

На правах рукописи



Сизых Григорий Борисович

**СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ
ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА**

Специальность 1.1.9. – Механика жидкости, газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Москва – 2024

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)» (МФТИ, Физтех).

Официальные оппоненты: **Бутов Владимир Григорьевич,**
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий отделом математической физики
ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский
Томский государственный университет»;

Ильичев Андрей Теймуразович,
доктор физико-математических наук, профессор,
ведущий научный сотрудник отдела механики
ФГБУН «Математический институт им. В.А.
Стеклова Российской академии наук»;

Марчевский Илья Константинович,
доктор физико-математических наук, доцент,
профессор кафедры прикладной математики
ФГБОУ ВО «Московский государственный
технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)».

Ведущая организация: ФАУ «Центральный аэрогидродинамический
институт имени профессора Н. Е. Жуковского».

Защита состоится 11 октября 2024 г. в 10 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета 24.2.327.08 при федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ) по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ) по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4 и на сайте МАИ по ссылке:

http://mai.ru/events/defence/doctor/?ELEMENT_ID=179872

Автореферат разослан « _____ » _____ 2024 г.

Учёный секретарь диссертационного
совета 24.2.327.08,
доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник



В. Ю. Гидаспов

Общая характеристика работы

В работе устанавливаются свойства вихревых течений, математически строго вытекающие из системы уравнений классической модели идеального газа. Под идеальным газом в диссертации понимается газ, в котором отсутствуют вязкость и теплопроводность, а его состояние подчиняется закону Менделеева – Клапейрона. Рассматриваемая в работе система уравнений состоит из уравнения Эйлера $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{\nabla p}{\rho}$, уравнения неразрывности $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0$ и уравнения сохранения энтропийной функции в частицах газа $\frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \sigma = 0$ (здесь и далее используются следующие обозначения для параметров течения: \mathbf{V} – скорость, p – давление, ρ – плотность, $\sigma = p\rho^{-k}$ – энтропийная функция, $k = \text{const}$ – показатель адиабаты). Наиболее важные результаты относятся к общему пространственному случаю. Особое внимание уделено стационарным течениям газа за отошедшей ударной волной, образующейся при сверхзвуковом обтекании тела с гладкой выпуклой носовой частью. Течения за ударной волной при однородном набегающем сверхзвуковом потоке газа являются изоэнергетическими (полная энтальпия $i_0 = (k/(k-1))(p/\rho) + \mathbf{V}^2/2 = \text{const}$), что выделяет их из общего случая вихревых течений.

Некоторые результаты, относящиеся к идеальному газу, оказались верны для вязких и невязких жидкостей и газов, которые в диссертации называются одним общим термином *однородная жидкость* (полное определение см. ниже в начале описания раздела 3.3).

Актуальность и степень разработанности темы. Выявление неизвестных ранее свойств течений идеального газа, математически строго вытекающих из уравнений движения, относится к числу актуальных задач теоретической аэрогидромеханики, поскольку знание таких свойств позволяет глубже понять картину течения и помогает решить поставленную вычислительной аэрогидромеханикой задачу поиска методов верификации компьютерных программ. Проверка соответствия численных решений найденным общим свойствам решений уравнений газовой динамики является новым эффективным методом. Такая проверка может использоваться не только для верификации расчетных алгоритмов, но и для каждого конкретного расчета. До опубликования результатов диссертации были известны четыре типа свойств (закономерностей) вихревых течений, не распространенных на общий пространственный случай.

Первый тип свойств. К нему относятся свойства течений в области между отошедшей ударной волной и гладкой выпуклой головной частью в незакрученных осесимметричных течениях. В первую очередь это свойства картины линий тока и картины вихревых линий. К таким известным свойствам незакрученных осесимметричных течений за отошедшей ударной волной относятся следующие.

C1. В некоторой окрестности линии торможения (критической линии тока) нет другой линии торможения, а все линии тока на поверхности тела в некоторой окрестности точки торможения (критической точки) начинаются в этой точке.

C2. Вихревые линии замкнуты. С этими линиями совпадают (и также замкнуты) векторные линии векторного произведения скорости и градиента энтропии.

C3. Завихренность на линии торможения равна нулю.

C4. Линия тока, пересекающая отошедшую ударную волну по нормали (лидирующая линия тока), совпадает с линией торможения (обе эти линии лежат на оси симметрии течения).

Следуя учебникам^{1,2} и монографиям^{3,4}, соискатель исходит из того, что по крайней мере для тел с гладкой выпуклой носовой частью свойство C1 имеет место в общем пространственном случае. В диссертации это свойство используется в постановках задач сверхзвукового обтекания с отошедшей ударной волной.

Что касается свойств C2 и C3, то для общего пространственного случая не было известно, замкнуты ли вихревые линии и векторные линии векторного произведения скорости и градиента энтропии и равна ли нулю завихренность на линии торможения. В известной соискателю отечественной и зарубежной литературе отсутствовали даже какие-либо предположения по этому поводу.

По поводу свойства C4 необходимо сделать пояснение. Линия торможения растекается по поверхности тела, и поэтому энтропия на поверхности тела равна энтропии на линии торможения. При этом, как следует из соотношений Ренкина – Гюгонио, энтропия максимальна за прямым скачком. То есть за отошедшей ударной волной энтропия максимальна на лидирующей линии тока (только она одна пересекает ударную волну по нормали). Поэтому *вопрос о совпадении лидирующей линии тока и линии торможения равносильен вопросу о*

¹ Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.

² Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.

³ Никольский А.А. Теоретические исследования по механике жидкости и газа // Труды ЦАГИ. 1981. Вып. 2122. С. 1–286.

⁴ Ладыженский М.Д. Пространственные гиперзвуковые течения газа. М.: Машиностроение, 1968. 120 с.

максимальности энтропии на поверхности обтекаемого тела.

М. Д. Ладыженский доказал существование некоторого ненулевого диапазона углов атаки, при которых энтропия на поверхности тела вращения максимальна (то есть лидирующая линия тока и линия торможения совпадают). Однако отсутствие не только точного значения, но и каких-либо приближенных оценок упомянутого диапазона углов атаки означало, что вопрос решен лишь частично и только для тел вращения. Академиком А. А. Дородницыным в предисловии к статье М. Д. Ладыженского¹, в которой приведено упомянутое выше доказательство, было указано на отсутствие строгого доказательства для тел вращения при произвольных углах атаки. Тем самым была поставлена задача строго доказать свойство С4 для тел вращения при произвольных углах атаки. В диссертации она называется задачей Дородницына и решена не только для тел вращения, но и для тел с гладкой выпуклой носовой частью, у которых отсутствует какая-либо симметрия. К неизученным ранее закономерностям первого типа относится также вопрос о завихренности (равна ли она нулю) на поверхности тела в осесимметричном течении за отошедшей ударной волной при однородном сверхзвуковом набегающем потоке.

Второй тип свойств. К нему относится свойство решения уравнений движения классической модели идеального газа, заключающееся в возможности представить движение вихревых трубок (векторных трубок $\mathbf{\Omega} = \text{rot}\mathbf{V}$) как их перенос воображаемыми частицами, движущимися с некоторой скоростью \mathbf{U} так, что интенсивность переносимых векторных трубок сохраняется. Такой взгляд на эволюцию завихренности из-за аналогии с классическим лагранжевым взглядом также называется лагранжевым^{2,3}. Для того, чтобы поле \mathbf{U} обладало описанным выше свойством переноса вихревых трубок, необходимо и достаточно (при выполнении некоторых требований к гладкости полей $\mathbf{\Omega}$ и \mathbf{U}), чтобы во всей рассматриваемой пространственно-временной области течения выполнялось уравнение Фридмана⁴

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} + \text{rot}(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{U}) = 0. \quad (1)$$

¹ Ладыженский М.Д. Пространственные гиперзвуковые течения газа. М.: Машиностроение, 1968. 120 с.

² Абражкин А.А., Якубович Е.И. Вихревая динамика в лагранжевом описании. М.: Физматлит, 2006. 176 с.

³ Сетуха А.В. О лагранжевом описании трехмерных течений вязкой жидкости при больших значениях числа Рейнольдса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2020. Т. 60, № 2. С. 297–322.

⁴ Фридман А.А. Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости. М.: ОНТИ, 1934. 368 с.

Соискатель в [19] предложил назвать поле \mathbf{U} скоростью Фридмана. Согласно теоремам Гельмгольца о вихрях, в течениях идеальной несжимаемой жидкости и в баротропных (плотность есть функция давления) течениях сжимаемой жидкости уравнению Фридмана удовлетворяет скорость жидкости, то есть $\mathbf{U}=\mathbf{V}$. Возможность вычислять скорость \mathbf{U} через параметры течения (то есть наличие формулы $\mathbf{U}=\mathbf{V}$) позволила создать бессеточный метод расчета течений такой жидкости, получивший название метода дискретных вихрей^{1,2,3,4}. Позже выражение для скорости Фридмана через параметры течения было найдено для плоскопараллельных [10] и незакрученных осесимметричных⁵ течений вязкой несжимаемой жидкости. В обоих случаях формула для \mathbf{U} имеет вид
$$\mathbf{U}=\mathbf{V}-\nu\frac{\boldsymbol{\Omega}\times\text{rot}\boldsymbol{\Omega}}{\Omega^2},$$
 где ν – кинематический коэффициент вязкости. Наличие этой формулы позволило распространить численный метод дискретных вихрей на плоскопараллельные и незакрученные осесимметричные течения вязкой несжимаемой жидкости. Новый метод получил название метода вязких вихревых доменов^{6,7}. Эти примеры показывают, что наличие формулы для \mathbf{U} в каком-либо классе течений есть основа для распространения метода дискретных вихрей на этот класс течений. Этим объясняется актуальность поиска формул для скорости Фридмана \mathbf{U} в течениях жидкостей и газов.

Формулы для скорости Фридмана могут быть *локальными и нелокальными*. Локальная формула позволяет вычислять скорость Фридмана в точке течения через параметры течения (плотность, давление и компоненты скорости) и их производные в этой же точке. Нелокальная формула может содержать, например, криволинейные интегралы по вихревым линиям. Практическое значение

¹ Rosenhead L. The formation of vortices from a surface of discontinuity // Proceedings of the Royal Society of London. 1931. V. 134, No. 823. P. 170–192.

² Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978. 352 с.

³ Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн). М.: ТОО «Янус», 1995. 520 с.

⁴ Гутников В.А., Лифанов И.К., Сетуха А.В. О моделировании аэродинамики зданий и сооружений методом замкнутых вихревых рамок // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2006. № 4. С. 78–92.

⁵ Брутян М.А., Голубкин В.Н., Крапивский П.Л. Об уравнении Бернулли для осесимметричных течений вязкой жидкости // Учёные записки ЦАГИ. 1988. Т. 19, № 2. С. 98–100.

⁶ Дынникова Г.Я. Лагранжев подход к решению нестационарных уравнений Навье–Стокса // Доклады Академии наук. 2004. Т. 399, № 1. С. 42–46.

⁷ Андронов П.Р., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я. Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок. М.: Издательство Московского университета, 2006. 184 с.

