

ФГОУ ВО «Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет)» (МАИ)

*На правах рукописи*

Тое Вэй Тун

**Модели и алгоритмы определения приоритетного  
направления движения воздушного судна по заданным маршрутам**

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата технических наук

Специальность 05.13.01

Системный анализ, управление и обработка информации  
(авиационная и ракетно-космическая техника )( технические науки)

Соискатель:  
Тое Вэй Тун

Научный руководитель:  
доктор технических наук,  
профессор А.В. Зайцев

Москва, 2016

## Содержание

Введение.....	4
Глава 1. Анализ моделей приоритетного распределения воздушных судов по заданным маршрутам.....	12
1.1. Метод ветвей и границ.....	12
1.1.1. Существующие методы построения маршрута.....	12
1.1.2. Анализ методов параметрической оптимизации.....	16
1.1.3. Линейное программирование.....	22
1.1.4. Метод ветвей и границ в задаче построения маршрута.....	35
1.2. Алгоритм построения разомкнутого маршрута.....	40
1.2.1. Разработка алгоритма логического управления маршрутным полетом.....	40
1.2.2. Алгоритм работы системы планирования маршрута.....	42
1.2.3. Моделирование и описание программы.....	46
Выводы по первой главе.....	48
Глава 2. Разработка алгоритма прогноза управляющих воздействий.....	50
2.1. Математическая формализация задачи прогноза управления на участок программного управления.....	50
2.2. Исследование влияния порядка экстраполяторов на устойчивость системы стабилизации .....	51
2.3. Обоснование и выбор метода прогноза.....	55
2.4. Разработка алгоритма прогноза управляющих воздействий.....	65
Выводы по второй главе.....	69
Глава 3. Разработка модели приоритетного определения направления движения воздушного судна по заданным маршрутам.....	70
3.1. Разработка модели программного управления.....	70

3.2. Разработка модели приоритетного определения направления движения воздушного судна по заданным маршрутам на основе алгоритма программного управления.....	75
3.3. Методика разработки алгоритма оптимального программного управления с учетом действующих возмущений.....	77
3.4. Математическая модель движения воздушного судна .....	83
3.5. Исследование эффективности разработанных алгоритмов.....	90
Выводы по третьей главе .....	101
Заключение.....	103
Список литературы.....	105
Приложение 1 .....	113
Приложение 2.....	121

## Введение

**Актуальность темы диссертации.** В настоящее время все больше внимания при эксплуатации воздушных судов (ВС) уделяется вопросам безопасности пассажиров и экипажей. В то же время, следует заметить, что на сегодня до 35 % ошибок летного состава провоцируется эргономическими недостатками средств информации и органов управления, состоянием пультов и обзора из кабины, расположением приборов и конечным предоставлением ими показаний, методами обучения. Не менее 2/3 отказов приборов управления на тренажерах моделируется искаженно. Как отмечает профессор Пономаренко В.А., из всех отказов, имитируемых в воздухе, в 95% случаев обрабатываются лишь действия по ликвидации отказа, а не по его распознаванию. Центральное же звено – принятие решения – фактически не отрабатывается.

Отсюда – очень важные и правильные решения, что наиболее сложные и опасные операции, к которым относится посадка воздушного судна, могут проводиться в автоматическом режиме. Среди задач, решаемых с помощью автопилотов воздушных судов, важное место занимают вопросы оптимизации и управления маршрутов движения, особенно, пространственных разворотов. При решении данной задачи крайне важна оперативность получения данных. Существует ряд алгоритмов построения оптимального маршрута, однако большинство из них не учитывают динамику воздушного судна, что значительно ограничивает их применимость для решения целого ряда актуальных задач. В случае использования существующих алгоритмов, рассматривающих неподвижные объекты, полученный оптимальный маршрут может оказаться далек от оптимального при движении хотя бы одного из наблюдаемых объектов. В связи с этим, возникает необходимость разработки алгоритмов, которые учитывают подвижность наблюдаемых объектов при решении задачи поиска

оптимального маршрута их облета, что в свою очередь позволит не только обеспечить безопасность полетов государственной авиации, но и оптимально расходовать имеющиеся ресурсы (время, топливо) и тем самым снизить стоимость полета.

Важной является разработка логической системы управления полетом воздушного судна, ориентированной на планирование маршрута полета через пункты, информация о которых известна заранее или поступает во время полета. Разрабатываемая система реализует программное управление. Важным является тот факт, что применение разработанных алгоритмов позволит бортовому вычислителю осуществлять расчет оптимального, по выбранному критерию, маршрута движения воздушного судна.

**Степень проработанности темы исследования.** Одним из актуальных направлений применения современных информационных технологий в управлении воздушными судами сегодня является автоматизация расчетов процессов движения и прогнозирования областей достижения, в основе которых лежат современные алгоритмы экстраполяции.

Существующее информационное обеспечение программно-технических средств автоматизации достаточно разнообразно. Это обусловлено разнообразием задач, решаемых автоматизированными информационными системами (АИС) в интересах обеспечения функционирования бортовых систем управления ВС. Тем не менее, несмотря на многообразие видов АИС, их информационное обеспечение не позволяет полностью преодолеть такие недостатки бортовых систем управления как, субъективизм, невысокая достоверность принимаемых решений. Следствием этого является не оптимальное управление траекторией движения ВС.

Одним из направлений совершенствования системы управления движением является программное управление, которое строится в ходе полета и прогнозирование его с использованием терминального вектора фазовых координат.

Разработка современных автоматизированных и автоматических систем управления ВС становится одним из приоритетных направлений в обслуживании и в обеспечении безопасности полетов воздушных судов.

Проблемы разработки подобных систем освещены в работах Бетанова В.В., Захарова В.Н., Лебедева Г.Н., Малышева В.В., Могилевского В.Д., Мосолова В.Е., Петрова Б.Н., Поцелуева А.В., Рыбникова С.И., Харитонов В.Н. и др. В целом ряде работ рассматривалась проблема анализа движения и последующего его прогноза, начиная от разработки задания на выполнение полета до оценки качества и результативности деятельности пилота и оператора. Это работы Алексеева В.В., Бомаса В.В., Зайцева А.В., Ловцова Д.А., Хрипунова С.П., и др. Но, в работах этих и других авторов недостаточно уделено внимания решению задач программного управления, реализуемого на основании выбранного критерия качества.

Усложнение методов, видов, форм решения задач в системе управления, учет требований к характеру деятельности экипажа воздушного судна, увеличение рисков и повышение влияния негативных последствий принятия неоптимальных решений по управлению траекторией движения ВС приводит к увеличению объема информации, обрабатываемой в интересах выработки и принятия оптимального управляющего решения. Кроме того, наличие неопределенности в процессах принятия решений делают задачу автоматизации процесса программного управления воздушным судном, особенно по достаточно сложным маршрутам, еще более актуальной.

Необходимость совершенствования информационного обеспечения в сторону усиления автоматизации процессов построения оптимальной траектории движения ВС и, соответственно, создания систем программного управления движением воздушного судна определили выбор темы, цели и задачи диссертационного исследования.

**Объектом исследования** в настоящей работе является процесс определения приоритетного направления движения воздушного судна по заданным маршрутам.

**Предметом исследования** являются модели и алгоритмы программного управления, создаваемые для прогноза и реализации движения воздушного судна по заданным маршрутам.

**Целью диссертационной работы** является обеспечение требуемого качества процесса программного управления на интервале движения воздушных судов, что позволит в свою очередь повысить эффективность процесса управления на основе выбранных показателей качества.

**Научная задача**, решаемая в диссертационной работе, заключается в разработке модели и алгоритмов программного управления, оптимальных по обобщенному квадратичному показателю качества, обеспечивающих требуемое качество процесса управления, что служит основой для принятия эффективных управленческих решений, направленных на обеспечение безопасности полетов воздушных судов и разработки инновационной системы управления воздушным движением.

Для достижения поставленной цели и решения научной задачи в работе последовательно решены следующие частные задачи.

1. Проанализированы существующие подходы к планированию маршрута полета.
2. Разработан алгоритм программного управления воздушным судном.
3. Разработана программа, реализующая данный алгоритм.
4. Проведена оценка эффективности применения разработанных моделей и алгоритмов.
5. Предложены методические рекомендации по использованию разработанного инструмента для оценки и прогноза движения воздушного судна.
6. Сформулированы предложения по повышению качества информационного обеспечения лиц, принимающих решение, для оперативного анализа и управления воздушным судном с использованием разработанной модели на основе метода программного управления.

**Научная новизна** результатов исследования состоит в следующем:

1. Проведен обобщенный анализ особенностей движения воздушных судов по заданным маршрутам, выявлена роль системы программного управления воздушным судном по сложным маршрутам.

2. Разработанные алгоритмы прогноза управляющих воздействий и оптимального программного управления практически исключают влияние нечеткости и неопределенности внешних возмущений и человеческого фактора за счет наличия необходимой робастности.

3. Модель приоритетного определения направления движения воздушного судна, отличается использованием терминального вектора фазовых координат, точность которого максимальна в случаях гладких участков полета, для прогнозирования маршрута движения ВС.

4. Информационное и методическое обеспечение программного управления с идентификацией внешних возмущений позволяет повысить эффективность функционирования систем управления траекторией ВС.

**Теоретическая и практическая значимость результатов работы.**

Теоретическая значимость результатов работы состоит в обосновании методики разработки алгоритма оптимального программного управления на основе обобщённого квадратичного показателя качества с учетом действующих возмущений, проведенного на основе совокупности математических моделей обработки слабоструктурированной информации о состоянии параметров движения воздушного судна и их оперативного мониторинга.

Создано специальное математическое обеспечение для решения задачи программного управления воздушным судном, инвариантное к внешним возмущениям.

Практическая значимость исследования определяется тем, что создаваемые, на основе разработанных моделей и алгоритмов, программные средства обеспечивают не только решение задач построения оптимального маршрута движения ВС, но и, на этапах проектирования и опытной



эксплуатации систем управления ВС, позволяют оптимизировать структуру систем информационного обеспечения.

Кроме того, разработанные модели и алгоритмы могут быть интегрированы в существующие управляющие и информационные системы ВС государственной авиации.

**Методологические основы и методы исследования.** Результаты проведенного исследования получены с применением методов математической статистики, теории управления и математического моделирования, системного анализа.

Моделирование процесса проведено в пакете прикладных программ Matlab и его приложения Simulink, экспериментальные исследования с использованием математических пакетов MathCAD.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Алгоритм прогноза управляющих воздействий на основе полиномиальной аппроксимации.
2. Модель приоритетного определения направления движения воздушного судна по заданным маршрутам.
3. Методика разработки алгоритма оптимального программного управления на основе обобщённого квадратичного показателя качества с учетом действующих возмущений.
4. Алгоритм оптимального программного управления на основе обобщённого квадратичного показателя качества с учетом действующих возмущений.

**Степень достоверности и апробация результатов.** Достоверность полученных результатов подтверждается корректным использованием апробированного математического аппарата теории управления, непротиворечивостью результатов моделирования, полученных на основе известных и разработанных моделей и алгоритмов.

### **Апробация работы.**

1. Результаты проведенных исследований докладывались и получили одобрение на XXXIV Межведомственной научно-технической конференции «Проблемы обеспечения эффективности и устойчивости функционирования сложных технических систем» - Серпухов 2015 г.; V Всероссийской научно-практической конференции «Современное непрерывное образование и инновационное развитие» – Серпухов 2015 г.;

2. Результаты работы: **модель управления ВС**, модель реализации терминального управления летательного аппарата с учётом действующих возмущений опубликованы в сборнике «Информатика, вычислительная техника и управление» ИТМиВТ РАН, 2014.

По результатам выполненных исследований опубликовано 11 печатных работ, в том числе 3 в научных изданиях, рекомендуемых ВАК Минобрнауки РФ.

В публикациях, написанных в соавторстве, лично автору принадлежат результаты: анализа предметной области [33 , 67]; формулировки постановки задачи [28, 29]; построения и анализа модели и алгоритмов, выносимых на защиту [29, 30, 31, 32]; результаты оценки эффективности использования моделей [33].

3. Основные положения диссертационных исследований использованы в НИР кафедры систем автоматического и интеллектуального управления МАИ, реализованы в учебном процессе.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, библиографического списка и приложений. Диссертация содержит 122 страниц машинописного текста, 33 рисунка, 13 таблиц, 2 приложения. Библиографический список содержит 82 наименования.

Основные результаты исследования соответствуют п. 3 и 10 паспорта специальности 05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации (Авиационная и ракетно-космическая техника)(технические науки).

Работа выполнена в рамках приоритетных научных направлений  
Московского авиационного института.

## 1. Анализ моделей приоритетного распределения воздушных судов по заданным маршрутам

### 1.1. Метод ветвей и границ

#### 1.1.1. Существующие методы построения маршрута

В настоящее время существует множество методов решения задачи построения оптимального маршрута движения. К основным из них относятся методы: полного перебора, динамического программирования, восхождения и др. [20]. Ниже приведены результаты анализа эффективности применения указанных методов для решения, поставленной в исследовании задачи.

Метод «Полного перебора» достаточно полно представлен в [49]. Среди методов построения оптимального маршрута движения является самым простым. При применении этого метода задача поиска оптимального маршрута движения решается «в лоб». В основу метода «полного перебора» положен алгоритм расчета показателей всех возможных вариантов следования по маршруту. При его применении исследователь получает оптимальное (с точки зрения выбранного критерия качества) решение задачи. К основному недостатку метода следует отнести то, что с ростом количества промежуточных пунктов маршрута (ПМ) время решения задачи ( $T$ ) существенно увеличивается, так как количество возможных вариантов равно  $n!$ , где  $n$  – число промежуточных ПМ (рис. 1.1).

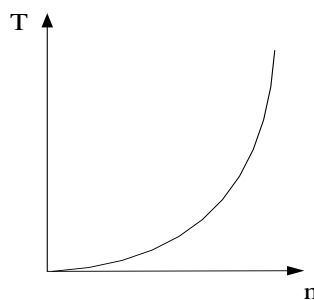


Рисунок 1.1 – Зависимость времени решения задачи от количества промежуточных пунктов маршрута

Положительными сторонами применения метода являются простота реализации метода и оптимальность найденного решения.

Метод, основанный на «Жадном» алгоритме. Этот метод основан на принципе декомпозиции решаемой задачи на частные. В данном случае нахождение оптимального решения для каждой частной задачи означает получение оптимальных показателей для каждого возможного маршрута движения ВС. Основным недостатком данного метода является то обстоятельство, что решение задачи в целом может не являться оптимальным. Применительно к решаемой в диссертации научной задаче это обстоятельство может быть интерпретировано (рис. 1.2) как нахождение оптимального маршрута состоящего из последовательности объектов «ближайших» к текущему положению ВС. Такое решение поставленной задачи, как и при применении предыдущего метода не гарантирует оптимальность решения.

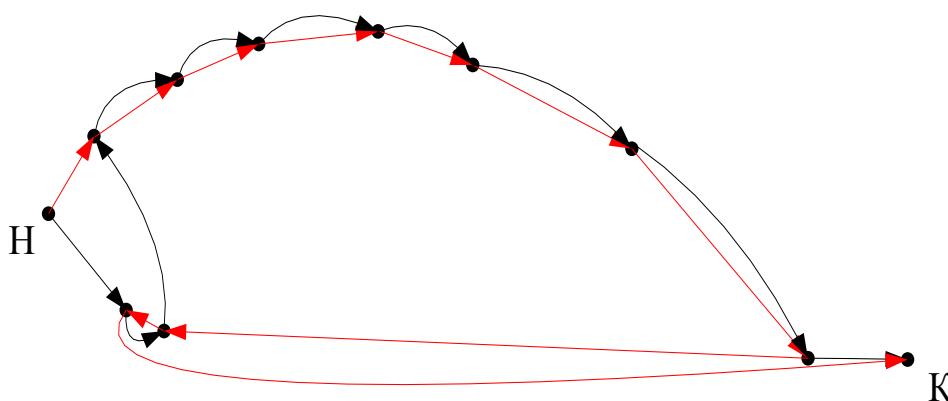


Рисунок 1.2 – Сравнение оптимального пути (темные стрелки) и пути, полученного с помощью «жадного» алгоритма (светлые стрелки)

Анализ рисунка 1.2 показывает, что маршрут из начального ПМ (Н) в конечный ПМ (К), полученный с помощью «жадного» алгоритма, отличается от оптимального.

К положительным сторонам метода следует отнести простоту реализации, быстроту работы и априорное знание времени поиска.

Метод ветвей и границ применяется при решении задач целочисленного линейного программирования. Анализ литературы [70] показал, что этот метод является вариантом метода полного перебора, в котором оптимальное решение находится путем последовательного исключения заведомо неоптимальных маршрутов.

Алгоритм, реализующий метод ветвей и границ представлен следующей последовательностью шагов:

1. Построение подмножеств множества допустимых маршрутов включающего в траекторию выбранный переход и исключающее его.
2. Осуществляется оценка снизу траекторий, входящих в подмножества (подмножество, для которого оценка меньше, считается лучшим и определяет включение в траекторию рассматриваемого перехода).
3. Проверка логики решения задачи - из подмножества-победителя исключаются некорректные переходы, образующие замкнутые маршруты.
4. Процедура продолжается до того момента, когда подмножество-победитель будет состоять из одного элемента.

Дерево построения решения представлено на рис. 1.3.

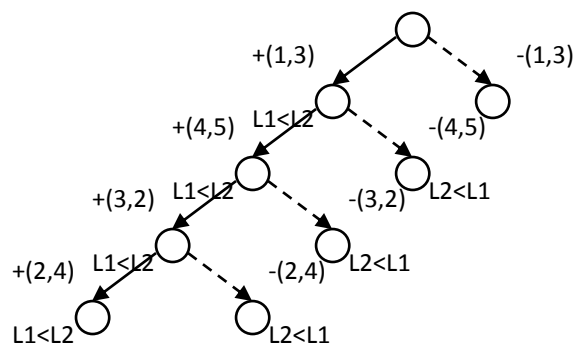


Рисунок 1.3 – Дерево построения решений для метода ветвей и границ  
Положительной стороной этого метода является оптимальность найденного решения.

Основным недостатком этого метода является достаточно большое время решения задачи, существенно возрастающее с увеличением количества пунктов маршрута. Это обстоятельство ограничивает его применение в

системах реального времени, а также для решения задач с большим количеством пунктов маршрута.

Метод поиска аналитического выражения функции риска. Этот метод основан на использовании функция риска как простейшей аналитической формы принятия решений. Применительно к решаемой в диссертации задаче этот метод позволяет определить первоочередной пункт маршрута, следующий за текущим пунктом. Первоочередным является пункт маршрута, для которого значение функции риска будет минимально. В качестве примера выбора функции риска следует привести степенной полином второго порядка относительно приращений географических координат  $X$  и  $Y$  местоположения пункта маршрута на карте:

$$F_j = b_1 \cdot X_j + b_2 \cdot Y_j + b_3 \cdot X_j^2 + b_4 \cdot Y_j^2 + b_5 \cdot X_j \cdot Y_j,$$

где  $X_j$ ,  $Y_j$  - координата  $j$ -го пункта маршрута и координата текущего положения ВС соответственно.

Коэффициенты  $b_1 \dots b_5$  определялись при самообучении на примерах.

Алгоритм самообучения для определения коэффициентов полинома состоит из следующих шагов:

1. задается некоторое опорное значение вектора  $b_1(0)$ ,  $b_2(0)$ ,  $b_3(0)$ ,  $b_4(0)$ ,  $b_5(0)$ ;
2. осуществляется маршрутизация полета (в таком необученном состоянии, находится частота правильных решений);
3. создаются отклонения поочередно коэффициентов ( $b_i + \Delta b$ ); вновь оценивается успех поведения;
4. лучший вариант становится опорным для следующего шага самообучения.

Слабой стороной данного метода является необходимость формирования примеров обучения, представляющих собой оптимальные маршруты следования через промежуточные пункты.

### 1.1.2 Анализ методов параметрической оптимизации

Для успешного решения поставленной научной задачи целесообразно выполнить анализ численных методов, применяемых при решении задач безусловной одномерной и многомерной оптимизации, т.е. для нахождения минимума некоторой скалярной целевой функций  $F(x)$ .

Известно [74], что задачи одномерной оптимизации относятся к наиболее простому виду оптимизационных задач. Тем не менее, анализ методов их решения целесообразно не только в связи с тем, что именно такие задачи решаются в инженерной практике, но и, потому, что одномерные методы решения задач одномерной оптимизации часто используются для решения подзадач, возникающих при применении численных методов к решению задач многомерной оптимизации.

Классификация численных методов решения одномерных задач безусловной оптимизации основана на признаках (характер допущений и предположений), характеризующих свойства исследуемой целевой функции.

Среди известных численных методов безусловной оптимизации [2] наибольшее распространение получили методы исключения интервалов и методы полиномиальной аппроксимации.

Сущность методов исключения заключается в поиске оптимального значения функции одной переменной внутри заданного интервала при последовательном исключении подынтервалов, не содержащих оптимальное значение функции.

Сущность методов полиномиальной аппроксимации, заключается в локальном описании гладкой целевой функции полиномом для последующего его использования для оценки ее оптимального значения.

Ниже приведены результаты подробного анализа методов исключения интервалов для определения целесообразности их применения для решения поставленных в диссертации задач.



Методика применения методов исключения интервалов предполагает сравнении одних только значений целевой функции  $F(x)$  в различных пробных точках, при этом предполагается выполнение требования унимодальности исследуемой целевой функции. Это требование иллюстрируется примером, приведенным на рисунках 1.4-1.6 для случаев а) ( $F(x_1) < F(x_2)$ ); б) ( $F(x_1) > F(x_2)$ ); в) ( $F(x_1) = F(x_2)$ ). Исследуемая целевая функция  $F(x)$  будет унимодальной на определенном интервале  $[a, b]$ , если выполняется условие монотонности по обе стороны от единственной на этом отрезке точки – оптимального значения функции  $x^*$  (рис. 1.4.).

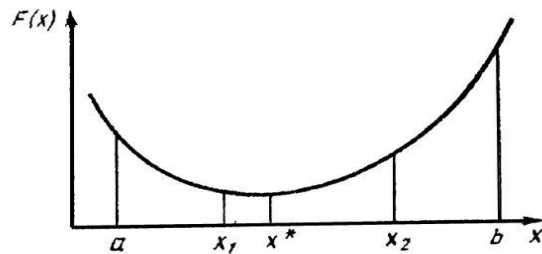


Рисунок 1.4 – Иллюстрация требования унимодальности целевой функции, случай а)

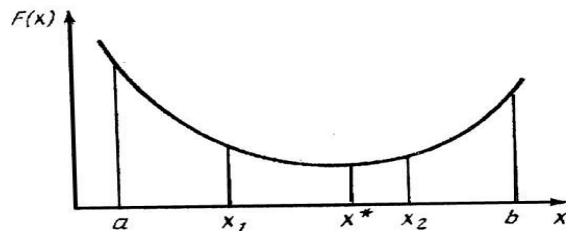


Рисунок 1.5 – Иллюстрация требования унимодальности целевой функции, случай б)

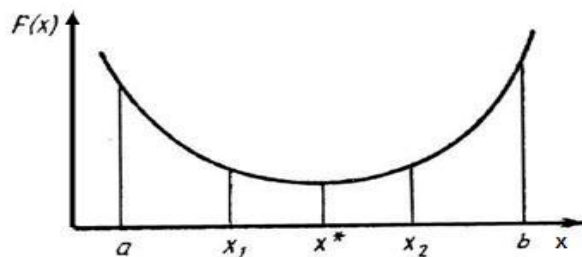


Рисунок 1.6 – Иллюстрация требования унимодальности целевой функции, случай в)

Анализ особенностей методов исключения интервалов показал, что для вычисления значений целевой функции не обязательно выполнение условия дифференцируемости. Более того, для их применения (когда целевую функцию нельзя представить в аналитическом виде), достаточно определить значения целевой функции  $F(x)$  в заданных точках с помощью прямых расчетов, моделирования или натурального эксперимента (например, значения целевой функции определены в результате стендовых или натуральных испытаний).

Основной особенностью применения методов исключения интервалов является разделение процесс поиска оптимального значения целевой функции этапы:

- установления границ интервала, содержащего оптимальное значение функции;
- последовательное уменьшение исходного интервала до получения интервала заданного размера.

Особого внимания заслуживает метод деления интервалов пополам (трехточечный поиск на равных интервалах), применение которого позволяет исключать на каждом шаге поиска оптимального значения функции ровно половину интервала.

Применение метода «золотого» сечения позволяет, при поиске оптимального значения функции, исключать часть интервала меньшую, чем половина исходного, на каждой итерации поиска, но только при одном вычислении значения функции  $F(x)$ . В процессе нахождения оптимального значения функции каждое последующее вычисление позволяет исключить подынтервал, величина которого составляет  $(1 - \tau)$ -ю долю от текущей длины интервала. Таким образом, в результате  $n$  вычислений целевой функции длина интервала будет составлять  $\tau^{n-1}$  от размера исходного интервала. Это обстоятельство, при относительной (по сравнению с другими) экономичности, обуславливает повышенную трудоемкость численного решения задачи.

В литературе [2] показано, что все численные методы, предназначенные для решения многомерных задач безусловной оптимизации, делятся, в зависимости от типа используемой при организации поиска информации, на ряд классов:

- методы прямого поиска (методы нулевого порядка), основанные на вычислении только значений целевой функции;
- градиентные методы (методы первого порядка), в которых используются точные значения первых производных целевой функции;
- методы второго порядка, в которых наряду с первыми производными целевой функции используются и производные старших порядков.

В методах прямого поиска для реализации стратегии поиска оптимального значения функции требуются только значения исследуемой функции  $F(\bar{x})$ . При этом предполагается, что целевая функция непрерывна, а существование ее градиента ( $\nabla F(\bar{x})$ ) не имеет значения.

В этой связи представляет интерес метод координатного спуска, поскольку поиск обеспечивается последовательным перебором (наиболее простая схема) направлений из некоторого заранее сформированного множества. Положительной стороной метода является возможность уточнения используемых направлений поиска в соответствии с информацией о топологии целевой функции, накапливаемой по шагам. При применении этого метода множество направлений поиска совпадает множеством координатных направлений в пространстве неизвестных. Поэтому при минимизации несложных целевых функций (например, обладающих свойством сферической симметрии) метод координатного спуска позволяет достигнуть оптимального значения целевой функции.

В случае применения метода координатного спуска для исследования целевой функций со сложной топологией (линии уровня которых сильно искривлены и растянуты), поиск оптимального значения функции не всегда оказывается эффективным. Это обусловлено тем, что последовательность

уменьшающихся шагов, выполняемых итерационно, стремиться к бесконечности.

В связи с этим представляет интерес анализа метода спирального координатного спуска. При применении этого метода поиск значения функции так же осуществляется последовательно вдоль отдельных координатных направлений, но не до достижения точного минимума, а с заданным шагом по каждой переменной. Иллюстрация применения этого метода после каждого цикла перебора представлена на рисунках 1.7, 1.8.

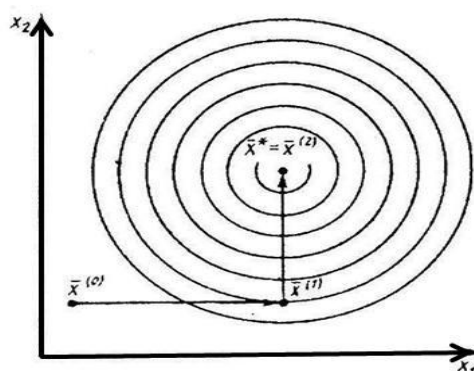


Рисунок 1.7 – Метод координатного спуска (оптимальное значение функции достигнуто)

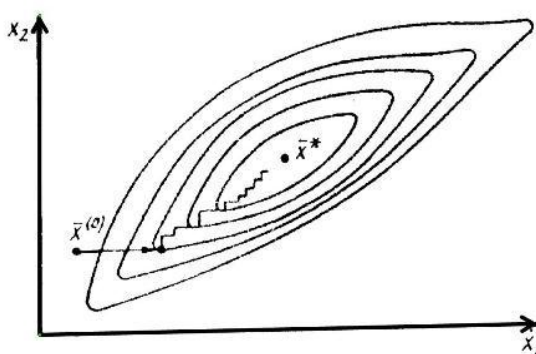


Рисунок 1.8 – Метод координатного спуска (оптимальное значение функции не достигнуто)

Результаты анализа рассмотренных выше методов многомерной безусловной оптимизации позволяют сделать вывод о том, что они позволяют находить оптимальное решение при использовании только значений исследуемой целевой функций. Это позволяет утверждать, что на

практике применение прямых методов позволяет получать оптимизированные значения функции которые являются, в основном, достаточно надежной, а иногда и единственно доступной информацией. Основным недостатком этих методов является то, что для их применения требуется большое количество вычислений значений целевой функции. Это, наряду с необходимостью определения стационарных точек (пунктов маршрута), обуславливает необходимость анализа методов безусловной оптимизации, основанных на использовании градиента целевой функции.

