На правах рукописи

Кожевников Александр Сергеевич

РАЗРАБОТКА СПЕКТРАЛЬНЫХ МЕТОДОВ АНАЛИЗА СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДЛЯ ЗАДАЧ ОЦЕНКИ СТОИМОСТИ АКЦИЙ ПРЕДПРИЯТИЙ АВИАЦИОННО-ПРОМЫШЛЕННОГО КОМПЛЕКСА

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2013

Работа выполнена на кафедре «Математическая кибернетика»
ФГБОУ ВПО «Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)»

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент
Рыбаков Константин Александрович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, ведущий научный сотрудник НИИ ПММ Национального исследовательского Томского государственного университета
Жарова Ирина Константиновна

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук
Румянцев Дмитрий Станиславович

Ведущая организация: Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Защита состоится 27 декабря 2013 г. в 12 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.125.04 ФГБОУ ВПО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4, Ученый совет МАИ.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского авиационного института (национального исследовательского университета).

Автореферат разослан «   » ноября 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.125.04,
кандидат физико-математических наук Н.С. Северина

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Изменение цен акций на рынке ценных бумаг носит случайный характер. Этому способствует огромное количество случайных факторов, таких как поток экономических новостей и слухов, ожидания участников рынка, государственная политика, цены на нефть, публикация статистики предприятий и другие. Поэтому при описании математических моделей динамики цен акций используют стохастические системы. В монографиях Ширяева А.Н., Халла Дж.К., Артемьева С.С. и Якунина М.А. представлены известные свойства цен акций на рынке ценных бумаг, приведены стохастические модели динамики финансовых инструментов и показатели для дискретного и непрерывного времени, преимущества их использования. Динамика цен акций может рассматриваться в различных масштабах времени (например, в масштабах дня, месяца или года), вследствие чего изменения цен акций можно разделить на диффузионные (малые случайные изменения) и скачкообразные (изменения, связанные с разрывом траектории процесса). Поэтому в настоящее время при описании изменения цен акций на рынке ценных бумаг популярны модели, описываемые стохастическими системами со скачками (Конт Р. и Танков П.) и системами с переключениями (Артемьев В.М., Бухалев В.А., Казаков И.Е., Борисов А.В.). В диссертационной работе рассматриваются стохастические системы со скачками, решение которых можно представить на основе процессов Леви с ненулевой гауссовой компонентой и компонентой, являющейся обобщенным пуассоновским процессом и описывающей разрывы в траекториях цен акций, интервалы между которыми имеют экспоненциальное распределение. Такие модели в финансовой математике принято называть диффузионно-скачкообразными моделями. О преимуществах использования таких моделей говорят исследования, проведенные Фамой Е.Ф., Френчем К.Р. и Роллом Р., Манделбротом Б.Б., Ричардсоном М. и Смитом Т.А. В работах Мертона Р.К., Коу С.Г., Рамезани С.А. и Зенга Ю. представлены примеры диффузионно-скачкообразных моделей. Для решения задач анализа стохастических систем со скачками используются различные приближенные методы: метод Монте-Карло (работы Авериной Т.А., Якунина М.А., Артемьева С.С., Синицына И.Н., Кузнецова Д.Ф., Конта Р. и Танкова П., Корна Р., Корна Е. и Кроисандта Г.), метод гауссовской аппроксимации (монография Артемьева В.М., Ивановского А.В.), методы квазимоментов (монографии Пугачева В.С., Синицына И.Н. и Федосова Е.А., Инсарова В.В., Селивохина О.С.), ортогонального разложения (монографии Пугачева В.С., Синицына И.Н., работы Синицина В.И.), сеточные методы (работы Конта Р., Танкова П. и Волчковой Е.), метод Галеркина (работы Конта Р., Ху Л., Грайбела М. и Халмэна А.), спектральные методы анализа (работы Семенова В.В., Пантелеева А.В., Рыбакова К.А., Сотсковой И.Л.).

Начиная с оригинальной работы Мертона Р.К. и до настоящего времени, в научном сообществе были изучены различные аспекты таких моделей (по данному вопросу в монографии Конта Р., Танкова П. содержится более 400 ссылок). Недавние исследования подчеркнули важность развития диффузионноскачкобразных моделей, обеспечивающих более близкие к наблюдаемым данным результаты. В существующей литературе предложено много изменений, связанных с уточнением спецификации скачкообразной компоненты, но, в основном, все изменения основываются на использовании различных распределений для описания величины скачков. Однако в монографии Артемьева В.М., Ивановского А.В., работах Авериной Т.А., Иванкиевича Р. рассматриваются стохастические системы, в которых предполагается, что моменты появления разрывов траекторий состояния системы образуют поток событий, отличный от пуассоновского. В качестве непуассоновского потока событий можно использовать эрланговский и гиперэрланговский потоки событий, что позволит включить пуассоновский поток как частный случай, учесть различную степень последействия (от полного отсутствия до жесткой функциональной связи между моментами появления скачков). При этом их использование практически не усложнит задачу идентификации параметров моделей динамики цены, так как при ее решении нужно дополнительно учесть порядок эрланговского распределения. Использование моделей динамики цены, в основе которых лежат такие стохастические системы, позволит приблизиться к более точному описанию динамики цен акций и оценке стоимости производных финансовых инструментов, зависящих от цен акций.

При решении большинства задач анализа стохастических систем со скачками в условиях «непуассоновского» потока событий нужно применять приближенные методы. Одним из методов анализа таких систем является метод Монте-Карло. Его использование приведено в работах Авериной Т.А. В ряде случаев анализ стохастических систем сводится к нахождению плотности вероятности состояния, которая удовлетворяет системе обобщенных уравнений Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) и служит достаточной характеристикой случайного процесса. В монографиях Артемьева В.М., Ивановского А.В. и Иванкиевича Р. рассматривается применение метода гауссовской аппроксимации и метода моментов к системе обобщенных уравнений ФПК для плотности вероятности состояния системы. Эти методы позволяют перейти от обобщенных уравнений ФПК к системе обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности для моментов, численное интегрирование которых может занять достаточно значительный промежуток времени, а полученное решение недостаточно полно будет описывать изменение состояния системы. Применимость данных методов ограничена сравнительно небольшой размерностью вектора состояния.

Таким образом, разработка приближенных методов анализа для стохастических моделей со скачками в условии эрланговского и гиперэрланговского потоков событий является актуальной задачей.

Целью работы является разработка приближенных методов анализа для стохастических моделей динамики цены акции со скачками, характеризующимися эрланговским распределением, описываемыми случайной смесью эрланговских распределений или характеризующимися чередованием эрланговских распределений.