(возможность использования в вихревых методах и возможность использования для верификации расчетов) имеют локальные формулы. Нелокальные формулы имеют, как правило, только теоретическое значение: их наличие для какого-либо течения означает существование скорости Фридмана для этого течения. Способ получения локальной формулы скорости Фридмана, предложенный в [10], подходит для плоскопараллельных и незакрученных осесимметричных течений любых однородных жидкостей. Для общего пространственного случая до опубликования результатов диссертации формула скорости Фридмана была известна только для течений идеальной несжимаемой жидкости и баротропного газа ($\mathbf{U}=\mathbf{V}$), и было неизвестно, существует ли эта скорость для других течений, в частности для небаротропных течений идеального газа. Другими словами, было неизвестно, существует ли в течениях идеального газа в общем пространственном случае решение \mathbf{U} уравнения Фридмана (1).

Третий тип свойств. Интегральные инварианты – это криволинейные интегралы от функций плотности, давления, компонент скорости и завихренности и их производных по замкнутым линиям, имеющие одинаковые значения на некотором семействе замкнутых линий. Классическим интегральным инвариантом является циркуляция вектора скорости идеальной несжимаемой жидкости и идеального баротропного газа по любому замкнутому жидкому (состоящему из частиц жидкости) контуру. Согласно теореме Томсона (Кельвина)¹, при движении жидкого контура эта циркуляция сохраняется. Для течений идеального газа имеет место менее известный интегральный инвариант – обобщенная циркуляция скорости². Это циркуляция вектора, равного произведению скорости газа на некоторую скалярную функцию энтропии, по любому замкнутому контуру, состоящему из частиц, которые движутся со скоростью, равной произведению скорости газа на ту же функцию энтропии. Этот интегральный инвариант до опубликования результатов диссертации был единственным известным интегральным инвариантом для вихревых течений идеального газа в общем пространственном случае.

Четвертый тип свойств. Принципы максимума (ПМ) – это утверждения об условиях невозможности достижения экстремума той или иной функции во внутренних точках рассматриваемой области. Краткий обзор принципов максимума для течений вязкой и невязкой несжимаемых жидкостей и для

¹ Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука. Гл. ред. Физматлит, 1988. 736 с.

² Голубинский А.И. О сохранении обобщенной циркуляции скорости в установившихся течениях идеального газа // Доклады АН СССР. 1971. Т. 196, № 5. С. 1043–1045.

безвихревых течений идеального газа содержится во введении и в разделе 5.1 диссертации. Для вихревых течений идеального газа были известны ПМ давления Трусделла¹ – для пространственных течений, и ПМ давления Никольского² – для плоских течений (формулировки приведены ниже в описании раздела 5.1). ПМ Трусделла с точки зрения его использования для верификации расчетов имеет два недостатка: требование баротропности и необходимость вычислять, кроме первых, еще и вторые производные компонент скорости. Единственным известным принципом максимума, лишенным этих недостатков, был ПМ Никольского (для плоских течений). Однако некоторые места в доказательстве были недостаточно обоснованы (что отмечено самим А. А. Никольским), и поэтому стояла задача дать строгое доказательство.

Принципы максимума, применимые к пространственным вихревым течениям идеального газа, в условия которых входят только параметры течения и их первые производные и не входит требование баротропности, отсутствовали до опубликования результатов диссертации.

Цель диссертационной работы состоит в обнаружении неизвестных ранее свойств (закономерностей) вихревых решений уравнений движения идеального газа, в решении задачи Дородницына и в устранении неточности в известном доказательстве принципа максимума Никольского.

Для достижения цели диссертационной работы решались следующие задачи.

1. Строго доказать совпадение лидирующей линии тока и линии торможения для течений за отошедшей ударной волной (УВ) при сверхзвуковом обтекании однородным потоком идеального газа тела с *гладкой выпуклой* носовой частью в общем пространственном случае (задача Дородницына).

2. Исследовать в общем пространственном случае вопрос о величине завихренности на линии торможения в течениях за отошедшей УВ.

3. Исследовать в общем пространственном случае вопрос о замкнутости вихревых линий в течениях за отошедшей УВ.

4. Исследовать в общем пространственном случае вопрос о замкнутости векторных линий векторного произведения скорости и градиента энтропийной функции в течениях за отошедшей УВ.

¹ Truesdell C. Two measures of vorticity // Journal of Rational Mechanics and Analysis. 1953. V. 2. P. 173–217.

² Никольский А.А. Теоретические исследования по механике жидкости и газа // Труды ЦАГИ. 1981. Вып. 2122. С. 1–286.

5. Доказать существование скорости Фридмана в общем пространственном случае для вихревых течений идеального газа (не только для течений за отошедшей УВ).

6. Найти локальные выражения для скорости Фридмана в закрученных осесимметричных течениях.

7. Найти новые интегральные инварианты для вихревых течений идеального газа.

8. Строго доказать принцип максимума Никольского.

9. Найти такой принцип максимума давления для течений идеального газа, в условия которого входят только параметры течения и их первые производные и не входит требование баротропности.

Научная новизна содержится в решениях всех девяти задач диссертации.

1. Впервые доказано, что в общем пространственном случае в течении за отошедшей УВ лидирующая линия тока и линия торможения совпадают (решена задача Дородницына).

2. Впервые установлено, что в общем пространственном случае в течении за отошедшей УВ завихренность равна нулю на всей линии торможения.

3. Впервые установлен факт замкнутости в течениях за отошедшей УВ вихревых линий γ_{Ω} (то есть линий вектора Ω).

4. Впервые установлен факт замкнутости в течениях за отошедшей УВ векторных линий $\gamma_{\mathbf{a}}$ вектора $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla \sigma$, где $\sigma = p \rho^{-k}$ – энтропийная функция.

5. Впервые для общего пространственного случая доказано, что скорость Фридмана существует (предложена нелокальная формула для ее вычисления) в вихревых течениях однородных жидкостей.

6. Для закрученных осесимметричных течений впервые получены *локальные* формулы скоростей Фридмана для меридиональной и окружной составляющих завихренности (раздел 3.5).

7. С использованием установленного в диссертации факта замкнутости в течении за отошедшей УВ линий γ_{Ω} и $\gamma_{\mathbf{a}}$ получены три неизвестных ранее интегральных инварианта, которые представляют собой криволинейные интегралы от функций, зависящих от параметров течения и от их пространственных производных, по этим замкнутым линиям (в отличие от осесимметричного случая, в общем пространственном случае векторы Ω и \mathbf{a} могут быть неколлинеарными, и

линии γ_{Ω} и $\gamma_{\mathbf{a}}$ могут не совпадать): $\int_{\gamma_{\Omega}} \frac{p}{|\Omega|} dl$, $\int_{\gamma_{\mathbf{a}}} \frac{p}{|\Omega_{\mathbf{a}}|} dl$ и $\int_{\gamma_{\mathbf{a}}} \frac{T \operatorname{ctg} \alpha}{|\mathbf{V}|} dl = 0$, где

Ω_a – проекция вектора Ω на вектор a , T – температура, α – угол между векторами скорости V и завихренности Ω . Первые два из этих инвариантов сохраняются на изоэнтропийных поверхностях тока и обобщают инвариант Крокко (сохраняющаяся вдоль линий тока в стационарных изоэнергетических незакрученных осесимметричных течениях величина $\Omega/(rp)$, где r – расстояние до оси симметрии, $\Omega = |\Omega|$)¹ на общий пространственный случай. Третий инвариант равен нулю на всех замкнутых линиях вектора a .

8. Впервые строго доказан принцип максимума Никольского.

9. Впервые в общем пространственном случае получен дозвуковой принцип максимума давления (ДПМД), справедливый для дозвуковых стационарных течений идеального газа, в условия которого входит только знак Q -параметра ($Q = 0.5 \{ \Omega^2 - (\nabla u)^2 - (\nabla v)^2 - (\nabla w)^2 \}$, где u , v и w – компоненты вектора скорости V в прямоугольной декартовой системе координат, $\Omega = |\Omega|$, $\Omega = \text{rot } V$).

Если давление не постоянно на замыкании \bar{G} ограниченной области течения G и во всех точках G выполняется

1) $Q \leq 0$, то давление достигает минимума на \bar{G} на границе и только на границе области G ;

2) $Q \geq 0$, то давление достигает максимума на \bar{G} на границе и только на границе области G ;

3) $Q = 0$, то давление достигает минимума и максимума на \bar{G} на границе и только на границе области G .

В условия ДПМД входят только первые производные компонент скорости (Q -параметр), а требование баротропности отсутствует.

Кроме того, новизну содержат некоторые промежуточные результаты и результаты, которые не являются промежуточными, но представляют собой решения задач, естественным образом возникших в процессе работы над диссертацией (например, «вихревая альтернатива», отличие от нуля завихренности на поверхности тела при осесимметричном обтекании с отошедшей ударной волной и несовпадение лидирующей линии тока и линии торможения при неоднородном набегающем потоке). Эти новые результаты (их формулировки приведены ниже при описаниях разделов 2.1, 2.5, 2.6, 5.3, 5.10 и 5.16) имеют самостоятельные теоретическое и практическое значения.

¹ Crocco L. Eine neue stromfunktion für die erforschung der bewegung der gase mit rotation // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 1937. V. 17, No. 1. P. 1–7.

Теоретическая значимость состоит в строгом обосновании совпадения лидирующей линии тока и линии торможения (решение задачи Дородницына) и в обнаружении таких неизвестных ранее свойств, как замкнутость вихревых линий, замкнутость линий векторного произведения скорости и градиента энтропии и равенство нулю завихренности на линии торможения, а также в обнаружении трех неизвестных ранее интегральных инвариантов. Все это проясняет картину течения за отошедшей УВ в общем пространственном случае. Некоторые из обнаруженных закономерностей, например дозвуковой принцип максимума давления, выполняются в значительно более широком классе течений идеального газа, чем течения за отошедшей УВ, а именно в течениях, в которых не только поле энтропии, но и поле полной энтальпии могут быть неоднородными. Также важным теоретическим результатом является доказательство существования скорости Фридмана в вихревом течении любой однородной жидкости (от идеальной несжимаемой жидкости до вязкого газа). В частности, это относится и к пространственным вихревым течениям идеального газа, которые изучаются в диссертации.

Практическая значимость результатов диссертации состоит в возможности проводить верификацию программного обеспечения компьютерной модели и конкретного расчета путем проверки выполнения обнаруженных закономерностей. А результаты, связанные со скоростью Фридмана (п. 5 и п. 6 в перечне «Научная новизна»), могут быть использованы при создании новых бессеточных методов. Некоторые результаты в настоящее время уже используются другими исследователями. Например, решение задачи Дородницына (п. 1 в перечне «Научная новизна») использовано в работе¹ для получения количественной оценки точности кода расчета аэромеханических задач путем сравнения расчетного и теоретического (полученного в диссертации) значений давления в точке торможения. Дозвуковой принцип максимума давления (п. 9 в перечне «Научная новизна») в настоящее время применяется для выбора параметров расчетных сеток. Например, в работах^{2,3,4} в первоначальных расчетах имели место нарушения

¹ Марков В.В., Харченко Н.А. Верификация компьютерного кода ГРАД методом Сизых // Труды МФТИ. 2024. Т. 16, № 1. С. 119–128.

² Вышинский В.В., Зоан К.Т. Численное моделирование обтекания фрагментов ландшафта и вопросы верификации решений // Учёные записки ЦАГИ. 2020. Т. 51, № 6. С. 60–68.

³ Айрапетов А.Б., Вышинский В.В., Катунин А.В. К вопросу о верификации расчётов стационарных дозвуковых течений около плохообтекаемых тел // Учёные записки ЦАГИ. 2021. Т. 52, № 1. С. 34–40.