Анализ литературы [49] показал, что основой логики практически всех градиентных методов, в предположении, что компоненты градиента могут быть записаны в аналитическом виде или с достаточной высокой точностью вычислены при помощи численных процедур, является итерационная процедура, описываемая выражением:

$$\bar{x}^{-(k+1)} = \bar{x}^{-(k)} + \alpha^{(k)} \bar{s}^{-(k)}, \quad (1.1)$$

где  $\bar{x}^{-(k)}$ ,  $\bar{x}^{-(k+1)}$  - текущее и вычисляемое приближение к точке  $x^*$ ;

$\alpha^{(k)}$  - параметр, характеризующий длину очередного шага;

$\bar{s}^{-(k)} = \bar{s}(\bar{x}^{-(k)})$  - вектор, задающий направление поиска в  $n$ -мерном пространстве неизвестных.

Способ определения вектора  $\bar{s}(x)$  и скаляра  $\alpha$  на каждом шаге связан с особенностями применения того или иного метода. Обычно величина шага  $\alpha^{(k)}$  находится при выполнении одномерной оптимизации целевой функции  $F(\bar{x})$  в направлении, задаваемом вектором  $\bar{s}^{-(k)}$ .

Ниже приведены результаты анализа градиентных методов: наискорейшего спуска (метод Коши) и семейства сопряженных градиентов.

Метод наискорейшего спуска основан на определении на каждом шаге поиска направления наибольшего локального уменьшения целевой функции. Направление наибольшего локального уменьшения целевой функции

определяется в результате разложения целевой функции в ряд Тейлора, в окрестности некоторой точки  $\bar{x}^{-0}$ , до членов порядка не выше второго:

$$F(\bar{x}) = F(\bar{x}^{-0}) + (\nabla F(\bar{x}^{-0}))^T \Delta \bar{x} + \dots \quad (1.2)$$

Значение функции  $F(\bar{x}^{-0})$  фиксировано. Поэтому локальное изменение целевой функции определяется только величиной второго слагаемого  $(\nabla F(\bar{x}^{-0}))^T \Delta \bar{x}$ . Очевидно, что скорейшее локальное уменьшение значений целевой функции произойдет при выборе направления поиска, противоположного направлению градиента,  $s(\bar{x}^{-0}) = -\nabla F(\bar{x}^{-0})$  ( $\nabla \bar{x} = \bar{x} - (\bar{x}^{-0}) = -\alpha \nabla F \bar{x}^{-0}$ ), тогда выражение (1.1) для метода наискорейшего спуска примет вид:

$$\bar{x}^{-(k+1)} = \bar{x}^{-(k)} + \alpha^{(k)} \nabla F \bar{x}^{-(k)}.$$

Величина шага  $\alpha^{(k)}$  обычно вычисляется путем решения одномерной задачи минимизации целевой функции  $F(\bar{x})$  вдоль направления  $\nabla F \bar{x}^{-(k)}$  с помощью методов одномерного поиска. Основным недостатком рассмотренного метода (часто его называют методом Коши) является необходимость выполнения большого количества шагов вычислений при многомерной оптимизации, хотя и меньшее по сравнению с методом координатного спуска.

### 1.1.3 Линейное программирование

Анализ предметной области показал, что для решения сформулированных в диссертации задач целесообразно провести анализ методов линейного программирования. Актуальность такого анализа обусловлена определенной общностью вычислительной процедуры определения оптимального значения целевой функции при различиях содержательного контента решаемых задач в технической, экономической и других предметных областях. Это позволяет использовать определенные

стандартные формы линейных оптимизационных моделей, для которых выполняются условия:

- значения переменных целевой функции не отрицательны;
- целевая функция имеет линейную форму и имеет экстремумы;
- граничные условия записаны в виде линейных равенств с неотрицательной правой частью.

Общая поставка задача линейного программирования предполагает поиск максимума линейной формы от неотрицательных переменных:

$$z = F(\bar{x}_n) = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n = \sum_{i=1}^n C_i x_i \rightarrow \max ,$$

при наличии ограничений как в виде равенства:

$$\varphi(\bar{x}_n) = a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n - b_j = 0; b_j \geq 0; j = 1, \dots, m; m < n,$$

так и, главным образом, в виде неравенств при условии, что их число, как правило, превышает число переменных, т.е.

$$g_l(\bar{x}_n) = d_{l1}x_1 + \dots + d_{ln}x_n - d_{l0} \geq 0; l = 1, \dots, \rho; \rho > n .$$

Известно, что неравенства всегда можно свести к строгим равенствам, при введении дополнительных неотрицательных (искусственных) переменных:  $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+\rho}$ .

Так, например, ограничение  $d_{l1}x_1 + \dots + d_{ln}x_n - d_{l0} \geq 0$  сводится к равенству, вычитанием неотрицательной переменной  $x_{l+n} \geq 0$ :

$$d_{l1}x_1 + \dots + d_{ln}x_n - x_{n+l} - d_{l0} = 0 .$$

Эти рассуждения позволяют интерпретировать, без уменьшения общности, задачу линейного программирования с учетом введенных искусственных переменных как:





Решение об определении исходной крайней точки или определении начального допустимого базисного решения принимается на основании имеющихся исходных данных на этапе построения концептуальной модели. В ряде задач, например при отсутствии исходных данных, целесообразно принять исходные переменные  $x_i$  равными нулю, т.е. расчет начать из начала координат (точка А), что, собственно, означает что целевая функция  $z=0$ .

Для обеспечения работы алгоритма решения задачи и выбор каждой последующей вершины необходимо соблюдать правила:

- последующая вершина должна быть смежной с предыдущей;
- возможность обратного перехода не предусматривается;
- переход «сам - в себя» также невозможен, т.е. значения переменных (включая искусственные) в каждой вершине  $n$ - $m$  равны нулю;
- различие между соседними, смежными вершинами в группах базисных и нулевых переменных определяется только одной переменной.

Таким образом, следует сделать вывод о том, что определение итерационной процедуры преобразований при определении маршрута движения возможны различные варианты. Для упрощения процесса определения этих преобразований целесообразно ввести специальную форму записи уравнений в виде таблицы, содержащей коэффициенты при переменных. Пример такой задачи на этапе выбора начального базиса  $x_1 = x_2 = 0$  представлен в табл. 1.1.

Таблица 1.1 – Определение коэффициентов при переменных

Базисные переменные	$z$	$y_1$	$y_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	Решение
$Z$	1	-3	-2	0	0	0	0	0
$S_1$	0	1	2	1	0	0	0	6
$S_2$	0	2	1	0	1	0	0	8
$S_3$	0	-1	1	0	0	1	0	1
$S_4$	0	0	1	0	0	0	1	2

Первая строка таблицы 1.1 является неизменной и содержит обозначения целевой функции и всех, как базисных, так и нулевых переменных. Вторая строка предназначена для информации о значениях целевой функции. Значение ее второго элемента принимается равным 1, а последний – содержит результат процедуры максимизации целевой функции на данном шаге (в частности, при  $x_1 = x_2 = 0$  решение  $z=0$ ), остальные элементы содержат, взятые с обратным знаком, значения коэффициентов ( $C_i$ ) целевой функции.

Другие строки предназначены для заполнения информацией об ограничениях типа равенств. При этом, последние элементы строк таблицы соответствуют свободным членам  $b_j$ , в первые элементы этих строк, образующих первый столбец, заносится группа ненулевых, базисных переменных на данном шаге расчета (поэтому начальный базис содержит ненулевые переменные  $S_1 \div S_4$ ), а в остальные элементы заносятся значения коэффициентов  $a_{ji}$  при переменных, включая ненулевые коэффициенты для функции  $z$ . После этого возможно успешное решение поставленной задачи, т.е. получение решения, соответствующего условиям оптимальности и допустимости.

Такое представление итерационной процедуры преобразований при определении маршрута движения позволяет достаточно просто проверить выполнение условия оптимальности и, если значения всех коэффициентов не отрицательны, то утверждать, что полученное решение является оптимальным. Также легко проверяется условие допустимости.

После определения порядка включения и исключения переменных, общая вычислительная процедура включает операции, перечисленные ниже. В первую очередь определяется начальное допустимое базисное решение, и действия:

1. Выбирается ведущий столбец, точнее выбирается вводимая переменная из числа нулевых, обеспечивающая улучшенное значение целевой функции.

2. Выбирается ведущая строка, т.е. выбирается исключаемая переменная из числа базисных, которая должна быть обнулена.

3. Выбирается преобразование симплекс-таблицы, имеющей новый состав нулевых и базисных переменных.

Чаще всего это преобразование проводится методом Гаусса-Жордана, реализуемого в процессе выполнения двух процедур:

- формирование новой ведущей  $j$ -й строки по формуле: базисная переменная этой строки заменяется вводимой переменной, а остальные элементы новой ведущей строки равны соответствующим элементам этой строки, поделенным на генеральный коэффициент  $a_{ji}$ ;

- формирование остальных строк таблицы, в том числе и строки целевой функции по формуле: элементы новой  $l$ -й строки равны элементам этой строки минус соответствующие элементам новой ведущей строки, умноженные на элемент  $a_{li}$  ведущего столбца этой строки.

После выполнения преобразований симплекс-таблицы проводится новая итерация расчетов путем возвращения к первому шагу, в результате чего осуществляется переход к смежной вершине многогранника.

Результаты проведенного анализа и практики применения метода линейного программирования позволяют сделать заключение о выборе его в качестве основного при решении задач управления воздушным движением в районе аэродрома, т.е. для определения оптимальных, по критерию обеспечения безопасности полетов, маршрутов движения ВС. Кроме того, эти же результаты анализа и практика свидетельствуют о том, что выбранный метод линейного программирования является, по сравнению с другими, наименее трудоемким при большом числе ограничений.

Объективность сделанных выше выводов подтверждается следующим примером.

Выберем исходные данные, представленные в таблице 1.1. После выбора вводимой переменной  $X_1$  и исключаемой переменной  $S_2$  на третьем шаге итерации, что означает переход из точки  $A$  многогранника в смежную крайнюю точку  $B$ , формируется новая ведущая и другие строки:

$X_1$	0	1	1/2	0	1/2	0	0	4
-------	---	---	-----	---	-----	---	---	---

В частности, для строки целевой функции получим:

1	-3	-2	0	0	0	0	0	
---	----	----	---	---	---	---	---	--

$\div (-3)$

0	1	1/2	0	1/2	0	0	0	4
---	---	-----	---	-----	---	---	---	---

=

1	0	-0,5	0	1,5	0	0	0	12
---	---	------	---	-----	---	---	---	----

После первой итерации значение целевой функции достигло  $Z=12$ , а таблица 1.1 будет иметь следующий вид (табл. 1.2).

Таблица. 1.2 – Результаты первой итерации расчетов

Базисные переменные	Z	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	Решение
Z	1	0	-0,5	0	1,5	0	0	12
$S_1$	0	0	1,5	1	-0,5	0	0	2
$X_1$	0	1	0,5	0	0,5	0	0	4
$S_3$	0	0	1,5	0	0,5	1	0	5
$S_4$	0	0	1	0	0	0	1	2

В процессе второй итерации вводимой переменной выбирается  $X_2$ , поскольку в строке целевой функции это соответствует единственному отрицательному элементу - 0,5, а исключаемой переменной является  $S_1$ . Это соответствует крайней точке  $C$  многогранника. В результате преобразований получаем табл. 1.3.

Таблица 1.3 – Результаты второй итерации расчетов

Базисные переменные	Z	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	Решение
Z	1	0	0	1/3	11/3	0	0	12 2/3
$X_2$	0	0	1	2/3	-1/3	0	0	4/3
$X_1$	0	1	0	-1/3	2/3	0	0	1/3
$S_3$	0	0	0	-1	1	1	0	3
$S_4$	0	0	0	-2/3	1/3	0	1	2/3

В таблице 1.3 в строке целевой функции ни одна из нулевых переменных  $S_1$  и  $S_2$  не имеет отрицательных коэффициентов. Следовательно, решение получено – максимальное значение целевой функции:  $Z = 12 \frac{2}{3}$ . Значение влияющих на максимум переменных в точке экстремума (крайний правый столбец:  $X_1 = 3 \frac{1}{3}$ ,  $X_2 = 11/3$ . При этом переменные  $S_3 = S_4 = 0$ , что указывает на важность последних двух ограничений в исходной постановке задачи.

Окончательное решение имеет вид:

$$Z=12 \frac{2}{3}, X_1=3 \frac{1}{3}, X_2=4/3;$$

$$Z=3 X_1+2 X_2, =3(3 \frac{1}{3}) + 2(4/3) = 30/3 + 8/3 = 12 \frac{2}{3} ;$$

$$X_1+2 X_2+S_1=6, 3 \frac{1}{3} + 2 (4/3) + 0 = 6, 10/3 + 8/3 = 6, 6 = 6;$$

$$2 X_1 + X_2 + S_2 = 8, 2(3 \frac{1}{3}) + (4/3) + 0 = 8, 20/3 + 4/3 = 8, 8 = 8;$$

$$- X_1 + X_2 + S_3 = 1, -(3 \frac{1}{3}) + (4/3) + 3 = 1, -10/3 + 4/3 + 3 = 1, -2 + 3 = 1, 1 = 1;$$

$$X_2 + S_4 = 2, 4/3 + 2/3 = 2, 6/3 = 2 .$$

Полученное решение позволяет перейти к выбору параметров корректирующих устройств регулятора в контуре управления воздушным судном, обеспечивающих максимальное быстродействие при ограничениях на колебательность и запас устойчивости.

В приводимом примере контур автоматического управления нормальной перегрузкой ВС представлен (рисунок 1.10) как :

$$W_{01}(s) = \frac{\alpha_{3j}(s + \alpha_{2j})}{s^2 + \alpha_{1j}s + \alpha_{0j}} \text{ и } W_{02}(s) = \frac{\alpha_{4j}}{s + \alpha_{2j}} - \text{ передаточные функции ВС}$$

(объекта управления);

$$j = 1, \dots, k - \text{ номер режима полёта ВС; } W_{p.n} = \frac{d}{s + d} - \text{ передаточная}$$

функция привода рулей;

$$W_{к.y0} = \frac{\beta_0}{s(s + \alpha)}; \quad W_{к.y1} = \frac{\xi_1 s + \xi_0}{s + \alpha}; \quad W_{к.y2} = \frac{\beta_2 s + \beta_1}{s + \alpha} - \text{ передаточные функции}$$

корректирующих устройств с выбираемыми параметрами  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \xi_1, \xi_2$ .

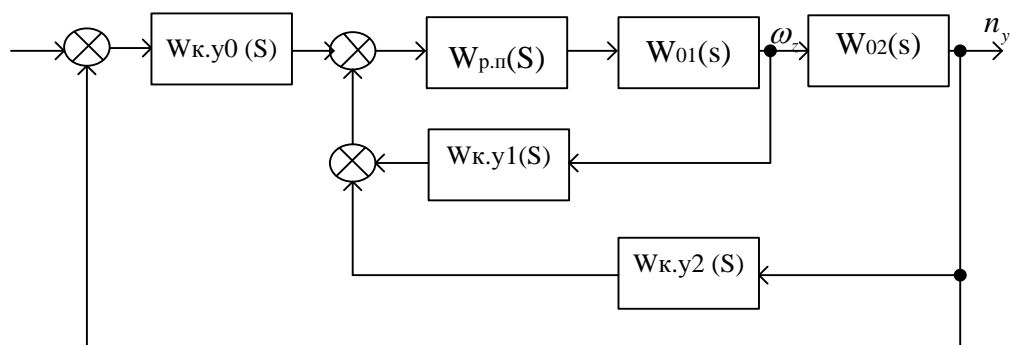


Рисунок 1.10 – Структурная схема контура автоматического управления нормальной перегрузкой ВС

Передаточная функция  $\Phi(s)$  замкнутого контура управления имеет вид:

$$\Phi(s) = \frac{A_{0j}}{s^5 + A_{4j}s^4 + A_{3j}s^3 + A_{2j}s^2 + A_{1j}s + A_0},$$

где  $A_{4j} = d + \alpha + \alpha_{1j}$ ;

$$A_{3j} = d\alpha + \alpha_{1j}(d + \alpha) + \alpha_{0j} + d\alpha_{3j}\xi_1;$$

$$A_{2j} = \alpha_{1j}d\alpha + \alpha_{0j}(d + \alpha) + d\alpha_{3j}(\alpha_{2j}\xi_1 + \xi_0 + \alpha_{4j}\beta_2); \quad (1.4)$$

$$A_{1j} = \alpha_{0j}d\alpha + d\alpha_{3j}(\alpha_{2j}\xi_0 + \alpha_{4j}\beta_1);$$

$$A_{0j} = d\alpha_{3j}\alpha_{4j}\beta_0.$$

В выражениях (1.4) коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  заданы, аэродинамические параметры многорежимного объекта  $\alpha_{0j}, \alpha_{1j}, \dots, \alpha_{4j}$  меняются в зависимости от номера  $j$  режима полета. В качестве оценок устойчивости и степени колебательности системы управления ВС примем:

$$\delta_{ij} = \frac{A_{ij}^2}{A_{i-1,j} A_{i+1,j}}; i = 1, \dots, 4, \quad (1.5)$$

Эти оценки характеризуют угол, стороны которого локализуют корни характеристического многочлена. С увеличением  $\delta_{ij}$  угол уменьшается и снижается колебательность системы, поэтому для обеспечения заданного качества необходимо выполнение условия:

$$\delta_{ij} \geq \delta_i^*, i = 1, \dots, 4; j = 1, \dots, k, \quad (1.6)$$

где  $\delta_i^*$  - заданные пороговые значения оценок.

Такой подход позволяет выбирать параметры корректирующих устройств удовлетворяющие выражению (1.6) на всех  $k$  режимах полёта.

Для решения задачи оптимизации маршрута, т.е. получения управляющих воздействий на систему управления ВС параметры  $\delta_{ij}$  должны иметь минимальное значение в пределах ограничений (1.6). Это гарантирует, что нарастание переходного процесса будет минимальным.

Описание алгоритма решения задачи представлено ниже.

В первую очередь находим величины  $A_{4j}$  для всех  $k$  режимов полета ВС.

Для каждого режима полета определяем максимально допустимое значение обобщенного параметра  $A_{3j\max}$  и параметра  $\xi_{1\max}$ :

$$A_{3j\max} = \frac{A_{4j}^2}{\delta_4^*}; \xi_{1j\max} = \frac{A_{3j\max} - d\alpha - a_{1j}(d + \alpha) - a_{0j}}{da_{3j}}.$$

Выбираем первый из параметров регулятора равным  $\xi_1 = \min\{\xi_{1j\max}\}$  для обеспечения выполнения условия  $\delta_{4j} \geq \delta_4^*$  на каждом режиме полета ВС.

Подставляя полученное значение  $\xi_1$  в выражение для обобщенного коэффициента  $A_{3j}$ , получаем его действительное значение, что позволяет перейти к следующему шагу расчетов.

Далее находим

$$A_{2j\max} = \frac{A_{3j}^2}{A_{4j}\delta_3^*}. \quad (1.7)$$

Формулируем условие выбора параметров регулятора  $\xi_0$  и  $\beta_2$ , с использованием соотношения (1.4) для обобщенного параметра  $A_{2j}$  и выражение (1.6).

Условие выбора параметров регулятора представлено соотношением (1.8). Для каждого  $j$ -го режима полета ВС, кроме одного – наихудшего по быстродействию системы, должно быть справедливо:

$$\xi_0 + a_{4j}\beta_2 \leq b_j, \quad j = 1, \dots, k-1, \quad (1.8)$$

где

$$b_j = \frac{A_{2j\max} - a_{1j}d\alpha - a_{0j}(d + \alpha)}{da_{3j}} - a_{2j}\xi_1.$$

Далее, минимизируется время нарастания  $t_n$  переходного процесса для наихудшего режима полета ВС, что обеспечивает максимум целевой функции:  $z = \xi_0 + \beta_2 a_{4k}$ .



Затем, обозначив параметры  $\xi_0$  и  $\beta_2$  через переменные  $x_1$  и  $x_2$  и введя искусственные переменные  $s_1, \dots, s_{k-1}$ , приходим к формулировке задачи линейного программирования в стандартном виде:

$$\left. \begin{aligned} z = x_1 + a_{4k}x_2 + 0 \cdot s_1 + \dots + 0 \cdot s_{k-1} &\rightarrow \max; \\ x_1 + a_{4j}x_2 + s_j &= b_j, j = 1, \dots, k-1; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; s_j &\geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Анализ выражения (1.9) показывает, что решаемая задача записана системой из  $k-1$  равенств и  $k+1$  переменных, решением которой является  $x_1 = \xi_0$  и  $x_2 = \beta_2$ . Значения остальных параметров  $\beta_1$  и  $\beta_0$  находят через параметры  $A_{1j}$  и  $A_{0j}$  аналогично параметру  $\xi_1$ .

Двойственная задача линейного программирования.

Аналогично прямой задаче, представленной в стандартной форме, когда к  $n$  переменным  $x_i (i = 1, \dots, n)$  присоединено  $m$  искусственных неотрицательных переменных  $s_j (j = 1, \dots, m)$

$$\left\{ \begin{aligned} z = [\bar{C}x] &\rightarrow \max; \\ A\bar{x} + \bar{s} &= \bar{b}; \\ x \geq 0; s &\geq 0, \end{aligned} \right. .$$

Двойственная задача также соответствует минимизации линейной формы, когда к  $m$  переменным  $\lambda_j (j = 1, \dots, m)$  присоединено  $n$  искусственных переменных  $d_j (i = 1, \dots, n)$

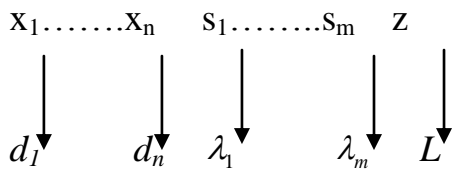
$$\left\{ \begin{aligned} L = [\bar{b}\bar{\lambda}] &\rightarrow \min; \\ A^T \bar{\lambda} - d &= \bar{c}; \\ \bar{\lambda} \geq 0; d &\geq 0. \end{aligned} \right. \quad (1.10)$$

Между прямой и двойственной задачей существует тесная связь — коэффициенты  $c_i$  целевой функции в прямой задаче являются свободными

членами ограничений в двойственной задаче, свободные члены  $b_j$  ограничений прямой задачи становятся коэффициентами целевой функции двойственной задачи, строки матрицы  $A$  становятся столбцами матрицы  $A^T$ , знаки неравенств меняются на противоположные и, наконец, задача максимизации  $z$  по переменным  $\bar{x}_m$  заменяется задачей минимизации  $L$  по переменным  $\bar{\lambda}_m$ , причем в соответствии с доказанной теоремой двойственности [71] достигнутые результаты оптимизации совпадают:

$$\max_{\bar{x}} \{z\} = \min_{\bar{\lambda}} \{L\}.$$

Таким образом, существует следующее соответствие:



В свойствах двойственных задач заключен важный смысл, имеющий практическую ценность при проектировании систем управления. Действительно, выбор наилучшей в некотором смысле траектории полета при ограниченных ресурсах или минимизация отведенных ресурсов, скажем расхода топлива, для осуществления заданного полета, по существу, есть стороны одного и того же процесса. Более того, инженеру-проектировщику важно в первую очередь знать, наряду с оптимальным распределением параметров системы  $x_i$ , влияние на качество ее работы ресурсных ограничений, выявить узкие места и закладывать при проектировании наиболее рациональный облик летательного аппарата.

Ценность имеющихся ресурсов будет низка, если даже их значительное увеличение не приведет к существенному улучшению целевой функции, и, наоборот, те ресурсы, которые сдерживают повышение качества в первую очередь, имеют наибольшую ценность. Таким образом, параметры  $\lambda_i$  характеризуют относительную ценность ограничений  $b_j$ , их еще называют теневыми или, точнее, оптимальными теневыми ценами, оценивающими

влияние ограничений не на любую, а на оптимальную систему с выбором оптимальных параметров  $x_i$ , при рациональном использовании ресурсов. При этом считается, что общая теневая цена ресурсов, отводимых на каждую из выбираемых переменных  $x_i$ , должна быть не меньше получаемого от этой переменной <<дохода>>  $c_i$  в целевой функции

$$\sum_{j=1}^m a_{ji} \lambda_j \geq c_i.$$

Кроме того, оптимальные теневые цены минимизируют общую стоимость  $\sum_{j=1}^m b_j \lambda_j$  ресурсов  $b_j$ . Это и порождает двойственную задачу (1.10).

Существует практическая польза от двойственных переменных [72]. Во-первых, удобнее вместо прямой задачи решать двойственную, когда число ограничений  $m$  в исходной задаче значительно больше числа  $n$  переменных, после чего легко найти исходные переменные  $x_i$ . Во-вторых, большие значения двойственных неотрицательных переменных  $\lambda_j$  дают точный адрес тех узких мест или активных ограничений, изменение которых позволит существенно улучшить оптимальную структуру системы.

#### 1.1.4 Метод ветвей и границ в задаче построения маршрута

Известно [20], что задачу поиска оптимальной траектории для системы ВС, как прикладную задачу оптимизации, иногда целесообразно свести к задаче целочисленного программирования. При решении подобного класса задач широко применяются комбинаторные методы, основанные на упорядоченном переборе наиболее перспективных вариантов и которые делятся на две основные группы методов: динамического программирования и ветвей и границ.

В литературе [73] также приводятся сведения о том, что для решения многомерных задач оптимизации целесообразно совместное применение указанных выше методов. При этом решение самой задачи однозначно разбивается на этапы. На первом этапе применяется метод динамического программирования для получения решения отдельно по каждому из ограничений. Результаты, полученные методом динамического программирования, используются для оценки границ значений целевой функции. На втором этапе применяется метод ветвей и границ для определения способа разбиения множества допустимых вариантов решений на подмножества, результатом чего является построенное дерево возможных вариантов, и способ оценки верхней границы целевой функции.

Ниже приведены результаты анализа особенностей применения указанных выше методов применительно к задаче, решенной в диссертации.

Метод ветвей и границ представляет собой один из комбинаторных методов. Его сущность заключается в упорядоченном переборе вариантов решений и рассмотрении только тех, которые, по определенным признакам, оказываются перспективными. Остальные варианты решений - исключаются.

Упорядоченный перебор вариантов решений при применении метода ветвей и границ осуществляется путем последовательного разбиения множества допустимых решений на подмножества. Элементы разбиения, получаемые при выполнении шагов алгоритма, реализующего данный метод, подвергаются проверке, осуществляемой посредством вычисления оценки снизу для целевой функции на данном подмножестве. В результате определяется, содержит данное подмножество оптимальное решение или нет. В качестве критерия исключения соответствующего подмножества используется сравнение с наилучшим из найденных решений.

Применение метода ветвей и границ для решения конкретной задачи подразумевает реализацию и выполнение следующих процедур:

- 1) ветвления множества возможных решений;
- 2) вычисления нижних и верхних оценок целевой функции.

Организация и выполнение процедуры ветвления множества возможных решений, в зависимости от особенностей решаемой задачи, может быть реализовано одним из двух способов:

1. ветвление множества допустимых решений исходной задачи  $D$ ;
2. ветвление множества  $D'$  получаемого из  $D$  путем снятия условия целочисленности на переменные.

Способ ветвления множества допустимых решений исходной задачи заключается в выделении подобластей возможных решений путем фиксации значений отдельных компонент целочисленных переменных.

Способ ветвления множества получаемого из множества допустимых решений исходной задачи путем снятия условия целочисленности имеет более широкую область применения, чем первый. Для осуществления ветвления некоторой области  $D_i'$  этим способом на  $D_i'$  решается оптимизационная задача с целевой функцией исходной задачи и действительными переменными.

Процедура ветвления реализуется в случае, когда в оптимальном решении значение хотя бы одной целочисленной переменной по исходной постановке задача не является целочисленным. Тогда среди таких переменных выбирается одна, например  $j$ -я, значение которой в найденном оптимальном решении обозначим через  $x^0[j]$ . Далее область  $D_i'$  разделяется на две подобласти  $D_{i1}'$  и  $D_{i2}'$  следующим образом:

$$\begin{aligned} D_{i1}' &= D_i' \cap (x[j] \leq [x^0[j]]); \\ D_{i2}' &= D_i' \cap (x[j] \geq [x^0[j]] + 1); \end{aligned} \tag{1.11}$$

где  $[x^0[j]]$  – целая часть значения  $x^0[j]$ .

На рис. 1.11 представлена условная геометрическая интерпретация ветвления.