Были поставлены и решены следующие задачи:

1) разработка и исследование новых моделей динамики цены акции со скачками, интервалы между которыми характеризуются эрланговским и гиперэрланговским распределениями;

2) разработка спектральных методов анализа стохастических систем со скачками в условиях эрланговского и гиперэрланговского потоков событий, а именно нахождение решения системы обобщенных уравнений ФПК для плотности вероятности в спектральной форме математического описания;

3) модификация алгоритма статистического моделирования траекторий цены акции и ее логарифма с учетом скачков, интервалы между которыми описываются эрланговским и гиперэрланговским распределениями, для проверки корректности результатов, полученных спектральными методами;

4) разработка программного обеспечения на основе разработанных спектральных методов и алгоритма статистического моделирования;

5) решение задач анализа динамики цены акций предприятий авиационно-промышленного комплекса.

Общие методы исследования. Для решения поставленных задач использовались методы математической статистики, теория случайных процессов, теория дифференциальных уравнений, численные методы. Теоретические результаты получены на основе теории систем со случайным периодом квантования и методов их анализа, а также результатов, полученных в спектральной теории для анализа стохастических систем.

Научная новизна диссертационной работы заключается в следующем: предложены новые стохастические модели динамики цен акций, в которых используется эрланговский и гиперэрланговский потоки событий для описания моментов появления скачков, разработаны спектральные методы анализа стохастических систем со скачками в условиях эрланговского и гиперэрланговского потоков событий, а именно получены решения в спектральной форме математического описания при скачках, характеризующихся эрланговским распределением, описываемых случайной смесью эрланговских распределений, характеризующихся чередованием эрланговских распределений.

Практическая значимость диссертационной работы состоит в том, что разработано программное обеспечение для решения задач анализа динамики цены акций предприятий авиационно-промышленного комплекса с применением ЭВМ спектральным методом и методом Монте-Карло. Проведен анализ динамики цены акций компаний «Иркут» и «Объединенная авиастроительная корпорация» («ОАК») и сравнение результатов, полученных на основе предложенных и существующих моделей динамики цены. Разработанные методы и программное обеспечение могут применяться для анализа цен акций компаний, не имеющих отношения к авиационной отрасли.

Достоверность результатов обоснована тем, что методы решения задач, рассмотренных в диссертации, базируются на современных теоретических представлениях и подходах к анализу стохастических систем со скачками, описывающих изменения цен финансовых инструментов на рынке ценных бумаг. Эти представления являются общепринятыми и широко используются специалистами при исследовании различных аспектов как чисто теоретического, так и прикладного значения. Также были рассмотрены частные решения, полученные в спектральной форме математического описания и методом Монте-Карло, которые совпадают с ранее полученными результатами для стохастических систем со скачками в условиях пуассоновского потока событий. Результаты, полученные спектральным методом и методом Монте-Карло для исследуемых моделей, также свидетельствуют о корректности расчета плотности вероятности цены акции. По результатам анализа динамики цены акций авиационных компаний «Иркут» и «ОАК» можно сказать, что использование представленных в работе моделей позволяет получить более точное описание динамики цены акции.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались на 8 международных конференциях, 5 всероссийских конференциях, обсуждались на научных семинарах кафедры «Математическая кибернетика» Московского авиационного института. Исследования были поддержаны РФФИ (проект № 12-08-00892-а). Была произведена государственная регистрация программного обеспечения для статистического моделирования и анализа случайных процессов со скачками, описывающих динамику цен акций предприятий авиационной отрасли (свидетельство № 2013614748).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в статьях [1–5] в журналах, входящих в Перечень ВАК, в других изданиях [6–13], а также в трудах научных конференций [14–27]. Всего по теме диссертации опубликовано 27 работ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех разделов основной части, заключения, списка используемой литературы (157 наименований). Работа изложена на 130 страницах, содержит 106 иллюстраций.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность развития моделей динамики цены со скачками в непрерывном времени, рассматриваются приближенные методы решения задачи оценки стоимости акции, указывается область проведенных исследований, обосновывается их актуальность и научная новизна, формулируются цель работы и задачи диссертации, приводится краткое содержание работы.

В первой главе представлен обзор наиболее известных свойств цен акций и направлений развития моделей динамики цены, рассматриваются существующие модели динамики цены акции со скачками, заданными сложным пуассоновским процессом (модели Мертона, Рамезани и Зенга, Бейтса). Далее предлагаются новые модели со скачками, интервалы между которыми задаются эрланговским и гиперэрланговскими законами, что позволяет включить экспоненциальное распределение интервалов между скачками как частный случай. Динамика цены акции в моделях рассматривается относительно ее логарифма, потому что это позволяет упростить соотношения для плотности вероятности логарифма цены и сделать процесс решения задачи с помощью приближенных методов более устойчивым.

Вводятся следующие обозначения: $t \in T = [t_0, t_k]$ – момент времени на рассматриваемом интервале, t_0 – начальный момент времени, t_k – конечный момент времени, $X \in (0, +\infty)$ – цена акции, $S = \ln X \in (-\infty, +\infty)$ – логарифм цены акции, μ – ожидаемая доходность, σ – волатильность, $\nu \in (0, +\infty)$ – вариация, которая характеризует изменчивость цены акции, θ – равновесная вариация, κ – скорость возвращения к равновесной вариации, ε – волатильность вариации. Логарифм начальной цены S_0 не зависит от начальной вариации ν_0 и имеет заданное распределение (заданы плотности вероятности $\varphi_{10}(s)$ и $\varphi_{20}(\nu)$ соответственно); $W(t)$, $W_1(t)$ и $W_2(t)$ – винеровские случайные процессы, причем $W_1(t)$ и $W_2(t)$ с коэффициентом корреляции $\rho \in [-1, 1]$. Процесс $W_2(t)$ будем представлять в виде $W_2(t) = \rho W_1(t) + \sqrt{1-\rho^2} Z(t)$, где $Z(t)$ – винеровский процесс, не зависящий от $W_1(t)$; τ_i, $i = 1, 2, \ldots$, – моменты появления скачков в траектории цены акции; $\ln Y(\tau_i)$, $\ln Y_1(\tau_i)$ и $\ln Y_2(\tau_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, – независимые и одинаково распределенные случайные величины, характеризующиеся плотностями вероятности $\tilde{q}(t, y)$, $\tilde{q}_1(t, y)$ и $\tilde{q}_2(t, y)$ соответственно; $P(t)$ – простой пуассоновский процесс интенсивности λ; $J(t)$ – эрланговский или гиперэрланговский процесс с заданными параметрами; $\tilde{Q}(t)$ – марковский случайный процесс, описывающий разрывы траектории цены акции. Предполагается, что $W(t)$, $W_1(t)$, $W_2(t)$, $P(t)$ и $J(t)$ не зависят от S_0, ν_0, $\ln Y(\tau_i)$, $\ln Y_1(\tau_i)$ и $\ln Y_2(\tau_i)$; $W(t)$, $W_1(t)$, $W_2(t)$ не зависят от $\tilde{Q}(t)$, $P(t)$ и $J(t)$. Величина ξ, учитывающая влияние скачков на тренд цены акции, зависит от параметров скачкообразного процесса (интенсивностей, порядка эрланговских распределений и распределения величины скачков).

