Труды МАИ. 2026. № 146.
Trudy MAI. 2026. No. 146. (In Russ.)

Научная статья
УДК 534.1: 629.7: 519.6
URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=187441
EDN: https://www.elibrary.ru/GUJIGH

МЕТОДЫ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В ЗАДАЧАХ ПОВЫШЕНИЯ ВИБРОУСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИНЧАТЫХ АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Е.С. Рыжова✉

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
г. Москва, Россия
✉ RyzhovaES@mai.ru

Цитирование: Рыжова Е. С. Методы топологической оптимизации в задачах повышения виброустойчивости пластинчатых авиационных конструкций // Труды МАИ. 2026. № 146.
URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=187441

Аннотация. Данная статья представляет собой обзор современных методов топологической оптимизации, направленных на повышение виброустойчивости пластинчатых авиационных конструкций. Исследование фокусируется на применении методов топологической оптимизации для улучшения динамических характеристик тонкостенных элементов, таких как панели, обшивки и люки, подверженных динамическим нагрузкам от акустического давления, вибраций двигателя и аэроупругих эффектов. Основные цели оптимизации включают максимизацию собственных частот и минимизацию динамической податливости при гармоническом возбуждении, что позволяет смещать зоны резонанса и снижать риск усталостного разрушения.

Рассматриваются методологические подходы, включая метод на основе плотности (SIMP), метод уровня и эволюционные методы, в контексте решения задач на собственные значения и минимизации динамического отклика. Показано влияние граничных условий (таких как защемление по сравнению со свободным опиранием) на оптимальную топологию, что демонстрирует значительное

влияние условий закрепления как на динамическое поведение, так и на результирующую схему усиления. В работе рассматриваются производственные ограничения, особенно связанные с аддитивными технологиями, как критический фактор при проектировании реализуемых оптимизированных конструкций.

Представлен практический пример, иллюстрирующий топологическую оптимизацию подкрепления прямоугольной пластины при ограничениях по объему. С использованием метода SIMP, анализируется эволюция топологии каркаса для объемных долей от 5% до 30%. Результаты показывают переход от простых арочных подкреплений к сложным разветвленным решетчатым структурам по мере увеличения допустимого объема материала, подчеркивая нелинейную взаимосвязь между использованием материала и изменением частотных характеристик.

Несмотря на прогресс, сохраняется ряд проблем, таких как высокие вычислительные затраты, необходимость нелинейных моделей с учетом демпфирования и сложность преобразования результатов, основанных на плотности, в пригодные для производства CAD-модели. Будущие направления исследований включают разработку многодисциплинарных оптимизационных систем, интеграцию цифровых двойников и передовые методологии генеративного проектирования на основе искусственного интеллекта.

Топологическая оптимизация показала свою эффективность как мощный инструмент повышения виброустойчивости пластинчатых конструкций, обеспечивая значительный прирост удельной жесткости и динамических характеристик. Перспективным направлением является дальнейшее включение технологических ограничений аддитивного производства и интеллектуальных алгоритмов, что расширит область применения и повысит эффективность рассматриваемых методов в аэрокосмической индустрии и смежных отраслях.

Ключевые слова: топологическая оптимизация, пластинчатые конструкции, собственная частота, динамическая податливость

METHODS OF TOPOLOGICAL OPTIMIZATION IN PROBLEMS OF INCREASING VIBRATION RESISTANCE OF PLATE AVIATION STRUCTURES

E.S. Ryzhova✉

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

✉ RyzhovaES@mai.ru

Citation: Ryzhova E.S. Methods of topological optimization in problems of increasing vibration resistance of plate aviation structures // Trudy MAI. 2026. No. 146. (In Russ.).
URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=187441

Abstract. This article provides a comprehensive review of modern topological optimization methods aimed at enhancing the vibration resistance of plate-type aviation structures. The study focuses on the application of topological optimization techniques to improve the dynamic performance of thin-walled components such as panels, skins, and hatches, which are subjected to dynamic loads from acoustic pressure, engine vibrations, and aeroelastic effects. The primary optimization objectives include maximizing natural frequencies—particularly the fundamental frequency—and minimizing dynamic compliance under harmonic excitation, thereby shifting resonance zones and reducing the risk of fatigue failure.

Key methodological approaches are examined, including the density-based method (SIMP), the level-set method, and evolutionary techniques, within the context of eigenvalue problems and dynamic response minimization. The influence of boundary conditions—such as clamped versus simply supported edges—on the optimal topology is emphasized, demonstrating that constraint conditions significantly affect both the dynamic behavior and the resulting reinforcement layout. The integration of manufacturing constraints, particularly those related to additive manufacturing, is also discussed as a critical factor in the design of realizable optimized structures.

A practical case study is presented, illustrating the topological synthesis of a reinforcing frame for a rectangular plate under volume constraints. Using the SIMP method, the evolution of the frame topology is analyzed for volume fractions ranging from 5% to 30%. The results show a transition from simple arched supports to complex,

branched lattice structures as the volume allowance increases, highlighting the non-linear relationship between material usage and frequency improvement.

Despite progress, several challenges remain, such as high computational costs, the need for nonlinear and damping-inclusive models, and the difficulty of translating density-based results into manufacturable CAD models. Future research directions include the development of multiphysics optimization frameworks, digital twin integration, and advanced AI-driven generative design methodologies.

