

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

На правах рукописи



ЧЖО ЙЕ КО
ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ПЛОСКИХ ОРЕБРЕННЫХ
ПАНЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ
ТОЛЩИНЫ

Специальность

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела

диссертация на соискание ученой степени

кандидата технических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор

Рабинский Лев Наумович

Москва – 2023

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ В ОБЛАСТИ СОВРЕМЕННЫХ МЕТОДОВ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ.....	10
2. ФОРМУЛИРОВКА МЕТОДА ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ И МЕТАЛЛО-КОМПОЗИТНЫХ ПАНЕЛЕЙ, РАБОТАЮЩИХ В УСЛОВИЯХ СЛОЖНО- НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ.....	26
2.1 Учет дополнительных локальных ограничений по жесткости и глобальных ограничений на прочность конструкции	33
2.2 Реализация метода ТО для моделей, в которых область проведения оптимизации контактирует с окружающими тонкостенными конструкциями.....	35
2.3 Учет дополнительных ограничений, связанных с требованиями по устойчивости тонкостенных элементов конструкций, контактирующих с областью построения решения ..	36
2.4 Реализация совместной топологической и параметрической оптимизации металло- композитных конструкций с учетом параметров армирования композита и при наличии ограничений по условиям прочности.....	40
2.5 Реализация топологической оптимизации металло-композитных конструкций с использованием дополнительных полевых переменных, учитывающих неоднородность составной конструкции.....	43
3. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ПАНЕЛЕЙ, НАГРУЖЕННЫХ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ СИЛАМИ.....	45
3.1. Оценка эффективности ТО в сопоставлении с параметрической оптимизацией для условий нагружения сосредоточенными силами.....	45
3.2. Влияние начальных условий и функции интерполяции фиктивной плотности на эффективность ТО.....	54
3.3. Пример оценки эффективности ТО на основе аналитического решения для плоско- пространственной рамы.....	80
3.4. Экспериментальные исследования панелей, изготовленных 3д печатью	94
4. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ СОСТАВНЫХ МЕТАЛЛО-КОМПОЗИЦИОННЫХ ПАНЕЛЕЙ.....	105

4.1. Особенности применения ТО для силового набора подкрепленных металло-композитных панелей, работающих в условиях сложно-напряженного состояния	105
4.2. Оптимизация конструкций с композитными ребрами жесткости и металлической обшивкой.....	130
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	135
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	137

ВВЕДЕНИЕ

Развитие методов топологической оптимизации направлено на создание автоматизированных методов проектирования конструкций с повышенной несущей способностью, прочностью, массовой эффективностью и т.д. Результаты топологической оптимизации используются как непосредственно для получения оптимальной геометрии конструкций, так и в качестве инструмента поиска облика и новых геометрических форм конструктивных элементов, которые в упрощенном виде используются далее в составе реальных конструкций.

В настоящей работе рассматривается задача оптимизации геометрии плоских панелей, подкрепленных ребрами жесткости и нагруженных сосредоточенными силами. Классические методы оптимального проектирования (параметрической оптимизации) для такого рода конструкций хорошо известны, а недавно предложенные новые проектировочные подходы направлены на учет специфических случаев нагружения или уточненное описание деформированного состояния панелей и т.п. Рассматриваемый случай нагрузок в виде сосредоточенных сил является тестовым, и он выбран как наиболее простой и наглядный для оценки эффективности получаемых решений.

Стандартной задачей топологической оптимизации являлся поиск наилучшего распределения ограниченного объема материала в заданном объеме конструкции для получения наиболее высокой жесткости. Такая постановка задачи, фактически, определяется требованием минимизации полной энергии деформаций (или работы внешних сил) при заданном ограничении на значение средней плотности.

Актуальность диссертационной работы определяется разработкой методов топологической оптимизации, направленных на создание автоматизированных методов проектирования конструкций с повышенной несущей способностью, прочностью, массопереносом и т.д. Результаты топологической оптимизации используются как непосредственно для получения оптимальной геометрии

конструкций, так и в качестве инструмента для нахождения вида и новых геометрических форм элементов конструкций, которые в упрощенном виде в дальнейшем используются при составлении реальных конструкций.

Целью работы является развитие подходов для создания эффективных металлических и металло-композитных конструкций на основе методов топологической оптимизации с учетом ограничений по жесткости и прочности.

Объект исследования: Цифровые методы анализа напряженно-деформированного состояния конструктивных элементов и выбора оптимальных конструктивно-силовых схем плоских подкрепленных панелей.

Предметом и задачей исследования является разработка и численная реализация метода топологической оптимизации облегченных металлических и металло-композитных ребренных панелей, работающих в условиях сложно-напряженного состояния.

Методы исследования применяются методы топологической оптимизации тонкостенных элементов конструкций, основанные на численном конечно-элементном моделировании и методах оптимизации, в частности, на методе движущихся асимптот. Применяются модели Миндлина-Рейсснера изотропных и анизотропных многослойных панелей. Для уточненного анализа напряженного состояния оптимизированных конструкций проводится трехмерное моделирование. Для вычислений привлекается система COMSOL Multiphysics. Для проверки характеристик жесткости оптимизированных панелей были разработаны экспериментальные методы исследования образцов, изготавливаемых методом 3d-печати. Экспериментальные механические испытания панелей проводились с использованием универсальной испытательной машины Instron 5969 с программным обеспечением Bluehill 3.

Научная новизна работы определяется следующими полученными результатами:

- Предложена и реализована методика топологической оптимизации подкрепленных плоских панелей, в том числе композитных, работающих в условиях сложно-напряженного состояния. В предложенной методике функция фиктивной плотности используется для задания локальной толщины панели, а локальный угол армирования в слоях композита задается дополнительные узловыми переменными, вводимыми в задаче оптимизации. Методика позволяет получать оптимизированные варианты конструкций с наибольшей жесткостью.
- Получены рекомендации по выбору наилучших настроек задачи оптимизации, связанных с выбором размера сетки, типа конечных элементов, начальных условий для толщины пластины и типа аппроксимирующей функции для дополнительных переменных модели.
- Разработанная численная методика валидирована на основе примера аналитического решения для квадратной пластины, нагруженной сосредоточенной силой, смещенной относительно центра. Показана согласованность геометрии ребер жесткости, возникающих в численном решении, с результатами оптимизации, получаемыми в рамках аналитического подхода. Также показана высокая точность решений, получаемых для пластин переменной толщины, по сравнению с соответствующими моделями с прорисовкой ребер жесткости пластинчатыми элементами.
- Получены новые результаты экспериментальных исследований для образцов оптимизированных подкрепленных панелей из материала PET-G, синтезированных на установке 3д печати, а также результаты механических испытаний на изгиб. Показано преимущество оптимизированной геометрии ребрения панелей по сравнению со стандартными регулярными вариантами.

Практическая ценность работы заключается в разработке прикладной численной методики, позволяющей подобрать оптимальную геометрию силового набора ребренных плоских панелей, обеспечивающих повышение жесткости конструкции в заданных условиях нагружения.

Достоверность научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертационной работе, и обоснованность результатов, полученных при разработке аналитических методов расчета, определяется применяемым математическим аппаратом, оптимизирующим компоновку материала, строгой формулировкой моделей в рамках теории упругости, теории пластин, теорией дифференциальных уравнений. Сравнение результатов численного и аналитического моделирования показало надлежащее согласие и валидацию предложенной численной методики. Были проведены экспериментальные исследования, подтверждающие эффективность предложенной методики оптимизации. Численное моделирование проводилось в COMSOL Multiphysics с использованием детальных моделей изделий, сетки высокой плотности. Надежность численных расчетов оценивалась путем изменения размера конечно-элементной сетки, а также путем сравнения полученных решений в рамках упрощенных аналитических моделей.

Апробация работы

Результаты диссертационного исследования докладывались и обсуждались на конференциях:

1. Чжо Йе Ко., Соляев Ю.О. Применение методов топологической оптимизации для выбора геометрии силового набора подкрепленных панелей. Международная конференция "Авиация и космонавтика" МАИ. 2020 г.
2. Чжо Йе Ко., Рабинский Л.Н. Оценка корректности решений задач топологической оптимизации подкрепленных панелей, полученных на основе теории пластин Миндлина-Рейсснера. Международная молодежная научная

- конференция. Секция "Механика и моделирование материалов и технологий". Москва, 2021 г.
3. Чжо Йе Ко., Соляев Ю.О., Рабинский Л.Н. Топологическая оптимизация ребренных панелей, нагруженных сосредоточенными силами. Международная конференция «Космические системы». МАИ. 2021 г.
 4. Чжо Йе Ко., Соляев Ю.О., Рабинский Л.Н. Методика топологической оптимизации геометрии подкрепляющих элементов плоских панелей. Международная конференция «Композитные материалы и конструкции». МАИ. 2021 г.
 5. Чжо Йе Ко., Соляев Ю.О., Бабайцев А.В. Топологическая оптимизация ребренных панелей, нагруженных различными силами. XI Международная научно-практическая конференция «Проблемы безопасности на транспорте». Гомель. 2021 г.
 6. Чжо Йе Ко., Бабайцев А.В., Чубаров В.С. Исследование остаточных деформаций в зависимости от условий печати. Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред Материалы XXVIII международного симпозиума имени А.Г.Горшкова. 2022 г.
 7. Чжо Йе Ко., Рабинский Л.Н. Топологическая оптимизация подкрепленных панелей на основе аналитических решений. Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред Материалы XXIX международного симпозиума имени А.Г.Горшкова. 2023 г.
 8. Чжо Йе Ко., Рабинский Л.Н. Соляев Ю.О. Теоретическое и экспериментальное обоснование подхода к оптимизации топологии переменной толщины для ребристо-жестких панелей. Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред Материалы XXIV международного симпозиума имени А.Г.Горшкова. 2023 г.

Публикации

По теме диссертационной работы опубликовано 12 работ, в том числе 2 научные работы в журналах, индексируемых международной системой

цитирования Scopus, 2 научные работы в изданиях, входящих в перечень ведущих рецензируемых научных журналов, рекомендованных ВАК РФ, 8 работ в виде тезисов докладов на конференциях, в том числе международных.

1. Чжо Йе Ко., Соляев Ю.О. Топологическая оптимизация подкрепленных панелей, нагруженных сосредоточенными силами // Труды МАИ. 2021. № 120. DOI: 10.34759/trd-2021-120-07.
2. Kyaw Ye Ko., Yury Solyaev., Arseniy Babaytsev., Sergey Lurie., Lev Rabinskiy., Ivan Kondakov. Theoretical and experimental validation of the variable-thickness topology optimization approach for the rib-stiffened panels. *Continuum Mech. Thermodyn.* 2023. Vol.35, issue 4, Pp.1787–1806. <https://doi.org/10.1007/s00161-023-01224-w>
3. Kyaw Ye Ko., Yury Solyaev. Explicit benchmark solution for the topology optimization of the variable-thickness plates. *Math. Mech. Complex Syst.* 2023. Принято в печать.
4. Чжо Йе Ко, Рабинский Л.Н. Оценка эффективности метода топологической оптимизации подкрепленных панелей на основе аналитических решений тестовых задач // Труды МАИ. 2023. № 129. DOI: 10.34759/trd-2023-129-07.

1. АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ В ОБЛАСТИ СОВРЕМЕННЫХ МЕТОДОВ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В последние десятилетия с ростом производительности компьютеров и вычислительных алгоритмов методы структурной оптимизации достигли большого прогресса. Методы оптимизации структуры состоят из процесса определения наилучшего распределения материала в области физического объема для безопасной передачи или поддержки приложенных условий нагрузки. Для достижения этой цели необходимо также учитывать ограничения, накладываемые при изготовлении и последующем использовании. Некоторые из них могут включать увеличение жесткости, снижение напряжения, уменьшение смещения, изменение собственной частоты, увеличение нагрузки на смятие, изготовление с помощью обычных или усовершенствованных методов. Решение практических и сложных задач оптимизации при сложных условиях нагружения стало возможным для удовлетворения серьезных междисциплинарных проектных задач [1].

Структурная оптимизация направлена на получение высоких характеристик конструкций за счет изменения начального размера, формы и топологии конструкции или свойств материала в рамках ряда заданных целей и ограничений. В соответствии с оптимизируемыми проектными переменными, структурная оптимизация в инженерной области может быть классифицирована на следующие три категории: оптимизация размеров (параметрическая оптимизация (ПО)), оптимизация формы (ОФ) и топологическая оптимизация (ТО) [2,3]. Оптимизация размеров - классический метод, который легко проводится путем выбора размеров поперечного сечения ферм, балок и рам, или толщины мембран, пластин и оболочек в качестве проектных переменных. В этом типе оптимизационных задач домен структуры фиксируется в процессе оптимизации. Проектные переменные для определения размеров могут быть дискретными или непрерывными. Оптимизация размера обычно может рассматриваться как реализацию оптимизации на этапе проектирования деталей и можно рассматривать как детальную процедуру проектирования структурной модели включающую большое

количество расчетных переменных. Она была разработана и становится наиболее популярным методом в инженерном сообществе [3,5]. Оптимизация формы направлена на проектирование структурных границ или отверстий в конструкции. Метод может быть использован на практике для улучшения локальных характеристик, таких как распределение напряжений. Часто существует небольшое количество геометрических переменных проектирования из-за параметризации границ. Поскольку возмущение границ непосредственно изменяет геометрическую модель, анализ чувствительности формы к геометрическим переменным конструкции всегда является проблемой, требующей тщательного рассмотрения. Очевидно, что методы оптимизации размеров и формы представляют собой детальные процедуры проектирования без изменения конкретной топологии конструкции [6,7]. Топологическая оптимизация направлена на поиск оптимальной твердо-пустотной схемы расположения материала в конкретной области проектирования с заданными граничными условиями. Этот метод часто используется на стадии концептуального проектирования для оптимизации глобальных характеристик, таких как жесткость и собственные частоты конструкции. В отличие от метода оптимизации формы или размеров, исходной областью проектирования при оптимизации топологии является большая или универсальная структура, например, прямоугольная пластина, в некоторых двумерных задачах проектирования. Единственными известными величинами в задаче являются приложенные нагрузки, возможные условия поддержки, объем конструкции, которую необходимо построить, и, возможно, некоторые дополнительные ограничения, определенные проектировщиком. Физический размер, форма и связность конструкции неизвестны. Топология, форма и размер конструкции представлены не стандартными параметрическими функциями, а набором распределенных функций, определенных над фиксированной областью дизайна. Эти функции, в свою очередь, представляют собой параметризацию тензора жесткости континуума и подходящий выбор этой параметризации,

который приведет к правильной формулировке конструкции для топологическая оптимизация [8-9].

До появления вычислительной механика и метода конечных элементов (МКЭ) в конце 1960-х годов проектирование этих систем основывалось на экспериментальных исследованиях. Однако с увеличением вычислительной мощности и разработкой улучшенных численных схем некоторые проблемы структурной механики и гидродинамики можно было моделировать и анализировать численно. Следовательно, в последние десятилетия оптимизация топологии получила широкое распространение как практический метод вычислительного проектирования. Этот метод привлекателен тем, что, в отличие от оптимизации формы, он сводит к минимуму влияние первоначального дизайна благодаря способности производить как форменные, так и топологические изменения в процессе оптимизации. Последние достижения в аддитивном производстве позволяют точно размещать один или несколько материалов с микрометровым разрешением практически без ограничений по геометрической сложности пространственного расположения. Сложные трехмерные тела могут быть созданы с крайне неравномерным распределением материалов практически оптимальным образом, что позволяет создавать структуры с улучшенными характеристиками. Оптимизация топологии стала перспективным подходом для использования преимуществ аддитивного производства [1,2,10-15].

Начали развиваться с конца 1980х годов, когда были предложены подходы по поиску оптимального распределения «пористости» в задачах механики деформируемого твердого тела. Методики топологической оптимизации ищут оптимальное распределение материала тела в заданной области проектирования. Методы оптимизации топологии первоначально были разработаны в основном для создания концептуальных проектов инженерных систем на ранних стадиях процесса проектирования [16,17].

Топологическая оптимизация предлагает концептуальный дизайн для более легких и жестких конструкций. Она помогает достичь эффективных и эстетичных конструкций за небольшой промежуток времени. Преимущества:

- Создание экономичных и совершенных конструкций.
- Сокращение времени, необходимого для представления и испытания продукта.
- С помощью программного обеспечения МКЭ можно проверить конструкцию с точки зрения:
 - Определение возможного диапазона проектирования.
 - Точная проверка для различных нагрузок и условий.
 - Учет конструктивных и производственных ограничений [18,19].

Задача оптимизации топологии может быть записана в общей форме оптимизационной задачи [20, 21] как:

$$\begin{aligned} \text{minimize}_p U &= U(u(\rho), \rho) = \int_{\Omega} (u(\rho), \rho) dv \\ \text{subject : } G_0(\rho) &= \int_{\Omega} p dv - v_0 \\ G_i(u(\rho), \rho) &\leq 0 \text{ with } i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Постановка проблемы включает следующее:

- Целевая функция $U(u(\rho), \rho)$. Хотя у каждой проблемы могут быть разные целевые функции, наиболее часто используется минимизация соответствия или, другими словами, максимизация жесткости конструкции.
- Основная проектная переменная: распределение материала. В этом случае такой переменной может быть плотность материала в каждой точке стержня $\rho(u)$. 1 указывает места, где описана плотность, а 0 указывает места, где материал удалён или отсутствует. С другой стороны, u определяет, является ли состояние линейным или нелинейным [22].

- m ограничений – характеристика, согласно которой решение должно удовлетворять $G_i(u(\rho), \rho) \leq 0$. Примерами являются максимальное количество дозируемого материала (предел объема) или максимальные значения нагрузки.
- Вычисление $u(\rho)$ часто включает решение дифференциального уравнения. Чаще всего это делается с помощью метода конечных элементов, так как эти уравнения не имеют известного аналитического решения [20].

Первоначально, эти методы были основаны на решении задач осреднения для определения эффективных свойств материала, содержащего включения в виде пустот (пор). Позднее, для совершенствования, стабилизации и ускорения расчетов были предложены более простые подходы, в которых вводилась фиктивная переменная плотности, определяющая изменение упругих характеристик материала от максимального значения, соответствующего зоне твердой фазы, до значения близкого нулю, соответствующего пустотам [1]. К настоящему времени, методы топологической оптимизации реализованы в самых разнообразных областях физики сплошных сред, включающих задачи механики конструкций оптимальную топологию механического элемента можно предсказать несколькими способами, вводя искусственную плотность или вводя плотность композита с пустотами [22-25], Теплофизика метода проектирования теплоотвода с жидкостным охлаждением [26], Акустическое поле моделируется уравнением Гельмгольца, а метод оптимизации топологии основан на непрерывных интерполяционных функциях материалов с точки зрения плотности и модуля объема. Представлен метод уменьшения шума за счет оптимизации топологии [26, 27], гидродинамики [28, 30], электродинамики [31, 31], в связанных задачах аэроупругости [32, 33], термомеханики [34, 36], тепломассобмена [36, 37] и т.д. Целевые функции в задачах ТО в механике материалов могут формулироваться относительно энергии деформаций, объема, занимаемого материалом [1], собственных частот [38,40] или коэффициента запаса устойчивости конструкции,

перемещений в заданных зонах конструкции, коэффициента демпфирования [15] и т.д. Ограничения ставятся не только на объем материала, но и на максимальные напряжения и соответствующие критерии пластичности/прочности, а также на параметры перечисленные выше в качестве возможных целевых функций (собственные частоты и т.д.). Задачи ТО конструкций могут включать в себя решение уравнений статики линейной и нелинейной упругости, упрогопластичности [40], задачи динамики и вязкоупругости [41]. Предложены обобщения метода ТО на анизотропные материалы [42, 44] и на много-материальные составные конструкции [45]. Методы топологической оптимизации реализованы, практически, во всех основных коммерческих системах конечно-элементного моделирования (Ansys, Abaqus, Nastran Autodesk, Comsol, LS-DYNA, Altair HyperWorks, расчетные модули в SolidWorks и др.). Большинство стандартных систем обладает интерфейсами для проведения оптимизации трехмерных конструкций из изотропных материалов с целевой функцией в виде энергии деформаций или объема материала. Стандартные ограничения ставятся на объем материала и максимальные напряжения. Задачи с ограничением на устойчивость 3-х мерных моделей могут решаться в системе Nastran Autodesk (по заявлению производителя). Задачи на устойчивость в рамках ТО для моделей тонкостенных конструкций могут решаться в Altair HyperWorks [46].

Основные отличительные особенности оптимизации топологии заключаются в том, что: (1) упругие свойства материала, как функция его плотности, могут изменяться во всей области проектирования; и (2) материал может быть постоянно удален из области проектирования. Существует несколько методов оптимизации топологии, которые можно разделить на две категории: (1) методы критериев оптимальности (Optimality Criteria) [47,47] и (2) эвристические или интуитивные методы (Heuristic и Intuitive methods). К топологическим методам критерия оптимальности (Optimality Criteria) относятся: (а) Метод гомогенизации для оптимизации топологии заключается в решении класса задач оптимизации формы, где топология состоит из бесконечного числа микромасштабных пустот,

которые создают пористую структуру [2]. Затем задача оптимизации состоит в нахождении оптимальных значений геометрических параметров микропустот, которые становятся переменными конструкции. Если часть структуры состоит только из пустот, материал в эту область не помещается. В качестве альтернативы – это можно представить, как возникновение полости в этой области. По этой причине данный метод классифицируется как метод оптимизации топологии. [17,49]; (б) Solid Isotropic Material with Penalization method (SIMP) - Метод был первоначально введен Bendsøe [17] в 1988 году, а затем независимо разработан Rozvany и др. [60] в 1991 году. В этом методе каждый элемент сетки конечных элементов считается частично плотным. В ходе нескольких итераций конечных элементов плотные области перераспределяются таким образом, чтобы минимизировать общую податливость (или максимизировать общую жесткость) полученной структуры. Чтобы предотвратить образование областей с промежуточной частичной плотностью, применяется схема пенализации, которая требует эвристического коэффициента пенализации [61]. Из-за способности SIMP успешно определять топологии с минимальным весом, он широко используется в области оптимизации благодаря своей вычислительной эффективности и простоте. [1,48,49]; (в) Level Set Method [50-53]; и (г) Growth Method for Truss Structures. Эвристические методы берутся из интуиции, наблюдений за инженерными процессами или из наблюдений за биологическими системами. Эти методы не всегда обеспечивают оптимальность, но могут предоставить жизнеспособные эффективные решения. Некоторые эвристические методы оптимизации топологии в следующие: (а) Полностью напряженный дизайн (Fully Stressed Design) является очень интуитивным методом оптимизации размеров и топологии, который применим к конструкциям, подверженным ограничениям по напряжению и минимальному размеру[53]; (б) Оптимизация с помощью компьютера (Computer-Aided Optimization) (CAO) разработанный Mattheck [61], который моделирует биологический рост путем объемного набухания структуры в соответствии с распределением напряжений. Процесс набухания моделирует добавление

материала в структуру, а процесс усадки, или отрицательное набухание, моделирует процесс удаления материала из структуры. Набухание легко достигается с помощью метода конечных элементов путем использования псевдотермического распределения напряжений [55,63]; (в) Вариант мягкого уничтожения (Soft Kill Option); (г) Эволюционная структурная оптимизация (Evolutionary Structural Optimization) (ESO) алгоритмы основаны на простой концепции, согласно которой традиционные конструкции проектируются с избытком и поэтому содержат области, напряжение в которых значительно ниже соответствующей прочности материала. По этой причине улучшение конструкции может быть достигнуто путем удаления ненужных областей плотного материала. В методах оптимизации типа ESO выполняется итерационный анализ методом конечных элементов, в ходе которого из конструкции постепенно удаляются области с низким уровнем напряжения [55,57]; (д) Двухнаправленная ESO (Bidirectional ESO) (BESO) позволяет не только удалять материал для устранения низкого напряжения, но и добавлять материал в области высокого напряжения [58]; (е) Последовательный отбор и прием элементов (Sequential Element Rejection and Admission) (SERA); (ё) проектирование топологии изолайнов/изоповерхностей (Isolines/Isosurfaces Topology Design) (ITD) [58].

Далее кратко рассмотрим современные проблемы проектирования ребренных конструкций. Такого рода конструкции широко применяются в авиастроении, строительстве зданий и автомобилей и т.д. Эти конструкции предназначены для того, чтобы выдерживать различные условия нагружения. Проектирование интегрально-ребристых жестких конструкций требует соответствующей нагрузки и граничных условий для обеспечения безопасности, жесткости, разрушения, смятия и ударных нагрузок [1]. Ребристые конструкции изготавливаются из плоских пластин различной толщины в различных формах.

Топологическая оптимизация (ТО) пластин и оболочек переменной толщины может быть эффективно использована для проектирования ребристо-упрочненных конструкций [64, 65]. Поскольку прямые формулировки таких задач обычно не

являются хорошо поставленными (возникают решения, зависящие от сетки) [66], были разработаны дополнительные подходы к релаксации и регуляризации. Обзор релаксационных формулировок для задач о пластинах переменной толщины можно найти в работе [67]. Регуляризационные подходы для таких задач могут быть связаны с дополнительными ограничениями на градиент толщины [68] или с ограничениями на минимальное расстояние между ребрами [8] или с трехмерной формулировкой для области утонения [69]. Альтернативные подходы к переменной толщине для ребристо-утолщенных структур были разработаны в рамках метода подвижных компонентов [69, 70], формулировки твердой оболочки [71], метода адаптивного роста [72] и интегрированную схему проектирования криволинейных ребер с переменным профилем [74]. Подобные подходы также рассматривались в рамках оптимизации армированных стекловолокном материалов и метаматериалов [74-77].

Обычная жесткая конструкция состоит из ребер жесткости и обшивки, и поскольку расположение ребер жесткости может значительно улучшить изгибную жесткость пластинчатых и оболочечных конструкций, тонкостенные жесткие панели широко используются в качестве важного несущего компонента в промышленном оборудовании, таком как ракеты-носители, самолеты и корабли, и т.д. Использование дискретных и регулярных тонкостенных ребер жесткости является эффективным способом повышения удельной изгибной жесткости и удельной прочности конструкций оболочечного типа. Поэтому конструкции с ребрами жесткости и решетчатые конструкции широко используются в различных отраслях промышленности, включая автомобильную, аэрокосмическую, гражданское строительство, интеллектуальные структуры и т.д. [78-82]. Оптимизация статических и динамических характеристик жестких пластин и оболочек была предметом интенсивных исследований в течение последних шестидесяти лет. Различные аналитические и численные подходы были использованы для обеспечения минимальной массы конструкций с наибольшей

жесткостью, собственной частотой, критической нагрузкой на смятие, статической и ударной прочностью и т.д. [83, 84].

Одним из передовых методов оптимизации для разработки эффективных структурных компонентов минимальной массы является топологическая оптимизация (ТО). Этот метод широко используется сегодня в рамках трехмерного численного моделирования для различных деталей, подверженных сложным условиям нагружения [85, 86]. Однако использование ТО для реберно-жестких конструкций в рамках стандартной трехмерной формулировки может оказаться неэффективным. Если попытаться решить такую задачу для оболочечных конструкций (моделируемых трехмерными твердотельными элементами) под действием распределенных поперечных нагрузок, то оптимальная топология всегда будет содержать решение типа "сэндвич" с тонкими листовыми листами и с каким-либо перфорированным сердечником [87, 88]. Причиной использования решений типа "сэндвич" является их наибольшая изгибная жесткость по сравнению с другими типами конфигураций поперечного сечения. Таким образом, оптимальные траектории расположения ребер жесткости для ребристо-жестких конструкций не могут быть получены непосредственно из стандартных решений 3D ТО. В то же время, многие виды конструкций не могут быть созданы со стенками из сэндвичей, и для обеспечения их эффективности и технологичности (особенно для крупногабаритных деталей) предпочтительнее использовать ребра жесткости. Более того, 3D ТО для тонкостенных конструкций большого размера требует очень больших конечно-элементных моделей с плотными сетками и длительного времени вычислений для численных расчетов.

Подходящий подход для проектирования ребристо-жестких конструкций может быть связан с так называемым подходом переменной толщины, в котором следует рассматривать модели оболочечного типа и определять их толщину как неизвестную функцию координат [89, 90]. Функция толщины должна быть найдена из решения задачи оптимизации. Такого рода задачи могут быть связаны с параметрической оптимизацией размеров (для регулярных структур) или с

оптимизацией формы (если траектории и размеры ребер определяются аналитическими функциями) или с оптимизацией топологии (если толщина определяется с помощью дополнительной узловой переменной).

Примечательно, что в последние годы подходу переменной толщины уделяется гораздо меньше внимания по сравнению с 3D ТО для твердотельных моделей. Первые рассмотрения метода переменной толщины относятся к 70-80-м годам, когда в рамках статических и динамических задач для пластин были рассмотрены проблемы минимальной податливости [89, 91]. На основании полученных численных решений и общих соображений было установлено, что получаемые оптимальные решения являются осциллирующими и сильно зависят от сетки при появлении высоких и очень тонких ребер жесткости. Было показано, что решение таких задач не принадлежит к классу регулярных функций [89, 90, 92]. Были предприняты следующие попытки преодолеть эту проблему и регуляризовать или ослабить задачи оптимизации для пластин и оболочек переменной толщины. Одним из первых подходов было рассмотрение обобщенной модели пластины, сохраняющей геометрические ограничения на максимальную и минимальную толщину пластины, но допускающей бесконечное число бесконечно тонких ребер жесткости, определяемых ее плотностью [89, 93]. Другой подход (использованный в настоящем исследовании) заключается в определении дополнительных ограничений на градиент толщины [94]. В работах [95, 97] (см. также обзор [90]) была разработана и применена теория релаксации меры Юнга для задач о пластинах переменной толщины. Регуляризованный подход для процесса оптимизации трехмерной формы в области утонения был разработан в работе [97]. Использование дополнительного условия для минимального расстояния между ребрами было предложено в работе [8]. Анализ эффективности подхода переменной толщины для пластин Миндлина-Рейсснера под давлением с обсуждением возможной интерпретации результатов был представлен в работе [64]. Вариант метода оптимизации в рамках теории пластин Кирхгофа с ограничениями на изгибные напряжения был представлен в работе [71]. Задачи

оптимизации для пластин с относительно медленным изменением толщины были рассмотрены недавно для многоматериальных задач [98] и для задач снижения шума [99].

В качестве альтернативы подходу переменной толщины для конструкций с ребрами жесткости были разработаны метод подвижных компонентов [69], формула твердой оболочки [71], метод адаптивного роста [72] и интегрированная схема проектирования криволинейных ребер с переменным профилем жесткости [74].

В настоящей работе для решения задач ТО используется система конечно-элементного моделирования COMSOL Multiphysics. В этой системе, на основе стандартных интерфейсов, возможна реализация ТО для задач статики и динамики, в том числе с учетом конечных деформаций и нелинейных физических соотношений. Также возможна реализация ТО в задачах теплопередачи, гидродинамики, акустики и, в целом, в широком классе моделей, описываемых системами дифференциальных уравнений эллиптического, гиперболического или параболического типа. Решение задач на собственные значения, в частности, на собственные частоты и устойчивость, в настоящее время не возможно в COMSOL с использованием стандартных интерфейсов (версия 6.0). Возможна реализация ТО в частотной области для задач гармонических колебаний, то есть, потенциально, возможна формулировка задач относительно собственных частот и коэффициента демпфирования конструкции, идентифицируемых на основе соответствующих амплитудно-частотных характеристик. Решение задач ТО для механики деформируемого твердого тела в COMSOL строится на основе метода конечных элементов в сочетании с методом движущихся асимптот [100], которые являются наиболее распространенными для решения таких задач. Особенностью COMSOL является возможность реализации широкого класса связанных и комбинированных расчетов, в которых пользователь может вводить собственные дополнительные уравнения, полевые переменные, пространственные и временные зависимости для характеристик материалов и других параметров моделей, различные ограничения

и целевые функции на любые из введенных переменных и т.д. Эта особенность широко используется в данной работе для решения некоторых нестандартных задач топологической оптимизации. В частности, в работе решены следующие задачи:

- 1) Формулировка метода ТО для металло-композитных конструкций с учетом ограничений на прочность и жесткость конструкции. Особенностью здесь является составной тип рассматриваемой конструкции и необходимость получения тонкостенных элементов с малым объемом оставляемого материала. рассматривается соединение двух тонкостенных панелей, одна из которых выполнена из ортотропного композита, а другая – из изотропного металла. ТО проводится в зоне расположения металлической панели. Нагрузки на оптимизируемую панель передаются, в том числе, через контакт с окружающей композитной панелью. Условия закрепления в модели ставятся только на область, не участвующую в оптимизации. Таким образом учитываются особенности работы оптимизируемой панели, в составе более крупного элемента конструкции.
- 2) Формулировка ТО для металло-композитных конструкций, с учетом ограничений на устойчивость тонкостенных элементов, окружающих зону решения задачи оптимизации. Эта задача является некоторой промежуточным вариантом между классической ТО конструкции при статическом нагружении и оптимизацию в рамках задачи устойчивости. Последняя является достаточно сложной и требует реализации специальных подходов [10]. Особенностью здесь является тот факт, что при уменьшении плотности (то есть и жесткости) конечных элементов, в них начинают появляться формы локальной потери устойчивости, соответствующие очень низким критическим нагрузкам. Для исключения этих эффектов соответствующие расчеты проводятся на сетках различного масштаба, которые позволяют отсеять элементы малой жесткости и соответствующие им формы локальной потери устойчивости [10]. В настоящей работе

реализуется похожий метод, однако, так как задача ставится в более простом виде – для тонкостенных элементов, окружающих область оптимизации – то предлагается численно-аналитический вариант оптимизации, в котором критическая нагрузка для глобальной устойчивости тонкостенных элементов оценивается на основе численно-аналитического решения в рядах, а ТО проводится на основе МКЭ в выбранной зоне конструкции.

- 3) ТО металло-композитной конструкции с одновременным выбором оптимальной схемы (направления) армирования композиционного материала. Эта задача связана с введением дополнительных полевых переменных, определяющих угол армирования композита, и двух объемных содержаний для мульти-материальной оптимизации.
- 4) Реализацию и оценить влияние параметров модели (тип элементов, коэффициент пенализации, начальные значения толщины пластины) на получаемые решения. Даны рекомендации по оптимальным настройкам рассматриваемого метода. Для получения сглаженных и независимых от сетки решений вводится дополнительное ограничение на градиент толщины, связанное с минимально допустимой шириной ребер жесткости. С помощью реализованного метода мы решаем несколько тестовых задач для пластин, нагруженных системами сосредоточенных сил. Оценка точности решений по перемещениям, найденных для оптимизированных пластин с быстро меняющейся толщиной. Оценка преимуществ решений по оптимизации топологии по сравнению со стандартным дизайном для пластин с регулярной жесткостью на основе численного моделирования, аналитических решений и экспериментальных испытаний. Покажем, что, в отличие от 3D ТО, представленный подход обеспечивает эффективные и простые рекомендации для криволинейных траекторий ребер.

Все перечисленные задачи рассматриваются в приложении к тонкостенным авиационным конструкциям. Поэтому важным является тот факт, что ставятся

очень жесткие ограничения на остающийся максимальный объем материала – не более 5%.

Еще одной особенностью является рассмотрение подкрепленных панелей, работающих, в том числе, в условиях действия давления, распределенного по поверхности. Сочетание такого типа конструкций и нагрузок оказывается достаточно сложным для реализации в рамках ТО трехмерных моделей. Дело в том, что среди всех возможных конструкций, работающих на изгиб, наибольшим конструкционным совершенством (то есть отношением изгибной жесткости к погонной массе) являются трехслойные сэндвич панели [102]. Поэтому, фактически, любой запуск задачи ТО для панели, нагруженной распределенным давлением, приведет, в результате, к геометрической форме типа сэндвич панели (рис.1.1). Однако, этот результат не может быть принят за решение задачи оптимизации, так как алгоритм ТО, выбирая такую «трехслойную» геометрию, предполагает, что в центральной области (занятой пустотой) все же присутствует некоторый материал, который, фактически, играет роль заполнителя и в численном решении его жесткость имеет малое, но ненулевое значение. При проведении поверочных расчетов оказывается, что полное удаление материала из центральной части панели, принципиальным образом меняет работу конструкции [102,104].

Таким образом, применение ТО для выбора геометрии силового набора подкрепленных тонкостенных конструкций, нагруженных давлением, требует специальных подходов. Одним из возможных вариантов, является использование моделей пластин и оболочек, в которых функция фиктивной плотности используется не для определения модуля упругости материала, а для определения локальной толщины. Именно такой подход используется далее в данной работе. Для анализа прочности этот подход дополняется затем полноценным трехмерным анализом панели, но уже с заданным расположением ребер жесткости. Также этот подход совмещается с анализом и выбором схемы армирования тонкостенных композитных элементов и с реализацией мультиматериальной оптимизации металло-композитных пластин [105,106].