В разделе 1.3.1 рассмотрены модели со скачками, описываемыми эрланговским распределением. Динамика логарифма цены акции в модифицированной модели Мертона задается стохастическим дифференциальным уравнением:

$$dS(t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} - \xi \right) dt + \sigma dW(t) + d\tilde{Q}(t), \; S(t_0) = S_0, \tag{1}$$

а в модифицированной модели Бейтса – системой стохастических дифференциальных уравнений:

$$dS(t) = \left(\mu - \frac{\nu(t)}{2} - \xi \right) dt + \sqrt{\nu(t)} dW_1(t) + d\tilde{Q}(t), \; S(t_0) = S_0, \tag{2}$$

$$d\nu(t) = \kappa \big(\theta - \nu(t) \big) dt + \varepsilon \sqrt{\nu(t)} dW_2(t), \; \nu(t_0) = \nu_0. \tag{3}$$

Случайный процесс $\tilde{Q}(t)$, описывающий разрывы траекторий логарифма цены, представляется в виде

$$\tilde{Q}(t)=\sum_{i=1}^{J(t)}\ln Y(\tau_i),$$

где $J(t)$ формируется в результате пропуска подряд $N-1$ событий пуассоновского процесса $P(t)$ и ассоциируется с эрланговским потоком событий τ_1, τ_2, …, состоящих в том, что логарифм цены акции S получает случайные приращения $\ln Y(\tau_i)$:

$$S(\tau_i)=S(\tau_i-0)+\ln Y(\tau_i).$$

Заданное положительное число λ, натуральное число N определяют закон распределения промежутков времени $\Delta\tau_i=\tau_i-\tau_{i-1}$, $i=1,2,\ldots$ ($\tau_0=t_0$), который является эрланговским с параметрами λ и N.

Для получения соотношений для плотности вероятности $\varphi(t,s)$ логарифма цены акции S вводится случайный процесс $K(t)$ с конечным множеством состояний $\{1,2,...,N\}$, которые сменяются последовательно, начиная с 1, в соответствии с кольцевым графом состояний, интенсивность смены состояний – λ. При переходе из состояния с номером N в состояние с номером 1 случайного процесса $K(t)$ логарифм цены актива S получает случайное приращение $\ln Y(\tau_i)$, что соответствует разрыву (скачку) траектории логарифма цены $S(t)$.

Таким образом, рассматривается стохастическая система с расширенным вектором состояния, непрерывная часть которого – S, а дискретная $K\in\{1,2,...,N\}$. Тогда плотность вероятности $\varphi(t,s)$ логарифма цены акции S в модифицированной модели Мертона представляется в виде суммы:

$$\varphi(t,s)=\sum_{k=1}^{N}\varphi^{(k)}(t,s), \tag{4}$$

где функции $\varphi^{(k)}(t,s)$ представляют собой ненормированные плотности вероятности вектора состояния при фиксированном $K=k$ и удовлетворяют системе обобщенных уравнений ФПК:

$$\frac{\partial\varphi^{(1)}(t,s)}{\partial t}=\mathrm{A}\,\varphi^{(1)}(t,s)-\lambda\varphi^{(1)}(t,s)+\mathrm{H}\,\varphi^{(N)}(t,s), \tag{5}$$

$$\frac{\partial\varphi^{(k)}(t,s)}{\partial t}=\mathrm{A}\,\varphi^{(k)}(t,s)-\lambda\varphi^{(k)}(t,s)+\lambda\varphi^{(k-1)}(t,s),\quad k=2,...,N, \tag{6}$$

в которой при $k=1,2,...,N$,

$$\mathrm{A}\,\varphi^{(k)}(t,s)=-\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}-\xi\right)\frac{\partial}{\partial s}\varphi^{(k)}(t,s)+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\varphi^{(k)}(t,s), \tag{7}$$

$$\mathrm{H}\,\varphi^{(N)}(t,s)=\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{q}(t,s-z)\varphi^{(N)}(t,z)dz. \tag{8}$$

Начальное состояние S_0 определяется заданной плотностью вероятности $\varphi_0(s)$. Для процесса $K(t)$ начальное состояние фиксировано, а именно $K(t_0)=1$, поэтому

$$\varphi^{(1)}(t_0,s)=\varphi_0(s),\quad \varphi^{(k)}(t_0,s)=0,\quad k=2,...,N. \tag{9}$$

Аналогично в модифицированной модели Бейтса плотность вероятности $\varphi(t,s,\nu)$ пары (S,ν) представляется в виде суммы:

$$\varphi(t,s,\nu)=\sum_{k=1}^{N}\varphi^{(k)}(t,s,\nu), \tag{10}$$

где функции $\varphi^{(k)}(t,s,\nu)$ удовлетворяют системе обобщенных уравнений ФПК:

$$\frac{\partial\varphi^{(1)}(t,s,\nu)}{\partial t}=\mathrm{A}\,\varphi^{(1)}(t,s,\nu)-\lambda\varphi^{(1)}(t,s,\nu)+\mathrm{H}\,\varphi^{(N)}(t,s,\nu), \tag{11}$$

$$\frac{\partial\varphi^{(k)}(t,s,\nu)}{\partial t}=\mathrm{A}\,\varphi^{(k)}(t,s,\nu)-\lambda\varphi^{(k)}(t,s,\nu)+\lambda\varphi^{(k-1)}(t,s,\nu),\quad k=2,\ldots,N, \tag{12}$$

в которой

$$\begin{gathered}\mathrm{A}\,\varphi^{(k)}(t,s,\nu)=-\left(\mu-\frac{\nu}{2}-\xi\right)\frac{\partial}{\partial s}\varphi^{(k)}(t,s,\nu)-\\ -\kappa\frac{\partial}{\partial\nu}\Big[(\theta-\nu)\varphi^{(k)}(t,s,\nu)\Big]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\Big[\nu\varphi^{(k)}(t,s,\nu)\Big]+\\ +\rho\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial s\partial\nu}\Big[\nu\varphi^{(k)}(t,s,\nu)\Big]+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\Big[\nu\varphi^{(k)}(t,s,\nu)\Big],\quad k=1,2,\ldots,N,\end{gathered} \tag{13}$$

$$\mathrm{H}\,\varphi^{(N)}(t,s,\nu)=\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{q}(t,s-z)\varphi^{(N)}(t,z,\nu)dz. \tag{14}$$

Начальные состояния S_0 и ν_0 определяются заданными плотностями вероятности $\varphi_{10}(s)$ и $\varphi_{20}(\nu)$ соответственно:

$$\varphi^{(1)}(t_0,s,\nu)=\varphi_{10}(s)\varphi_{20}(\nu),\quad \varphi^{(k)}(t_0,s,\nu)=0,\quad k=2,\ldots,N. \tag{15}$$

В разделе 1.3.2 рассмотрена модель со скачками, описываемыми случайной смесью эрланговских распределений. Динамика логарифма цены акции задается стохастическим дифференциальным уравнением вида (1), в котором случайный процесс $\tilde{Q}(t)$ определяется как

$$\tilde{Q}(t)=\sum_{i=1}^{J(t)}\big(\zeta_i\ln Y_1(\tau_i)+(1-\zeta_i)\ln Y_2(\tau_i)\big),$$