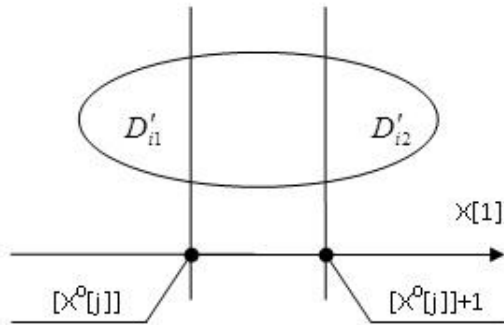


Рисунок 1.11 – Иллюстрация условной геометрической интерпретация ветвления

Анализ рисунка показывает, что из области  $D_i'$  удаляется часть между плоскостями вновь введенных ограничений. Так как переменная  $x[j]$ , по условиям области допустимых решений исходной задачи – целочисленная, то из подобласти допустимых решений исходной задачи  $D_i$  ( $D_i \subset D_i'$ ) не исключается ни одного решения.

Для формирования нижних и верхних границ оценок целевой функции задача дискретного программирования была представлена в виде:

$$\min_{x \in D} f(x)$$

где  $x$  – вектор оптимизационных переменных, среди которых часть действительных, а часть целочисленных;  $f(x)$  – в общем случае нелинейная целевая функция;  $D$  – область допустимых решений задачи дискретного программирования общего вида.

Нижние оценки целевой функции в зависимости от выбранного способа ветвления определяются либо для подобластей  $D_i \subset D$ , либо для подобластей  $D_i' \subset D'$  ( $D_i'$  и  $D'$  получены из соответствующих множеств  $D_i$  и  $D$  путем снятия условий целочисленности на дискретные переменные).

Математическое описание нижней оценки целевой функции  $f(x)$  на множестве  $D_i$  (или  $D_i'$ ) имеет вид:

$$\xi_i = \inf_{x \in D_i} f(x)$$

Главным условием выбора нижних оценок решения для каждой конкретной задачи является условие ее близости к действительным значениям  $\min f(x)$ .

Таким образом, математическая запись способа вычисления нижних оценок целевой функции имеет вид:

$$\xi_i = \inf_{x \in D'_i} f(x)$$

Определенная таким образом  $\xi_i$  является нижней оценкой  $f(x)$  на  $D_i$  (или  $D'_i$ ), так как  $D_i \subset D'_i$ .

Если при решении задачи установлено, что  $D'_i = \emptyset$ , то для общности следует полагать, что  $\xi_i = \infty$  [32].

Совместно с нижней оценкой в методе ветвей и границ используются верхние оценки  $f(x)$ . Как правило, вычисляют лишь одно значение верхней оценки  $\eta(D)$ , которую определяют как значение целевой функции для лучшего найденного допустимого решения исходной задачи. Такую верхнюю оценку иногда называют рекордом. Если же можно для решаемой задачи достаточно просто и точно получить верхние оценки  $f(x)$  для отдельных множеств, образующихся при ветвлении, то их необходимо использовать в методе для уменьшения вычислительной сложности процесса решения. При использовании единой верхней оценки ее первоначальное значение обычно полагают равным бесконечности ( $\eta(D) = \infty$ ), если, конечно, из априорных соображений не известно ни одного допустимого решения исходной задачи. При нахождении первого допустимого решения  $x_\partial \in D$ :

$$\eta(D) = f(x_\partial)$$

Затем при определении лучшего допустимого решения  $x'_\partial \in D(f(x'_\partial) < f(x_\partial))$  верхнюю оценку корректируют:

$$\eta(D) = f(x'_\partial)$$

Таким образом, значение верхней оценки может лишь уменьшаться в процессе решения задачи.

## **1.2. Алгоритм построения разомкнутого маршрута**

### **1.2.1. Разработка алгоритма логического управления маршрутным полетом**

Существующие в настоящее время подходы к решению задачи планирования маршрута полета ВС в первую очередь относятся к процессу поочередного облета и наблюдения неподвижных пунктов маршрута. В исходных данных указаны координаты местоположения наблюдаемых ПМ.

Важной является разработка системы планирования оптимального маршрута через пункты, информация о которых известна заранее или поступает в ходе полета. В поставленной задаче координаты пунктов полетного задания, высота их пролета, а так же требования к времени выполнения задания считаются заданными на верхнем уровне планирования полета. Этот уровень может быть реализован как диспетчерским пунктом управления ВС, информация с которого передается в БЦВМ по радиоканалам обмена данными, так и в виде бортовой системы планирования маршрута. Так же на данном уровне управления формируется информация о препятствиях на пути маршрута. Алгоритм выявления препятствий и облета препятствий в работе не рассматривается.

Координаты текущего ППЗ подаются на нижний уровень планирования, который проверяет предполагаемый маршрут полета на оптимальность. В случае, если текущий маршрут оптимален, управление передается на исполнительный уровень, иначе строится новый маршрут облета промежуточных пунктов полетного задания, и на исполнительный уровень подаются координаты очередного ППЗ.

Исполнительный уровень формирует управляющий сигнал для регуляторов, обеспечивающий полет к цели, учитывая динамические характеристики ВС.

На рисунке 1.12 представлена структурная схема контура управления полетом ВС, содержащая:



разработанную логическую систему управления маршрутным полетом ВС;

- преобразователь координат ПМ в задающие сигналы – текущий угол курса и высоту, которые обеспечат полет к выбранной нейросетевой системой цели;

- регуляторы курса, угла крена, высоты полета, угла тангажа, скорости полета.

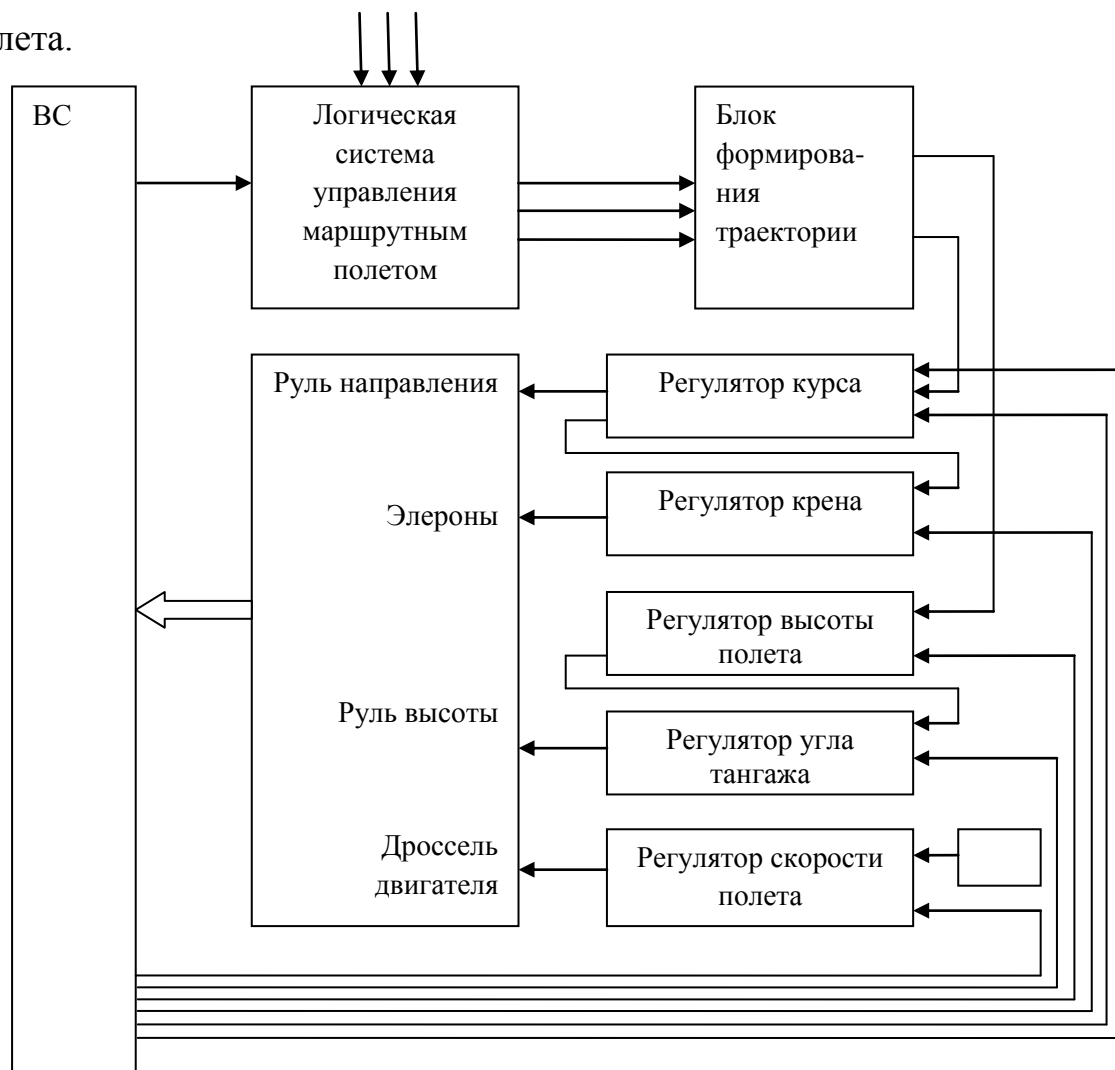


Рисунок 1.12 – Структурная схема контура управления полетом ВС

Ниже приведены результаты анализа особенностей функционирования элементов контура управления ВС.

Элемент - регулятор курса – предназначен для обеспечения полета ВС к выбранному ПМ. Его функционирование осуществляется на основе сравнения параметров сигналов текущего и желаемого значения курса, поступающих на его вход. В результате сравнения на выходе регулятора

формируется сигнал рассогласования, параметры которого пропорциональны необходимому отклонению управляющего органа - руля направления, а также сигнал по углу крена.

Основным назначением регулятора угла крена является формирование сигнала, являющимся входным сигналом для приводов элеронов. Этот сигнал рассогласования формируется в результате сравнения сигналов, сформированных регулятором угла курса, и текущим значением угла крена

Регулятор высоты полета предназначен для формирования сигнала рассогласования между требуемым и текущим значениями высоты полета ВС. Этот сигнал является сигналом управления ВС по углу тангажа.

В регуляторе угла тангажа, на основе входного сигнала рассогласования между задающим сигналом по углу тангажа, сформированным регулятором высоты полета, и текущим значением угла тангажа формируется управляющий сигнал для привода руля высоты.

Регулятор скорости полета обеспечивает выдерживание заданного значения скорости полета.

Поскольку на практике применяются два способа управления скоростью полета ВС: с помощью угла тангажа, т.е. с применением руля высоты, и с помощью тяги двигателя, т.е. с применением дроссельной заслонки двигателя, регулирующей подачу топлива, то в работе рассматривается регулятор скорости полета с управлением положения дроссельной заслонки. Считая, что полет должен проходить с постоянной скоростью, введен задающий сигнал по скорости  $V_3$ .

### **1.2.2 Алгоритм работы системы планирования маршрута**

Алгоритм состоит из нескольких основных блоков. В первом блоке производится запись исходных данных – набора координат пунктов следования. Во втором блоке производится обработка полученных данных – формирование матрицы расстояний и вывод маршрутной карты на экран. В третьем блоке производится расчет оптимального маршрута и вывод

полученного маршрута на экран. Общий вид алгоритма представлен на рисунке 1.13.

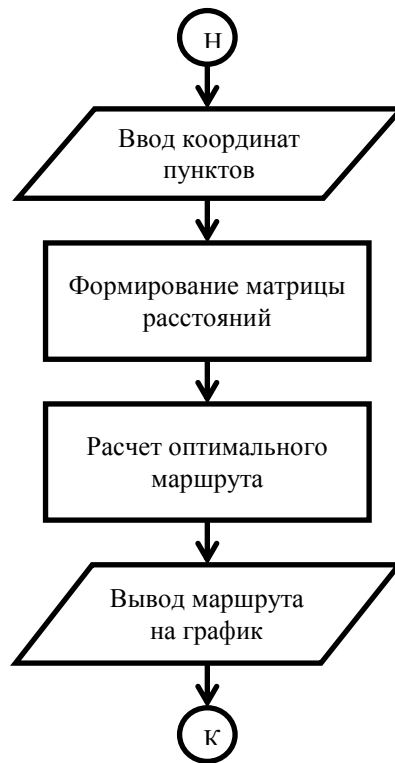


Рисунок 1.13 – Общий вид алгоритма

Рассмотрим первый блок подробнее. В нём производится запись исходных данных в двумерный массив. Блок-схема первого блока представлена на рисунке 1.14.

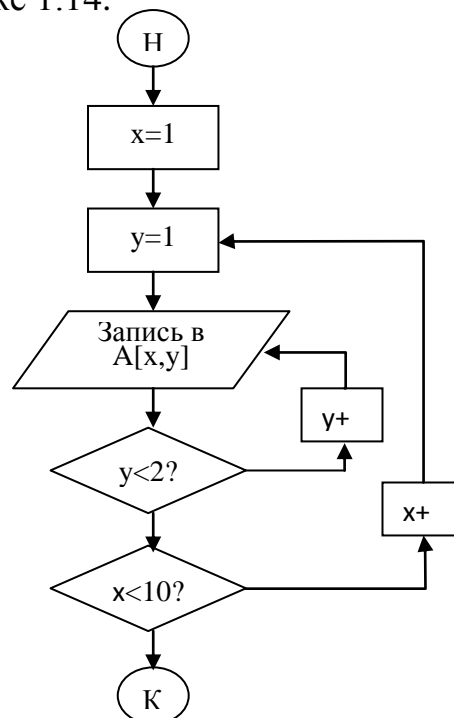


Рисунок 1.14 – Блок записи входной информации

Во второй части алгоритма входная информация из массива координат обрабатывается – рассчитываются расстояния между пунктами маршрута и полученные данные записываются в двумерный квадратный массив. Блок-схема второй части алгоритма приведена на рисунке 1.15.

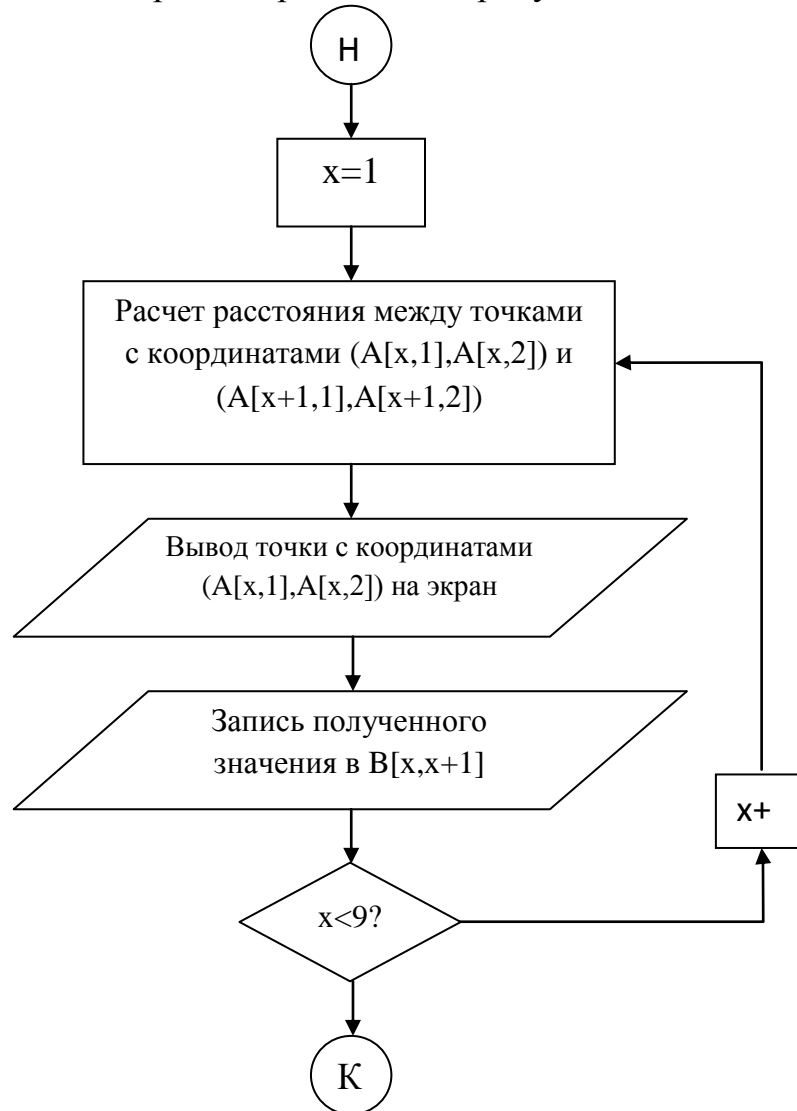


Рисунок 1.15 – Блок-схема второй части алгоритма, формирование матрицы расстояний

В третьей части алгоритма производится расчет оптимального маршрута полета путем обработки матрицы расстояний. Выбираются отрезки между точками, входящие в окончательный маршрут, выводятся на экран. Блок-схема третьей части алгоритма приведена на рисунке 1.16.

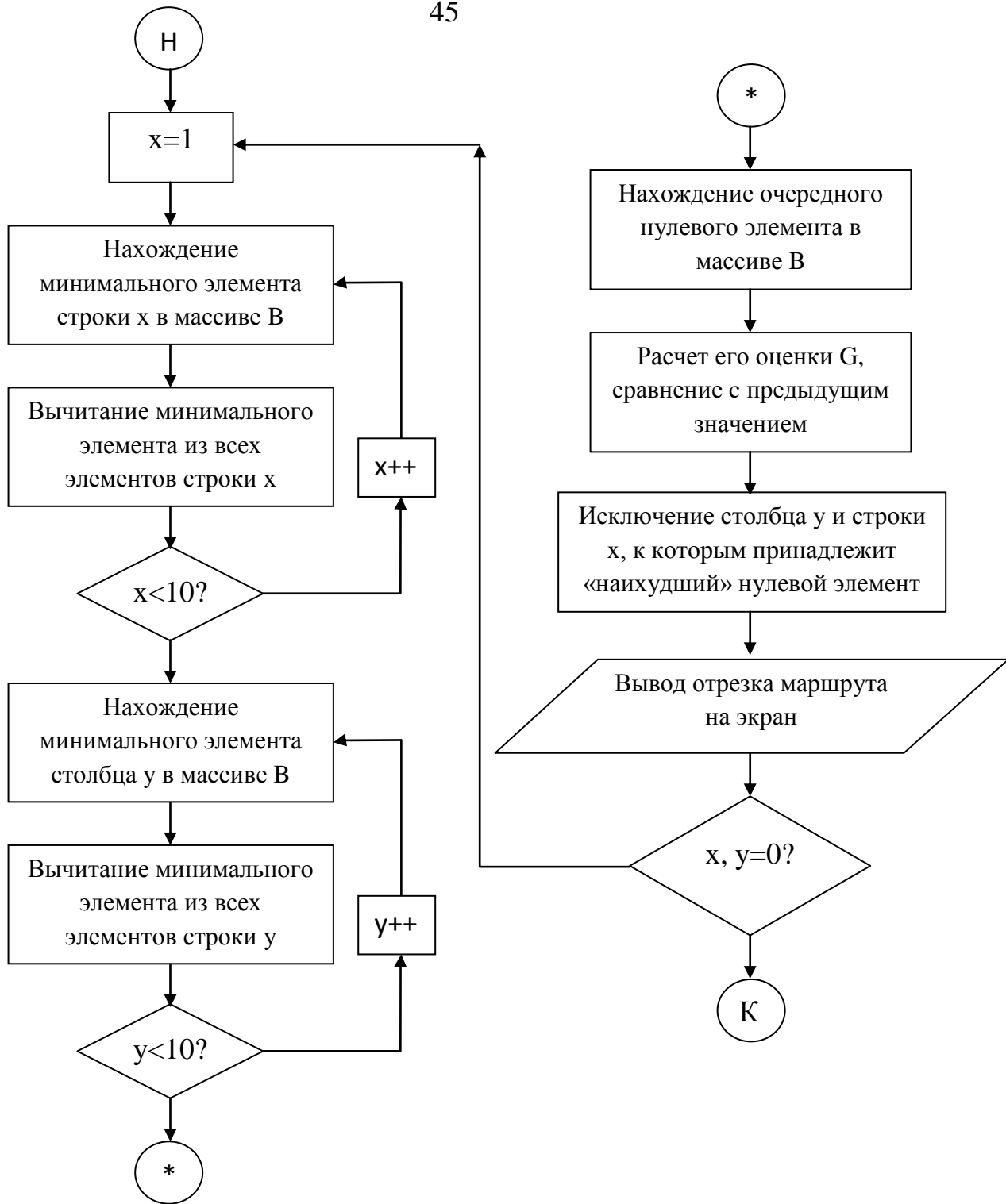


Рисунок 1.16 – Часть алгоритма, выполняющая нахождение оптимального маршрута

### 1.2.3 Моделирование и описание программы

Для моделирования работы предложенного алгоритма была использована программа на языке Delphi [4].

С целью проверки правильности работы, программа выводит репортаж после каждого выбора варианта действий или назначения новых ПППЗ.

В качестве тестового задания был рассмотрен маршрут из девяти точек, одна из которых – начальная. Расположение и порядок точек показаны на рис. 1.17, координаты точек даны в табл. 1.4.

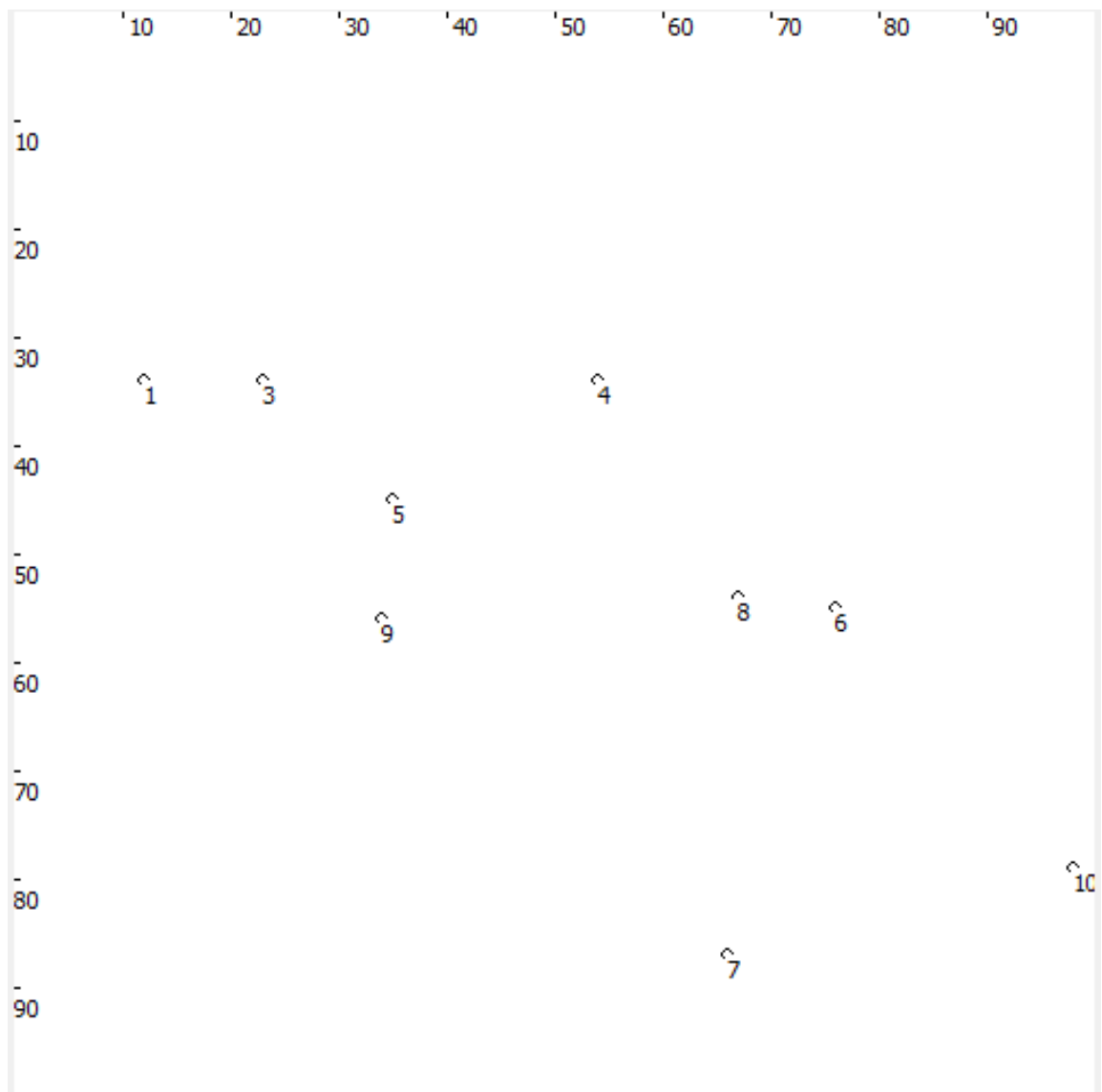


Рисунок 1.17 – Набор тестовых точек маршрута

Таблица 1.4 – Координаты тестовых точек

№ПППЗ	X	Y
1	12	54
2	54	34
3	23	34
4	54	34
5	35	45
6	76	55
7	66	87
8	67	54
9	34	56
10	98	79

Программа запускается с введенными в нее тестовыми данными. Первый этап работы программы – формирование матрицы расстояний и нанесение пунктов маршрута на график. Составленная матрица расстояний приведена на рис 1.18. Затем, после проверки пользователем правильности введенных данных, и подачи команды на продолжение работы, программа рассчитывает оптимальный маршрут следования и выводит его на график. Результат работы программы по планированию маршрута приведен на рис. 1.19.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	~	42	11	42	25	67	75	58	31	~
2	42	~	31	0	21	30	54	23	29	62
3	11	31	~	31	16	57	68	48	24	87
4	42	0	31	~	21	30	54	23	29	62
5	25	21	16	21	~	42	52	33	11	71
6	67	30	57	30	42	~	33	9,0	42	32
7	75	54	68	54	52	33	~	33	44	32
8	58	23	48	23	33	9,0	33	~	33	39
9	31	29	24	29	11	42	44	33	~	68
10	~	~	~	~	~	~	~	~	~	~

Рисунок 1.18 – Матрица расстояний, составленная программой

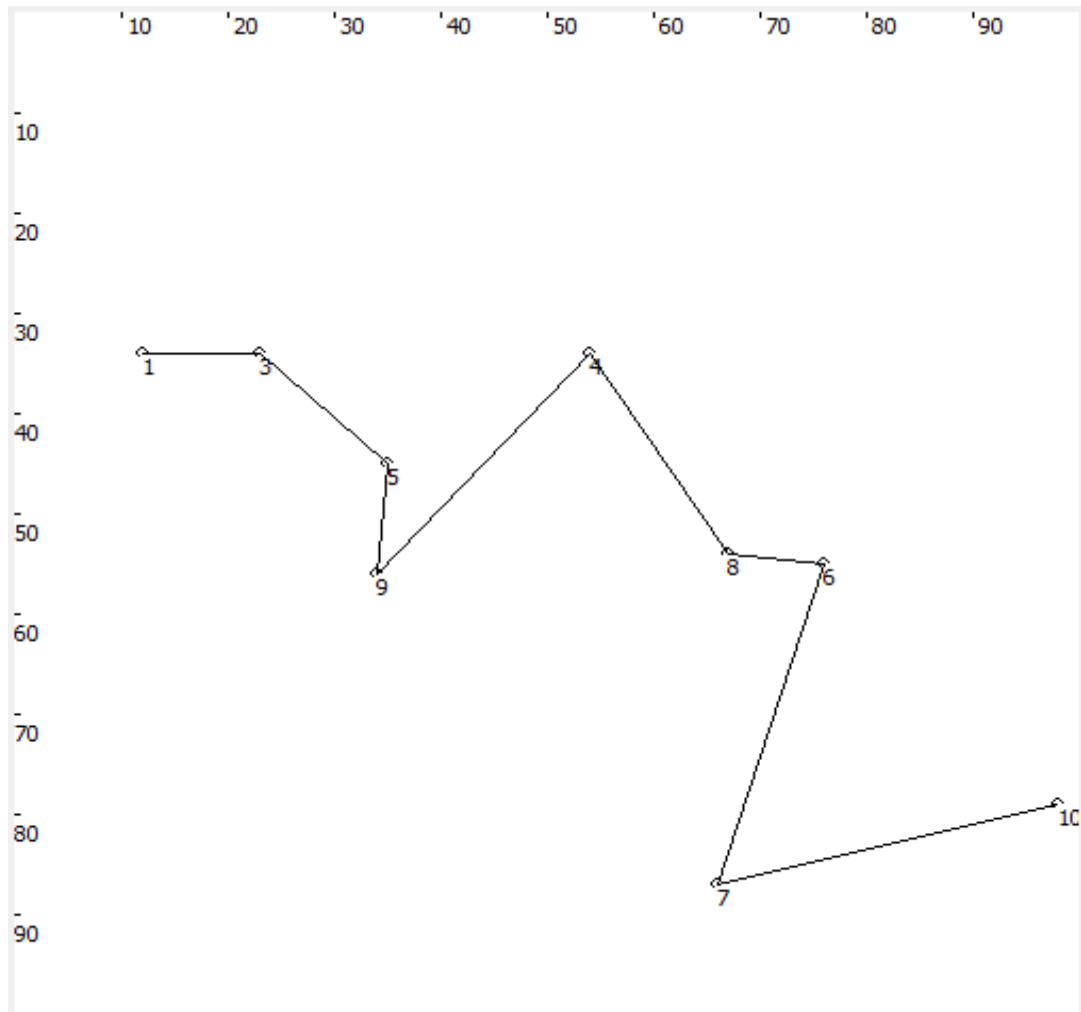


Рисунок 1.19 – Результат работы программы

### Выводы по первой главе

1. Обосновано, что для решения задач, связанных с оперативным планированием маршрута движения ВС целесообразно комплексное применение методов ветвей и границ и динамического программирования. При этом, метод динамического программирования применяется для получения решения задачи отдельно по каждому из ограничений. Результаты, полученные при решении функционального уравнения динамического программирования, позволяют осуществить оценку границ целевой функции. Применение метода ветвей и границ позволяет найти способ разбиения всего множества допустимых вариантов решения на



подмножества, то есть определить способ построения дерева возможных вариантов решений, и способ оценки верхней границы целевой функции.