In conclusion, topological optimization proves to be a powerful tool for improving the vibration resistance of plate structures, offering significant gains in specific stiffness and dynamic performance. The continued integration of additive manufacturing constraints and intelligent algorithms is expected to further enhance the applicability and efficiency of these methods in aerospace engineering and beyond.

Keywords: topology optimization, plate structures, natural frequency, dynamic compliance

Введение

Повышение виброустойчивости пластинчатых конструкций — обшивки, панелей, люков — является одной из важных задач проектирования в авиационно-космической отрасли [1-2]. Динамические нагрузки, вызываемые акустическим давлением, вибрацией двигателей и аэроупругими явлениями, могут приводить к резонансным колебаниям, усталостным разрушениям и снижению ресурса конструкций. Классические подходы к усилению, основанные на применении регулярных схем рёбер жёсткости, зачастую не являются оптимальными с точки зрения критерия удельной жёсткости (отношение жёсткости к массе) и не позволяют целенаправленно управлять спектром собственных частот [3-4].

Топологическая оптимизация (ТО) представляет собой математический аппарат для синтеза оптимального распределения материала в заданной расчётной области при ограничениях на объём и внешние воздействия [5-6]. Методы топологической оптимизации нашли широкое применение в инженерной практике для проектирования деталей, изготавливаемых аддитивно, что связано с возможностью реализации расчётных областей со сложной геометрией [7-8]. Для динамических задач наиболее востребованы постановки, связанные с максимизацией собственных частот, что напрямую повышает виброустойчивость конструкции, отодвигая её рабочие режимы от зон резонанса [9-10].

Постановка задач динамической оптимизации пластинчатых конструкций

Основными целевыми функционалами в задачах динамической оптимизации пластин являются:

- Максимизация собственных частот (в частности, фундаментальной (первой) частоты ω_1). Данная постановка направлена на увеличение жёсткости конструкции и смещение её спектра в высокочастотную область, менее подверженную возмущениям от типовых источников вибрации [11-12]. Общая формулировка задачи:

$\max \omega_1$ при условиях: $\left(K - \omega_i^2 M\right)\phi_i = 0$, $\int_\Omega \rho(x)d\Omega \le V*$,

где K, M — глобальные матрицы жёсткости и массы, ϕ_i — форма колебаний, $\rho(x)$ — поле плотности, V∗ — ограничение на объём материала.

- Минимизация динамической податливости при гармоническом возбуждении с заданной частотой Ω [13-14]:

$\min C_{dyn} = \frac{1}{2}F^T U$ при условиях: $(-\Omega^2 M + i\Omega C + K)U = F$,

где U — вектор амплитуд перемещений, C — матрица демпфирования, F — вектор амплитуд сил.

- Управление полосой частот — задачи на максимизацию разрыва между соседними частотами для избегания кратных резонансов или формирования заданного частотного спектра [15].

Для моделирования поведения пластин в зависимости от соотношения толщины и характерной длины применяются теория Кирхгофа-Лява или более общая теория Тимошенко-Миндлина, учитывающая сдвиговые деформации и инерцию вращения [16-17]. Выбор модели оказывает существенное влияние на результат оптимизации, особенно для относительно толстых пластин и высоких частот.

Для количественной оценки результатов оптимизации используются критерии:

- Абсолютный $\Delta\omega_1=\omega_1^{opt}-\omega_1^{init}$ и относительный $(\Delta\omega_1/\omega_1^{init})\times100\%$ прирост частоты.
- Удельная жёсткость $\eta=\Delta\omega_1/\Delta m$ или $\eta=\omega_1^{opt}/m^{opt}$, где m — масса конструкции [18]. Данный критерий наиболее полно отражает эффективность введения подкрепления.

Изменение форм собственных колебаний, анализируемое, например, с помощью критерия совпадения мод (Modal Assurance Criterion, MAC) [19].

Методы топологической оптимизации для динамических задач

Наиболее распространённым в инженерной практике является метод параметризации плотности материала с применением штрафа (Solid Isotropic Material with Penalization, SIMP) [5],[20]. Его суть заключается во введении непрерывной переменной псевдоплотности $\rho_e\in[\rho_{min},1]$ для каждого конечного элемента и степенной зависимости эффективных свойств материала от этой переменной:

$$E(\rho_e)=E_{min}+\rho_e^p(E_0-E_{min}),\ p\geq3, \quad (1)$$

где E_0 — модуль упругости основного материала, E_{min} — малая величина для обеспечения невырожденности матрицы жёсткости, p — параметр штрафа, обеспечивающий стремление решения к бинарному ($\rho_e\to0$ или $\rho_e\to1$).

Чувствительность целевого функционала, например, собственной частоты ω_i, по переменной проектирования ρ_e вычисляется по формуле [20]:

$$\frac{\partial\omega_i}{\partial\rho_e}=\frac{1}{2\omega_i}\phi_i^T(p\rho_e^{p-1}(E_0-E_{min})\frac{\partial K_e^0}{\partial\rho_e}-\omega_i^2\frac{\partial M_e}{\partial\rho_e})\phi_i. \quad (2)$$

Для борьбы с численными артефактами («шахматной доской», зависимостью от сетки) применяются методы фильтрации чувствительностей или плотности [21].

