

УДК 519.624.2

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ПРОИЗВОДСТВА УЗЛОВ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ НА ОСНОВЕ НАИЛУЧШЕЙ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Будкина Е.М.* , Кузнецов Е.Б.**

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия*

** e-mail: emb0909@rambler.ru*

*** e-mail: kuznetsov@mai.ru*

Возникающее в технологическом процессе производства узлов летательных аппаратов (ЛА) явление ползучести материала в первом приближении может быть смоделировано системой дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ). Основой такой математической модели является краевая задача для ДАУ. Показано, что параметризация краевой задачи для сингулярно-возмущенных дифференциально-алгебраических уравнений, моделирующих технологический процесс производства изделий авиационной и ракетно-космической техники при помощи, например, прокатки, выдавливания, вытяжки и т.д., значительно улучшает вычислительный алгоритм метода пристрелки, что позволяет более эффективно решать задачи отмеченного типа.

Ключевые слова: ползучесть материала, дифференциально-алгебраические уравнения, метод пристрелки, наилучшая параметризация, наилучший параметр, продолжение решения.

Введение

В технологическом процессе производства узлов ЛА часто встречается явление ползучести, ему подвержено большинство конструктивных элементов, особенно тех, которые находятся при высоких температурах и нагрузках. Ползучесть следует учитывать и при эксплуатации оборудования. Так, температура газа в газотурбинном двигателе может достигать 1300 °С, и основная причина выхода двигателя из строя заключается в разрушении, вследствие ползучести, рабочих лопаток турбины. Кроме того, явление ползучести следует учитывать при

нагреве обшивки летательного аппарата во время входа с высокой скоростью в плотные слои атмосферы.

Среди математических моделей, описывающих различные технологические процессы в машиностроении, ракетно-космической технике и авиации, есть модели, которые представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и систему нелинейных алгебраических или трансцендентных уравнений [1–6], т. е. систему ДАУ. Такие задачи часто возникают в прикладной

математике и механике. Это задачи гидродинамики, описываемые системами ДАУ, содержащими малый параметр (коэффициент вязкости) [7]. Задачи такого типа описывают явление ползучести. Процесс ползучести материала в первом приближении может быть промоделирован системой ДАУ [8], рассмотренной в данной статье.

Основными методами решения краевой задачи для таких систем являются методы коллокаций [1] и методы пристрелки [2]. В методе пристрелки краевая задача сводится к некоторой начальной задаче, однако он применим только в случае когда исходная задача является корректной [3]. Для регуляризации этой задачи предполагается применить наилучшую параметризацию [9].

Рассмотрим краевую задачу для системы дифференциально-алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= f(t, y(t), z(t)), \\ G(t, y(t), z(t)) &= 0, \quad t \in [t_0, T], \\ y(t) : R^1 &\mapsto R^n, \quad z(t) : R^1 \mapsto R^m \end{aligned} \quad (1)$$

с граничными условиями

$$b(y(t_0), y(T), z(t_0), z(T)) = 0, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} f : R^1 \times R^n \times R^m &\mapsto R^n; \\ G : R^1 \times R^n \times R^m &\mapsto R^m; \\ b : R^{2n+2m} &\mapsto R^n. \end{aligned}$$

Система (1) состоит из обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t), z(t))$$

и недифференциальной составляющей G .

Граничные и начальные условия должны удовлетворять условиям согласования, т. е.

$$G(t_0, y(t_0), z(t_0)) = 0; \quad G(T, y(T), z(T)) = 0.$$

В дальнейшем мы предполагаем, что функции f, G, b при $t \in [t_0, T]$ удовлетворяют условиям, которые гарантируют существование решения задачи (1)–(2).

Параметризация задачи

Предположим, что y, z и t являются функциями наилучшего аргумента $\lambda : y = y(\lambda), z = z(\lambda),$

$t = t(\lambda)$ [10]. В этом случае задача (1)–(2) может быть преобразована к виду

$$\begin{aligned} (y_i - y_{i*}) - f_i(t, y, z)(t - t_*) &= 0, \quad i = \overline{1, n}, \\ G_j(t, y, z) &= 0, \quad j = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$(t - t_*)^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - y_{i*})^2 + \sum_{j=1}^m (z_j - z_{j*})^2 - \Delta \lambda^2 = 0,$$

$$b(y(t_0), y(T), z(t_0), z(T)) = 0. \quad (4)$$

Здесь применено конечно-разностное представление производных.