2. Комплексное применение этих методов позволит повысить эффективность решения дискретных задач оптимизации маршрута движения ВС. Решение задачи оптимизации маршрута движения группы ВС связано с решением задач большой размерности. Для уменьшения количества членов оптимальной последовательности целесообразно использовать дополнительные условия отсечения.

3. Сделан вывод о важности разработки системы планирования оптимального маршрута через пункты, информация о которых известна заранее или поступает в ходе полета. В поставленной задаче координаты пунктов полетного задания, высота их пролета, а так же требования к времени выполнения задания считаются заданными на верхнем уровне планирования полета. Данный уровень может быть реализован как диспетчерским пунктом управления ВС, информация с которого передается в БЦВМ по радиоканалам обмена данными, так и в виде бортовой системы планирования маршрута. На верхнем уровне управления формируется информация о препятствиях на пути маршрута.

4. Координаты текущего ППЗ подаются на нижний уровень планирования, который проверяет предполагаемый маршрут полета на оптимальность. В случае, если текущий маршрут оптимален, управление передается на исполнительный уровень, если нет, то тогда строится новый маршрут облета промежуточных пунктов полетного задания, и на исполнительный уровень подаются координаты очередного ППЗ.

## 2. Разработка алгоритма прогноза управляющих воздействий

### 2.1. Математическая формализация задачи прогноза управления на участок программного управления

Пусть объект в достаточно общем виде описывается системой линейных дифференциальных уравнений:

$$\dot{Y}(t) = BY[kT] + AU(kT) + CF(kT) \quad (2.1)$$

Движение объекта осуществляется по алгоритмам, записанным в память БЦВМ. Система управления парирует внешние возмущения и объект движется по траектории с расчетными фазовыми координатами.

Тогда цель исследования можно сформулировать как решение задачи выработки некоторого управления на периоде программного управления в функционировании СУ:

$$u(t_B + \tau) = u^*(q, t_B + \tau), \quad (2.2)$$

где  $u^*$  - значение прогнозируемого управления;

$\tau = T_{\text{пр}}$  - интервал программного управления;

$q$  - совокупность параметров, характеризующих значение  $u^*$ , которое обеспечило бы устойчивость и требуемую точность движения.

Выработанное управление  $u^*$  должно обеспечить минимизацию следующего критерия качества.

$$J = \int_{t_B}^{t_{B0}} \left\{ Y(t_B + \tau) - Y_{\text{ид}} \frac{[u^*(q, \tau)]}{G} \right\}^2 d\tau. \quad (2.3)$$

$\forall u^* \in U, \forall q \in Q$

Потребуем, чтобы данная задача решалась с учетом выполнения условий требуемой точности  $\varepsilon$ , которые входят в (2.3) в качестве ограничения  $G$ :

$$\varepsilon < \varepsilon_{\text{доп}},$$

которое определяется эффективностью рулевых органов.

## 2.2. Исследование влияния порядка экстраполяторов на устойчивость системы стабилизации

Проанализируем задачу увеличения периода выдачи управляющих воздействий, путем включения в контур системы стабилизации экстраполяторов более высокого порядка, чем нулевого.

Проведем замену экстраполятора нулевого порядка на экстраполятор первого порядка.

Вместо кусочно-постоянной получаем характеристику, линейно изменяемую на периоде дискретности. Как показал анализ, экстраполяторы влияют на устойчивость системы.

Экстраполятор нулевого порядка увеличивает запас по амплитуде, но уменьшает запас по фазе. Фиксирующее звено нулевого порядка ведет себя как цепь запаздывания. Запаздывающий элемент первого порядка дает слишком большой фазовый сдвиг и таким образом уменьшает степень устойчивости системы.

Рассмотрим возможность коррекции системы, то есть формирование такого алгоритма  $D(z)$ , который обеспечил бы требуемый запас по амплитуде и фазе с целью обеспечения устойчивости.

Воспользуемся приближенным способом построения логарифмических частотных характеристик Федорова С.М. [38].

Если передаточная функция непрерывной части описывается в следующем виде:

$$W(p) = \frac{k \prod_{j=1}^m (1 + \tau_j p)}{p^2 \prod_{i=1}^n (1 + T_i p)} \quad (2.4)$$

и выполняется условие, что величина, обратная периоду дискретности  $T_0$ , выбрана большей частоты среза, то предполагая, что постоянным времени  $\tau_1, \dots, \tau_m, T_1, \dots, T_q$  соответствуют сопрягающие частоты, меньшие частоты среза, а постоянным времени  $T_{q+1}, \dots, T_n$  – частоты, большие частоты среза, низкочастотную часть можно аппроксимировать выражением:

$$W_H(p) = \frac{k}{p^2} + \frac{kT}{p} + k \sum_{i=1}^q \frac{N_i}{1 + T_i p} \quad (2.5)$$

С учетом экстраполятора нулевого порядка перепишем передаточную функцию в виде

$$W_H(z) = \frac{kT_0^2}{2} \frac{z+1}{(z-1)^2} + \frac{kTT_0}{z-1} + k \sum_{i=1}^q \frac{N_i(1-d_i)}{z-d_i}, \quad (2.6)$$

где  $d_i = e^{-\frac{T_0}{T_i}}$

Переходя к абсолютной псевдочастоте и опуская промежуточные преобразования, получим:

$$W_H(j\lambda) = \frac{k \prod_{j=1}^m (1 + \lambda \tau_j)}{(j\lambda)^2 \prod_{i=1}^q (1 + j\lambda T_i)} \left(1 - j\lambda \frac{T_0}{2}\right) \quad (2.7)$$

Передаточная функция в высокочастотной области может быть аппроксимирована выражением:

$$W_B(p) = \frac{\omega_c}{p} + \omega_c \sum_{i=1+q}^n \frac{N_i}{1+T_i p} \quad (2.8)$$

Аналогично, переходя к абсолютной псевдочастоте, получим:

$$W_B(j\lambda) = \frac{\omega_c (1 - j\lambda \frac{T_0}{2}) \left[ 1 + j\lambda (\frac{T_0}{2} - T_\Sigma) \right]}{j\lambda (1 + j\lambda \frac{T_0}{2})} \quad (2.9)$$

На основании изложенного, приближенное выражение дискретной передаточной функции для всего частотного диапазона можно записать в виде:

$$W_B(j\lambda) = \frac{k(1 - j\lambda \frac{T_0}{2}) \left[ 1 + j\lambda (\frac{T_0}{2} - T_\Sigma) \right] \prod_{j=1}^m (1 + j\lambda T_j)}{(j\lambda)^2 \prod_{i=1}^q (1 + j\lambda T_i) (1 + j\lambda \frac{T_0}{2})} \quad (2.10)$$

Воспользовавшись данными выражениями, проанализируем возможность коррекции следующей системы (2.11).

Передаточная функция экстраполятора первого порядка в изображении Лапласа имеет вид:

$$W_\Delta(p) = \left( \frac{1 - e^{-Tp}}{p} \right) \frac{T_p + 1}{T} \quad (2.11)$$

В общем виде низкочастотная и высокочастотная части могут быть описаны передаточными функциями в изображении Лапласа следующим образом:

$$W_H(p) = \frac{k(T_1 p + 1)}{T_1 p^2} \quad (2.12)$$

$$W_B(p) = \frac{1}{T^2 p^2 + 1} \quad (2.13)$$

Переходя к абсолютной псевдочастоте, получим:

$$W_H(j\lambda) = \frac{k(T_1 j\lambda + 1)(1 - j\lambda \frac{T_0}{2})}{T_1(j\lambda)^2} \quad (2.14)$$

$$W_B(j\lambda) = \frac{(1 - j\lambda \frac{T_0}{2}) \left( \left[ 1 + j\lambda \left( \frac{T_0}{2} - T_\Sigma \right) \right] \right)}{T_2(j\lambda)^2 + 1} \quad (2.15)$$

Тогда для всего частотного диапазона с учетом экстраполятора первого порядка выражение дискретной передаточной функции примет вид:

$$W(j\lambda) = \frac{k(T_1 j\lambda + 1)(1 - j\lambda \frac{T_0}{2}) \left[ 1 + j\lambda \left( \frac{T_0}{2} - T_2 \right) \right]}{T_1(j\lambda)^2 [T_2(j\lambda)^2 + 1]} \quad (2.16)$$

В работе была рассмотрена система угловой стабилизации пассажирского самолета среднего класса. Подставив соответствующие значения коэффициентов, получим передаточную функцию нескорректированной системы:

$$W(j\lambda) = \frac{13,7(j\lambda + 1)(1 - 0,5j\lambda)[1 + 0,31j\lambda]}{(j\lambda)^2 [0,19(j\lambda)^2 + 1]} \quad (2.17)$$

Построим приближенные ЛПЧХ для  $T_0 = 1$  с. Найдем сопрягающие абсолютные псевдочастоты:

$$\omega_1 = 1; \omega_2 = 2; \omega_3 = 3,2; \omega_4 = 5,3.$$

Определим псевдочастоту среза:

$$\lambda_{CP} \leq \left( \frac{M}{M+1} \right) \frac{2}{T_0}, \quad (2.18)$$

где  $M$ -показатель колебательности.

Значение  $M$  выбирается равным 1,3, тогда частота среза

$$\lambda_{CP} \leq 1,12.$$

Выберем  $\lambda_{CP} = 1$ . Найдем ширину участка амплитудной псевдочастотой характеристики с наклоном  $-20$  дБ/дек:

$$\Delta\lambda = \left( \frac{M+1}{M-1} \right) = 7,7.$$

Скорректировать данную систему на частоте среза при любом периоде дискретности не удастся.

Таким образом, введение экстраполятора более высокого, чем нулевой, порядка в контур системы управления при увеличении периода дискретности делает систему неустойчивой. Скорректировать систему при данных условиях на расчетной частоте среза не удастся.

Следовательно, решить задачу выработки управляющих воздействий с большим периодом дискретности путем повышения порядка экстраполятора нельзя. В предложенной выше постановке формировать управления возможно лишь с использованием экстраполятора нулевого порядка.

### 2.3. Обоснование и выбор метода прогноза

Одним из возможных путей формирования управляющих воздействий является прогнозирование сигналов управления на интервал программного управления. Будем считать, что на протяжении всего программного управления запоминаются значения управляющих сигналов, подаваемых на органы управления в каждом такте БЦВМ. Таким образом, управляющие воздействия как случайный процесс можно представить в виде:

$$\bar{u}(t) = \{u(t_B), u(t_B - 1), \dots, u(t_0)\}. \quad (2.19)$$

Обозначим длительность воздействия и восстановления информации ( $T_{ПР}$ ) за  $\tau$ . Поставим задачу получения оценки  $\hat{u}(t_B + \tau)$ , то есть необходимо получить значения управления  $u$  на всем периоде  $\tau$  путем прогноза управляющих воздействий.

Вопросом прогнозирования посвящены работы многих авторов. В них закон управления рассчитывается так, чтобы его выход по возможности точнее соответствовал требуемому будущему состоянию [60]. Предполагается наличие оптимального фильтра и устройства прогноза, а закон управления рассчитывается из условия минимизации некоторого критерия, зависящего от предсказанного выхода.

Если физический объект описан выражением:

$$\dot{x}_{k+1} = f(x_k, u_k, \omega_k), \quad z_k = q(x_k, r_k) \quad (2.20)$$

где  $\omega$ - $p$  - мерный вектор возмущений;

$z$ - $m$  - мерный вектор измерений;

$r$ - $m$  - мерный вектор ошибки измерений.

и решение задачи оптимальной фильтрации  $\hat{x}_{k/k}$  дано для всех моментов времени, то оптимальное предсказание  $\hat{x}_{k+1/k}$  можно вычислить по выходу фильтра и физическим характеристикам:

$$\dot{\hat{x}}_{k+1/k} = f_k^*(\hat{x}_{k/k}, u_k) \quad (2.21)$$

В данном случае задача прогнозирования решается для получения одношагового оптимального закона управления.

Для получения оценки состояния  $\hat{x}(k)$  можно воспользоваться следующим соотношением:

$$\hat{x}(k/j) = \varphi_k[z(i)], \quad i = \overline{1, j}, \quad (2.22)$$

где  $z(1), \dots, z(j)$  - измерения.

Полученная оценка должна минимизировать критерий качества вида [42]:

$$J[\hat{x}(k/j)] = M\{L[\hat{x}(k/j)]\} \quad (2.23)$$



где  $L$  - допустимая функция потерь.

Опишем объект системой уравнений:

$$x(k+1) = \Phi(k+1, k)X(k) + \Gamma(k+1, k)\omega(k) \quad (2.24)$$

$$z(k+1) = H(k+1)X(k+1) + U(k+1), \quad (2.25)$$

Где  $k=0, N$  - дискретное время;

$\Phi$  - переходная матрица состояния размера  $n \times n$ ;

$\Gamma$  - переходная матрица возмущений размера  $n \times p$ ;

$H$  - матрица измерений размера  $m \times n$ .

модель (2.24), (2.25) имеет следующие свойства:

а) случайные процессы  $\{x(k), k = \overline{0, N}\}$  и  $\{z(i), i = \overline{1, j}\}$  - гаусовские с равными нулю математическими ожиданиями;

$$\text{б) } M[x(j)\omega^T(k)] = 0, \quad \forall k \geq j, j = \overline{0, N} ; \quad (2.26)$$

$$\text{в) } M[z(j)\omega^T(k)] = 0, \quad \forall k \geq j, j = \overline{1, N} ; \quad (2.27)$$

$$\text{г) } M[x(j)U^T(k)] = 0, \quad \forall k = \overline{1, N}, j = \overline{0, N} ; \quad (2.28)$$

$$\text{д) } M[z(j)U^T(k)] = 0, \quad \forall k = j, j, k = \overline{1, N} . \quad (2.29)$$

На основании данных свойств доказано, что для любой допустимой функции потерь оптимальное предсказание  $\hat{x}(k/j), \forall k > j$  может быть описано так:

$$\hat{x}(k/j) = \hat{O}(k, j)\hat{x}(j, j) \quad (2.30)$$

Оценка  $\hat{x}(k+1/k)$  может быть получена предсказанием значения случайной величины  $x(k+1)$  по предыдущим наблюдениям  $z(k-1)$  с последующей коррекцией предсказанного значения в соответствии с новой

информацией  $\tilde{z}(k/k-1)$ , содержащейся в текущем значении случайной величины  $z(k)$ .

Предсказанное значение  $x(k+1)$ , основанное на наблюдении  $z(k-1)$ , получают из  $\hat{x}(k/k-1)$  как результат невозмущенного перехода на один шаг вперед.

Пусть необходимо оценить  $x(t_2)$  при заданном множестве наблюдений  $z(t_1)$ , где  $t_1 < t_2$  [60], тогда искомый алгоритм предсказания будет иметь вид:

$$\hat{x}(t_2/t_1) = \hat{O}(t_2, t_1)\hat{x}(t_1), \quad \forall t_2 \geq t_1 \quad (2.31)$$

Данное выражение справедливо как для непрерывного, так и для дискретного случаев, в зависимости от того, каким рассматривать моменты времени.

Рассматривая последовательное предсказание, можно заметить, что  $t_1$  или  $t_2$  или оба вырастают с течением времени. Различают три вида предсказаний:

- предсказание с фиксированным интервалом:  $t_2 = t$ ,  $t_1$  – фиксировано;
- предсказание с фиксированной точкой:  $t_1 = t$ ,  $t_2$  – фиксировано;
- предсказание с фиксированным упреждением:  $t_1 = t$ ,  $t_2 = t+T$ ,

$T$  – фиксированное время упреждения.

Выражение для предсказания с фиксированным интервалом примет вид:

$$\hat{x}(t/t_1) = \hat{O}(t, t_1)\hat{x}(t_1), \quad \forall t > t_1 \quad (2.32)$$

Оценка  $\hat{x}(t_1)$  получается с помощью алгоритма фильтрации. В ходе вычислений поэтому требуется лишь вычислить переходную матрицу состояния  $\Phi(t, t_1)$  из уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, t_1) = F(t)\Phi(t, t_1) \quad (2.33)$$

Для предсказания с фиксированной точкой уравнение предсказания имеет вид:

$$\hat{x}(t_2/t) = \hat{O}(t_2, t)\hat{x}(t), \quad \forall t \leq t_2 \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t_2, t) = -F(t)\Phi(t_2, t) \quad (2.35)$$

Предсказание с фиксированным упреждением представляет особый интерес. В этом случае требуется предсказать состояние на время  $T$  вперед. Выражение для оценки примет вид:

$$\hat{x}(t+T/t) = \hat{O}(t+T, t)\hat{x}(t). \quad (2.36)$$

Чтобы вычислить переходную матрицу состояния, требуется определить производную:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t+T, t) = \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi(\tau, t) \right] \Big|_{\tau=t+T} + \left[ \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\tau, t) \right] \Big|_{\tau=t+T} \quad (2.37)$$

Преобразуя, получим

$$\frac{d}{dt} \Phi(t+T, t) = F(t+T)\Phi(t+T, t) - \Phi(t+T, t)F(t) \quad (2.38)$$

Ошибка предсказания может быть получена в виде

$$\tilde{x}(t_2/t_1) = x(t_2) - \hat{x}(t_2/t_1), \quad (2.39)$$

в то время как  $x(t_2)$  можно представить в виде:

$$x(t_2) = \Phi(t_2, t_1)x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t_2, \tau)G(\tau)W(\tau)d\tau \quad (2.40)$$

С учетом (2.39) можно записать

$$\tilde{x}(t_2/t_1) = \Phi(t_2, t_1)\tilde{x}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t_2, \tau)G(\tau)W(\tau)d\tau \quad (2.41)$$

$$\forall t_2 > t_1$$

Из этого выражения может быть получена дисперсия ошибки.

В работе [29] предлагается обобщенный метод прогнозирования с использованием аппроксимации полезного сигнала с учетом корреляционной функции или корреляционной матрицы полезного сигнала. В качестве основного критерия определения вида аппроксимирующих функций принимается равенство вероятностных свойств полезного сигнала и вероятностных свойств аппроксимирующего его сигнала.

Если считать, что математическое ожидание случайного процесса ошибок измерений равно нулю, то вероятностные свойства полезного сигнала будут определяться только его корреляционной функцией для непрерывного и корреляционной матрицей для дискретного сигнала [10].

Дискретный аппроксимирующий сигнал может быть представлен в виде:

$$\bar{x}^* = A\varphi, \quad (2.42)$$

где  $A$  - матрица-строка  $m$  - порядка коэффициентов аппроксимации;

$\Phi$  - матрица размерности  $m \times n$ , строки которой являются координатами дискретных аппроксимирующих функций.

Корреляционная матрица процесса, описываемого (2.42), определяется зависимостью:

$$K_x^* = M\{\varphi^T A^T A \varphi\} \quad (2.43)$$

Так как в (2.43) случайными являются коэффициенты аппроксимации, то последняя зависимость преобразуется к виду:

$$K_x^* = \varphi^T M\{A^T A\} \varphi \quad (2.44)$$

Из условия некоррелированности коэффициентов аппроксимации и равенства их дисперсий следует, что

$$M[A^T A] = I \quad (2.45)$$

Тогда (2.44) примет вид:

$$K_{\bar{x}}^* = \varphi^T \varphi \quad (2.46)$$

Выражение (2.46) можно переписать в виде:

$$K_{ij}^* = \sum_{k=1}^m \varphi_{ki} \varphi_{kj}, \quad i, j = \overline{1, N}. \quad (2.47)$$

При определении  $i$  – ой ординаты  $k$  – ой аппроксимирующей функции  $i$  – ые ординаты  $j$  – ой аппроксимирующей функции  $\varphi_{ij}$  принимаются равными нулю при условии  $j > k$ , то есть

$$\varphi_{ij} = 0, \quad \forall j > k \quad (2.48)$$

тогда на  $i$  – ом шаге:

$$K_{ii}^* = \sum_{k=1}^m \varphi_{ki}^2 = \varphi_{1i}^2 + \dots + \varphi_{i-1,i}^2 + \varphi_{ii}^2 + \varphi_{i+1,i}^2 + \dots$$

С учетом (2.48) можно записать:

$$\varphi_{ii} = \sqrt{K_{ii}^* - \sum_{k=1}^{i-1} \varphi_{ki}^2} \quad (3.53)$$

Исходя из условия

$$K_{ij}^* = \sum_{k=1}^m \varphi_{ki} \varphi_{kj} = \varphi_{1i} \varphi_{1j} + \varphi_{2i} \varphi_{2j} + \dots + \varphi_{i-1,i} \varphi_{i-1,j} + \varphi_{ii} \varphi_{ij} + \varphi_{i+1,i} \varphi_{i+1,j}, \quad \forall j > i \quad (2.49)$$

По получении на предшествующих шагах значениям  $\varphi_{kj}$ ,  $k = \overline{1, i}$  зависимость для определения  $i, j$  – го элемента аппроксимирующей функции будет представлена в виде:

$$\varphi_{ij} = \frac{K_{ij} - \sum \varphi_{ki} \varphi_{kj}}{\varphi_{ii}} \quad (2.50)$$

Анализ, приведенный в работе [42], показал, что такой подход к решению задачи прогнозирования дает достоверность экстраполяции, совпадающую с потенциально возможной.

Сложность заключается в получении корреляционной матрицы процесса, которая не всегда может быть найдена в реальных условиях. В [15] в качестве процедуры прогноза для оценки состояния системы предлагается аппроксимация вектора состояния  $Y$  ортогональными полиномами по методу наименьших квадратов [80] на предыдущем интервале, а затем эту аппроксимирующую функцию экстраполировать разложением в ряд Тейлора на следующем фиксированном интервале. Для аппроксимации предпочтительным считается использование полиномов Чебышева [34], так как они обладают свойством „почти равных ошибок“, заключающемся в том, что ошибка аппроксимации колеблется внутри диапазона измерений между двумя почти одинаковыми пределами.

Благодаря этому свойству не могут возникнуть очень большие ошибки аппроксимации. Таким образом, производится „демпфирование“ ошибок.

После определения наилучшего порядка полинома производится аппроксимация измерений. Использование полиномов Чебышева дает сглаженный выход  $z(t)$  в виде:

$$\hat{z}(t) = a_0 p_0(t') + \dots + a_m p_m(t') , \quad (2.51)$$

где  $\hat{z}$  - полиномиальная оценка;

$\Phi$  - смещенная шкала времени, начинающаяся с нуля в момент первого из  $N+1$  измерений, к которым подгоняется полином.

Если ввести обозначение:

$$Y(t) = [Y_0 \dots Y_N]^T, \quad y_i = y(t - j\tau) \quad (2.52)$$

где  $\tau$  – интервал дискретности, то (2.51) примет вид:

$$z = \begin{bmatrix} z_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0(O) & \dots & p_m(O) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_0(N) & \dots & p_m(N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix}. \quad (2.53)$$

Значения  $a_i$  вектора  $A$  выбираются так, чтобы обеспечить минимизацию функционала:

$$J = \|Y - z\|^2 = \|Y - PA\|^2. \quad (2.54)$$

Тогда можно записать

$$A = [P^T P]^{-1} P^T Y \quad (2.55)$$

Выражение (2.53) можно представить в виде:

$$z(t) = P[P^T P]^{-1} P^T Y \quad (2.56)$$

Так как  $P_i(t)$  – ортогональные полиномы, то в общем виде можно записать:

$$z(t) = \sum_{j=0}^m \eta_j(t')^j \quad (2.57)$$

Аппроксимировав  $z$  в соответствии с (2.57) ортогональными полиномами, можно воспользоваться для экстраполяции полинома разложением в ряд Тейлора:

$$\hat{z}(t + \tau) = z(t) + \dots + \frac{\tau^m}{m!} z^{(m)}(t) \quad (2.58)$$

Тогда можно записать

$$z^{(k)} = \sum_{j=k}^m a_j p_j^{(k)}(t) \quad (2.59)$$

Следовательно

$$\hat{z}(t + \tau) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \tau^k z^{(k)}(t), \quad \forall \tau \in (0, T). \quad (2.60)$$

Подставляя (2.59) получим:

$$\hat{z}(t + \tau) = \sum_{k=0}^m \left\{ \frac{\tau^k}{k!} \sum_{j=k}^m [a_j P_j^{(k)}(t)] \right\} \quad (2.61)$$

Введем обозначения:

$$F = \begin{bmatrix} p_0 & 0 & \dots & 0 \\ p_1 & p_1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ p_m & p_m & \dots & p_m^{(n)} \end{bmatrix}, \quad (2.62)$$

$$\tau = \left[ 1, \tau, \frac{\tau^2}{2!}, \dots, \frac{\tau^m}{m!} \right]^T = [\tau_1, \dots, \tau_{m+1}]^T. \quad (2.63)$$

Подставляя в (2.61) значения (2.60), можно записать

$$z(t + \tau) = [F \tau]^T A = [F \tau]^T (P^T P)^{-1} P^T Y(t) \quad (2.64)$$

Таким образом, для формирования управляющих воздействий на интервале программного управления можно воспользоваться полиномиальной аппроксимацией значений сигналов управления с последующей экстраполяцией на фиксированный интервал времени.

При решении задачи прогноза управляющих воздействий на борту одним из основных требований является уменьшение времени на решение данной задачи. Полиномиальная аппроксимация с использованием ортогональных полиномов требует достаточно больших затрат.

Поэтому предложим комбинированный метод, включающий в себя вышеизложенный подход в сочетании с классическими методами полиномиальной аппроксимации.



## 2.4. Разработка алгоритма прогноза управляющих воздействий

Как было отмечено в предыдущем параграфе, задача экстраполяции решается в два этапа. На первом этапе получают аппроксимирующий полином, а затем разложением данного полинома в ряд Тейлора получают значения прогнозируемого управляющего воздействия.

Пусть по результатам предыдущих измерений известны дискретные значения сигналов управления, подаваемых на исполнительные органы. Требуется найти полином  $P(x)$ , который в данных точках принимал бы заданные значения  $y_i (i = \overline{0, m})$ . Тогда степень полинома не может быть меньше  $m$ , и полином  $P(x)$  может быть вычислен по интерполяционной формуле Лагранжа.

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n l_k(x) y_k = \sum_{k=0}^n y_k \prod_{i \neq k} \frac{x - x_i}{x^k - x_i} \quad (2.65)$$

Но при большом значении  $m$  использование интерполяционного полинома Лагранжа сопряжено с большими вычислительными затратами. Поэтому необходимо получить такой полином  $P(x)$ , который, имея степень  $n \ll m$  в точках  $x_i$ , принимал бы значения  $y_i$  пусть не точно, но по возможности с меньшей ошибкой.

Воспользовавшись методом наименьших квадратов, учитывая что все значения рассматриваемого процесса действительные, подберем коэффициенты  $a_k$  полинома.

$$P(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k, \quad n < m \quad (2.66)$$

В матричном виде (2.66) можно записать

$$P = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

Коэффициенты  $a_k$  полинома выбираются при условии, чтобы были выполнены  $m+1$  равенства:

$$P(t_i) - u_i = 0, \quad i = \overline{0, m} \quad (2.68)$$

В данном случае это невозможно, поэтому подбирают коэффициенты  $a_k$  так, чтобы сумма квадратов отклонений искомого полинома от данных значений  $u_i$  в данных точках была наименьшей. Таким образом, в качестве критерия оптимальности выберем выражение:

$$J = \sum_{i=0}^m [P(t_i) - u_i]^2 \quad (2.69)$$

С учетом (2.66):

$$J = \sum_{i=0}^m \left[ \sum_{k=0}^n a_k t_i^k - u_i \right]^2 \quad (2.70)$$

Из (2.70) видно, что  $J$  – есть полином второй степени от коэффициентов  $a_k$ .

Учитывая, что сумма (2.70) не может быть отрицательной, можно считать существование минимума заранее установленным. Минимум могут давать положительные значения коэффициентов  $a_k$ , при которых сумма обращается в минимум, следует приравнять нулю частные производные от суммы по всем коэффициенты  $a_k$ .