Альтернативный подход, метод уровня (Level-Set), описывает границу между материалом и пустотой как нулевой уровень вложенной функции ϕ(x):

$$\begin{cases} \phi(x) > 0, x \in \Omega_{mat} \\ \phi(x) = 0, x \in \Gamma \\ \phi(x) < 0, x \in \Omega_{void} \end{cases} \quad (3)$$

Эволюция границы во времени управляется уравнением Гамильтона-Якоби: $\frac{\partial \phi}{\partial t} + V_n |\nabla \phi| = 0$, где Vn — скорость движения границы, определяемая из анализа чувствительности [22]-[23]. Преимущество метода — естественное получение чётких границ, недостаток — более сложная численная реализация и трудности с учётом топологических изменений (например, возникновения новых отверстий).

Эволюционный метод оптимизации структур (ESO/BESO) основан на итерационном удалении (добавлении) материала в элементах с низким (высоким) уровнем критерия, например, энергии деформации [24]. Метод прост в реализации и интуитивно понятен, но не гарантирует оптимальности решения. Метаэвристические алгоритмы (генетические алгоритмы, методы роя частиц) применяются для задач со сложными, невыпуклыми или разрывными целевыми функциями, где градиентные методы могут сходиться к локальным минимумам [25]. Их основной недостаток — чрезвычайно высокая вычислительная стоимость, связанная с необходимостью тысяч оценок целевой функции.

Граничные условия (ГУ) являются одним из наиболее значимых факторов, определяющих как динамический отклик пластины, так и оптимальную топологию подкрепления. Переход от шарнирного опирания (SSSS) к полной заделке по контуру (CCCC) для квадратной пластины может увеличить фундаментальную частоту более чем на 80% [17], [26]. Соответственно, оптимальный силовой каркас для защемлённой пластины будет формироваться преимущественно в центральной зоне, где максимальны изгибающие моменты, в то время как для шарнирно опёртой — ближе к краям и вдоль диагоналей для противодействия преимущественно поперечным силам [27].

Формирование подкрепления для прямоугольной пластины

В качестве иллюстративного примера, демонстрирующего характерные закономерности ТО для динамических задач, рассмотрим формирование подкрепления для прямоугольной пластины (180 × 180 × 5 мм) с целью максимизации первой собственной частоты. Зона оптимизации (180 × 180 × 25 мм) моделирует пространство для формирования подкрепляющей структуры. Материал — PLA ($E=3.5$ ГПа, $\nu=0.35$, $\rho=1250$ кг/м^3). Граничные условия: жёсткая заделка по контуру (CCCC). Для решения использовался метод SIMP с параметром штрафа $p=3$ и фильтрацией в среде ANSYS. На Рисунке 1 представлены результаты оптимизации для различных значений ограничения на объём материала каркаса $V*$ (5, 10, 15, 20% от объёма зоны оптимизации).