⁴ Брутян М.А., Вышинский В.В., Раздобарин А.М. Применение критериев независимой верификации решений для повышения качества численных расчётов // Учёные записки ЦАГИ. 2022. Т. 53, № 4. С. 26–32.

дозвукового принципа максимума давления. Поэтому сетки измельчались и модифицировались вплоть до устранения этих нарушений. Практическое значение приобрела нелокальная формула для скорости Фридмана (п. 5 в перечне «Научная новизна»). Для течений вязкой несжимаемой жидкости ее упрощенный локальный вид был использован в работе¹, и в результате был создан новый бессеточный метод расчета пространственных течений вязкой несжимаемой жидкости. Этот метод представляет собой распространение на вязкие течения известного метода вихревых петель², который ранее использовался только для расчетов невязких течений. Упомянутые примеры практического использования положений, выносимых на защиту, подробно описаны в диссертации в приложении А.

Методы исследования. В диссертации используются только точные математические методы исследования. Один из основных методов состоит в представлении о движении воображаемой жидкости, состоящей из воображаемых частиц, «переносящих» те или иные векторные линии реального течения. Такой метод выявления свойств течения используется впервые. Задача Дородницына и некоторые другие задачи диссертационной работы решены именно этим методом. Поле скорости воображаемых частиц определяется критерием Зоравского³, который позволяет найти скорости «переноса» различных векторных линий. Метод получения принципов максимума состоит в преобразовании уравнений движения идеального газа к виду, позволяющему применить теорему Хопфа⁴ или вариант этой теоремы для случая неограниченных коэффициентов [16].

Положения, выносимые на защиту.

При упоминании течений за отошедшей ударной волной (УВ) подразумевается, что речь идет о сверхзвуковом обтекании тела с гладкой выпуклой носовой частью.

1. Строгое доказательство совпадения лидирующей линии тока и линии торможения в течении за отошедшей УВ в общем пространственном случае (решение задачи Дородницына).

2. Равенство нулю завихренности на линии торможения в течениях за отошедшей УВ.

¹ Коцур О.С. Модификация метода вихревых петель для моделирования движения вихревых структур в вязкой несжимаемой жидкости и его программная реализация: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2022. 195 с.

² Dergachev S.A., Marchevsky I.K., Scheglov G.A. Flow simulation around 3D bodies by using Lagrangian vortex loops method with boundary condition satisfaction with respect to tangential velocity components // Aerospace Science and Technology. 2019. V. 94. Art. 105374.

³ Truesdell C. The kinematics of vorticity. Bloomington: Indiana University Press, 1954. 232 p.

⁴ Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: Издательство иностранной литературы, 1957. 256 с.

3. Замкнутость вихревых линий в течениях за отошедшей УВ.
4. Замкнутость векторных линий векторного произведения скорости и градиента энтропии в течениях за отошедшей УВ.
5. Существование в общем пространственном случае скорости Фридмана в вихревом течении любой однородной жидкости.
6. Локальные формулы скоростей Фридмана для меридиональной и окружной составляющих завихренности в закрученных осесимметричных течениях.
7. Три неизвестных ранее интегральных инварианта течений за отошедшей УВ в общем пространственном случае.
8. Строгое доказательство принципа максимума Никольского.
9. Принцип максимума давления, в условие которого входит только знак Q -параметра и который справедлив для стационарных дозвуковых течений в общем пространственном случае.

Из этих положений самыми важными являются 1, 5 и 9, поскольку они представляют собой решения проблем, стоявших перед теоретической аэрогидромеханикой в течение многих десятилетий.

Достоверность результатов обеспечивается использованием строгих математических методов исследования свойств решений полных (без каких-либо упрощений) систем уравнений моделей однородных жидкостей и подтверждена:

- обсуждением результатов исследования на международных и всероссийских научных конференциях и семинарах высокого уровня;
- публикациями результатов исследования в рецензируемых научных изданиях.

Апробация результатов. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах.

International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, Rhodes, Greece, 2014 (ICNAAM – 2014 г.)¹.

XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 2015 г.

III международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования», МИ РАН им. В. А. Стеклова, Москва, 2016 г.

XXIX научно-техническая конференция ЦАГИ по аэродинамике, пос. Володарского Моск. обл., 2018 г.

¹ Markov V.V., Sizykh G.B. Generalized Helmholtz's theorem // AIP Conference Proceedings. 2015. V. 1648, I. 1. Art. 390005.

Восемнадцатая международная школа-семинар РАН – ЦАГИ «Модели и методы аэродинамики», Евпатория, 2018 г.

Международная конференция «50 лет развития сеточно-характеристического метода», Долгопрудный, 2018 г.

Двадцатая международная школа-семинар РАН – ЦАГИ «Модели и методы аэродинамики», Евпатория, 2020 г.

Семинар кафедры гидродинамики НИИ механики МГУ «Механика сплошной среды» под руководством академика РАН А. Г. Куликовского, профессора В. П. Карликова и члена-корреспондента РАН О. Э. Мельник, Москва, 2014 г.

Семинар отдела механики МИ РАН им. В. А. Стеклова под руководством д.ф.-м.н. профессора А. Т. Ильичева и д.ф.-м.н. В. В. Маркова, Москва, 2015 г.

Научно-методический семинар кафедры «Прикладная математика» МГТУ имени Н. Э. Баумана под руководством д.т.н. профессоров В. И. Ванько и В. В. Феоктистова, Москва, 2016 г.

Семинар механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Математическая физика, квантовая физика, квантовая теория информации, бесконечномерный анализ» под руководством профессора Е. Т. Шавгулидзе, Москва, 2022, 2023 гг.

Научный семинар С. М. Белоцерковского (ЦАГИ – Военно-воздушная академия) под руководством профессоров А. И. Желанникова и В. В. Вышинского, Москва, 2014, 2014, 2014, 2015, 2015, 2019, 2021, 2023, 2024 гг.

Научный семинар кафедры «Аэрокосмические системы» МГТУ имени Н. Э. Баумана под руководством д.т.н. А. Г. Леонова, Москва, 2022 г.

Видеосеминар по аэромеханике ЦАГИ – ИТПМ СО РАН – СПбПУ – НИИМ МГУ – ОИВТ РАН под руководством члена-корреспондента РАН И. В. Егорова, Москва, 2022, 2023 гг.

Семинар ЦАГИ под руководством члена-корреспондента РАН А. М. Гайфуллина и д.ф.-м.н. В. Г. Судакова, Жуковский, 2023 г.

Семинар лаборатории радиационной газовой динамики ИПМех РАН под руководством академика РАН С. Т. Суржикова, Москва, 2024 г.

Список работ, опубликованных автором по теме диссертации, приведен в конце автореферата и состоит из 33 научных статей (journal article) [1–33] в журналах, включенных в перечень ВАК РФ. Из них 19 статей – в изданиях, индексируемых в библиографических базах Scopus и WoS.

Публикационная активность соискателя (автора). Соискатель имеет 66 публикаций по специальности 1.1.9. Список этих публикаций представлен на сайте

ORCID (ссылка: <https://orcid.org/0000-0001-5821-8596>, дата обращения: 15.06.2024). В этот список входят 32 публикации в изданиях, индексируемых в библиографических базах Scopus и WoS, а 54 статьи (journal article) опубликованы в журналах, включенных в перечень ВАК РФ. Если учесть все публикации, имеющие отношение к теме диссертации, например публикации первоначального этапа работы, в которых исследовались более простые течения и в которых соискатель выработал подходы к решению некоторых задач диссертации, то к теме диссертации из упомянутого списка на сайте ORCID можно отнести 59 публикаций¹ (в том числе 51 статью (journal article) в журналах из списка ВАК). Однако соискатель считает, что содержание диссертации достаточно полно представляют 33 статьи, в которых получены основные результаты диссертации. Поэтому в предыдущем абзаце в качестве обязательного согласно ГОСТ Р 7.0.11-2011 «списка работ, опубликованных автором по теме диссертации» указан список именно таких статей.

Соответствие Паспорту Специальности. Материалы диссертации полностью соответствует паспорту специальности 1.1.9. «Механика жидкости, газа и плазмы» в направлениях исследований «Течения сжимаемых сред и ударные волны» и «Точные, асимптотические, приближенные аналитические, численные и комбинированные методы исследования уравнений континуальных и кинетических моделей однородных и многофазных сред».

Личный вклад соискателя. Все результаты диссертации получены лично соискателем. Из совместных публикаций в результаты (и в положения, выносимые на защиту) включен лишь тот материал, который полностью принадлежит соискателю. В приложении А, где приведены примеры использования в вычислительной аэрогидромеханике положений, выносимых на защиту, представлены материалы работ, выполненных без участия соискателя, о чем прямо указывается в тексте приложения, и результаты этих работ не включены в результаты диссертации.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка сокращений и условных обозначений, списка терминов, списка литературы и одного приложения. Диссертационная работа изложена на 291 странице, содержит 40 рисунков и 5 таблиц. Библиография включает 223 наименования.

¹ В списке ORCID это статья 1987 года и все публикации, начиная с 2013 года, кроме статьи про взрыв кольцевого заряда (всего 59 публикаций).

Основное содержание работы

Во **введении** дана общая характеристика работы. В частности, обоснована актуальность диссертационной работы, сформулированы цель и задачи исследования, аргументирована научная новизна, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения, приведены данные о структуре и объеме диссертационной работы.

Глава 1 посвящена решению задачи Дородницына.

В разделах 1.1 и 1.2 приводятся постановка и решение задачи Дородницына. Рассматривается обтекание тела с гладкой выпуклой носовой частью однородным сверхзвуковым потоком. Обосновывается состоятельность предположения о непрерывности вторых производных газодинамических параметров (плотности, давления и компонент скорости) в окрестности линии торможения за отошедшей ударной волной (УВ), в том числе в точке торможения (несмотря на разрыв направления скорости и неограниченность кривизны линий тока в окрестности точки торможения). Поскольку полная энтальпия $i_0 = (k/(k-1))(p/\rho) + V^2/2$ не меняется при переходе через УВ, поле i_0 однородно во всех точках течения ($\nabla i_0 = 0$). В этом случае стационарные уравнения Эйлера в форме Крокко¹ записываются следующим образом:

$$\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V} = (k-1)^{-1} p \rho^{-1} \nabla \ln \sigma. \quad (2)$$

Исследование в разделе 1.2 этого уравнения вместе с уравнением неразрывности $\operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0$ и уравнением сохранения энтропийной функции в частицах газа $(\mathbf{V} \cdot \nabla)(p \rho^{-k}) = 0$ приводит к следующему выводу (решена задача Дородницына).

В течениях с отошедшей УВ при обтекании тел с гладкой выпуклой носовой частью линия торможения совпадает с лидирующей линией (то есть пересекает УВ по нормали (Рис. 1)), а энтропия принимает максимальное значение на линии торможения и на поверхности тела. При этом завихренность в точке торможения равна нулю.

Решение задачи Дородницына впервые опубликовано в [5], где доказательство было изложено кратко. Подробное доказательство, которое изложено в диссертации, опубликовано в [17]. В автореферате представляется достаточным ограничиться описанием основных шагов доказательства.

¹ Крайко А.Н. Теоретическая газовая динамика: классика и современность. М.: Торус Пресс, 2010. 440 с.