Получим систему уравнений:

$$\frac{\partial J}{\partial a_k} = \sum_{i=0}^m [P(t_i) - u_i] t_i^k = 0 \quad (2.71)$$

В соответствии с работой [16] можно записать:

$$\sum_{i=0}^m P(t_i) t_i^l = \sum_{i=0}^m u_i t_i^l, \quad l = \overline{0, m} \quad (2.72)$$

$$\sum_{k=0}^n a_k \sum_{i=0}^m t_i^{k+l} = \sum_{i=0}^m u_i t_i^l \quad (2.73)$$

Введем следующие обозначения:

$$b_j = \sum_{i=0}^m t_i^j, \quad j = \overline{0, 2n} \quad (2.74)$$

$$q_l = \sum_{i=0}^m u_i t_i^l, \quad l = \overline{0, n}$$

Тогда (2.73) примет вид:

$$\sum_{k=0}^n a_k b_{k+l} = q_l, \quad l = \overline{0, n} \quad (2.75)$$

Или в матричной форме записи:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{Q}, \quad (2.76)$$

где

$$\mathbf{A} = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_n]^T$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0 & \mathbf{b}_1 & \dots & \mathbf{b}_n \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{b}_n & \mathbf{b}_{n+1} & \dots & \mathbf{b}_{2n} \end{bmatrix}$$

Исключим  $\mathbf{A}$  из (2.76). Получим выражение для искомого полинома в матричном виде:

$$\mathbf{P} = \mathbf{T} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{Q}. \quad (2.77)$$

Матрица  $\mathbf{Q}$  может быть получена следующим образом:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T \mathbf{U}, \quad (2.78)$$

где  $\mathbf{U} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]^T$

Значения  $u_p$  – совокупность информации.

Матрица  $\mathbf{T}^T$  имеет размерность  $(n+1) \times l$ , где  $n$  – порядок искомого полинома;

$l$  – число априорных значений управляющих воздействий.

С учетом (2.78) полином может быть представлен следующим образом:

$$\mathbf{P} = \mathbf{T} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{U} \quad (2.79)$$

Из (2.79) и (2.67) можно заключить, что

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{U} \quad (2.80)$$

Для решения задачи экстраполяции воспользуемся разложением полинома (2.79) в ряд Тейлора:

$$P(t + \theta) = P(t) + \theta \dot{p}(t) + \frac{\theta^2}{2} \ddot{p}(t) + \dots + \frac{\theta^m p^{(m)}(t)}{m!}, \quad (2.81)$$

где  $\theta$  - интервал прогноза.

Выражение для расчета производных от полинома  $P(t)$  можно записать:

$$p^{(\mu)} = \left\{ \sum_{k=0}^n a_k t^k \right\}^{(\mu)}, \mu = \overline{1, n} \quad (2.82)$$

Для интервала  $\theta$  можно переписать:

$$p(t + \theta) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \theta^k p^{(\mu)}(t) \quad (2.83)$$

С учетом выражения (2.82):

$$p(t + \theta) = \sum_{j=0}^n \left\{ \frac{\theta^j}{j!} \left[ \sum_{k=0}^n a_k t^k \right]^{(\mu)} \right\} \quad (2.84)$$

Вновь введем обозначения:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} p_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_1 & \dot{p}_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_m & \dot{p}_m & \ddot{p}_m & \dots & p_m^{(n)} \end{bmatrix};$$

$$\theta = \left[ 1, \theta, \frac{\theta^2}{2!}, \dots, \frac{\theta^m}{m!} \right]$$

Подставив данные выражения в (2.84), окончательно получим:

$$\mathbf{U}(t) = [\mathbf{G}\theta]^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{U}[0] \quad (2.85)$$

Полученное выражение позволяет прогнозировать значения управляющих воздействий, основываясь на априорной информации, получаемой до момента программного управления и тем самым формировать управляющие воздействия на весь период движения.

## Выводы по второй главе

1. В ходе анализа движения ВС было сделано допущение, что оно осуществляется по алгоритмам, записанным в память БЦВМ. Система управления парирует внешние возмущения, и объект движется по траектории с расчетными фазовыми координатами.

2. Была сформулирована цель исследования, как решение задачи выработки некоторого управляющего воздействия на периоде программного движения ВС с требуемым качеством процесса управления.

3. Для решения задачи формирования управляющих воздействий были исследованы экстраполяторы нулевого и первого порядка. Сделан вывод, что фиксирующее звено нулевого порядка ведет себя как цепь запаздывания, то есть элемент первого порядка дает слишком большой фазовый сдвиг и таким образом уменьшает степень устойчивости системы.

4. Разработан алгоритм формирования управляющих воздействий на основе прогнозирования сигналов управления на интервал программного движения. Основу алгоритма составляют значения управляющих сигналов, подаваемых на органы управления в каждом такте БЦВМ. Для формирования управляющих воздействий на интервале программного управления предложено воспользоваться полиномиальной аппроксимацией значений сигналов управления с последующей экстраполяцией на фиксированный интервал времени.

5. Полученный алгоритм позволяет формировать значения управляющих воздействий, основываясь на априорной информации, получаемой до момента программного управления и тем самым формировать управляющие воздействия на весь период движения.

### 3. Разработка модели приоритетного определения направления движения воздушного судна по заданным маршрутам

#### 3.1. Разработка модели программного управления

Покажем возможность формирования сигналов управления по имеющейся информации о векторе параметров состояния до момента программного управления и информации о требуемом состоянии, в которое надо перевести объект с учетом внешних возмущений, действующих на интервале  $T_{\text{ПР}}$ .

Сформированное управление  $u^*[kT]$  должно обеспечить перевод объекта из состояния с фазовыми координатами  $Y_0$  в требуемое с координатами  $Y_{\text{ТР}}$  при выполнении условий обеспечения устойчивости и точности.

В общем случае синтезируемый закон управления можно представить в следующем виде:

$$u[kT] = \beta_{11}Y_1[kT] + \beta_{12}Y_2[kT] + \dots + \beta_{1n}Y_n[kT] \quad (3.1)$$

Как известно, алгоритм для вычисления управляющих воздействий можно записать в виде:

$$\begin{bmatrix} u[0] \\ u[T] \\ \vdots \\ u[NT] \end{bmatrix} = -\sigma_{n \times n}^{(N)} Y[0] \quad (3.2)$$

Фундаментальная матрица  $\sigma$  получается из уравнения:

$$\sigma_{n \times n}^{(N)} = [a(T); a(T)\Phi^{-1}(T); a(T)\Phi^{-2}(T); \dots; a(T)\Phi^{-(n-1)}(T)] \quad (3.3)$$

В зависимости от числа независимых управляющих воздействий  $l$  из фундаментальной матрицы берут первые  $l$  строк, в которые и входят

значения коэффициентов матрицы управления  $\mathbf{B}_0$ .

В общем случае матрица  $\sigma$  имеет размерность  $n \times n$ . Матрица  $\mathbf{B}_0$  может иметь  $N$  строк, но если число независимых управляющих воздействий равно единице, то при синтезе закона управления, минимизирующего обобщенный квадратичный показатель качества вида:

$$J_1 = \sum_{k=1}^N \{Y^T[kT]QY[kT] + ru^2[(k-1)T]\}, \quad (3.4)$$

матрица  $\mathbf{B}_0$  принимает вид строки.

Вычисления управляющих воздействий на каждом шаге осуществляется перемножением вектора состояния  $Y[kT]$  на матрицу  $\mathbf{B}_0(T)$ . Это справедливо в том случае, если на каждом шаге известен вектор состояния. Но в рассматриваемом случае информация о векторе параметров состояния  $Y[kT]$  на интервале  $T_{\text{ПР}}$  отсутствует. Известен лишь вектор  $Y[0]$ .

Таким образом, необходимо сформулировать управляющие воздействия в виде:

$$u^*[kT^*] = \mathbf{B}^*(T^*)Y[0] \quad (3.5)$$

Данная постановка может быть справедлива при выполнении следующих допущений:

- на интервале  $T_{\text{ПР}}$  собственные параметры объекта отличаются от расчетных на величину не более допустимой;
- внешние возмущения, действующие на объект, могут быть идентифицированы и меняются по известному закону.

При выборе показателя качества остановимся на обобщенном квадратичном показателе по следующей причине. Оценка свойств дискретной, оптимальной по минимуму числа шагов дискретности системы, показывает, что данная система не является грубой по отношению к

отклонениям коэффициентов объекта от номинальных значений [45]. Поэтому на практике отказываются от оптимального алгоритма. Одним из путей его уточнения является то, что для синтеза используется обобщенный квадратичный показатель, обеспечивающий требуемую грубость системы.

Итак, будем синтезировать алгоритм управления, минимизирующий показатель качества вида (3.4).

На первом этапе для упрощения процедуры синтеза будем считать, что возмущения равны нулю.

Преобразуем (3.4) с учетом того, что известен лишь вектор  $Y[0]$  воспользовавшись уравнением параметров состояния:

$$\begin{aligned} Y[T] &= \Phi(T)Y[0] + H(T)u[0], \\ Y[2T] &= \Phi^2(T)Y[0] + \Phi(T)H(T)u[0] + H(T)u[T], \\ &\dots \\ Y[NT] &= \Phi^N(T)Y[0] + \sum_{k=0}^{N-1} \Phi^{N-(k+1)}(T)H(T)u[kT] \end{aligned} \quad (3.6)$$

Тогда (3.4) можно переписать с учетом (3.6) в следующем виде:

$$\begin{aligned} J_1 &= \left\{ \Phi^N(T)Y[0] + \sum_{k=0}^{N-1} \Phi^{N-(k+1)}(T)H(T)u[kT] \right\}^T Q \left\{ \Phi^N(T)Y[0] + \sum_{k=0}^{N-1} \Phi^{N-(k+1)}(T)H(T)u[kT] \right\} + \\ &+ ru^2[(N-1)T] + \dots + \left\{ \Phi(T)Y[0] + H(T)u[0] \right\}^T Q \left\{ \Phi(T)Y[0] + H(T)u[0] \right\} + ru^2[0] = \\ &= \left\{ Y^T[0]\Phi^{NT}(T) + \sum_{k=0}^{N-1} H^T(T)\Phi^{[N-(k+1)]T}(T)u[kT] \right\} Q \left\{ \Phi^N(T)Y[0] + \sum_{k=0}^{N-1} \Phi^{N-(k+1)}(T)H(T)u[kT] \right\} + \\ &+ ru^2[(N-1)T] + \dots + \left\{ Y^T[0]\Phi^T(T) + H^T(T)u[0] \right\} Q \left\{ \Phi(T)Y[0] + H(T)u[0] \right\} + ru^2[0] = \\ &= Y^T[0]\Phi^{NT}(T)Q\Phi^N(T)Y[0] + Y^T[0]\Phi^{NT}(T)Q\sum_{k=0}^{N-1} \Phi^{N-(k+1)}(T)H(T)u[kT] + \\ &+ \sum_{k=0}^{N-1} \Phi^{N-(k+1)}(T)H(T)u[kT] + \sum_{k=0}^{N-1} H^T(T)\Phi^{[N-(k+1)]T}(T)u[kT]Q\Phi^N(T)Y[0] + \\ &+ \sum_{k=0}^{N-1} H^T(T)\Phi^{[N-(k+1)]T}(T)u[kT]Q\sum_{k=0}^{N-1} \Phi^{N-(k+1)}(T)H(T)u[kT] + ru^2[(N-1)T] + \dots + \\ &+ Y^T[0]\Phi^T(T)Q\Phi(T)Y[0] + Y^T[0]\Phi^T(T)QH(T)u[0] + H^T(T)u[0]Q\Phi(T)Y[0] + H^T(T)u[0] \times \\ &\times QH(T)u[0] + ru^2[0] = \sum_{i=1}^N Y^T[0]\Phi^{iT}(T)Q\Phi^i(T)Y[0] + r\sum_{i=1}^N u^2[(i-1)T] + Y^T[0]\Phi^{NT}(T) \times \\ &\times Q\sum_{k=0}^{N-1} \Phi^{N-(k+1)}(T)H(T)u[kT] + \sum_{k=0}^{N-1} H^T(T)\Phi^{[N-(k+1)]T}(T)u[kT]Q\sum_{k=0}^{N-1} \Phi^{N-(k+1)}(T)H(T)u[kT] + \end{aligned} \quad (3.7)$$



$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=0}^{N-1} H^T(T) \Phi^{[N-(k+1)]T}(T) Q u[kT] \Phi^N(T) Y[0] + \dots + \\
& Y^T[0] \Phi^T(T) Q H(T) u[0] + H^T(T) u[0] Q \times \times \Phi(T) Y[0] + \\
& H^T(T) u[0] Q H(T) u[0].
\end{aligned}$$

В окончательном виде выражение (3.7) можно представить:

$$\begin{aligned}
J_1 & = \sum_{j=0}^{N-1} Y^T[0] \Phi^{(N-j)T}(T) Q \Phi^{N-j}(T) Y[0] + \\
& + \sum_{i=N}^1 \left\{ Y^T[0] \Phi^{iT}(T) Q \sum_{k=1}^i \Phi^{i-k}(T) H[T] u[(k-1)T] \right\} + \\
& + \sum_{i=N}^1 \sum_{k=1}^i H^T(T) \Phi^{(i-k)T}(T) u[(k-1)T] Q \Phi^i(T) Y[0] + \\
& \sum_{i=N}^1 \left\{ \sum_{k=1}^i H^T(T) \Phi^{(i-k)T}(T) u[(k-1)T] Q \sum_{k=1}^i \Phi^{(i-k)}(T) H[T] u[(k-1)T] \right\} + \\
& + \sum_{k=1}^{N-1} r u^2[(k-1)T]
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Если от функционала (3.7) взять частные производные по  $u[(k-1)T]$ ,  $k = \overline{1, N-1}$ , то получим систему из  $N$  однородных уравнений относительно  $u[(k-1)T]$ :

$$\left\{ \begin{aligned}
& 2ru[0] + \sum_{i=0}^{N-1} Y^T[0] \Phi^{NT}(T) Q \Phi^{N-i}(T) H(T) + \sum_{i=0}^{N-1} H^T(T) \Phi^{(N-i)T}(T) Q \Phi^N(T) Y[0] + \\
& + \sum_{i=0}^N H^T(T) \Phi^{iT}(T) u[(N-i)T] Q \sum_{i=0}^N \Phi^i(T) H(T) u[(N-i)T] + 2H^T(T) Q H(T) u[0] = 0 \\
& \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
& 2ru[(N-2)T] + \sum_{i=N-2}^{N-1} Y^T[0] \Phi^{NT}(T) Q \Phi^{N-i}(T) + \sum_{i=N-2}^{N-1} H^T(T) \Phi^{(N-i)T}(T) Q \Phi^N(T) Y[0] + \\
& + \sum_{i=0}^N H^T(T) \Phi^{iT}(T) u[(N-i)T] Q \sum_{i=0}^N \Phi^i(T) H(T) u[T] + 2H^T(T) Q H(T) u[(N-2)T] = 0 \\
& 2ru[(N-1)T] + Y^T[0] \Phi^{NT}(T) Q \Phi(T) H(T) + H^T(T) \Phi^T(T) Q \Phi^N(T) Y[0] + \\
& + \sum_{i=0}^N H^T(T) \Phi^{iT}(T) u[(N-i)T] Q \sum_{i=0}^N \Phi^i(T) H(T) u[0] + 2H^T(T) Q H(T) u[(N-1)T] = 0
\end{aligned} \right. \tag{3.9}$$

Полученная система уравнений позволяет найти значения управляющих воздействий.

Преобразуем выражение (3.9) к более удобному виду на примере трехшагового алгоритма.

Обозначим второй член (3.8) через  $L$ . Тогда для  $N=3$  можно записать

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial u[0]} &= Y^T [0] \Phi^{3T}(T) Q \Phi^2(T) H(T) + Y^T [0] \Phi^{2T}(T) Q \Phi(T) H(T) + Y^T [0] \Phi^T(T) Q H(T) \\ \frac{\partial L}{\partial u[T]} &= Y^T [0] \Phi^{3T}(T) Q \Phi(T) H(T) + Y^T [0] \Phi^{2T}(T) Q H(T) \\ \frac{\partial L}{\partial u[2T]} &= Y^T [0] \Phi^{3T}(T) Q H(T)\end{aligned}\quad (3.10)$$

Для  $N$ -шагового алгоритма выражение примет вид:

$$\frac{\partial L}{\partial u[(k-1)T]} = \sum_{k=0}^{N-i} Y^T [0] \Phi^{(N-k)T}(T) Q \Phi^{N-(k+i)}(T), \quad i = \overline{1, N} \quad (3.11)$$

Обозначим остальные слагаемые (3.8) соответственно через  $M$ ,  $P$ ,  $S$ . Тогда выражения для частных производных можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial u[(k-1)T]} &= \sum_{k=0}^{N-i} H^T [T] \Phi^{[N-(k+i)T]}(T) Q \Phi^{N-k}(T) Y [0], \quad i = \overline{1, N}, \quad k = \overline{1, N} \\ \frac{\partial P}{\partial u[(k-1)T]} &= 2 \sum_{n=0}^{N-\eta} H [T] \Phi^{[N-j-\mu]}(T) Q \Phi^{N-(n+\eta)}(T) H [T] u [nT], \quad j = \overline{1, N}, \quad \mu = \overline{0, N-j} \\ k = \overline{1, N} & \qquad \qquad \qquad \eta = \overline{1, N-j+1} \\ \frac{\partial S}{\partial u[(k-1)T]} &= 2ru [nT], \quad j = \overline{1, N} \\ k = \overline{1, N}\end{aligned}\quad (3.12)$$

Из полученных зависимостей можно окончательно записать систему уравнений для нахождения управляющих воздействий на  $N$  шагах уравнения для системы любого порядка:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_1}{\partial u[(k-1)T]} = & \sum_{k=0}^{N-i} Y^T [0] \Phi^{(N-k)T} (T) Q \Phi^{N-(k+i)T} (T) H(T) + \\
& + \sum_{k=0}^{N-i} H^T (T) \Phi^{[N-(k+i)]T} (T) Q \Phi^{N-k} (T) Y[0] + \\
& + 2 \sum_{n=0}^{N-\eta} H^T (T) \Phi^{(N-j-\mu)} (T) Q \Phi^{N-(n+\eta)} (T) u[nT] + 2ru[nT], \\
& j = \overline{1, N}, \mu = \overline{0, N-j}, \eta = \overline{1, N-j+1}, n = \overline{0, N-1}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Данная система уравнений позволяет получить значения управляющих воздействий при известном начальном векторе состояния системы, а также рассчитать величины матриц переходных процессов и весовых коэффициентов.

### 3.2. Разработка модели приоритетного определения направления движения воздушного судна по заданным маршрутам на основе алгоритма программного управления

Предлагаемую методику формирования управляющих воздействий рассмотрим на примере синтеза двухшагового алгоритма. Критерий оптимальности примет следующий вид:

$$J_2 = Y^T [2T] Q Y [2T] + ru^2 [t] + Y^T [T] Q Y [T] + ru^2 [0] \tag{3.14}$$

Учитывая приведенные выше рекуррентные соотношения, можно его переписать:

$$\begin{aligned}
J_2 = & Y^T [0] \Phi^{2T} [T] Q \Phi^2 [T] Y [0] + Y^T [0] \Phi^{2T} [T] Q \Phi [T] H(T) u [0] + \\
& + Y^T [0] \Phi^{2T} [T] Q H(T) u [T] + H^T (T) \Phi^T [T] Q \Phi^2 [T] Y [0] u [0] + \\
& + H^T (T) Q \Phi [T] H(T) u [0] u [T] + H^T (T) Q H(T) u^2 [T] + ru^2 [T] + \\
& + Y^T [0] \Phi^T [T] Q \Phi [T] Y [0] + Y^T [0] \Phi^T [T] Q H(T) u [0] + \\
& + H^T (T) Q \Phi [T] Y [0] u [0] + H^T (T) Q H(T) u^2 [0] + ru^2 [0]
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Взяв частные производные по  $u[0]$  и  $u[T]$ , получим:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_2}{\partial u[0]} &= Y^T[0]\Phi^{2T}[T]Q\Phi[T]H[T] + H^T(T)\Phi^T[T]Q\Phi^2[T]Y[0] + \\
&+ 2H^T(T)\Phi^T[T]Q\Phi[T]H(T)u[0] + H^T(T)Q\Phi[T]H(T)u[T] + Y^T[0]\Phi^T[T]QH[T] + \\
&+ H^T(T)Q\Phi[T]Y[0] + 2ru[0] + 2H^T(T)QH[T]u[0] + H^T(T)\Phi^T[T]QH(T)u[T]
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_2}{\partial u[T]} &= Y^T[0]\Phi^{2T}[T]QH[T] + H^T(T)Q\Phi^2[T]Y[0] + \\
&+ H^T(T)\Phi^T[T]QH(T)u[0] + 2H(T)QH[T]u[T] + 2ru[T]
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Можно показать, что

$$\begin{aligned}
Y^T[0]\Phi^{2T}[T]Q\Phi[T]H[T] &= H^T(T)\Phi^T[T]Q\Phi^2[T]Y[0]; \\
H^T(T)Q\Phi(T)H[T] &= H^T(T)\Phi^T[T]QH[T]; \\
Y^T[0]\Phi^T[T]QH[T] &= H^T(T)Q\Phi[T]Y[0]; \\
Y^T[0]\Phi^{2T}[T]QH[T] &= H^T(T)Q\Phi^2[T]Y[0];
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Приравняв производные (3.16), (3.17) нулю и введя некоторые обозначения, получим:

$$\begin{cases} D_1Y[0] + D_2u[0] + D_3u[T] + D_4Y[0] + D_5u[0] + ru[0] = 0 \\ D_6Y[0] + D_3u[0] + D_5u[T] + ru[T] = 0 \end{cases}, \text{ где} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
D_1 &= H^T(T)\Phi^T[T]Q\Phi^2[T] \\
D_2 &= H^T(T)\Phi^T[T]Q\Phi[T]H(T) \\
D_3 &= H^T(T)\Phi^T[T]QH[T] \\
D_4 &= H^T(T)Q\Phi[T] \\
D_5 &= H^T(T)QH[T] \\
D_6 &= H^T(T)Q\Phi^{2T}[T]
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Выразим из второго уравнения (3.19)  $u[T]$ :

$$u[T] = -\{D_4u[0] + D_6Y[0]\}[D_5 + r]^{-1} \tag{3.21}$$

Решая систему (3.19) относительно  $u[0]$ , получим:

$$u[0] = -BY[0], \tag{3.22}$$

$$\text{где } B = \begin{bmatrix} D_2 D_5 + r D_2 - D_3^2 + D_5^2 + 2r D_5 + r^2 \\ D_1 D_5 + r D_1 - D_3 D_6 + D_4 D_5 + r D_4 \end{bmatrix}^{-1} \times \quad (3.23)$$

Выражение (3.22) позволяет получить значения управляющих воздействий на возможный интервал программного управления.

### 3.3. Методика разработки алгоритма оптимального программного управления с учетом действующих возмущений.

Напомним, что задача синтеза программного управления имеет смысл в том случае, если удастся провести идентификацию внешних возмущений, действующих на объект на интервале движения.

Причины возмущений, оказывающих влияние на объект, следующие:

- смещение центра масс относительно его оси;
- несоосность сопел двигателя;
- неточность приведения сопел двигательной установки в нулевое положение, обусловленная работой шагового двигателя.

В настоящее время трудно выделить единый метод идентификации возмущений. В ряде работ приводится анализ возможных методов.

Остановимся на методике, позволяющей получить численные значения возмущающих воздействий.

Математическая модель движения ЛА может быть представлена следующей системой линейных дифференциальных уравнений при условии, что на данном участке траектории упругими колебаниями корпуса можно пренебречь:

$$\begin{aligned} \dot{V}_z &= -c_{v_z} V_z(t) - c_{v_\psi} \psi(t) - c_{v_\delta} \delta(t) + \bar{F}(t) \\ \dot{\psi}(t) &= -c_{\psi\psi} \dot{\psi}(t) - c_{\psi\delta} \delta(t) + \bar{M}(t) \\ \ddot{\delta}(t) &= -\frac{2\xi}{T_{PI}} \dot{\delta}(t) - \frac{1}{T_{PI}^2} \delta(t) + \frac{K_{PI}}{T_{PI}^2} \nu(t) \end{aligned} \quad (3.24)$$

В соответствии с работой [13] идентификация может быть проведена следующим образом.

Перепишем (3.24) в векторно-матричной форме:

$$\ddot{Y}(t) = a_1(t)\dot{Y}(t) + a_0(t)Y(t) + b_0v(t) + b_1F(t) \quad (3.25)$$

$$\text{где } a_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & c_{v_z v_z} & 0 \\ 0 & c_{\psi \dot{\psi}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2\xi}{T_{\text{ПП}}} \end{bmatrix}; \quad a_0(t) = \begin{bmatrix} 0 & c_{v_z v_z} & c_{v_z \delta} \\ 0 & 0 & c_{\psi \delta} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_{\text{ПП}}^2} \end{bmatrix}; \quad b_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_{\text{ПП}}}{T_{\text{ПП}}^2} \end{bmatrix}; \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Тогда, преобразуя выражение (3.25), можно записать

$$\dot{Y}(t) = E(t)Y(t) + A(t)U(t) + C(t)F(t). \quad (3.26)$$

Решение данной системы может быть представлено в следующем виде:

$$Y[(n+1)T] = \Phi(t)Y(nT) + H(T)U(nT) + \Gamma(t)F(nT), \quad (3.27)$$

тогда, опуская промежуточные преобразования, из (3.26) можно получить следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} z[(n+1)T] &= z[nT] + T\dot{z}[nT] + \frac{1}{2}T^2\ddot{z}[nT] \\ \psi[(n+1)T] &= \psi[nT] + T\dot{\psi}[nT] + \frac{1}{2}T^2\ddot{\psi}[nT] \\ \delta[(n+1)T] &= \delta[nT] + T\dot{\delta}[nT] + \frac{1}{2}T^2\frac{K_{\text{ПП}}}{T_{\text{ПП}}^2}U[nT] \\ \dot{\delta}[(n+1)T] &= -\frac{T}{T_{\text{ПП}}^2}\delta[nT] + \dot{\delta}[nT] - 2\xi\frac{T}{T_{\text{ПП}}}\dot{\delta}[nT] + U[nT]\left(T\frac{K_{\text{ПП}}}{T_{\text{ПП}}^2} - \xi T^2\frac{K_{\text{ПП}}}{T_{\text{ПП}}^3}\right) \end{aligned} \quad (3.28)$$

При условии, что в процессе полета фазовые координаты  $\dot{z}[nT], \psi[nT], \dot{\psi}[nT]$  изменяются, а также вычисляются координата  $z[nT]$  и управление  $U[nT]$ , формируемое в БЦВМ, оценки внешних возмущений могут получены из (3.28) в следующем виде:

$$\begin{aligned}\bar{F}[nT] &= \frac{2}{T^2} \{z[(n+1)T] - z[nT] - T\dot{z}[nT]\}, \\ \bar{M}[nT] &= \frac{2}{T^2} \{\psi[(n+1)T] - \psi[nT] - T\dot{\psi}[nT]\}\end{aligned}\quad (3.29)$$

Данная методика имеет один существенный недостаток. Оценка возмущений может быть получена при наличии дополнительных датчиков, которые не всегда имеют.

Рассмотрим методику идентификации возмущений при отсутствии дополнительных измерений.

Вернемся к алгебраической форме записи.

Состояние объекта может быть описано следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}V_z[(k+1)T] &= a_{11}V_z[kT] + a_{12}\psi[kT] + a_{13}\dot{\psi}[kT] + a_{14}\delta[kT] + h_{11}U[kT] + \\ &\quad + \Gamma_{11}F[kT] + \Gamma_{12}M[kT] \\ \psi[(k+1)T] &= a_{21}V_z[kT] + a_{22}\psi[kT] + a_{23}\dot{\psi}[kT] + a_{24}\delta[kT] + h_{31}U[kT] + \\ &\quad + \Gamma_{22}M[kT] \\ \dot{\psi}[(k+1)T] &= a_{31}V_z[kT] + a_{32}\psi[kT] + a_{33}\dot{\psi}[kT] + a_{34}\delta[kT] + h_{31}U[kT] + \\ &\quad + \Gamma_{31}F[kT] + \Gamma_{32}M[kT] \\ \delta[(k+1)T] &= a_{44}\delta[kT] + h_{41}U[kT] + \Gamma_{41}F[kT] + \Gamma_{42}M[kT]\end{aligned}\quad (3.30)$$

Неизвестными в данной системе являются значения  $\dot{\psi}[kT]$ ,  $\dot{\psi}[(k+1)T]$ ,  $F(T)$ ,  $M(T)$ ,  $\delta[(k+1)T]$ .