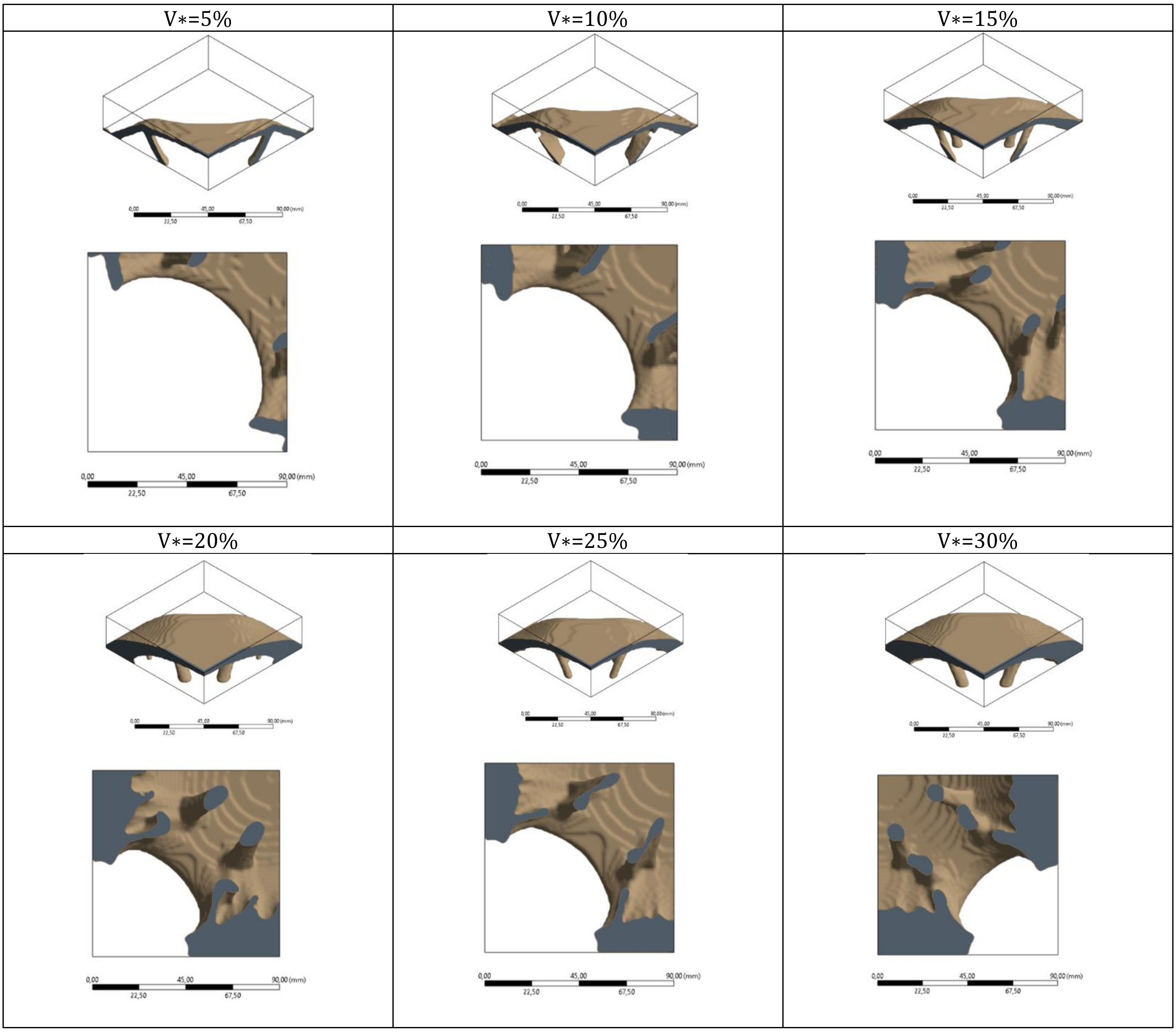

Рисунок 1 – Эволюция топологии подкрепления в зависимости от ограничения по объёму материала V∗

При $V*=5\%$ формируется система четырёх идентичных криволинейных арочных опор, симметрично расположенных относительно центра. Данная конфигурация эффективно противодействует изгибным деформациям при минимальном расходе материала.

При $V*=10\%$ происходит усложнение структуры: основные арочные элементы утолщаются и удлиняются, между ними появляются дополнительные связи, формируя пространственную решетку.

При последовательном увеличении допустимого объёма материала наблюдается закономерное усложнение конфигурации подкрепления при сохранении его арочно-стержневого характера. При $V*=15\%$ каждая из основных арочных опор разделяется на два элемента, образуя парные подкосы. При $V*=20\%$ внешние (удалённые от центра) ветви этих парных элементов начинают сливаться с формирующимися периферийными стенками, усиливая контур конструкции. К $V*=25\%$ аналогичный процесс слияния затрагивает и внутренние (ближние к центру) ветви арок, что ведёт к образованию более широких и связанных областей. Наконец, при $V*=30\%$ эти внутренние зоны также разделяются, в результате чего формируется сложная пространственная структура с выраженным арочным рисунком и повышенной плотностью распределения материала вдоль главных силовых траекторий, что увеличивает общую жёсткость конструкции.

Современные тенденции

Широкое внедрение аддитивных технологий (АТ) делает возможным изготовление сложнопространственных оптимизированных структур [7]. Однако это требует модификации алгоритмов ТО для учёта технологических ограничений:

- Минимальный размер элемента (минимальная толщина стенки), который контролируется параметром радиуса фильтра [21].
- Максимальный угол нависания для печати без поддержек. Для его учёта разработаны специализированные фильтры, модифицирующие поле плотности в соответствии с направлением построения [28-29].

- Анизотропия механических свойств материала, полученного послойным синтезом, может быть учтена через тензорную параметризацию упругих свойств в зависимости от ориентации [30].

Структуры, синтезируемые методами ТО, часто визуально и структурно подобны биологическим объектам (трабекулярная кость, крылья насекомых), что свидетельствует об общности принципа минимальной материалоёмкости [31],[32]. Современным трендом является многоуровневая оптимизация, при которой одновременно оптимизируется макроскопическая форма конструкции и микроструктура заполнения [33-34]. Например, в задачах на частоту внешняя оболочка и внутренняя ячеистая решётка проектируются совместно, что позволяет достичь высоких значений удельной жёсткости [35].

Перспективным направлением является использование методов машинного обучения (МО) для ускорения и расширения возможностей ТО. Нейронные сети обучаются предсказывать отклик конструкции (частоты, перемещения) на основе поля плотности, что позволяет сократить число прямых обращений к дорогостоящему решателю МКЭ [36]. Алгоритмы на основе глубокого обучения способны генерировать множество вариативных и реализуемых концепций, удовлетворяющих заданным требованиям, выходя за рамки локальных оптимумов традиционных методов [37].

Проблемы и перспективные направления исследований

Несмотря на значительный прогресс, в области топологической оптимизации для динамических задач сохраняется ряд фундаментальных проблем. Высокая вычислительная стоимость, связанная с решением задач на собственные значения и анализом чувствительности для крупных моделей, требует существенных ресурсов, что актуализирует разработку эффективных итерационных решателей и методов понижения порядка моделей [38-39]. Большинство исследований ограничивается линейно-упругой постановкой без учёта демпфирования, в то время как интеграция вязкоупругих моделей материалов и нелинейного геометрического или контактного взаимодействия остаётся сложной, но необходимой задачей для практического применения.