Параметризация метода пристрелки

В методе пристрелки задача состоит в преобразовании краевой задачи (3)–(4) к начальной задаче для системы (3) с начальными условиями

$$\begin{aligned} y_i(t_0) &= p_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \\ z_j(t_0) &= p_{n+j}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (5)$$

Компоненты вектора $p = (p_1, p_2, \dots, p_{n+m})^T$ должны быть выбраны так, чтобы решение задачи (3), (5) удовлетворяло условию (4) в правой конечной точке интервала $[t_0, T]$. Очевидно, что в данном случае решение начальной задачи зависит от p , т. е.

$$y = y(\lambda, p), \quad z = z(\lambda, p), \quad t = t(\lambda, p). \quad (6)$$

Кроме того, функции (6) должны удовлетворять условию

$$R = b(y(t_0, p), y(T, p), z(t_0, p), z(T, p)) = 0. \quad (7)$$

Вектор p , удовлетворяющий уравнению (7), может быть определен, например, итерационным методом Ньютона:

$$p^{s+1} = p^s - \left[\frac{\partial R}{\partial p}(p^s) \right]^{-1} R(p^s), \quad p^0 = p_0. \quad (8)$$

Здесь p^s — значение вектора p на s -й итерации; $\partial R / \partial p$ — матрица Якоби системы (7). Некоторые рекомендации к расчету элементов этой матрицы приведены в [11].

Сходимость итерационного процесса (8) зависит от удачного выбора начального приближения, что часто очень сложно сделать. Универсальных рекомендаций для выбора разумных начальных приближений нет, но существуют методы, применимые к решению широкого класса уравнений [12].

Чтобы преодолеть эту трудность, в [13] было предложено ввести в систему (7) параметр $\mu \in [0,1]$ так, что для $\mu = 0$ решение будет известно, а решение исходной системы может быть получено при $\mu = 1$. Например, это может быть сделано следующим образом:

$$\Phi_l(p, \mu) = R_l(p) - (1 - \mu)R_l(p_*) = 0, \quad (9)$$

$$l = 1, 2, \dots, n, \quad \mu \in [0, 1],$$

где p_* — некоторое решение системы (9) при $\mu = 0$.

Система (9) может быть решена дискретным методом продолжения Лаэя [14]. Интервал изменения μ разбивается на k участков:

$$0 = \mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_k = 1. \quad (10)$$

Для каждого μ_r ($r = 1, 2, \dots, k$) используется итерационный метод Ньютона:

$$p_r^{s+1} = p_r^s - \left[\frac{\partial R}{\partial p}(p_r^s, \mu_r) \right]^{-1} R(p_r^s, \mu_r),$$

$$s = 1, 2, \dots, r_k - 1, \quad (11)$$

$$p_{r+1}^0 = p_r^{r_k}.$$

Обратим внимание, что кривая множества решений системы (9) может содержать предельные точки, в которых матрица Якоби становится вырожденной и итерационный метод Ньютона не сходится. Чтобы избежать этих неприятностей, решение должно быть продолжено с учетом наилучшего параметра ν [9]. Наилучший параметр ν — это длина дуги кривой множества решений системы (9).

Для решения системы (9) применяется дискретный метод продолжения, основанный на наилучшей параметризации [9]. Кривая множества решений этой системы разбивается на h участков: $0 = \nu_0 < \nu_1 < \dots < \nu_h = H$. Решение строится вдоль этих значений по наилучшему параметру ν . Известные в (9) являются функциями от ν и имеют вид $p_r = p(\nu_r)$ и $\mu_r = \mu(\nu_r)$ в r -й точке сетки. Значения этих неизвестных в $(r + 1)$ -й точке сетки могут быть найдены из следующей системы уравнений:

$$\Phi_l(p, \mu) = R_l(p) - (1 - \mu)R_l(p_*) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, n;$$

$$\Phi_{n+1}(p, \mu) = \sum_{l=1}^n (p_l - p_{lr})^2 + (\mu - \mu_r)^2 - \Delta \nu_r^2 = 0. \quad (12)$$

Здесь $\Delta \nu = \nu_{r+1} - \nu_r$; $p_{lr} = p_l(\nu_r)$, $r = 1, 2, \dots, h$.

