дугами. Автомат. и телемех, 1974, № 12, с. 12–18.
23. Злацкий В.Т. Исследование вырожденных вариационных задач механики полета. дис.... канд. физ.-мат. наук: 01.02.01 / Злацкий Виктор Трофимович. Киев, 1982, 177 с.
24. Иванюхин А.В. Определение минимально допустимых значений энергетических характеристик электроракетной двигательной установки для межпланетных перелетов. Известия РАН. Энергетика, 2015, № 2, 91-100.
25. Иванюхин А.В. Оптимизация траектории космического аппарата с идеально регулируемым двигателем в переменных Кустаанхеймо-Штифеля. Электронный журнал «Труды МАИ», 2014, № 75. Электронный ресурс: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=49691>.
26. Иванюхин А.В. Программа для оценки области существования решений задачи межпланетных перелётов космического аппарата с нерегулируемым двигателем малой

- тяги. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2014661597. Правообладатель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (RU). Заявка № 2014619347, дата поступления 17 сентября 2014 г. Зарегистрировано в реестре программ для ЭВМ 31 октября 2014 г.
27. Иванюхин А.В., Петухов В.Г. Задача минимизации тяги и ее приложения. Космические исследования, 2015, т. 53, № 4, с. 320-331.
 28. Иванюхин А.В., Петухов В.Г. Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с солнечной электроракетной двигательной установкой минимальной мощности. Вестник НПО им. С.А. Лавочкина, 2015, № 2, с. 64-71.
 29. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974, 480 с.
 30. Константинов М.С. Методы математического программирования в проектировании летательных аппаратов. М., Машиностроение, 1975, 164 с.
 31. Константинов М.С., Мин Тейн. Оптимизация прямых полётов к юпитеру с ядерной электроракетной двигательной установкой. Вестник МАИ: 2013. – т.20, № 5, с.22-33.
 32. Константинов М.С., Мин Тейн. Оптимизация траектории выведения космического аппарата на рабочую гелиоцентрическую орбиту. Электронный журнал «Труды МАИ», № 67, 2013г.
 33. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969, 455 с.
 34. Лебедев В.Н. Расчет движения космического аппарата с малой тягой. М., Изд.-во ВЦ АН СССР, 1968, 108 с.
 35. Лейтман Дж. Введение в теорию оптимального управления. М.: Наука, 1968, 192 с.
 36. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972, 576 с.
 37. Лоуден Д.Ф. Оптимальные траектории для космической навигации. М.: Мир, 1966, 152 с.
 38. Малышев В.В., Тычинский Ю.Д. Построение множеств достижимости и оптимизация маневров искусственного спутника Земли с двигателями малой тяги в сильном гравитационном поле. Известия РАН. Теория и системы управления. 2005, № 4, с. 124-132.
 39. На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. М.: Мир, 1982, 296 с.
 40. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975, 560 с.

41. Петухов В.Г. Метод продолжения для оптимизации межпланетных траекторий с малой тягой. Космические исследования. 2012. Т. 50, № 3, с. 258-270.
42. Петухов В.Г. Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с идеально-регулируемым двигателем методом продолжения. Космические исследования. 2008. Т. 46, № 3, с. 224-237.
43. Петухов В.Г. Оптимизация многовитковых перелетов между некомпланарными эллиптическими орбитами. Космические исследования. 2004. Т. 42, № 3, с. 260-279.
44. Петухов В.Г. Оптимизация траекторий космических аппаратов с электроракетными двигательными установками методом продолжения. дис.... д-ра тех. наук: 05.07.09 / Петухов Вячеслав Георгиевич. М., 2013, 218 с.
45. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969, 384 с.
46. Салмин В.В. Оптимизация космических перелетов с малой тягой. М.: Машиностроение, 1987, 208 с.
47. Суханов А.А. Астродинамика. М.: ИКИ РАН, 2010, 205 с.
48. Филиппов А.Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. Вестник МГУ, сер. матем., мех., астрон., физ., хим., 1959, №2, с. 25–32.
49. Хайрер Э., Нёрсетт С, Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990, 512 с.
50. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970, 720.
51. Холодниок М., Клич А., Кубичек М. и др. Методы анализа нелинейных динамических моделей. М.: Мир, 1991, 366 с.
52. Черноушко Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988, 320 с.
53. Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация. М.: Эдиториал УРСС, 1999, 224 с.
54. Шевченко В.Г., Мохамед Р.А. Исследования астероидов с помощью космических аппаратов. Астрономический вестник, 2005, Т. 39, № 1, с. 1-10.
55. Энеев Т.М. Актуальные задачи исследования дальнего космоса. Космические исследования. 2005. Т. 43, № 6, с. 403-407.
56. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974, 488 с.
57. Allgower E.L., Georg K. Introduction to numerical continuation methods. 1990, Colorado State University, 397 p.