Оптимизация на основе гармонического отклика или собственных частот может не гарантировать эффективности при реальных ударных или случайных вибрационных воздействиях, что требует развития постановок, непосредственно минимизирующих интегральные отклики в частотной или временной области [13],[40]. Наконец, автоматизированное преобразование поля плотности в параметрическую CAD-модель, готовую для анализа на прочность и подготовку к производству, остаётся не до конца решённой инженерной задачей [41]. Перспективными направлениями являются: развитие многофизичной и многоцелевой оптимизации (прочность-динамика-акустика-теплообмен), создание цифровых двойников с интегрированными алгоритмами ТО для всего жизненного цикла изделия, а также углублённая интеграция методов искусственного интеллекта в процессы генеративного проектирования.

Заключение

Методы топологической оптимизации обеспечивают существенное улучшение динамических характеристик тонкостенных конструкций. Максимизация собственных частот, в первую очередь фундаментальной, при ограничении на массу, реализуемая преимущественно через метод переменной плотности (SIMP), является эффективной стратегией повышения виброустойчивости. Результат оптимизации и достижимый прирост удельной жёсткости критически зависят от принятых граничных условий, например, полной заделки или шарнирного опирания контура пластины, а также от учёта ограничений, налагаемых аддитивными технологиями изготовления. Иллюстративный пример формирования подкрепляющих структур пластины подтверждает характерную нелинейную зависимость прироста частоты от объёма распределяемого материала. Перспективы развития направления лежат в области преодоления вычислительных сложностей при анализе вынужденных колебаний, учёта нелинейного демпфирования и вязкоупругих свойств материалов, а также интеграции алгоритмов оптимизации с методами машинного обучения для генеративного проектирования многофункциональных элементов конструкций.

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The author declares no conflict of interest.

Список источников

1. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М. : Гостехиздат, 1956. 600 с.

2. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М. : Наука, 1988. 328 с.

3. Bendsøe M.P., Sigmund O. Topology optimization: theory, methods and applications. Berlin : Springer, 2003. 370 p.

4. Rozvany G.I.N. A critical review of established methods of structural topology optimization // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2009. Vol. 37, no. 3. P. 217–237. DOI 10.1007/s00158-007-0217-0.

5. Sigmund O. A 99 line topology optimization code written in Matlab // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2001. Vol. 21, no. 2. P. 120–127. DOI 10.1007/s001580050176.

6. Osher S., Sethian J. A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations // Journal of Computational Physics. 1988. Vol. 79, no. 1. P. 12–49. DOI 10.1016/0021-9991(88)90002-2.

7. Additive manufacturing of metallic components — Process, structure and properties / T. DebRoy, H.L. Wei, J.S. Zuback et al. // Progress in Materials Science. 2018. Vol. 92. P. 112–224. DOI: 10.1016/j.pmatsci.2017.10.001.

8. Developing topology optimization with additive manufacturing constraints in ANSYS® / D. Jankovics, H. Gohari, M. Tayefeh, A. Barari // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, iss. 11. P. 1359–1364. DOI 10.1016/j.ifacol.2018.08.340.

9. Olhoff N., Du J. Generalized incremental frequency method for topological design of continuum structures for minimum dynamic compliance subject to forced vibration at a prescribed low or high value of the excitation frequency // Structural and

Multidisciplinary Optimization. 2016. Vol. 54. P. 1113–1141. DOI 10.1007/s00158-016-1574-3.

10. On objective functions of minimizing the vibration response of continuum structures subjected to external harmonic excitation / B. Niu, X. He, Y. Shan, P. Zhang // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2018. Vol. 57. P. 2291–2307. DOI 10.1007/s00158-017-1859-1.

11. Leissa A.W. Vibration of plates : scientific and technical information division / Office of Technology Utilization National Aeronautics and Space Administration. Washington, D.C., 1969. vii, 353 p. NASA SP-160.

12. Reddy J.N. Theory and analysis of elastic plates and shells. 2nd ed. Boca Raton : CRC Press, 2007.

13. Díaaz A.R., Kikuchi N. Solutions to shape and topology eigenvalue optimization problems using a homogenization method // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1992. Vol. 35, No. 7. P. 1487–1502. DOI 10.1002/nme.1620350707.

14. Ma Z.-D., Kikuchi N., Cheng H.-C. Topological design for vibrating structures // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1995. Vol. 121, no. 1/4. P. 259–280. DOI 10.1016/0045-7825(94)00714-X.

15. Du J., Olhoff N. Topological design of freely vibrating continuum structures for maximum values of simple and multiple eigenfrequencies and frequency gaps // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2007. Vol. 34, no. 2. P. 91–110. DOI 10.1007/s00158-007-0101-y.

16. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М. : Наука, 1967. 444 с.

17. Gorman D.J. Free vibration analysis of rectangular plates with symmetrically distributed point supports along the edges // Journal of Sound and Vibration. 1980. Vol. 73, no. 4. P. 563–574. DOI 10.1016/0022-460X(80)90668-9.

18. Pedersen N.L. Maximization of eigenvalues using topology optimization // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2000. Vol. 20, no. 1. P. 2–11. DOI 10.1007/s001580050130.

19. Fu Y., Kennedy G. Quasi-Newton corrections for compliance and natural frequency topology optimization problems // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2023. Vol. 66. Art. 176. DOI 10.1007/s00158-023-03630-9.

20. Bendsøe M. P. Optimal shape design as a material distribution problem // Structural Optimization. 1989. Vol. 1, no. 4. P. 193–202. DOI 10.1007/BF01650949.