Чтобы получить значения неизвестных, добавим к (3.30) два уравнения, полученных на предыдущем шаге дискретности:

$$\begin{aligned}V_z[kT] &= a_{11}V_z[(k-1)T] + a_{12}\psi[(k-1)T] + a_{13}\dot{\psi}[(k-1)T] + \\ &\quad + a_{14}\delta[(k-1)T] + \Gamma_{11}F(T) + \Gamma_{12}M(T) + h_{11}U[(k-1)T] \\ \psi[kT] &= a_{21}V_z[(k-1)T] + a_{22}\psi[(k-1)T] + a_{23}\dot{\psi}[(k-1)T] + \\ &\quad + a_{24}\delta[(k-1)T] + \Gamma_{21}F(T) + \Gamma_{22}M(T) + h_{21}U[(k-1)T]\end{aligned}\quad (3.31)$$

Введем следующие обозначения:

$$B = \begin{bmatrix} V_z[(k+1)T] - a_{11}V_z[kT] - a_{12}\psi[kT] - a_{14}\delta[kT] + h_{11}U[kT] \\ \psi[(k+1)T] - a_{21}V_z[kT] - a_{22}\psi[kT] - a_{24}\delta[kT] - h_{21}U[kT] \\ -a_{31}V_z[kT] - a_{32}\psi[kT] - a_{34}\delta[kT] - h_{31}U[kT] \\ -a_{44}\delta[kT] - h_{41}U[kT] \\ V_z[kT] - a_{11}V_z[(k-1)T] - a_{12}\psi[(k-1)T] - a_{14}\delta[(k-1)T] + h_{11}U[(k-1)T] \\ \psi[kT] - a_{21}V_z[(k-1)T] - a_{22}\psi[(k-1)T] - a_{24}\delta[(k-1)T] - h_{21}U[(k-1)T] \end{bmatrix}$$

$$\Phi^* = \begin{bmatrix} a_{13} & 0 & \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & 0 & 0 \\ a_{23} & 0 & \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & 0 & 0 \\ a_{33} & -1 & \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_{41} & \Gamma_{42} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & 0 & a_{23} \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} \dot{\psi}[kT] \\ \dot{\psi}[(k+1)T] \\ f(T) \\ M(T) \\ \delta[(k+1)T] \\ \dot{\psi}[(k-1)T] \end{bmatrix}$$

Отсюда могут быть найдены значения неизвестной матрицы  $X$  путем решения матричного уравнения:

$$\Phi^* X = B \quad (3.32)$$

Значение возмущений, входящих в  $X$  могут быть получены решением уравнения (3.32)

$$X = \Phi^{*-1} B \quad (3.33)$$

Таким образом, приведенные выше зависимости показывают возможность идентификации внешних возмущений, действующих на объект на внеатмосферном участке как при наличии дополнительных измерений, так и без них. Учитывая природу возмущений, их можно экстраполировать на возможный интервал программного управления и тем самым строить алгоритм программного управления с учетом имеющихся место возмущений.

Дополнительно к этому расширим задачу.

Рассмотрим случай, когда требуемое конечное состояние, в которое должен быть переведен объект, известно заранее.

Введем в рассмотрение вектор  $Y_{TP}$ , характеризующий конечное состояние объекта.



Тогда критерий оптимальности примет вид:

$$J = \sum_{k=1}^N \{Y[kT] - Y_{TP}\}^T Q(Y[kT] - Y_{TP}) + ru^2[(k-1)T] \quad (3.34)$$

где  $Y_{TP}$  - терминальный член, характеризующий требуемое состояние, в которое должен быть переведен объект.

Перепишем исходную систему уравнений с учетом идентифицированных возмущений:

$$\begin{aligned} Y[T] &= \Phi(T)Y[0] + H(T)U[0] + \Gamma(T)F[0] \\ Y[2T] &= \Phi^2(T)Y[0] + \Phi(T)H(T)U[0] + \Phi(T)\Gamma(T)F[0] + H(T)U[T] + \\ &\quad + \Gamma(T)F[T] \\ &\dots \\ Y[N T] &= \Phi^N(T)Y[0] + \sum_{k=0}^{N-1} \Phi^{N-k-1}(T)H(T)U[kT] + \sum_{k=0}^{N-1} \Phi^{N-k-1}(T)\Gamma(T)F[kT] \end{aligned} \quad (3.35)$$

Опуская выкладки, аналогичные приведенным выше, запишем окончательное выражение для системы уравнений формирования управляющих воздействий:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{N-i} Y[0] \Phi^{(N-k)T}(T) Q \Phi^{N-(k+i)}(T) H(T) + \sum_{k=0}^{N-i} H^T(T) \Phi^{[N-(k+i)]T}(T) Q \Phi^{N-k}(T) Y[0] + \\ &\quad i = \overline{1, N} \qquad \qquad \qquad i = \overline{1, N} \\ &+ 2 \sum_{n=0}^{N-\eta} H^T(T) \Phi^{(N-j-\mu)T}(T) Q \Phi^{N-(n+\eta)}(T) H(T) u[nT] + \\ &\quad j = \overline{1, N}, \mu = \overline{0, N-j}, \eta = \overline{1, N-j+1} \\ &+ 2 \sum_{n=0}^{N-\eta} H^T(T) \Phi^{(N-j-\mu)T}(T) Q \Phi^{N-(n+\eta)}(T) \Gamma(T) F(nT) - \\ &\quad j = \overline{1, N}, \mu = \overline{0, N-j}, \eta = \overline{1, N-j+1} \\ &- 2 \sum_{j=N-1}^k H^T(T) \Phi^{[j-k]T}(T) Y_{TP}(T) + 2ru[nT] = 0 \\ &\quad n = \overline{0, N-1} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Преобразуя (3.36), получим алгоритм управления в следующем виде:

$$\mathbf{U} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}, \text{ где} \quad (3.37)$$

$$B = B_1 Y[0] + B_2 F[nT] - B_3 Y_{TP};$$

$$B_1 = \sum_{k=0}^{N-\eta} H^T(T) \Phi^{[N-(k+i)]T}(T) Q \Phi^{N-k}(T);$$

$$B_2 = \sum_{n=0}^{N-\eta} H^T(T) \Phi^{[N-J+\mu]T}(T) Q \Phi^{N-(n+\eta)}(T) \Gamma(T);$$

$$j = \overline{1, N}, \mu = \overline{0, N-j}, \eta = \overline{1, N-j+1}$$

$$B_3 = \sum_{j=N-1}^k H^T(T) \Phi^{(j-k)T}(T);$$

$$A = \sum_{n=0}^{N-\eta} H^T(T) \Phi^{[N-J+\mu]T}(T) Q \Phi^{N-(n+\eta)}(T) H(T) + r$$

$$j = \overline{1, N}, \mu = \overline{0, N-j}, \eta = \overline{1, N-j+1}$$

Значения матриц  $\mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{B}_2$ ,  $\mathbf{B}_3$  и  $\mathbf{A}$  определяются после расчетов матриц переходных процессов  $\mathbf{H}(T)$ , качества  $\mathbf{Q}$ , возмущений  $\mathbf{\Gamma}(T)$  и переходной матрицы  $\mathbf{\Phi}(T)$ .

Параметры  $T_0^*$  и  $r^*(T_0^*)$  определяются путем поиска экстремума  $r^*(T_0^*)$  в соответствии с формулой [24]:

$$\max r^*(T_0^*) = \max f(B_{11}^*, Q, H(T_0), \Phi(T_0))$$

таким образом, вся процедура формирования управления может быть представлена состоящей из нескольких отдельных процедур.

Как видно из выражения (3.36) матрицы  $\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_3$ ,  $\mathbf{A}$  зависят лишь от свойств самого объекта и рассчитываются исходя из значений коэффициентов системы дифференциальных уравнений, описывающих движение объекта. Следовательно, их расчет может быть проведен заранее на этапе проектирования, а необходимые значения записаны в память БЦВМ. В процессе полета решается задача идентификации внешних возмущений. Окончательная процедура выработки управляющих воздействий будет определяться конкретным количеством необходимых управляющих воздействий.

### 3.4. Математическая модель движения воздушного судна

Рассмотрим математическую модель управляемого объекта, реально воспроизводящую процесс движения воздушного судна и позволяющую проводить различные теоретические исследования в зависимости от поставленной задачи и принятых допущений.

Будем считать воздушного судна абсолютно твёрдым осесимметричным телом, центр масс (ЦМ) которого, находится на его продольной оси. Геометрические и весовые параметры воздушного судна, а также параметры системы управления соответствуют их номинальным значениям.

Введём допущения:

- ветер отсутствует, а остальные метеорологические условия соответствуют параметрам стандартной атмосферы;
- система стабилизации углового положения центра масс ВС принимается идеальной;
- на ВС в полёте действует сила тяги  $P$ , сила притяжения, аэродинамические силы  $Q$ ;  $Y$ ;  $Z$ ;
- потерей тяги двигателя на рулевых органах пренебрегаем;
- вращательное движение воздушного судна вокруг центра масс отсутствует;
- реальное движение воздушного судна представляется в виде совокупности трех плоских движений: продольного, бокового и поперечного;
- ускорения, вызываемые кориолисовой силой, равны нулю.

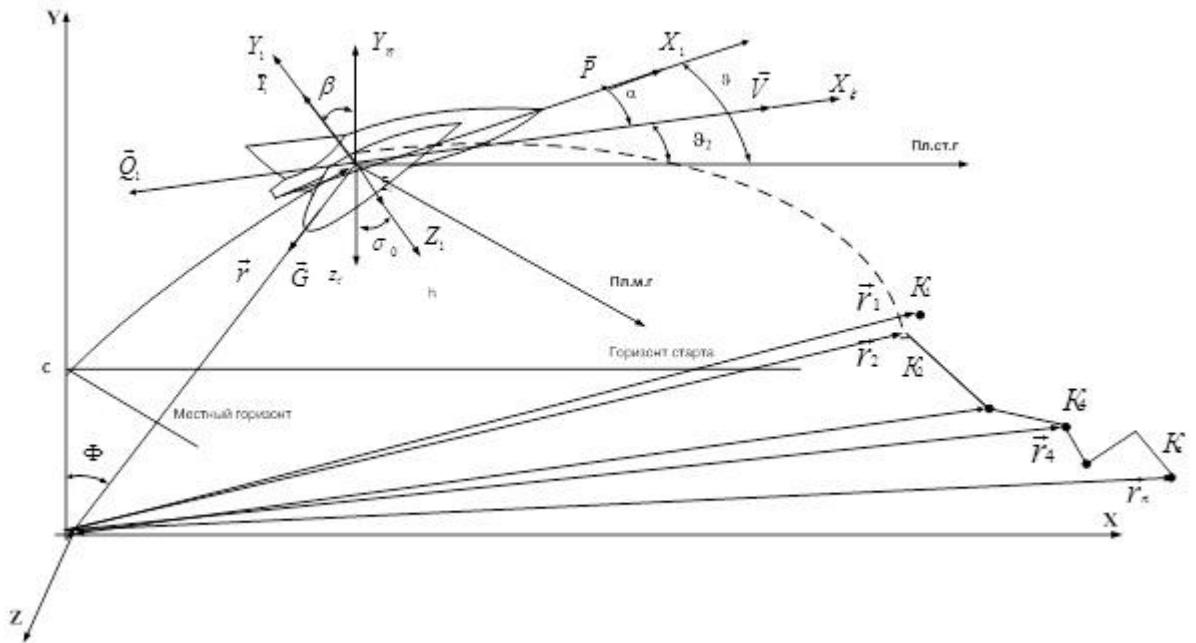


Рисунок 3.1 Траектория движения воздушного судна

Для упрощения интегрирования уравнений движения ЦМ ВС удобно пользоваться инерциальной системой координат  $O\xi\eta\zeta$  с началом в центре Земли. Оси этой системы координат параллельны соответствующим осям стартовой системы координат  $CX_cY_cZ_c$  (т.е.  $O\xi\parallel CX_c, O\eta\parallel CY_c, O\zeta\parallel CZ_c$ ) до момента начала движения ВС (Рис.3.1), а начиная с этого момента времени, в дальнейшем она не меняет своей ориентации относительно абсолютного пространства. Поэтому задачу расчета возмущенного движения представим в виде нелинейных дифференциальных уравнений в инерциальной системе координат:

$$\frac{d\xi}{dt} = V_\xi;$$

$$\frac{d\eta}{dt} = V_\eta;$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = V_\zeta;$$

$$M \frac{dV_\xi}{dt} = (P \cos \vartheta - Q \cos \vartheta_1 - Y \sin \vartheta_1 - M g_h \sin \Phi);$$

$$M \frac{dW_{\xi}}{dt} = (P \cos \vartheta - Q \cos \vartheta_1 - Y \sin \vartheta_1);$$

$$M \frac{dV_{\eta}}{dt} = (P \cos \vartheta - Q \sin \vartheta_1 + Y \cos \vartheta_1 - Mg_h \cos \Phi);$$

$$M \frac{dW_{\eta}}{dt} = (P \cos \vartheta - Q \sin \vartheta_1 + Y \cos \vartheta_1);$$

$$M \frac{dV_{\zeta}}{dt} = (P \cos \sigma_0 - Q \cos \vartheta_1 \sin \sigma_0 + Y \sin \vartheta_1 \sin \sigma_0 - Mg_h \sin \Phi \sin \sigma_0);$$

$$M \frac{dW_{\zeta}}{dt} = (P \cos \sigma_0 - Q \cos \vartheta_1 \sin \sigma_0 + Y \sin \vartheta_1 \sin \sigma_0).$$

Уравнения кинематических и геометрических связей имеют следующий вид:

$$V^2 = V_{\xi}^2 + V_{\eta}^2 + V_{\zeta}^2;$$

$$W^2 = W_{\xi}^2 + W_{\eta}^2 + W_{\zeta}^2;$$

$$r^2 = \xi^2 + (R_3 + \eta)^2 + \zeta^2;$$

$$\alpha = \vartheta - \vartheta_2;$$

$$\vartheta_1 = \Phi + \vartheta_2;$$

$$h = r - R_3;$$

$$\vartheta = \vartheta_{np}(t);$$

$$L = R_3 \Phi;$$

$$\Phi = \frac{\pi}{2} \text{ при } \eta = 0$$

$$\Phi = \operatorname{arctg} \frac{\xi}{R_3 + \eta} \text{ при } \eta \neq 0;$$

$$\vartheta_1 = \frac{\pi}{2} \text{ при } V_{\xi} = 0;$$

$$\vartheta_1 = \operatorname{arctg} \frac{V_{\eta}}{V_{\xi}} \text{ при } V_{\xi} \neq 0;$$

$$Q = C_{Xa} \cdot q \cdot S_M;$$

$$Y = C_{Ya} \cdot q \cdot S_M;$$

$$q = \frac{\rho_h \cdot V^2}{2};$$

$$g_h = \frac{\pi_0}{(R_3 + h)^2}.$$

где  $M$  - текущее значение массы ВС;  $P$  - суммарная тяга двигателей, направленная по продольной оси;  $Q, Y$  - соответственно сила лобового сопротивления и подъемная сила;  $g_h$  - ускорение силы притяжения на любой высоте;  $\vartheta$  - угол тангажа измеренный между продольной осью ЛА и горизонтом старта;  $\vartheta_{np}(t)$  - программное значение угла;  $\alpha$  - угол атаки;  $h$  - высота ЛА над поверхностью Земли;  $\vartheta_1$  - угол вектора скорости к горизонту старта;  $\Phi$  - угловая дальность (полярный угол);  $r$  - радиус вектор;  $\vartheta_2$  - угол наклона вектора действительной скорости движения ЦМ ВС к плоскости местного горизонта;  $\sigma_0, \beta$  - текущее значение угла скольжения;  $C_{xa}$  - коэффициент силы лобового сопротивления;  $C_{yh}$  - коэффициент подъемной силы по углу атаки;  $q$  - скоростной напор;  $S_M$  - площадь миделевого сечения;  $\rho_h$  - плотность воздуха на рассматриваемой высоте;  $\pi_0$  - гравитационная постоянная.

Таким образом, исходя из реального соотношения сил действующих на ВС в полете, основными считаются: сила тяги, аэродинамическая сила, сила притяжения и соответствующие им ускорения: (кажущееся  $\dot{W}$  и ускорение силы притяжения  $g_h$ ).

Программа изменения по времени угла тангажа  $\vartheta_{np}(t)$  принимается приближительной [3, 34, 50]:

$$\vartheta_{np} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ при } 0 < \mu \leq 0.05 \\ 6.25(\frac{\pi}{2} - \vartheta_K)(0.45 - \mu)^2 + \vartheta_K \text{ при } 0.05 < \mu \leq 0.45 \\ \vartheta = \vartheta_K \text{ при } \mu > 0.45 \end{cases}$$

где  $\mu = \frac{\dot{m} \cdot t}{M_0}$ ;  $\dot{m}$  - секундный расход топлива;  $t$  - текущее время от запуска двигателя;  $M_0$  - начальная масса ВС.

Алгоритм изменения коэффициента лобового сопротивления при нулевом угле атаки задан в виде:

$$C_{x_{a_0}} = \begin{cases} 0.29 \text{ при } 0 < M \leq 0.8 \\ M - 0.51 \text{ при } 0.8 < M \leq 1.068 \\ 0.091 - 0.5 \cdot M^{-1} \text{ при } M > 1.068 \end{cases}$$

Зависимость  $C_{x_{a_0}} = f(M)$  получена подбором для гипотетического ВС с учетом числа Маха и высоты полета.

Число Маха определяется так:

$$M = V / a$$

где  $a = \sqrt{\gamma_0 \frac{P_h}{\rho_h}}$  - скорость звука в атмосфере;  $\gamma_0 = 1.4$  - показатель адиабаты воздуха;  $P_h$  - давление атмосферы Земли на высоте  $h$ .

$$P_h = \rho_h \cdot R \cdot T_w$$

где  $R = 2.870582 \cdot 10^2 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{с}}$  - удельная газовая постоянная воздуха;  $T_w$  -

температура поверхности корпуса ЛА, которая определяется согласно[5]:

$$T_w = \begin{cases} 216.65 \text{ при } h1 \leq 11000 \\ 216.65 + (h1 - 20000) \cdot 0.001 \text{ при } 20000 < h1 \leq 32000 \\ 228.65 + 0.0028 \cdot (h1 - 32000) \text{ при } 32000 < h1 \leq 47000 \\ 270.65 \text{ при } 47000 < h1 \leq 51000 \\ 270.65 - 0.0028 \cdot (h1 - 51000) \text{ при } 51000 < h1 \leq 71000 \\ 214.65 - 0.002 \cdot (h1 - 71000) \text{ при } 71000 < h1 \leq 80000 \end{cases}$$

где  $h1 = \frac{6356766 \cdot h}{(6356766 + h)}$

Коэффициент подъемной силы на единицу угла атаки  $C_{Ya}$  определяется согласно так:

$$C_{Ya} = \begin{cases} 2.8 \text{ при } 0 < M \leq 0.25 \\ 2.8 + 0.447 \cdot (M - 0.25) \text{ при } 0.25 < M \leq 1.1 \\ 3.18 - 0.66 \cdot (M - 1.1) \text{ при } 1.1 < M \leq 1.6 \\ 2.85 + 0.35 \cdot (M - 1.6) \text{ при } 1.6 < M \leq 3.6 \\ 3.55 \text{ при } M > 3.7 \end{cases}$$

Коэффициент подъемной силы и лобового сопротивления определяется:

$$C_{Ya} = C_{Ya} \cdot \alpha;$$

$$C_{Xa} = C_{Xa_0} + C_{Ya} \cdot \alpha^2$$

В качестве объекта управления выбран пассажирский реактивный самолет среднего класса.

Сила тяги двигателя ВС на высоте  $h$  определяется:

$$P = \psi_R \left[ I_{уд.норм.} (\dot{m} + \dot{m}_{мзп}) \cdot 9.807 - S_{ai} P_h \right], \quad i = 1, 2, 3, 4$$

где  $\psi_R$  - коэффициент, учитывающий потери связанные с функционированием органов управления вектора тяги;  $I_{уд.норм.}$  - удельный пустотный нормализованный импульс ДУ;  $S_{ai}$  - площадь выходного сечения сопла;  $\dot{m}_{мзп}$  - суммарный массовый расход топлива.

В качестве возмущающих факторов заданы возмущения тяги двигателя ВС [27, 33, 44, 47, 51]:

$$P_i = P_{pi} \pm \Delta P_i, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$\text{где } \Delta P_i = \begin{cases} \pm 4\% \cdot P_{pi} - \text{за счет вариаций секундного расхода} \\ \pm 0.8\% \cdot P_{pi} - \text{за счет вариаций удельного импульса} \end{cases}$$

На основе представленных выше зависимостей, формируется матема-



тическая модель кинематических характеристик ЦМ ВС в инерциальной системе координат с использованием численных методов интегрирования. Для интегрирования этой системы на ЭВМ проводится дискретизация методом Рунге-Кутты 4-го порядка (рис 3.2). Шаг интегрирования по времени выбирается равный  $h_t = 0.032, \dots, 1$  с при работе двигательных установок ВС.

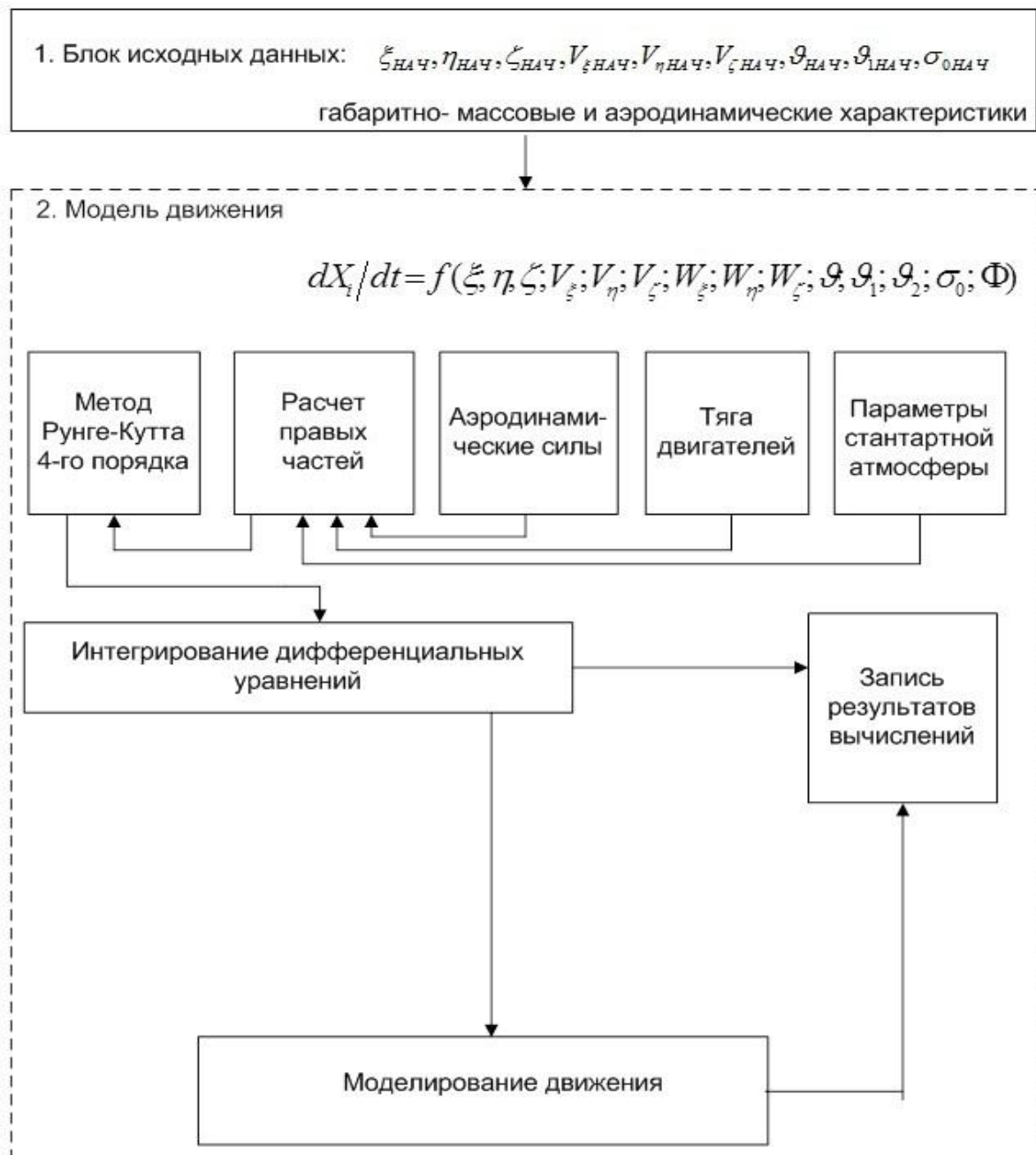


Рис.3.2. Структура интегрирования системы на ЭВМ с дискретизацией методом Рунге-Кутты 4-го порядка

### 3.5. Исследование эффективности разработанных алгоритмов

Приведем сравнительный анализ алгоритма программного управления с алгоритмом, в основе которого лежит аппроксимация ортогональными полиномами Чебышева.

Эти полиномы обладают рядом преимуществ.

1. Благодаря ортогональности вычисление коэффициентов полинома аппроксимирующего процесса осуществляется быстрее, чем для не ортогональных.

2. Коэффициенты полинома не зависят от порядка исходного полиномиального уравнения, то есть при отсутствии априорной информации о порядке полинома можно проверить несколько порядков, причем все коэффициенты, полученные при низшем порядке, остаются действительными и для высшего. Это свойство наиболее важно при выборе наилучшего порядка аппроксимирующего полинома.

3. Одним из главных свойств ортогональных полиномов Чебышева является свойство почти равных ошибок, когда ошибка аппроксимации колеблется внутри диапазона измерений между почти одинаковыми пределами.

В общем виде аппроксимирующее уравнение, полученное с помощью ортогональных аппроксимирующих полиномов можно представить как

$$P(t) = b_0 P_0(t) + b_1 P_1(t) + \dots + b_m P_m(t) \quad (3.38)$$

где  $P_v(t)$  - ортогональный полином порядка  $n$ .

Условие ортогональности запишем в виде:

$$\sum_{i=0}^n P_\mu(t_i) P_\nu(t_i) = 0, \quad \forall \mu \neq \nu \quad (3.39)$$

или в общем виде:

$$\int_a^b \omega(t) P_\mu(t) P_\nu(t) dt = 0, \quad \forall \mu \neq \nu, \quad (3.40)$$

где  $n$  - число измерений.

Полиномы Чебышева можно представить:

$$P_\nu(\xi) = T_\nu(\xi) = \cos(\nu \cdot \arccos \xi), \quad -1 \leq \xi \leq 1 \quad (3.41)$$

Независимая переменная  $t$  в (3.18) должна быть представлена так, чтобы она удовлетворяла области измерения  $\xi$  в выражении (3.21).

Используя метод наименьших квадратов, аппроксимирующий полином Чебышева может быть получен на основе минимизации функционала:

$$J = \int_{-1}^1 \omega(\xi) \left[ u(\xi) - \sum_{i=0}^M b_i T_i(\xi) \right]^2 d\xi \quad (3.42)$$

При  $\xi_i = \cos \left[ (2i+1) \frac{\pi}{2n} \right]$ ,  $i = \overline{0, n-1}$  полиномы Чебышева обладают

свойством дискретной ортогональности для  $\mu, \nu < n$ :

$$\sum_{j=0}^n T_\mu(\xi_j) \cdot T_\nu(\xi_j) = \begin{cases} 0 & \text{при } \mu \neq \nu \\ \frac{n}{2} & \text{при } \mu = \nu \neq 0 \\ n & \text{при } \mu = \nu = 0 \end{cases} \quad (3.43)$$

В (3.23) вес  $\omega(\xi)$  из (3.20) равен единице. Тогда в (3.22)  $\omega(\xi)$  также равна единице и тогда коэффициенты  $b_k$  для аппроксимирующего полинома Чебышева можно вычислить, минимизируя следующее выражение:

$$S = \sum_{j=0}^{n-1} \left[ u(\xi_j) - \sum_{k=0}^m b_k T_k(\xi_j) \right] \quad (3.44)$$

Тогда коэффициенты (3.1) могут быть получены следующим образом:

$$b_0 = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} u(\xi_j) \quad (3.45)$$

$$b_k = \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n-1} u(\xi_j) T_k(\xi_j) \quad (3.46)$$

Чтобы получить аппроксимирующий полином, необходимо рассчитать коэффициенты  $b_k$  и получить вид ортогональных полиномов Чебышева, преобразуя переменную  $t$ .

Полиномы до третьего порядка могут быть получены по формулам:

$$\begin{aligned}
 P_0(\xi) &= 1 \\
 P_1(\xi) &= 1 - 2\frac{\xi}{n}, \quad (n \geq 1) \\
 P_2(\xi) &= 1 - 6\frac{\xi}{n} + \frac{6\xi(\xi-1)}{n(n-1)}, \quad (n \geq 2) \\
 P_3(\xi) &= 1 - 12\frac{\xi}{n} + 30\frac{\xi(\xi-1)}{n(n-1)} - 20\frac{\xi(\xi-1)(\xi-2)}{n(n-1)(n-2)}
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Для преобразования воспользуемся формулой

$$\xi = \frac{t - t_0}{h},$$

где  $h$  - шаг дискретности.