Сначала доказывается, что завихренность в точке торможения B (Рис. 1(б)) равна нулю. Затем на основе этого свойства показывается, что на линии торможения завихренность коллинеарна скорости. Согласно уравнению (2), это значит, что градиент энтропийной функции на всей линии торможения равен нулю (в том числе и в точке A (Рис. 1(б)) на ударной волне).

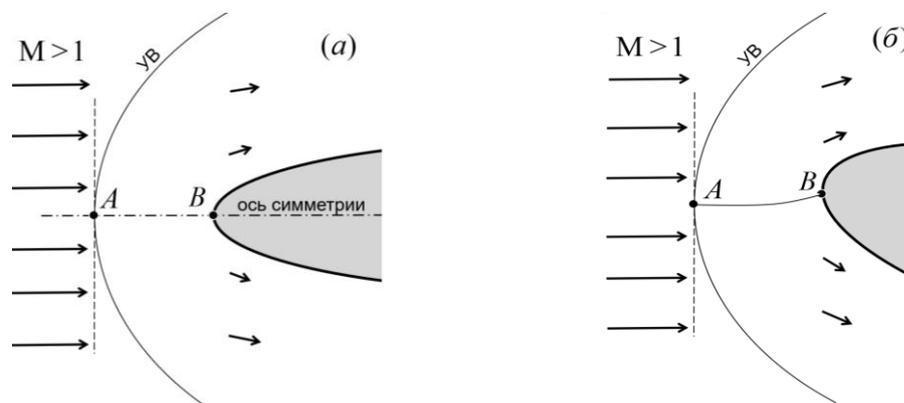


Рис. 1. Гладкая выпуклая носовая часть в сверхзвуковом потоке: (а) – осесимметричное обтекание тела вращения; (б) – общий пространственный случай. AB – линия торможения

Наконец, из известного свойства, состоящего в том, что градиент энтропийной функции сразу за искривленной UV вблизи носовой части равен нулю только в точке, в которой линия тока пересекает UV по нормали, следует, что в точке A линия торможения пересекает UV по нормали, то есть совпадает с лидирующей линией тока (что и требовалось доказать).

В заключении к первой главе (раздел 1.3) делается вывод, что давление и плотность в точке торможения можно вычислять по параметрам набегающего потока с использованием условий Ренкина – Гюгонио на прямом скачке в точке начала линии торможения. Следовательно, *при заданных параметрах набегающего потока* давление и плотность в точке торможения и энтропийная функция на поверхности тела с гладкой выпуклой носовой частью будут одинаковыми для различных тел, распложенных под различными углами атаки.

В главе 2 продолжается поиск свойств течений за отошедшей ударной волной.

В разделе 2.1 получено свойство, названное «вихревой альтернативой».

Если на некотором отрезке линии тока стационарного изоэнергетического ($\nabla i_0 = 0$) течения с дважды непрерывно дифференцируемыми параметрами скорость не обращается в нуль, то величина завихренности $|\mathbf{\Omega}|$ либо

тождественно равна нулю на этом отрезке линии тока, либо на всем отрезке $|\Omega| \neq 0$.

Известно^{1,2,3}, что в лидирующей точке (точке пересечения скачка лидирующей линией тока) завихренность равна нулю, а скорость отлична от нуля. Поэтому из вихревой альтернативы следует, что

в течении за отошедшей УВ завихренность на лидирующей линии равна нулю по крайней мере на том ее (открытом) интервале, который начинается в лидирующей точке, и на котором отсутствуют точки торможения и точки разрыва параметров течения.

Вихревая альтернатива впервые была опубликована в [6], где постановка и решение задачи принадлежат соискателю. Научная роль соавтора в этой статье состоит в упрощении некоторых шагов доказательства, изначально предложенных соискателем.

Раздел 2.2 посвящен вопросу о величине завихренности на линии торможения. После решения в статье [5] задачи Дородницына стало ясно, что в точке торможения завихренность равна нулю, но вопрос о завихренности в остальных точках линии торможения оставался открытым. Результат раздела 2.1 о нулевой завихренности на лидирующей линии тока и факт совпадения этой линии с линией торможения, доказанный в разделе 1.2, вместе привели к новому важному результату.

В течении за отошедшей УВ завихренность равна нулю на всей линии торможения.

В разделе 2.3 решен вопрос о замкнутости вихревых линий в течении за отошедшей УВ. Сначала показано, что в течении за отошедшей УВ поверхность УВ состоит из замкнутых вихревых линий, которые один раз охватывают лидирующую точку (Рис. 2). Поверхности тока, начинающиеся на этих замкнутых линиях, представляют собой изоэнтропийные поверхности $\sigma = \text{const}$, на которых в силу уравнения (2) лежат все вихревые линии в течении за УВ. Далее показано, что скорость Фридмана в течении за отошедшей УВ равна $\mathbf{q} = (T_\infty / T) \mathbf{V}$, где \mathbf{V} – скорость газа, T – температура газа, T_∞ – температура газа в набегающем потоке. Это значит, что q -частицы, составляющие вихревую линию в некоторый момент

¹ Truesdell C. On curved shocks in steady plane flow of an ideal fluid // Journal of the Aeronautical Sciences. 1952. No. 19. P. 826–828.

² Hayes W.D. The vorticity jump across a gasdynamic discontinuities // Journal of Fluid Mechanics. 1957. No. 2. P. 595–600.

³ Левин В.А., Скопина Г.А. Анализ завихренности потока за ударными и детонационными волнами. Владивосток: Дальнаука, 2016. 65 с.

времени и двигающиеся со скоростью \mathbf{q} , впоследствии также будут находиться на вихревой линии. Воображаемые q -частицы, составляющие замкнутые вихревые линии, лежащие на UV в некоторый момент времени, движутся вниз по потоку со скоростью \mathbf{q} и поэтому продолжают составлять замкнутые вихревые линии, как показано на Рис. 3. В свою очередь это означает, что

в течении за отошедшей UV все вихревые линии замкнуты.

Этот результат опубликован в [6] и принадлежит соискателю (о научном вкладе соавтора см. в описании раздела 2.1).

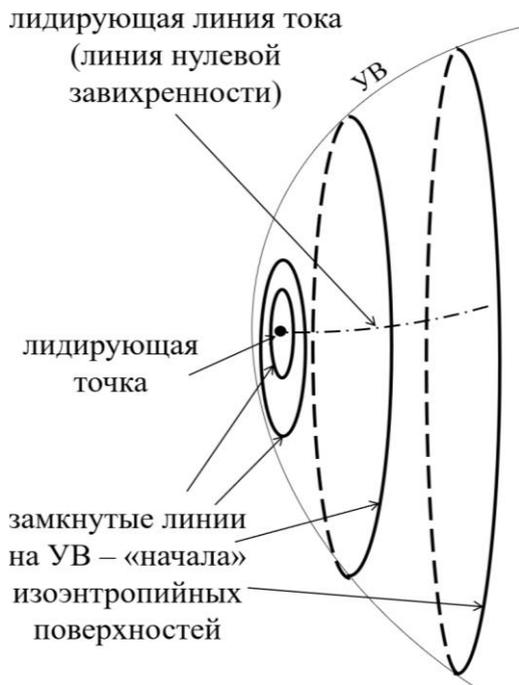


Рис. 2

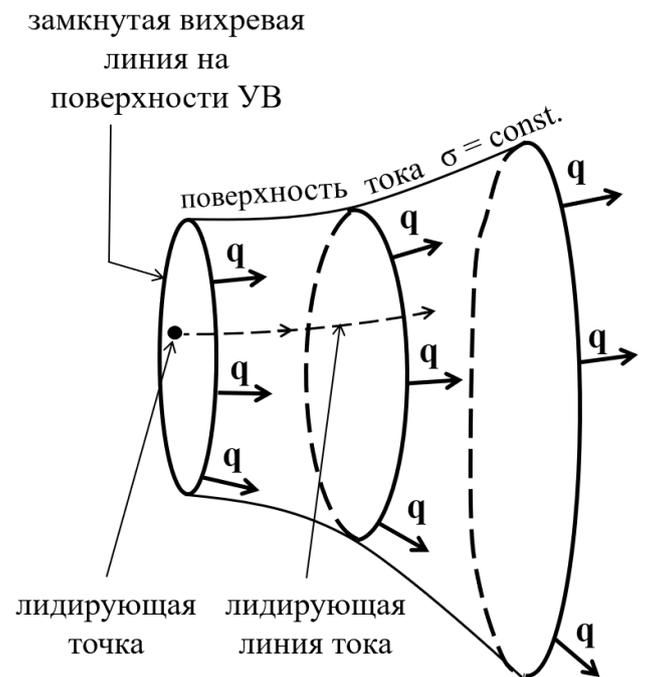


Рис. 3

Раздел 2.4 посвящен вопросу замкнутости векторных линий векторного произведения скорости и градиента энтропии ($\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla \sigma$). Очевидно, что эти линии (как и вихревые линии) лежат на изоэнтропийных поверхностях. В разделе показано, что они замкнуты. Для этого доказано следующее утверждение, представляющее основной результат раздела (он получен в [4]).

Пусть в течении за отошедшей UV часть C_{AB} векторной линии вектора $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla \sigma$, лежащая на поверхности $\sigma = \text{const}$ (не вырожденной в линию нулевой завихренности), делает один оборот вокруг линии нулевой завихренности и при этом начинается и заканчивается на одной и той же линии тока l в точках A и B . И пусть на части поверхности $\sigma = \text{const}$, расположенной между UV , линией C_{AB} и криволинейным отрезком линии тока l между точками A и B ,

отсутствуют какие-либо разрывы и точки торможения. Тогда точки A и B совпадают.

В разделе 2.5 продолжается рассмотрение течения за отошедшей УВ. После обнаружения в разделе 1.2 того факта, что при обтекании тела с гладкой выпуклой носовой частью завихренность в точке торможения равна нулю, возник вопрос, не следует ли из этого, что завихренность равна нулю и на поверхности тела. Для ответа на этот вопрос, в отличие от предыдущих разделов, исследуется не общий пространственный случай, а осесимметричное обтекание тела вращения. Выражение для инварианта Крокко $I = \Omega/(rp)$ в точках оси симметрии имеет неопределенность вида $0/0$. Эту неопределенность удалось раскрыть. В итоге получена следующая связь инварианта Крокко на поверхности тела ($r > 0$) с

радиусом кривизны УВ в лидирующей точке:
$$\frac{\Omega}{pr} = \frac{V_\infty}{p_A} \frac{\rho_A}{R_A^2 \rho_\infty} \left(1 - \frac{\rho_\infty}{\rho_A}\right)^2,$$
 где

ρ_∞ , ρ_∞ и V_∞ – параметры набегающего сверхзвукового ($M > 1$) потока, R_A – радиус кривизны УВ в лидирующей точке, p_A и ρ_A – давление и плотность за УВ в лидирующей точке. Результат раздела опубликован в статье [7], где научная роль соавторов состоит в том, что они провели экспертизу новизны этого результата.

Раздел 2.6 посвящен исследованию экстремальных свойств энтропии и полного давления за отошедшей УВ перед телом произвольной формы с гладкой выпуклой носовой частью, установленным в неоднородном (слабо возмущенном) набегающем сверхзвуковом потоке. В разделе показано, что

неоднородность набегающего потока приводит к тому, что линия тока с максимальной энтропией и линия торможения, вообще говоря, различаются.