21. Two-Phase Approach for Fast Topology Optimization of Multi-Resonant MEMS Involving Model Order Reduction / S. Hu, B. Manansala, U. Fitzer, D. Hohlfeld, T. Bechtold // Micromachines. 2025. Vol. 16, no. 4. Art. 401. DOI 10.3390/mi16040401.

22. Lazarov B.S., Sigmund O. Filters in topology optimization based on Helmholtz-type differential equations // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2011. Vol. 86, no. 6. P. 765–781. DOI 10.1002/nme.3072.

23. Wang M.Y., Wang X., Guo D. A level set method for structural topology optimization // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2003. Vol. 192, no. 1/2. P. 227–246. DOI 10.1016/S0045-7825(02)00559-5.

24. Allaire G., Jouve F., Toader A.-M. Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method // Journal of Computational Physics. 2004. Vol. 194, no. 1. P. 363–393. DOI 10.1016/j.jcp.2003.09.032.

25. Querin O.M., Steven G.P., Xie Y.M. Evolutionary structural optimisation (ESO) using a bidirectional algorithm // Engineering Computations. 1998. Vol. 15, no. 8. P. 1031–1048. DOI 10.1108/02644409810244129.

26. Goodarzimehr V., Fanaie N., Talatahari S. Geometric and size optimization of structures under natural frequency constraints using improved material generation algorithm // International Journal of Optimization in Civil Engineering. 2025. Vol. 15, no. 1. P. 15–37.

27. Leissa A.W. The free vibration of rectangular plates // Journal of Sound and Vibration. 1973. Vol. 31, no. 3. P. 257–293.

28. Bathe K.J. Finite element procedures. 2nd ed. Upper Saddle River : Prentice Hall, 2014. 1037 p.

29. Topology optimization of shell-infill structures for natural frequencies / K. Liu, Y. Bai, S. Yao, S. Luan // Engineering Computations. 2022. Vol. 39, no. 5. P. 1821–1846. DOI 10.1108/EC-03-2022-0135.

30. Langelaar M. Topology optimization of 3D self-supporting structures for additive manufacturing // Additive Manufacturing. 2016. Vol. 12. P. 60–70. DOI 10.1016/j.addma.2016.06.010.

31. Gaynor A.T., Guest J.K. Topology optimization considering overhang constraints: Eliminating sacrificial support material in additive manufacturing through design // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2016. Vol. 54, no. 5. P. 1157–1172. DOI 10.1007/s00158-016-1550-y.

32. Current and future trends in topology optimization for additive manufacturing / J. Liu, A.T. Gaynor, S. Chen, Z. Kang, K. Suresh, A. Takezawa, L. Li, J. Kato, J. Tang, C.C.L. Wang, L. Cheng, X. Liang, A.C. To // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2018. Vol. 57, no. 6. P. 2457–2483. DOI 10.1007/s00158-018-1994-3.

33. Gibson L.J., Ashby M.F. Cellular solids: structure and properties. 2nd ed. Cambridge : Cambridge University Press, 1997. 510 p.

34. Шевцова В.С., Шевцова М.С. Сравнительный анализ методов оптимизации топологии (SIMP и Level Set) на примере реконструкции крыла стрекозы // Вестник Южного научного центра. 2013. Т. 9, № 1. С. 8–16.

35. Topology optimization for cyclic periodic structures with frequency objectives of nodal diameter modes / S. Xu, M. Wang, C. Zhou, Y. Zhou, S. Wan, B. Wang // Engineering Optimization. 2024. P. 1–24. DOI 10.1080/0305215X.2024.2314661.

36. Topology optimization of rotating structures considering turbulent fluid–structure interaction problems and natural frequency constraints / L.O. Siqueira, A.S.C. Azevêdo, E.C.N. Silva, R. Picelli // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2025. Vol. 68. Art. 90. DOI 10.1007/s00158-025-04017-8.

37. Honshuku Y., Isakari H. A topology optimisation of acoustic devices based on the frequency response estimation with the Padé approximation // Applied Mathematical Modelling. 2022. Vol. 110. P. 819–840. DOI 10.1016/j.apm.2022.06.020.

38. Giannone G., Ahmed F. Diffusing the optimal topology: a generative optimization approach // Proceedings of the ASME 2023 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. Volume 3A: 49th Design Automation Conference (DAC). Boston,

Massachusetts, USA, August 20–23, 2023. Paper no. V03AT03A012. DOI 10.1115/DETC2023-116595.

39. Qu Y., Zhou Y., Luo Y. Structural topology optimization for frequency response problems using adaptive second-order Arnoldi method // Mathematics. 2025. Vol. 13, no. 10. Art. 1583. DOI 10.3390/math13101583.

40. Sun J., Cai Z. Topology optimization for eigenfrequencies of a flexible multibody system // Multibody System Dynamics. 2025. Vol. 64. P. 307–330. DOI 10.1007/s11044-024-10018-0.

41. Optimal topology design of structures under dynamic loads / S. Min, N. Kikuchi, Y.C. Park, S. Kim, S. Chang // Structural Optimization. 1999. Vol. 17, no. 2/3. P. 208–218. DOI 10.1007/BF01195945.