где $J(t)$ – гиперэрланговский процесс, ассоциированный со случайным потоком событий, состоящих в том, что логарифм цены акции S получает приращения $\ln Y_1(\tau_i)$ или $\ln Y_2(\tau_i)$ в случайные моменты времени τ_1, τ_2, … Выбор приращения $\ln Y_1(\tau_i)$ или $\ln Y_2(\tau_i)$ зависит от случайной величины ζ_i, принимающей значения 1 с вероятностью $\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2)$ и 0 с вероятностью $\lambda_2/(\lambda_1+\lambda_2)$:

$$S(\tau_i)=S(\tau_i-0)+\left\{\begin{matrix}\ln Y_1(\tau_i), & \zeta_i=1,\\ \ln Y_2(\tau_i), & \zeta_i=0.\end{matrix}\right\}$$

Заданные положительные числа λ_1 и λ_2, а также натуральные числа N_1 и N_2 определяют гиперэрланговский закон распределения промежутков времени $\Delta\tau_i=\tau_i-\tau_{i-1}$, $i=1,2,\ldots$ ($\tau_0=t_0$), который является эрланговским с параметрами λ_1 и N_1, если $\zeta_i=1$, или эрланговским с параметрами λ_2 и N_2, если $\zeta_i=0$.

Случайные величины ζ_i независимы, поэтому выбор закона распределения для случайного приращения – $\tilde{q}_1(t,y)$ или $\tilde{q}_2(t,y)$ – в момент времени τ_i не зависит от предыстории.

Далее вводится случайный процесс $K(t)$ с конечным множеством состояний $\{1,2,...,N\}$, где $N = N_1 + N_2 - 1$. Интенсивности переходов задаются следующим образом: смена состояний $1 \to 2$, $2 \to 3$, …, $N_1 - 1 \to N_1$ и $N_1 \to 1$ происходит с интенсивностью λ_1, а смена состояний $1 \to N_1 + 1$, $N_1 + 1 \to N_1 + 2$, …, $N - 1 \to N$ и $N \to 1$ – с интенсивностью λ_2; другие переходы невозможны. При переходе из состояния с номером N_1 в состояние с номером 1 случайного процесса $K(t)$ логарифм цены акции S получает случайное приращение $\ln Y_1(\tau_i)$, а при переходе из состояния с номером N в состояние с номером 1 – случайное приращение $\ln Y_2(\tau_i)$, что соответствует разрыву (скачку) траектории логарифма цены акции S.

Тогда плотность вероятности $\varphi(t,s)$ логарифма цены акции S может быть представлена в виде суммы компонент $\varphi^{(k)}(t,s)$ (4), которые удовлетворяют системе обобщенных уравнений ФПК:

$$\frac{\partial \varphi^{(1)}(t,s)}{\partial t} = \mathrm{A}\,\varphi^{(1)}(t,s) - \left(\lambda_1 + \lambda_2\right)\varphi^{(1)}(t,s) + \mathrm{H}_1\varphi^{(N_1)}(t,s) + \mathrm{H}_2\varphi^{(N)}(t,s), \qquad (16)$$

$$\frac{\partial \varphi^{(k)}(t,s)}{\partial t} = \mathrm{A}\,\varphi^{(k)}(t,s) - \lambda_1\varphi^{(k)}(t,s) + \lambda_1\varphi^{(k-1)}(t,s), \;\; k = 2,...,N_1, \qquad (17)$$

$$\frac{\partial \varphi^{(N_1+1)}(t,s)}{\partial t} = \mathrm{A}\,\varphi^{(N_1+1)}(t,s) - \lambda_2\varphi^{(N_1+1)}(t,s) + \lambda_2\varphi^{(1)}(t,s), \qquad (18)$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial \varphi^{(k)}(t,s)}{\partial t} = \mathrm{A}\,\varphi^{(k)}(t,s) - \lambda_2\varphi^{(k)}(t,s) + \lambda_2\varphi^{(k-1)}(t,s), \\ k = N_1 + 2,...,N,\end{gathered} \qquad (19)$$

где $\mathrm{A}\,\varphi^{(k)}(t,s)$ задается выражением (7), а

$$\mathrm{H}_i\varphi(t,s) = \lambda_i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{q}_i(t, s-z)\varphi(t,z)dz, \; i = 1,2. \qquad (20)$$

Для случайного процесса $K(t)$ начальное состояние фиксировано: $K(t_0) = 1$, поэтому с учетом заданной плотности вероятности $\varphi_0(s)$ начального состояния S_0 имеем (9).

В разделе 1.3.3 рассмотрена модель со скачками, характеризующимися чередованием эрланговских распределений. Динамика логарифма цены акции описывается стохастическим дифференциальным уравнением вида (1), в котором случайный процесс $\tilde{Q}(t)$ определяется как

$$\tilde{Q}(t) = \sum_{i=1}^{P(t)} \ln Y(\tau_i),$$

где $P(t)$ – пуассоновский процесс, ассоциированный со случайным потоком событий, состоящих в том, что логарифм цены акции S получает приращения $\ln Y_1(\tau_i)$ или $\ln Y_2(\tau_i)$ в случайные моменты времени τ_1, τ_2, … Приращения $\ln Y_1(\tau_i)$ и $\ln Y_2(\tau_i)$ чередуются между собой, выбор приращения зависит от номера текущего события i; события пуассоновского потока сменяются с интенсивностью λ:

$$S(\tau_i) = S(\tau_i - 0) + \begin{Bmatrix} \ln Y_1(\tau_i),\ i(\operatorname{mod} N) = N_1, \\ \ln Y_2(\tau_i),\ i(\operatorname{mod} N) = 0. \end{Bmatrix}$$

Заданное положительное число λ, а также натуральные числа N_1 и $N_2 = N - N_1$ определяют гиперэрланговский закон распределения промежутков времени $\Delta\tau_i = \tau_i - \tau_{i-1}$, $i = 1,2,\ldots$, ($\tau_0 = t_0$), заданный чередованием эрланговских законов распределения, имеющих одинаковую интенсивность λ и различные порядки N_1 и N_2 соответственно.

Далее вводится случайный процесс $K(t)$ с конечным множеством состояний $\{1,2,...,N\}$, которые сменяются последовательно, начиная с 1. При переходе из состояния с номером N_1 в состояние с номером N_1+1 случайного процесса $K(t)$ логарифм цены акции S получает случайное приращение $Y_1(\tau_i)$, а при переходе из состояния с номером N в состояние с номером 1 – случайное приращение $Y_2(\tau_i)$, что соответствует разрыву (скачку) траектории логарифма цены акции S.