Приведенные зависимости позволяют рассчитать значения величин, необходимых для реализации вышеприведенных алгоритмов.

Рассмотрим ряд дискретных значений управляющих воздействий, приведенных в таблице 3.10

Таблица 3.1

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
u	1.75	2.5	2.75	3.5	3.25	3.25	3.75	3.5	3.28	2.75	3.25	2.25

В соответствии с выражением (3.1) представим аппроксимирующий полином в виде:

$$P(t) = \sum_{k=0}^m \frac{c_k}{S_k} P_{k,n} \left( \frac{t - t_0}{h} \right), \quad \forall m \leq n, \tag{3.48}$$

$$c_k = \sum_{t=0}^n u_t P_{k,n}(t_i)$$

где

$$S_k = \sum_{t=0}^n P_{k,n}^2(\xi) = \frac{(n+k+1)^{[k+1]}}{(2k+1)n^{[k]}}, \quad \xi = \frac{t-t_0}{h}$$

Пусть  $h = 1$ ,  $t_0 = 0$ , тогда  $\xi = t$ .

В таблице 3.2 приведены значения ортогональных полиномов до второго порядка, полученных в соответствии с приведенными выше выражениями.

Таблица 3.2

t	0	1	2	3	4	5
$P_{1,6}$	1	0.6	0.2	-0.2	-0.6	-1
$P_{2,6}$	1	-0.2	-0.8	-0.8	-0.2	1

Как видно, ошибка аппроксимации, проведенной с использованием ортогональных полиномов, получается меньше, чем ошибка, полученная при расчетах в соответствии с полиномом сглаживания примерно в два раза.

Но, как показывают дальнейшие расчеты, ошибка экстраполяции, имеющая место при использовании алгоритма “быстро-терминального” управления, оказывается большей, чем для полиномов наилучшего приближения, несмотря на лучшее качество аппроксимации на диапазоне данных.

В связи с этим для целей формирования прогнозируемых сигналов управляющих воздействий на интервал программного управления комбинированный алгоритм является предпочтительней.

Разработанная программа позволяет рассчитывать значения сигналов управления, выдаваемых на исполнительные органы.

Используя данную информацию в качестве априорной, была исследована модель движения с использованием алгоритма сглаживания. Результаты говорят о том, что система остается устойчивой и отклонения фазовых координат не превышают допустимых значений.

Рассмотрим движение объекта с учетом внешних возмущений и использованием алгоритма программного управления. Записав систему уравнений в форме Коши, получим значения матриц А, Б и С, рассмотренных ранее:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_{v_z v_z} & -C_{v_z \psi} & 0 & -C_{v_z \delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -C_{\psi v_z} & -C_{\psi \psi} & 0 & -C_{\psi \delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_{\text{ПР}}^2} & -\frac{2\xi}{T_{\text{ПР}}} \end{bmatrix};$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{K_{\text{РП}}}{T_{\text{ПР}}^2} \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Тогда матрицы  $\Phi(T)$ ,  $H(T)$ ,  $\Gamma(T)$  могут быть представлены следующим образом:

$$\Phi(T) = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_{v_z v_z} T & -C_{v_z \psi} T & 0 & -C_{v_z \delta} T & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & -C_{\psi v_z} T & -C_{\psi \psi} T & 1 & -C_{\psi \delta} T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{T}{T_{\text{ПР}}^2} & 1 - \frac{2\xi T}{T_{\text{ПР}}} \end{bmatrix};$$

$$H(T) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{T^2 K_{PI}}{2 T_{IP}^2} \\ \frac{T_{PI} - 2\xi T^2}{T_{PI}} \cdot \frac{K_{PI}}{T_{IP}^2} \end{bmatrix}; \Gamma(T) = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & 0 \\ T - \frac{C_{V_z V_z} T^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{T^2}{2} \\ -\frac{C_{\psi V_z} T^2}{2} & T \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

При расчетах было принято:

$$C_{V_z V_z} = 0, C_{\psi V_z} = 0, C_{\psi \psi} = 0.$$

Идентификация внешних возмущений проводилась по описанной выше методике.

На рис.3.3 представлена модель рассматриваемой системы.

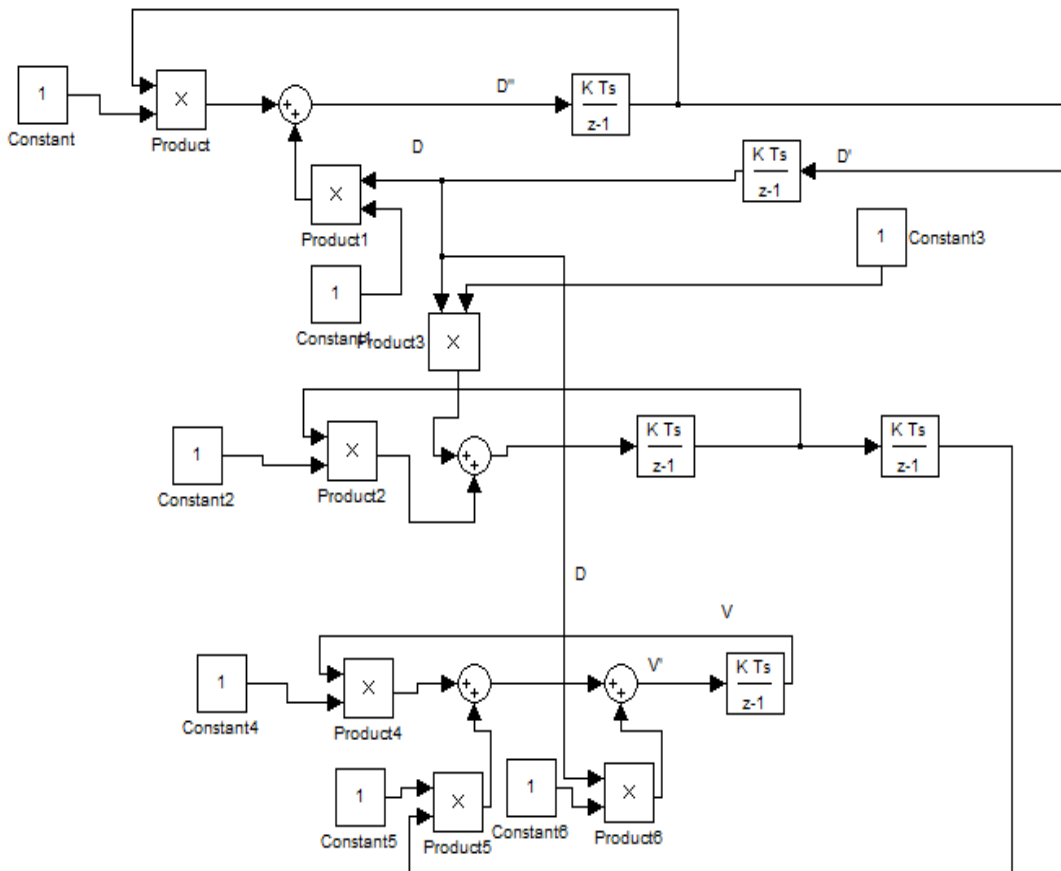


Рис.3.3 Модель системы стабилизации ВС

Переходные процессы, характеризующие движение объекта в условиях программного управления и формировании управляющих воздействий при реализации алгоритма оптимального программного управления приведены на рис. 3.4–3.7.

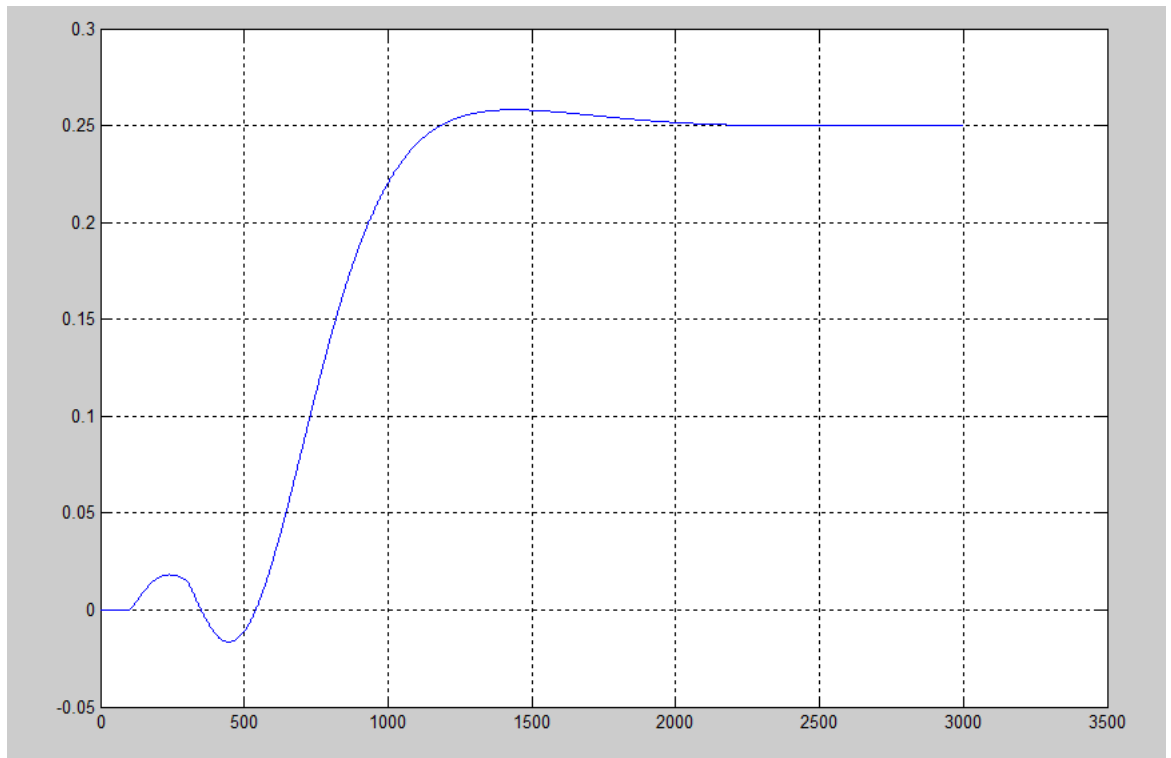


Рис. 3.4 Изменение значения боковой координаты  $Z$

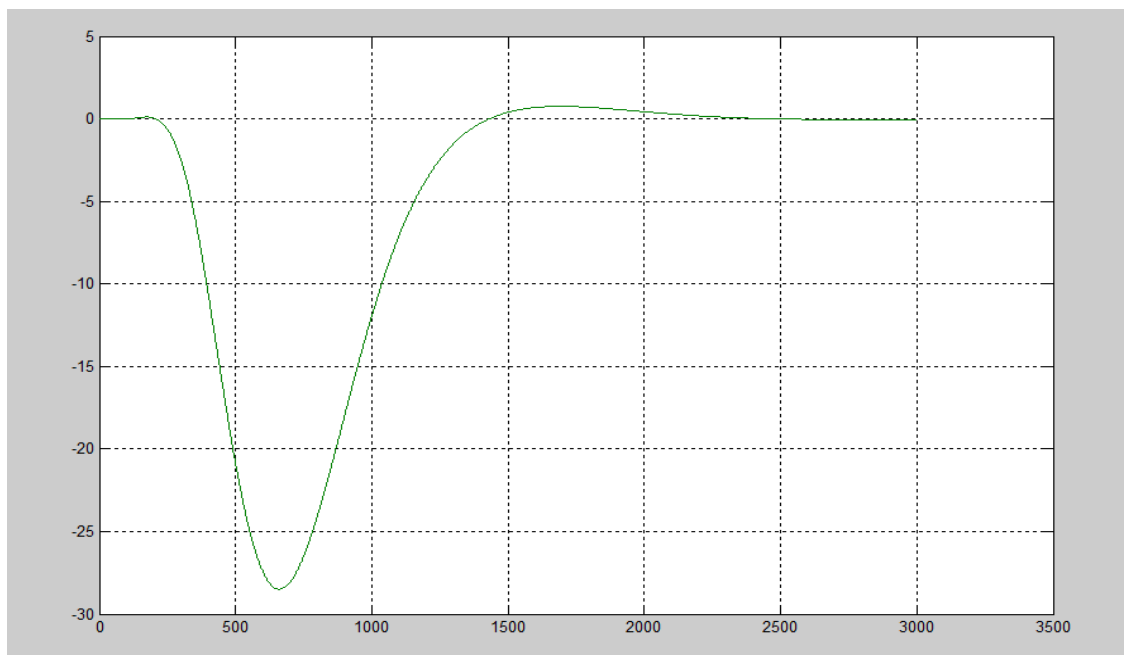


Рис. 3.5 Изменение значения угла рыскания  $\Psi$



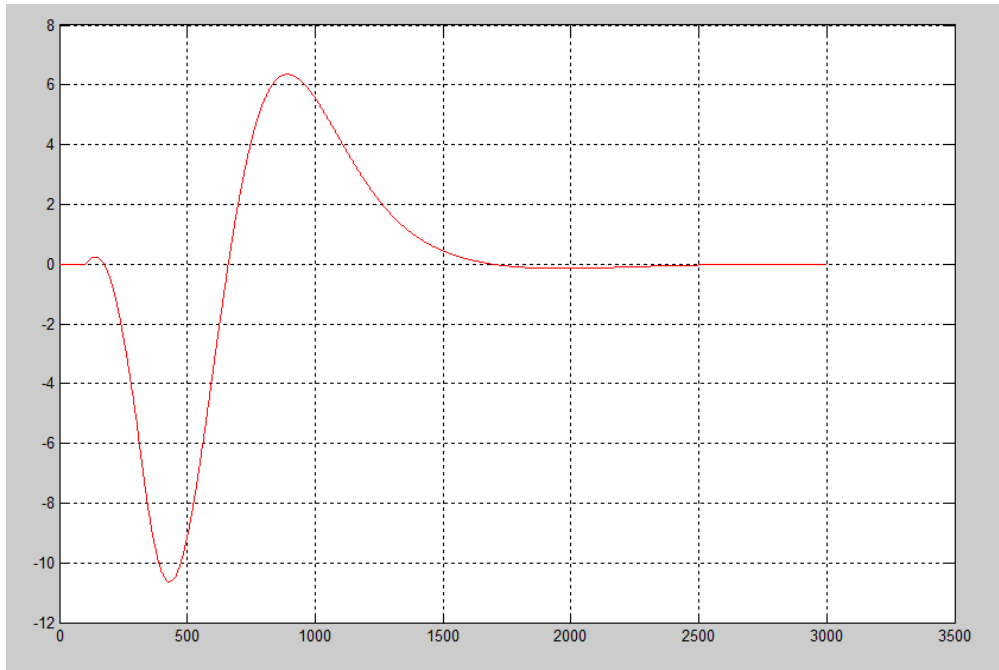


Рис. 3.6 Изменение значения угловой скорости  $\Psi$

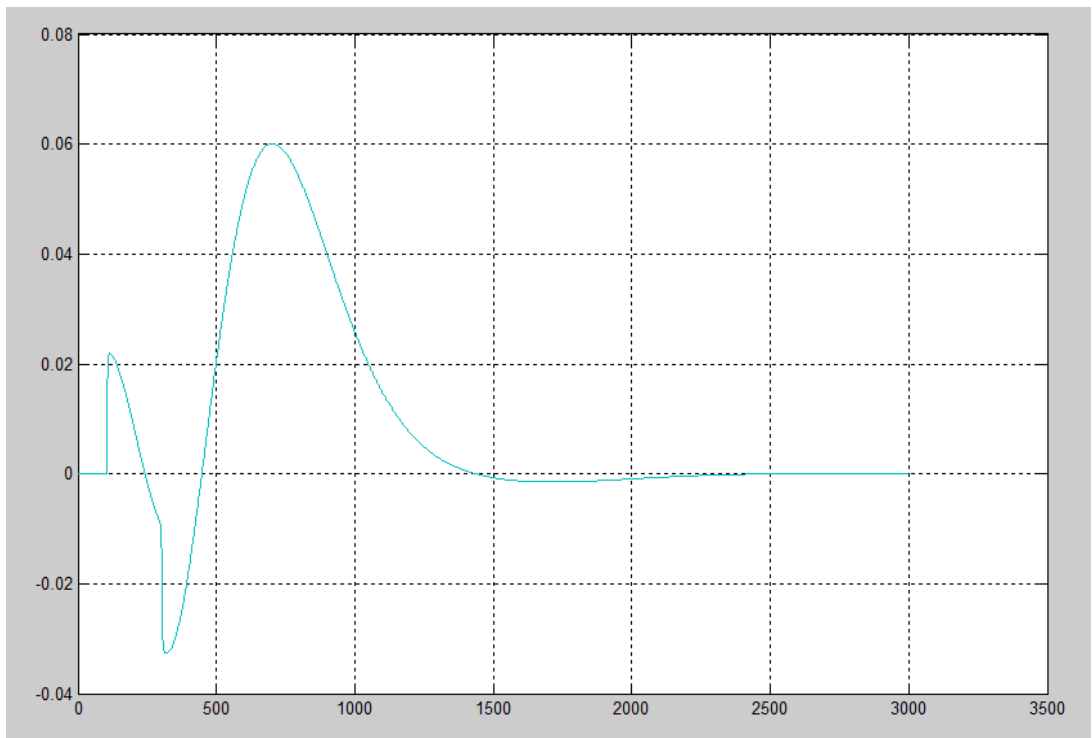


Рис. 3.7 Изменение значения боковой скорости  $V_z$

Расчеты проводились при различных начальных условиях и действии внешних возмущений. Как видно из графиков, при фиксировании

исполнительных органов в прежнем положении или их возвращении в нулевое положение, за интервал времени меньше одной секунды, угловые координаты объекта существенно отклоняются (Приложение 2).

В то же время реализация алгоритма программного управления обеспечивает устойчивость и требуемую точность в достижении фазовых координат.

Таким образом, разработанные алгоритмы прогноза управляющих воздействий и оптимального программного управления обеспечивают требуемое качество системы на интервале движения ВС.

Таким образом, представленные дополнительные требования к памяти БЦВМ являются обоснованными, поскольку они предусматривают разработку и реализацию в ней программы управления, которая основана на идентификации показателей  $T_{пр. \delta_{изм}}$  с последующим принятием решения на использование вычислительных алгоритмов. Поэтому, рассмотренные алгоритмы предполагается использовать в высокопроизводительных БЦВМ.

Проанализируем возможность реализации алгоритмов, полученных в предыдущих главах, на современных бортовых вычислительных средствах.

Как известно [35, 62], основными параметрами машинных алгоритмов являются:

количество операций каждого типа  $\theta_i$ ;

относительная частота операций  $i$ -го типа  $\alpha_i$ ;

основная трудоемкость;

связность алгоритма;

погрешность;

цикличность;

параллельность.

При анализе приведенных выше алгоритмов остановимся на рассмотрении первых характеристик.

Количество операций  $i$ -го типа  $\theta_i$  зависит как от самого полученного алгоритма, так и от исходных данных и промежуточных результатов.

В предлагается определить значения  $\theta_i$  с помощью ориентированного графа, который является более простым, нежели составление дополнительной моделирующей программы.

Чтобы определить относительную частоту операций  $i$ -го типа, можно воспользоваться формулой:

$$\alpha_i = \theta_i / \sum_{i=1}^m \theta_i,$$

где  $m$  - число типов операций.

Под основной трудоемкостью понимают количество стандартных операций, которые должны быть выполнены при реализации данного конкретного алгоритма, причем не учитываются операции, выполняемые с целью обнаружения и исправления ошибок, а также ликвидации последствий сбоев и отказов.

В качестве стандартной операции, будем считать операцию сложения, выполняемую в течение 0.5 мкс.

Тогда длительность выполнения любой операции  $i$ -го типа может быть выражена через стандартную операцию следующим образом:

$$\tau_i = 0,5\psi_i, \quad i = \overline{1, m}$$

где  $\psi_i$  - коэффициент отношения длительности выполнения операций  $i$ -го типа.

Исходя из этого, основную трудоемкость алгоритма можно посчитать по следующей зависимости:

$$\theta = 2 \sum_{i=1}^m \theta_i \tau_i = \sum_{i=1}^m \psi_i \theta_i,$$

где  $\theta_i$  - количество операций  $i$ -го типа.

Для определения объема памяти ОЗУ обычно поступают следующим образом. Все множество исходных данных  $X_i$  разбивают на два подмножества  $X_i^{(1)}$  и  $X_i^{(2)}$ , чтобы выполнялись следующие условия:

$$\begin{aligned} X_i^{(1)} \cup X_i^{(2)} &= X_i \\ X_i^{(1)} \cap X_i^{(2)} &= \emptyset \end{aligned}$$

В подмножество  $X_i^{(1)}$  будем включать исходные данные, которые характеризуются при решении  $j$ -ой задачи или при следующем цикле решения  $i$ -ой задачи. В подмножество  $X_i^{(2)}$  включим исходные данные, которые используются только при решенной  $i$ -ой задачи.

Тогда число ячеек памяти  $q(x)$ , необходимых для организации решения приводимых задач, можно определить по следующей формуле:

$$q(x) = q\left(\bigcup_{i=1}^n X_i^{(1)}\right) + \sum_{i=1}^n q(x_i^2)$$

Приведенные зависимости позволяют рассчитать основные параметры рассмотренных выше алгоритмов.

Рассчитанные значения характеристик сведены в таблицу 3.3.

Таблица 3.3

Алгоритмы	Число операций “+”	Число операций “х”	Число операций “:”	Потребный объем памяти
Алгоритм прогноза	48	91	1	36
Алгоритм программного управления	106	120	-	48

Таким образом, реализация полученных алгоритмов может быть успешно осуществлена на перспективных бортовых вычислительных комплексах, обладающих повышенным быстродействием и значительным объемом оперативной памяти.

### Выводы по третьей главе

1. Проведён анализ использования полиномов Чебышева для решения задачи аппроксимации и последующей экстраполяции управляющих воздействий. Благодаря ортогональности вычисление коэффициентов полинома аппроксимирующего процесса осуществляется существенно быстрее. Коэффициенты полинома не зависят от порядка исходного полиномиального уравнения, то есть при отсутствии априорной информации о порядке полинома можно проверить несколько порядков, причем все коэффициенты, полученные при низшем порядке, остаются действительными и для высшего. Это свойство наиболее важно при выборе наилучшего порядка аппроксимирующего полинома. Одним из главных свойств ортогональных полиномов Чебышева является свойство почти равных ошибок, когда ошибка аппроксимации колеблется внутри диапазона измерений между почти одинаковыми пределами.

2. Разработан алгоритм программного управления по имеющейся информации о векторе параметров состояния до момента программного управления и информации о требуемом состоянии, в которое надо перевести объект с учетом внешних возмущений.

3. Сформированное управление обеспечивает перевод объекта из начального состояния в требуемое при выполнении условий обеспечения устойчивости и точности.

4. При синтезе был выбран обобщенный квадратичный показатель качества, что обеспечило грубость системы по отношению к отклонениям коэффициентов объекта от номинальных значений и действующих возмущений.

5. Показана возможность идентификации внешних возмущений, действующих на объект, как при наличии дополнительных измерений, так и без них. Учитывая природу возмущений, их можно экстраполировать на интервал программного управления и тем самым строить алгоритм программного управления с учетом имеющих место возмущений.

6. Разработана математическая модель движения ВС в инерциальной системе координат с использованием пакета Matlab. Расчеты проводились при различных начальных условиях и действии внешних возмущений. Как видно из графиков, реализация алгоритма программного управления обеспечивает устойчивость и требуемую точность в достижении фазовых координат.

Таким образом, разработанные алгоритмы прогноза управляющих воздействий и программного управления обеспечивают требуемое качество системы на интервале движения ВС.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработка современных автоматических систем управления движением стала одним из приоритетных направлений в обслуживании и в обеспечении качества полетов воздушных судов. Особенная потребность заключается в необходимости разработки алгоритмов, которые учитывают динамику самолета, а также подвижность наблюдаемых объектов при решении задачи поиска оптимального маршрута их облета. Это позволяет оптимально расходовать время, топливо и тем самым снизить стоимость полета.

В диссертации проанализированы существующие подходы к планированию маршрута полета, разработан алгоритм программного управления воздушным судном, разработана программа, реализующая данный алгоритм, проведена оценка эффективности применения разработанных моделей и алгоритмов, разработаны методические рекомендации по использованию инструмента для оценки и прогноза движения воздушного судна.

В работе разработан подход, который реализует программное управление. Разработанные модель и алгоритмы способны рассчитывать оптимальные маршруты в течение очень короткого промежутка времени, так как выполняются в реальном времени в составе программного обеспечения БЦВМ.

Особенностью программного управления является то, что оно строится в ходе полета, и прогнозирование его осуществляется с использованием терминального вектора фазовых координат.

Разработанные модели и алгоритмы программного управления, оптимальные по обобщенному квадратичному показателю качества, обеспечивающие требуемое качество процесса управления, служат основой для принятия рациональных и эффективных управленческих решений, направленных на снижение стоимости полета воздушных судов и разработки инновационной системы управления воздушным движением.

Разработанные алгоритмы программного управления обладают необходимой робастностью, что исключает влияние нечеткости и неопределенности внешних возмущений и человеческого фактора.

Показано, что наибольший эффект достигается при прогнозировании маршрута движения с использованием терминального вектора фазовых координат, точность которого максимальна в случаях гладких участков пространственного разворота.

Разработка информационного и методического обеспечения программного управления позволяет повысить эффективность функционирования систем и снизить затраты на управление воздушным судном.

Проведенные теоретические и прикладные исследования базируются на методах современного системного анализа, математической статистики, методах математического моделирования.

Моделирование процесса проведено в пакете прикладных программ Matlab и его приложения Simulink, экспериментальные исследования связаны с использованием математических пакетов MathCAD.

Разработанные программные средства позволяют пользователю решать конкретные практические задачи, пригодны для практического использования на этапах проектирования и опытной отработки.

Реализация результатов исследования направлена на решение текущих и перспективных задач государственной авиации, на совершенствование и развитие систем ранее внедренных в эксплуатацию в комплексе обеспечения движением воздушных судов.



### Список литературы

1. Абчук, В.А. Автоматизация управления /В.А. Абчук, А. Л. Лифшиц, А. А.Федулов, Э. И. Кушитна. - М.: Радио и связь, 1984. - 264 с.
2. Адлер Ю. П., Маркова Е. В., Грановский Ю. В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. М.: Наука, 1976.–322 с.
3. Алексеев В.В. Автоматизация выбора информации в базах знаний / В.В. Алексеев, В.А. Малышев, А.В. Яковлев // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2002. – № 3. – С. 41 – 43.
4. Алексеев В.В. Модели разрешения конфликтов в эргатических системах контроля / В.В. Алексеев, В.А. Малышев, А.В. Яковлев // Материалы II Всероссийской НТК «Теория конфликта и ее приложения» (30 сент. – 1 окт. 2002 г.). – Воронеж: ВГТА, 2002.– С. 76 – 77.
5. Атмосферы стандартные. ГОСТ 24631-81. М.: Государственный Комитет по стандартам, 1982. Алешин, В.И. Организация управления воздушным движением/ В.И. Алешин, Ю.П. Дарымов, Г.А.. Крыжановский. - М.: Транспорт, 1988. - 264 с.
6. Анодина, Т.Г. Моделирование процессов в системе управления воздушным движением/Т.Г. Анодин. - М.: Радио и связь, 1993. - 345 с.
7. Анодина, Т.Г. Управление воздушным движением /Т.Г. Анодина, С.В.Володин, В.П. Куранов, В.И. Мокшанов. - М.: Транспорт, 1988. - 229 с.
8. Ахназарова С. Л., Кафаров В. В. Методы оптимизации эксперимента в химической технологии. М.: Высшая школа, 1985. - 325 с.
9. Барковский В.В., Захаров В.Н., Шаталов А.С. Методы синтеза систем управления. -М.: Машиностроение, 1981. -277с.
10. Бокс Д., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Вып.1 / Перевод с английского под ред. Писаренко В.Ф. М.: Мир, 1974. -428с.
11. Блинов И. Н., Гаскаров Д. В., Мозгалевский А. В. Автоматический контроль систем управления. Л.: Энергия, 1968. – 151 с. Бугаенко, А.А. О

нахождении гарантированного решения при управлении динамическим объектом / С.В.Петренко, А.А.Бугаенко, Г.Г. Ковтун, А.В.Яковлев // Перспективы науки. – 2013. – №1(40). – С.78-82.

12. Гаскаров Д. В., Голинкевич Т. А., Мозгалеvский А. В. Прогнозирование технического состояния и надежности радиоэлектронной аппаратуры. М.: Советское радио, 1974. – 217 с.

13. Гинзбург Г. П. Аэродинамика. М.: Высшая школа, 1966. - 404 с.