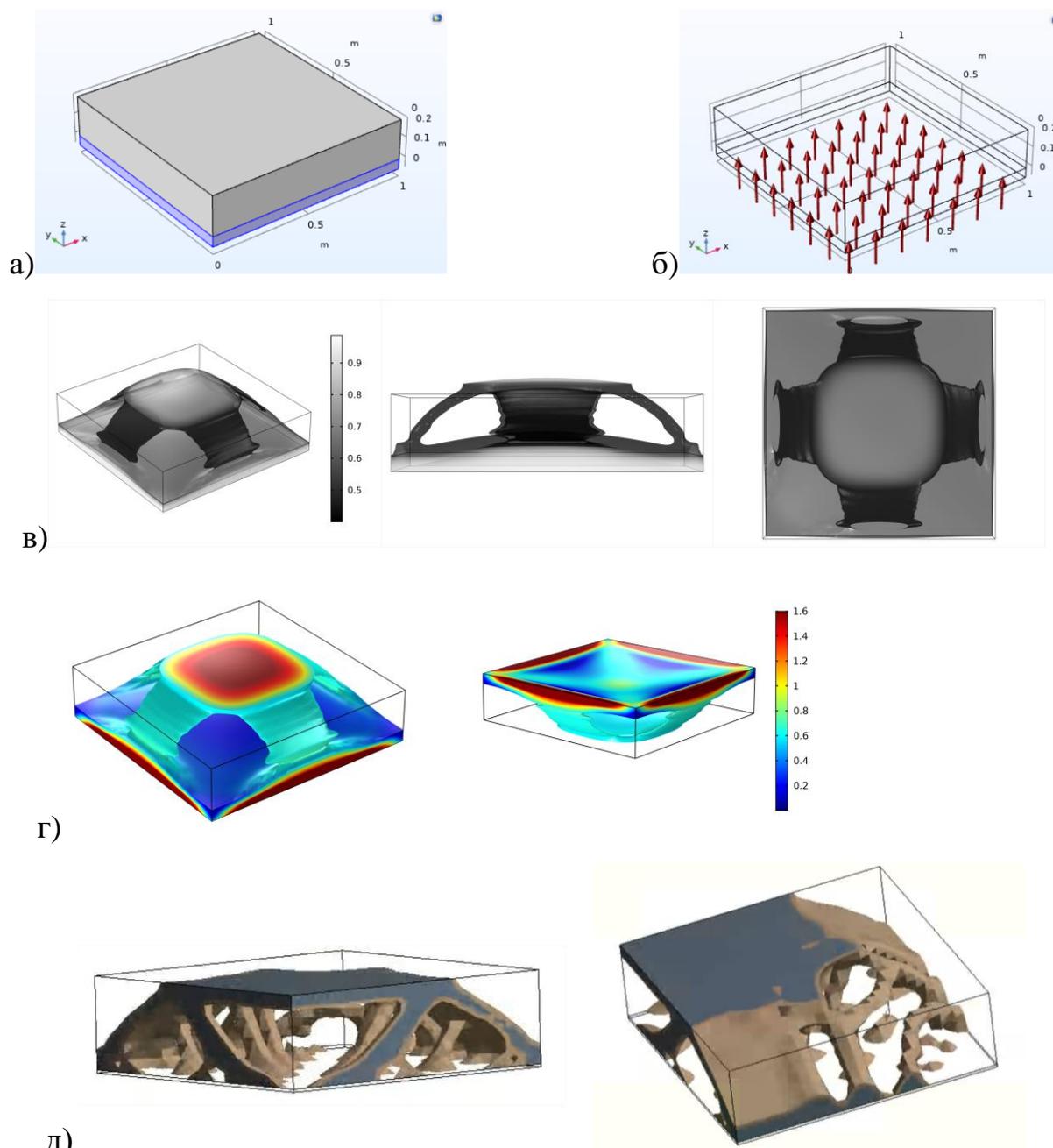


Рисунок 1.1. Пример решения задачи топологической оптимизации для панели, нагруженной давлением в COMSOL. Нижний слой панели не входит в область решения задачи оптимизации, так как он является обшивкой, воспринимающей внешнее давление. Условия опирания – заделка по боковой поверхности нижнего слоя; а – геометрия панели, б – заданное давление на поверхности, в – результаты оптимизации (распределение плотности), г – интенсивность напряжений по Мизесу [МПа], д – пример решения аналогичной задачи в ANSYS (показана $\frac{1}{4}$ часть модели с учетом симметрии).

2. ФОРМУЛИРОВКА МЕТОДА ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ И МЕТАЛЛО-КОМПОЗИТНЫХ ПАНЕЛЕЙ, РАБОТАЮЩИХ В УСЛОВИЯХ СЛОЖНО-НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Стандартная формулировка задачи топологической оптимизации для изотропного линейно упругого тела, занимающего область Ω с границей $\partial\Omega$, может быть представлена в следующем виде:

$$\min : U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv \quad (2.1)$$

$$s.t.: \bar{\rho} = \frac{\int_{\Omega} \rho dv}{\int_{\Omega} dv} \leq \bar{\rho}_{max}, \quad (2.2)$$

$$0 < \rho_{min} \leq \rho \leq 1, \quad (2.3)$$

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad x_i \in \Omega \quad (2.4)$$

$$\sigma_{ij} n_j = t_i, \quad x_i \in \Omega_{\sigma}; \quad u_i = \bar{u}_i, \quad x_i \in \Omega_u \quad (2.5)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \rho \varepsilon_{kl}; \quad \varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} / 2 \quad (2.6)$$

$$C_{ijkl} \rho = \lambda \rho \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \rho (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (2.7)$$

$$\lambda \rho = \frac{E \rho \nu}{1 + \nu}, \quad \mu \rho = \frac{E \rho}{2(1 + \nu)}, \quad (2.8)$$

$$E \rho = E_0 \rho_{min} + (1 - \rho_{min}) \rho^p \quad (2.9)$$

где “min” означает, что проводится минимизация целевой функции, “s.t.” (subject to, «при условии») – перечень условий, при которых ищется минимум целевой функции, U – полная энергия деформаций, запасаемая в области Ω , $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ – тензоры напряжений и бесконечно малых деформаций (латинские индексы изменяются от 1 до 3), ρ – функция фиктивной плотности, $\bar{\rho}_{max}$ – ограничение на значение средней

плотности $\bar{\rho}$ в решении задачи оптимизации, x_i – координаты точек в рассматриваемой области, u_i – компоненты вектора перемещений точек тела, n_i – компоненты внешней единичной нормали к поверхности тела $\partial\Omega$; $\partial\Omega_\sigma, \partial\Omega_u$ – части поверхности тела, на которой заданы статические и кинематические граничные условия, причем выполняется $\Omega_\sigma \cup \Omega_u = \partial\Omega$; t_i, \bar{u}_i – заданные на поверхности тела усилия и перемещения; $C_{ijkl}(\rho), \lambda(\rho), \mu(\rho), E(\rho)$ – тензор модулей упругости, параметры Ламе и модуль Юнга, зависящие от функции плотности; ν – коэффициент Пуассона; $p \geq 1$ – степенной показатель, определяющий характер зависимости модуля Юнга от функции плотности; по повторяющимся индексам предполагается суммирование; запятой в индексах обозначена производная по соответствующим пространственным координатам.

Постановка задачи (2.1) – (2.9) предполагает поиск оптимального распределения функции плотности ρ в заданном объеме Ω , такое что, полная энергия деформаций модели U при заданных статических нагрузках и условиях закрепления должна быть минимальной, а среднее значение плотности $\bar{\rho}$ (то есть доля объема, занятого материалом) не превышает заданное максимальное значение $\bar{\rho}_{max}$ (2.2). Функция плотности не может принимать нулевых значений, чтобы матрица жесткости модели не становилась сингулярной, поэтому минимальное ограничение снизу на значения ρ определено величиной $\rho_{min} > 0$ (2.3). Перемещения и напряженно-деформированное состояние материала в области Ω определяется на основе решения задачи теории упругости с уравнениями равновесия (2.4), статическими и кинематическими граничными условиями (2.5), с законом Гука для изотропного материала и кинематическими соотношениями для бесконечно малых деформаций (2.6). Константы жесткости материала (2.7), параметры Ламе (2.8) и модуль Юнга (2.9) полиномиально зависят от функции плотности с показателем степени p , обеспечивающим (при $p > 1$) возможность повышения устойчивости решений задачи оптимизации и возможность повышения «четкости» границ оптимизированной геометрии детали. Для этих же задач в

качестве дополнительной функции цели можно вводить нормированное значение интеграла от градиента функции плотности – таким образом можно минимизировать количество зон материала с переменным значением ρ . Этот подход, однако, не используется в данной работе, так как он несколько усложняет расчеты и увеличивает время вычислений. В последних версиях COMSOL используется альтернативный вариант «срезки» областей с переходными значениями плотности, основанный на первоначальном введении процедуры фильтрации на основе уравнения Гельмгольца для ухода от привязки решения к границам конечных элементов и, далее, на введении, так называемой, процедуры проекции для уменьшения размытия границ области, занимаемой материалом [107].

Решение задачи (2.1) – (2.9) строится численно методом конечных элементов путем многократного решения задачи теории упругости с изменяемым на каждой итерации расчетом распределением поля плотности, которое определяется на основе метода движущихся асимптот [100]. В результате, определяется вариант распределения функции плотности, при котором область, занятая материалом ($\rho \approx 1$) наиболее эффективным образом воспринимает внешние нагрузки. Области материала, в которых энергия деформаций изначально, практически, не «накапливалась», автоматически исключаются из расчета путем предписания в соответствующих конечных элементах минимального значения функции плотности ($\rho = \rho_{min}$). Таким образом, определяется вариант геометрии с заданным снижением массы и с наиболее высокой жесткостью в условиях заданных нагрузок (эти нагрузки совершают минимальную работу).

Единственность получаемого решения и, в принципе, возможность определения глобального минимума в задачах ТО, вообще говоря не может быть доказана для достаточно сложных вариантов конструкций и сложных случаев нагружения. Получаемое решение может зависеть от конечно-элементной сетки (что отчасти исключается корректным введением процедуры фильтрации и проекции), от начального распределения функции плотности, от настроек КЭ

решателя и метода ТО. Тем не менее, для относительно простых задач получаемые решения оказываются достаточно стабильными вне зависимости от указанных параметров и вне зависимости от применяемого решателя. Более того, близкими оказываются и решения, определяемые с использованием различных законов интерполяции для модуля Юнга: SIMP (2.9) и другого часто применяемого закона – RAMP (дробно рациональная зависимость) [107]. Для сложных и масштабных задач, например, при оптимизации силового набора полноразмерной модели крыла самолета [109], принято считать, что ТО позволяет получать оценки для вариантов оптимальных конструкций и требует последовательной многократной проверки влияния всех параметров задачи на получаемые решения.

Решение задачи (2.1) – (2.9) может быть построено в COMSOL с использованием интерфейсов Solid Mechanics для решения задачи теории упругости и Optimization для решения задачи оптимизации. Объединение этих интерфейсов реализуется в разделе проекта Study, в котором необходимо добавлять оптимизационный решатель с выбором метода оптимизации – MMA (Method of Moving Asymptotes). Целевая функция (энергия деформаций (2.1)) вводится в узле Optimization - Global Objective для полной энергии деформации модели, либо с использованием узла Optimization - Integral Objective, если в задаче ТО рассматривается вариант минимизации энергии деформаций только для части модели. Ограничение в виде неравенства на среднюю плотность (2.2) ставится, например, с использованием узла Optimization - Integral Inequality Constraint. Введение функции фиктивной плотностью осуществляется в узле Optimization – Control Vairable Field. В последних версиях COMSOL также возможно использовать специальный интерфейс задания поля плотности для задачи топологической оптимизации через раздел дерева проекта Variables, в котором можно создавать переменные типа Topology Optimization. Зависимость модуля Юнга материала от функции плотности (2.9) вводится непосредственно в виде уравнения в узле для задания свойств материала, например, в разделе Solid

Mechancis – Linear Elastic Material, либо возможно создание отдельного материала в разделе дерева проекта Materials.

В связи с указанными во введении сложностями реализации ТО для трехмерных моделей подкрепленных конструкций, работающих в условиях действия распределенного давления (рис. 1), предлагается рассмотреть вариант задачи ТО для тонкостенной конструкции, моделируемой в рамках теории пластин. В частности, рассматривается модель пластин Миндлина-Рейсснера (First-Order Shear Deformation Theory), позволяющая учесть податливость материала пластины на трансверсальный сдвиг [109]. В этой теории, в отличие от классической теории пластин Кирхгоффа, нормали не остаются перпендикулярными к нейтральной (базовой) поверхности пластины. Такая формулировка позволяет применять эту теорию и для пластин относительно большой толщины, что является существенным в задаче ТО, в которой области, выбираемые для размещения подкрепляющих элементов, могут отличаться в 10-50 раз по толщине от остальных областей, где располагается только тонколистовой материал обшивки. Для прочностного анализа получаемые решения, вероятно, оказываются отмеченные недостатки статочны точными и требуют более аккуратного моделирования в трехмерной постановке или с прорисовкой получаемых подкрепляющих элементов конструкции отдельными пластинчатыми конечными элементами на следующей стадии проектирования конструкции. В данной работе примеры ТО представлены для плоских пластин (панелей). Для криволинейных оболочечных элементов конструкций методы ТО могут быть реализованы аналогичным образом с заменой решения уравнений теории пластин на соответствующие уравнения теории оболочек.

Предлагаемая формулировка задачи ТО для поиска оптимального расположения элементов силового набора подкрепленной панели, представляющую собой плоскую поверхность Ω с границей $\partial\Omega$ в трехмерном пространстве, может быть записана следующим образом:

$$\text{minimize : } U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (N_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}^0 + M_{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta} + V_{\alpha} \gamma_{\alpha}) ds \quad (2.10)$$

$$s.t. : \bar{\rho} = \frac{\int_{\Omega} \rho ds}{\int_{\Omega} ds} \leq \bar{\rho}_{max}, \quad (2.11)$$

$$0 < \rho_{min} \leq \rho \leq 1 \quad (2.12)$$

$$N_{\alpha\beta,\alpha} = 0, M_{\alpha\beta,\beta} - V_{\alpha} = 0, V_{\alpha,\alpha} + q = 0, x_{\alpha} \in \quad (2.13)$$

$$N_{\alpha\beta} n_{\alpha} = \bar{N}_{\beta}, x_{\alpha} \in \Omega_N, u_{\alpha} = \bar{u}_{\alpha}, x_{\alpha} \in \Omega_u, \quad (2.14)$$

$$M_{\alpha\beta} n_{\beta} = \bar{M}_{\beta}, x_{\alpha} \in \Omega_M, \theta_{\alpha} = \bar{\theta}_{\alpha}, x_{\alpha} \in \Omega_w \quad (2.15)$$

$$V_{\alpha} n_{\alpha} = \bar{V}, x_{\alpha} \in \Omega_V, w = \bar{w}, x_{\alpha} \in \Omega_u \quad (2.16)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^0 = (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) / 2, \kappa_{\alpha\beta} = (\theta_{\alpha,\beta} + \theta_{\beta,\alpha}) / 2, \gamma_{\alpha} = \theta_{\alpha} + w_{\alpha} \quad (2.17)$$

$$\begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{14} & B_{11} & B_{12} & B_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{24} & B_{21} & B_{22} & B_{24} \\ A_{14} & A_{24} & A_{44} & B_{41} & B_{42} & B_{44} \\ B_{11} & B_{12} & B_{14} & D_{11} & D_{12} & D_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{24} & D_{12} & D_{22} & D_{24} \\ B_{41} & B_{42} & B_{44} & D_{14} & D_{24} & D_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^0 \\ \varepsilon_{22}^0 \\ 2\varepsilon_{12}^0 \\ \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{55} & S_{56} \\ S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

$$A_{ij} = I_{ij}^{(0)}, B_{ij} = I_{ij}^{(1)} - e I_{ij}^{(0)}, D_{ij} = I_{ij}^{(2)} - e I_{ij}^{(1)} + e^2 I_{ij}^{(0)}, S_{ij} = \frac{(h(\rho))^2 J_{ij}}{J_{55} J_{66} - J_{56}^2} \quad (2.19)$$

$$I_{ij}^{(k)} = \int_0^{h(\rho)} C_{ij} z^k dz, (k=0,1,2), J_{ij} = \int_0^{h(\rho)} \frac{C_{ij}}{C_{55} C_{66} - C_{56}^2} dz$$

$$h(\rho) = h_{max} (\rho_{min} + (1 - \rho_{min}) \rho^p), h(\rho) = h_0 + h_{max} \rho \quad (2.20)$$

где $N_{\alpha\beta}$, $M_{\alpha\beta}$, V_{α} – погонные продольные усилия, изгибающие моменты и перерезывающие усилия, действующие в пластине, соответственно (греческие индексы изменяются от 1 до 2); $\varepsilon_{\alpha\beta}^0$, $\kappa_{\alpha\beta}$, γ_{α} – деформации нейтральной (отсчетной) плоскости, кривизны и углы сдвига, соответственно; u_{α} – перемещения в плоскости пластины; θ_{α} – углы поворота нормалей; w – прогибы пластины;

$\bar{N}_\beta, \bar{V}, \bar{M}_\beta, \bar{u}_\alpha, \bar{\theta}_\alpha, \bar{w}$ – заданные усилия, моменты, перемещения, углы поворота и прогибы на соответствующих частях контура пластины; q – распределенная нагрузка на поверхности пластины (предполагаем, что давление действует только с одной стороны пластины); A_{ij} – мембранные коэффициенты жесткости пластины, B_{ij} – смешанные коэффициенты жесткости пластины (отличны от нуля для пластин с несимметричной структурой), D_{ij} – коэффициенты изгибной жесткости, S_{ij} – коэффициенты жесткости пластины при трансверсальном сдвиге; все коэффициенты жесткости рассчитываются через вспомогательные интегральные коэффициенты $I_{ij}^{(k)}, J_{ij}$, вычисляемые с учетом зависимости толщины пластины от функции плотности $h(\rho)$; C_{ij} – компоненты тензора модулей упругости (в нотации Фойгта) для материала пластины; z – координата в направлении толщины пластины, отсчитываемая от ее нижней поверхности.

Соотношения применяемой теории пластин с уравнениями равновесия (2.13), граничными условиями (2.14) – (2.16), с кинематическими соотношениями (2.17) и определяющими соотношениями (2.18), представлены в общем виде и могут применяться как для моделей однослойных изотропных материалов, так и для многослойных анизотропных композитов. В последнем случае константы жесткости пластины следует вычислять с использованием соотношений (2.19), учитывая зависимость свойств материала от координаты по толщине пластины z (для многослойных панелей) и от значения локального угла ориентации волокон (для анизотропных слоев).

Основной особенностью записанной модели (2.10) – (2.20) является использование функции фиктивной плотности ρ для задания локального значения толщины панели (2.20). Такое определение толщины подкрепленной пластины в задаче ТО является достаточно естественным, так как использование обычного подхода с зависимостью модуля упругости от ρ предполагало бы полное удаление материала пластины из зон с минимальными значениями функции плотности. В рассматриваемом же случае мы получаем изменение толщины панели от

минимального значения $h_{min} = h_{max}\rho_{min}$, которое соответствует толщине лицевой обшивки панели, до максимальной толщины h_{max} , которая определяет максимально допустимую высоту подкрепляющих элементов и может быть задана из конструктивных соображений.

Построение решения задачи (2.10) – (2.20) с использованием метода конечного элемента в COMSOL Multiphysics возможно с использованием стандартного интерфейса Shell в сочетании с моделью слоистого материала Layered Linear Elastic Material для решения задачи о деформациях пластины и интерфейса Optimization для реализации задачи оптимизации. Настройки задачи оптимизации могут быть выполнены аналогично описанным выше для трехмерных моделей. Везде далее при формулировке задач ТО будем предполагать, что решение должно удовлетворять либо уравнениям теории пластин (2.13) – (2.17), либо трехмерным уравнениям теории упругости (2.4) – (2.8), что будет отмечено в тексте, а соответствующие уравнения будем опускать.

2.1 Учет дополнительных локальных ограничений по жесткости и глобальных ограничений на прочность конструкции

Наиболее частым дополнительным ограничением, которое применяется в задачах ТО элементов конструкций, является ограничение на переход материала в состояние пластичности или ограничение по прочности. Другой частый тип ограничений – ограничения по жесткости – могут быть связаны с необходимостью уменьшения перемещений в какой либо части изделия (в элементе объема или поверхности, или в точке), например, для размещения в этих зонах прецизионного оборудования требующего минимальных смещений.

В рамках предлагаемого подхода ограничения на жесткость могут быть непосредственно включены в задачу оптимизации для тонкостенной конструкции (2.10)–(2.20), однако для оценки прочности/пластичности важным является проведение дополнительного анализа в трехмерной постановке, так как резкие переходы толщины, возникающие при решении задачи ТО, могут приводить к

существенному снижению точности при оценке действующих напряжений на основе моделей пластин или оболочек. Поэтому в данном случае предлагается использовать модель ТО тонкостенной конструкции (2.10) – (2.20) для поиска оптимального расположения подкрепляющих ребер жесткости панели, и проводить дополнительных трехмерный анализ в рамках решения задачи (2.1) – (2.9) с целью прочностного анализа получаемой геометрии и поиска дополнительных вариантов ее оптимизации в трехмерной постановке. Такой подход осуществляется трансляцией найденного решения для распределения толщин панели из задачи (2.10) – (2.20) в исходную трехмерную геометрию для задачи (2.1) – (2.9).

В общем случае, дополнительные ограничения по жесткости и прочности записываются в постановке задачи оптимизации следующим образом:

$$\text{minimize: } U \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.: } \bar{\rho} &\leq \bar{\rho}_{max}, \\ 0 &< \rho_0 \leq \rho \leq 1, \end{aligned}$$

$$\sigma_i < \sigma_{0,2}, x_i \in \Omega_M, \quad (2.22)$$

$$f(\sigma_{ij}) < 1, x_i \in \Omega_C, \quad (2.23)$$

$$u_i < u_{i,max}, x_i \in \Omega_{u,max}, \quad (2.24)$$

где ограничение на переход в текучесть (2.22) ставится для области Ω_M , занятой металлическим материалом панели и записывается относительно вычисляемой интенсивности напряжений по Мизесу σ_i ; соответственно, $\sigma_{0,2}$ – это условный предел текучести материала; критерий прочности (2.23) записывается для области Ω_C , в которой располагаются композитные материалы; ограничения на перемещения (2.24) ставятся в соответствующей области модели $\Omega_{u,max}$; при этом подразумевается реализация решения либо трехмерной задачи теории упругости с выполнением соответствующих уравнений равновесия и граничных условий.

При программной реализации ограничений на прочность важно учитывать следующий эффект. При локальном снижении упругих свойств материала в нем может повыситься уровень деформаций (и, соответственно, напряжений), что не является существенным с точки зрения оптимизации по условию жесткости (так как в этой области материал удаляется), но что может приводить к неустойчивости при решении задач ТО с ограничениями на прочность и возникновению большого количества элементов с некоторыми средними значениями функции плотности, что приводит к размытию границ оптимизированной геометрии [114]. При этом, ограничение на прочность может не выполняться повсюду в зонах с малыми значениями функции плотности. Для исключения таких эффектов условие прочности вводится с поправкой на значение функции плотности, например, в виде $\sigma_i < \rho^q \sigma_{0,2}$ ($q < p$) или $(\sigma_i - \rho^q \sigma_{0,2})\rho < 0$.

2.2 Реализация метода ТО для моделей, в которых область проведения оптимизации контактирует с окружающими тонкостенными конструкциями

Учет наличия тонкостенных элементов, окружающих зону построения решения задачи ТО, связан с кусочным определением зависимости упругих констант материала от функции плотности. Внутри зоны оптимизации вводится соотношение вида (2.9) для зависимости модуля упругости материала от плотности, либо соответствующая зависимость для толщины пластины вида (2.20). Вне зоны оптимизации задаются постоянные значения упругих констант или, соответственно, постоянное значение толщины. В областях, исключаемых из решения задачи оптимизации, функция плотности может быть либо не определена, либо задана равной любому произвольному значению, которые не учитываются в решении задачи.

Контакт трехмерной области решения задачи ТО с тонкостенными элементами осуществляется в COMSOL Multiphysics с использованием так называемого мульти-физического интерфейса Solid-Shell Connection. Контакт двух

элементов типа пластин осуществляется непосредственным объединением соответствующих моделей функцией Unite в разделе дерева проекта Geometry.

Формально, постановка задачи оптимизации с контактом между трехмерной или тонкостенной зоной оптимизации и окружающими (тонкостенными или 3д) элементами, имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \text{minimize : } U &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega \quad (U_1 = \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega) \\
 \text{s.t. : } \bar{\rho} &= \frac{\int_{\Omega_1} \rho dv}{\int_{\Omega_1} dv} \leq \bar{\rho}_{max}, \\
 0 &< \rho_{min} \leq \rho \leq 1, \\
 C_{ijkl} &= \begin{cases} C_{ijkl}(\rho), & x_i \in \Omega_1 \\ C'_{ijkl}, & x_i \in \Omega_2 \end{cases} \quad (\text{для трехмерных моделей}) \\
 h &= \begin{cases} h(\rho), & x_i \in \Omega_1 \\ h', & x_i \in \Omega_2 \end{cases} \quad (\text{для моделей пластин})
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

где Ω_1 – область решения задачи оптимизации, Ω_2 – область, не участвующая в решении задачи оптимизации, причем выполняется $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$; тензор C'_{ijkl} содержит константы, определяющие свойства вне трехмерной зоны оптимизации; h' - постоянная толщина пластин вне зоны оптимизации; целевая функция может быть записана как относительно энергии деформаций U , реализующейся во всей модели, так и для энергии деформаций U_1 только для части модели Ω_1 , в которой решается задача оптимизации.

2.3 Учет дополнительных ограничений, связанных с требованиями по устойчивости тонкостенных элементов конструкций, контактирующих с областью построения решения

Решение задачи ТО с учетом ограничений на устойчивость может быть выполнено с использованием численного КЭ моделирования упругих деформаций модели в сочетании с приближенным численно-аналитическим решением задачи

устойчивости на основе метода Ритца. Формально, ограничение на устойчивость вводится в постановку задачи ТО следующим образом:

$$\begin{aligned} & \text{minimize : } U \\ & \text{s.t.: } \bar{\rho} \leq \bar{\rho}_{max}, \\ & \quad 0 < \rho_0 \leq \rho \leq 1, \\ & \quad \lambda > 1 \end{aligned} \quad (2.26)$$

где λ – коэффициент запаса устойчивости и предполагается решение задачи для деформаций тонкостенной пластины переменной толщины (2.10) – (2.20).

Для приближенной оценки критических нагрузок и коэффициента запаса устойчивости тонкостенной прямоугольной пластины переменной толщины, используем принцип минимума потенциальной энергии Π , в соответствии с которым должно выполняться условие:

$$\delta \Pi = \delta U - \delta V = 0 \quad (2.27)$$

где δU – вариация энергии деформаций, δV – вариация работы внешних сил.

Энергию деформаций пластины переменной толщины оцениваем в предположении (квази-) изотропии материалов конструкции на основе классической теории пластин [111]:

$$U = \int_0^a \int_0^b D(x, y) \left(w_{,xx}^2 + w_{,yy}^2 + 2\nu w_{,xx} w_{,yy} + 2(1-\nu) w_{,xy}^2 \right) dx dy \quad (2.28)$$

где $D(x, y) = \frac{E (h(x, y))^3}{12(1-\nu)^2}$ – изгибная жесткость, вычисляемая в каждой точке панели с учетом локального значения толщины $h(x, y) = h(\rho(x, y))$; a, b – размеры пластины в плоскости.

Работу внешних сил вычисляем в предположении действия заданных сжимающих напряжений σ в направлении оси x :

$$V = \int_0^a \int_0^b \sigma h(x, y) w_{,x}^2 dx dy \quad (2.29)$$

В предположении шарнирного опирания пластины по контуру представим прогибы пластины в рядах (по повторяющимся индексами здесь и далее предполагается суммирование):

$$w = a_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (2.30)$$

где a_{mn} – неизвестные коэффициенты; $\alpha_m = \frac{m\pi}{a}$, $\beta_n = \frac{n\pi}{b}$ – нормировочные коэффициенты, соответствующие кинематическим граничным условиям; суммирование проводится по повторяющимся индексам $m = 1 \dots M$, $n = 1 \dots N$; числа M , N – это количество гармоник, используемых для аппроксимации собственных форм потери устойчивости пластины в направлении осей x и y .

Подставляя (2.30) в (2.28), (2.29), получим:

$$U = D_{mnpq} a_{mn} a_{pq}, \quad V = \sigma H_{mnpq} a_{mn} a_{pq}$$

$$m, p = 1 \dots M, \quad n, q = 1 \dots N$$

где коэффициенты D_{mnpq} и H_{mnpq} – это некоторые обобщенные варианты средней изгибной жесткости и средней толщины пластины, которые вычисляются интегрированием:

$$D_{mnpq} = \int_0^a \int_0^b D(x, y) F_{mnpq}(x, y) \left(\begin{array}{l} \alpha_m^2 \alpha_p^2 + \beta_n^2 \beta_q^2 + 2\nu \alpha_m^2 \beta_q^2 \\ + 2(1-\nu) \alpha_m \beta_n \alpha_p \beta_q \end{array} \right) dx dy$$

$$H_{mnpq} = \int_0^a \int_0^b h(x, y) F_{mnpq}(x, y) \alpha_m \alpha_p dx dy, \quad (2.31)$$

$$F_{mnpq}(x, y) = \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \sin \alpha_p x \sin \beta_q y$$

Принцип минимума потенциальной энергии (2.27) выражается требованием равенства нулю производных от функции потенциальной энергии по соответствующим коэффициентам в представлении метода Ритца (2.30):

$$\delta \Pi = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial a_{mn}} = 0,$$

что дает нам систему однородных уравнений (по одному для каждого коэффициента a_{mn}) следующего вида:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} \mathbf{a} &= 0 \\ \mathbf{K} &= \left\{ K_{(mn)(pq)} \right\} = \left\{ D_{mnpq} - \sigma H_{mnpq} \right\} \\ \mathbf{a} &= \{ a_{(pq)} \}^T \\ m, p &= 1 \dots M; n, q = 1 \dots N \end{aligned} \quad (2.32)$$

где матрица \mathbf{K} и вектор неизвестных коэффициентов \mathbf{a} образованы соответствующими четырех- и двух- индексными элементами, располагаемыми в лексико-графическом порядке, например, для $M = N = 2$:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{1111} & K_{1112} & K_{1121} & K_{1122} \\ K_{1211} & K_{1212} & K_{1221} & K_{1222} \\ K_{2111} & K_{2112} & K_{2121} & K_{2122} \\ K_{2211} & K_{2212} & K_{2221} & K_{2222} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \{ a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \}^T$$

Общее число уравнений в системе (2.32) равно произведению $S = MN$. Собственные значения для величины внешней нагрузки σ определяются из условия равенства нулю определителя системы (2.32):

$$\det \mathbf{K} = 0 \Rightarrow \sigma_s (s = 1 \dots S) \quad (2.33)$$

Значение критической нагрузки определяется минимальным собственным значением $(\sigma_s)_{min}$. Коэффициент запаса устойчивости, соответственно, определяется отношением заданных в расчете напряжений $\bar{\sigma}$ к вычисленной критической нагрузке:

$$\lambda = \frac{(\sigma_s)_{min}}{\bar{\sigma}} = \frac{h' b (\sigma_s)_{min}}{\bar{N}_1}, \quad (2.34)$$

где мы учитываем, что нагрузка задается на элементах, окружающих зону оптимизации и имеющих постоянную толщину h' .

Использование предложенной методики учета ограничений по устойчивости в процессе ТО требует получения оценки λ (2.34) непосредственно в процессе итерационного решения задачи оптимизации. Для этого на каждом шаге расчета для каждого заданного распределения функции фиктивной плотности необходимо вычислять осредненные значения изгибной жесткости и толщины пластины (31), и затем решать алгебраическое уравнение (2.33), которое имеет порядок S . Далее необходимо выбрать минимальный положительный действительный корень этого уравнения, и использовать его в (2.33). Собственные формы потери устойчивости могут быть определены подстановкой найденных собственных значений (2.33) в систему (2.32), как соответствующие собственные вектора неизвестных коэффициентов a_s . Используя относительно небольшое количество функций в представлении для функции прогибов (2.30), мы получаем приближенную оценку для критических нагрузок, соответствующих основным формам глобальной потери устойчивости, которые реализуются в решаемой задаче. Аналогичный подход использовался, например, при решении задачи параметрической оптимизации трехслойных панелей в работе [111].

2.4 Реализация совместной топологической и параметрической оптимизации металло-композитных конструкций с учетом параметров армирования композита и при наличии ограничений по условиям прочности

Будем рассматривать два варианта решения задачи ТО для тонкостенных металло-композитных конструкций, в которых одновременно проводится поиск оптимального распределения для функции фиктивной плотности и поиск оптимальной схемы армирования композиционного материала.

Во-первых, рассматриваем случай, при котором задача ТО решается для металлической части конструкции, а схема армирования выбирается для окружающих композитных тонкостенных элементов. Постановка задачи в этом случае имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \min : U \\
& \text{s.t.} : \bar{\rho} \leq \bar{\rho}_{max}, \\
& 0 < \rho_{min} \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \varphi_k \leq 90, \quad (k = 1 \dots n) \\
& f(\sigma_{ij}) < 1, \quad x_i \in \Omega_C, \\
& h(\rho) = h_{max} (\rho_{min} + (1 - \rho_{min}) \rho^p), \quad x_i \in \Omega_M, \\
& h = h', \quad x_i \in \Omega_C \\
& A_{ij} = A_{ij}(\rho), B_{ij} = B_{ij}(\rho), D_{ij} = D_{ij}(\rho), \\
& S_{ij} = S_{ij}(\rho), \quad C_{ij} = C_{ij}^{(M)}, \quad x_i \in \Omega_M \\
& A_{ij} = A_{ij}(\varphi_k), B_{ij} = B_{ij}(\varphi_k), D_{ij} = D_{ij}(\varphi_k), \\
& S_{ij} = S_{ij}(\varphi_k), \quad C_{ij} = C_{ij}^{(C)}(\varphi_k), \quad x_i \in \Omega_C
\end{aligned} \tag{2.35}$$

где φ_k – углы армирования (локальные или на всей пластине) монослоев композиционного материала, n – число монослоев в слоистом композите.

Во-вторых, рассматриваем задачу оптимизации композитной конструкции, состоящей из металлической обшивки с фиксированной толщиной h' и композитных подкрепляющих элементов, расположение и угол армирования которых определяется по результатам решения задачи оптимизации. В этом случае имеем следующую постановку задачи:

$$\begin{aligned}
& \min : U \\
& \text{s.t.} : \bar{\rho} \leq \bar{\rho}_{max}, \\
& 0 < \rho_{min} \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 90, \\
& \sigma_i < \sigma_{0,2}, \quad x_i \in \Omega_M \\
& f(\sigma_{ij}) < 1, \quad x_i \in \Omega_C, \\
& A_{ij} = A_{ij}(\rho, \varphi), B_{ij} = B_{ij}(\rho, \varphi), D_{ij} = D_{ij}(\rho, \varphi), S_{ij} = S_{ij}(\rho, \varphi) \\
& C_{ij} = C_{ij}^{(M)}, \quad 0 \leq z \leq h', \\
& C_{ij} = C_{ij}^{(C)}(\varphi), \quad h' \leq z \leq h' + h(\rho), \\
& h(\rho) = h_{max} \rho^p, \quad x_i \in \Omega_C
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Отличим записанных задач (2.35), (2.36) от рассмотренных ранее

являются введенные новые параметры – углы армирования. В задаче (2.35) предполагаем, что композит может быть многослойным и его армирование определяется несколькими углами армирования φ_k . В задаче (2.36) предполагаем, что композитные подкрепляющие элементы имеют однонаправленную структуру и их характеризует единственный угол армирования φ . В обоих случаях будем предполагать, что строится решение задачи для элементов типа пластин. В задаче (2.35) имеем две независимые области – металлическую, в которой решается задача ТО, и композитную, в которой выбирается схема армирования. При этом угол армирования может задаваться глобально (для всей композитной области) и тогда мы имеем формулировку задачи топологической-параметрической оптимизации. Либо можно искать оптимальную криволинейную схему армирования композита и задавать угол армирования в качестве новой полевой переменной модели, зависящей от координат. В формулировке (2.36) обе задачи (и ТО, и выбор схемы армирования) решаются для композитных слоев. Толщина композитного слоя может быть нулевой в тех зонах, где подкрепляющие элементы отсутствуют. В этих зонах располагается только металлическая обшивка фиксированной толщины, которая и воспринимает нагрузки (внешнее давление).

С точки зрения моделирования, угол армирования определяет угол ориентации главных осей трансверсально изотропного материала монослоя относительно глобальной системы координат. Предполагая известными характеристики монослоя (модуль упругости вдоль волокон E_1 , модуль упругости поперек волокон E_2 , модуль сдвига в плоскости G_{12} , коэффициент Пуассона $\nu_{21} = \nu_{12} E_1/E_2$), свойства монослоя в глобальной системе координат могут быть определены на основе стандартных соотношений [113]:

$$\begin{aligned}
C(\varphi) &= T^{-1} C_0 T^{-T} \\
C_0 &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \\
T &= \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & \sin 2\varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & -\sin 2\varphi \\ -\sin 2\varphi / 2 & \sin 2\varphi / 2 & \cos 2\varphi \end{bmatrix} \\
C_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad C_{12} = C_{21} = \frac{\nu_{12}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad C_{66} = G_{12}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

где предполагается плоское напряженное состояние монослоев; C_0 – тензор модулей упругости монослоя в локальной системе координат, для компонент которого используется нотация Фойгта; $C(\varphi)$ – тензор модулей упругости в повернутой (глобальной) системе координат, компоненты которого $C_{ij}(\varphi)$ используются в расчетах; трансверсальные модули сдвига композита считаются, приблизительно, постоянными и независимыми от угла армирования.

2.5 Реализация топологической оптимизации металло-композитных конструкций с использованием дополнительных полевых переменных, учитывающих неоднородность составной конструкции

Последней рассматриваемой задачей является вариант мульти-материальной ТО, в которой проводится поиск оптимального расположения металлического и композиционного материала, причем в последнем одновременно выбирается и схема армирования. Такая формулировка задачи требует введения, помимо угла армирования φ , еще и дополнительной (второй) функции плотности ρ_2 . В результате первая плотность ρ_1 определяет толщину пластины в данной точке модели, а вторая функция – объемную долю первого материала (металл) в этой точке по отношению ко второму материалу (композит). Таким образом, алгоритм выбирает распределение двух материалов в области оптимизации. Процедуры фильтрации и проекции позволяют уменьшить (исключить) долю областей, в

которых содержатся некоторые промежуточные значения для функций плотностей, и получить решение, в котором функции плотности принимают только значения близкие к 0 или 1.