На каждом шаге вычисления по ν система (12) может быть решена с помощью итерационного метода, например методом Ньютона. Теперь никаких трудностей из-за предельных точек кривых множества решений не возникает. Рекомендации по выбору начального приближения для итерационного процесса приведены в [15].

Длина кривой решений системы (9) неизвестна априори. Следовательно, для решения системы (12) на последнем шаге h параметр μ полагается равным единице, в то время как компоненты вектора p и приращение $\Delta \nu_h$ являются неизвестными системы.

Численные результаты

Рассмотрим краевую задачу для сингулярно-возмущенных дифференциально-алгебраических уравнений:

$$y_1' = y_2;$$

$$\epsilon y_2' = y_1 - z^2;$$

$$z - y_1^2 = 0;$$

$$y_1(0) + y_2(0) = 0;$$

$$y_1(1) = 1/2. \quad (13)$$

Запишем задачу (13) в дискретной форме (3)–(4):

$$(y_1 - y_{1*}) - y_2(t - t_*) = 0;$$

$$\epsilon(y_2 - y_{2*}) - (y_1 - z^2)(t - t_*) = 0;$$

$$z - y_1^2 = 0;$$

$$(t - t_*)^2 + (y_1 - y_{1*})^2 + (y_2 - y_{2*})^2 + (z - z_*)^2 - \Delta \lambda^2 = 0;$$

$$y_1(0) + y_2(0) = 0,$$

$$y_1(1) = 1/2. \quad (14)$$

Здесь символом «*» обозначено решение, полученное на предыдущем шаге. Используя метод пристрелки, мы решаем краевую задачу (14), преобразованную к начальной задаче с начальными условиями:

$$y_1(0) = p, \quad y_2(0) = -p, \quad z(0) = p^2, \quad t(0) = 0. \quad (15)$$

Граничные условия при $t = 1$ равны:

$$y_1(1) = 1/2, \quad z(1) = 1/4, \quad t(1) = 1.$$

Система (12) может быть представлена следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi_1(p, \mu) &= R(p) - (1 - \mu)R(p_*) = 0, \\ \Phi_2(p, \mu) &= (p - p_r)^2 + (\mu - \mu_r)^2 - \Delta v_r^2 = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Обозначим через $y(t, p)$ решение начальной задачи (14)–(15). На рис. 1,а показан график $y(1, p)$ для $\varepsilon = 0,1$. Из графика видно, что имеется два решения для краевой задачи (14)–(15), где p_1^* и p_2^* — значения параметра p , для которого выполнены граничные условия

$$\begin{aligned} y_1(0) + y_2(0) &= 0, \\ y_1(1) &= 1/2. \end{aligned} \quad (17)$$

Пусть $p_* = p_0$ — произвольное начальное значение. Схема, основанная на наилучшей парамет-

ризации, дает возможность получить оба значения p_1^* и p_2^* , выбрав соответствующее направление движения по кривой (рис. 2). Если расчет μ выполнять в соответствии с правилом (10), то при перемещении по кривой $y(1, p)$ случаются перескоки значений с одной ветви кривой решения на другую, в результате чего значения p_1^* и p_2^* не достигаются. На рис. 2 изображен график функции $\mu = \mu(p)$, из которого видно, что параметр μ меняется немонотонно. В настоящей работе вычисление параметра μ выполняется по формулам (16). Благодаря этому происходит последовательное перемещение вдоль кривой $y(1, p)$ от произвольного начального

значения p_0 к любому из корней p_1^* и p_2^* . На рис. 1,б показаны графики решения задачи (13) для $\varepsilon = 0,1$.