Энтропия на поверхности тела оказывается меньше максимального значения, которое достигается на линии тока, проходящей около поверхности тела. Отдельно рассмотрен характерный случай неравномерного сверхзвукового потока в рабочей части аэродинамической трубы, в котором поля энтальпии и энтропии обычно однородны. Здесь линия тока с минимальным полным давлением может проходить возле тела, и давление в точке торможения будет выше минимального (как это, согласно результату раздела 1.2, имеет место при однородном набегающем сверхзвуковом потоке).

Результаты раздела опубликованы в [18]. Научный вклад соавтора состоит в том, что он обнаружил в научной литературе данные трубного эксперимента, в котором полное давление в точке торможения было выше минимального (это противоречило результату раздела 1.2), и предложил попытаться объяснить это

возмущенностью набегающего сверхзвукового потока в аэродинамической трубе (что и было сделано соискателем).

В разделе 2.7 приведено более простое, чем в разделе 1.2, решение задачи Дородницына. Решение раздела 1.2 громоздкое и основано на критерии Зоравского, опыт использования которого имеет лишь узкий круг специалистов. Для практически важного случая течений с плоскостью симметрии (в частности, для случая обтекания тел вращения при ненулевых углах атаки и скольжения) предложено оригинальное простое и достаточно короткое доказательство, для которого не требуется использовать критерий Зоравского. Это доказательство опубликовано в [20] и предназначено для использования в курсах аэродинамики.

Глава 3 посвящена вопросу существования скорости Фридмана для завихренности в общем пространственном случае и поиску способов вычисления этой скорости; поиску новых лагранжевых взглядов на эволюцию завихренности.

Раздел 3.1 представляет собой продолжение подраздела введения, посвященного закономерностям второго типа и играет роль введения к главе 3. Показана роль скорости Фридмана в бессеточных методах на примере метода вязких вихревых доменов (ВВД). Для этого в общих чертах описана суть метода ВВД.

В разделе 3.2 доказано существование решения одной задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка (точная постановка – в диссертации). Этот результат опубликован в [22] и используется в следующем разделе при доказательстве существования скорости Фридмана.

Раздел 3.3 посвящен вопросу существования скорости Фридмана в вихревой ($\Omega \neq 0$) области течения любой однородной жидкости, то есть жидкости или газа, динамическое уравнение движения которых имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \mathbf{F}, \quad (3)$$

где \mathbf{F} – плотность распределения равнодействующей всех сил, приложенных к жидкости или газу (сюда относятся вязкие и невязкие жидкости и газы). Рассматривается произвольная внутренняя точка A течения. С использованием результата раздела 3.2 показывается существование трехмерной окрестности точки A , в которой в течение некоторого ненулевого промежутка времени $[t_1, t_2]$ существует по крайней мере одно дважды непрерывно дифференцируемое решение u уравнения $\Omega \cdot (\mathbf{F} - \nabla u) = 0$. Выражение для ∇u содержит криволинейные интегралы по вихревым линиям и поэтому в общем случае является нелокальным (см. выше последний абзац на стр. 6). Если с учетом этого свойства

ортогональности векторов $\boldsymbol{\Omega}$ и $(\mathbf{F} - \nabla u)$ раскрыть двойное векторное произведение $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{F} - \nabla u))$ и использовать известную формулу векторного анализа $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} + \nabla(\mathbf{V}^2/2)$, то можно убедиться в равносильности (3) и уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \left(\mathbf{V} + \frac{\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{F} - \nabla u)}{\Omega^2} \right) = -\nabla \left(\frac{\mathbf{V}^2}{2} - u \right).$$

Применение оператора rot к обеим частям последнего уравнения приводит к уравнению Фридмана (1), в котором $\mathbf{U} = \mathbf{V} + \frac{\boldsymbol{\Omega} \times \{\mathbf{F} - \nabla u\}}{\Omega^2}$. Поэтому

для каждой точки области течения жидкости, которое в течение ненулевого промежутка времени есть вихревое ($\boldsymbol{\Omega} \neq 0$) течение, подчиняющееся уравнению (3) с дважды непрерывно дифференцируемыми (по времени и по пространственным координатам) полями $\boldsymbol{\Omega}$ и \mathbf{F} , существует пространственная окрестность этой точки, в которой в течение некоторого ненулевого промежутка времени существует скорость Фридмана.

Это основной результат всей третьей главы. Он опубликован в [9] и принадлежит соискателю, на что соавтор прямо указывает в статье¹.

В разделе 3.4 показано, что скорость Фридмана не единственна. С использованием обозначений предыдущего раздела этот результат формулируется следующим образом.

Общая формула, дающая все возможные скорости Фридмана, есть

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} + \frac{\boldsymbol{\Omega} \times \{\mathbf{F} - \nabla u + \nabla W\}}{\Omega^2} + \gamma \boldsymbol{\Omega}, \quad (4)$$

где поле $u = u(x, y, z, t)$ такое, что $\boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{F} - \nabla u) = 0$; $\gamma = \gamma(x, y, z, t)$ – произвольное скалярное поле, а $W = W(x, y, z, t)$ – скалярное поле, постоянное вдоль вихревых линий (подразумевается, что эти поля обладают необходимой гладкостью).

Вопрос неоднозначности был поставлен соискателем в совместной статье [9], но решен соавтором. Поэтому результат раздела не включен в список результатов соискателя.

В разделе 3.5 рассмотрена эволюция завихренности $\boldsymbol{\Omega} = \text{rot} \mathbf{V}$ идеального газа в закрученных осесимметричных течениях. В отличие от незакрученных, в

¹ Максименко И.А., Марков В.В. О новом лагранжевом взгляде на эволюцию завихренности в пространственных течениях // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2022. Т. 26, № 1. С. 179–189.

закрученных осесимметричных течениях известна только нелокальная (поскольку выражение для ∇u содержит криволинейные интегралы по вихревым линиям) формула скорости Фридмана (4), а ее локальное выражение неизвестно. При этом, как показано в статье¹, для некоторых осесимметричных течений локального выражения не существует. В разделе предложена лагранжева точка зрения на эволюцию *компонент* завихренности с *локальными* формулами. Для этого рассмотрено закрученное осесимметричное течение идеального газа, движение которого описывается следующей системой уравнений², записанной в форме Громеки – Ламба:

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{V} / \partial t - \mathbf{V} \times \operatorname{rot} \mathbf{V} &= -\rho^{-1} \nabla p - \nabla (\mathbf{V}^2 / 2), \quad \partial \rho / \partial t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0, \\ \partial(p\rho^{-k}) / \partial t + (\mathbf{V} \cdot \nabla)(p\rho^{-k}) &= 0. \end{aligned}$$

Цилиндрическая система координат $O r \varphi z$ была выбрана так, чтобы течение оказалось осесимметричным относительно оси Oz ($\frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv 0$). $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ – правая тройка единичных векторов в радиальном, окружном и осевом направлениях соответственно ($\mathbf{V} = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_\varphi + \mathbf{V}_z = V_r \mathbf{e}_r + V_\varphi \mathbf{e}_\varphi + V_z \mathbf{e}_z$). Основная идея раздела состоит в использовании того факта, что меридиональная Ω_{rz} и окружная Ω_φ компоненты завихренности $\Omega = \Omega_{rz} + \Omega_\varphi$ сами по себе являются соленоидальными полями, поскольку $\Omega_{rz} = \operatorname{rot} \mathbf{V}_\varphi$ и $\Omega_\varphi = \operatorname{rot}(\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z)$. Показано, что *скорости*

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z - \rho^{-1} \Omega_\varphi^{-2} \Omega_\varphi \times \nabla p - \left(\frac{V_\varphi^2}{r \Omega_\varphi} \right) \mathbf{e}_z \quad \text{и} \quad \mathbf{U}_2 = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z \quad \text{есть скорости}$$

Фридмана для завихренностей Ω_φ и Ω_{rz} *соответственно*. Таким образом, предложена новая точка зрения на эволюцию завихренности осесимметричных течений идеального газа, состоящая в раздельном рассмотрении меридиональной составляющей завихренности Ω_{rz} и окружной составляющей завихренности Ω_φ .

Найдены *локальные* формулы скорости Фридмана для этих составляющих. Окружная скорость жидкости \mathbf{V}_φ индуцируется полем Ω_{rz} , а меридиональная

¹ Коцур О.С. О существовании локальных способов вычисления скорости переноса вихревых трубок с сохранением их интенсивности // Труды МФТИ. 2019. Т. 11, № 1. С. 76–85.

² Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963. 728 с.

$\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z$ – полем $\mathbf{\Omega}_\varphi$. Эта лагранжева точка зрения была впервые предложена на примере вязкой несжимаемой жидкости в статье [19].

В разделе 3.6 продолжается рассмотрение осесимметричных течений. Замечено, что сохранение циркуляции скорости жидкости по контуру (сохранение интенсивности вихревого домена), движущемуся со скоростью \mathbf{U} , не обязательно для вихревого метода. Достаточно, чтобы был известен закон изменения этой циркуляции во времени. Поэтому, если найти такую скорость \mathbf{U} , что интенсивность домена будет достаточно быстро стремиться к нулю с ростом времени, наличием каждого домена можно будет пренебречь после некоторого конечного числа шагов по времени. В итоге количество учитываемых в расчете доменов будет ограничено «естественным образом».

Для каждой из компонент завихренности $\mathbf{\Omega}_\varphi$ и $\mathbf{\Omega}_{rz}$ показано, что их эволюцию можно представить как движение вихревых трубок со скоростями

$$\mathbf{U}_{1\alpha} = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z + \mathbf{\Omega}_\varphi^{-2} \mathbf{\Omega}_\varphi \times \left\{ -\rho^{-1} \nabla p + (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) \right\} - \left(\frac{V_\varphi^2}{r \mathbf{\Omega}_\varphi} \right) \mathbf{e}_z \quad \text{и}$$

$\mathbf{U}_{2\alpha} = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z + \mathbf{\Omega}_{rz}^{-2} \mathbf{\Omega}_{rz} \times \mathbf{V}_\varphi$ соответственно. При движении вихревых трубок с такими скоростями их интенсивности будут меняться по закону $\Gamma(t) = \Gamma(t_1) \exp\{-(t-t_1)\}$, где t_1 – время начала расчетного шага. То есть интенсивности вихревых трубок $\mathbf{\Omega}_\varphi$ и $\mathbf{\Omega}_{rz}$ будут экспоненциально убывать со временем. Этот результат был получен в [14] для более общего случая – для любых течений однородных жидкостей, в которых завихренность ортогональна остальным векторам, входящим в уравнения движения. Тем самым предложено решение проблемы (в бессеточных вихревых методах) неограниченного роста числа общего количества доменов, находящихся в расчетной области^{1,2,3}.

В разделе 3.7 получено необходимое условие существования замкнутых вихревых линий в течениях идеального газа.

¹ Dynnikova G.Y., Dynnikov Y.A., Guvernuyuk S.V., Malakhova T.V. Stability of a reverse Karman vortex street // Physics of Fluids. 2021. V. 33, No. 2. P. 1–10.

² Kuzmina K., Marchevsky I., Soldatova I., Izmailova Y. On the scope of Lagrangian vortex methods for two-dimensional flow simulations and the POD technique application for data storing and analyzing // Entropy. 2021. V. 23, I. 1. Art. 118.

³ Leonova D., Marchevsky I., Ryatina E. Fast methods for vortex influence computation in meshless Lagrangian vortex methods for 2D incompressible flows simulation // WIT Transactions on Engineering Sciences. 2019. V. 126. P. 255–267.