Решение строится в рамках теории пластин. Постановка рассматриваемой задачи следующая:

$$\begin{aligned}
 & \text{minimize: } U \\
 & \text{s.t.: } \bar{\rho}_1 \leq \bar{\rho}_{1,max} \\
 & 0 < \rho_{1,min} \leq \rho_1 \leq 1, \quad 0 \leq \rho_2 \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 90, \\
 & \sigma_i < \sigma_{0,2}, x_i \in \Omega_M, \\
 & f(\sigma_{ij}) < 1, x_i \in \Omega_C, \\
 & A_{ij} = A_{ij}(\rho_1, \rho_2, \varphi), B_{ij} = B_{ij}(\rho_1, \rho_2, \varphi), D_{ij} = D_{ij}(\rho_1, \rho_2, \varphi), S_{ij} = S_{ij}(\rho_1, \rho_2, \varphi) \\
 & h(\rho_1) = h_{max}(\rho_{min} + (1 - \rho_{min})\rho_1^p), C_{ij}(\rho_2, \varphi) = C_{ij}^{(M)}\rho_2^p + (1 - \rho_2^p)C_{ij}^{(C)}(\varphi)
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Таким образом, одновременно вводятся две интерполяционных схемы типа SIMP для толщины пластины $h(\rho_1)$ и для ее упругих свойств $C_{ij}(\rho_2, \varphi)$. В обеих схемах вводится одинаковый степенной показатель p , предполагая что степень «размытости» границ между твердым материалом и пустотами, и между двумя материалами должна быть одинаковой. Все соотношения для упругих констант и для коэффициентов жесткости пластины вычисляются стандартным образом, аналогично (2.10) – (2.20) и (2.37). Отличием задачи (2.38) является способ вычисления упругих констант $C_{ij}(\rho_2, \varphi)$, для которых интерполяция SIMP вводится для описания перехода свойств материала от характеристик изотропного металла $C_{ij}^{(M)}$ к характеристикам анизотропного композита $C_{ij}^{(C)}(\varphi)$.

3. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ПАНЕЛЕЙ, НАГРУЖЕННЫХ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ СИЛАМИ

3.1. Оценка эффективности ТО в сопоставлении с параметрической оптимизацией для условий нагружения сосредоточенными силами

Построение решения задачи (2.10) – (2.20) проводилось в системе Comsol с использованием метода конечных элементов в геометрически линейной формулировке и в предположении малых прогибов. Для решения задачи о деформациях пластины использовался стандартный интерфейс Shell в сочетании с моделью слоистого материала Layered Linear Elastic Material. Условия задачи оптимизации задавались через интерфейс Optimization, а ее решение находилось с использованием метода двужущихся асимптот (ММА, Method of Moving Asymptotes). Единственность получаемого решения и, в принципе, возможность определения глобального минимума в задачах ТО, вообще говоря не может быть доказана для достаточно сложных вариантов конструкций и сложных случаев нагружения. Получаемое решение может зависеть от конечно-элементной сетки, от начального распределения функции плотности, от настроек КЭ решателя и метода ТО. Тем не менее, для относительно простых задач получаемые решения оказываются достаточно стабильными вне зависимости от указанных параметров и вне зависимости от применяемого решателя.

В приводимых далее примерах всегда будем рассматривать панели квадратной формы. Для оценки эффективности алгоритма ТО будем сопоставлять результаты расчетов с результатами параметрической оптимизации (ПО) для стандартных вариантов ребрения панели. В качестве таких стандартных вариантов будем рассматривать панели, с ребрами жесткости, которые располагаются под углами +45 и -45 градусов по отношению к граням пластины. Такая структура ребер жесткости обеспечивает связанность угловых точек квадратной панели и максимальное повышение жесткости в рассматриваемых задачах (среди панелей с регулярным ребрением). Наилучшая конфигурация

таких тестовых панелей определялась по результатам ПО, в которой управляющими параметрами были количество и геометрические размеры ребер жесткости (толщина, высота), целевой функцией в задаче ПО, также как и в ТО, являлась полная энергия деформаций панелей, а ограничения ставились на максимально допустимые объем ребер жесткости. Решение задачи ПО строилось также в Comsol. В этом решении и обшивки, и ребра жесткости моделировались в виде пластин. Оптимальная геометрия находилась перебором различных значений параметров в заданных диапазонах. В частности, для панели с толщиной обшивки 1 мм и с размерами в плоскости 300x300 мм рассматривалась высота ребер жесткости 5-29 мм, толщина 1-10 мм и количество ребер жесткости 1-15.

Рассматриваем четыре варианта условий нагружения квадратной пластины, представленные на рис. 3.1. Во всех расчетах считаем, что пластина имеет размер грани $d = 300$ мм ($x \in [-d/2, d/2]$, $y \in [-d/2, d/2]$), и толщину обшивки $h_0 = 1$ мм. Материал пластины изотропный с модулем упругости $E = 2$ ГПа и коэффициентом Пуассона $\nu = 0.3$ (пластик). Все коэффициенты жесткости материала C_{ij} вычисляются на основе стандартных соотношений для упругих материалов. В варианте 1 рассматривается наиболее простая задача с усилием, приложенным по центру пластины $x = 0$, $y = 0$ (рис. 3.1а). В варианте 2 рассматриваем нагружения смещенным усилием, приложенным в точке $x = d/4$, $y = 0$ (рис. 3.1б). В варианте 3 пластина нагружена двумя симметрично расположенными усилиями, приложенными в точках $x = \pm d/4$, $y = 0$ (рис. 3.1в). В варианте 4 пластина нагружается пятью симметрично расположенными усилиями, приложенными в точках $x = \pm d/4$, $y = \pm d/4$ и в точке $x = 0$, $y = 0$ (рис. 3.1г). Выбранные варианты задач допускают построение решения с учетом симметрии, однако такие решения не строились для исследования стабильности получаемых решений (для оценки повторяемости решения задачи ТО в симметрично расположенных областях модели).

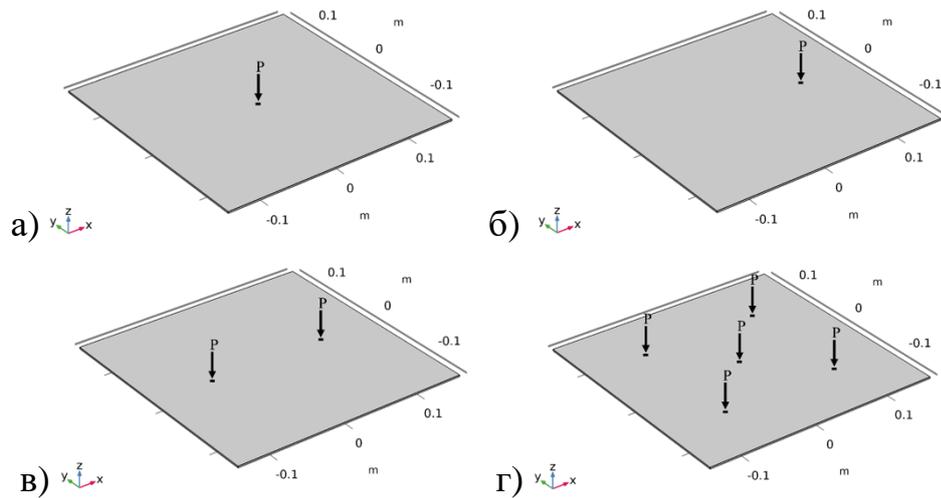


Рисунок 3.1. Рассмотренные варианты нагружения панелей, в задачах топологической и параметрической оптимизации

В расчетах задавалось значение приложенных усилий $P = 10$ Н. Максимальная допустимая высота ребер жесткости составляет $h_{\max} = 30$ мм. Ограничение на объем материала определяется значением средней плотности $\bar{\rho}_{\max} = 0.05$ (то есть оставляем 5% от максимально возможного объема, равного $d^2 h_{\max}$). В качестве начального приближения для функции плотности задавалось постоянное значение $\bar{\rho} = 0.5$.

В численном моделировании использовались треугольные элементы с аппроксимацией второго порядка. Характерный размер граней элементов составлял 1 мм. Общее количество элементов в пластине составляло $\sim 10^5$, при этом количество степеней свободы с учетом квадратичной аппроксимации и дополнительных переменных задачи оптимизации составляло до $\sim 2 \cdot 10^6$.

Пример сходимости результатов ТО представлен на рис. 2. Здесь показано, как изменяются вычисляемые алгоритмом ТО нормированные значения целевой функции (полной энергии деформаций панели) и массы панели в процессе итераций расчета. Пример приведен для варианта нагружения 1. Нормирование представленных на рисунке 3.1 величин выполнено относительно соответствующих значений, вычисленных на первой итерации расчетов. Видно, что в течение первых ~ 10 итераций алгоритм ТО быстро уменьшает оставляемый объем материала, вследствие чего резко возрастает энергия деформаций панели

(повышаются прогибы) и снижается ее масса. Однако далее, происходит такое же резкое снижение энергии деформаций панели, и в этот момент алгоритм выбирает ориентировочное оптимальное расположение ребер жесткости. Далее функция цели начинает медленно снижаться, а масса – повышаться. В течение последующих 50-80 итераций алгоритм постепенно добавляет необходимый объем ребер жесткости для получения оптимальной геометрии.

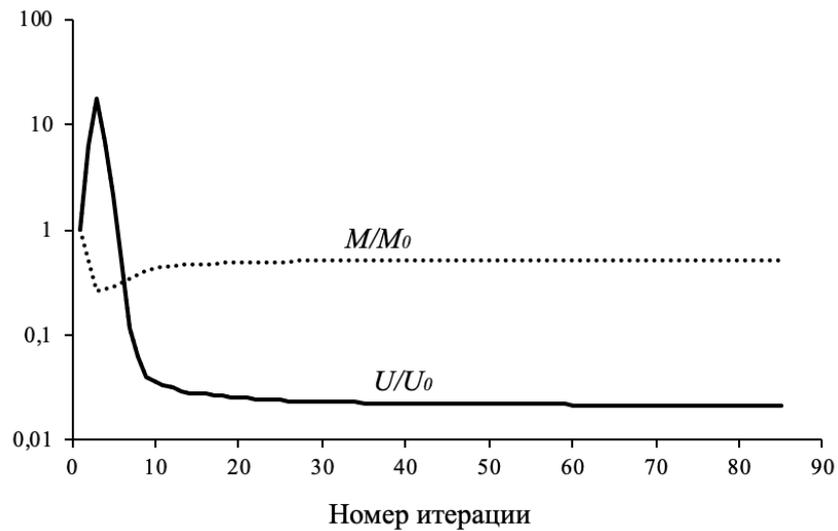


Рисунок 3.2. Пример сходимости результатов топологической оптимизации. Показана зависимость нормированных значений целевой функции (U) и массы панели (M) от номера итерации расчета.

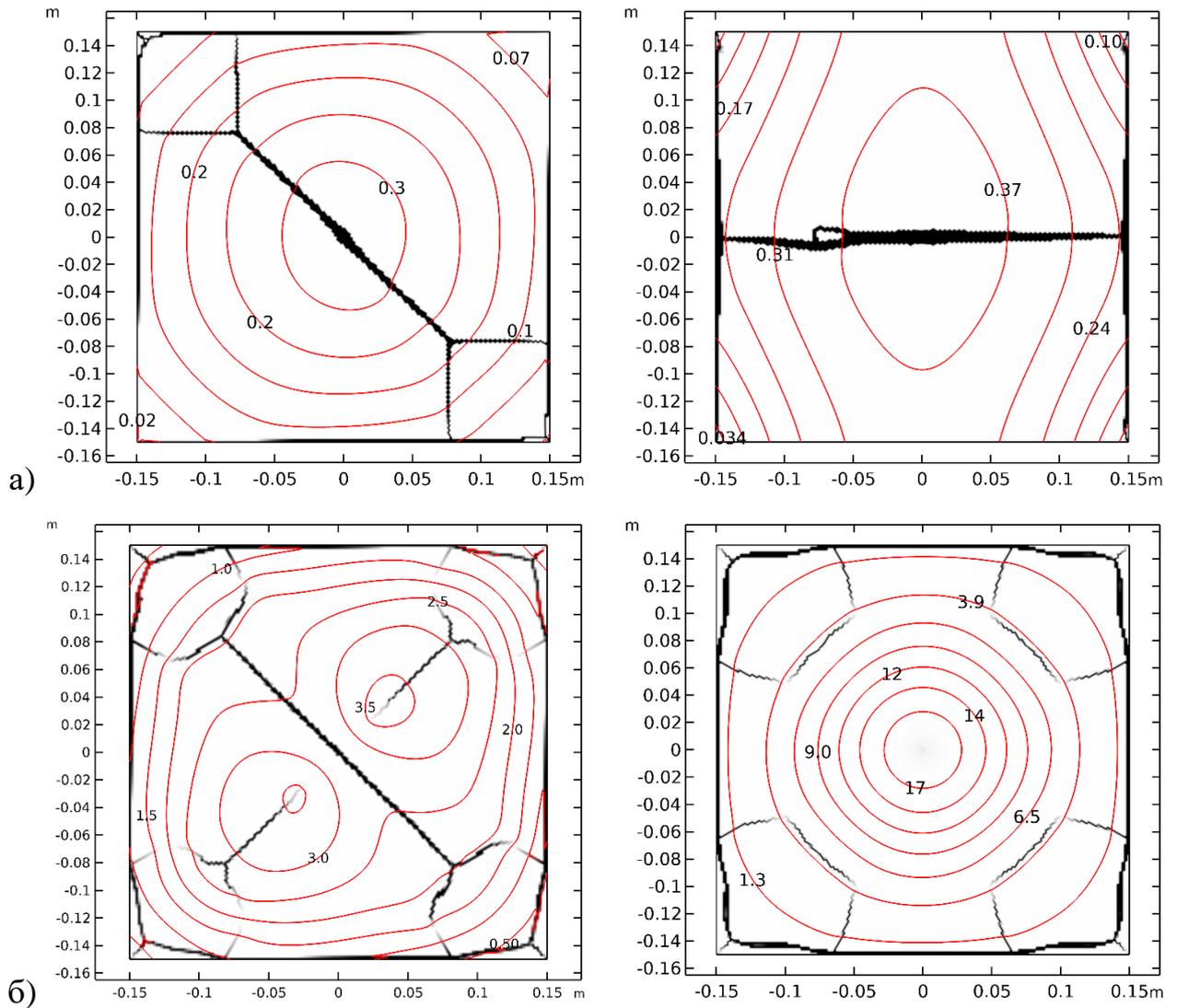


Рисунок 3.3. Оптимизированная геометрия ребер жесткости панелей (показана черным цветом), нагруженных сосредоточенной силой по центру (а) и пятью силами (б). Геометрия найдена на основе решения задачи ТО с использованием классической теории пластин (слева) и теории пластин Миндлина-Рейсснера (справа).

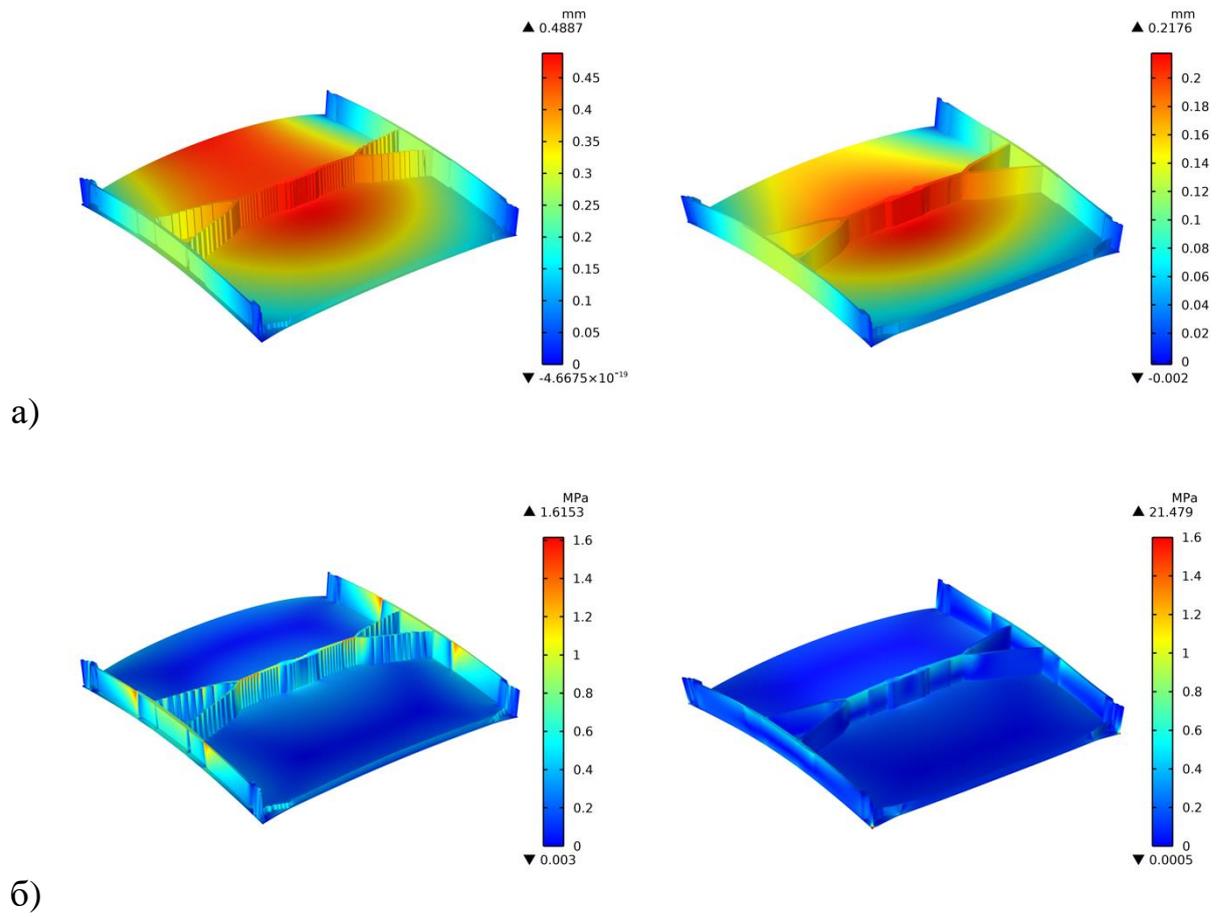


Рисунок 3.4. Прогибы (а) и эквивалентные напряжения (б) в исходном решении задачи ТО (слева) и в решении для сглаженной трехмерной геометрии пластины (справа). Второй вариант нагружения.

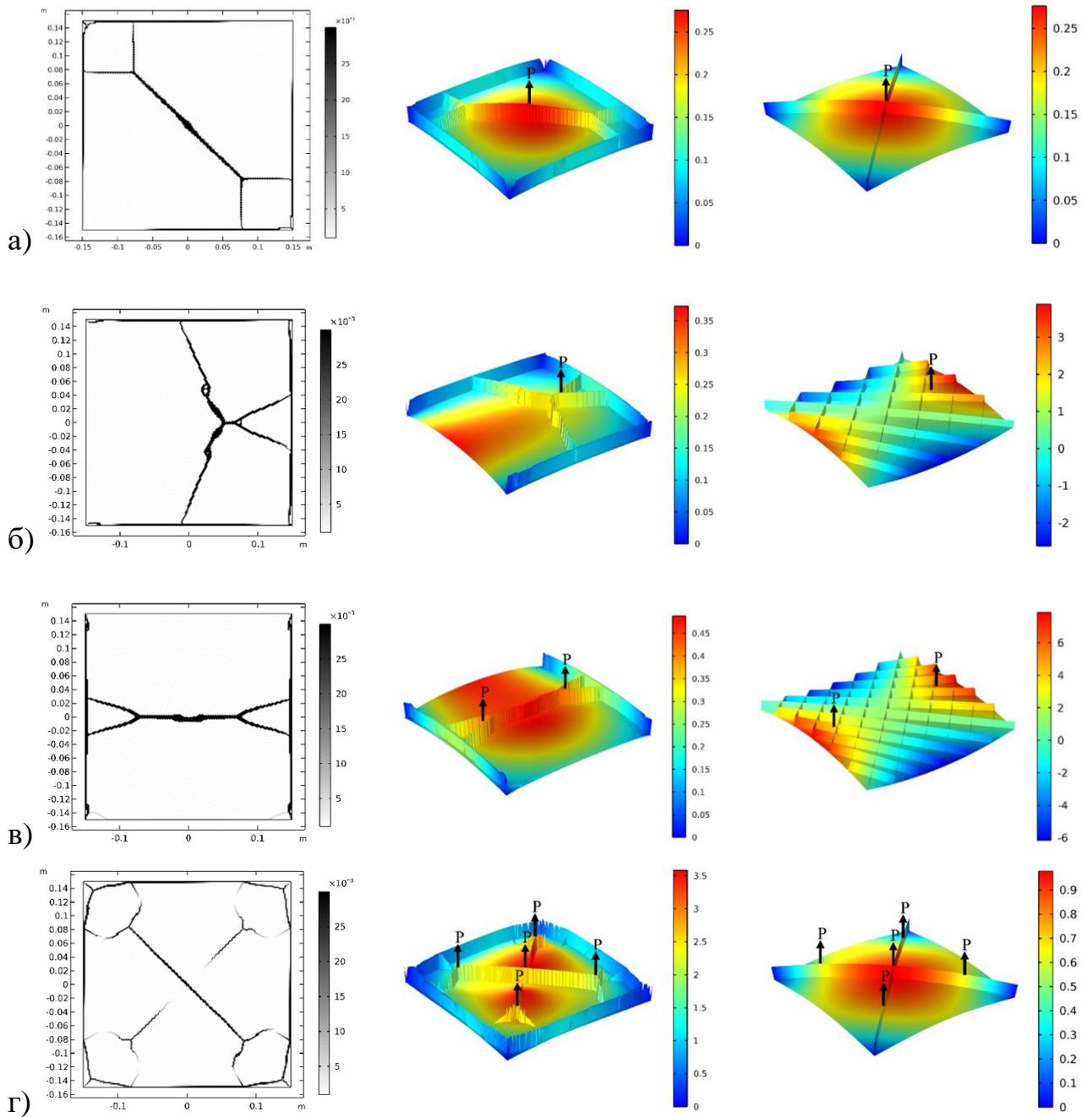


Рисунок 3.5. Сопоставление результатов топологической и параметрической оптимизации подкрепленных панелей. Показана высота [м] ребер жесткости (слева), прогибы [мм] в решении задачи ТО (по центру) и в решении задачи ПО (справа), а – вариант 1, б – вариант 2, в – вариант 3, г – вариант 4.

Таблица 3.1. Сопоставление результатов ТО и ПО для варианта расчета 1.

Модель	Масса [кг]	Прогибы [мм]	Полная энергия деформаций, U [Дж]
ТО, классическая теория пластин	0.18478	0.2753 / 0.2100	0.00137 / 0.00104
ТО, теория пластин МР	0.19971	0.3467 / 0.4080	0.00203 / 0.00144
ПО (толщина/высота ребер жесткости 4.4/24.2 мм)	0.18052	0.2763	0.00138
Без подкрепления (8.8 mm)	0.79200	0.2760	0.00138

Таблица 3.2. Сопоставление результатов ТО и ПО для варианта расчета 2.

Модель	Масса [кг]	Прогибы [мм]	Полная энергия деформаций, U [Дж]
ТО, классическая теория пластин	0.18697	0.3728 / 0.3441	0.00121 / 0.00147
ТО, теория пластин МР	0.18930	0.7026 / 0.7287	0.00236 / 0.00154
ПО (толщина/высота ребер жесткости 1.6/16 мм)	0.17916	3.8965	0.00810
Без подкрепления (7.9 mm)	0.57600	0.3776	0.00188

Таблица 3.3. Сопоставление результатов ТО и ПО для варианта расчета 3.

Модель	Масса [кг]	Прогибы [мм]	Полная энергия деформаций, U [Дж]
ТО, классическая теория пластин	0.19089 /	0.4900 / 0.4921	0.00418 / 0.00438
ТО, теория пластин МР	0.20048 /	0.6892 / 0.6723	0.00461 / 0.00434
ПО (толщина/высота ребер жесткости 1.1/16.9 мм)	0.18149	7.7145	0.033718
Без подкрепления (8.64 mm)	0.77760 /	0.4905	0.00467

Таблица 3.4. Сопоставление результатов ТО и ПО для варианта расчета 4.

Модель	Масса [кг]	Прогибы [мм]	Полная энергия деформаций, U [Дж]
ТО, классическая теория	0.16332	3.4587 / 3.5848	0.06394 / 0.04553
ТО, теория пластин МР	0.19070	18.092 / 19.959	0.17877 / 0.15428
ПО (толщина/высота ребер жесткости 3.7/25.9 мм)	0.17186	0.9783	0.19242
Без подкрепления (5.9 mm)	0.53100	3.4677	0.07099 / 0.07062

3.2. Влияние начальных условий и функции интерполяции фиктивной плотности на эффективность ТО

В этом разделе мы описываем метод переменной толщины, который был реализован в Comsol Multiphysics для оптимизации топологии пластин с ребрами жесткости. Также дается краткое описание метода параметрической оптимизации для пластин с регулярной жесткостью (результаты этого метода сравниваются с оптимизацией топологии). Также сообщается об экспериментальных процедурах, которые были реализованы для изготовления и испытания оптимизированных пластин.

Рассматриваемая задача оптимизации для пластины переменной толщины может быть сформулирована следующим образом:

$$\text{minimize: } J(\rho) = \int_{\Omega} f(x)\omega(x)d\Omega \quad (3.1)$$

subject to: equilibrium equations,
boundary conditions,

$$h = h_{skin} + \rho^p h_{rib},$$

$$\bar{\rho} = \frac{\int_{\Omega} h d\Omega}{\int_{\Omega} d\Omega} = \bar{\rho}_{max},$$

$$\max_{x \in \Omega} |\nabla h| \leq \frac{2h_{ribs}}{d_{min}},$$

$$0 \leq \rho \leq 1$$

где $x \in \Omega$ - вектор положения; $\Omega \in \mathbb{R}^2$ – ограниченная область, связанная с опорной плоскостью пластины, имеющая границу $\partial\Omega$ и угловые точки $\partial\partial\Omega$; $J(\rho)$ – функционал податливости, являющийся целью рассматриваемой задачи оптимизации; $f(x)$ – заданная поперечная нагрузка; $\omega(x)$ - функция прогибов, подчиняющаяся уравнениям равновесия и граничным условиям теории пластин Миндлина-Рейсснера; $\rho(x) \in [0,1]$ – дополнительная полевая переменная задачи

оптимизации ("плотность"), которая вводится для определения локальных значений толщины пластины $h(x)$ в заданном диапазоне между минимальным h_{skin} и максимальным ($h_{skin} + h_{rib}$) значениями; ρ – штрафной коэффициент; $\bar{\rho}$ – усредненная плотность (или усредненная толщина), которая ограничена равной некоторому заданному значению $\bar{\rho}_{max}$; d_{min} – минимально допустимая толщина ребер (зон с наибольшей толщиной) в полученном оптимальном решении; ∇ – 2D оператор градиента.

Данное утверждение (3.1) предполагает нахождение оптимальной функции $\rho(x)$, которая минимизирует функционал податливости $J(\rho)$ при заданных ограничениях на общий объем пластины ($\bar{\rho}_{max}$ определяет оставшуюся долю твердого материала), на минимальную толщину ее кожи (h_{skin}) и максимальную высоту ребер (h_{rib}). Податливость пластины $J(\rho)$ определяется как работа, совершаемая внешними силами $f(x)$. Найденное решение должно обеспечить наибольшую жесткость плиты для заданных условий нагружения и опирания. Толщина пластины $h(\rho)$ определяется через штрафное условие с коэффициентом ρ в стандартной манере оптимизации топологии SIMP. Дополнительное регуляризирующее ограничение накладывается на абсолютные значения градиента толщины $|\nabla h|$, верхняя граница которого определяется в соответствии с заданной максимальной высотой (h_{rib}) и минимальной толщиной (d_{min}) ребер, которые могут возникнуть в оптимальном решении. Такое условие предотвращает ситуацию, когда для более мелкой сетки конечных элементов возникает увеличенное количество более тонких ребер.

Уравнения равновесия, которым должно удовлетворять решение задачи, имеют стандартную форму для теории пластин:

$$N_{ij,j} = 0, \quad M_{ij,j} - Q_i = 0, \quad Q_{i,i} + f = 0 \quad (3.2)$$

где производные обозначены запятыми, повторные индексы означают суммирование, а определения мембранных сил N_{ij} , изгибающих моментов M_{ij} и

поперечных сил Q_i даны с учетом несимметричной структуры пластины (с односторонними ребрами) и соответствующей связи между деформациями в плоскости и изгибом.

$$\begin{cases} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{cases} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & 0 & B_{11} & B_{21} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 & B_{44} \\ B_{11} & B_{21} & 0 & D_{11} & D_{21} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{44} & 0 & 0 & D_{44} \end{pmatrix} \begin{cases} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \\ \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} V_1 \\ V_2 \end{cases} = \begin{pmatrix} S_{55} & 0 \\ 0 & S_{66} \end{pmatrix} \begin{cases} 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{cases}$$

где $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ и $\kappa_{ij} = (\theta_{i,j} + \theta_{j,i})/2$ - компоненты тензоров деформации и кривизны, соответственно; $A_{ij}(x)$, $B_{ij}(x)$, $D_{ij}(x)$, $S_{ij}(x)$ - коэффициенты жесткости мембраны, связи, изгиба и сдвига плиты, соответственно, которые определяются с учетом переменной толщины плиты:

$$\begin{aligned} A_{ij}(x) &= C_{ij}h(x), B_{ij}(x) = C_{ij} \frac{h^2(x)}{2}, D_{ij}(x) = C_{ij} \frac{h^3(x)}{3} \quad (i, j = 1, 2, 4) \\ S_{ij}(x) &= C_{ij}h(x) \quad (i, j = 5, 6) \end{aligned} \quad (3.4)$$

где предполагается, что опорная плоскость расположена на внешней поверхности обшивки пластины, а C_{ij} - компоненты матрицы жесткости изотропного материала, которые могут быть представлены с помощью инженерных констант:

$$C_{ij} = C_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad C_{12} = C_{21} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}, \quad C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Деформации и искривления в определяющих уравнениях (3.3) определяются через перемещения u_i и вращения θ_i в соответствии с теорией Миндлина-Рейсснера:

$$u_i = u_i^0 + z\theta_i(x) \quad (i=1,2) \text{ и } u_3 = w(x).$$

В данной работе будут представлены примеры оптимизации для квадратных пластин, нагруженных системами сосредоточенных сил. Будут рассмотрены четыре случая нагружения: одна центральная сила, одна эксцентрическая сила, две силы и три силы (см. рис. 3.6). Предполагается, что все силы имеют одинаковую величину и действуют на внешнюю поверхность кожи в направлении, противоположном вектору внешней нормали.

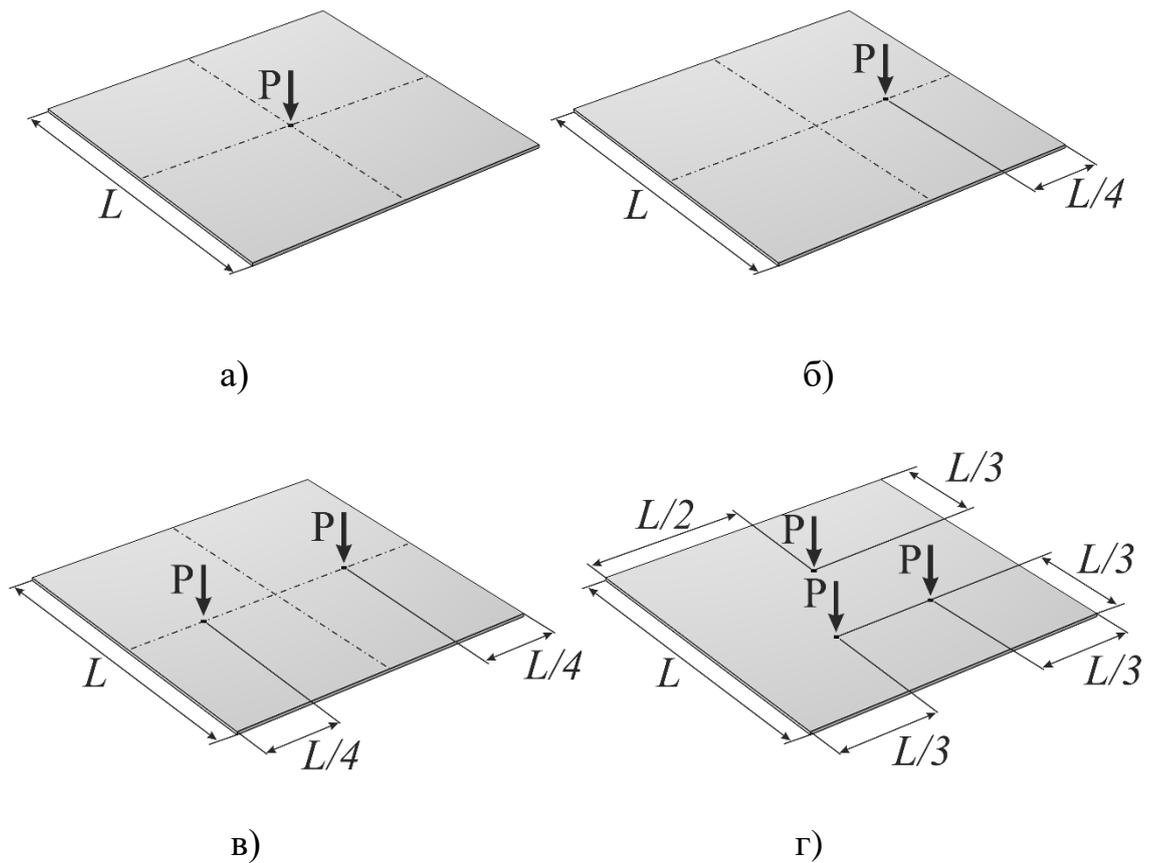


Рисунок 3.6. Варианты нагружения, рассматриваемые в задачах оптимизации, а) центральная сила, б) эксцентрическая сила, в) две силы, г) три силы

Будут рассмотрены два типа граничных условий. Сначала мы рассмотрим пластины со свободными краями и фиксированными углами, другими словами, мы рассмотрим саморавновесную систему поперечных сосредоточенных сил:

$$N_{ij}n_j = 0, \quad M_{ij}n_j = 0, \quad V_i n_i = 0 \quad x \in \partial\Omega \quad w = 0 \quad x \in \partial\partial\Omega \quad (3.5)$$

Во-вторых, мы будем использовать условия простой опоры с ограниченными плоскими и поперечными смещениями по всей границе:

$$u_i = 0, \quad M_{ij}n_i n_j = 0 \quad \theta_i s_i = 0 \quad w = 0 \quad x \in \partial\Omega \quad (3.6)$$

где n_i и s_i - внешние нормальный и касательный единичные векторы к границе пластины к границе плиты, соответственно.

При численном моделировании мы специально не учитывали симметрии задач и использовали полноразмерные модели для оценки возможностей алгоритма по обнаружению соответствующих симметрий в получаемых решениях.

Реализация рассматриваемой оптимизационной задачи (3.1) и модели пластины (3.2)–(3.6) была выполнена в Comsol Multiphysics. Использовался интерфейс "Shell" (теория Миндлина-Рейсснера). Дополнительная узловая переменная (плотность $\rho(x)$) была введена с помощью интерфейса "Density model" и линейных функций формы Лагранжа. Дополнительные параметры проекции и фильтрации для этой расчетной переменной не использовались. Глобальные ограничения (для общего объема и для максимального градиента толщины) и локальные ограничения (для диапазона толщины) были введены с помощью соответствующих узлов интерфейса оптимизации. Функция соответствия была определена в сокращенном виде как сумма смещений, которые реализуются в нагруженных точках пластины (с учетом того, что все нагрузки имеют одинаковую величину). Дискретизация осуществлялась с помощью треугольных или четырехугольных конечных элементов, в которых использовались линейные или квадратичные полиномиальные функции Лагранжа. Решение задачи теории пластин находилось с помощью прямого решателя MUMS. Оптимизационная задача решалась с помощью метода скользящих асимптот. Максимально допустимое число итераций составляло 100. Коэффициент допуска на оптимальность составлял 0,001. Начальные условия (начальная толщина пластины) определялись с помощью различных постоянных значений, заданных для расчетной переменной $\rho(x) = \rho_0$ во всей области. Нормализация объективных

функций проводилась с использованием решения первой итерации с начальной равномерной толщиной.

Для оценки эффективности рассматриваемого метода ТО мы сравнили характеристики оптимизированных плит с криволинейными ребрами жесткости со стандартной конструкцией плит с регулярной (решетчатой) жесткостью. Мы предположили, что в стандартных панелях всегда существуют два семейства перпендикулярных ребер с прямоугольными поперечными сечениями (рис. 2). Оптимизация стандартных панелей проводилась с использованием параметрического подхода, при котором предполагалось, что размеры сечений ребер ($a \times b$), количество ребер ($2N$) и угол их ориентации (α) являются неизвестными параметрами, которые необходимо найти для обеспечения.