58. Caillau J.B., Gergaud J., Noailles J. 3D geosynchronous transfer of a satellite: continuation on the thrust. *Journal of optimization theory and applications*, 2003, vol. 118, № 3, pp. 541–565.
59. Cesari L. *Optimization – theory and applications. Applications of Mathematics* vol. 17, 1983, 542 p.
60. Dmitruk A., Samylovskiy I. A simple trolley-like model in the presence of a nonlinear friction and a bounded fuel expenditure. *Discussiones Mathematicae: Differential Inclusions, Control & Op.* 2013, vol. 336 issue 2, pp. 135-147.
61. Eneev T.M., Egorov V.A., Efimof G.B., Konstantinov M.S., Petukhov V.G., Akhmetshin R.Z., Fedotov G.G. *Some Methodical Problems of Low-Thrust Trajectory Optimization.* Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russia Academy of Sciences, preprint 110, 1996, pp. 1-24.
62. Gergaud J., Haberkorn T. Homotopy method for minimum consumption orbit transfer problem. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, Vol. 12, Issue 02, 2006, pp 294-310.
63. Irving J.H. Low thrust flight: variable exhaust velocity in gravitational fields. *Space Techn.* 1959. V. 10, № 4. p. 10-01–10-54.
64. Lyness J.N. Numerical algorithms based on the theory of complex variables. *Proc. ACM 22nd Nat. Conf.*, Thompson Book Co., Washington, DC, 1967. 1967. p. 124-134.
65. Lyness J.N., Moller C.B. Numerical differentiation of analytic functions. *SIAM J. Numer. Anal.* 1967. 4. p. 202-210.
66. McCarthy D.D., Petit G. (eds.). *IERS Technical Note No. 32. IERS Conventions (2003).* IERS Conventions Centre, Frankfurt am Main 2004, 127 pp.
67. Melbourne W.G., Sauer C.G. Optimum interplanetary rendezvous with power-limited vehicles. *AIAA J.*, 1963, v.1, № 1, p. 54-60.
68. Oberle H. J., Taubert K. Existence and multiple solutions of the minimum-fuel orbit transfer problem. *Journal of optimization theory and applications*: Vol. 95, No. 2, 1997, pp. 243-262.
69. Petukhov V.G. Minimum-thrust problem and its application to trajectory optimization with thrust switchings. *IAC-13-C1.6.2, Beijing.* 2013. 9 pp.
70. Petukhov V.G. One numerical method to calculate optimal power-limited trajectories. *International Electric Propulsion Conference. IEPC-95-221*, Russia, Moscow, 1995, 8 pp.
71. Rayman M.D., Williams S.N. Design of the first interplanetary solar electric propulsion mission. *Journal of spacecraft and rockets* 2002, Vol. 39, No. 4, pp. 589-595.
72. Squire W., Trapp G. Using complex variables to estimate derivatives of real functions. *SIAM Rev.* 1998. 40 (1). p. 110-112.

73. Standish E.M. JPL Planetary and Lunar ephemerides, DE405/LE405. Interoffice Memorandum. 1998. v. 312. F-98-048. p. 1-18.
74. The International Astronomical Union Minor Planet Center. Электронный ресурс:
<http://www.minorplanetcenter.net/about>.