14. Горелик А. В., Бутько Г. И., Белоусов Ю. А. Бортовые цифровые вычислительные машины. М.: Машиностроение, 1975.

15. Гутер Р. С., Овчинский Б. В. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. М.: Физматгиз, 1970.-432с.

16. Гроп Д. Методы идентификации систем. /Перевод с английского под ред.Кринецкого.-М.: Мир, 1979, -302с.

17. Гончаров Б.Л. Теория интерполирования и приближения функций-М.: Л.: ОНТИ-ГТТИ, 1934.-316с.

18. Гребенюк и др. Полиномы наилучшего приближения по многим переменным. - Ташкент, ФАН, 1970. -216с.

19. Громов, Ю.Ю. Алгоритм распознавания ситуаций в распределённой информационной системе / Ю.Ю.Громов, А.Ю.Громова, В.А.Объедков, С.В.Петренко, Д.П.Швец, А.Г.Андрущенко // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. – 2011. – №8. – С.4-7.

20. Дарымов, Ю.П. Автоматизация процессов УВД /Ю. П. Дарымов, Г. А. Крыжановский, В. А. Солодухин и др.- М.: Транспорт, 1981. - 400 с.

21. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. -М.: Физматгиз, 1962. -367с.

22. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. - Физматгиз, 1960. -659с.

23. Жданюк Б. Ф. Основы статистической обработки траекторных измерений. М.: Сов. Радио, 1978. – 384 с.

24. Зайцев А.В, Канушкин С.В., Волков А.В., Тое Вэй Тун «Применение обобщенного квадратичного показателя качества при решении задачи разработки метода терминального программного управления». Труды ФГУП «НПЦАП». Системы и приборы управления. №3, 2014. – М.: ОАО «ИПП «Куна».
25. Зайцев А.В, Канушкин С.В., Волков А.В., Тое Вэй Тун «Разработка алгоритма терминального управления» Информатика, вычислительная техника и управление: Сб. науч. тр. – Вып.5/Под ред. *А. В. Князева, Д. А. Ловцова.* – М.: ИТМиВТ РАН, 2014.
26. Зайцев А.В, Канушкин С.В., Волков А.В., Тое Вэй Тун «Разработка модели реализации терминального управления летательного аппарата с учётом действующих возмущений» Информатика, вычислительная техника и управление: Сб. науч. тр. – Вып. 5/Под ред. *А. В. Князева, Д. А. Ловцова.* – М.: ИТМиВТ РАН, 2014.
27. Зайцев А.В, Канушкин С.В., Волков А.В., Павлов Р.С., Тое Вэй Тун «Разработка алгоритма управления движением летательного аппарата»//Проблемные вопросы развития наземных комплексов, стартового оборудования и эксплуатации летательных аппаратов/Филиал ФГУП «ЦЭНКИ»-КБТХМ.-М., 2014.-Вып. №9:часть 2.- с. 190-195.
28. Зайцев А.В, Канушкин С.В., Волков А.В., Павлов Р.С., Тое Вэй Тун «Модель управления летательного аппарата с учётов действующих возмущений»//Проблемные вопросы развития наземных комплексов, стартового оборудования и эксплуатации летательных аппаратов/Филиал ФГУП «ЦЭНКИ»-КБТХМ.-М., 2014.-Вып. №9:часть 2.- с. 196-201.
29. Зайцев А.В, Канушкин С.В., Волков А.В., Тое Вэй Тун. Задача программного управления с обобщенным квадратичным показателем качества. Труды 34 Всероссийской НТК «Проблемы эффективности и безопасности функционирования сложных технических и информационных систем», Серпухов, 2015, Часть 3 , с. 181-185.

30. Зайцев А.В., Фисун Ю.В. Комбинированный подход в решении задач восстановления информации. В сб. Прогрессивные технологии, конструкции и системы в приборо-и машиностроении. РАН, 1999.
31. Зайцев А.В., Фисун Ю.В. Методы определения и прогнозирования движения центра масс ЛА по результатам траекторных измерений. Материалы XXXV НТК, посвященной разработке наследия К.Э. Циолковского, в сб.: ИИЕТ РАН.:Калуга, 1999.
32. Зайцев А.В., Фисун Ю.В. Оперативный алгоритм по оценке коэффициентов квадратичного полинома. Материалы XIX МНТК.: Серпухов, 2000.
33. Зубов В.И. Лекции по теории управления. -Л.: ЛГУ, 1972. -204с.
34. Калман Р.Е. Об общей теории систем управления. - В кн.: Теория дискретных, оптимальных и самонастраивающихся систем.-М.: изд. АН СССР, 1961. -с.521-547.
35. Коллин К. К., Липаев В. В. Проектирование алгоритмов управляющих ЦВМ. М.: Сов. Радио, 1970. – 178 с.
36. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968. - 720 с.
37. Курицкий Б. Я. Оптимизация вокруг нас. Л.: Машиностроение,1989. - 145с.
38. Кузовков Н.Т. Системы стабилизации летательных аппаратов. – М.:Высшая школа.
39. Ли Р. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. - М.: Наука, 1966. -176с.
40. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основ математической теории обработки наблюдений. М.: Физматгиз, 1962. - 350 с.
41. Математическая статистика. М.: Высшая школа, 1981. - 368 с.
42. Мидвинтер Дж. Э. Волоконные световоды для передачи информации. /Перевод с английского под ред. Е.М.Дианова. -М.:Радио и связь, 1983. -336с.

43. Медич Дж. Статистически оптимальные линейные оценки и управление. / Перевод с английского под ред. А.С.Шаталова. -М.:Энергия, 1973. -440с.
44. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. -Гостехиздат,-М.: -Л.: -1949. -688с.
45. Панфилов И.В., Половко А.М. Вычислительные системы. М.: Советское радио, 1980. -304с.
46. Петренко С.В. Моделирование динамики системы поддержки принятия решений при формировании бесконфликтной очереди заходящих на посадку воздушных судов /С.В. Петренко, А.А. Безбогов, А.В. Яковлев// Материалы докладов VII Всероссийской научно-технической конференции «Повышение эффективности средств обработки информации на базе математического моделирования», 27–29 апреля 2004 г. Часть 2. – Тамбов: ТВАИИ, 2004. – С. 334-342.
47. Петренко, С.В. Вопросы совершенствования деятельности оператора автоматизированных систем управления/ С.В. Петренко, Ю.А. Сушков// Составляющие научно-технического прогресса. Материалы 5-ой Международной научно-практической конференции 29 - 30 апреля 2009 г. - Тамбов, 2009. - С.76-79.
48. Петренко, С.В. Синтез математической модели автоматизированной системы управления / С.В.Петренко, А.В.Яковлев, Ан.В. Яковлев // Вопросы современной науки и практики. Университет им. В.И.Вернадского. – 2009. – №1. – С.160-169.
49. Папернов А. А. Логические основы цифровых машин и программирование. М.: Физматгиз, 1965. – 389с.
50. Пономаренко В.А. Авиация-белое и черное. М.:Бестселлер, 1995.-456с.
51. Петренко, С.В. Аналитическая модель функционирования системы управления воздушным движением в районе аэродрома/ С.В. Петренко, С.Н. Прокофьев // Материалы 7-й Международной научно-практической

конференции «Прогрессивные технологии развития», 30 ноября 2010 г.- Тамбов: ТГТУ, 2010. - С.107-109.

52. Прохоренко В. А., Смирнов А. Н. Прогнозирование качества систем. Минск: Наука и техника, 1976. – 197 с.

53. Прокофьев, С.Н. Применимость показателей функционирования системы управления воздушным движением для проектирования информационно-управляющей системы организации воздушного движения/«Информатика: проблемы, методология, технологии» 9-10 февраля 2012 г., г. Воронеж.- Воронеж: ИПЦ ВГУ, 2012. Том 1.- С. 110-112.

54. Прокофьев, С.Н. Разработка математической модели формирования потока воздушных судов, заходящих на посадку. - Материалы 7-й Международной научно-практической конференции «Качество науки - качество жизни», 28 февраля 2011 г.- Тамбов: ТГТУ, 2011. - С. 68 – 71.

55. Прокофьев, С.Н. Обоснование необходимости автоматизации формирования потока воздушных судов, заходящих на посадку. - Материалы 7-й Международной научно-практической конференции «Качество науки - качество жизни», 28 февраля 2011 г.- Тамбов: ТГТУ, 2011. - С. 72-74.

56. Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М. Численные методы в экстремальных задачах. М.: Наука, 1975. - 319 с.

57. Рузинов Л. П. Статистические методы оптимизации химических процессов. М.: Химия, 1972. – 312 с.

58. Румшиский Л. З. Математическая обработка результатов эксперимента. Справочное пособие. М.: Наука, 1971. – 192 с.

59. Сейдж Э.П., Мелса Д.Д. Идентификация систем управления. -М.:Наука, 1974. -246с.

60. Смоляк С. А., Титаренко Б. П. Устойчивые методы оценивания. М.: Статистика, 1980. – 208 с.

61. Скиба Г. Г. Математические методы газовой динамики. М.: МО СССР, 1988. – 145 с.

62. Системы управления летательными аппаратами. Учебник /Под общей редакцией профессора Г.Н. Лебедева.– М.: МАИ, 2005 г.-840 с.
63. Сухорученков Б. И., Меньшиков В. А. Методы анализа характеристик летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1995. – 365с.
64. Тое Вэй Тун. Определение параметров алгоритма управления движением летательного аппарата. Материалы V Всероссийской научно-практической конференции «Современное непрерывное образование и инновационное развитие» // Под редакцией проф. А.Н. Царькова и проф. И.А. Бугакова. – Серпухов: МОУ «ИИФ», 2015. – 966 с., с. 852-854.
65. Ту Ю. Цифровые и импульсные системы автоматического управления. /Перевод с английского под ред. В.В.Солодовникова. -М.: Машиностроение, 1964. -702с.
66. Ту Ю. Современная теория управления. -М.: Машиностроение, 1971. -472с.
67. Уланов Г.М. Динамическая точность и компенсация возмущений в системах автоматического управления. -М.: Машиностроение, 1971,-267с.
68. Федоров С.М., Литвинов А.П. Автоматические системы с цифровыми управляющими машинами. -М.: Энергия, 1965.
69. Фаворин М.Ф. Моменты инерции тел. - Справочник. -М.: Машиностроение, 1977. -511с.
70. Фадеев Д. К., Фадеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1960. – 656 с.
71. Френкель А. А. Математические методы анализа динамики и прогнозирования производительности труда. М.: Экономика, 1972. –190 с.
72. Чуев Ю. В., Михайлов Ю. Б., Кузьмин В. И. Прогнозирование количественных характеристик процессов. М.: Сов. радио, 1979. - 398 с.
73. Четыркин Е.М. Статистические методы прогнозирования. - М.:Статистика, 1977.
74. Черноусько Ф.А., Колмановский В.Б. Оптимальное управление при

случайных возмущениях. -М.: Наука, 1978. -352.

75. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. -М.: Мир, 1975. -683с.

76. Яковлев, А.В. Методы и модели управления воздушными судами, заходящими на посадку / А.В.Яковлев, С.В.Петренко, Ан.В. Яковлев. – Saarbrucken, Germany: LAP LAMBERT Akademic Pabhlishing, 2012. – ISBN 978-3-8465-8913-7. – 90 с.

77. E. Tellezand, G. Canavan, "Comparison of Offense and Defense, a Generalized Nitze Criterion," Los Alamos National Laboratory report IA-UR-88-54, June 1988.

78. W. Sooy, "Private communication," DTST, Sununer 1983.

79. Proceedings of the Conference "Crisis Stability-the Offense/ Defense Relationship," U.S. Naval War College, Newport, RI, 22-23 .October 1986.

80. G. Canavan and A. Petschek, "Satellite Allocation for Boost Phase Missile Intercept," op. cit.

81. G. Canavan and J. Browne, "Roles for Neutral Particle Beams in Strategic Defense," op. cit.

82. G. Canavan, "SDI: Myth or Reality," Los Alamos National Laboratory report LA-11322-MS, May 1988; Proceedings of the Fourth Space Foundation Symposium. Space Foundation, 12-5 May 1988.



**Методика моделирования угловой стабилизации на примере системы  
третьего порядка**

1. Дифференциальное управления объекта ;

$$Y1' = 0y_1 - b_{12}y_2 + 0y_3 + 0u_1 ;$$

$$Y2' = 0y_1 + 0y_2 + 1y_3 + 0u_1 ;$$

$$Y3' = 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 + 1u_1 ;$$

2. Исходные матрицы Б и А соответственно

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -b_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$a(T) = \int_{kT}^{(k+1)T} [\Phi(kT - \tau) d\tau] A$$

$$= \int_0^T [\Phi(-\tau) d\tau] A ;$$

$$\Phi(\tau) = (L^{-1} \{ [E p - B]^{-1} \})$$

$$\Phi(T) = \Phi(\tau)|_{\tau=T}$$

3. Согласно приведённым формулам, получены матрицы уравнения параметров состояния:

$$\Phi(T) = L^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -b_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}_{\tau=T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -b_{12} T & -b_{12} \frac{T^2}{2} \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned}
a(T) &= \int_{kT}^{(k+1)T} [\Phi(kT - \tau) d\tau] A = \int_0^T [\Phi(-\tau) d\tau] A ; \\
&= \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & -b_{12} T & -b_{12} \frac{T^2}{2} \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} b_{12} T^3 \\ -\frac{1}{2} T^2 \\ T \end{bmatrix} ;
\end{aligned}$$

Необходимо определить алгоритм дискретного регулятора, в случае если имеется три датчика координат  $y_1, y_2, y_3$  и процесс должен заканчиваться за минимальное число шагов.

Решение задачи разбито на несколько этапов.

1. Созданы матрицы управления параметров состояния  $\Phi(T)$  и  $a(T)$ .

$$\begin{aligned}
\Phi(T) &= \begin{bmatrix} 1 & -b_{12} T & -b_{12} \frac{T^2}{2} \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \\
a(T) &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} b_{12} T^3 \\ -\frac{1}{2} T^2 \\ T \end{bmatrix} ;
\end{aligned}$$

2. Определено минимальное необходимое число шагов дискретности и свободные компоненты управляющего вектора.

$$N \geq \frac{n}{L};$$

$n=3, L=1$  получим  $N=3$ .

$$N \geq \frac{n}{L} = \frac{3}{1} = 3;$$

$$\alpha = NL - n = 3 \times 1 - 3 = 0;$$

Таким образом получены три шага дискретности при отсутствии свободных управляющих координат.

3. Определена матрица  $\sigma_3$

$$\sigma_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & r'_{11} & r''_{11} \\ a_{21} & r'_{21} & r''_{21} \\ a_{31} & r'_{31} & r''_{31} \end{bmatrix};$$

Где

$$a_{11} = -\frac{1}{6}b_{12}T^6$$

$$a_{21} = -\frac{1}{2}T^2$$

$$a_{31} = T$$

Для определения двух других столбцов найдены матрицы  $R_1(T)$  и  $R_2(T)$ .

$$S_k(T) = \Pi\Phi(T)^{-1}; \quad R_k(T) = S_k a(T); \quad q_k(T) = S_k(T)b(T);$$

При  $k= 1,2,3,\dots, N-1$

В соответствии с формулой, учитывая, что  $\Phi(T)^{-1} = \Phi(-T)$ , найдены

$$R_1(T) = \Phi(T)^{-1}a(T),$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -b_{12} T & -b_{12} \frac{T^2}{2} \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} b_{12} T^3 \\ -\frac{1}{2} T^2 \\ T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{7}{6} b_{12} T^3 \\ -\frac{3}{2} T^2 \\ T \end{bmatrix}$$

Аналогично

$$R_2(T) = \Phi(T)^{-2} a(T) = \Phi(-2T) a(T);$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2b_{12}T & -2b_{12}T^2 \\ 0 & 1 & 2T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} b_{12} T^3 \\ -\frac{1}{2} T^2 \\ T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{19}{6} b_{12} T^3 \\ -\frac{5}{2} T^2 \\ T \end{bmatrix}$$

$$\sigma^3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} b_{12} T^3 & -\frac{7}{6} b_{12} T^3 & -\frac{19}{6} b_{12} T^3 \\ -\frac{1}{2} T^2 & -\frac{3}{2} T^2 & -\frac{5}{2} T^2 \\ T & T & T \end{bmatrix};$$

4. Найден алгоритм управления из условия, что датчики производят измерения выходных координат на каждом шаге дискретности и матрица единичная.

$$B_{ji} = -\frac{\Delta_{ij}}{\Delta} \text{ при } i=1,2,3, \dots, n \text{ и } j=1,2,3, \dots, l$$

Найдены элементы первой строки матрицы В(Т). Получена матрица алгоритма управления в виде

$B(T) = \|\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}\|;$

Где

$$B_{ji} = -\frac{\Delta_{ij}}{\Delta} \quad (i=1,2,3 \dots n \text{ и } j=1,2,3,\dots,l)$$

$$\beta_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} ;$$

$$\beta_{21} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta} ;$$

$$\beta_{31} = \frac{\Delta_{31}}{\Delta} ;$$

Для определения  $\sigma^{-1}_3$  найден определитель и миноры матрицы  $b_3$

$$\Delta = -b_{12}T^6;$$

$$\Delta_{11} = (-1)^2 \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}T^2 & -\frac{5}{2}T^2 \\ T & T \end{bmatrix} = T^3 ;$$

$$\Delta_{21} = (-1)^3 \begin{bmatrix} -\frac{7}{6}b_{12}T^3 & -\frac{19}{6}b_{12}T^3 \\ T & T \end{bmatrix} = -2b_{12}T^4;$$

$$\Delta_{31} = (-1)^4 \begin{bmatrix} -\frac{7}{6}b_{12}T^3 & -\frac{19}{6}b_{12}T^3 \\ -\frac{3}{2}T^2 & -\frac{5}{2}T^2 \end{bmatrix} = -\frac{11}{6}b_{12}T^5 ;$$

откуда

$$\beta_{11} = -\frac{\Delta_{11}}{\Delta} = -\frac{T^3}{-b_{12}T^6} = \frac{1}{b_{12}T^3}$$

$$\beta_{12} = -\frac{\Delta_{21}}{\Delta} = -\frac{-2b_{12}T^4}{-b_{12}T^6} = -\frac{2}{T^2}$$

$$\beta_{13} = -\frac{\Delta_{31}}{\Delta} = -\frac{-\frac{11}{6}b_{12}T^5}{-b_{12}T^6} = -\frac{1.833}{T}$$

5. Построена структурно - матричная схема системы.

В случае необходимости можно проверить полученный алгоритм. Для чего надо задаться начальными условиями  $y_1[0], y_2[0], y_3[0]$  и по рекуррентной формуле проверить, что процессы в системе заканчиваются за три такта.

Произведена указанная проверка. Для частного случая выбрано, что

$$T = 1 \text{ сек} \quad \text{и} \quad b_{12} = -1,$$

$$Y[(K + 1)T] = \Phi(T)Y[kT] + H(T)U[kT] + \Gamma(T)F[kT]; \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

тогда

$$\beta_{11} = -1, \beta_{12} = -2, \beta_{13} = -1.833;$$

Найден переходной процесс. Матрицы  $\Phi(T)$  и  $a(T)$  равны .

$$\Phi(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$a(1) = \begin{bmatrix} 0.167 \\ -0.5 \\ 1 \end{bmatrix};$$

Принято, что  $y_1[0] = 0$ ,  $y_2[0] = 0$ ,  $y_3[0] = 1$ ;

Тогда управляющее воздействие в первом шаге равно

$$U_1[0] = -1y_1[0] - 2y_2[0] - 1.833y_3[0] = -1.833;$$

Выходные координаты в момент  $T$  подсчитываются так:

$$\begin{bmatrix} y_1[T] \\ y_2[T] \\ y_3[T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.167 \\ -0.5 \\ 1 \end{bmatrix} (-1.833) \right\} = \begin{bmatrix} 0.194 \\ 0.0835 \\ -0.833 \end{bmatrix}$$

В втором такте управляющее воздействие равно

$$U_1[T] = -1 * (0.194) - 2 * (0.0835) - 1.833 * (-0.833) = -1.164;$$

Выходные координаты в момент  $2T$  равны

$$\begin{bmatrix} y_1[2T] \\ y_2[2T] \\ y_3[2T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0.194 \\ 0.0835 \\ -0.833 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.167 \\ -0.5 \\ 1 \end{bmatrix} (1.164) \right\} = \begin{bmatrix} 0.055 \\ -0.1675 \\ 0.331 \end{bmatrix};$$

Управляющее воздействие на 3-м шаге

$$U_1[2T] = -1*(0.055) - 2*(-0.1675) - 1.833*(0.331) = -0.327;$$

Выходные координаты в момент  $3T$  равны нулю, т.е

$$\begin{bmatrix} y_1[3T] \\ y_2[3T] \\ y_3[3T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0.055 \\ -0.1675 \\ 0.331 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.167 \\ -0.5 \\ 1 \end{bmatrix} (-0.327) \right\} = \begin{bmatrix} 0.001 \\ -0.0005 \\ 0.004 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

Неточность вычислений привела к погрешности, но вектора  $Y[3T]$  близок к нулю. График переходного процесса показан на рис. П. 2. Для проверки правильности полученных переходных процессов была собрана схема моделирования, которая приведена на рис. П.2, где через ФЗ обозначено фиксирующее звено нулевого порядка.

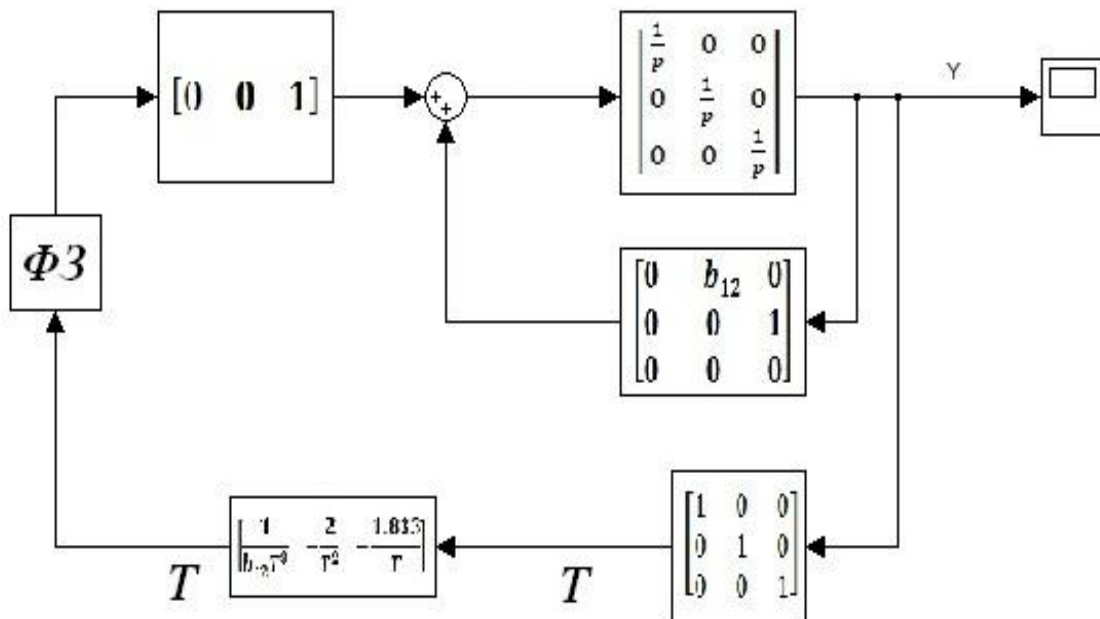


Рис.П.1. Структурно-матричная схема дискретной системы 3-го порядка

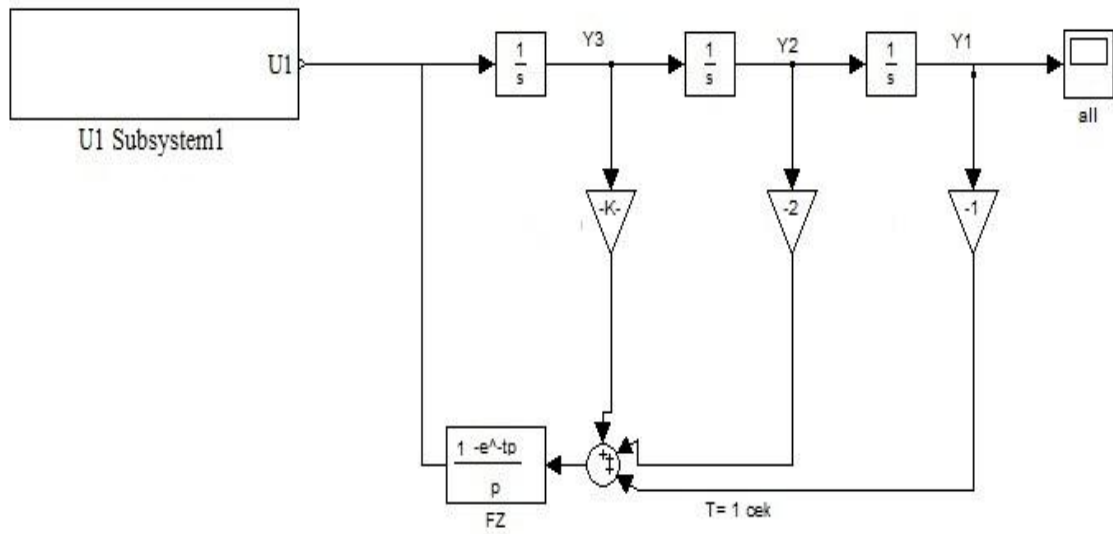


Рис. П.2. Схема моделирования дискретной системы 3-го порядка

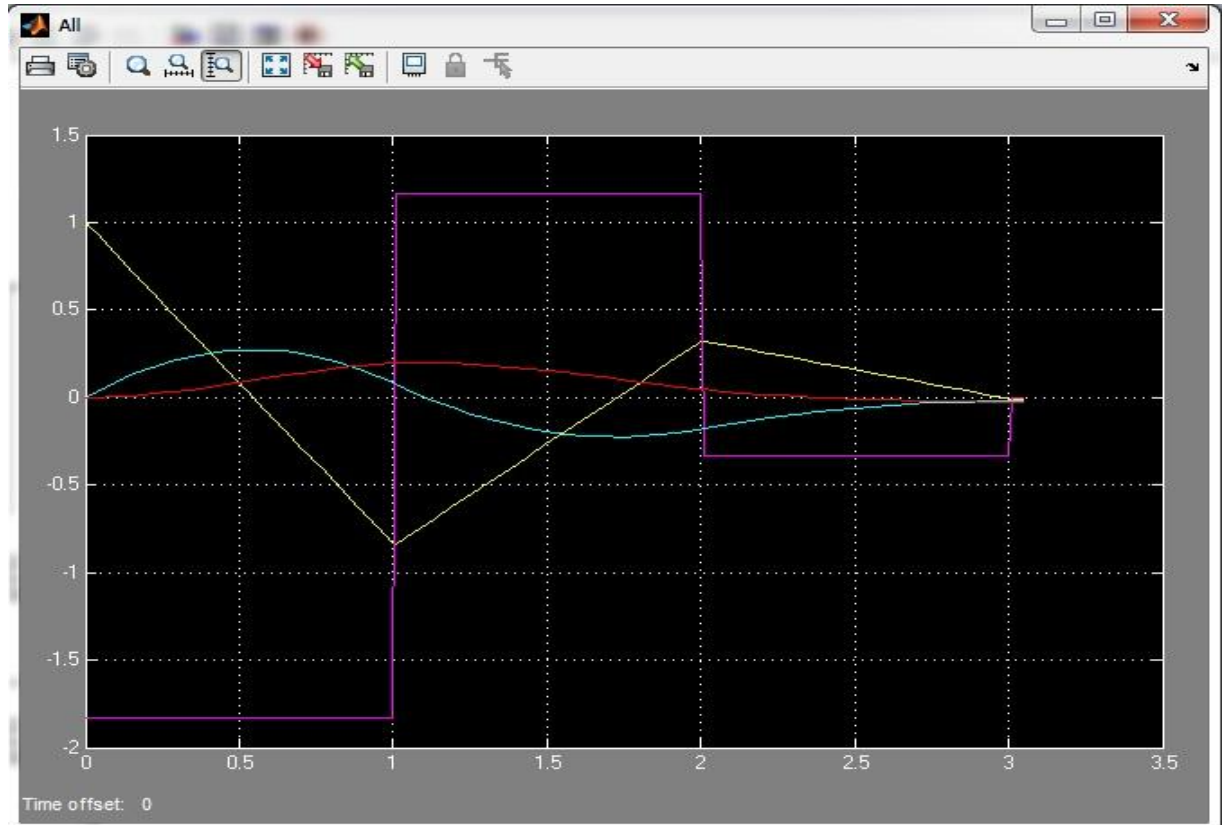


Рис П.3. К переходным процессам в системе 3-го порядка



## Графики переходных процессов при исследовании системы стабилизации ВС