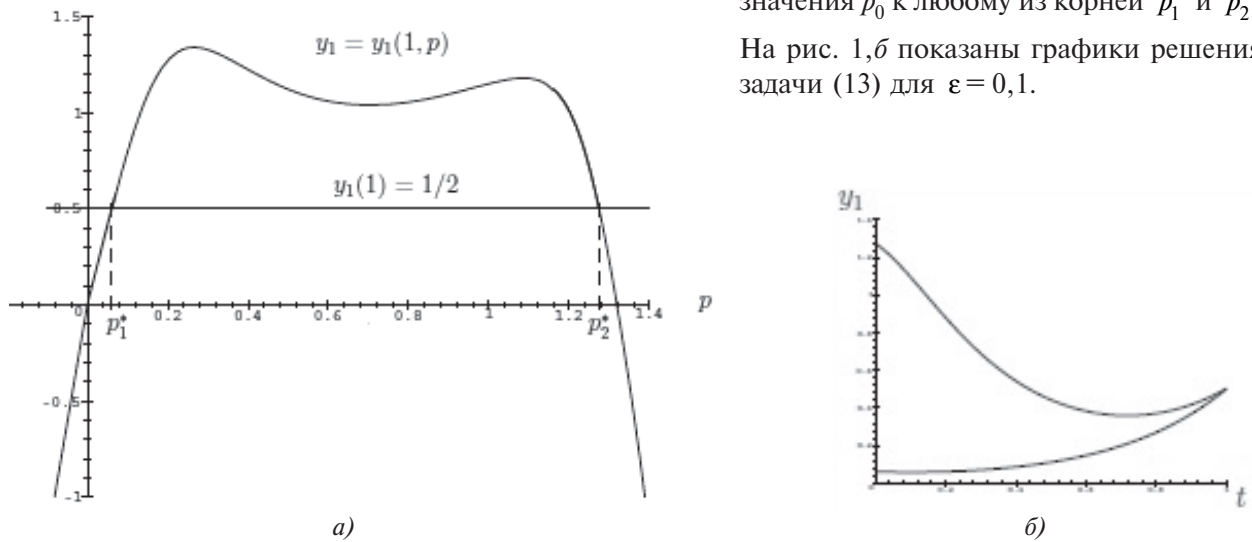


Рис. 1. Результат вычисления при $\varepsilon = 0,1$: а — графики функций $y_1 = y_1(1, p)$, $y_1(1) = 1/2$; б — решения $y_1 = y_1(t)$, $t \in [0,1]$

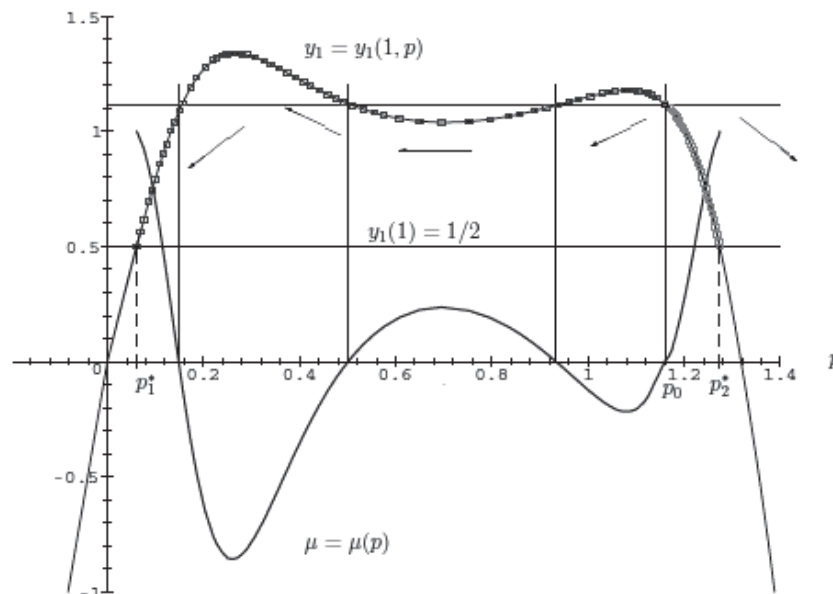


Рис. 2. Графики функций $y_1 = y_1(1, p)$, $y_1(1) = 1/2$, $\mu = \mu(p)$, $\varepsilon = 0,1$

В настоящей работе были получены решения задачи (13) с параметром ε , значения которого изменялись от 0.1 до 0.03 с шагом 0.01. На рис. 3–6 показаны решения задачи (13) при различных значениях ε .