Тогда плотность вероятности $\varphi(t,s)$ логарифма цены акции S может быть представлена в виде суммы компонент $\varphi^{(k)}(t,s)$ (4), которые удовлетворяют системе обобщенных уравнений ФПК:

$$\frac{\partial\varphi^{(1)}(t,s)}{\partial t} = \mathrm{A}\,\varphi^{(1)}(t,s) - \lambda\varphi^{(1)}(t,s) + \mathrm{H}_2\varphi^{(N)}(t,s), \tag{21}$$

$$\frac{\partial\varphi^{(N_1+1)}(t,s)}{\partial t} = \mathrm{A}\,\varphi^{(N_1+1)}(t,s) - \lambda\varphi^{(N_1+1)}(t,s) + \mathrm{H}_1\varphi^{(N_1)}(t,s), \tag{22}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial\varphi^{(k)}(t,s)}{\partial t} = \mathrm{A}\,\varphi^{(k)}(t,s) - \lambda(t)\varphi^{(k)}(t,s) + \lambda(t)\varphi^{(k-1)}(t,s), \\ k = 2,...,N_1, N_1+2,...,N,\end{gathered} \tag{23}$$

где $\mathrm{A}\,\varphi^{(k)}(t,s)$ задается выражением (7), а

$$\mathrm{H}_i\varphi(t,s) = \lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{q}_i(t,y)\varphi(t,z)dz,\ i = 1,2. \tag{24}$$

Для случайного процесса $K(t)$ начальное состояние фиксировано: $K(t_0) = 1$, поэтому с учетом заданной плотности вероятности $\varphi_0(s)$ начального состояния S_0 имеем (9).

Задача анализа динамики цены акции заключается в нахождении плотности вероятности логарифма цены акции, из которой получается плотность вероятности цены акции и находятся другие вероятностные характеристики (математическое ожидание, дисперсия, параметры асимметрии и эксцесса) для исследуемых моделей динамики цены акции.

Во второй главе рассмотрены приближенные методы решения задач анализа стохастических систем с разрывами траекторий, характеризующимися эрланговским и гиперэрланговским распределениями.

В разделе 2.1 разработан спектральный метод анализа стохастических систем со скачками, описываемыми эрланговским и гиперэрланговским распределениями, вводятся основные определения и понятия спектрального метода. При применении спектрального метода обобщенные уравнения ФПК сводятся к линейным алгебраическим уравнениям относительно коэффициентов разложения функций в ряды Фурье по полной ортонормированной системе базисных функций в пространстве $L_2(T \times R^n)$. Форма этих уравнений не зависит от выбора базисных систем и их свойств. В итоге решение системы интегро-дифференциальных уравнений сводится к поиску коэффициентов разложения плотности вероятности. Основные преимущества, которые отличают данный подход, это универсальность его применения и простота в программной реализации. Этот метод является развитием подхода, применяемого для более простых стохастических систем.

В разделе сформулированы и доказаны теоремы о решении задачи анализа стохастических систем с разрывами траекторий, характеризующимися эрланговским и гиперэрланговским распределениями, в спектральной форме математического описания, а также рассматриваются частные решения и обобщения (зависимость интенсивности от цены акции, зависимость процентной ставки и волатильности от времени, выплата дивидендов).

Вводятся следующие обозначения: x – вектор состояния, $\{e(i_0,i_1,...,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,...,i_n=0}^{\infty}$ – ортонормированный базис из $L_2(T \times R^n)$, где $e(i_0,i_1,...,i_n,t,x) = q(i_0,t) \cdot p(i_1,...,i_n,x)$, причем $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ является базисом пространства $L_2(T)$, а $\{p(i_1,...,i_n,x)\}_{i_1,...,i_n=0}^{\infty}$ – базисом пространства $L_2(R^n)$, $P(n+1,n+1)$ – спектральная характеристика (СХ) оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент, $A(n+1,n+1)$, $H(n+1,n+1)$, $H_1(n+1,n+1)$ и $H_2(n+1,n+1)$ – СХ операторов A, H, H_1 и H_2, $\Lambda(n+1,n+1)$, $\Lambda_1(n+1,n+1)$ и $\Lambda_2(n+1,n+1)$ – СХ операторов умножения на λ, λ_1 и λ_2, $\Phi(n+1,0)$ – СХ плотности вероятности $\varphi(t,x)$, $E(n+1,n+1)$ – единичная матрица. Все перечисленные спектральные характеристики определены относительно системы функций $\{e(i_0,i_1,...,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,...,i_n=0}^{\infty}$ и представляют собой многомерные матрицы, элементы которых находятся по формулам для указанных функций и операторов относительно $\{e(i_0,i_1,...,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,...,i_n=0}^{\infty}$, с заданным числом строчных и столбцовых индексов соответственно. Далее, $q(1,0;t_0)$ – матрица-столбец значений функций базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ в точке t_0,

$\Phi_0(n,0)$ – СХ плотности вероятности $\varphi_0(x)$ начального состояния, определенная относительно системы функций $\{p(i_1,...,i_n,x)\}_{i_1,...,i_n=0}^{\infty}$.

Далее число строчных и столбцовых индексов для краткости будет опущено, т.е. $A = A(n+1,n+1)$, $H = H(n+1,n+1)$, $H_1 = H_1(n+1,n+1)$, $H_2 = H_2(n+1,n+1)$, $\Lambda = \Lambda(n+1,n+1)$, $\Lambda_1 = \Lambda_1(n+1,n+1)$, $\Lambda_2 = \Lambda_2(n+1,n+1)$, $W = W(n+1,n+1)$, $W_1 = W_1(n+1,n+1)$, $W_2 = W_2(n+1,n+1)$, $E = E(n+1,n+1)$, $\Phi = \Phi(n+1,0)$, $\Phi_0 = \Phi_0(n,0)$.

Теорема 1 *(о решении в спектральной форме представления задачи анализа стохастических систем со скачками, описываемыми эрланговским распределением)* Если плотность вероятности $\varphi(t,x) \in L_2(T \times R^n)$ и удовлетворяет системе уравнений (4)–(6) или (10)–(12), то спектральная характеристика Φ выражается формулой:

$$\Phi = \left(E - W^N\right) \cdot \left(E - W\right)^{-1} \cdot \left(\Lambda \cdot W^N - H\right)^{-1} \cdot \left(q(1,0;t_0) \otimes \Phi_0\right),$$

или

$$\Phi = \left(E - W\right)^{-1} \cdot \left(E - W^N\right) \cdot \left(\Lambda \cdot W^N - H\right)^{-1} \cdot \left(q(1,0;t_0) \otimes \Phi_0\right),$$

где

$$W = \Lambda^{-1} \cdot \left(P - A + \Lambda\right),$$

и операторы A и H определяются выражениями (7), (8) соответственно, $x = s$, $n = 1$ в случае модифицированной модели Мертона, а в случае модифицированной модели Бейтса – операторы A и H определяются выражениями (13), (14), $x = (s \quad v)^T$, $n = 2$.