Пусть в течение ненулевого промежутка времени (t_1, t_2) вся неподвижная плоская поверхность S пересекается под острым углом к нормали замкнутыми вихревыми линиями течения идеального газа и при этом каждая вихревая линия пересекается с S только один раз. Тогда для любого фиксированного момента времени $t \in (t_1, t_2)$ циркуляция вектора $\rho^{-1}\nabla p$ по замкнутой вихревой линии одинакова для разных вихревых линий, пересекающих поверхность S .

Техника доказательства этого утверждения использована в разделе 4.4. Результат раздела опубликован в [23].

В разделе 3.8 в отличие от раздела 3.3, где рассматривались только вихревые области, получена лагранжева точка зрения на эволюцию завихренности в течениях, содержащих в начальный момент времени безвихревые области. Для этого предложен «метод добавления завихренности». Суть метода состоит в следующем. К полю вектора завихренности Ω добавляется такое постоянное по пространству поле Ω_C , чтобы поле суммарной завихренности $\Omega_S = \Omega + \Omega_C$ ни в одной точке не обращалось в нуль. После этого уравнение эволюции суммарной завихренности во всех точках течения приводится к уравнению Фридмана для поля Ω_S . Для общего пространственного случая получена нелокальная формула для соответствующей скорости Фридмана U_S . Приведен пример получения локальных формул для плоских и незакрученных осесимметричных течений. Поскольку связь полей Ω и $\Omega_S = \Omega + \Omega_C$ очень проста, можно считать, что предложен единый закон для всех (вихревых и безвихревых) точек течения. Он заключается в сохранении интенсивности векторных трубок поля Ω_S при их движении со скоростью U_S . Метод добавления завихренности опубликован в [8].

В разделе 3.9 (Заключение к главе 3) кратко перечислены приведенные выше результаты главы.

Глава 4 посвящена поиску интегральных инвариантов и вопросам их использования для верификации расчетов.

В разделе 4.1 найдена скорость переноса контуров с сохранением циркуляции скорости жидкости по этим контурам в самом общем случае, когда течение описывается уравнением $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \mathbf{F}$. В отличие от скорости Фридмана, частицы, движущиеся с такой скоростью, не «обязаны» переносить вихревые линии. Выражение такой скорости было найдено для простых вихревых контуров. Простой вихревой контур Γ – это гладкая замкнутая кривая без

самопересечений, представляющая собой край какой-нибудь диффеоморфной кругу поверхности σ_Γ , которая пересекается вихревыми линиями под острым углом к нормали (доказательство опирается на факт отличия от нуля нормальной составляющей завихренности). Показано, что скорость

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{V} - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} + \frac{(\mathbf{F} \cdot \mathbf{e})}{(\Omega^2 - (\Omega \cdot \mathbf{e})^2)} [\Omega \times \mathbf{e}], \text{ где } \mathbf{e} \text{ – единичный касательный вектор}$$

к контуру, будет скоростью движения точек контура Γ с сохранением циркуляции скорости жидкости \mathbf{V} по нему. Эта *локальная* формула получена соискателем в [11, 24].

Научный вклад одного из соавторов по статье [11] состоит в том, что он нашел скорость $\mathbf{U}_2 = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_\varphi + \mathbf{V}_z + (\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\varphi) \frac{[\Omega_{rz} \times \mathbf{e}_\varphi]}{\Omega_{rz}^2}$ переноса окружной циркуляции $\gamma = 2\pi r V_\varphi$ в осесимметричных течениях (он показал, что $\frac{\partial \gamma}{\partial t} + (\mathbf{U}_2 \cdot \nabla)\gamma = 0$). Этот результат (скорость \mathbf{U}_2) содержится в тексте раздела, но не входит в список результатов соискателя. Другому соавтору принадлежит формула скорости переноса контура по плоской поверхности (подробнее см. [11], раздел 1), не вошедшая в текст диссертации.

В разделах 4.2 и 4.3 получены два обобщения инварианта Крокко для незакрученных осесимметричных течений на общий пространственный случай течений за отошедшей УВ. Это стало возможным после того, как в разделах 2.3 и 2.4 были обоснованы замкнутость вихревых линий, линии вектора $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla \sigma$ и тот факт, что эти линии лежат на (изоэнтропийных) поверхностях тока. В результате появилась возможность рассматривать циркуляции некоторых полей по этим замкнутым линиям. Если обозначить (замкнутые) вихревые линии в течении за отошедшей УВ через γ_Ω , а линии вектора \mathbf{a} – через γ_a , то результаты разделов

4.2 и 4.3 состоят в том, что криволинейные интегралы $\int_{\gamma_\Omega} \frac{P}{|\Omega|} dl$ и $\int_{\gamma_a} \frac{P}{|\Omega_a|} dl$, где

Ω_a – проекция вектора Ω на вектор \mathbf{a} , сохраняют свои значения на изоэнтропийных поверхностях тока. В незакрученных осесимметричных течениях оба эти свойства «вырождаются» и означают сохранение инварианта Крокко $\Omega/(rp)$ на линиях тока, и потому представляют собой обобщения инварианта

Крокко на общий пространственный случай. Инвариант $\int_{\gamma_{\Omega}} \frac{P}{|\Omega|} dl$ был получен соискателем и опубликован в [13], где научная роль соавтора состоит в том, что он обнаружил факт «вырождения» инварианта в инвариант Крокко. Инвариант $\int_{\gamma_{\mathbf{a}}} \frac{P}{|\Omega_{\mathbf{a}}|} dl$ получен соискателем в статьях [25, 26].

В разделе 4.4 получен еще один интегральный инвариант для течений за отошедшей УВ, связанный с семейством замкнутых линий вектора $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla \sigma$. Показано, что для всех замкнутых линий $\gamma_{\mathbf{a}}$ вектора \mathbf{a} равен нулю криволинейный интеграл $\int_{\gamma_{\mathbf{a}}} \frac{T \operatorname{ctg} \alpha}{|\mathbf{V}|} dl = 0$, где T – температура, α – угол между векторами скорости \mathbf{V} и завихренности Ω . Этот интегральный инвариант получен в [3].

В разделе 4.5 проводится сопоставление трех инвариантов, полученных в предыдущих разделах, с точки зрения их использования для верификации расчетов.

Показывается, что более удобным является инвариант $\int_{\gamma_{\mathbf{a}}} \frac{T \operatorname{ctg} \alpha}{|\mathbf{V}|} dl = 0$.

В разделе 4.6 получен инвариант линий тока стационарных закрученных осесимметричных течений. В силу осевой симметрии $\left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv 0 \right)$ меридиональная составляющая завихренности Ω_{rz} является ротором окружной скорости V_{φ} : $\Omega_{rz} = \operatorname{rot} V_{\varphi}$. Показано, что вдоль линий тока стационарного течения газа

сохраняется величина $I = \frac{|\Omega_{rz}|}{\rho |\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z|}$, где $\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z$ – меридиональная скорость. I

есть инвариант линий тока и для стационарных неизоэнтропийных и неизоэнергетических осесимметричных течений. Этот инвариант был получен соискателем и опубликован в [27], где соавтору принадлежит результат (не вошедший в текст диссертации) об эквивалентности некоторых типов течений.

В разделе 4.7 рассматривается вопрос существования винтовых ($\mathbf{V} \times \operatorname{rot} \mathbf{V} = 0$) течений идеального газа. Это связано с поиском точных решений. На точных решениях после их дискретизации на расчетных сетках можно вырабатывать нормы приемлемой точности выполнения обнаруженных закономерностей на численных решениях (например, точность сохранения

интегральных инвариантов). Поиск точных решений в классе винтовых решений для несжимаемой жидкости представляется одним из самых результативных^{1,2}. Это объясняется тем, что любая винтовая соленоидальная скорость есть скорость точного решения уравнений Эйлера для несжимаемой жидкости [15]. Поэтому иногда³ винтовую несоленоидальную скорость называли скоростью точного решения уравнений Эйлера для (сжимаемого) газа. В разделе показано, что использование такого названия для винтовой несоленоидальной скорости требует обоснования. В качестве примера рассмотрен случай отсутствия внешних сил. Рассмотрена система стационарных уравнений Эйлера для винтовых ($\mathbf{V} \times \text{rot} \mathbf{V} = 0$) течений

$$0 = -\rho^{-1} \nabla p - \nabla(\mathbf{V}^2/2), \text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0, (\mathbf{V} \cdot \nabla)(\rho \rho^{-k}) = 0, \rho > 0, p > 0. \quad (5)$$

Доказан следующий критерий существования решения.

Для того, чтобы при заданном винтовом ($\mathbf{V} \times \text{rot} \mathbf{V} = 0$) поле скорости \mathbf{V} в области, где $\text{div} \mathbf{V} \neq 0$, существовало решение системы (5), необходимо и достаточно выполнения во всех точках области трех условий

$$k = 1 - \frac{(\mathbf{V} \cdot \nabla) \left(\frac{(\mathbf{V} \cdot \nabla)(\mathbf{V}^2)}{\text{div} \mathbf{V}} \right)}{(\mathbf{V} \cdot \nabla)(\mathbf{V}^2)}; \quad \nabla \left(\frac{1}{k-1} \frac{(\mathbf{V} \cdot \nabla)(\mathbf{V}^2/2)}{\text{div} \mathbf{V}} + \mathbf{V}^2/2 \right) = 0; \quad \frac{(\mathbf{V} \cdot \nabla)(\mathbf{V}^2/2)}{\text{div} \mathbf{V}} > 0.$$

При выполнении этих условий будут существовать поля плотности ρ и давления p , которые вместе со скоростью \mathbf{V} будут решениями системы (5). Критерий получен соискателем и опубликован в [15]. В этом же разделе приведен пример винтовой несоленоидальной скорости, которая, как показано с использованием критерия, не может быть скоростью точного решения системы (5). Пример приведен в [15] соавтором и не включен в список результатов соискателя.

В разделе 4.8 (Заключение к главе 4) кратко перечислены приведенные выше результаты главы.

Глава 5 посвящена принципам максимума. Все принципы максимума для течений *газа*, кроме полученных в разделах 5.14 и 5.16, относятся к течениям, описываемым системой уравнений

¹ Громека И.С. Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости. Собрание сочинений. М.: Издательство АН СССР, 1952. С. 76–148.

² Bogoyavlenskij O.I. Infinite families of exact periodic solutions to the Navier–Stokes equations // Moscow Mathematical Journal. 2003. V. 3, No. 2. P. 263–272.

³ Morgulis A., Yudovich V.I., Zaslavsky G.M. Compressible helical flows // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1995. V. 48, I. 5. P. 571–582.

$\Omega \times \mathbf{V} = -\rho^{-1} \nabla p - \nabla(\mathbf{V}^2/2)$, $\operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0$, $(\mathbf{V} \cdot \nabla)(p \rho^{-k}) = 0$, $\rho > 0$, $p > 0$. (6)
(В разделах 5.14 и 5.16 третье уравнение не рассматривается.)