Выводы

Современное авиастроение при изготовлении деталей самолетов прибегает к технологиям фор-

мовки крупногабаритных, монолитных конструктивных элементов. В технологических процессах (прокатка, штамповка, вытяжка и т.д.) перспективно применение формоизменения в широком диапазоне температур. При этом технологические режимы сопровождаются появлением локальных областей пластических течений, которые отрицательно сказываются на прочностных и деформационных свойствах изготавливаемых изделий. Поэтому ма-

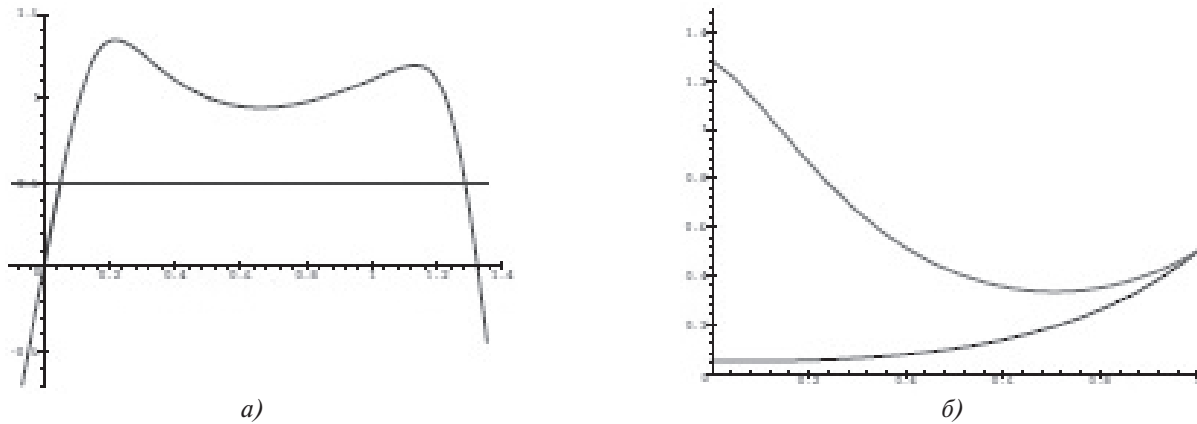


Рис. 3. Результат вычисления при $\varepsilon = 0,09$: а — графики функций $y_1 = y_1(l, p), y_1(1) = 1/2$; б — решения $y_1 = y_1(t), t \in [0, 1]$

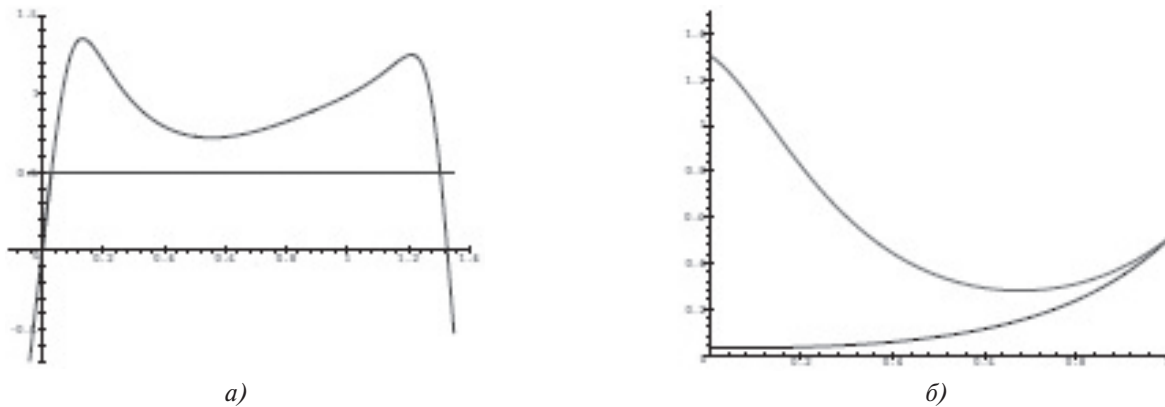


Рис. 4. Результат вычисления при $\varepsilon = 0,07$: а — графики функций $y_1 = y_1(l, p), y_1(1) = 1/2$; б — решения $y_1 = y_1(t), t \in [0, 1]$