Теорема 2 *(о решении в спектральной форме представления задачи анализа стохастических систем со скачками, описываемыми случайной смесью эрланговских распределений)* Если плотности вероятность $\varphi(t,x) \in L_2(T \times R^n)$ и удовлетворяет системе уравнений (4), (16)–(19), то спектральная характеристика Φ выражается формулой:

$$\Phi = \Big[\left(E - W_1^{N_1}\right) \cdot \left(E - W_1\right)^{-1} + \left(E - W_2^{N_2 - 1}\right) \cdot \left(E - W_2\right)^{-1} \cdot [W_2^{N_2 - 1}]^{-1} \cdot W_1^{N_1 - 1}\Big] \cdot$$
$$\cdot \left(\Lambda_1 \cdot W_1^{N_1} - H_1 + \{\Lambda_2 - H_2 \cdot [W_2^{N_2 - 1}]^{-1}\} \cdot W_1^{N_1 - 1}\right)^{-1} \cdot \left(q(1,0;t_0) \otimes \Phi_0\right),$$

или

$$\Phi = \Big[\left(E - W_1^{N_1}\right) \cdot \left(E - W_1\right)^{-1} \cdot (W_1^{N_1 - 1})^{-1} \cdot W_2^{N_2 - 1} + \left(E - W_2^{N_2 - 1}\right) \cdot \left(E - W_2\right)^{-1}\Big] \cdot$$
$$\cdot \left(\Lambda_2 \cdot W_2^{N_2} - H_2 + \{\Lambda_1 - H_1 \cdot [W_1^{N_1 - 1}]^{-1}\} \cdot W_2^{N_2 - 1}\right)^{-1} \cdot \left(q(1,0;t_0) \otimes \Phi_0(1,0)\right),$$

где

$$W_1 = \Lambda_1^{-1} \cdot \left(P - A + \Lambda_1\right),\ W_2 = \Lambda_2^{-1} \cdot \left(P - A + \Lambda_2\right),$$

и операторы A и H_i определяются выражениями (7), (20) соответственно, $x = s$, $n = 1$.

Теорема 3 *(о решении в спектральной форме представления задачи анализа стохастических систем со скачками, характеризующимися чередованием эр-*

ланговских распределений) Если плотность вероятности $\varphi(t,x) \in L_2(T \times R^n)$ удовлетворяет системе уравнений (4), (21)–(23), то спектральная характеристика Ф выражается формулой:

$$\Phi = \Big[\left(E - W^{N_1}\right)\cdot\left(E - W\right)^{-1}\cdot H_1^{-1}\cdot\Lambda\cdot W^{N_2} + \left(E - W^{N_2}\right)\cdot\left(E - W\right)^{-1}\Big]\cdot$$

$$\cdot\Big[\Lambda\cdot W^{N_1}\cdot H_1^{-1}\cdot\Lambda\cdot W^{N_2} - H_2\Big]^{-1}\cdot\left(q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0\right),$$

где $W = \Lambda^{-1}\cdot\left(P - A + \Lambda\right)$, и операторы A и H определяются выражениями (7), (24) соответственно, $x = s$, $n = 1$.

В работах [1,2,4] приведено решение задачи анализа спектральным методом для стохастических систем со скачками, описываемыми эрланговским и гиперэрланговским распределениями. В этих системах вектор сноса, матрица диффузии и параметры, характеризующие скачки в траекториях случайного процесса, заданы в общем виде.

Обратный переход от спектральной характеристики $\Phi(n+1,0)$ к соответствующей плотности вероятности $\varphi(t,x)$ осуществляется по формуле обращения, но поскольку задача нахождения всех коэффициентов разложения не является тривиальной, обычно приближенно определяется конечное число коэффициентов $\varphi_{i_0 i_1 \ldots i_n}$:

$$\varphi(t,x) \approx \sum_{i_0=0}^{L_0-1}\sum_{i_1=0}^{L_1-1}\ldots\sum_{i_n=0}^{L_n-1}\varphi_{i_0 i_1 \ldots i_n}\cdot e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x), \quad (t,x)\in T\times R^n,$$

где натуральные числа L_0, L_1, …, L_n – выбранные порядки усечения спектральных характеристик, влияющие на точность решения.

С помощью полученной плотности вероятности логарифма цены и обратной замены переменных можно получить плотность вероятности цены акции.

В разделе 2.2 приведен модифицированный алгоритм численного моделирования траекторий цены акции и ее логарифма методом Монте-Карло, необходимый для проверки численных результатов, полученных спектральным методом для моделей динамики цены со скачками в условиях эрланговского и гиперэрланговского потоков событий.

Алгоритм статистического моделирования траекторий включает выбор сетки на интервале $[t_0, t_k]$, моделирование моментов скачков τ_i, $i = 1,2,\ldots$, и величин скачков для M траекторий на указанном интервале времени, моделирование M траекторий цены акции (или ее логарифма), при котором учитываются значения цены акции (или ее логарифма) в моменты появления скачков, которые находятся между узлами сетки.

Основное отличие модифицированного алгоритма от приведенного в работах Авериной Т.А. заключается в предварительном моделировании моментов появления скачков, образующих эрланговские и гиперэрланговские потоки событий (вместо пуассоновского потока событий), и величин скачков. Алгоритмы моделирования эрланговского потока событий и гиперэрланговских потоков событий, задаваемых случайной смесью эрланговских распределений и чередованием эрланговских распределений, приведены в диссертационной работе.

В третьей главе кратко описано программное обеспечение спектрального метода анализа, сформированного в расчетной системе Spectrum, а также программное обеспечение, реализующее алгоритмы моделирования траекторий цены акции и ее логарифма для рассматриваемых математических моделей. Описываются их основные функции и возможности [3,16].

В четвертой главе рассмотрены изменения цен акций компаний «Иркут» и «ОАК» на ММВБ, рассчитываются плотности вероятности спектральным методом и методом Монте-Карло на основе информации о ценах акций (в период времени 03.01.2012 – 31.08.2012) и моделей со скачками, характеризующимися эрланговским распределением, описываемыми случайной смесью эрланговских распределений и характеризующимися чередованием эрланговских распределений, проводится анализ результатов.

На рисунках 1 и 2 представлены результаты расчета плотности вероятности и математического ожидания цены акции компании «Иркут» при следующих параметрах: промежуток времени $t \in T = [0,1]$ (1 год), начальная цена имеет логарифмически нормальное распределение с математическим ожиданием 6 и дисперсией 0.3618, процентная ставка $\mu = -0.0589$, волатильность $\sigma = 0.34$, величины $Y_1(\tau_i) \sim Pareto(17.67,1)$ и $Y(\tau_i) \sim Beta(19,1)$, при $N_1 = 1$ и $N_2 = 1$ интенсивности равны $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 3$, и далее при изменении N_1 или N_2 рассчитываются из условия $\lambda_1 / N_1 = \lambda_2 / N_2 = \text{const}$. Для расчетов спектральным методом при представлении искомой функции плотности вероятности в виде ряда используются первые двадцать четыре функции базисных систем $\{P(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ (полиномы Лежандра) по времени и $\{\Psi(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ (функции Эрмита с параметрами $m = 1.787$ и $D = 0.01$) по состоянию. При вычислении вероятностных оценок методом МК используются 100000 реализаций с шагом по времени и состоянию 0.01.