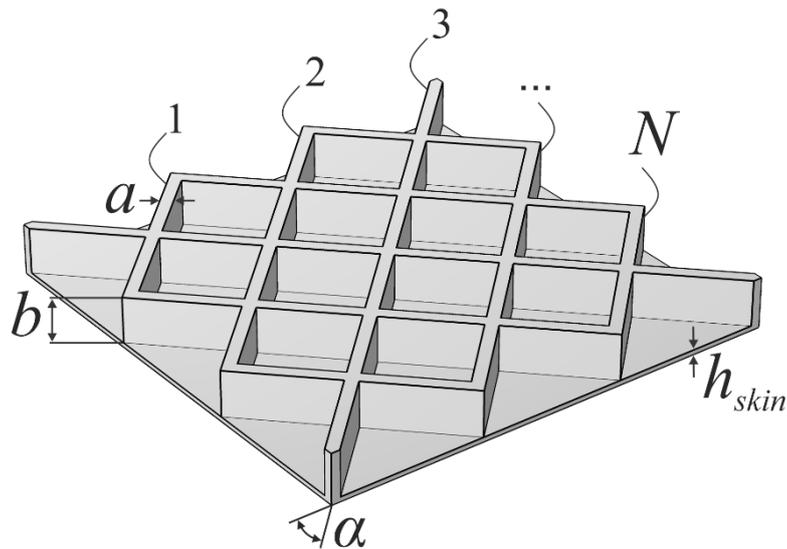


Рисунок 3.7. Иллюстрация к задаче параметрической оптимизации для регулярной конструкции ребра жесткости пластины, используемой в сравнении с оптимизацией топологии

минимальной податливости панелей с учетом геометрических ограничений, аналогичных использованным в задаче ТО (3.1). Постановка рассматриваемой параметрической оптимизационной задачи может быть представлена в следующем виде:

$$\text{minimize: } J(a, b, N, \alpha) = \int_{\Omega} f(x) w(x) d\Omega$$

subject to: equilibrium equations,
boundary conditions,

$$h = h_{skin} + \rho^p h_{rib},$$

$$\bar{\rho} = \frac{L^2 h_{skin} + \sum_{i=1}^{2N} abL_i}{L^2 (h_{skin} + h_{rib})} = \bar{\rho}_{max}, \quad (3.7)$$

$$a_{min} \leq a \leq a_{max}, \quad 0 \leq b \leq h_{rib},$$

$$1 \leq N \leq 20, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi / 2$$

где a – ширина ребер, b - высота ребер, $L_i (i = 1 \dots 2N)$ - длина ребер, a_{min} и a_{max} – максимально и минимально допустимая толщина ребер, и L - размер края пластины. $2N$ – количество ребер и α – угол их ориентации являются неизвестными параметрами. Примечательно, что ограничения на минимальную толщину и максимальное количество ребер также необходимы для регуляризации задачи, в противном случае решение может содержать бесконечное количество бесконечно тонких ребер максимальной высоты.

Параметрическая оптимизация (ПО) выполняется для моделей, в которых все элементы имеют постоянную толщину, т.е. кожа и ребра моделируются с помощью элементов оболочечного типа с толщинами h_{skin} и a , соответственно. Все ребра расположены с одной стороны и перпендикулярно поверхности пластины. Моделирование проводилось в Comsol Multiphysics с использованием интерфейса "Shell". Геометрия пластин в задачах ПО была параметризована. Решение задачи ПО находилось методом прямого поиска с определением наборов значений параметров. Для всех наборов параметров были получены конечно-элементные решения, из которых выбиралось наилучшее в соответствии с заданной целью и ограничениями (3.7). Было установлено, что для всех рассмотренных тестовых задач оптимальный угол наклона ребер в ПО составляет $\alpha = 0$.

Проведен анализ влияния параметров модели на эффективность рассматриваемого метода ТО. Затем для найденных наилучших настроек метода

оценивается сходимость сетки и точность решений по перемещениям для пластин переменной толщины. Затем проводится сравнение полученных ТО-решений с ПО-результатами для тестовых задач.

В следующих примерах расчетов рассматриваются четырехугольные пластины с размером ребра $L = 300$ мм и с толщиной кожи $h_{skin} = 1$ мм. Максимальная высота ребер была задана равной h_{rib} мм (максимальная общая толщина пластины составляет 30 мм). Ограничение на оставшийся объем в ТО было $\bar{\rho}_{max} = 8\%$. Минимально допустимая толщина ребер в ТО была $d_{min} = 2$ мм. Минимальная и максимальная толщина ребер в ПО были $a_{min} = 2$ мм и $a_{max} = 30$ мм. В расчетах мы использовали упругие свойства материала PET-G: модуль Юнга $E = 1,6$ ГПа и коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. Заданная величина нагрузок составляла $P = 10$ Н. Все расчеты проводились в рамках линейной упругой формулы. формулировки.

Анализ влияния параметров модели был проведен для тестовой задачи с одной эксцентрической силой (рис. 3.6б). В этом анализе использовалась треугольная сетка с размером края элементов $d_{mesh} = 2$ мм ($L / d_{mesh} = 150$). Как будет показано ниже, такого размера элементов достаточно для получения стабильных и эффективных результатов. Общее количество узлов в рассматриваемых конечно-элементных моделях составило 26222 (треугольный элемент) или 22500 (четырёхэлементный).

Типичный график сходимости для реализованных задач оптимизации топологии представлен на рис. 3.8. Здесь показана зависимость объективного функционала J , относительного остаточного объема $\bar{\rho}$ и нормированного

максимального градиента толщины $\left| \nabla \bar{h} \right|_{max} = \frac{d_{min}}{2h_{rib}} \max_{x \in \Omega} |\nabla h|$ от номера

итерации. В соответствии с утверждением(3.1), первое должно быть минимальным ($J \rightarrow min$), второе должно быть равно предписанному значению $\bar{\rho} = \bar{\rho}_{max}$ и

последнее не должно быть больше верхней границы $\left| \nabla \bar{h} \right|_{max} \leq 1$. Как видно из рис.

3.8, все эти требования выполняются в процессе решения. Представленные результаты даны для начального относительного объема $\bar{\rho}_0 = 0,5$, что соответствует толстой пластине с очень низкой податливостью (единичное значение J на нормализованном графике на рис. 3.8). В течение первых 4-5 итераций алгоритм значительно уменьшает относительный объем модели так, что достигается целевое значение $\bar{\rho} \approx \bar{\rho}_{max}$, при этом податливость пластины значительно увеличивается. Начиная с этого этапа (с 5-й итерации), алгоритм оптимизации начинает находить оптимальное распределение толщины пластины. В течение следующих ~ 20 итераций объективная функция уменьшается примерно в 20 раз, и в решении появляется приближенная оптимальная форма ребер.

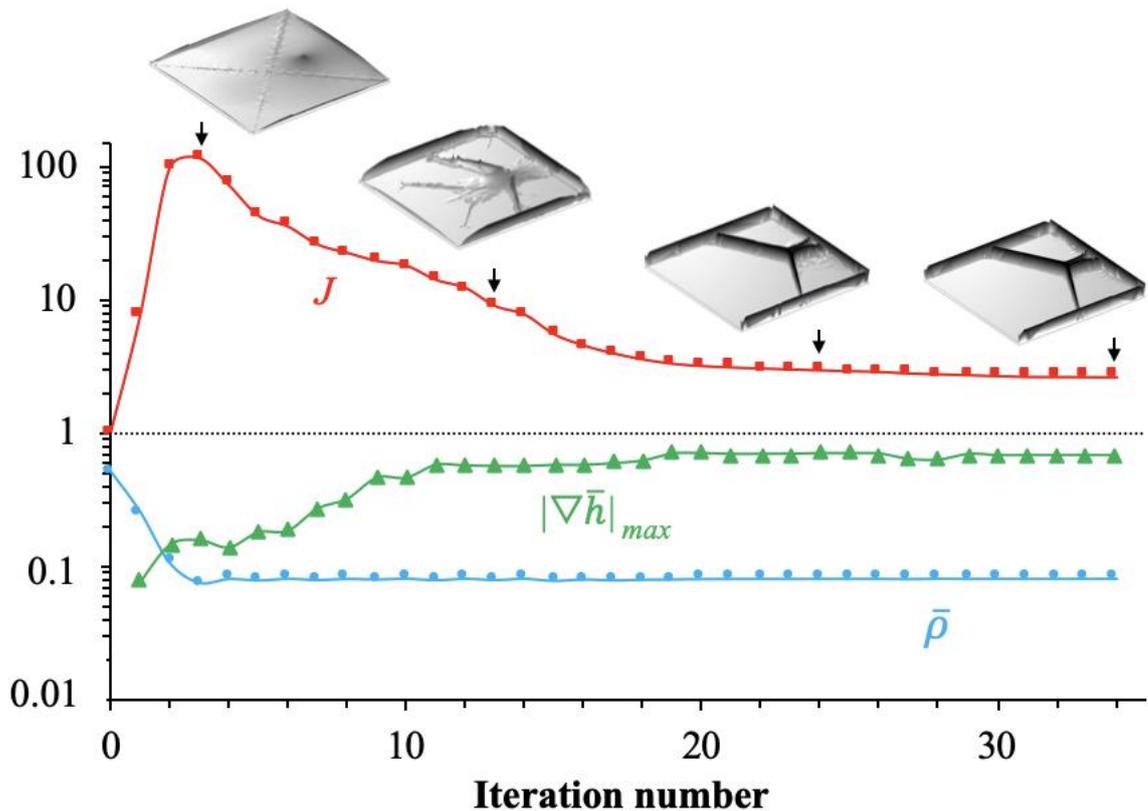


Рисунок 3.8. Типичный график сходимости для объективной функции задачи оптимизации топологии (красный), относительного остаточного объема (зеленый) и нормированного максимального градиента толщины (зеленый) в рамках подхода переменной толщины

Во время этих итераций максимальный градиент толщины монотонно увеличивается, т.е. острота ребер становится выше (см. зеленую линию на рис. 3.8). Обратите внимание, что на первой итерации градиент толщины равен нулю, так как начальные условия предполагают постоянную толщину, и эта первая точка не видна в логарифмическом масштабе на рис. 3.8. После ~ 25 итераций нормированный градиент толщины достигает уровня ~ 0.6 и не меняется в последующих расчетах, в то время как объективные функции медленно снижаются. В последующем анализе мы обычно получали сходящиеся результаты на 80-й итерации, когда достигался допуск оптимальности 0.001. Обычное время расчетов составило 5 часов на модель (~ 80 итераций), в то время как быстрые оценки могут быть получены в течение 2 часов (~ 30 итераций) на стандартном PC с Intel core I7, 32 GB RAM.

Обычно в рассматриваемых задачах целевой относительный объем $\bar{\rho}$ не достигает точно заданного условия $\bar{\rho}_{max}$. Поэтому для оценки оптимальности полученных решений вводится коэффициент полезного действия, определяемый как произведение объективной функции и относительного объема пластины, реализуемого на последней итерации алгоритма:

$$FM = \bar{J} \bar{\rho}$$

где \bar{J} - функционал соответствия (3.1), нормированный относительно его значения для пластины с заданным объемом $\bar{\rho} = \bar{\rho}_{max}$ и соответствующей равномерной толщиной. Наиболее оптимальные решения должны иметь наименьшие значения FM.

Результаты оптимизации топологии для задачи об эксцентрической силе с двумя типами граничных условий (3.5), (3.6) представлены на рис. 3.9, 3.10. Эти результаты получены при использовании треугольной сетки и при использовании линейных и квадратичных функций формы Лагранжа для кинематических переменных теории пластин. Анализируется влияние начального условия $\bar{\rho}_0$ и

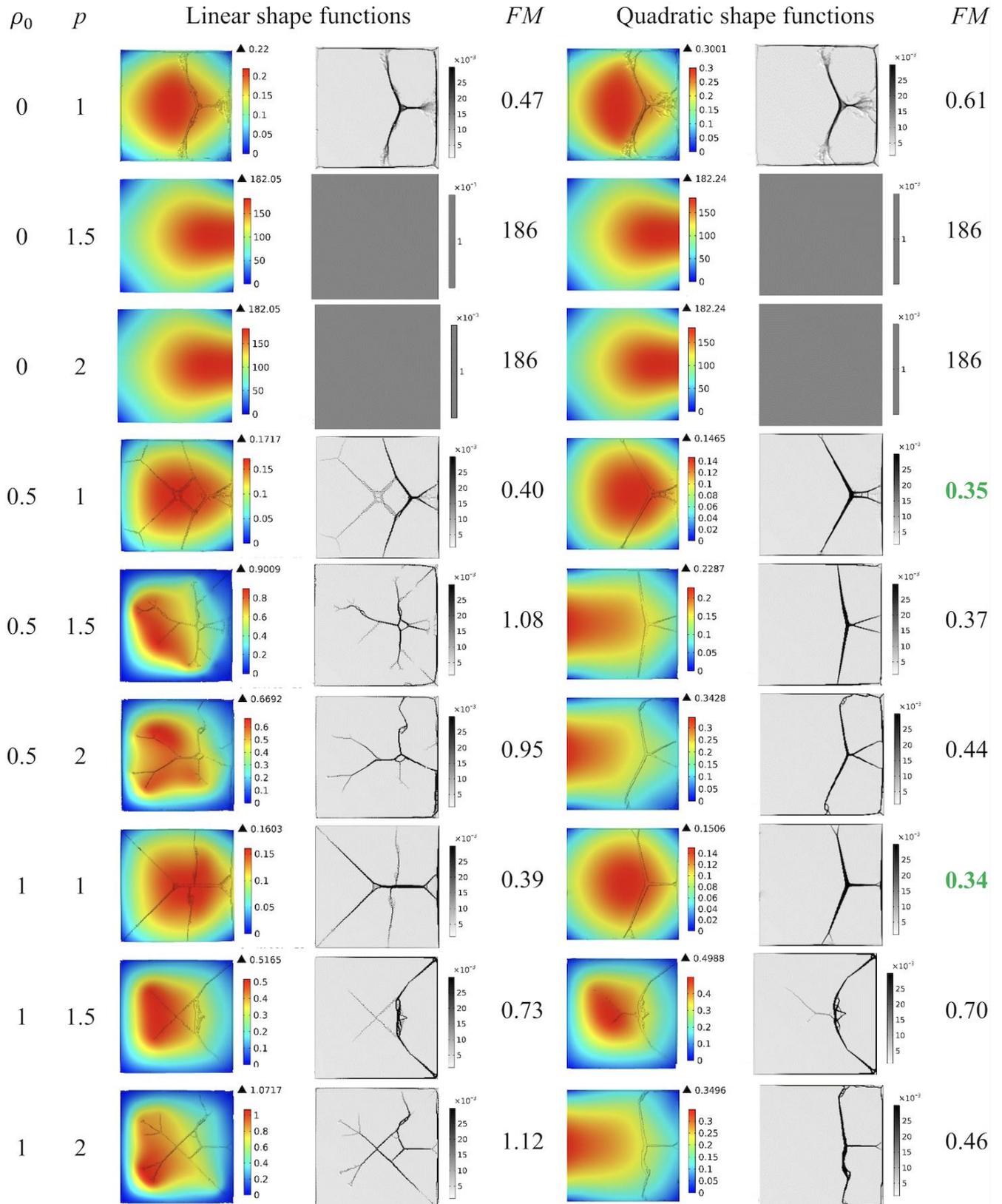


Рисунок 3.9. Результаты оптимизации топологии (прогибы и толщина пластины), полученные для различных параметров модели. Вид сверху. Граничные условия (3.5) (фиксированные углы). На наиболее оптимальные решения выделены зеленым цветом

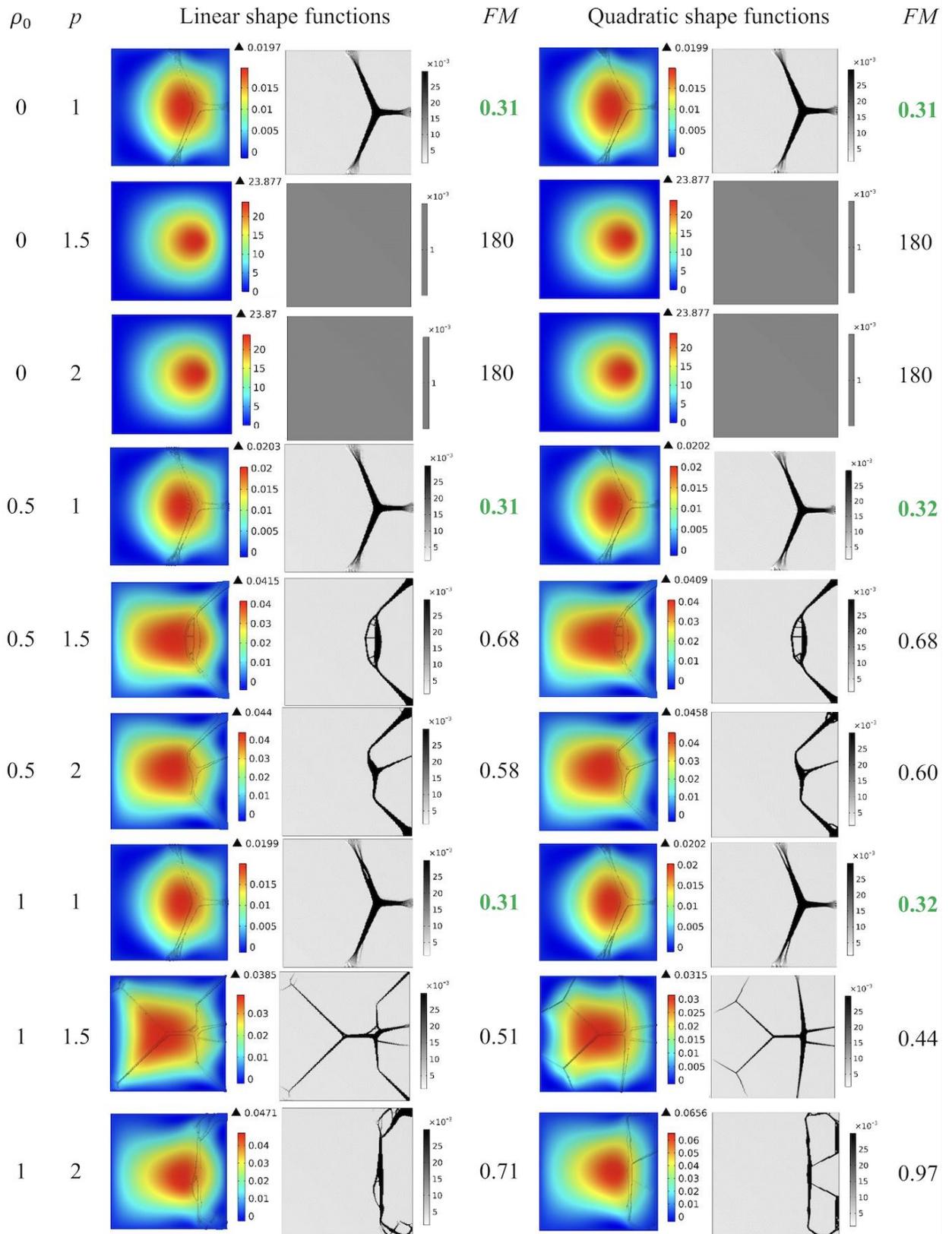


Рисунок 3.10. Результаты оптимизации топологии (прогибы и толщина пластины), полученные для различных параметров модели. Вид сверху. Граничные условия (3.6) (просто-опорный). Наиболее оптимальные решения выделены зеленым цветом

штрафного коэффициента p . На рис. 3.9, 3.10 показаны распределения прогибов и функции толщины, которые реализуются в оптимизированных пластинах. Также приведены значения полученного коэффициента полезного действия FM . Реализованные значения нормализованных перемещений в нагруженной точке и относительного объема пластин также приведены в таблице 3.5. В этой таблице перемещения нормированы относительно соответствующих решений для пластин равномерной толщины: 12,44 мм (fixed corners) и 1,625 мм (simply-supported).

Наиболее оптимальные решения (с наименьшим FM) выделены зеленым цветом на рис. 3.9, 3.10 и в табл. 3.5. На рисунках видно, что геометрия оптимальных пластин имеет несколько ребер, которые начинаются под точкой нагрузки и идут более или менее прямолинейно к границам пластины. В оптимальных пластинах с фиксированными углами (рис. 3.9) алгоритм также предлагает сделать ребра непосредственно на границах пластины (или рядом с ними). Интуитивно эти ребра кажутся разумными, поскольку они обеспечивают связь между фиксированными углами пластины. В просто подкрепленных пластинах ребра на границах не нужны (рис. 3.10). Поэтому оставшиеся ребра внутри области становятся намного толще по сравнению с первой задачей (они становятся настолько толще, насколько это допускается ограничением на объем). Некоторые градиенты толщины возникают в этих толстых ребрах вблизи поддерживаемых границ.

Из полученных результатов следует, что наиболее оптимальные решения для рассматриваемых задач могут быть получены при использовании квадратичных элементов сетки, начальных условий для толщины, определяемых $\bar{\rho}_0 = 0.5...1$ и в рамках линейной зависимости функции толщины от переменной плотности, т.е. без пенализации ($p = 1$). Эти рекомендации универсальны для обоих рассмотренных типов граничных условий. Для просто подкрепленных пластин (рис. 3.10) начальные условия и вид функций формы не важны, если рассматривать модель без пенализации. В другом случае решения расходятся для начального условия $\rho_0 = 0$ (см. результаты "равномерного серого" на рис. 3.9, 3.10). Для пластин с

Таблица 3.5. Результаты оптимизации топологии для различных параметров модели

Начальное условие, $\bar{\rho}_0$	Штрафной коэффициент, p	Линейные функции формы		Функции квадратичной формы	
		$\bar{\omega}$	$\bar{\rho}$	$\bar{\omega}$	$\bar{\rho}$
Граничные условия: фиксированные углы					
0	1.0	0.0151	0.0841	0.0196	0.0842
0	1.5	14.61	0.0344	14.63	0.0344
0	2.0	14.61	0.0344	14.63	0.0344
0.5	1.0	0.0130	0.0843	0.0112	0.0843
0.5	1.5	0.0382	0.0766	0.0124	0.0800
0.5	2.0	0.0354	0.0725	0.0154	0.0762
1	1.0	0.0123	0.0845	0.0109	0.0844
1	1.5	0.0249	0.0787	0.0241	0.0789
1	2.0	0.0430	0.0704	0.0162	0.0766
Граничные условия: просто-опорный					
0	1.0	0.0099	0.0845	0.0100	0.0845
0	1.5	14.16	0.0344	14.18	0.0344
0	2.0	14.16	0.0344	14.18	0.0344
0.5	1.0	0.0100	0.08445	0.0102	0.0844
0.5	1.5	0.0222	0.0821	0.0224	0.0821
0.5	2.0	0.0193	0.0811	0.0200	0.0809
1	1.0	0.0100	0.08448	0.0102	0.0845
1	1.5	0.0172	0.0798	0.0151	0.0795
1	2.0	0.0243	0.0790	0.0329	0.0795

фиксированными углами использование большого значения начальной толщины имеет решающее значение для нахождения оптимального решения. Примечательно, что стандартный подход с определением начального состояния

через целевую усредненную плотность может оказаться неэффективным при переменной толщине. Полученные геометрии пластин для таких условий аналогичны полученным при использовании нулевого начального условия ($\bar{\rho}_0 = 0$), а их податливость и FM примерно в два раза выше, чем у наиболее оптимальных пластин. Интересно также отметить, что в наиболее оптимальных решениях распределение перемещений становится симметричным для пластин с фиксированными углами, в то же время геометрия ребер в этих решениях может быть, как симметричной, так и слегка несимметричной (см. два оптимальных результата на рис. 3.9).

Таким образом, для последующего анализа мы будем использовать параметры модели: $p = 0$, $\rho_0 = 0.5$ и квадратичные функции формы для кинематических переменных поля модели пластины. Для этих настроек мы проверяем сходимость результатов на сетке (рис. 3.11). В этом анализе мы варьируем максимальный размер элементов от 50 мм до 2 мм (от 7 до 151 узла вдоль стороны пластины).

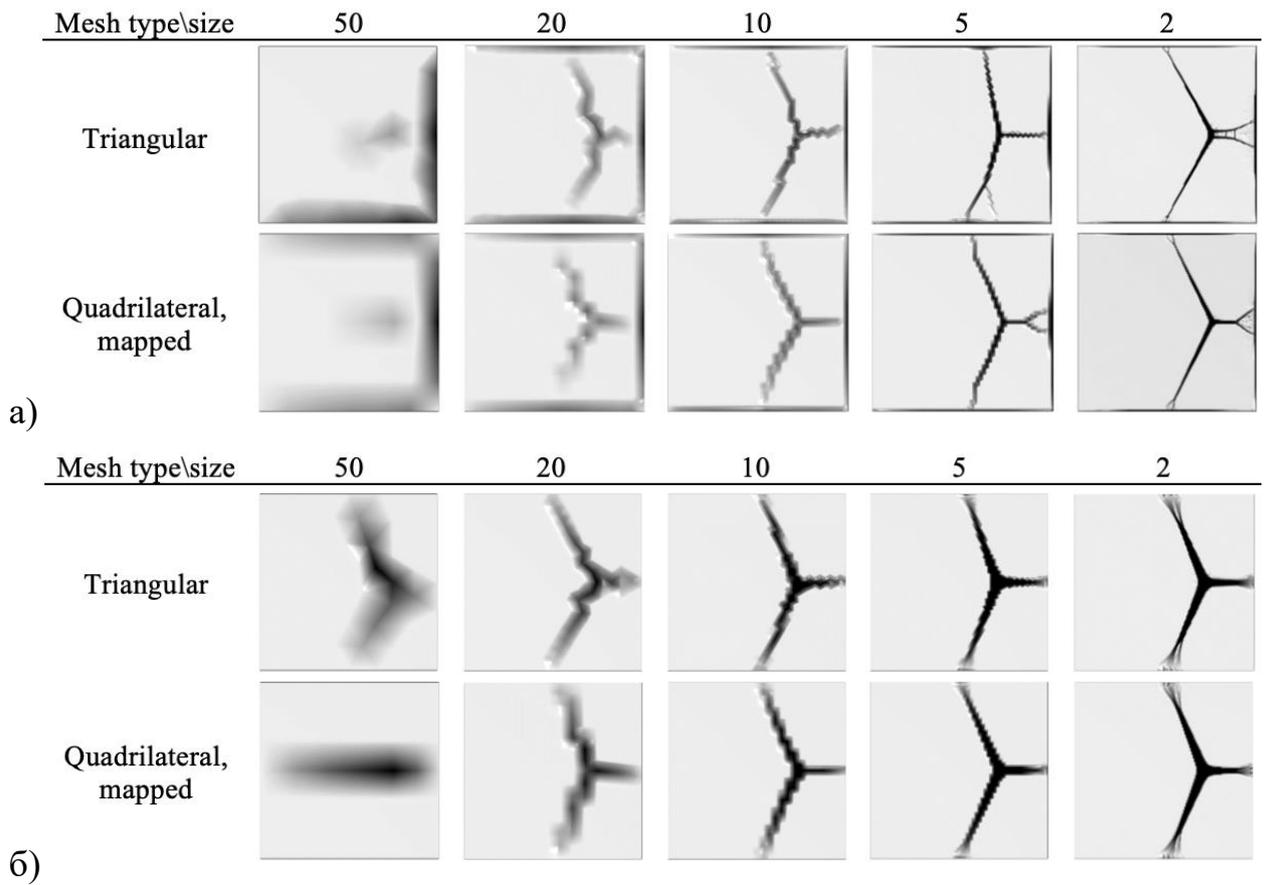


Рисунок 3.11. Влияние типа и размера (мм) элементов сетки на решение задач оптимизации для пластин (300×300 мм), нагруженных эксцентрической силой. Граничные условия: фиксированные углы (а) и простое подкрепление (б).

Также используются различные типы сеток с треугольными 6-узловыми элементами и с отображенными четырехугольными 9-узловыми элементами. Полученные зависимости прогибов от типа и размера сетки представлены на рис. 3.12. Здесь показаны прогибы оптимизированных пластин в нагруженной точке. Из проведенного анализа следует, что близкое к оптимальному решение начинает проявляться уже на грубых сетках, а уменьшение размера элементов приводит к некоторому уточнению и повышению резкости решения (см. рис. 3.11).

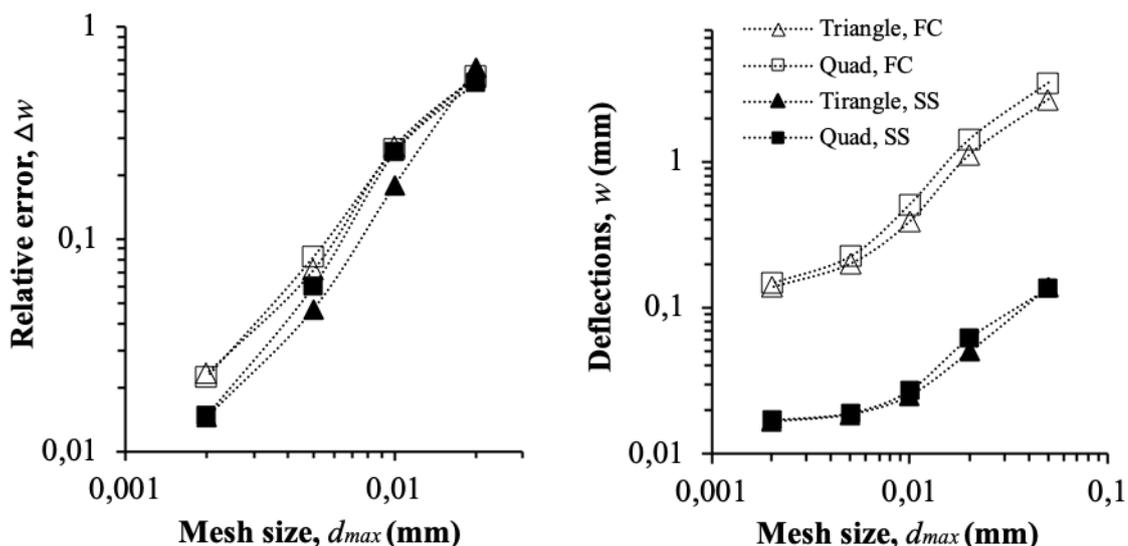


Рисунок 3.12. Влияние типа и размера элементов сетки на прогибы в нагруженной точке оптимизированной ребристо-жесткой пластины, нагруженной эксцентрической силой. Граничные условия: фиксированные углы (FC) и простое подкрепление (SS).

Более того, как следует из рис. 3.12, прогибы оптимизированных пластин изменяются незначительно для моделей с мелкой сеткой. Таким образом, сгущение сетки приводит к сближению решений как по полученной геометрии, так и по максимальным прогибам пластин. Влияние типа элементов (треугольные/квадратные) кажется незначительным, и получаемые решения становятся очень похожими. Однако предпочтительнее использовать треугольные элементы, так как они дают несколько лучшие решения для оптимальной геометрии (значения результирующих прогибов становятся меньше на 3-5%, см. рис. 3.12).

Решения задач оптимизации топологии с четырьмя типами нагрузок (рис. 3.6) и двумя типами граничных условий (3.5), (3.6) представлены на рис. 3.13. Все представленные решения получены за 60-80 итераций алгоритма оптимизации. Относительный остаточный полный объем оптимизированных пластин имеет значения $\bar{\rho} \approx 0.0785 \dots 0.0795$ (относительная ошибка для заданного $\bar{\rho}_{max}$ составляет менее 2%). Максимальный градиент толщины не превышает 70% от максимально допустимого значения (аналогично результатам, представленным на рис. 3.8).

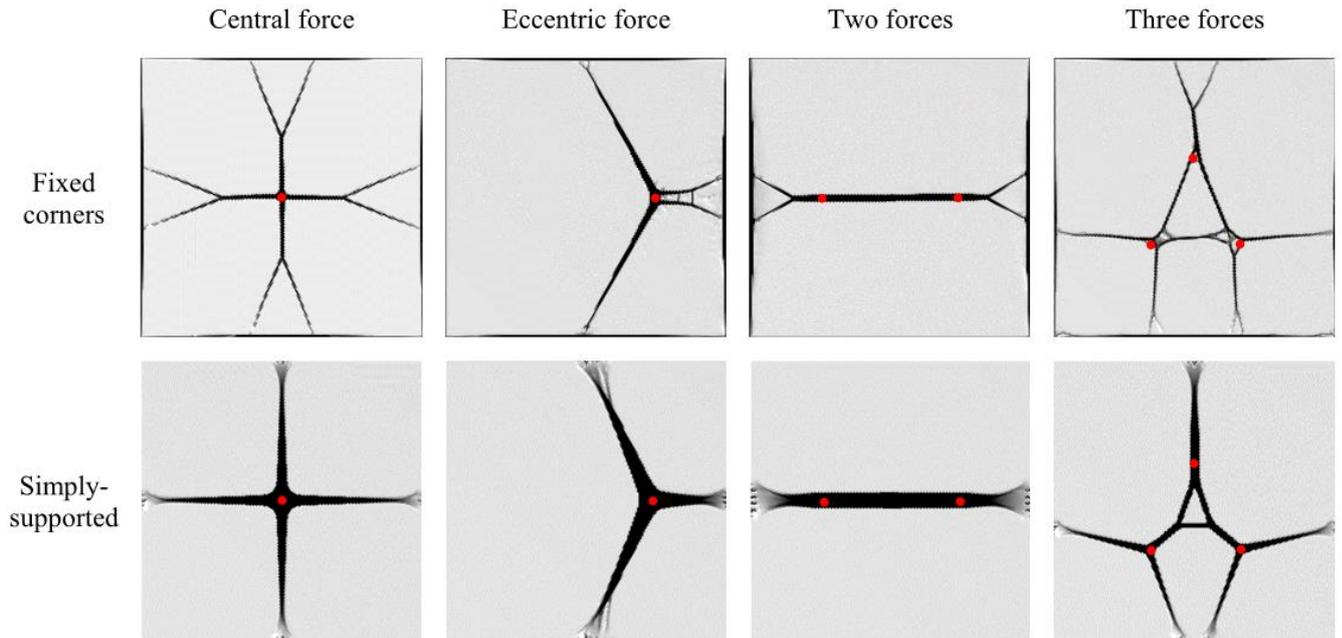


Рисунок 3.13. Решения для тестовых задач, полученные с помощью подхода ТО с переменной толщиной. Вид сверху. Случаи нагружения в соответствии с рис. 1. Точки нагружения отмечены красным цветом. Светло-серый цвет - кожа, черный цвет - максимальная высота ребер.

Более того, видно, что для просто подкрепленных пластин получаются толстые монолитные ребра без колебаний в основной части пластины (см. нижний ряд на рис. 3.8). Около границ пластины возникает некоторый градиент толщины, достаточно плавный, необходимый для распределения нагрузок по большей части подкрепленной границы. Кроме того, непосредственно на границе с опорой возникает некоторый шум, который регулярно распределяется по нескольким фиксированным узлам. Увеличение толщины в этих фиксированных узлах возникает в решениях из-за высокой концентрации деформаций. Чтобы избежать этих эффектов, необходимо определить область оптимизации с небольшими вычитаемыми областями вокруг поддерживаемых границ, как это обычно делается в 3D ТО.

На рис. 3.13 видно, что оптимальная форма ребер схожа для обоих вариантов граничных условий, хотя толщина ребер в пластине с фиксированными углами меньше. Это является следствием необходимости усиления жесткости

неподдерживаемых границ пластин. В этих решениях некоторое количество объема ребер расходуется на повышение жесткости границ (верхний ряд на рис. 3.13). Наиболее тонкие ребра возникают в задаче с тремя силами, где ребра должны соединить три нагруженные точки внутри области (положение которых предписано) и 5-6 точек на границе (оптимальное положение которых находится в процессе решения).

Примечательно, что алгоритм ТО не соединяет напрямую нагруженные и опорные точки ребрами жесткости в решениях с фиксированными углами, что может показаться лучше с обычной инженерной точки зрения. Вместо этого, решение ТО находит более сложную форму ребер, которая является более эффективной для рассматриваемых задач (это будет подтверждено в следующих разделах). В то же время, для условий простой опоры алгоритм находит два тривиальных решения с крестом для одной силы и с одним раскосом для двух сил (см. нижний ряд на рис. 3.13). В этих решениях алгоритм просто нашел кратчайшие расстояния между нагруженными точками и границей опоры, а затем улучшил форму ребер, сделав их переменной толщины и высоты. В частности, форма одиночной стойки в задаче с двумя силами типична для задач минимального соответствия и содержит наибольшую высоту в центре и градиент высоты вокруг опор (аналогично стандартной задаче МВВ-балки). Примечательно также, что все ребра состоят только из прямых отрезков и криволинейные формы для рассматриваемых тестовых задач с пластинами не возникают.

Следующей задачей является оценка точности полученных решений для пластин с переменной толщиной. В целом, хорошо известно, что быстрое изменение толщины не поддерживается теориями оболочечного типа, и для таких структур необходимо проводить трехмерный анализ. Тем не менее, учитывая, что в рассматриваемых задачах минимальной податливости интерес представляет только точность решений по перемещениям, мы сравниваем прогибы в моделях пластин Миндлина-Рейсснера переменной толщины и в соответствующих трехмерных твердотельных моделях. Последние были созданы вручную на основе

полученных ТО-решений. Форма ребер и общий объем пластин контролировались приблизительно одинаково в моделях оболочечного типа и в соответствующих твердотельных моделях пластин. Общий объем всех моделей составил $220,4 \pm 0,2$ см³, что соответствует $\bar{\rho} \approx 0.079$ от общего доступного объема расчетной области $L(h_{rib} + h_{skin}) = 2790$ см³. Для упрощения твердотельных моделей мы сделали ребра в основном одинаковой высоты с соответствующим уменьшением их толщины для обеспечения заданного общего объема. В трехмерных твердотельных решениях нагрузки распределялись по небольшим круглым областям радиусом 5 мм. Условие фиксированных углов (3.5) было задано на участках поверхности размером 1 мм вокруг углов трехмерных моделей. Условия простой опоры (3.6) были воспроизведены с помощью фиксированных ограничений для внешних краев (контура) лицевых пластин в трехмерных твердотельных моделях.