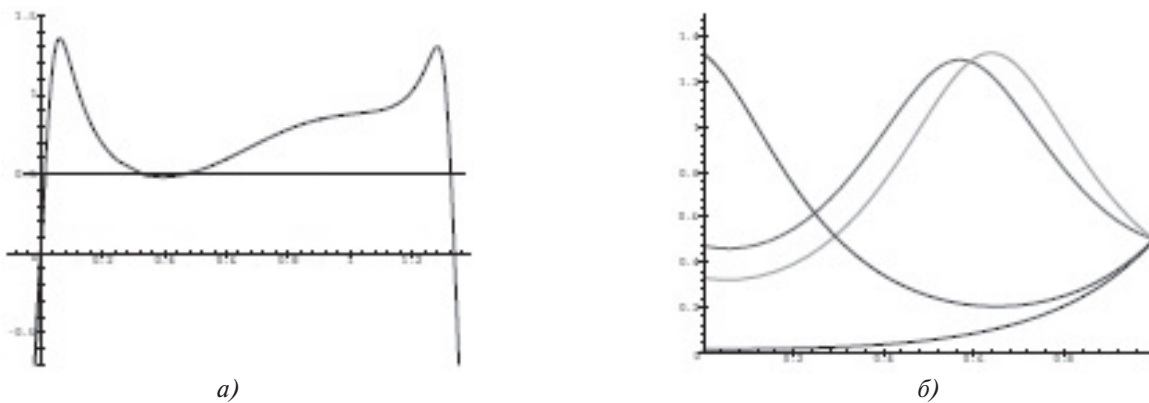


Рис. 5. Результат вычисления при $\varepsilon = 0,05$: а — графики функций $y_1 = y_1(l, p), y_1(1) = 1/2$; б — решения $y_1 = y_1(t), t \in [0, 1]$

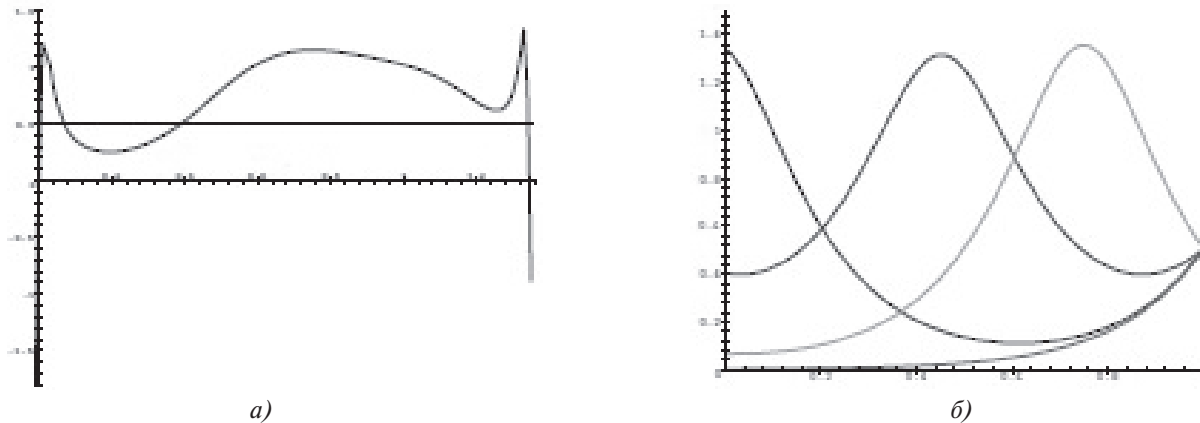


Рис. 6. Результат вычисления при $\varepsilon = 0,03$: а — графики функций $y_1 = y_1(l, p)$, $y_1(l) = 1/2$; б — решения $y_1 = y_1(t)$, $t \in [0, 1]$

тематическая модель наряду с ползучестью должна учитывать возможность возникновения и развития пластических течений. Причем в интенсивных технологических процессах формоизменения нельзя ограничиться только малыми деформациями, поэтому адекватная математическая модель должна базироваться на теории больших упруговязкопластических деформациях материалов, обладающих как упругими, так пластическими и вязкими свойствами. В первом приближении такая математическая модель может описываться краевой задачей для системы ДАУ. Поэтому результаты, полученные в статье, являются актуальными. Заметим, что в дальнейших исследованиях предполагается рассмотреть более сложную математическую модель.