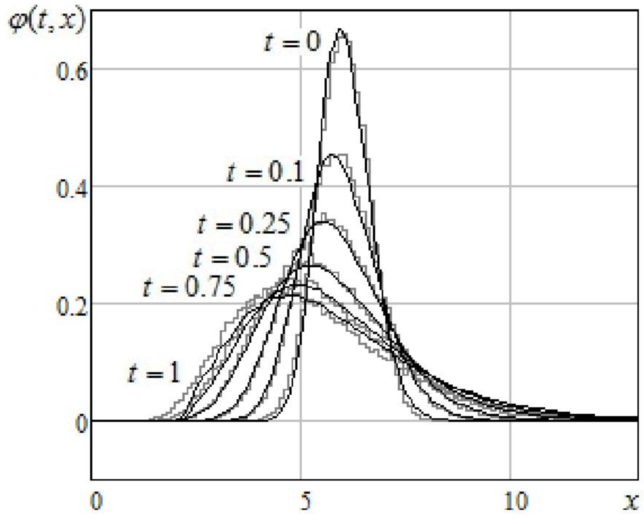

Рис. 1. Сечения оценок плотности вероятности $\varphi(t,x)$, полученных спектральным методом и методом Монте-Карло при $N_1 = 2$, $N_2 = 3$.

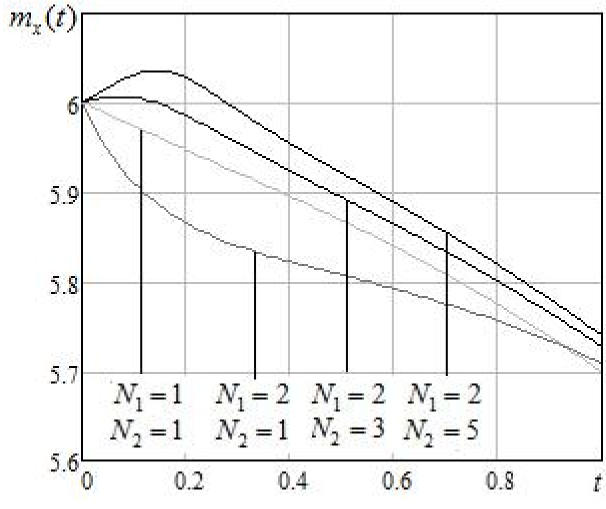

Рис. 2. Математическое ожидание цены акции «IRKT» при различных N_1, N_2.

В диссертационной работе приводятся результаты расчета плотности вероятности и моментных характеристик цен акций компаний «Иркут» и «ОАК» на основе моделей с эрланговскими и гиперэрланговскими скачками при различных значениях параметров эрланговских распределений, влияющих на характер появления скачков, в частности, на зависимость между последовательными появлениями скачков в траекториях цены акции. Также анализируются результаты расчета плотности вероятности цены акции спектральным методом при различных порядках усечения СХ. Из результатов расчета следует, что на основе представленных в диссертационной работе моделей можно получать плотности вероятности цен акции с различными коэффициентами асимметрии и эксцесса, учитывая различную степень зависимости между моментами скачков за счет изменения порядка эрланговского потока событий, и приблизиться к более точному описанию динамики цены.

В данной диссертационной работе под оценкой стоимости цены акции понимается нахождение ее вероятностных характеристик, таких как плотность вероятности, математическое ожидание, дисперсия, коэффициенты асимметрии и эксцесса. Математическое ожидание и дисперсия позволяют получить представления о характере изменения тренда и изменчивости цены акции соответственно. Экономический смысл коэффициента асимметрии в финансовой математике заключается в следующем: если коэффициент имеет положительное значение, то более высокая цена считается более вероятной, чем низкая и наоборот. Коэффициент эксцесса характеризует следующее: при рассмотрении двух активов, цены которых имеют симметричные унимодальные распределения и равные математические ожидания, менее рискованной считается инвестиция в актив, для которого распределение цены имеет больший эксцесс. Также с помощью полученной плотности вероятности можно построить интервальную оценку для математического ожидания или вычислить показатель VaR («стоимость под риском»), активно использующийся фондовыми менеджерами и финансовыми организациями. Данный показатель представляет собой величину потерь инвестиционного портфеля (в нашем случае состоящим из одной акции), значение которой не превышается в течение заданного интервала времени с некоторой указанной вероятностью.

ОСНОВНЫЕ НАУЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

Основным итогом диссертационной работы является разработка приближенных методов анализа для стохастических моделей динамики цены акции со скачками в условиях эрланговских и гиперэрланговских потоков событий, а также их применение в приложении к задаче оценки стоимости акций предприятий авиационно-промышленного комплекса. Это выражается в следующих результатах.

1. Предложены новые стохастические модели динамики цен акций со скачками в условиях эрланговского и гиперэрланговского потоков событий.

2. Разработаны спектральные методы анализа стохастических систем со скачками, характеризующимися эрланговским и гиперэрланговским распределениями, а именно получены решения (спектральные характеристики плотности вероятности) в спектральной форме математического описания для моделей со скачками, характеризующимися эрланговским распределением, описываемыми случайной смесью эрланговских распределений, характеризующимися чередованием эрланговских распределений.

3. Модифицирован алгоритм статистического моделирования траекторий цен акций и их логарифма в условиях эрланговского или гиперэрланговского потока событий для проверки результатов, полученных спектральным методом.

4. Разработано программное обеспечение, реализующее спектральные методы и алгоритм статистического моделирования для анализа стохастических систем со скачками, характеризующимися эрланговским и гиперэрланговским распределениями.

5. Получены решения задачи анализа динамики цен акции корпорации «Иркут» и «ОАК» в условиях скачков, характеризующихся эрланговским распределением, описываемых случайной смесью эрланговских распределений, характеризующихся чередованием эрланговских распределений.

Публикации в журналах перечня ВАК

1. Кожевников А.С., Рыбаков К.А. Спектральный метод анализа стохастических систем с разрывами траекторий, описываемыми случайной смесью эрланговских распределений // Управление большими системами. Вып. 45. – М.: ИПУ РАН, 2013. – С. 47–71.
2. Кожевников А.С., Рыбаков К.А. Спектральный метод анализа стохастических систем с разрывами траекторий, характеризуемыми чередованием эрланговских распределений // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2013. – № 4. – С. 231–244.
3. Кожевников А.С. Программное обеспечение для статистического моделирования и анализа случайных процессов со скачками, описывающих динамику цен акций предприятий авиационной отрасли // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2012. – № 59.
4. Кожевников А.С., Рыбаков К.А. Анализ нелинейных стохастических систем управления с импульсными воздействиями, образующими эрланговские потоки событий // Научный вестник МГТУ ГА. – 2012. – № 184 (10). – С. 37–45.
5. Кожевников А.С., Рыбаков К.А. Спектральный метод анализа стохастических систем в приложении к задачам финансовой математики на примере модели Блэка-Шоулза // Вестник Московского авиационного института. – 2009. – Т. 16, № 4. – С. 113–125.