Результаты численных расчетов представлены на рис. 3.14, 3.15, где показано распределение прогибов, т.е. компонент вектора перемещений в нормальном направлении к поверхности пластины. Для моделей оболочек переменной толщины (верхний ряд на рис. 3.14, 3.15) показаны решения по смещениям, которые были получены в ходе ТО для окончательных геометрий, представленных на рис. 3.13. Эти модели оболочек имеют некоторые шумы и негладкие геометрические элементы, что типично для результатов ТО. Напротив, решения для трехмерных твердотельных моделей получены для сглаженной геометрии ребер и относительно плотной трехмерной сетки, созданной с помощью тетраэдрических элементов второго порядка (с максимальным размером 1 мм).

Из рис. 3.14, 3.15 видно, что оболочечные модели в рамках теории Миндлина-Райсснера дают достаточно хорошие решения по сравнению с трехмерными твердотельными моделями. Распределение перемещений по оболочечным и твердотельным моделям одинаково, а относительные ошибки между найденными максимальными прогибами не превышают 7% для пластин с фиксированными углами и 18% для пластин с подкрепленными границами. Более высокие ошибки в решениях с опорными границами (рис. 3.15) являются следствием заданных

краевых условий в трехмерных твердотельных моделях, которые не полностью соответствуют просто опорным условиям для пластин.

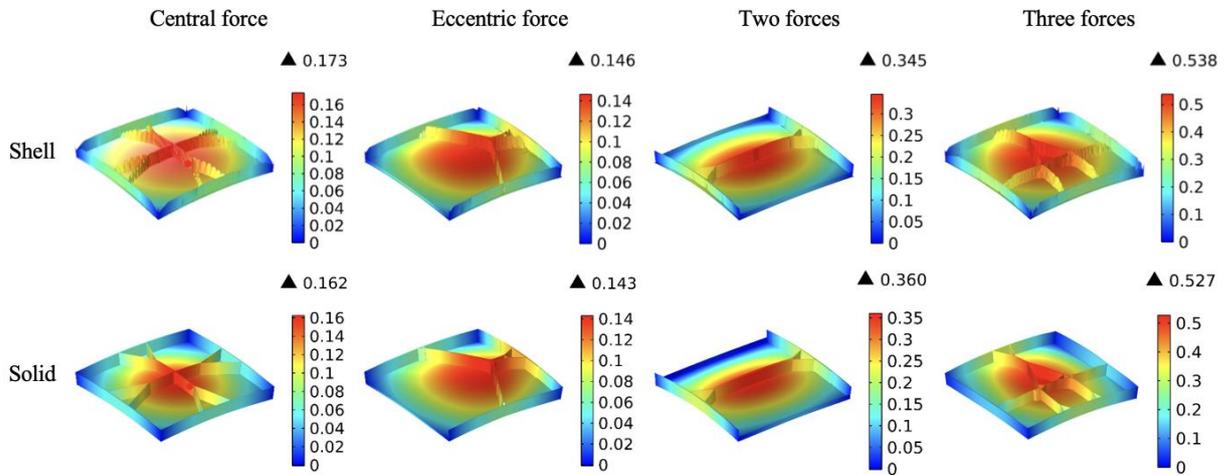


Рисунок 3.14. Сравнение решений для прогибов (мм) оптимизированных пластин в моделях типа оболочек переменной толщины и в соответствующих сглаженных трехмерных твердотельных моделях. Граничные условия с фиксированными углами. Максимальные прогибы отмечены на графиках

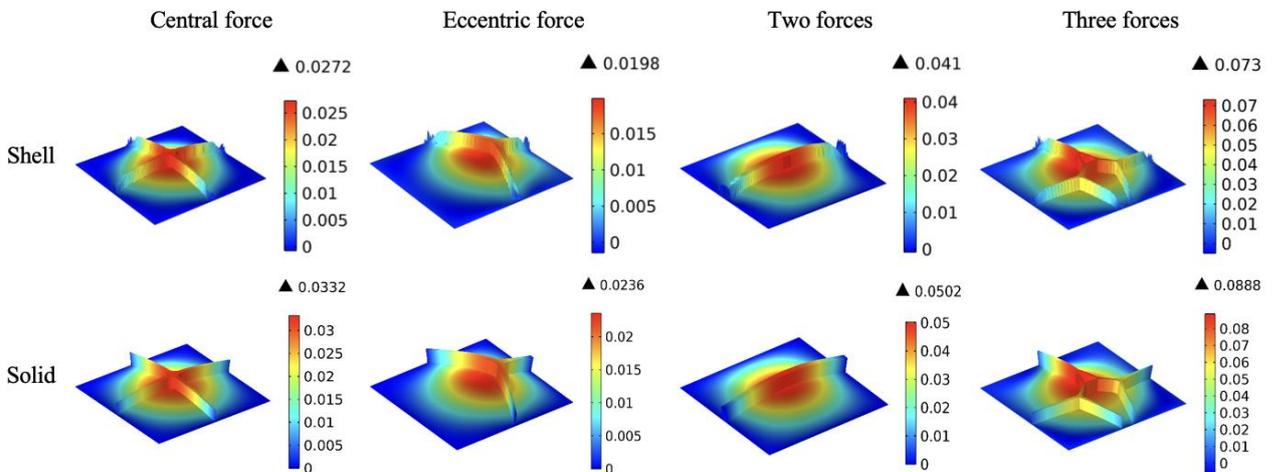


Рисунок 3.15. Сравнение решений для прогибов (мм) оптимизированных пластин в моделях оболочечного типа переменной толщины и в соответствующих сглаженных трехмерных твердотельных моделях. Граничные условия просто поддерживаются. Максимальные прогибы отмечены на графиках

В целом, отклонения между решениями в рамках оболочечной и твердотельной моделей являются следствием приближенного характера теории

Миндлина-Рейсснера, особенно для пластин с быстрым изменением толщины. Тем не менее, полученные не очень большие погрешности позволяют утверждать, что решения для поля перемещений в моделях оболочек переменной толщины достаточно точны. Следовательно, оценки для податливости пластин на основе теории Миндлина-Рейсснера переменной толщины также являются точными (хотя и приближенными) и могут быть эффективно использованы в рамках рассматриваемой оптимизационной задачи (3.1).

Теперь оценим эффективность полученных решений ТО (рис. 3.13-3.15) по сравнению с параметрической оптимизацией для пластин с регулярной жесткостью. Задача параметрической оптимизации (3.7) была решена для случаев нагружения, представленных на рис. 1, и граничных условий (3.5), (3.6) с помощью метода прямого поиска. Мы взяли 50 различных значений размеров ребер a и b и варьировали количество ребер в диапазоне $2 \leq 2N \leq 40$ (см. (3.7)). Для корректного сравнения с результатами ТО мы определили максимально допустимый объем пластины $\bar{\rho}_{max}$ таким же, как и у оптимизированных пластин, полученных в рамках ТО. Таким образом, в задачах ТО мы определили возможный объем пластины как $\bar{\rho}_{max} = 0.079$. Найденные оптимальные наборы параметров модели для различных случаев нагружения представлены в таблице 3.6. Распределение прогибов в полученных оптимизированных решетчато-жестких пластинах показано на рис. 3.16. В таблице 3 приведено сравнение прогибов, оцененных в нагруженных точках оптимизированных пластин, полученных с помощью ТО (рис. 3.13–3.15) и с использованием ПО (рис. 3.16).

Для рассматриваемых задач ПО дает достаточно простые оптимальные решения с малым числом ($N = 1..4$) относительно толстых и высоких ребер, расположенных под нулевым углом $\alpha = 0$ к краям пластины. Полученная структура жесткости предполагает размещение массивных ребер непосредственно под нагруженными точками, которые соединяют эти точки с опорными зонами через минимальное расстояние. Примечательно, что во всех решениях с фиксированными углами (верхний ряд на рис. 3.16) мы имеем ребра,

расположенные на границе пластины. Таким образом, мы подтверждаем результат ТО, в котором также предлагалось поддержать границу плиты и соединить неподвижные углы ребрами (см. рис. 3.13, 3.14).

Ребра внутри области оптимизации имеют схожую форму в задачах ПО с обоими типами граничных условий. А именно, одинаковая геометрия ребер внутри области (одиночный центральный крест) реализуется для первых трех случаев нагружения: с одной центральной силой, эксцентрической силой и двумя силами (см. рис. 3.17a). Для последнего случая нагружения с тремя силами мы имеем решения с четырьмя ребрами внутри области (рис. 3.17b). Во всех решениях ПО ребра расположены непосредственно под точкой (точками) нагружения.

Таблица 3.6. Оптимальные геометрические параметры пластин с регулярной жесткостью, найденные с помощью параметрической оптимизации

Loading case	a (shell)	b (solid)	N	α
Boundary conditions: fixed corners				
Central force	2.5	29	3	0
Eccentric force	2.5	29	3	0
Two forces	2.5	29	3	0
Three forces	2	27	4	0
Boundary conditions: simply-supported				
Central force	7.5	29	1	0
Eccentric force	7.5	29	1	0
Two forces	7.5	29	1	0
Three forces	3.7	29	2	0

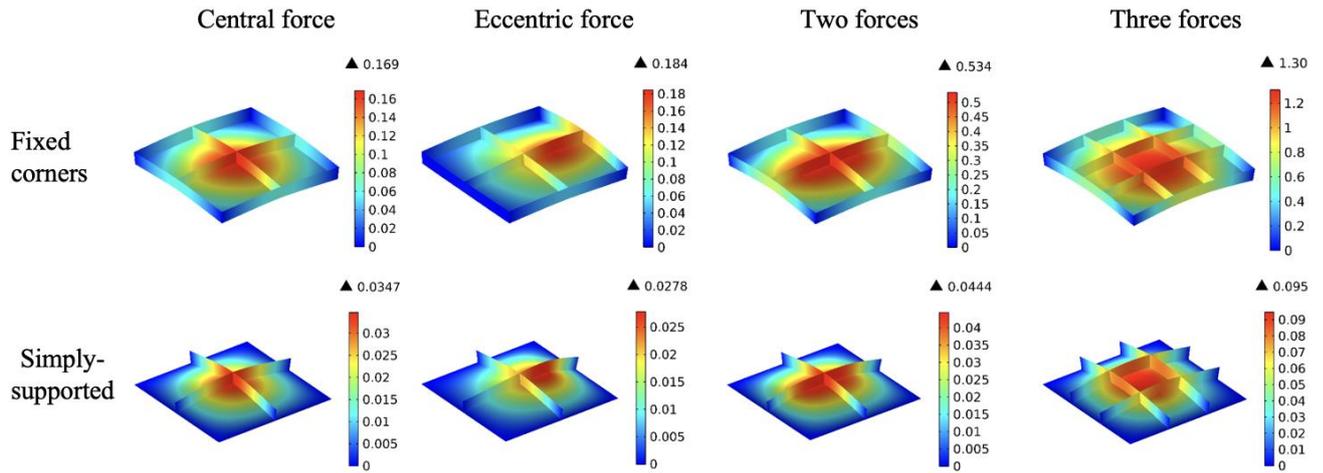


Рисунок 3.16. Прогибы (мм) регулярно жестких пластин, оптимизированных с помощью ПО подхода для различных нагрузок и условий опирания. Максимальные прогибы отмечены на графиках

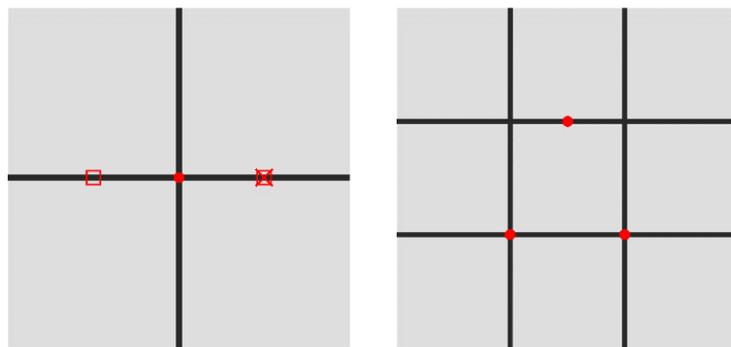


Рисунок 3.17. Иллюстрация размещения ребер внутри области оптимизации (без границы) в решениях ПО. Точки нагружения отмечены красными точками на графиках (а): одна центральная сила (!), эксцентрическая сила (×), две силы (!) и (б): три силы (!). В пластинах с фиксированными углами на границе размещены дополнительные ребра.

Сравнение эффективности методов ТО и ПО можно провести, используя данные, представленные в таблице 3.7 для прогибов в нагруженных точках оптимизированных пластин. Эти прогибы определяют податливость пластин (см. (3.1)), и для ТО-решений они представлены для первоначально полученных оболочек переменной толщины и для соответствующих сглаженных твердотельных моделей (рис. 3.14, 3.15). Отметим, что для задач с двумя и тремя силами прогибы симметричных точек нагружения были очень похожи (с

относительным расхождением $\leq 0,1\%$), поэтому в табл. 3.7 приведены только единичные значения перемещений для этих точек.

Из таблицы 3 видно, что результаты ПО и ТО очень близки для самой простой задачи с центральной силой. Оптимальная геометрия ребер в этих решениях ТО и ПО схожа, а относительная разница между прогибами в центральных точках пластин не превышает 4%. В задаче с просто подкрепленной границей мы просто имеем ту же геометрию с одной центральной крестовиной. Поэтому в этой простой задаче методы ТО и ПО подтверждают друг друга. Для задачи с фиксированными углами решение ТО содержит более сложную геометрию с вильчатой формой центральных ребер, что обеспечивает несколько лучшую податливость пластины (на 4% ниже по сравнению с ПО).

Таблица 3.7. Прогибы (мм) в нагруженных точках оптимизированных пластин, полученные методами топологической оптимизации (ТО) и параметрической оптимизации (ПО)

Loading case	ТО (shell)	ТО (solid)	ПО
Boundary conditions: fixed corners			
Central force	0.173	0.162	0.169
Eccentric force	0.139	0.142	0.184
Two forces	0.306	0.321	0.51
Three forces	0.47/0.51	0.14/0.47	1.19/1.2
Boundary conditions: simply-supported			
Central force	0.027	0.033	0.034
Eccentric force	0.016	0.02	0.027
Two forces	0.03	0.037	0.38
Three forces	0.055/0.066	0.067/0.082	0.077/0.087

Примечательно, что в рассматриваемой задаче наиболее оптимальная геометрия не определяется двумя пересекающимися диагональными ребрами с углом ориентации $\alpha = \pi / 4$ (определение угла см. на рис. 3.7). С интуитивной точки

зрения может показаться, что такая конструкция была бы более оптимальной. Однако путем прямой проверки в рамках модели ПО можно показать, что для такой конструкции той же массы объективная функция будет примерно на 10% выше. объективная функция будет примерно на 10% выше.

Аналогичные оптимальные геометрии найдены также для задач ТО и ПО с двумя силами и просто поддерживаемой границей, где прогибы в нагруженных точках в ТО имеют значение $w = 0.037$ мм, а в ПО - $w = 0.038$ мм (см. табл. 3.7). В этой задаче решение ТО содержит один раскос, расположенный под нагруженными точками (см. рис. 3.13), в то время как в ПО наши ограничения на регулярную и симметричную геометрию ребер приводят к единственной центральной крестовине (см. рис. 3.17а).

Для более сложных условий нагружения ТО дает лучшие результаты по сравнению с ПО. В задаче с эксцентрической силой алгоритм ТО нашел наклонную форму ребер, которая уменьшает податливость на 22% в пластинах с фиксированными углами и на 26% в просто подкрепленных пластинах. Примечательно, что угол раскрытия наклонных ребер в решениях ТО одинаков в обоих вариантах граничных условий (см. рис. 3.13).

Наиболее значительные улучшения получены для пластин с фиксированными углами и нагруженных двумя или тремя силами. В этих решениях ТО обеспечивает увеличение жесткости пластины в 1,8-2 раза по сравнению с обычной жесткостью (см. табл. 3.7). Примечательно, что в этих решениях ТО ребра расположены не по всему контуру пластин, что позволяет сохранить некоторый дополнительный объем материала для улучшения и увеличения ребер внутри области оптимизации.

Для последней задачи с простонесущими граничными условиями и тремя силами ТО и ПО содержат существенно разные системы ребер (сравните результаты на рис. 3.13 и 3.17б). В то же время прогибы в нагруженных точках не сильно изменились, и улучшение ТО для податливости пластины (сумма прогибов в нагруженных точках) составляет около 9% по сравнению с ПО. Это подтверждает

преимущества подхода ТО для нестандартных случаев нагружения и, в то же время, возможную неуникальность решения оптимизационной задачи и существование нескольких различных оптимальных решений и существование нескольких различных оптимальных форм ребер.

3.3. Пример оценки эффективности ТО на основе аналитического решения для плоско-пространственной рамы

Эталонная задача для рассматриваемого метода сформулирована для квадратных просто подкрепленных пластин с ограниченными плоскими и поперечными смещениями по всей границе:

$$u_i = 0, \quad M_{ij}n_i n_j = 0 \quad \theta_i s_i = 0 \quad w = 0 \quad x \in \partial\Omega \quad (3.8)$$

где n_i и s_i - внешние нормальный и касательный единичные векторы к границе пластины к границе плиты, соответственно.

Пластина нагружается сосредоточенной поперечной силой P , приложенной на центральной линии пластины со смещением от ее центральной точки (см. рис. 3.18). Размер края пластины равен L , а расстояние между центром пластины и нагруженной точкой обозначается ℓ . В решениях ТО мы рассматривали различные значения $\ell/L = 0.1 \dots 0.4$ и нашли соответствующие оптимальные решения для расчетной переменной $\rho(x)$ (т.е. для толщины пластины $h(x)$).

Реализация рассматриваемой задачи оптимизации (3.1) и модели пластины (3.2)-(3.4), (3.8) осуществлялась в рамках интерфейса "Shell" в Comsol Multiphysics. Дополнительная узловая переменная (плотность $\rho(x)$) была введена с помощью интерфейса "Density model" и линейных функций формы Лагранжа. Глобальные ограничения (на общий объем и на максимальный градиент толщины) и локальные ограничения (на диапазон толщины) были введены с помощью соответствующих узлов интерфейса оптимизации. Функция соответствия защищалась в сокращенной форме как величина деформаций под нагруженной точкой. Использовались треугольные сеточные элементы с квадратичными полиномиальными функциями формы Лагранжа. Максимальный размер засева элементов составлял $L/150$.

Решение задачи теории пластин было найдено с помощью прямого решателя MUMS. Оптимизационная задача решалась с помощью метода скользящих асимптот. Максимально допустимое число итераций составляло 100. Коэффициент допуска на оптимальность составлял 0,001. Начальные условия (начальная толщина пластины) были заданы с помощью постоянного значения расчетной переменной $\rho(x) = 0.5$ во всей области. Нормализация объективной функции проводилась с использованием решения первой итерации с начальной равномерной толщиной. Все указанные настройки метода были выбраны на основе предварительных исследований (см. в разделе 3.1, 3.2).

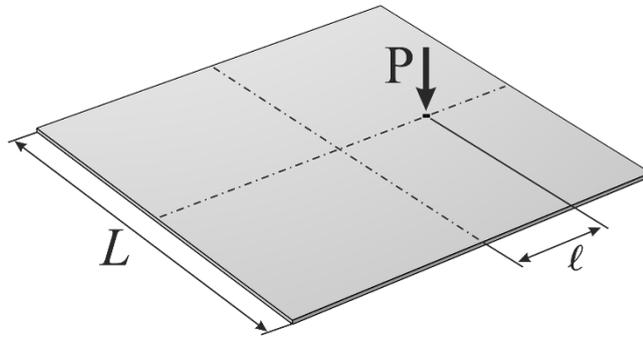


Рисунок 3.18. Эталонная задача для пластины, нагруженной эксцентрической силой

В расчетах рассматриваются пластины с размером ребра $L = 300$ мм и с толщиной кожи $h_{skin} = 1$ мм. Максимальная высота ребер была задана равной $h_{rib} = 29$ мм (максимальная общая толщина пластины $h_{max} = 30$ мм). Ограничение на оставшийся объем в ТО было $\bar{\rho}_{max} = 8\%$. Минимально допустимая толщина ребер в ТО составляла $d_{min} = 2$ мм. Использовались типичные упругие свойства полимерного материала: Модуль Юнга, $E = 1.6$ ГПа и коэффициент Пуассона, $\nu = 0.3$. Величина нагрузки составляла $P = 10$ Н. Все расчеты проводились в рамках линейной упругой формулы.

График сходимости для решения ТО в рамках рассматриваемой эталонной задачи (3.2) – (3.4), (3.8) представлен на рис. 3.19. Здесь показана зависимость

объективного функционала J , относительного остаточного объема $\bar{\rho}$ и нормированного максимального градиента толщины $|\nabla \bar{h}|_{\max} = \frac{d_{\min}}{2h_{rib}} \max_{x \in \Omega} |\nabla h|$ от числа итераций. В соответствии с утверждением (3.1), первое из них должно быть минимальным ($J \rightarrow \min$), второе должно быть равно предписанному значению $\bar{\rho} = \bar{\rho}_{\max}$ и последнее не должно быть больше верхней границы $|\nabla \bar{h}|_{\max} \leq 1$. Как видно из рис. 3.19, все эти требования выполняются в процессе решения. Сходимый результат для пластины с переменной толщиной получен в течение 20...30 итераций.

Стандартное решение ТО для рассматриваемой эталонной задачи содержит три ребра, которые пересекаются под точкой нагрузки (см. иллюстрации на рис. 3.19). Одно короткое ребро соединяет нагруженную точку с ближайшим краем пластины. Два других ребра расположены симметрично и соединяют нагруженную точку с боковыми гранями пластины. Главная особенность этого решения заключается в том, что угол между наклонными ребрами зависит от относительного смещения нагруженной точки относительно центра пластины (ℓ / L). На рис. 3.20 показаны решения ТО для значений относительного смещения $\ell / L = 0.1 \dots 0.375$. Видно, что при больших значениях относительного сдвига (ℓ / L) угол между ребрами в оптимальном решении ТО становится меньше. В дальнейшем мы будем обозначать этот угол раскрытия как 2α . Определенные значения этого угла будут приведены в следующем разделе.

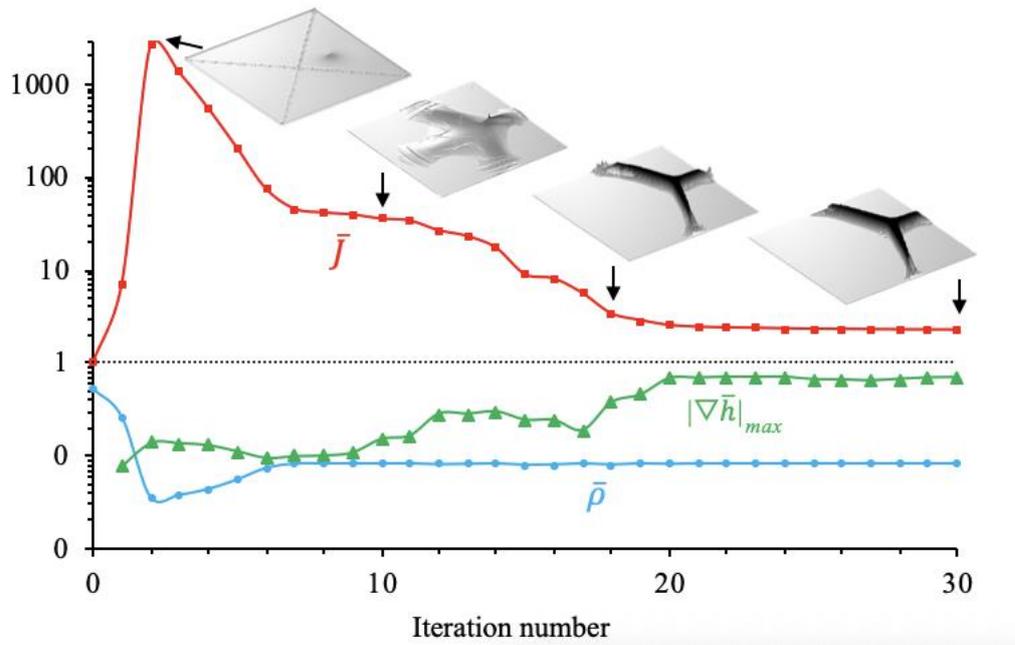


Рисунок 3.19. Типичный график сходимости для целевой функции (красный), относительного остаточного объема (зеленый) и нормированного максимального градиента толщины (зеленый) в рамках рассматриваемой эталонной задачи для подхода ТО с переменной толщиной.

Полученный результат на рис. 3.20 важен, поскольку он достаточно прост и позволяет сравнить численные решения ТО для пластин переменной толщины с аналитическими решениями балочного типа. А именно, мы можем рассматривать соответствующую плоскую раму, состоящую только из трех ребер (черный цвет на рис. 3.20) без других частей пластины, которые можно обозначить как лицевой лист (светло-серый цвет на рис. 3.20). В модели балочного типа мы также пренебрегаем изменением ширины и высоты ребер и предполагаем, что приблизительно они могут быть смоделированы как прямые однородные балки. В рамках такой модели балочного типа можно найти оптимальный угол между наклонными ребрами, который обеспечивает минимальное значение смещения под нагруженной точкой. Это решение представлено в следующем разделе.

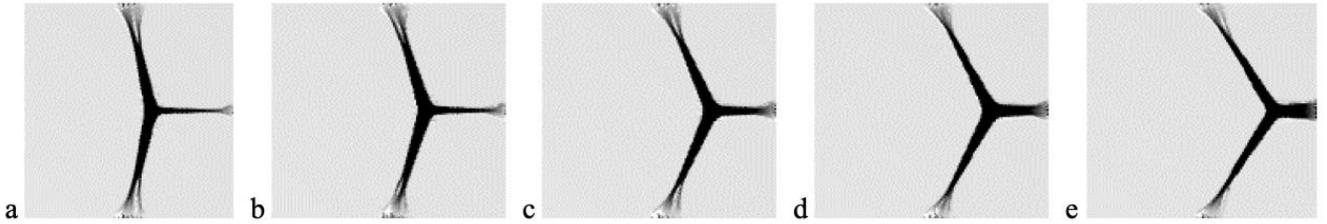


Рисунок 3.20. Решения ТО для контрольной задачи для квадратной пластины, нагруженной эксцентрической силой (ребра пересекаются под точками нагрузки), а: $l/L = 0.1$, б: $l/L = 0.167$, в: $l/L = 0.25$, г: $l/L = 0.3$, д: $l/L = 0.375$. Толщина оптимизированных пластин представлена черном и белом цветах в миллиметрах

Для проверки на основе аналитического решения рассмотрим плоскую-раму, представленную на рис. 3.21. Рама нагружена единичной нагрузкой P в соответствии с исходной задачей для пластины (рис. 1). Рама состоит из трех сегментов в соответствии с решениями ТО для пластин переменной толщины (рис. 3). Короткий сегмент (позиция 1 на рис. 3.21) соединяет нагруженную точку с положением ближайшего края пластины. Длина этого сегмент ($L_1 = L/2 - l$) определяется заданным положением нагруженной точки. Два других сегмента (позиции 2, 3 на рис. 3.21) расположены симметрично относительно первого. Эти сегменты соединяют нагруженную точку с положениями боковых граней пластины. Угол 2α между сегментами 2 и 3 должен быть определен на основе решения задачи по обеспечению минимальных деформаций в нагруженной точке рамы.

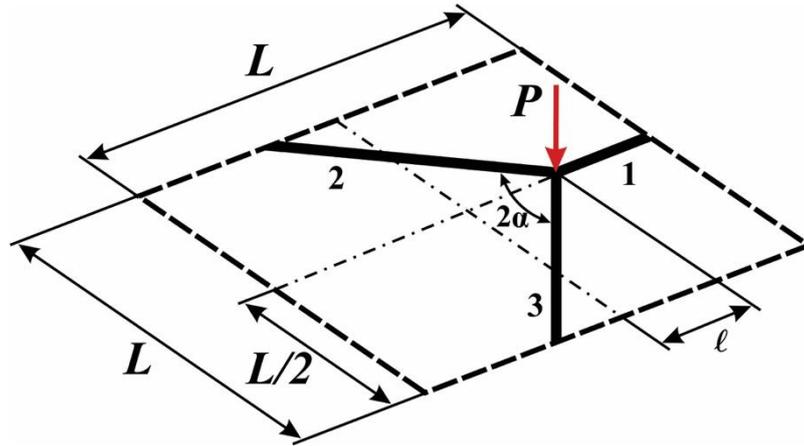


Рисунок 3.21. Задача для плоской рамы, используемая для аналитической проверки решений ТО

Предполагается, что сегменты 2 и 3 могут быть прикреплены только к боковым краям пластины, т.е. что угол α изменяется в диапазоне.

$$\arctan(1 + 2\ell / L)^{-1} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} + \arctan(1 - 2\ell / L) \quad (3.9)$$

Все сегменты имеют прямоугольные сечения $d_i \times h_{max}$ ($i = 1 \dots 3, d_2 = d_3$) и поддерживаются на концах. В соответствии с условиями простой опоры для пластины (3.12) опоры для балок ограничивают их перемещения и углы поворота. Примечательно, что повороты, вызванные изгибом, не ограничиваются рассматриваемыми условиями простой опоры.

Деформации рамы могут быть оценены в соответствии со стандартным подходом для моделей балочного типа. Мы будем рассматривать теорию балок Эйлера-Бернулли. В силу симметрии задачи, в сегменте 1 не будет кручения, и его деформации из-за изгиба могут быть определены следующим образом:

$$w_1(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3, \quad 0 \leq z \leq L_1 \quad (3.10)$$

где α_i - неизвестные коэффициенты; и z - локальная координата вдоль длины сегмента, которая начинается от его поддерживаемого конца.

В силу симметрии деформированное состояние сегментов 2 и 3 одинаково (вплоть до знака угла закручивания), поэтому мы можем рассматривать только

один из этих сегментов. Поэтому мы определяем деформации и угол закручивания сегмента 2 следующим образом:

$$w_2(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3, \quad \phi(z) = c_0 + c_1 z, \quad 0 \leq z \leq L_2 \quad (3.11)$$

где z - локальная координата, отсчитываемая от точки нагружения; $L_2 = L / (2 \sin \alpha)$ - длина участка 2; b_i, c_i - неизвестные коэффициенты.

В представленной форме решения (3.10), (3.11) мы имеем 10 неизвестных коэффициентов, которые должны быть найдены из граничных условий и условий непрерывности. Граничные условия задачи, следующие:

$$w_1(0) = 0, \quad M_1(0) = 0, \quad w_2(L_2) = 0, \quad M_2(L_2) = 0, \quad \phi(L_2) = 0 \quad (3.12)$$

где $M_i(z) = D_i \theta'_i(z)$ - изгибающие моменты; $\theta_i(z) = -w'_i(z)$ - углы поворота при изгибе; $D_i = d_i h_{max}^3 / 12$ - изгибные силы сегментов; простым знаком обозначена производная по длине сегментов (по локальной координате z).

Условия непрерывности в точке пересечения сегментов 1 и 2 (точка нагружения) задаются с учетом угла наклона α . Для делений w_i , углов поворота θ_i и угла закручивания ϕ мы имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} w_1(0) &= w_1(L_1) \\ \theta_2(0) \cos \alpha + \phi(0) \sin \alpha &= \theta_1(L_1) \\ -\theta_2(0) \sin \alpha + \phi(0) \cos \alpha &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

где мы принимаем во внимание отсутствие скрутки в сегменте 1.

Также необходимо прописать условие непрерывности для изгибающих и крутящих моментов и условие для поперечной силы. Эти условия могут быть определены следующим образом:

$$\begin{aligned} M_2(0) \cos \alpha + T(0) \sin \alpha &= \frac{1}{2} M_1(L_1) \\ Q_2(0) &= \frac{1}{2} (Q_1(L_1) - P) \end{aligned} \quad (3.14)$$

где $T(z) = S\phi'(z)$ - крутящий момент, а S - крутильная сила в сегменте 2; и мы учитываем, что из-за симметрии только одна половина изгибающего момента и поперечной силы (включая заданную нагрузку P) поступает из сегмента 1 в сегмент 2.

Из системы линейных уравнений (3.12) - (3.14) мы можем легко найти 10 коэффициентов решения (3.10), (3.11) аналитически. Для краткости мы не приводим здесь явные соотношения для этих коэффициентов. Исходя из полученного решения, деформации в точке нагружения рамы могут быть представлены в следующем виде:

$$w_1(L_1) = w_2(0) = \frac{(L - 2\ell)LP}{12D_2} \bar{w}(\alpha), \quad (3.15)$$

$$\bar{w}(\alpha) = \frac{(2\bar{d} + \xi(3 + \bar{S}) + \xi(3 - \bar{S})\cos(2\alpha))}{\sin(\alpha)(6\xi^2 + 2\xi^3\bar{S} + \bar{d}(3 + \bar{S}) + 12\xi\bar{d}\cos(\alpha) - (2\xi^3\bar{S} - \bar{d}(3 - \bar{S}))\cos(2\alpha))}$$

где $\bar{d} = d_1 / d_2$ - отношение между шириной поперечного сечения сегментов 1 и 2; $\bar{S} = S / D_2 \approx 0.65$ - отношение между крутильной и изгибной жесткостью сегмента 2, для которого мы назначаем квадратное поперечное сечение; и $\xi = (1 - 2\ell / L)\sin(\alpha)$.

Таким образом, для заданных размеров рамы (L) и заданного положения точки нагружения (ℓ) мы можем оценить зависимость деформаций $w_1(L_1)$ от угла α . Эта зависимость определяется безразмерной функцией $\bar{w}(\alpha)$ в соотношении (3.15). Как видно из рис. 3.23, эта функция имеет единственный минимум для заданных значений ℓ / L и \bar{d} . Поэтому мы можем найти значение угла α_{opt} , которое обеспечивает минимальное значение деления $w_1(L_1)$. В рамках модели балочного типа найденный угол α_{opt} является оптимальным углом, обеспечивающим наибольшую жесткость рамы. Более того, можно показать, что это оптимальное

значение всегда принадлежит диапазону, заданному соотношением (3.9).

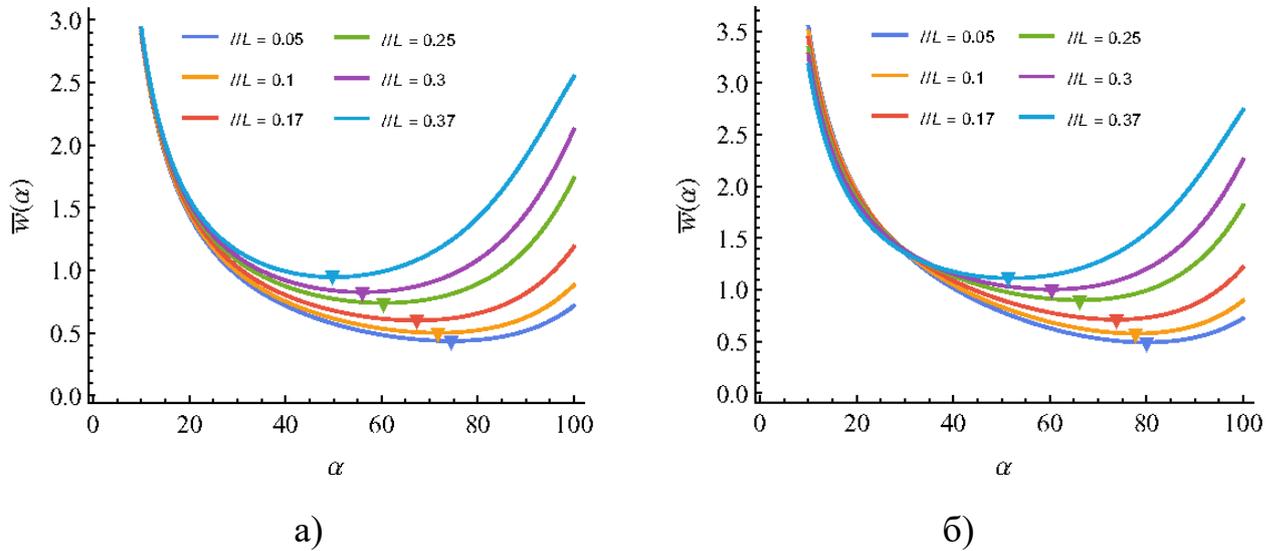


Рисунок 3.22. Зависимость безразмерных деформаций \bar{w} от угла наклона α сегментов в модели балочного типа (а: $\bar{d} = 1$, б: $\bar{d} = 0.5$). Минимумы функций показаны треугольными точками на графиках.

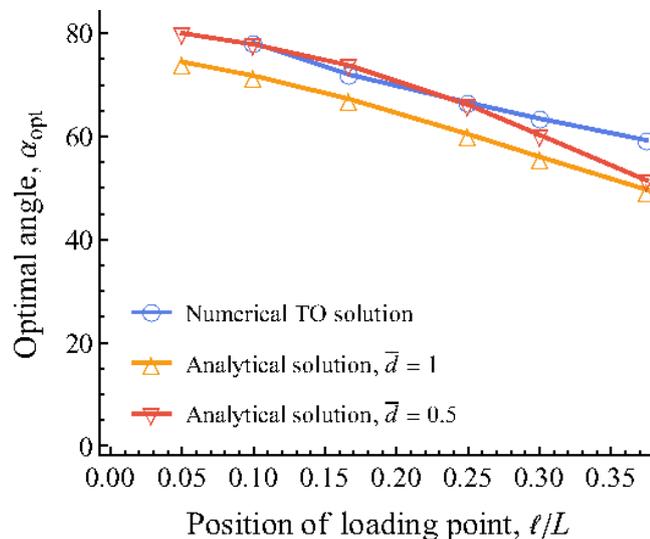


Рисунок 3.23. Сравнение оптимальных углов между ребрами, найденных в численных решениях ТО для пластин переменной толщины и в соответствующем аналитическом решении для плоской рамы

На рис. 3.23 представлено сравнение значений оптимальных углов, найденных в решениях ТО в рамках моделей пластин переменной толщины

(показанных на рис. 3.20), с соответствующими оптимальными углами α_{opt} , найденными в моделях балочного типа по решению (3.15) и зависимостям, приведенным на рис. 3.22. Аналитические решения представлены для рамы с одинаковыми сечениями сегментов ($\bar{d} = 1$) и для рамы, в которой сегмент 1 вдвое тоньше сегмента 2 ($\bar{d} = 0.5$). Последний вариант более близок к результату, который был получен в решениях ТО для пластин с положением точки нагружения $\ell / L \leq 0.25$ (см. рис. 3.20 а-б). На рис. 3.23 видно, что оба аналитических решения подтверждают тенденцию изменения оптимального угла между ребрами, полученную в решениях ТО. Более того, для случая положения точки нагружения $\ell / L \leq 0.25$ мы получаем очень близкие результаты между численной и аналитической оптимизацией (при $\bar{d} = 0.5$). Для большего смещения точки нагружения $\ell / L \leq 0.25$ аналитические решения отклоняются от результатов ТО, что можно объяснить тем, что в таких конструкциях мы имеем относительно короткие сегменты 1 (см. рис. 3.20 в, г), поэтому модель балки Эйлера-Бернулли становится менее точной и необходимо привлекать теории балок высокого порядка.