Существует ряд программных математических пакетов, которые позволяют численно решать дифференциально-алгебраические уравнения: Netlib, Nag, Matlab, Octave, Simpack, Adams, Dymola, Maple, Mathematica [1]. Однако большинство из них корректно решают только начальную задачу, а для краевой задачи находится только одно решение. Нахождение всех решений требует проведения дополнительного анализа задачи. Численные исследования настоящей работы показывают, что предложенная здесь параметризация краевой задачи для нелинейных ДАУ значительно улучшает вычислительный алгоритм метода стрельбы и позволяет найти все решения этой задачи. Таким образом, рассмотренный численный метод позволяет решать прикладные задачи, связанные с технологиями машиностроения, ракетно-космической техники и авиации.

*Работа выполнена при финансовой поддержке
Российского Фонда Фундаментальных
Исследований, проект № 13-08-00473.*

Библиографический список

1. Kunkel P., Merhmann V. Differential-Algebraic Equations. Analysis and Numerical Solution. — European Mathematical Society, 2006. — 192 p.
2. Marz R. On difference and shooting methods for boundary value problems in differential- algebraic equations // ZAMM Journal of applied mathematics and mechanics: Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Mechanik, 1984, vol. 64, no. 11, pp. 463-474.
3. Ascher U.M., Mattheij R., Russel R. Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations. — SIAM Publications, Philadelphia, PA, 2nd edition, 1995. — 595 p.
4. Griepentrog E., Marz R. Differential — algebraic equations and their numerical treatment. — Leipzig: Teubner, 1986. — 220 p.
5. Ascher Uri M., Petzold Linda R. Computer methods for ordinary differential equations and differential — algebraic equations. — SIAM Publications, Philadelphia, 1998. — 314 p.
6. Будкина Е.М., Кузнецов Е.Б. Решение краевых задач для дифференциально-алгебраических уравнений // Материалы XIX международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам. — М.: Изд-во МАИ. 2015. С. 44-46.
7. Хайпер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические уравнения. — М.: Мир, 1999. — 685 с.
8. Кузнецов Е.Б., Леонов С.С. Чистый изгиб балки из разномодульного материала в условиях ползучести // Вестник Южно-Уральского государственного университета. 2013. Т. 6. № 4. С. 26-38.
9. Красников С.Д., Кузнецов Е.Б. Параметризация численного решения краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2005. Т. 45. №12. С. 2148-2158.
10. Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметриза-

- ция в прикладной математике и механике. — М.: Эдиториал УРСС, 1999. — 224 с.
11. Бахвалов Н.С. Численные методы. — М.: Наука, 1975. — 632 с.
 12. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1984. — 752 с.
 13. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. — Киев: Наукова Думка, 1986. — 223 с.
 14. Lahaie M.E. Une metode de resolution d'une categorie d'equations transcendentes // Compter Rendus hebdomataires des seances de L' Academie des sciences, 1934, vol. 198, no. 21, pp. 1840-1842.
 15. Кузнецов Е.Б. Наилучшая параметризация при построении кривых // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. Т. 44. №9. С. 1540-1551.

MODELING OF TECHNOLOGICAL PROCESS FOR AIRCRAFT STRUCTURAL COMPONENTS MANUFACTURING BASED ON THE BEST PARAMETRIZATION AND BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR NONLINEAR DIFFERENTIAL-ALGEBRAIC EQUATIONS

Budkina E.M. *, Kuznetsov E.B.**

*Moscow Aviation Institute (National Research University),
MAI, 4, Volokolamskoe shosse, Moscow, A-80, GSP-3, 125993, Russia*

**e-mail: emb0909@rambler.ru*

***e-mail: kuznetsov@mai.ru*

Abstract

Among mathematical models describing various processes associated with manufacturing engineering, aerospace technology and aviation, there are models representing a system of ordinary differential equations and a system of nonlinear algebraic or transcendental equations, i.e. a system of differential-algebraic equations (DAE). Such problems often arise in applied mathematics and mechanics. Some hydrodynamic processes described by the DAE systems contain a small parameter (viscosity). Problems of this type describe the phenomenon of creep. The process of creep of the material in the first approximation can be modeled by DAE systems discussed in this paper.