Публикации в других изданиях

6. Kozhevnikov A.S., Rybakov K.A. Analysis of Nonlinear Stochastic Systems with Jumps Generated by Erlang Flow of Events // Open Journal of Applied Sciences. – 2013. – V. 3. № 1. – P. 1–7.
7. Кожевников А.С. Математические модели динамики цены акций с гиперэрланговскими скачками // Научный альманах. Вып. 17: Материалы IX научно-практической конференции молодых ученых и студентов «Инновационный менеджмент в аэрокосмической промышленности». – М.: Изд-во «Доброе слово», 2013. – С. 180–186.
8. Кожевников А.С., Рыбаков К.А. Математические модели динамики цены акций с эрланговскими скачками // Научный альманах. Вып. 16: Материалы VIII научно-практической конференции молодых ученых и студентов «Инновационный менеджмент в аэрокосмической промышленности». – М.: Изд-во «Доброе слово», 2012. – С. 156–161.
9. Кожевников А.С., Рыбаков К.А. Об оценке стоимости финансовых инструментов в модели Бейтса // Проблемы авиастроения, космонавтики и ракетостроения: Сб. науч. тр. – М.: Изд-во Ваш полиграфический партнер, 2012. – С. 353–361.
10. Кожевников А.С. Анализ неоклассической модели экономического роста с учетом случайных факторов // Научный альманах. Вып. 15: Материалы VII научно-практической конференции молодых ученых и студентов «Инновационный менеджмент в аэрокосмической промышленности». – М.: Изд-во «Доброе слово», 2011. – С. 77–86.
11. Кожевников А.С., Рыбаков К.А. О применении спектрального метода анализа систем со случайным периодом квантования в модели Мертона // Модернизация и инновации в авиации и космонавтике: Сб. науч. тр. – М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2011. – С. 299–305.
12. Кожевников А.С., Рыбаков К.А. Расчет будущей цены актива в модели Блэка-Шоулза с помощью спектрального метода анализа стохастических систем // Теоретические вопросы вычислительной техники и программного обеспечения: Межвуз. сб. науч. тр. – М.: МИРЭА, 2010. – С. 120–126.
13. Кожевников А.С., Рыбаков К.А. Анализ динамики цены актива на примере модели Хестона с помощью спектрального метода // Информатика, социология, экономика, менеджмент: Межвуз. сб. науч. тр. – М.: АМИ, 2010. – Вып. 7, ч. 2. – С. 13–19.

Доклады на научных конференциях

14. Кожевников А.С., Рыбаков К.А. О математических моделях динамики цен акций с гиперэрланговскими скачками // Международная математическая конференция «Боголюбовские чтения DIF-2013», 23-30 июня 2013 г., Севастополь, Украина: Тезисы докладов. – Киев: Институт математики НАН Украины, 2013. – С. 317.
15. Кожевников А.С., Рыбаков К.А. О спектральных методах анализа стохастических систем управления при импульсных воздействиях, образующих гиперэрланговские потоки событий // Инновации в авиации и космонавти-

ке – 2013. Московская научно-практическая конференция молодых ученых, Москва, 16–18 апреля 2013 г.: Тез. докл. – М.: ООО «Принт-салон», 2013. – С. 298–299.
16. Кожевников А.С. Комплекс программ для моделирования и анализа цен акций предприятий авиационной отрасли // Инновации в авиации и космонавтике – 2013. Московская научно-практическая конференция молодых ученых, Москва, 16–18 апреля 2013 г.: Тез. докл. – М.: ООО «Принт-салон», 2013. – С. 282–283.
17. Кожевников А.С., Рыбаков К.А. Новые модели динамики цены акции с двумя скачкообразными компонентами // 11-я Международная конференция «Авиация и космонавтика – 2012». 13–15 ноября 2012 года. Москва. Тезисы докладов. – СПб.: Мастерская печати, 2012. – С. 379–380.
18. Кожевников А.С. Оценка стоимости финансового опциона на различные активы с помощью стохастических моделей в непрерывном времени // Материалы XLX Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2012. – С. 300.
19. Кожевников А.С., Рыбаков К.А. Новые алгоритмы анализа стохастических систем с разрывами траекторий и их применение в задачах финансовой математики // Международная конференция «Моделирование, управление и устойчивость MCS-2012», 10–15 сентября 2012 г., Севастополь, Украина. – С. 169–170.
20. Кожевников А.С. Программное обеспечение для статистического моделирования систем со случайным периодом квантования // Инновации в авиации и космонавтике – 2013. Московская научно-практическая конференция молодых ученых, Москва, 17–20 апреля 2012 г: Тез. докл. – М.: ООО «Принт-салон», 2012. – С. 240–241.
21. Кожевников А.С. Анализ неоклассической модели экономического роста с учетом случайных факторов на примере экономики России // Материалы XLIX Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2011. – С. 293.
22. Кожевников А.С., Рыбаков К.А. Спектральный метод анализа стохастических систем управления при импульсных воздействиях, образующих непуассоновские потоки событий // Авиация и космонавтика – 2011. X Международная конференция, Москва, 8–10 ноября 2011 г.: Тез. докл. – Спб.: Принт-салон, 2011. – С. 276–277.
23. Кожевников А.С. Анализ динамики цены актива в модели Бейтса спектральным методом // Материалы XLVIII Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2010. – С. 294–295.
24. Кожевников А.С. Приложение спектрального метода анализа систем со случайным периодом квантования к моделям Мертона и Бейтса // Инновации в авиации и космонавтике – 2010. Научно-практическая конференция

молодых ученых и студентов МАИ, Москва, 26–30 апреля 2010 г.: Тез. докл. – СПб.: Мастерская печати, 2010. – С. 170–171.

25. Кожевников А.С., Рыбаков К.А. Применение спектрального метода анализа систем со случайным периодом квантования к модели Мертона // XLVI Всероссийская конференция по проблемам математики, информатики, физики и химии, 19–23 апреля 2010 г., Москва: Тез. докл. – М.: РУДН, 2010. – С. 106–107.
26. Кожевников А.С., Рыбаков К.А. Применение спектрального метода анализа стохастических систем в задачах финансовой математики. Модель Хестона // Авиация и космонавтика – 2009. VIII Международная конференция, Москва. 2009: Тез. докл. – М.: Изд-во МАИ–ПРИНТ, 2009. – С. 77.
27. Кожевников А.С., Рыбаков К.А. Применение спектрального метода анализа стохастических систем в задачах финансовой математики // 2-я Всероссийская конференция ученых, молодых специалистов и студентов «Информационные технологии в авиационной и космической технике – 2009», 20–24 апреля 2009 г., Москва. Тез. докл. – М.: Изд-во МАИ–ПРИНТ, 2009. – С. 89.