Рассматривается рама, представленная на рис. 3.24. Рама вписана в квадратную область с размером грани L . Рама образована продольным ребром жесткости, проходящим по центру пластины и двумя симметрично расположенными подкосными балками. В точке пересечения ребер жесткости приложена сосредоточенная нормальная сила P . Угол между подкосными балками и центральной балкой (α) является неизвестным и его необходимо найти на основе аналитического решения для рассматриваемой задачи из условия максимальной жесткости конструкции. Для этого необходимо найти решение для прогиба под точкой приложения силы и определить угол α , при котором этот прогиб становится минимальными. Таким образом, будет обеспечен вариант конструкции, соответствующий случаю минимальной работы внешних сил, то есть минимальной энергии деформаций конструкции.

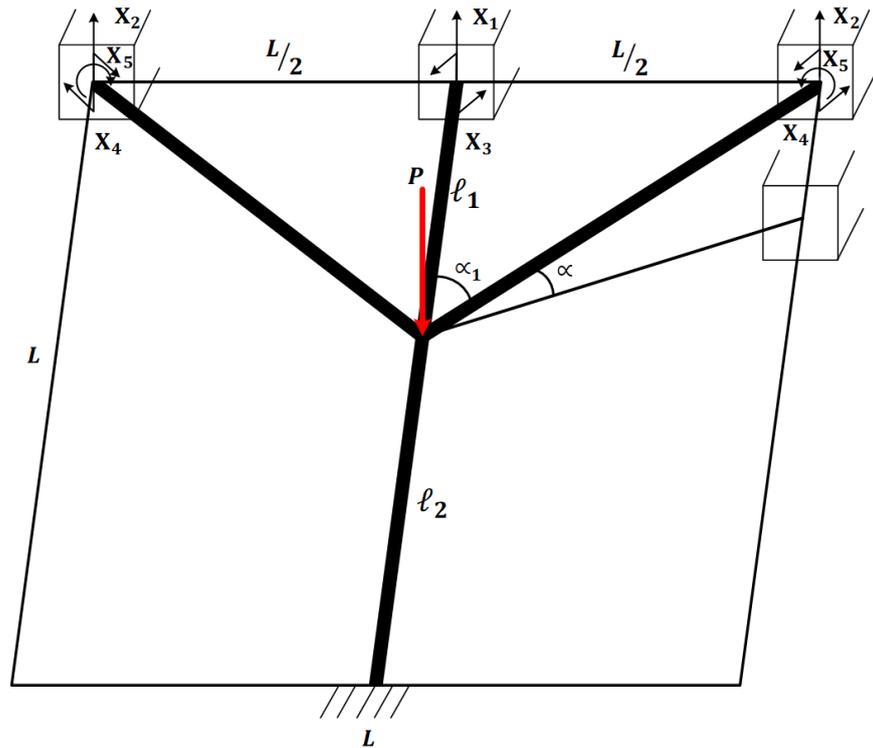


Рисунок 3.24. Общий вид эквивалентной системы.

Рама представляет с собой плоско пространственную конструкцию. Внешнее закрепление концов балок, образующих раму, считается консольным. Рассматриваем задачу будем решать с помощью метода сил. Система канонических уравнений метода сил будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
 \delta_{1P} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{14}X_4 + \delta_{15}X_5 &= 0 \\
 \delta_{2P} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{24}X_4 + \delta_{25}X_5 &= 0 \\
 \delta_{3P} + \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \delta_{35}X_5 &= 0 \\
 \delta_{4P} + \delta_{41}X_1 + \delta_{42}X_2 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \delta_{45}X_5 &= 0 \\
 \delta_{5P} + \delta_{51}X_1 + \delta_{52}X_2 + \delta_{53}X_3 + \delta_{54}X_4 + \delta_{55}X_5 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Где X_i $i=1..5$ являются неизвестными силовыми факторами, а δ_{ij} и δ_{ip} коэффициенты системы уравнений причем $\delta_{ij} = \delta_{ji}$. Для решения поставленной задачи построим эквивалентную систему, которая имеет вид, представлены на рис 3.24. Из этого рисунка видно, что рама пять раз статически неопределима. Для определения коэффициентов системы канонических уравнений (3.16) будем использовать графоаналитический метод интеграла Мора (правило Верещагина).

Для этого необходимо построить эпюры моментов относительно внешней нагрузки (рис.3.25) и эпюры моментов от единичных нагрузок, изображенных на рис 3.26-3.30. Здесь представлены эпюры моментов от неизвестных силовых факторов $X_i = 1$

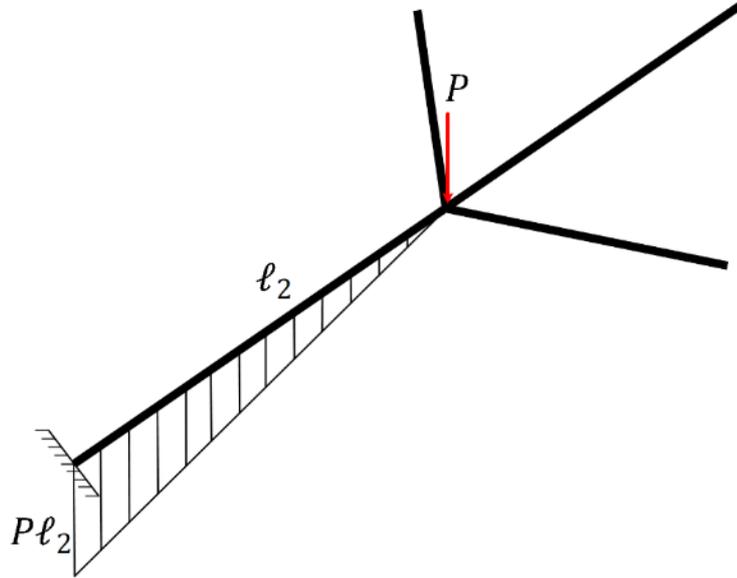


Рисунок 3.25. Эпюра моментов относительно внешней нагрузки.

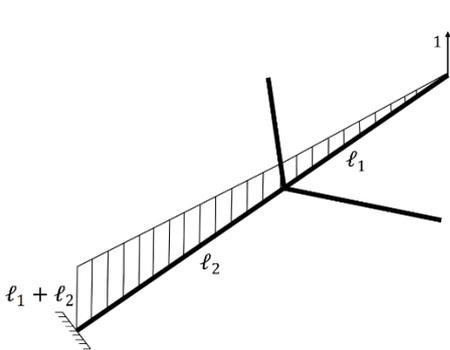


Рис 3.26

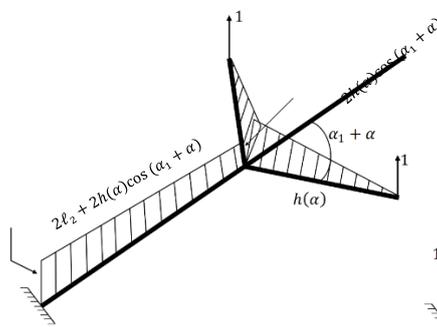


Рис 3.27

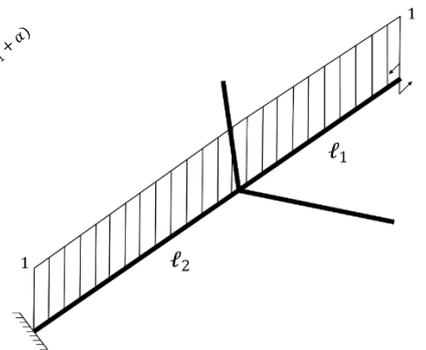


Рис 3.28

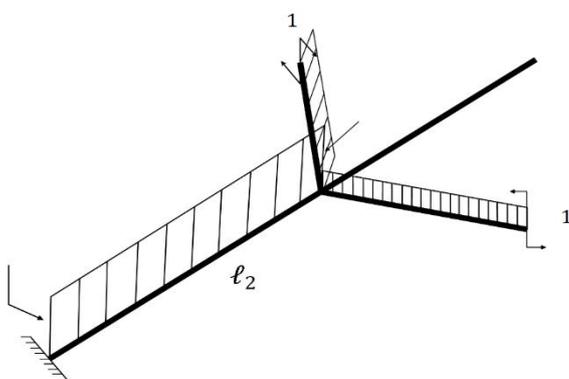


Рис 3.29

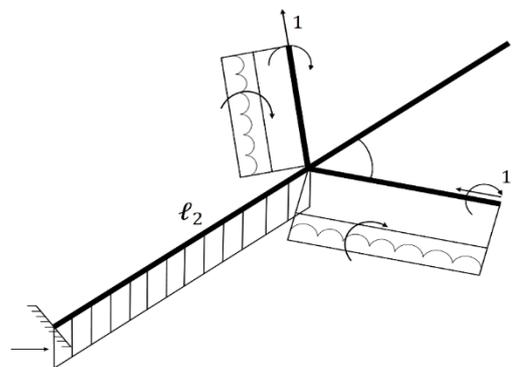


Рис 3.30

В результате «перемножения» соответствующих эпюр получаем коэффициент δ_{ij} и δ_{ip} системы (3.16) в виде:

$$\begin{aligned}
\delta_{1P} &= \frac{P\ell_2^3}{2EJ_z} \left(\frac{2}{3} + K \right), \delta_{11} = \frac{\ell_2^3}{3EJ_z} (1+K)^3, \delta_{12} = \left[\frac{(1+K)(1+2K)}{2} \operatorname{ctg}(\alpha_1 + \alpha) + \frac{2}{3} + K \right], \\
\delta_{13} &= \frac{\ell_2^2}{2EJ_z} (1+K)^2, \\
\delta_{14} &= \frac{\ell_2^3 (1+2K)(1+K)}{2EJ_z} \operatorname{ctg}(\alpha_1 + \alpha), \delta_{15} = -\frac{\ell_2^2 (1+2K)}{EJ_z} \cos(\alpha_1 + \alpha), \\
\delta_{2P} &= \frac{-P\ell_2^3}{EJ_z} \left[\frac{2}{3} + \frac{1+K}{2} \operatorname{ctg}(\alpha_1 + \alpha) \right], \\
\delta_{22} &= \frac{\ell_2^3}{EJ_z} \left[(1+K) \operatorname{ctg}(\alpha_1 + \alpha) (2 + (1+K) \operatorname{ctg}(\alpha_1 + \alpha)) + \frac{4}{3} \right], \\
\delta_{23} &= \frac{\ell_2^2}{EJ_z} [1 + (1+K) \operatorname{ctg}(\alpha_1 + \alpha)], \\
\delta_{33} &= \frac{\ell_2}{EJ_z} (1+K), \delta_{24} = \frac{2\ell_2^2 \cos(\alpha_1 + \alpha)}{EJ_z} [(1+K) \operatorname{ctg}(\alpha_1 + \alpha) + 1], \\
\delta_{25} &= -\frac{2\ell_2^2 \cos(\alpha_1 + \alpha)}{EJ_z} [1 + (1+K) \operatorname{ctg}(\alpha_1 + \alpha)], \delta_{3P} = -\frac{P\ell_2^2}{2EJ_z}, \\
\delta_{34} &= \frac{2\ell_2}{EJ_z} \cos(\alpha_1 + \alpha), \delta_{35} = -\frac{2\ell_2 \cos(\alpha_1 + \alpha)}{EJ_z}, \delta_{4P} = -\frac{P\ell_2^2}{EJ_z} \cos(\alpha_1 + \alpha), \\
\delta_{44} &= \frac{2\ell_2}{EJ_z} \left[\frac{1+K}{2\sin(\alpha_1 + \alpha)} + 2\cos^2(\alpha_1 + \alpha) \right], \\
\delta_{45} &= -\frac{4\ell_2}{EJ_z} \cos^2(\alpha_1 + \alpha), \delta_{5P} = \frac{P\ell_2^2}{EJ_z} \cos(\alpha_1 + \alpha), \\
\delta_{55} &= \frac{2\ell_2}{EJ_z} \left[2\cos^2(\alpha_1 + \alpha) + \frac{1+K}{2\sin(\alpha_1 + \alpha)} \beta \right] \beta = \frac{EJ_z}{GJ_k}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

В этих выражениях E, G модули упругости первого и второго рода, J_z, J_k - моменты инерции на изгиб и кручение соответственно, $K = \frac{\ell_1}{\ell_2}$

Далее, решая систему канонических уравнений (3.16), получаем неизвестные силовые факторы X_i , $i=1..5$. Тогда искомый прогиб будет иметь следующий вид:

$$\delta = \frac{P\ell_2^3}{EJ_z} \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \frac{X_1}{P} \left(K + \frac{2}{3} \right) - \frac{X_2}{P} \left[\frac{1+K}{2} \operatorname{ctg}(\alpha_1 + \alpha) + \frac{2}{3} \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{X_3}{P} - \frac{X_4}{P} \cos(\alpha_1 + \alpha) + \frac{X_5}{P} \cos(\alpha_1 + \alpha) \right\} \quad (3.18)$$

Для определения искомого прогиба используем среду Maple. Проведены тестовые расчеты для следующих параметров: размер области $L = 300$ мм, модуль Юнга рамы 1 ГПа, смещение точки приложения силы определяется величиной параметра $K = 0..0.37$. На рис. 3.31 показан найденный оптимальный угол между ребрами жесткости, найденный для плоско-пространственной рамы в зависимости от координаты приложения внешней нагрузки K . На этом же рисунке показано соответствующее изменение оптимального угла раскрытия ребер жесткости, найденного на основе метода ТО. Постановка и принципы численной реализации привлекаемой методики ТО для панели переменной толщины была описана ранее. Видно, что имеет место одинаковая тенденция в изменении оптимального угла между ребрами жесткости в аналитическом и численном решении.

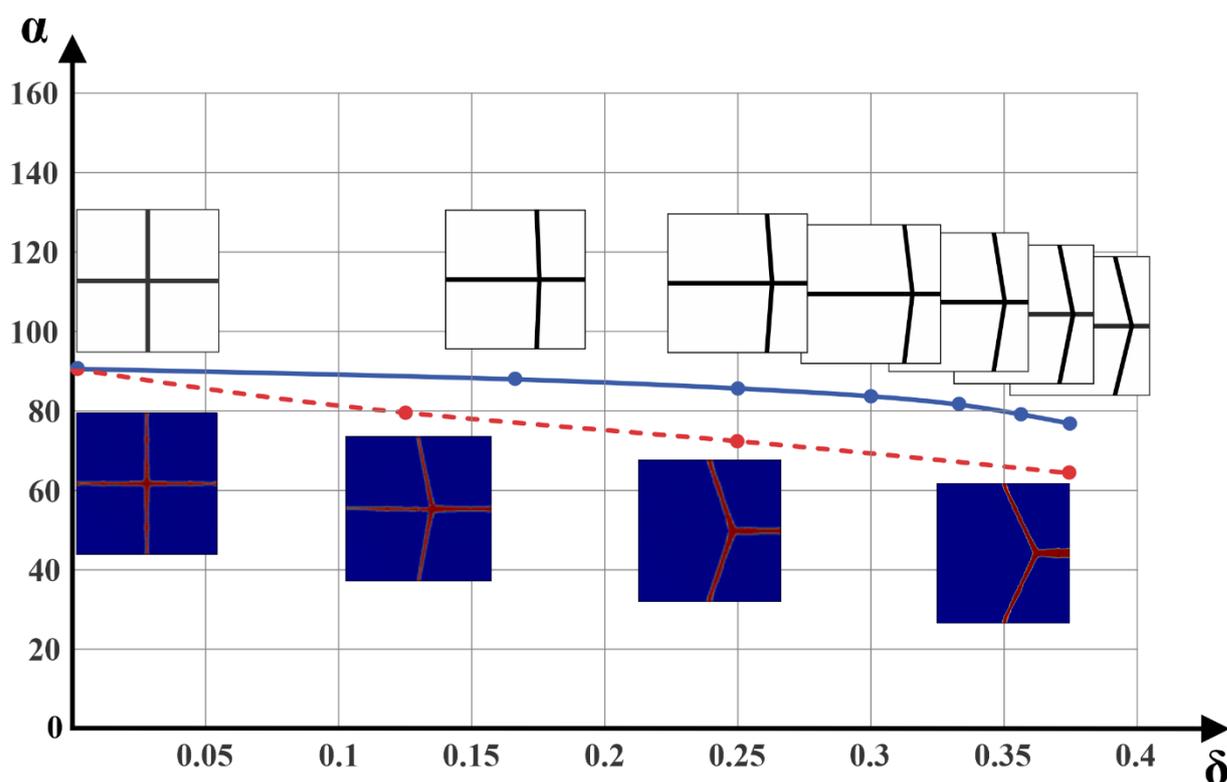


Рис. 3.31. Сопоставление аналитического и численного решения для оптимальной ориентации ребер жесткости в подкрепленной панели

3.4. Экспериментальные исследования панелей, изготовленных 3д печатью

В экспериментах мы рассматривали оптимизированные пластины, разработанные с использованием ТО и ПО для граничных условий (3.32) (фиксированные углы) и для случаев нагружения одной центральной или эксцентрической силой и двумя симметричными силами (рис. 3.33 а-в). Оптимизированные пластины были изготовлены с помощью технологии 3d-печати. Мы использовали полимерный материал PETG (FDplast) и FDM 3D принтер Original Prusa i3 MK3S. Режимы печати были следующие: толщина слоя 0,3 мм, скорость сканирования 60 мм/с, температура сопла/платформы 235/80⁰С. Пластины печатались в горизонтальной ориентации со шкурами, размещенными на строительной платформе (рис. 3.32). Материал PETG имеет некоторое различие между упругими свойствами в плоскости и вне плоскости (по отношению к строительной платформе). Однако степень анизотропии в этом материале не

превышает 5%, кроме того, внеплоскостные свойства не сильно влияют на поведение напечатанных вариантов пластин, поэтому анизотропными эффектами пренебрегали при сравнении экспериментальных данных и численного моделирования. экспериментальными данными и численным моделированием.

Эксперименты проводились с использованием универсальной испытательной машины Instron 5969. Для воспроизведения действия сосредоточенных сил использовались стальные стержни (диаметр 5 мм), закрепленные на стандартной нагрузочной ячейке для испытания на четырехточечный изгиб. Четырехстоечные опоры для углов испытываемых пластин были изготовлены также с помощью 3d-печати в соответствии с граничными условиями (3.5). Иллюстрации используемого испытательного оборудования будут приведены в этом разделе. В экспериментах скорость нагружения составляла 1 мм/мин.

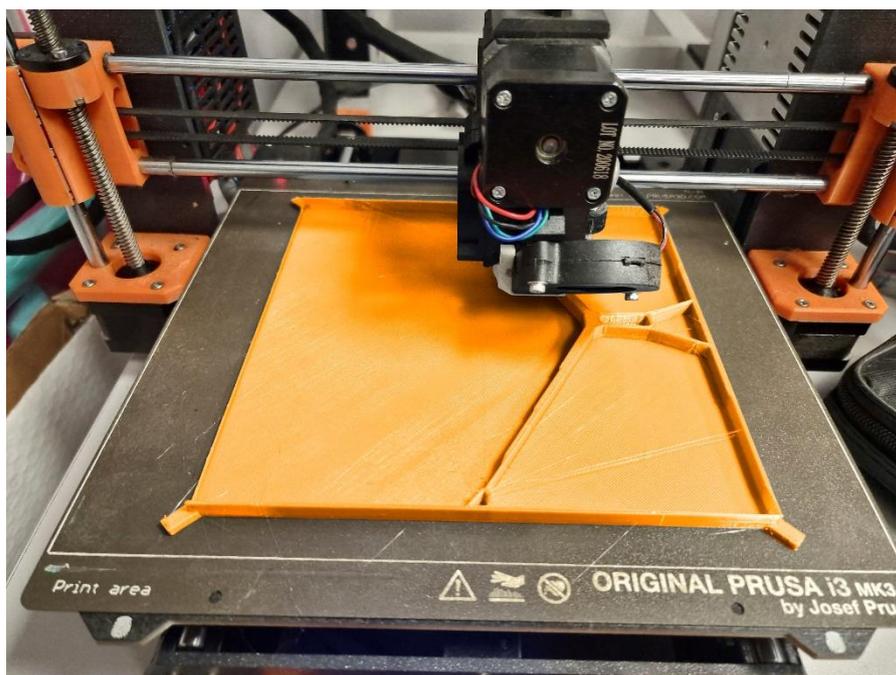


Рисунок 3.32. Изготовление оптимизированных ребристо-жестких пластин с помощью 3d-печати

Для получения правильных оценок прогибов пластины на основе измеренных прогибов нагружающей ячейки мы ввели поправку на соответствие в соответствии со стандартной методикой (ASTM D 790).

Экспериментальные испытания проводились для оптимизированных пластин, полученных с помощью ТО и ПО для задач с фиксированными углами (3.5) и нагруженных одной или двумя силами (рис. 3.33 а-в). Геометрия пластин, полученных с помощью ТО, представлена на рис. 3.13 (верхний ряд). Решения ПО имеют одинаковую геометрию для всех трех условий нагружения с ребрами вдоль контура и одной крестовиной внутри пластины ($N = 3$, см. табл. 3.6 и рис. 3.17а). Эти пластины были изготовлены с помощью 3d-печати. Размеры изготовленных пластин были уменьшены по сравнению с моделированием, так как максимальный размер области печати в 3D-принтере составлял 210×210 мм. Таким образом, мы масштабировали полученную геометрию пластин с коэффициентом 1,66 так, что начальная длина края пластины $L = 300$ мм уменьшилась до $L = 180$ мм, а максимальная высота ребер изменилась с $h_{rib} = 30$ мм до $h_{rib} = 18$ мм и т.д. Отпечатанные пластины представлены на рис. 3.33а. По углам напечатанных образцов были сделаны короткие выступающие элементы ($10 \times 5 \times 2$ мм), которые использовались для установки пластин на четырехколонную опору во время испытаний (рис. 3.33б, в). Все печатные пластины имели одинаковую массу $220 (\pm 1)$ г. Эксперименты также были смоделированы с помощью МКЭ с твердотельными моделями пластин, в которые также были включены дополнительные выступающие элементы по углам пластин, чтобы для обеспечения правильной оценки жесткости пластины (рис. 3.33д).

Кривые "нагрузка-прогиб", полученные в экспериментах и при моделировании, представлены на рис. 3.34. На этом рисунке показаны значения общей результирующей силы, т.е. значения P для задач с одной силой и $P/2$ для условий нагружения двумя силами. Прогибы найдены на основе измеренных перемещений нагружающей ячейки с учетом поправок на податливость опор и оборудования. Максимальная результирующая сила в экспериментах составила 21 Н. На основе предварительного моделирования было проверено, что эквивалентная девятая деформация в пластинах при максимальной нагрузке составляет менее 0,5%, так что материал PET-G работает в режиме линейной упругости.

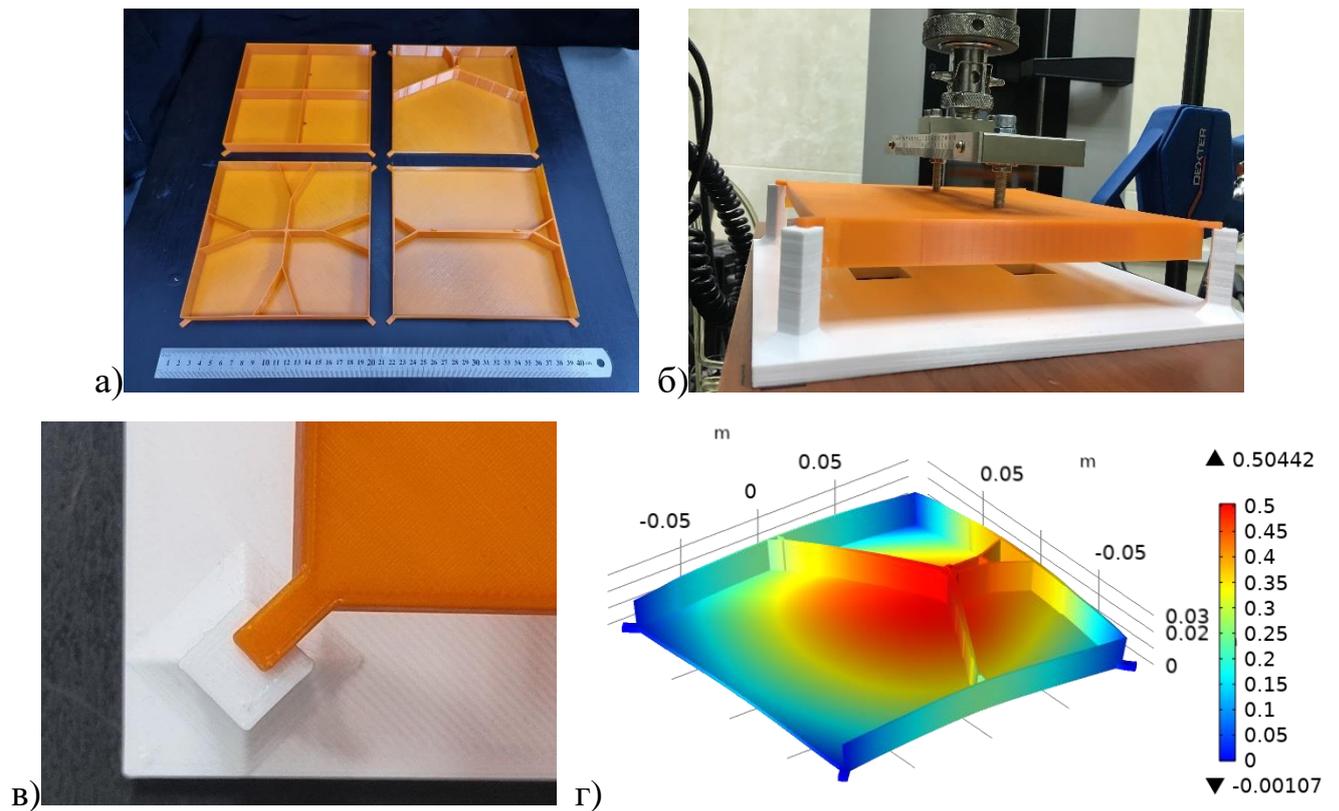


Рисунок 3.33. (а): Печатные пластины, оптимизированные с помощью ПО (слева вверху) и ТО (остальные), (б): экспериментальная процедура с оптимизированной пластиной, поддерживаемой по углам и нагруженной сосредоточенными силами, (в): Контакт с опорой, (г): Пример моделирования для экспериментальных испытаний (поле прогибов в миллиметрах для эксцентрической силы $P = 21 \text{ Н}$)

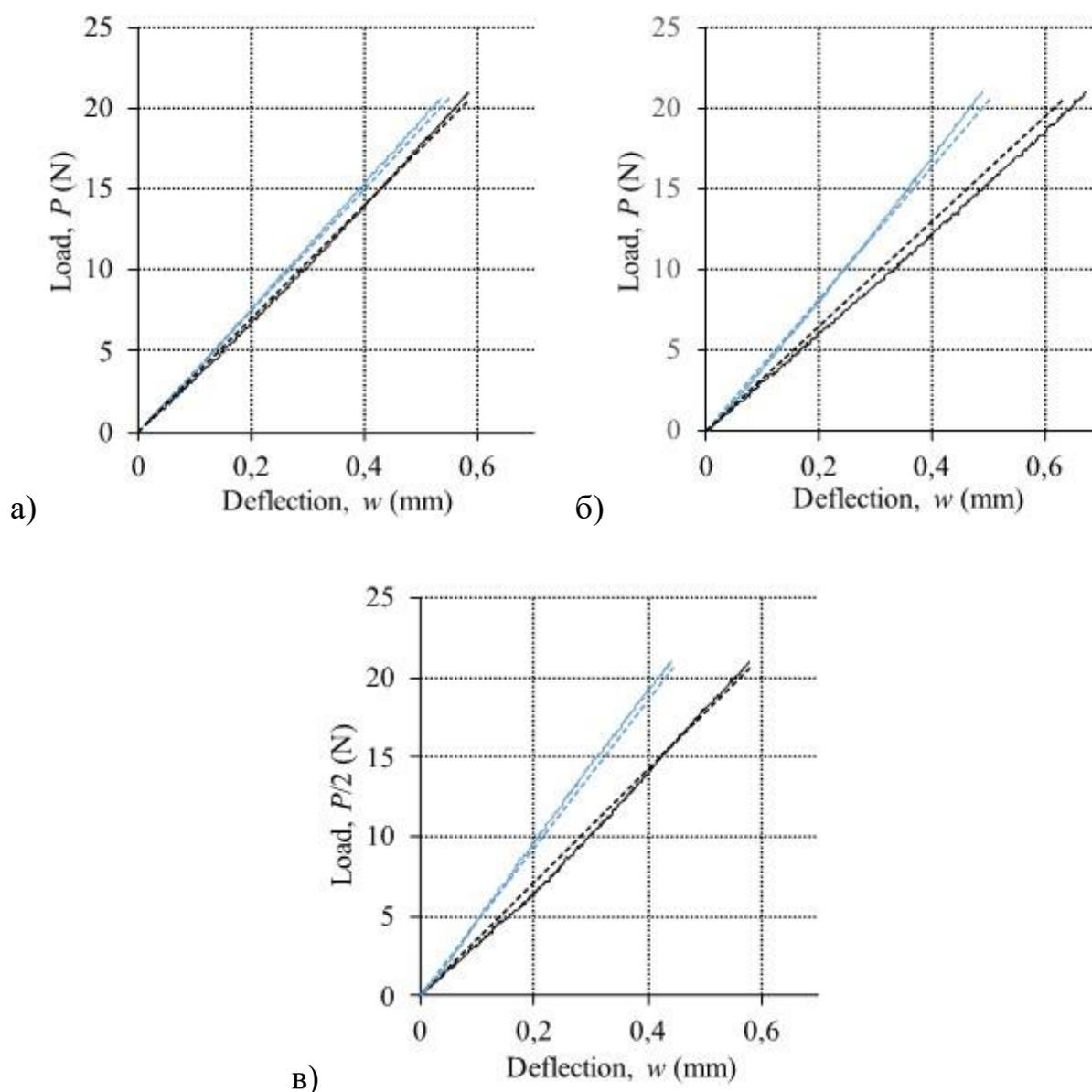


Рисунок 3.34. Кривые нагрузка/прогиб, полученные в экспериментах (сплошные линии) и при моделировании (пунктирные линии) для оптимизированных пластин, полученных с помощью ТО (синие линии) и ПО (черные линии), (а): центральная сила, (б): эксцентрическая сила, (в): две силы

Видно, что варианты геометрии пластин ТО (синие кривые на рис. 3.34) обеспечивают более высокую жесткость по сравнению с пластинами, разработанными с использованием ПО (черные кривые на рис. 3.34) во всех проведенных испытаниях. Разница между решениями ТО и ПО для нагружения центральной силой незначительна, в то время как в задачах с эксцентрической силой и с двумя силами жесткость пластин ТО на 30-50% выше. Эти результаты

аналогичны результатам, полученным в рамках моделей оболочечного типа, см. табл. 3.7. Экспериментальные данные (сплошные кривые на рис. 3.34) также подтверждают результаты моделирования (пунктирные кривые на рис. 3.34), поэтому можно сделать вывод, что использованные подходы к моделированию были подходящими, а значения свойств материалов - правильными.

Таким образом, показано, что решения ТО остаются эффективными в экспериментальных исследованиях, где некоторые дополнительные эффекты возникают из-за добавления опорных элементов, специфических свойств материала и масштабирования размеров пластин вместе с увеличенными значениями нагрузки.

Как и предыдущие виды механических испытаний испытания на изгиб проводились на установке Instron 5969 при комнатной температуре. Фотография образца до испытаний представлена на рисунке 3.35. Диаграмма нагрузка-перемещение испытанных образцов показана на рисунке 3.36. Результаты испытаний представлены в таблице 3.8. Усредненная диаграмма напряжение-деформация для образцов из PET-G в испытаниях на трехточечный изгиб представлена на рисунке 3.37.

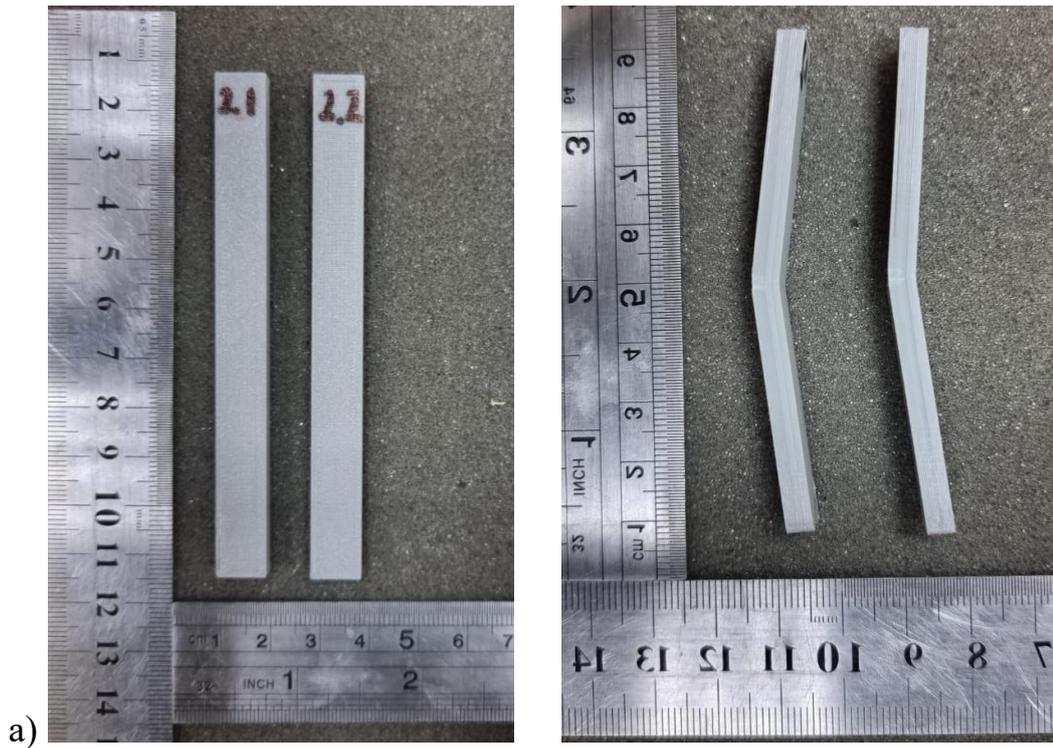


Рисунок 3.35. Характер деформации испытанных образцов.