The basic methods of solving boundary value problems for such systems are methods of collocation and shooting methods. With shooting method, a boundary value problem is reduced to some initial value problem. However, this method is applicable only in the case when the original problem is correct. We suggest to apply the best parameterization for regularization of this problem.

The paper considers the system of nonlinear differential-algebraic equations. It is shown that the best

parameterization of the boundary value problem for a singularly perturbed differential-algebraic equations significantly improves the computational algorithm of the shooting method.

The numerical solution of the problem was obtained using the method of solution continuation with respect to parameter and the best parameterization. The boundary value problem is reduced to an initial value problem for differential-algebraic equations. We selected shooting method as a numerical solution.

By using these methods of solution all solutions of the boundary value problem were obtained regardless of the choice of initial values.

According to the results, following conclusions were made:

— the method of solution continuation with respect to parameter and the best parameterization can be used for solving singularly perturbed boundary value differential-algebraic problems;

— the method of solution continuation with respect to parameter and the best parameterization allows to find all solutions of the boundary value problem for nonlinear differential-algebraic equations.

Numerical studies of this work show that the parameterization of the boundary value problem for nonlinear differential-algebraic equations, proposed in this paper significantly improves the computational algorithm of the shooting method and allows to find all solutions of the boundary value problem. Thus, in this paper we propose a numerical method, which allows solve the applied problems related to technology of machine building, rocket and space technology, aviation.

Keywords: creep of materials, differential-algebraic equations, shooting method, the best parameterization, the best parameter, solution continuation.

References

1. Kunkel P., Merhmann V. *Differential-Algebraic Equations. Analysis and Numerical Solution*, European Mathematical Society, 2006, 192 p.
2. Marz R. On difference and shooting methods for boundary value problems in differential- algebraic equations, *Journal of applied mathematics and mechanics (ZAMM)*, 1984, vol. 64, no. 11, pp. 463-474.
3. Ascher U.M., Mattheij R., Russel R. *Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*, SIAM Publications, Philadelphia, PA, 2nd edition, 1995, 595 p.
4. Griepentrog E., Marz R. *Differential – algebraic equations and their numerical treatment*, Leipzig, Teubner, 1986, 220 p.
5. Ascher Uri M., Petzold Linda R. *Computer methods for ordinary differential equations and differential – algebraic equations*, SIAM Publications, Philadelphia, 1998, 314 p.
6. Budkina E.M., Kuznetsov E.B. *Materialy XIX megdunarodnoi konferencii po vychislitelnoi mekhanike i sovremennym prikladnym programmym sistemam*, Moscow, MAI, 2015, pp. 44-46.
7. Hairer E, Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations II Stiff and Differential-Algebraic Problems*. Berlin –Tokyo, Springer-Verlag, 1996, 614p.
8. Kuznetsov E.B., Leonov S.S. *Vestnik Yugno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta*, 2013. vol. 6, no. 4, p. 26-38.
9. Krasnikov S.D., Kuznetsov E.B. On the parametrization of numerical solutions to boundary value problems for nonlinear differential equations, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2005, vol. 45, no. 12, pp. 2066-2076.
10. Shalashilin V.I., Kuznetsov E.B. *Parametric Continuation and Optimal Parametrization in Applied Mathematics and Mechanics*. Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers, 2003. 236 p.
11. Bakhvalov N.S. *Chislennyye metody* (Numerical methods), Moscow, Nauka, 1975, 632 p.
12. Kantorovich L.V., Akimov G.P. *Functional'nyi analiz* (Functional analysis), Moscow, Nauka, 1984, 752 p.
13. Samoilenko A.M., Rondo N.I. *Chislennno-analiticheskie metody issledovaniya reshenii khraevykh zadach* (Numerical-analytical methods of investigation of solutions of boundary value problems), Naukova Dumka, 1986, 223 p.
14. Lahaye M.E. Une metode de resolution d'une categorie d'equations transcendentes, *Compter Rendus hebdomataires des seances de L' Academie des sciences*, 1934, vol. 198, no. 21, pp. 1840-1842.
15. Kuznetsov E.B. On the parametrization of numerical solutions to boundary value problems for nonlinear differential equations, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2004, vol. 44, no. 9, pp. 1462-1472.