42. Topology Optimization and Testing of Connecting Rod Based on Static and Dynamic Analyses / M. Ramasamy, A. Slíva, P. Govindaraj, A. Nag // Applied Sciences. 2025. Vol. 15, no. 4. Art. 2081. DOI 10.3390/app15042081.

References

1. Bolotin V.V. *Dinamicheskaya ustoichivost' uprugikh system* [Dynamic stability of elastic systems], Moscow, Gostekhizdat, 1956. 600 p.

2. Zhuravlev V.F., Klimov D.M. *Prikladnye metody v teorii kolebanii* [Applied methods in the theory of oscillations]. Moscow, Nauka, 1988, 328 p.

3. Bendsøe M.P., Sigmund O. *Topology optimization: theory, methods and applications,* Berlin, Springer, 2003, 370 p.

4. Rozvany G.I.N. A critical review of established methods of structural topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2009, vol. 37, no. 3. pp. 217–237. DOI 10.1007/s00158-007-0217-0.

5. Sigmund O. A 99 line topology optimization code written in Matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization,* 2001, vol. 21, no. 2, pp. 120–127. DOI 10.1007/s001580050176.

6. Osher S., Sethian J. A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton – Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics,* 1988, vol. 79, no. 1. pp. 12–49. DOI 10.1016/0021-9991(88)90002-2.

7. Debroy T., Wei H.L., Zuback J.S., Mukherjee T., Elmer J.W., Milewski J.O., Beese A.M., Wilson-Heid A., Amitava De, Zhang W. Additive manufacturing of metallic components — Process, structure and properties. *Progress in Materials Science,* 2018, vol. 92, pp. 112–224. DOI 10.1016/j.pmatsci.2017.10.001.

8. Jankovics D., Gohari H., Tayefeh M., Barari A. Developing topology optimization with additive manufacturing constraints in ANSYS®. *IFAC-PapersOnLine,* 2018, vol. 51, iss. 11, pp. 1359–1364. DOI 10.1016/j.ifacol.2018.08.340.

9. Olhoff N., Du J. Generalized incremental frequency method for topological design of continuum structures for minimum dynamic compliance subject to forced vibration at a prescribed low or high value of the excitation frequency. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2016, vol. 54, pp. 1113–1141. DOI 10.1007/s00158-016-1574-3.

10. Niu B., He X., Shan Y., Zhang P. On objective functions of minimizing the vibration response of continuum structures subjected to external harmonic excitation. *Structural and Multidisciplinary Optimization,* 2018, vol. 57, pp. 2291–2307. DOI 10.1007/s00158-017-1859-1.

11. Leissa A.W. *Vibration of plates: scientific and technical information division.* Office of Technology Utilization National Aeronautics and Space Administration. Washington, D.C., 1969. vii, 353 p. NASA SP-160

12. Reddy J.N. *Theory and analysis of elastic plates and shells,* 2nd ed., Boca Raton, CRC Press, 2007.

13. Díaaz A.R., Kikuchi N. Solutions to shape and topology eigenvalue optimization problems using a homogenization method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* 1992, vol. 35, no. 7, pp. 1487–1502. DOI 10.1002/nme.1620350707.

14. Ma Z.-D., Kikuchi N., Cheng H.-C. Topological design for vibrating structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1995, vol. 121, no. ¼, pp. 259–280. DOI 10.1016/0045-7825(94)00714-X.

15. Du J., Olhoff N. Topological design of freely vibrating continuum structures for maximum values of simple and multiple eigenfrequencies and frequency gaps.

Structural and Multidisciplinary Optimization, 2007, vol. 34, no. 2, pp. 91–110. DOI 10.1007/s00158-007-0101-y.

16. Timoshenko S.P. *Kolebaniya v inzhenernom dele* [Vibration problems in ingineering], Moscow, Nauka, 1967. 444 p.

17. Gorman D.J. Free vibration analysis of rectangular plates with symmetrically distributed point supports along the edges. *Journal of Sound and Vibration,* 1980, vol. 73, no. 4, pp. 563–574. DOI 10.1016/0022-460X(80)90668-9.

18. Pedersen N.L. Maximization of eigenvalues using topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2000, vol. 20, no. 1, pp. 2–11. DOI 10.1007/s001580050130.

19. Fu Y., Kennedy G. Quasi-Newton corrections for compliance and natural frequency topology optimization problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2023, vol. 66, art. 176. DOI 10.1007/s00158-023-03630-9.

20. Bendsøe M. P. Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural Optimization*, 1989, vol. 1, no. 4. P. 193–202. DOI 10.1007/BF01650949.

21. Hu S., Manansala B., Fitzer U., Hohlfeld D., Bechtold T.Two-Phase approach for fast topology optimization of multi-resonant MEMS involving model order reduction. *Micromachines,* 2025, vol. 16, no. 4, art. 401. DOI 10.3390/mi16040401.

22. Lazarov B.S., Sigmund O. Filters in topology optimization based on Helmholtz-type differential equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* 2011, vol. 86, no. 6, pp. 765–781. DOI 10.1002/nme.3072.

23. Wang M.Y., Wang X., Guo D. A level set method for structural topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2003, vol. 192, no. 1/2. pp. 227–246. DOI 10.1016/S0045-7825(02)00559-5.