Раздел 5.1 представляет собой обзор принципов максимума (ПМ) в различных областях аэрогидромеханики и заканчивается постановкой задач для всей главы. Рассмотрены экстремальные свойства не только давления, но и других параметров течения (скорости, завихренности и др.). К началу работы над диссертацией были известны только два принципа максимума для вихревых течений газа. Принцип максимума Никольского¹ для плоских вихревых стационарных течений: *во внутренних точках области дозвукового вихревого течения ни давление, ни угол наклона скорости не могут достигать экстремума*. А также принцип максимума Трусделла² для общего пространственного случая: *во внутренней точке области G стационарного баротропного течения газа, где давление не постоянно, оно не может принимать минимального значения, если во всей области $Q \leq 0$ и $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V} \geq 0$; максимального и минимального значений, если во всей области $Q = 0$ и $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V} = 0$; максимального значения, если во всей области $Q \geq 0$ и $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V} \leq 0$* . (В оригинальной формулировке Трусделла вместо величины $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V}$ рассматривается равная ей в силу уравнения неразрывности величина $-(\mathbf{V} \cdot \nabla)(\mathbf{V} \cdot \nabla \ln \rho)$, а вместо сравнения параметра Q с нулем величина $W_K = (1 - 4Q/\Omega^2)^{-1/2}$ сравнивается с единицей).

А. А. Никольский в своем доказательстве исключает из рассмотрения случаи, которые, по его мнению, могут иметь место «лишь в исключительных, специально построенных потоках». Поэтому была поставлена задача получить строгое доказательство ПМ Никольского для всех без исключения возможных случаев.

Как сказано во введении, недостатками ПМ Трусделла являются требование баротропности и необходимость вычислять вторые производные компонент скорости. Кроме того, в ПМ Трусделла отсутствуют утверждения для случая $Q \leq 0$, $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V} \leq 0$ и для случая $Q \geq 0$, $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V} \geq 0$. Поэтому были поставлены задачи найти принципы максимума, лишенные этих недостатков, в трех пространственных случаях: в осесимметричном случае, в случае наличия плоскости симметрии и в общем пространственном случае. Такое разделение было вызвано предположением, что ПМ для осесимметричных течений и для течений с

¹ Никольский А.А. Теоретические исследования по механике жидкости и газа // Труды ЦАГИ. 1981. Вып. 2122. С. 1–286.

² Truesdell C. Two measures of vorticity // Journal of Rational Mechanics and Analysis. 1953. V. 2. P. 173–217.

плоскостью симметрии будут иметь более обозримый вид и содержать в своих формулировках меньше условий, чем ПМ в общем пространственном случае.

Раздел 5.2 представляет собой краткую историческую справку о том, как изображения поверхностей уровня Q -параметра стали одним из способов визуализации очень сложных областей турбулентных течений, которые называются «когерентными вихревыми структурами» («вращающимися вихревыми воронками»), «eddy-зонами» или «E-зонами»).

В разделе 5.3 доказан вариант теоремы Хопфа. Классическая теорема Хопфа^{1,2} предлагает ряд утверждений об экстремальных свойствах решений эллиптических квазилинейных уравнений в частных производных

$$\begin{aligned}
 a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2a_{13} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 2a_{23} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + a_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \\
 + b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + b_3 \frac{\partial u}{\partial z} + cu = f
 \end{aligned} \tag{7}$$

в зависимости от свойств коэффициентов этих уравнений. В условия теоремы входят требования, чтобы в рассматриваемой области все коэффициенты уравнения (7) были ограничены, а коэффициенты a_{11} , a_{12} , a_{22} , a_{13} , a_{23} , a_{33} являлись бы коэффициентами положительно определенной квадратичной формы A , определитель которой во всей области отграничен от нуля: $\det A \geq \Delta$, где $\Delta > 0$ – константа. Это делает невозможным применение теоремы для областей течений, в которых некоторые из упомянутых коэффициентов не ограничены в окрестности границы области или в которых $\det A$ обращается в нуль в некоторых точках границы. Поэтому для исследования ряда практически важных течений жидкости и газа было необходимо ослабить упомянутые выше требования теоремы Хопфа к коэффициентам уравнения. В разделе получена новая теорема, названная «вариантом теоремы Хопфа». Как и теорема Хопфа, новая теорема состоит из ряда утверждений об экстремальных свойствах решений эллиптических квазилинейных уравнений в частных производных вида (7) в зависимости от свойств коэффициентов этих уравнений. В варианте теоремы Хопфа отсутствует требование ограниченности коэффициентов уравнения (7), а условие отграниченности $\det A$ от нуля ослаблено до условия ограниченности: $\det A > 0$.

¹ Hopf E. Elementare bemerkungen über die lösungen partieller differentialgleichungen zweiter ordnung vom elliptischen typus // Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. 1927. V. 19. P. 147–152.

² Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: Издательство иностранной литературы, 1957. 256 с.

Вариант теоремы Хопфа использован при доказательстве почти всех принципов максимума, полученных в диссертации. Эта новая теорема опубликована в [16]. Соискатель обнаружил, что условия классической теоремы Хопфа избыточны, и предложил основную идею нового доказательства (показал, как именно можно изменить доказательство Хопфа, чтобы ослабить условия теоремы), что и было сделано совместно с соавторами.

В разделах 5.4, 5.5, 5.6, 5.7 с использованием варианта теоремы Хопфа получены различные новые принципы максимума для идеальной и вязкой несжимаемых жидкостей. При получении этих принципов максимума соискатель предложил и развил приемы доказательств, которые в последующих разделах после некоторой доработки применены для течений газа.

В разделе 5.8 получен первый в главе принцип максимума для газа.

Пусть в области G плоского стационарного безвихревого изоэнтропического течения идеального газа отсутствуют точки торможения, а течение является дозвуковым. Тогда если число Маха M (и модуль скорости) не постоянно, то и минимум, и максимум M (и модуля скорости) достигаются на границе и только на границе области G . Этот принцип максимума (ПМ) отличается от ПМ Шиффмана¹ тем, что в ПМ Шиффмана отсутствует утверждение о минимуме.

Следствием нового ПМ является следующий признак наличия точки торможения (в области G могут быть звуковые и сверхзвуковые точки).

Пусть в некоторой (внутренней) точке области G плоского стационарного безвихревого изоэнтропического течения идеального газа число Маха меньше единицы и меньше своего минимального значения на границе области G . Тогда в области G есть хотя бы одна внутренняя точка торможения. Результаты раздела опубликованы в [28].

В разделе 5.9 приведено строгое доказательство принципа максимума Никольского. (Формулировка, данная самим А. А. Никольским, приведена выше в кратком описании раздела 5.1.) Оказалось, что к условиям этого принципа максимума *необходимо* добавить требование отсутствия точек торможения в рассматриваемой области течения. Это доказательство получено соискателем и опубликовано в [29], где научный вклад соавтора состоит в получении следствия из ПМ давления Никольского: признак наличия сверхзвуковой точки или точки торможения (подробнее см. в [29]).

В разделе 5.10 получен ПМ, верный для осесимметричных вихревых течений.

¹ Shiffman M. On the existence of subsonic flows of a compressible fluid // Journal of Rational Mechanics and Analysis. 1952. V. 1. P. 605–652.

При отсутствии внутренних точек торможения в ограниченной дозвуковой области стационарного осесимметричного течения идеального газа давление, если оно не постоянно всюду, достигает минимального значения на границе и только на границе области.

Эта формулировка допускает наличие звуковых точек и точек торможения на границе области. Течение может быть небаротропным и неизоэнергетическим. Этот ПМ получен соискателем и опубликован в статье [30], где соавторы проиллюстрировали верность ПМ, проанализировав (в дозвуковой области за отошедшей УВ) выполненные ими для этой цели численные расчеты обтекания сферы при числах Маха набегающего потока $M_\infty = 3, 4, 6$ и 8 .

В разделе 5.11 получен один из основных результатов, выносимых на защиту. Это дозвуковой принцип максимума давления (ДПМД), верный для общего пространственного случая. Если опустить требования к гладкости (они есть в тексте диссертации), то полученный результат формулируется следующим образом.

Если в ограниченной области G дозвукового стационарного течения газа давление не постоянно и во всех точках G выполняется 1) $Q \leq 0$, то давление достигает минимума на \bar{G} на границе и только на границе области G ; 2) $Q \geq 0$, то давление достигает максимума на \bar{G} на границе и только на границе области G ; 3) $Q = 0$, то давление достигает минимума и максимума на \bar{G} на границе и только на границе области G .

Из ДПМД следует, что если давление не постоянно всюду и достигает строгого или нестрогого минимума во внутренней точке течения, то Q -параметр в этой точке должен быть неотрицательным, а во внутренней точке максимума давления Q -параметр должен быть неположительным.

Это следствие ДПМД позволяет для верификации ограничиться вычислением Q -параметра только в точке экстремума давления.

ДПМД – первый принцип максимума, справедливый для всех типов стационарных дозвуковых течений идеального газа, так как в нем устранены недостатки ПМ Трусделла (см. выше краткое описание раздела 5.1), в частности отсутствует требование баротропности. Также, в отличие от ПМ Трусделла, в условия ДПМД входят только *первые* производные компонент скорости (Q -параметр).

Основная идея предложенного доказательства была разработана и впервые применена соискателем в [31] для безвихревых течений газа. ДПМД опубликован

в [12] и получен лично соискателем, что подтверждается соавтором в статье¹. Соавтор соискателя в статье [12] выполнил расчеты течений и провел их верификацию с помощью следствия ДПМД.

В разделе 5.12 обсуждается практическое применение ДПМД для верификации численных расчетов течений идеального газа. Выполнение принципа максимума еще не означает правильности решения, но его нарушение позволяет «отфильтровать» решение как неверное. В разделе приведены примеры использования ДПМД другими авторами (не соискателем). Эти авторы подвергали свои расчеты дополнительной верификации путем проверки выполнения следствия ДПМД. В ряде случаев в первоначальных расчетах наблюдались нарушения следствия ДПМД, а потому приходилось увеличивать число итераций и модифицировать и сгущать расчетную сетку в некоторых областях течения. В итоге удавалось получать решения, в которых следствие ДПМД оказывалось выполненным.

В разделе 5.13 реализована идея усовершенствовать с использованием преобразования Мунка – Прима² классический принцип максимума Трусделла (верный для любых значений местного числа Маха) так, чтобы исключить требование баротропности. В итоге получен принцип максимума, в котором отсутствуют ограничение на значение местного числа Маха и требование баротропности. Формулировка нового ПМ совпадает с формулировкой ПМ Трусделла, если только в последней удалить требование баротропности и заменить Q на $\tilde{Q} = 0.5 \{ (\text{rot}(m\mathbf{V}))^2 - (\nabla(mu))^2 - (\nabla(mv))^2 - (\nabla(mw))^2 \}$, где $m = (\rho\rho^{-k})^{-1/(2k)}$. Полученный принцип максимума назван *небаротропным ПМ Трусделла*. В этом ПМ, как и в классическом (баротропном) ПМ Трусделла, остался недостаток – исключенность из рассмотрения случаев $\tilde{Q} \leq 0, (\mathbf{V} \cdot \nabla) \text{div} \mathbf{V} \leq 0$ и $\tilde{Q} \geq 0, (\mathbf{V} \cdot \nabla) \text{div} \mathbf{V} \geq 0$. Этот недостаток удалось устранить в следующем разделе. Поэтому небаротропный ПМ Трусделла представляет собой промежуточный результат. Он принадлежит соискателю и опубликован в [32], где соавтор показал,

¹ Anikin V.A., Vyshinsky V.V., Pashkov O.A., Streltsov E.V. Using the maximum pressure principle for verification of calculation of stationary subsonic flow // Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering. 2019. № 6 (129). P. 4–16.

² Munk M., Prim R. On the multiplicity of steady gas flows having the same streamline pattern // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. 1947. V. 33. P. 137–141.