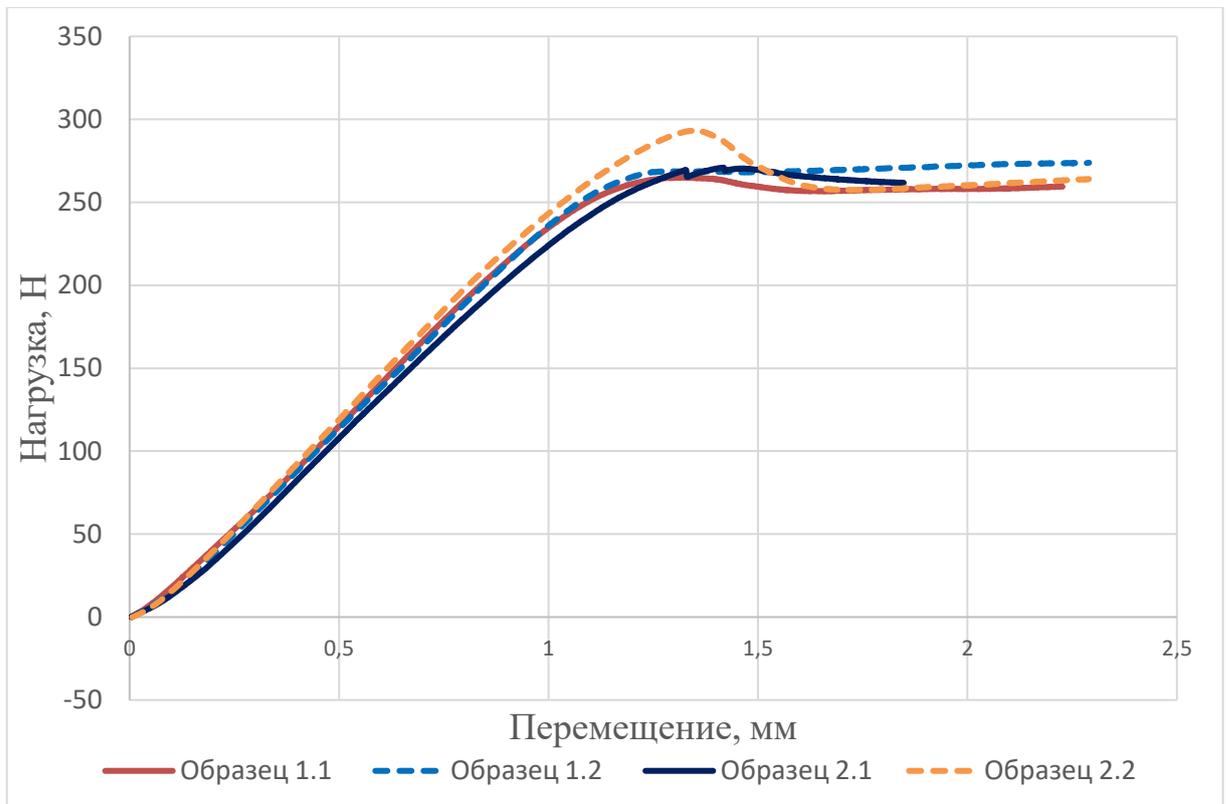


Рисунок 3.36. Усредненная диаграмма нагрузка-перемещение для 3D-печатные образцы из PET-G в испытаниях на трехточечный изгиб между опорами 80 мм и 60 мм

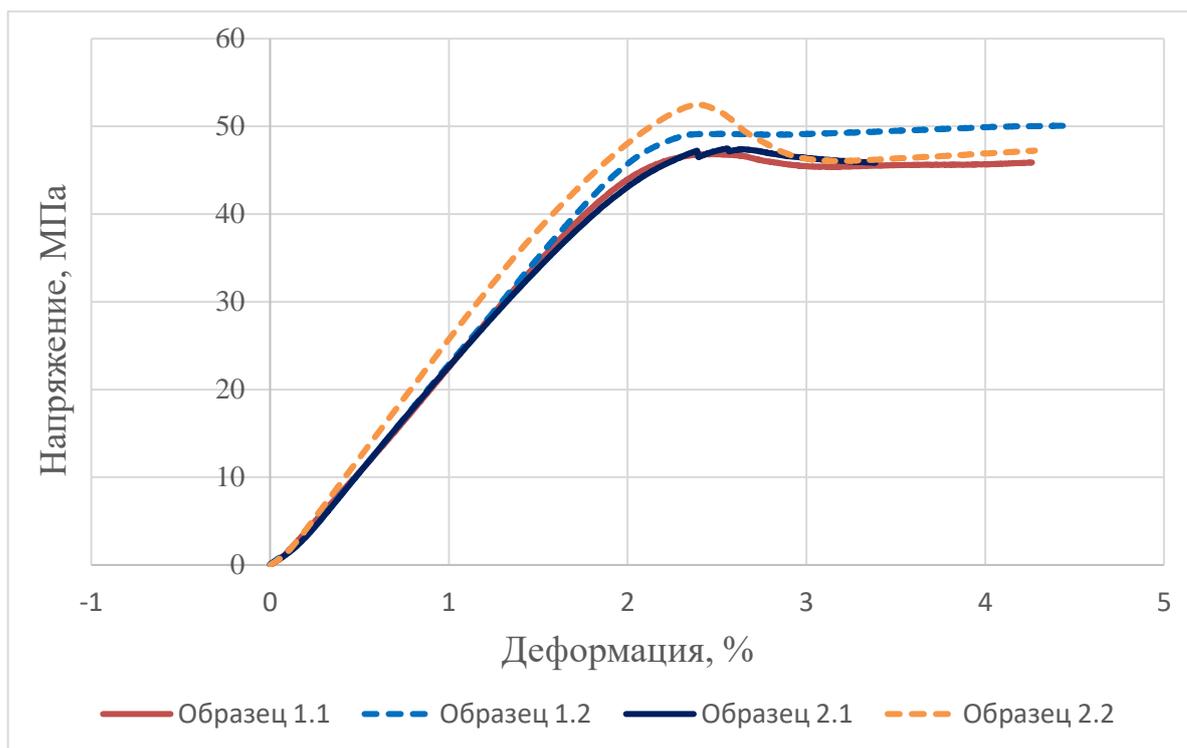


Рисунок 3.37. Усредненная диаграмма напряжение-деформация для 3D-печатные образцы из PET-G в испытаниях на трехточечный изгиб между опорами 30 мм

Таблица 3.8. Средние значения механических характеристик 3D-печатные образцы из PET-G в испытаниях на трехточечный изгиб между опорами 30 мм.

Испытания на изгиб					
Партия образцов	Модуль упругости, ГПа	Предел текучести, МПа	Деформация при пределе текучести, %	Предел прочности, МПа	Предельная деформация, %
1.1	1.63	44.64	1.81	52.50	2.38
1.2	1.47	39.43	1.78	47.47	2.56
2.1	1.47	43.47	1.96	46.86	2.43
2.2	1.51	46.91	2.08	50.18	4.76

Испытания на растяжения проводились на установке Instron 5969 при комнатной температуре. Длина рабочей части образцов (пример образца в захватах представлен на рисунке 3.38) составляла 162 мм. Испытания проводились со скоростью 3 мм/мин с применением видеоэкстензометра с базой измерения 50 мм, что способствует получению высокоточной диаграммы напряжения-деформации вплоть до разрушения образцов.

Результаты испытаний представлены в таблице 3.9. Диаграмма нагрузка перемещения и напряжения-деформации для испытанных образцов показаны на рисунке 3.39 и 3.40 соответственно.



Рисунок 3.38. Образцы на растяжение

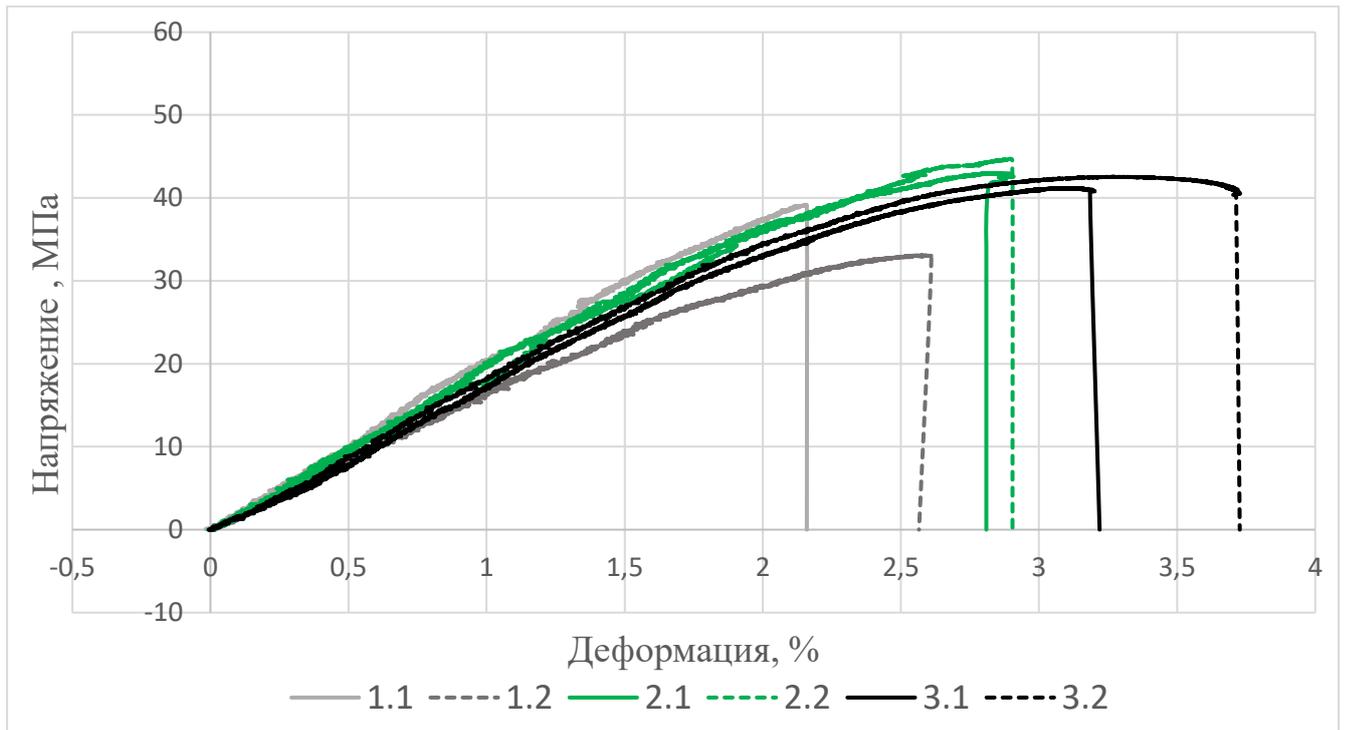


Рисунок 3.39. Усредненная диаграмма напряжение-деформация для образцов из AlSi10Mg

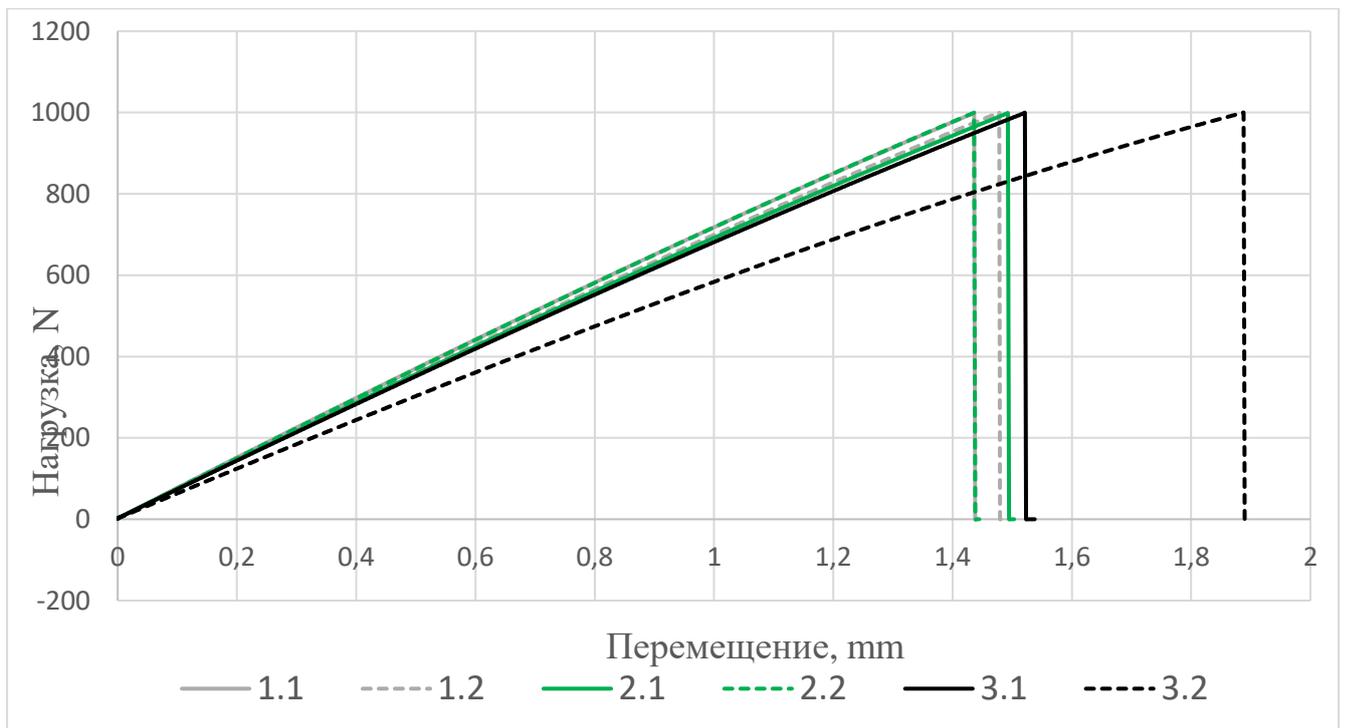


Рисунок 3.40. Усредненная диаграмма нагрузка-перемещение для образцов из PET-G.

Таблица 3.9. Средние значения механических характеристик 3D-печатные образцы из PET-G в испытаниях на растяжение

Испытания на растяжение					
Партия образцов	Модуль упругости, ГПа	Предел текучести, МПа	Деформация при пределе текучести, %	Предел прочности, МПа	Предельная деформация, %
1.1	2.19	31.51	1.68	42.99	2.82
1.2	1.81	26.12	1.68	33.04	2.57
2.1	1.93	19.04	1.17	41.71	2.19
2.2	2.06	33.06	1.88	44.59	2.87
3.1	1.74	37.70	2.43	41.14	3.10
3.2	1.95	34.76	2.04	42.53	3.27

4. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ СОСТАВНЫХ МЕТАЛЛО-КОМПОЗИЦИОННЫХ ПАНЕЛЕЙ

4.1. Особенности применения ТО для силового набора подкрепленных металло-композитных панелей, работающих в условиях сложно-напряженного состояния

В данном разделе представлены результаты расчетов, реализованных с использованием предложенных методов ТО. Рассмотрены примеры ТО для плоских металло-композитных панелей, в которых металлические элементы выполнены из сплава Д16 с характеристиками $E = 72$ ГПа, $\nu = 0.33$, $\sigma_{0.2} = 420$ МПа, а композитные элементы – из углепластика с упругими характеристиками однонаправленного слоя $E_1 = 140$ ГПа, $E_2 = 11$ ГПа, $G_{12} = 5.5$ ГПа, $\nu_{21} = 0.27$ и с прочностными характеристиками: $X^+ = 2000$ МПа, $X^- = 1200$ МПа, $Y^+ = 50$ МПа, $Y^- = 170$ МПа, $T = 70$ МПа.

В качестве примера задачи оптимизации рассматриваем вариант геометрии панели и граничных условий, представленные на рис. 4.1а.

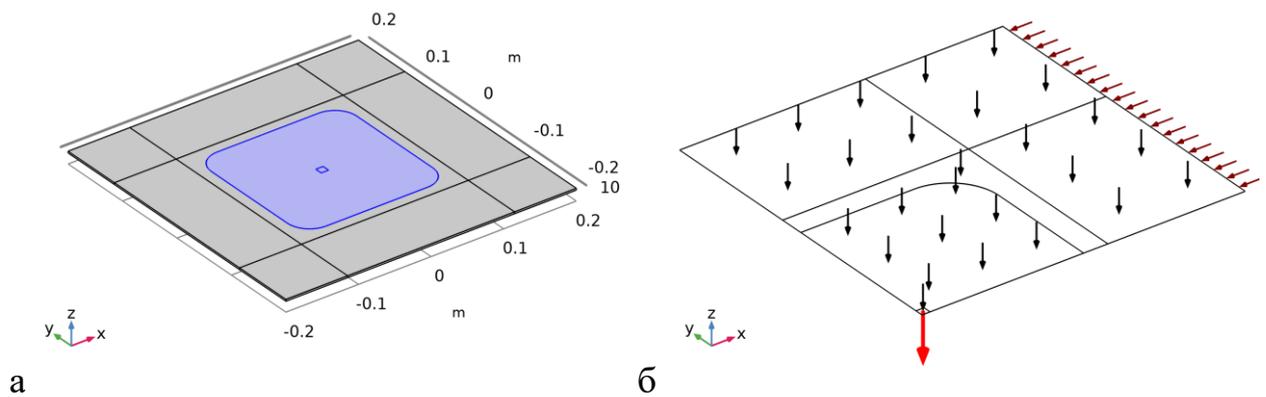


Рисунок 4.1. а: Геометрия металло-композитной плоской панели для проведения ТО, б: задаваемые нагрузки в модели – давление на всей поверхности, сжатие в плоскости и усилие на малой площадке по центру панели (показана 1/4 часть модели с учетом симметрии).

Центральная часть панели выполнена из сплава (например, это быстрострельная крышка или закладная), а окружающая область – из углепластика.

Для области, выполняемой из металла, необходимо провести ТО и подобрать оптимальный вариант оребрения. Схема армирования композитной части панели либо является фиксированной, либо она также участвует в задаче оптимизации – выбираются углы армирования монослоев композиционного материала.

Рассматриваются варианты квадратных и прямоугольных панелей с длиной граней $a_0 = 400 \dots 600$ мм, $b_0 = 400$ мм. Размер центральной металлической области составляет $a = a_0/2 = 200 \dots 300$ мм, $b = b_0/2 = 200$ мм. Для исключения значительных эффектов концентрации напряжений, металлическая вставка имеет скругленные углы с радиусом скругления 30 мм. Композитная часть панели может быть также подкреплённой с ребрами жесткости, расположение которых показано на рис. 4.1а линиями. Предполагаем, что ребра жесткости (в случае их присутствия в модели) всегда выполняются из однонаправленного композита, и их размер прямоугольного сечения составляет 30×30 мм. Ребра жесткости моделируются балочными элементами, узлы которых объединены с соответствующими узлами пластины (sheared nodes), таким образом, все нагрузки и условия закрепления композитных частей панели одновременно передаются и на эти ребра жесткости.

Толщина металлической центральной части варьируется от минимального значения 1 мм (толщина металлического листа обшивки) до максимальной толщины 30 мм (максимальная высота ребра жесткости). Толщина композитной части панели является фиксированной и составляет 2.4 мм (16 монослоев по 0.15 мм). Схема армирования композита – симметричная. В задачах без оптимизации схемы армирования рассматриваем композит со структурой $[0, \pm 45, 90]_s$. В задачах с оптимизацией схемы армирования рассматриваем композиты с однонаправленной структурой $[(\varphi)_{16}]$ и с двумя углами армирования $[(\varphi_1)_4, (\varphi_2)_4]_s$ (в этом случае φ_1 – угол армирования внешних слоев, φ_2 – угол армирования внутренних слоев).

На внешних гранях панели задаются условия свободного опирания (simply supported). Задаваемые нагрузки представлены на рис. 2б. С учетом симметрии расчет проводится для 1/4 части панели. На поверхности панели действует

равномерно распределенное давление $p = 0.1$ МПа. На двух противоположных гранях задается погонная сжимающая нагрузка с равнодействующей 10 кН. На малой площадке размером 10×10 мм в центре панели задается распределенная нормальная нагрузка с равнодействующей 100 Н. Таким образом рассматриваем вариант модели подкрепленной панели обшивки. Сжимающие продольное усилие возникает, например, вследствие изгиба конструкции, в состав которой входит рассматриваемая панель (например крыло). Сосредоточенная нагрузка в центре панели связана с наличием закрепленного оборудования.

Рассматриваемые далее варианты задачи ТО для модели, представленной на рис. 1, отличаются формулировкой (см. глава. 2), наличием или отсутствием ребер жесткости в области, занимаемой композитными элементами, целевой функцией, вычисляемой только для центральной (металлической) части панели или для всей модели.

Кроме варианта модели, представленной на рис. 1, будем рассматривать также более простую (не составную) геометрию панели – прямоугольную, с условиями свободного опирания на контуре. Такая геометрия будет использована в задачах оптимизации (2.35) и (2.37), в которых предполагается, что панель состоит из металлической обшивки и композитных подкрепляющих элементов. В этом случае и сплав, и композиционный материал находятся в одной расчетной области, а соответствующие слои расположены один над другим (2.35) или переходят один в другой в задаче мульти-материальной оптимизации (2.37).

На рисунке 4.2 представлены результаты топологической оптимизации металло-композитных панелей квадратной и прямоугольной формы, которые были получены на основе решения задачи (2.10) – (2.20) с целевой функцией в виде энергии деформаций, вычисляемой только в центральной части или во всей модели. Решение построено для случая отсутствия ребер жесткости в композитной (внешней) части панели. Показано найденное оптимальное расположение ребер жесткости (их высота) в металлической части панели и, для квадратных панелей, показано распределение интенсивности напряжений по Мизесу и

деформированное состояние под нагрузкой. Напряжения оказываются достаточно высокими (1 ГПа), однако, представленные здесь решения найдены без введения ограничений на прочность/текучесть, и распределение напряжений дано для иллюстрации работы оптимизированной геометрии панели под нагрузкой.

Из рис. 4.2 видно, что алгоритм достаточно хорошо учитывает ограничение по минимальному объему оставляемого материала – ребра жесткости получаются тонкими, занимают небольшую долю поверхности ребренной панели (0.0491-0.0505) и образуют «сетку» на ее поверхности. Этот результат удается достичь, в первую очередь, благодаря использованию достаточно мелкой конечно-элементной сетки и правильной нормировкой целевой функции – такой, что ее значения в процессе решения задачи имеют порядок единицы, так как ограничение на значение функции плотности также ставится в безразмерных значениях в долях единицы. В представленных расчетах использовалась конечно-элементная сетка из треугольных элементов с квадратичной аппроксимацией и с максимальным размером грани 0.5 мм (рис. 4.3). Общее количество элементов в моделях квадратных и прямоугольных панелей составляло $\sim 10^5$ и $\sim 1.4 \cdot 10^5$, соответственно. При этом количество степеней свободы, с учетом дополнительных переменных задачи оптимизации составляло $\sim 1.2 \cdot 10^6$ и $\sim 1.7 \cdot 10^6$.

Характерной особенностью полученных решений является наличие окантовки и центрального вертикального ребра жесткости во всех вариантах полученной геометрии. Отличие решений с целевой функцией на всей или на части модели, заключается в том, что в первом случае область оптимизации содержит больше тонких ребер жесткости внутри зоны оптимизации, а во втором случае этот материал расходуется преимущественно на основные несущие ребра жесткости, толщина которых, поэтому, увеличивается. Таким образом, алгоритм ТО перераспределяет материал так, чтобы центральная часть панели равномерно изгибалась, не перегружая остальной, окружающей ее, композитной области (рис. 1а), либо, наоборот, центральная часть оказывается более жесткой и основные

деформации локализируются вне зоны оптимизации, а энергия деформации центральной области оказывается минимальной (рис. 4.1а).

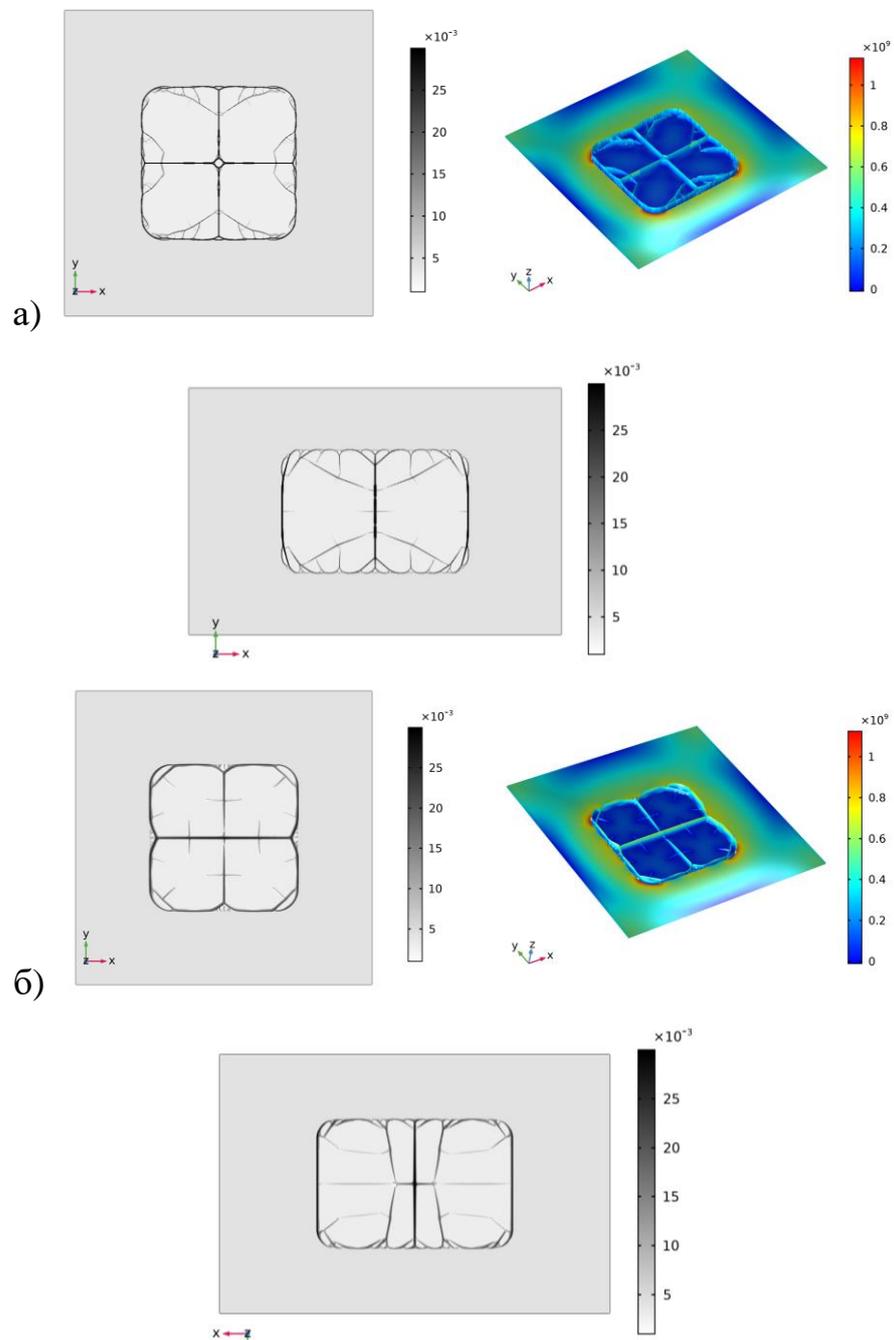


Рисунок 4.2. Результаты ТО для квадратных и прямоугольных металлокомпозитных панелей с целевой функцией в виде энергии деформаций всей модели (а) и только центральной металлической части (б). Градиентом серого цвета показаны толщины панели и ребер жесткости (мм). На цветных графиках показана интенсивность напряжений по Мизесу (Па).

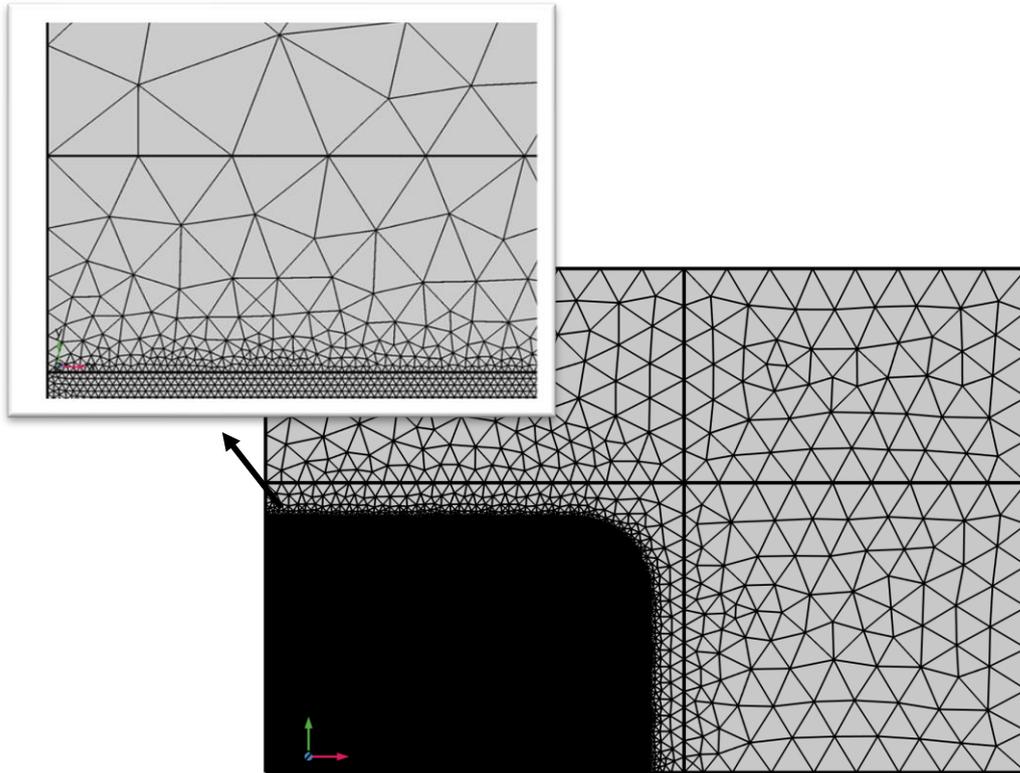


Рисунок 4.3. Пример конечно-элементной модели, использованной для решения задачи ТО

Для прямоугольных панелей на рис. 4.2 видно, что для усиления центральной металлической зоны, алгоритм ТО устанавливает в ней дополнительные вертикальные и небольшие горизонтальные ребра жесткости, так что сама панель оказывается разделенной на 8 ячеек неравного размера (рис. 4.2б). В этом случае металлическая зона оказывается наиболее жесткой – прогибы уменьшаются не только в самом ее центре, но и по сторонам от центральной точки в направлении длинной грани панели. Кроме этого, возникает, фактически, двойная стенка у горизонтальной окантовки металлической области. Такие двойные элементы возникают и в других вариантах решения, но только вблизи углов панели (см. рис. 4.2 а, б).

Создание двойных стенок – пересекающихся или идущих, приблизительно, параллельно друг другу – является достаточно характерным результатом решения задач ТО в рамках предложенного подхода. Если, например, рассматривать конечно-элементные модели с еще более мелкой сеткой с размером грани порядка

0.2 мм, то результатом расчетов является характерная геометрия, показанная на рис. 4.4. Представленная геометрия содержит «тонкостенные» извилистые ребра жесткости достаточно большой ширины и переменной высоты. В результате использования такой геометрии, удастся повысить жесткость пластины, как вдоль ориентации ребер жесткости, так и в поперечном направлении (по крайней мере, в зоне расположения ребра). Однако, при этом может быть достаточно сложно выполнить условия по местной устойчивости таких извилистых тонких элементов, поэтому в представленных результатах расчетов слишком мелка сетка с размером граней менее 0.5 мм не использовалась.

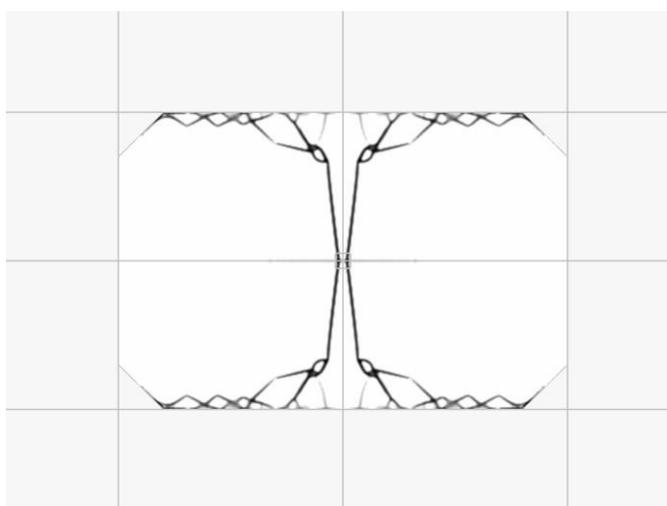


Рисунок 4.4. Пример извилистой геометрии ребер жесткости, найденной из решения задачи ТО.

Результаты топологической оптимизации для модели металло-композитной панели, содержащей дополнительные ребра жесткости в зоне расположения композитных элементов (вне зоны решения задачи оптимизации) представлены на рис. 4.6. Основным отличием представленных результатов от предыдущих (рис. 4.2) является отсутствие окантовки у центральной части панели. Этот результат является закономерным, так как наличие внешних ребер жесткости достаточным образом разгружает материал центральной металлической части панели, и дополнительное повышение жесткости ее границ оказывается нецелесообразным. Вместо этого материал расходуется на создание дополнительных внутренних ребер жесткости, которые, в случае минимизации энергии всей панели, образуют

ячеистые структуры (рис. 4.5а), а при минимизации энергии деформаций только центральной зоны, образуют ветвящиеся скелетообразные структуры (рис. 4.5б). Увеличенное изображение оптимизированной геометрии ребренной части прямоугольной панели с рисунка 4.5б показано на рис. 4.6. Здесь можно видеть, что еще одним интересным отличием этой геометрии является наличие круговых или овальных элементов, возникающих в зоне пересечения или излома ребер жесткости. Таким образом, контактирующие ребра не переходят сразу одно в другое, а накладываются друг на друга и на некотором нбольшом участке идут параллельно.

Для всех представленных решений на рис. 4.5 и 4.6 характерным является наличие дополнительных небольших скругленных ребер жесткости вблизи углов панели – эти ребра частично заменяют окантовку, которая присутствовала в решениях на рис. 1, и обеспечивают усиление краев металлической панели. В полученных решениях также присутствуют двойные и параллельные стенки, которые обсуждались выше. В решении на рис. 6а можно заметить, что углы пересечения практически всех элементов не меньше 90° , при этом в одной точке пересекается не более 3 ребер.

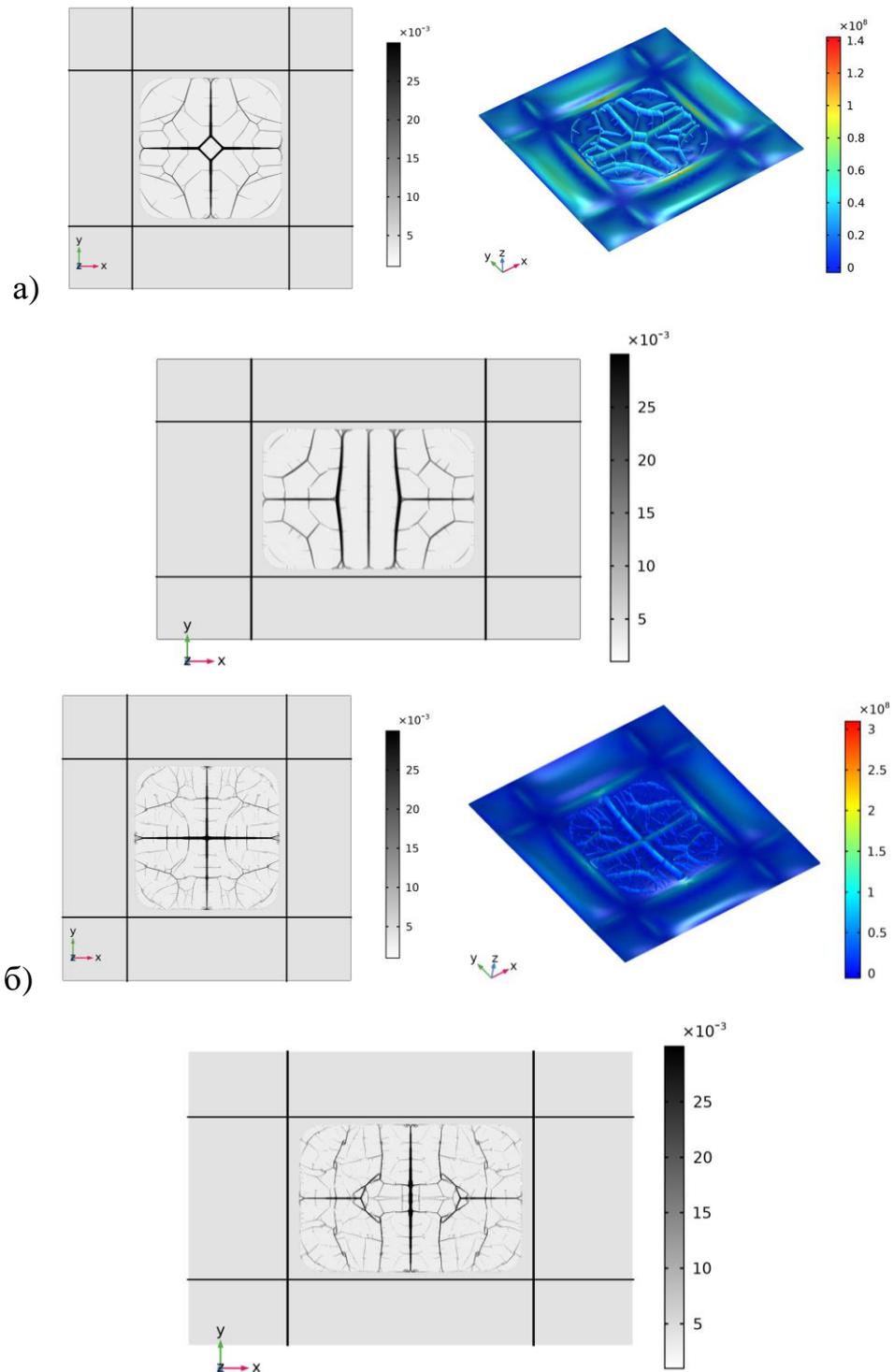


Рисунок 4.5. Результаты ТО для квадратных и прямоугольных металло-композитных панелей с ребрами жесткости и с целевой функцией в виде энергии деформаций всей модели (а) или только центральной металлической части (б). Градиентом серого цвета показаны толщины панели и ребер жесткости (мм). На цветных графиках показана интенсивность напряжений по Мизесу (Па).