24. Allaire G., Jouve F., Toader A.-M. Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method. *Journal of Computational Physics*, 2004, vol. 194, no. 1. pp. 363–393. DOI 10.1016/j.jcp.2003.09.032.

25. Querin O.M., Steven G.P., Xie Y.M. Evolutionary structural optimisation (ESO) using a bidirectional algorithm. *Engineering Computations*, 1998, vol. 15, no. 8. pp. 1031–1048. DOI 10.1108/02644409810244129.

26. Goodarzimehr V., Fanaie N., Talatahari S. Geometric and size optimization of structures under natural frequency constraints using improved material generation algorithm. *International Journal of Optimization in Civil Engineering,* 2025, vol. 15, no. 1. pp. 15–37.

27. Leissa A.W. The free vibration of rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration,* 1973, vol. 31, no. 3. pp. 257–293.

28. Bathe K.J. *Finite element procedures*, 2nd ed., Upper Saddle River, Prentice Hall, 2014, 1037 p.

29. Liu K., Bai Y., Yao S., Luan S. Topology optimization of shell-infill structures for natural frequencies. *Engineering Computations*, 2022, vol. 39, no. 5, pp. 1821–1846. DOI 10.1108/EC-03-2022-0135.

30. Langelaar M. Topology optimization of 3D self-supporting structures for additive manufacturing. *Additive Manufacturing*, 2016, vol. 12, pp. 60–70. DOI 10.1016/j.addma.2016.06.010.

31. Gaynor A.T., Guest J.K. Topology optimization considering overhang constraints: Eliminating sacrificial support material in additive manufacturing through design. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2016, vol. 54, no. 5, pp. 1157–1172. DOI 10.1007/s00158-016-1550-y.

32. Liu J., Gaynor A.T., Chen S., Kang Z., Suresh K., Takezawa A., Li L., Kato J., Tang J., Wang C.C.L., Cheng L., Liang X., To A.C. Current and future trends in topology optimization for additive manufacturing. *Structural and Multidisciplinary Optimization,* 2018, vol. 57, no. 6, pp. 2457–2483. DOI 10.1007/s00158-018-1994-3.

33. Gibson L.J., Ashby M.F. *Cellular solids: structure and properties*, 2nd ed., Cambridge, Cambridge University Press, 1997, 510 p.

34. Shevtsova V.S., Shevtsova M.S. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra*, 2013, vol. 9, no. 1, pp. 8–16.

35. Xu S., Wang M., Zhou C., Zhou Y., Wan S., Wang B. Topology optimization for cyclic periodic structures with frequency objectives of nodal diameter modes, *Engineering Optimization*, 2024, pp. 1–24. DOI 10.1080/0305215X.2024.2314661.

36. Siqueira L.O., Azevêdo A.S.C., Silva E.C.N., Picelli R. Topology optimization of rotating structures considering turbulent fluid–structure interaction problems and

natural frequency constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2025, vol. 68, art. 90. DOI 10.1007/s00158-025-04017-8.

37. Honshuku Y., Isakari H. A topology optimisation of acoustic devices based on the frequency response estimation with the Padé approximation. *Applied Mathematical Modelling,* 2022, vol. 110, pp. 819–840. DOI 10.1016/j.apm.2022.06.020.

38. Giannone G., Ahmed F. Diffusing the Optimal Topology: A Generative Optimization Approach. *Proceedings of the ASME 2023 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. Volume 3A: 49th Design Automation Conference (DAC).* Boston, Massachusetts, USA, August 20–23, 2023, paper no. V03AT03A012. DOI 10.1115/DETC2023-116595.

39. Qu Y., Zhou Y., Luo Y. Structural topology optimization for frequency response problems using adaptive second-order Arnoldi method. *Mathematics,* 2025, vol. 13, no. 10, art. 1583. DOI 10.3390/math13101583.

40. Sun J., Cai Z. Topology optimization for eigenfrequencies of a flexible multibody system. *Multibody System Dynamics*, 2025, vol. 64, pp. 307–330. DOI 10.1007/s11044-024-10018-0.

41. Min S., Kikuchi N., Park Y.C., Kim S., Chang S. Optimal topology design of structures under dynamic loads. *Structural Optimization*, 1999, vol. 17, no. 2/3. pp. 208–218. DOI 10.1007/BF01195945.

42. Ramasamy M., Slíva A., Govindaraj P., Nag A. Topology optimization and testing of connecting rod based on static and dynamic analyses. *Applied Sciences*, 2025, vol. 15, no. 4, art. 2081. DOI 10.3390/app15042081.

Информация об авторах

Рыжова Елизавета Сергеевна, аспирант кафедры «Перспективные материалы и технологии аэрокосмического назначения», МАИ, г. Москва, Россия; ORCID: https://orcid.org/ 0000-0002-3104-2743; e-mail: ryzhovaes@mai.ru

Information about the authors

Elizaveta S. Ryzhova, postgraduate student of the Department "Advanced Materials and Technologies for Aerospace Applications", MAI, Moscow, Russia; ORCID: https://orcid.org/ 0000-0002-3104-2743; e-mail: ryzhovaes@mai.ru

Получено 20 декабря 2025 ● Принято к публикации 13 февраля 2026 ● Опубликовано 27 февраля 2026
Received 20 December 2025 ● Accepted 13 February2026 ● Published 27 February 2026