что в случае строгих неравенств $Q < 0$ или $Q > 0$ в точке экстремума эти неравенства будут иметь место и для \tilde{Q} .

В разделе 5.14 получен ПМ для небаротропных течений, у которого отсутствует ограничение на значения местного числа Маха в рассматриваемой области. При доказательстве использовались только первые два уравнения системы (6), то есть рассматривался идеальный газ, который может быть несовершенным (уравнение состояния может отличаться от уравнения Менделеева – Клапейрона). В следующей формулировке этого принципа максимума требования к гладкости опущены.

Если давление не постоянно в ограниченной области течения G и во всех точках G выполняется 1) $2Q - (\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V} \leq 0$, то давление достигает минимума на \bar{G} на границе и только на границе области G ; 2) $2Q - (\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V} \geq 0$, то давление достигает максимума на \bar{G} на границе и только на границе области G ; 3) $2Q - (\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V} = 0$, то давление достигает минимума и максимума на \bar{G} на границе и только на границе области G .

Новый ПМ предложено назвать *общим* принципом максимума давления (ОПМД), потому что в нем отсутствуют требование баротропности и ограничение на значения местных чисел Маха и потому что он верен для течений невязкого газа с произвольным уравнением состояния (не только с уравнением Менделеева – Клапейрона). Область применения ОПМД шире, чем у ДПМД (раздел 5.11). Однако в его условия входят вторые производные. ОПМД был опубликован в [33].

В разделе 5.15 показано, что для верификации расчетов течений идеального газа при использовании ОПМД в некоторых частных случаях можно обойтись без вычисления вторых производных компонент скорости (без вычисления $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V}$).

В разделе 5.16 рассматривается практически важный класс стационарных течений идеального газа с плоскостью симметрии. Течения с плоскостью симметрии возникают, когда скорость невозмущенного набегающего потока лежит в плоскости симметрии обтекаемого тела. В частности, плоскость симметрии течения имеется при обтекании тела вращения под любыми углами атаки и скольжения. Оказывается, что для точек минимума давления, расположенных на плоскости симметрии, имеет место утверждение относительно значений Q -параметра, верное без ограничения на значения местных чисел Маха, и с меньшим количеством условий, чем в ОПМД.

Независимо от того, является ли внутренняя точка A стационарного течения, скорость в которой отлична от нуля, и которая лежит на плоскости симметрии течения, точкой локального экстремума давления по пространству, если только A есть точка локального экстремума давления по плоскости симметрии, то $Q(A) \leq 0$.

Для дозвуковых течений предложен более жесткий «фильтр», чем проверка следствия ДПМД. *Если во внутренней точке стационарного дозвукового течения, скорость в которой отлична от нуля и которая расположена на плоскости симметрии течения, достигается локальный минимум давления по пространству, то значение Q -параметра в этой точке равно нулю.* Результаты раздела были получены в [1, 2].

В разделе 5.17 приводятся рекомендации по применению полученных в главе принципов максимума, а также рекомендации по выбору ПМ в различных ситуациях.

В разделе 5.18 (заключение к главе 5), в частности, отмечается, что (как и ожидалось) обнаруженные ПМ для осесимметричных течений и для течений с плоскостью симметрии имеют более обзримый вид и содержат в своих формулировках меньше условий, чем ПМ в общем пространственном случае.

В **заключении** к диссертации делается вывод, что цель диссертации достигнута благодаря решению всех задач, поставленных в диссертации. Перечисляются основные результаты (см. выше перечень «Научная новизна»). Отмечается, что три положения, выносимые на защиту:

1. строгое доказательство совпадения в общем пространственном случае в течении за отошедшей УВ лидирующей линии тока и линии торможения (решена задача Дородницына);

2. существование в общем пространственном случае скорости Фридмана в вихревом течении любой однородной жидкости;

3. дозвуковой принцип максимума давления, в условия которого входят только первые производные компонент скорости (Q -параметр), а требование баротропности отсутствует,

представляют собой решения проблем, стоявших перед теоретической аэрогидромеханикой в течение многих десятилетий. При этом еще одно положение, выносимое на защиту (три неизвестных ранее интегральных инварианта), не было решением какой-либо известной проблемы. Дело в том, что все три неизвестных ранее интегральных инварианта есть интегралы по замкнутым

(в течении за отошедшей УВ) линиям вектора $\boldsymbol{\Omega} = \text{rot } \mathbf{V}$ и линиям вектора $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla \sigma$, где $\sigma = p\rho^{-k}$ – энтропийная функция. А сам факт замкнутости этих линий ранее был неизвестен и обнаружен при решении одной из задач диссертационной работы.

Кроме основных результатов в заключении перечислены некоторые менее значимые результаты диссертации (формулировки см. выше в описании разделов 2.1, 2.5, 2.6, 5.3, 5.10 и 5.16), которые могут быть полезны для качественного анализа течений, для верификации расчетов и для дальнейших исследований.

Наконец, в заключении указывается, что если рассматривать полученные в диссертации принципы максимума давления как средство верификации расчетов, то дальнейшие усилия исследователей должны быть направлены на получение такого принципа максимума для сверхзвуковых течений, в условия которого входят только первые производные компонент скорости.

В **приложении А** приведено подробное описание примеров использования в вычислительной аэрогидромеханике положений 1, 5 и 9, выносимых на защиту. Краткое описание этих примеров содержится в начале автореферата в разделе «Практическая значимость».

Статьи соискателя по теме диссертации, опубликованные в изданиях из списка ВАК РФ

1. Сизых Г.Б. О значении Q -параметра в точке минимума давления на плоскости симметрии небаротропного течения // ПММ. 2022. Т. 86, Вып. 6. С. 917–925.
2. Сизых Г.Б. Угол примыкания звуковой линии к обтекаемой поверхности // ПММ. 2021. Т. 85, Вып. 6. С. 734–741.
3. Сизых Г.Б. Интегральный инвариант течений идеального газа за отошедшим скачком уплотнения // ПММ. 2021. Т. 85, Вып. 6. С. 742–747.
4. Сизых Г.Б. Система ортогональных криволинейных координат на изоэнтропийной поверхности за отошедшим скачком уплотнения // ПММ. 2020. Т. 84, Вып. 3. С. 304–310.
5. Сизых Г.Б. Значение энтропии на поверхности несимметричной выпуклой головной части при сверхзвуковом обтекании // ПММ. 2019. Т. 83, Вып. 3. С. 377–383.
6. Golubkin V.N., Sizykh G.B. On the vorticity behind 3-D detached bow shock wave // Advances in Aerodynamics (Сингапур, Q2). 2019. V. 1, No. 15. P. 1–6.

7. Левин В.А., Марков В.В., Сизых Г.Б. О завихренности на поверхности осесимметричного тела за отошедшим скачком уплотнения // Доклады Академии наук. 2018. Т. 483, № 6. С. 625–627.
8. Сизых Г.Б. Метод добавления завихренности // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2016. № 3. С. 26–31.
9. Марков В.В., Сизых Г.Б. Эволюция завихренности в жидкости и газе // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2015. № 2. С. 8–15.
10. Голубкин В.Н., Сизых Г.Б. О некоторых общих свойствах плоскопараллельных течений вязкой жидкости // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1987. № 3. С. 176–178.
11. Голубкин В.Н., Марков В.В., Сизых Г.Б. Интегральный инвариант уравнений движения вязкого газа // ПММ. 2015. Т. 79, Вып. 6. С. 808–816.
12. Вышинский В.В., Сизых Г.Б. О верификации расчетов стационарных дозвуковых течений и о форме представления результатов // Математическое моделирование (ИПМ им. М. В. Келдыша). 2018. Т. 30, № 6. С. 21–38.
13. Голубкин В.Н., Сизых Г.Б. Обобщение инварианта Крокко для 3D течений газа за отошедшим головным скачком // Известия вузов. Математика (Казанский университет). 2019. № 12. С. 52–56.
14. Сизых Г.Б. Новый лагранжев взгляд на эволюцию завихренности в двухмерных течениях жидкости и газа // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2022. (Саратовский университет). Т. 30, Вып. 1. С. 30–36.
15. Марков В. В., Сизых Г. Б. Критерий существования решения уравнений движения идеального газа для заданной винтовой скорости // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. (Саратовский университет). 2020. Т.28, вып. 6. С. 643-652.
16. Беспорточный А.И., Бурмистров А.Н., Сизых Г.Б. Вариант теоремы Хопфа // Труды МФТИ. 2016. Т. 8, № 1. С. 115–122.
17. Сизых Г.Б. Решение задачи Дородницына // Труды МФТИ. 2022. Т. 14, № 4. С. 95–107.
18. Голубкин В.Н., Сизых Г.Б. О влиянии неоднородности сверхзвукового набегающего потока на течение в окрестности передней критической точки // Учёные записки ЦАГИ. 2020. Т. 51, № 4. С. 26–35.
19. Сизых Г.Б. Эволюция завихренности в закрученных осесимметричных течениях вязкой несжимаемой жидкости // Учёные записки ЦАГИ. 2015. Т. 46, № 3. С. 14–20.

20. Сизых Г.Б. Решение задачи Дородницына – Ладыженского // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2022. Т. 26, № 4. С. 764–776.
21. Сизых Г.Б. О линии торможения за отошедшим скачком уплотнения в плоских течениях // Труды МФТИ. 2022. Т. 14, № 4. С. 84–94.
22. Сизых Г.Б. К вопросу об эволюции завихренности в жидкости и газе // Труды МФТИ. 2022. Т. 14, № 1. С. 27–34.
23. Sizykh G.B. Closed vortex lines in fluid and gas // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2019. V. 23, No. 3. P. 407–416.
24. Сизых Г.Б. О верификации численных расчетов вихревых течений методом проверки сохранения циркуляции // Труды МФТИ. 2016. Т. 8, № 2. С. 153–159.
25. Сизых Г.Б. О коллинеарности завихренности и скорости за отошедшим скачком уплотнения // Труды МФТИ. 2021. Т. 13, № 3. С. 144–147.
26. Сизых Г.Б. Второе интегральное обобщение инварианта Крокко для 3D-течений за отошедшим головным скачком // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2021. Т. 25, № 3. С. 588–595.
27. Голубкин В.Н., Сизых Г.Б. О некоторых свойствах газовых течений с осевой симметрией // Труды МФТИ. 2017. Т. 9, № 1. С. 64–70.
28. Сизых Г.Б. Признак наличия точки торможения в плоском безвихревом течении идеального газа // Труды МФТИ. 2015. Т. 7, № 2 (26). С. 108–112.
29. Голубкин В.Н., Сизых Г.Б. Экстремальные свойства давления в плоских дозвуковых течениях // Труды МФТИ. 2016. Т. 8, № 4. С. 149–154.
30. Голубкин В.Н., Сизых Г.Б., Чернов С.В. Экстремальные свойства давления в осесимметричных вихревых течениях газа // Учёные записки ЦАГИ. 2018. Т. 49, № 5. С. 26–33.
31. Сизых Г.Б. Дозвуковой принцип максимума для неизоэнтропийных течений // Научный вестник МГТУ ГА. 2017. Т. 20, № 2. С. 74–82.
32. Марков В.В., Сизых Г.Б. Небаротропный вариант принципа максимума Трусделла // Труды МФТИ. 2023. Т. 15, № 1. С. 33–40.
33. Сизых Г.Б. Общий принцип максимума давления в стационарных течениях невязкого газа // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2022. Т. 26, № 3. С. 544–555.