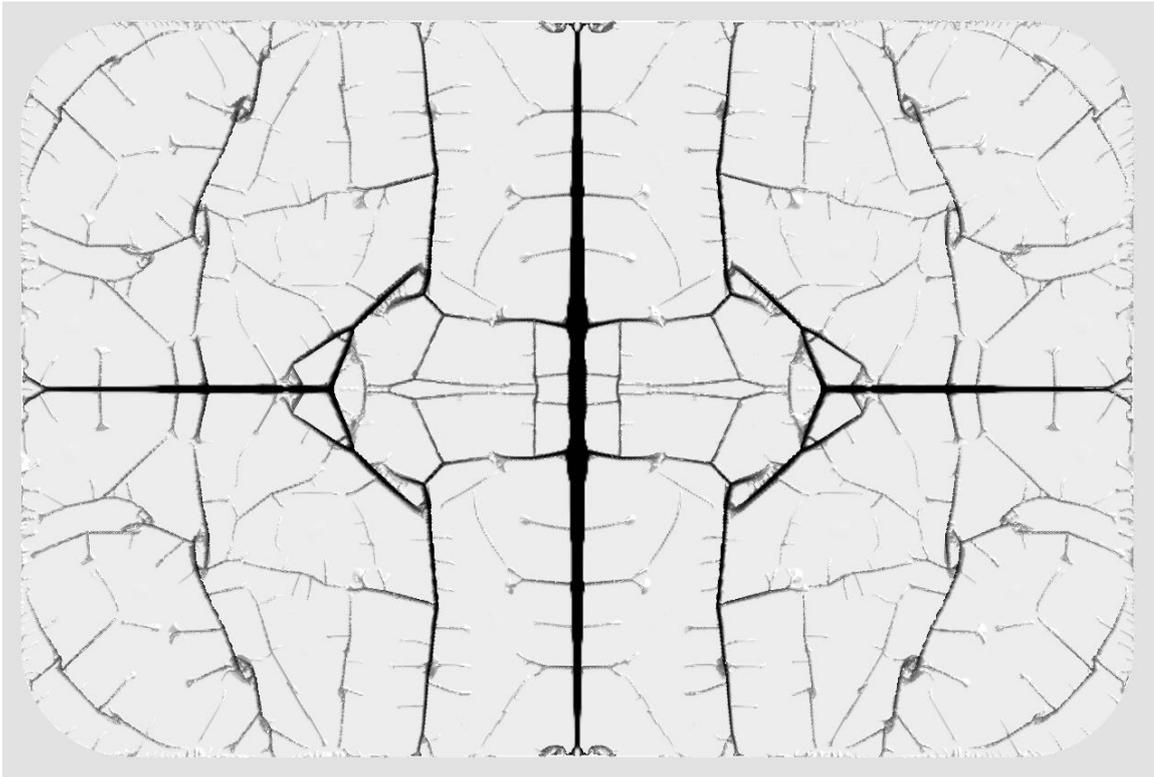


Рисунок 4.6. Увеличенная оптимизированная геометрия ребер жесткости для прямоугольной панели с рисунка 1.5б.

Применение дополнительных ограничений в процессе решения задачи ТО меняет результаты моделирования – получаемую расстановку ребер жесткости, углы их пересечения, толщину, высоту и т.п. На рисунке 4.7 показано изменение геометрии оребренной части квадратной панели с рис. 4.5б при использовании дополнительного ограничения на вертикальные (из плоскости) перемещения отмеченных точек, смещенных от центра панели на 5 см по вертикали и горизонтали. В исходной геометрии соответствующие смещения составляют 0.58 мм при заданных нагрузках. Дополнительное ограничение задавалось условием, требующим чтобы абсолютное значение прогибов в этих точках не превышало 0.45 мм. Для этого в Comsol использовался оператор Point Sum Constraint. Измененный вариант геометрии позволяет снизить прогибы в заданных точках до ~0.43 мм. Это достигается, в первую очередь, созданием ячеистой структуры из массивных ребер и уменьшением количества мелких подкрепляющих элементов. Рядом с точками, в которых ставится ограничение на прогибы, возникает пересечение из трех ребер

жесткости (углы пересечения, порядка, 120 град.). В центре, вместо массивного крестообразного подкрепления, полностью отсутствуют подкрепляющие элементы. Таким образом, уменьшение прогибов заданных точек компенсируется увеличением деформаций в других частях поверхности пластины (рис. 4.7 б, в). Однако, интересным является тот факт, что получаемая геометрия оказывается более оптимальной, чем исходная – целевая функция в решении с ограничением на перемещения составляет 0.27 Дж, а в исходной задаче – 0.31 Дж.

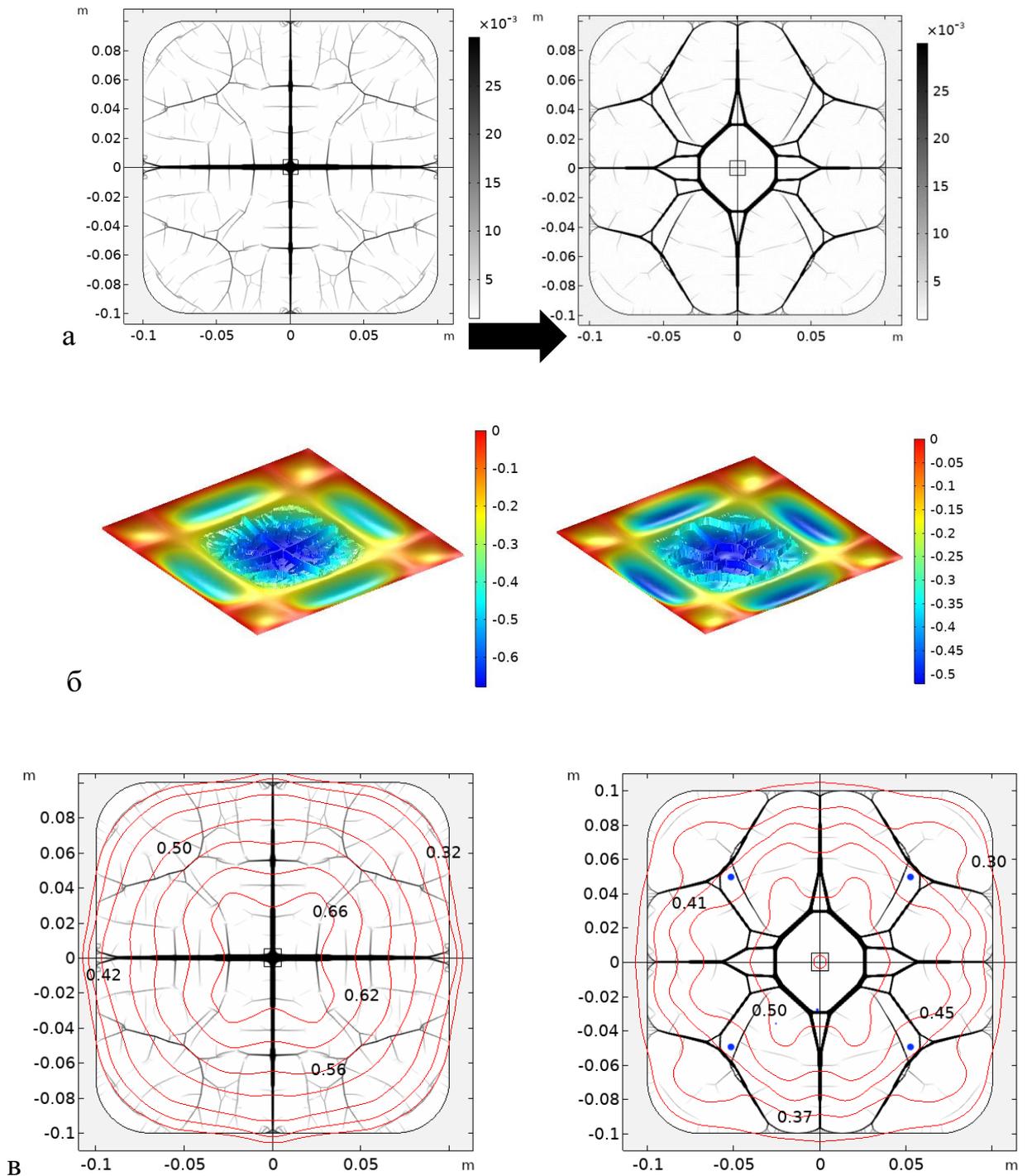


Рисунок 4.7. Изменение геометрии оптимизированной панели при добавлении дополнительных ограничений на вертикальные перемещения точек поверхности (показаны на нижнем правом рисунке). Слева – исходное решение, справа – решение с ограничением, а – расположение и высоты ребер жесткости, б, в – прогибы во всей панели и в ее центральной части, соответственно.

Учет ограничений по переходу в пластичность для металлического материала оребренной панели целесообразно делать в рамках трехмерной постановки, так как модели пластин переменной толщины в рассматриваемом случае будут давать значительные погрешности в оценке напряжений (будет возникать существенная концентрация напряжений вблизи ребер жесткости). Такой подход можно реализовать трансляцией найденной 2д геометрии пластины в соответствующую 3д геометрию с последующим дополнительным решением задачи топологической оптимизации, но уже трехмерной модели, и с ограничениями на переход в текучесть в рамках постановки (2.21) – (2.24). Пример такого подхода для геометрии, найденной на рис. 4.5б и 4.8 представлен на рис. 4.9. Здесь показан процесс получения и оптимизации 3д геометрии, подготовленной на основе исходного 2д решения. Показана $\frac{1}{4}$ часть модели, использованная в расчетах с учетом симметрии. Для получения 3д модели в решении COMSOL (рис. 4.8а) был использован оператор Extrude, который позволяет «вытягивать» трехмерные тела, на основе контурной геометрии или, как в нашем случае, на основе 2д решения (рис. 4.8б). Для этого в этом операторе давалось дополнительная настройка (Filter), требующая выполнения условия, что найденная функция плотности в данной точке (x,y) имеет значение больше минимально заданного. Таким образом, изменение высот ребер жесткости не учитывалось в передаваемой 3д модели, и найденная 2д геометрия загроублялась и задавалась с припусками на проведение дальнейшей оптимизации в трехмерной постановке. Получаемая таким образом геометрия имеет формат stl и содержит достаточно много лишних мелких деталей и геометрических ошибок (рис. 4.8б), которые убирались соответствующей сглаживающей обработкой в системе FlowVision. Результат такой обработки показан на рис. 1.8в. Полученная модель далее сохранялась в формате STEP и передавалась на расчет, который проводился в Ansys. Эта система обладает одним из наиболее гибких и эффективных решателей для топологической оптимизации трехмерных моделей. В принципе, аналогичные расчеты можно реализовать и в COMSOL, но это требует введения дополнительных ограничений на переход в

текучесть с использованием пользовательских уравнений (в Ansys это реализовано на уровне интерфейса).

Пример результата трехмерной топологической оптимизации ребер жесткости показан на рис. 4.9б. Здесь красным цветом показаны области, которые можно убрать, не нарушая введенных ограничений на оставляемый объем и на уровень действующих напряжений (интенсивность напряжений ниже 420 МПа). Используемая конечно-элементная сетка из $5 \cdot 10^5$ элементов показана на рис. 4.9а. Как видно, результатом предлагаемого подхода становится еще более специфическая геометрия подкрепляющих элементов, которые не только располагаются в оптимальных местах панели (с точки зрения реализованного подхода ТО), но и имеют собственную облегченную форму – с вырезами в стенках. Полная трехмерная геометрия спроектированных панелей показана на рис. 4.9в. Эта геометрия содержит достаточно много мелких деталей, которые можно убрать, например, создав параметрическую модель во FlowVision, или непосредственно обрисовкой.

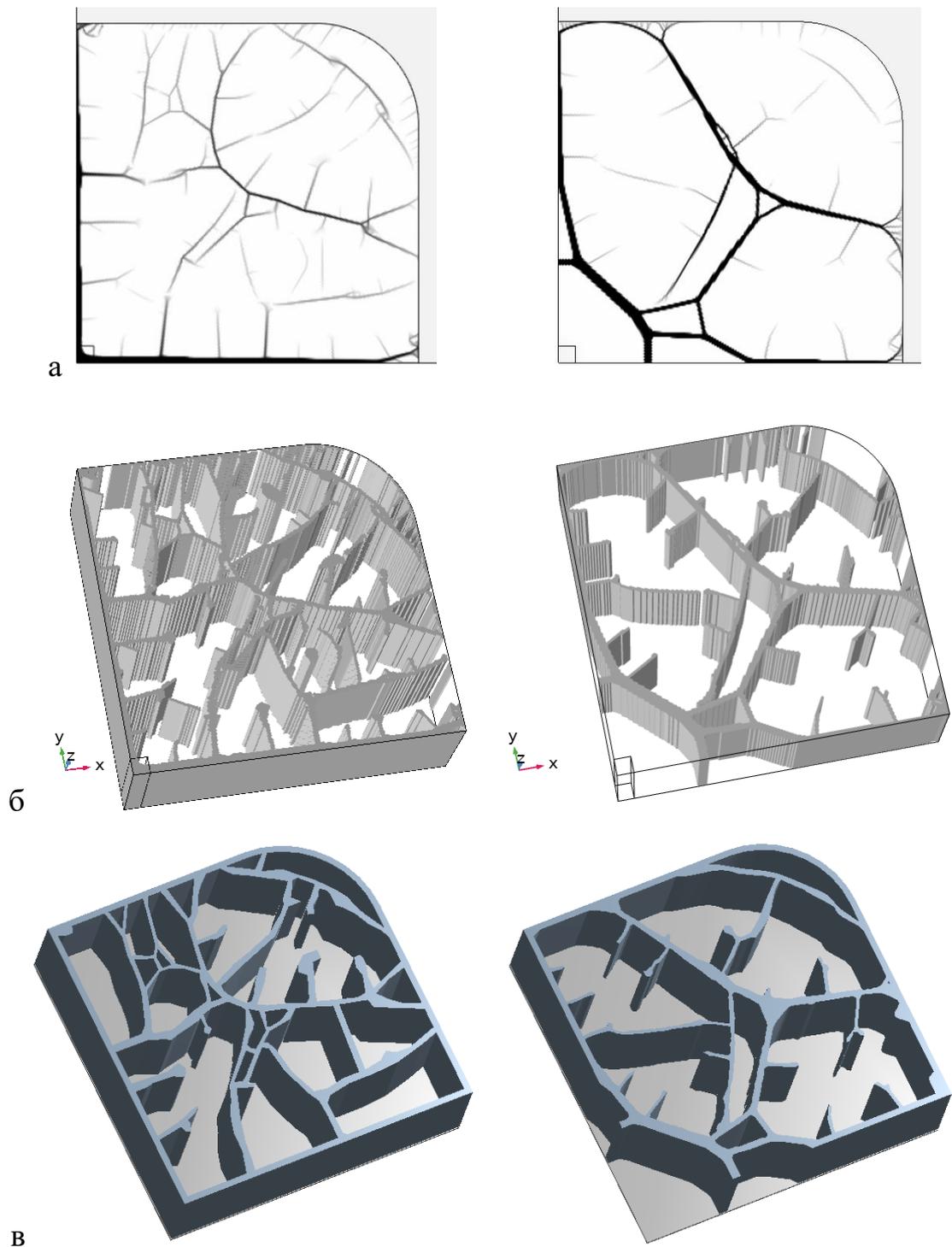


Рисунок 4.8. Подготовка моделей для топологической оптимизации 3д геометрии, а: исходное 2д решение для пластины переменной толщины, б: сгенерированная 3д геометрия в COMSOL в формате STL, в: исправленная и сглаженная геометрия во FlowVision в формате STEP. Слева – решение с рисунка 4.7а, справа – с рисунка 4.7б.

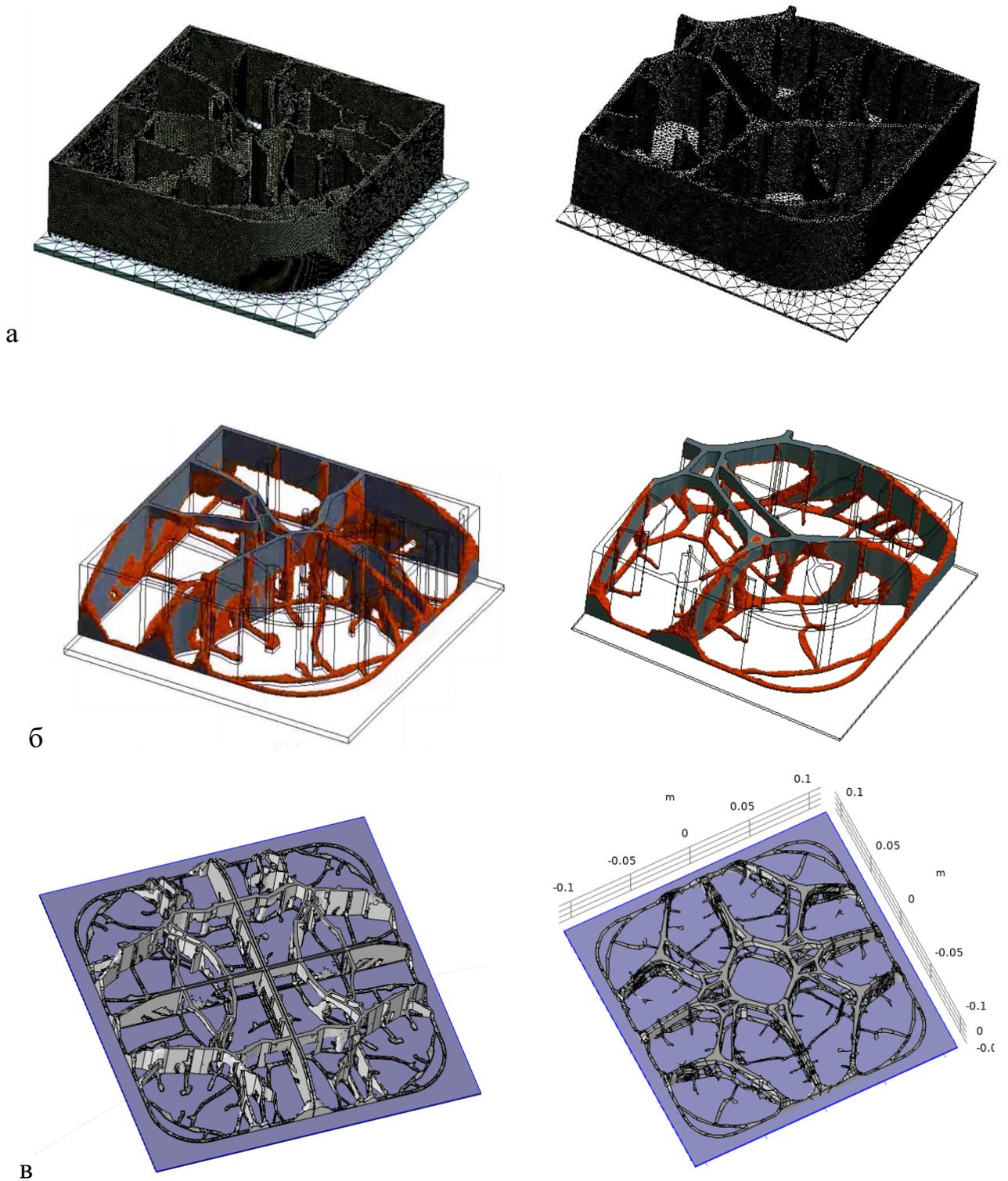
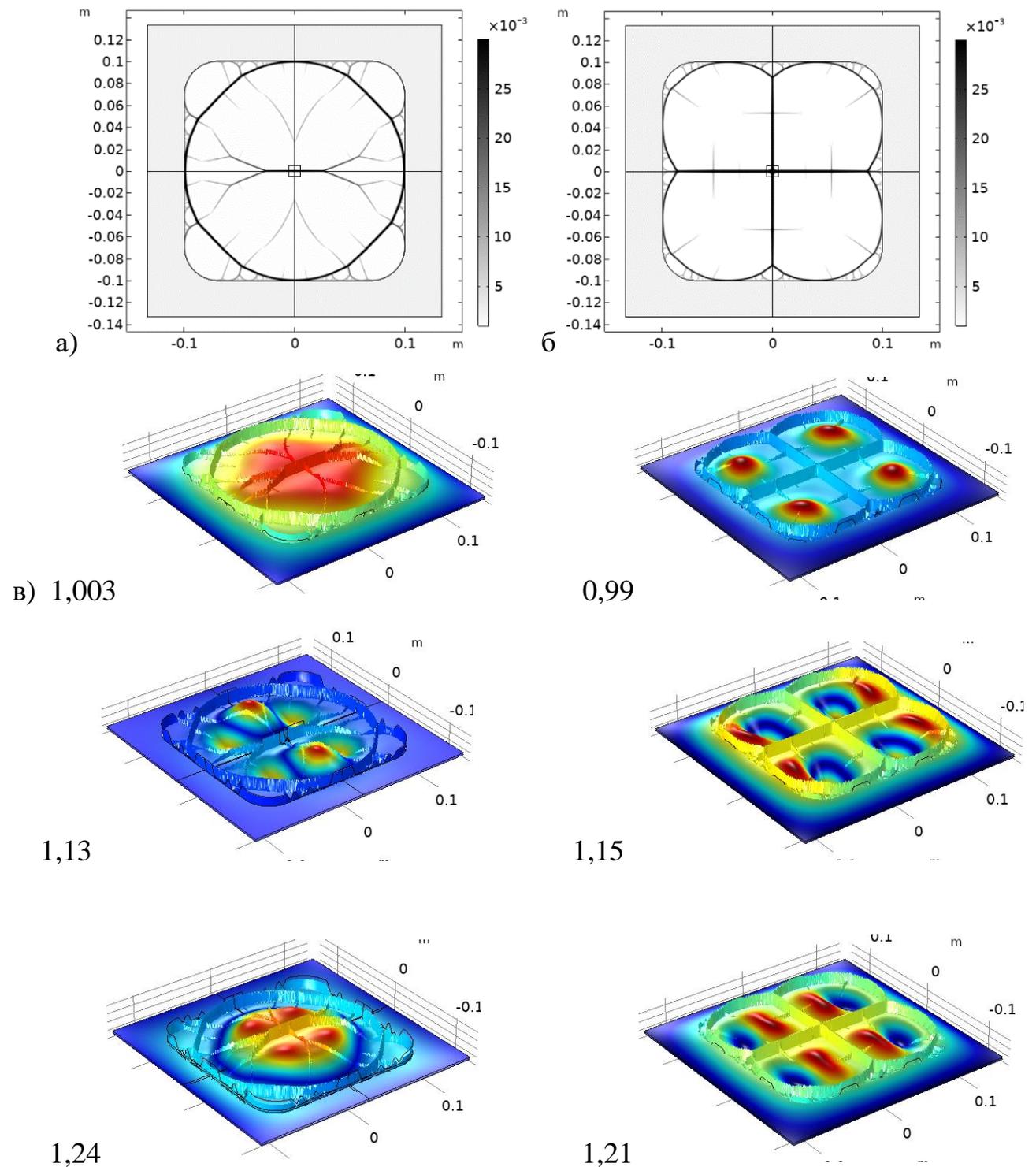


Рисунок 4.9. Результаты топологической оптимизаций 3д геометрии с использованием ограничений на переход в текучесть, а: конечно-элементная сетка для 3д ТО в Ansys, б: результаты ТО (красным цветом показаны области, которые могут быть удалены), в: полная 3д геометрия оптимизированных панелей. Слева – решение для геометрии с рисунка 4.7а, справа – с рисунка 4.7б.

Пример решения задачи ТО с условием на устойчивость, полученный с использованием методики, изложенной в разделе 2.3 представлена на рис. 4.11, 4.12. Здесь рассмотрен участок металлокомпозитной панели, состоящей из центральной металлической части и окружающей ее композитной части. Условия свободного опирания ставятся для композитной «окантовки» по внешним границам – таким образом моделируется контакта с жесткими подкрепляющими балками. Для рассматриваемого участка балки проведена оптимизация с заданным давлением и сосредоточенным усилием на поверхности панели с минимизацией энергии деформаций без дополнительных ограничений (рис. 4.11б), и вариант оптимизации, соответствующий постановке (2.26) с ограничением на коэффициент запаса устойчивости (рис. 4.11а). Устойчивость оценивалась для случая действующей в плоскости панели сжимающей нагрузки вдоль горизонтального направления. Решение построено с использованием 9 функций формы ($M=N=3$) в предложенной численно-аналитической методике для оценки устойчивости, которые, по сути, позволяют прогнозировать только глобальные формы потери устойчивости.

По результатам ТО получен характерный результат – в стандартном решении на рис. 4.11б возникает крестовое подкрепление и скругленная окантовка из ребер жесткости (как в показанных выше аналогичных результатах), а в задаче с ограничением на устойчивость на рис. 4.11а появляются ветвящиеся элементы, которые расширяются в направлении опор. При этом в решении с ограничением на устойчивость возникает необычное круговое ребро жесткости (наиболее массивное), которое, по-видимому, и формирует вид первой (фундаментальной) формы устойчивости с заданным ограничением. В геометрии без этого ограничения все формы устойчивости оказываются локальными (рис. 4.11б). Выигрыш по плучаемому запасу устойчивости, в целом, оказывается не большим, так как в рассматриваемой задаче ставилось условие не поиска «наиболее устойчивой геометрии» (коэффициент устойчивости не является функцией цели), а ставилось только ограничение, требующее не нарушение условий по

устойчивости. Как видно из представленного решения, алгоритм справляется с поставленной задачей и находит вариант геометрии с наиболее близким значением коэффициента запаса к заданному ограничению, чтобы при этом не слишком сильно жертвовать значением основной целевой функции – податливости панели при изгибе под давлением.



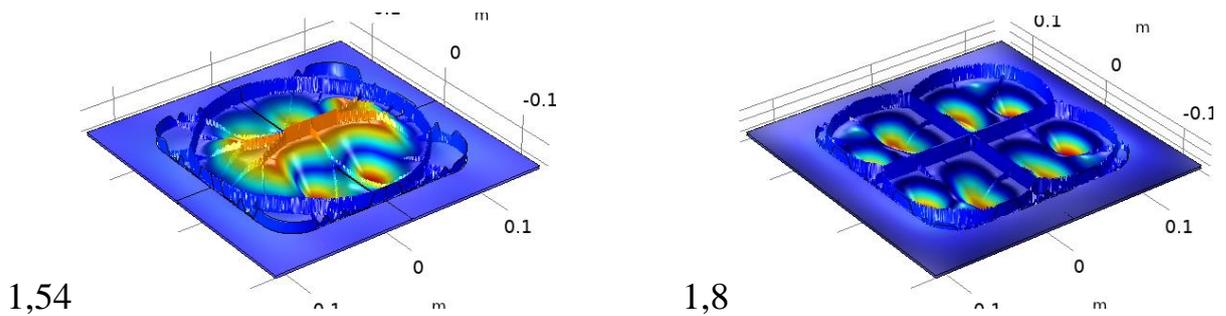


Рисунок 4.10. Оптимизированная геометрия панели с учетом (а) и без (б) ограничения на устойчивость, и соответствующие 4 первые собственные формы и коэффициенты запаса устойчивости при одноосном сжатии (в).

Далее рассмотрим примеры резаии ТО для металло-композитных конструкций с одновременным выбором схемы армирования композиционного материала (2.34). Пример решения задачи, аналогичной представленной на рис. 4.2а, но с оптимизацией однонаправленной схемы армирования, приведен на рис. 4.11. Здесь показано решение стандартной задачи без дополнительных ограничений (рис. 4.11а) и с дополнительным ограничением на прочность композиционного материала (рис. 4.11б). Найденная криволинейная схема выкладки армирующих волокон показана линиями на соответствующих рисунках. Ребра жесткости показаны на 3д изображениях. Значения критерия прочности для композиционного материала вычислялись на основании критерия по максимальным напряжениям и показаны на цветных графиках.

Особенности полученных решений следующие. Во-первых, результат ТО оказывается очень схожим с результатом на рис. 3а, где схема армирования композита задавалась фиксированной. Это говорит о том, что для рассмотренной достаточно простой задачи (с точки зрения геометрии и нагрузок), топологическую оптимизацию и оптимизацию схемы армирования можно проводить по отдельности. Для найденных схем армирования характерным является тот факт, что армирующие волокна подходят к металлической центральной области по нормали к границе. Вдоль прямых граней волокна ориентированы также по нормали и непосредственно «соединяют» зону закрепления и границу металлического «включения». Вблизи углов схема армирования становится более

сложной и армирующие волокна ориентируются под углом 45 градусов с граням панели. При учете условий прочности, эта ориентация сохраняется во всей угловой области панели (рис. 4.2б). Без условий прочности, решение задачи оптимизации приводит к некоторому не совсем корректному результату, при котором в углах панели волокна укладываются вдоль ее граней (рис. 4.2а). Такой вариант армирования, по-видимому, не значительно влияет на полную энергию деформаций панели и поэтому не возникает в решении задачи ТО. Однако, с точки зрения прочности, очевидно, что такая схема армирования на рис. 4.11а будет приводить к концентрации напряжений и нагружению композита поперек волокон – поэтому такое решение исключается в задаче с ограничением (рис. 4.2б).

Следствием учета ограничений на прочность также является более гладкий вид получаемого решения для схемы армирования. Это естественное следствие рассматриваемой формулировки задачи, который всегда возникает и в трехмерных задачах ТО с условиями на прочность – в этом случае алгоритм ТО убирает из модели области, которые могут приводить к концентрации напряжений. В данном случае, схема армирования перестает содержать мелкие «дефекты», которые выражаются в резком изменении углов армирования, изломах или закручиваниях траекторий выкладки волокон. Пример такого дефекта показан на рис. 3а на увеличенном фрагменте. В оптимизированной геометрии с условием прочности таких дефектов уже нет, и значение критерия прочности не превышают, в то время как в исходном решении критерий достигает значения 2.15.

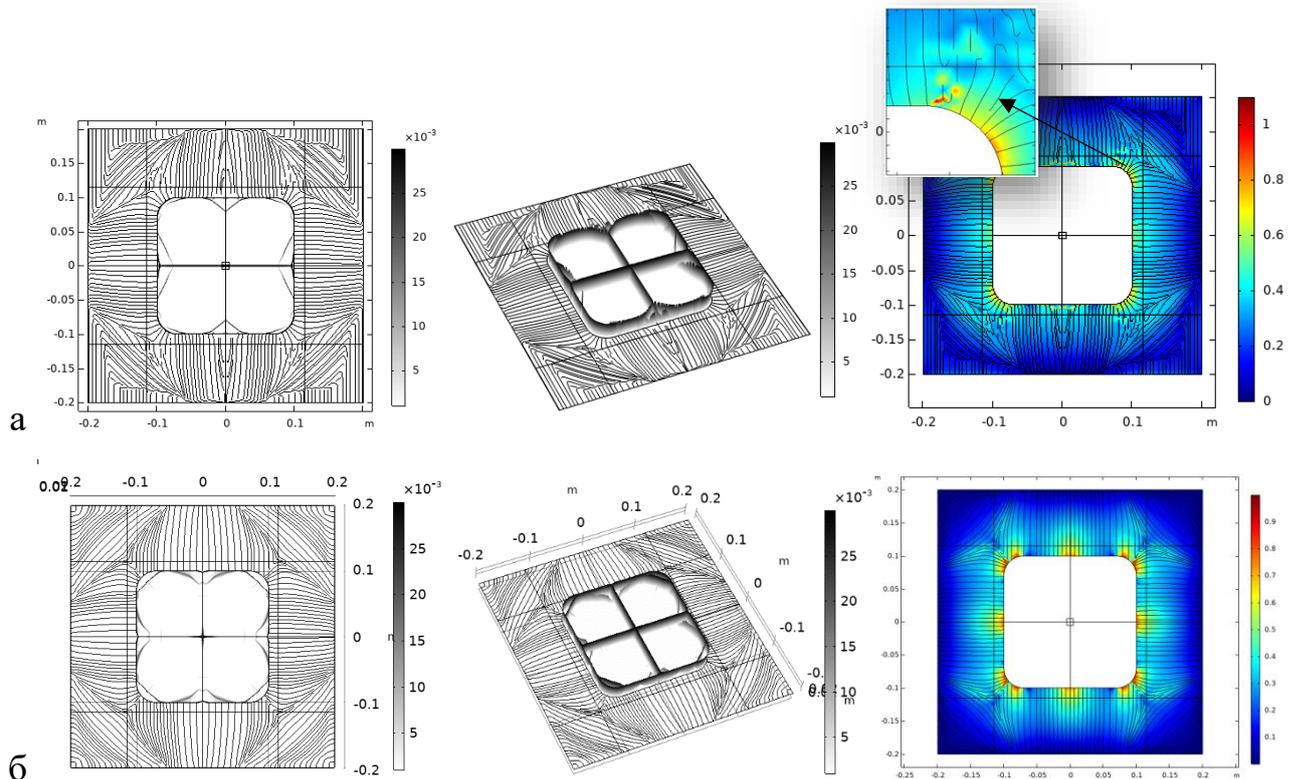


Рисунок 4.11. Оптимизация металло-композитной панели. Центральная часть – металлическая, в которой проводится ТО; окружающая зона – композитная, в которой выбирается схема армирования. а: оптимизация без дополнительных ограничений, б: оптимизация с ограничением на прочность композитной части панели. Показана схема армирования (слева), 3д геометрия ребер жесткости (в центре) и распределение значений критерий прочности (справа).

Вариант ТО для панелей, в которых в зоне композитного материала установлены дополнительные ребра жесткости, показан на рис. 4.12 (ребра жесткости здесь – это вертикальные и горизонтальные линии внутри композитной части панели). Здесь показана оптимизированная геометрия панели с криволинейной схемой армирования (рис. 4.12а), а также, для сравнения, показано решение, полученное параметрической-топологической оптимизацией, в которой параметром являются углы армирования четырехслойной панели с прямолинейной укладкой волокон (рис. 4.12б). На показанных рисунках видно, во-первых, что структура ребрения центральной металлической части панели оказывается значительно более развитой, по сравнению с решением на рис. 4.11, что является

следствием того, что основную нагрузку на себя воспринимают композитные подкрепляющие элементы, а топологическая оптимизация позволяет снизить локальные деформации металлической вставки. Кроме этого, видно, что в результате оптимизированном решении волокон подходят под прямым углом и к металлической части панели, и к композитным ребрам жесткости. Это позволяет снизить действующие напряжения вблизи подкрепляющих элементов, что видно на представленных на рис. 4.11 цветных графиках. По сравнению с прямолинейной укладкой, концентрация напряжений вблизи ребер жесткости снижается более чем на 30%.

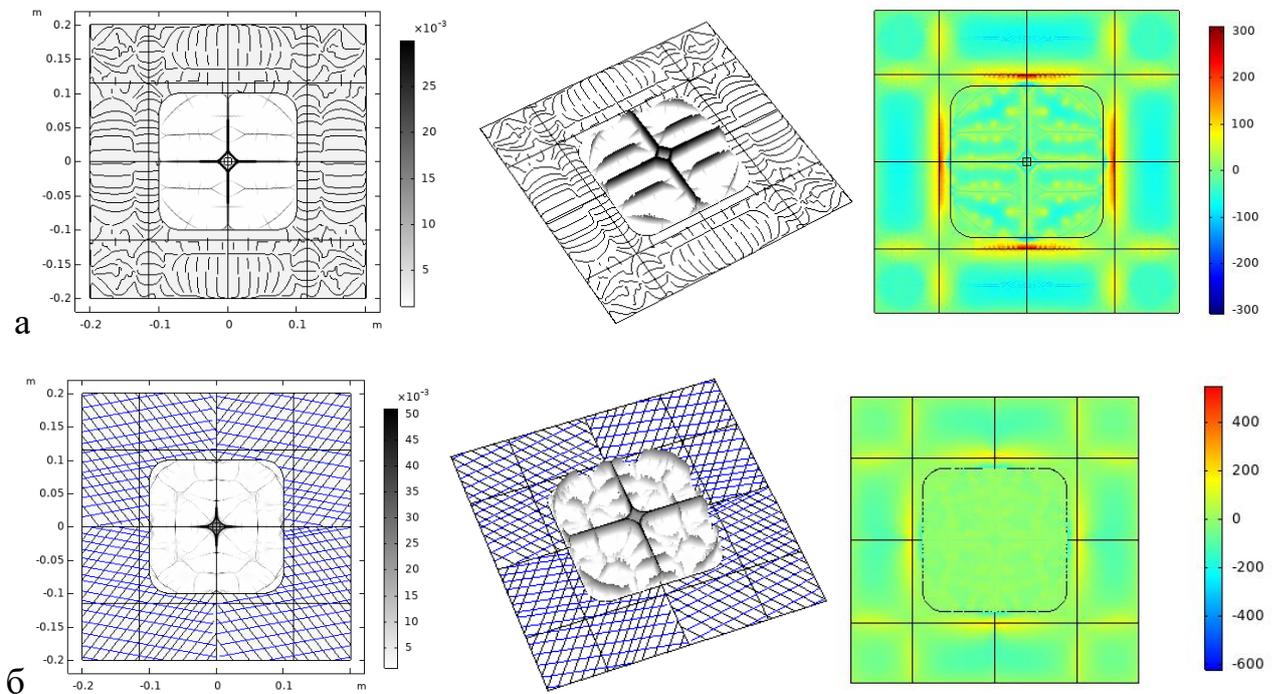


Рис. 4.12. Результат оптимизации панели с дополнительными композитными ребрами жесткости (показаны черными линиями), а: оптимизация криволинейной укладки волокон, б: результат топологической-параметрической оптимизации для четырехслойной панели, у которой углы армирования показаны черной (внешние слои) и синей (внутренние слои) штриховкой. На цветных графиках показаны значения максимальных главных напряжений.

Далее рассмотрим вариант оптимизации панелей с четырехслойной структурой композитной части с криволинейной укладкой волокон. В этой задаче присутствует два угла армирования – внутренних и внешних слоев. Результаты оптимизации панели, аналогичной представленной на рис. 4.11, где была однонаправленная структура слоев, показаны на рис. 4.13. Важно отметить, что в рассматриваемых задачах существенным оказывается начальное значение углов армирования композита. На рис. 4.13 слева (синий цвет волокон) показано решение для задачи с начальным углом армирования 0 градусов во всех слоях, справа (красный цвет волокон) показано решение для начальной схемы армирования $[+45_4, -45_4]_s$. Видно, что схема армирования в 4х-слойной структуре похожа на однослойную (рис. 4.11), но теперь в углах панели возникает укладка в двух направлениях. В решении с изначальной структурой $[+45_4, -45_4]_s$, эта структура сохраняется и в окончательном решении, что представляет более естественными и целесообразным с точки зрения обеспечения прочности панели. Это показано на рис. 4.13в, где дано распределение значений критерия прочности (максимального по всем слоям) вблизи угла панели. Значение критерия прочности в структуре с укладкой $[+45_4, -45_4]_s$ снижается на ~15%.

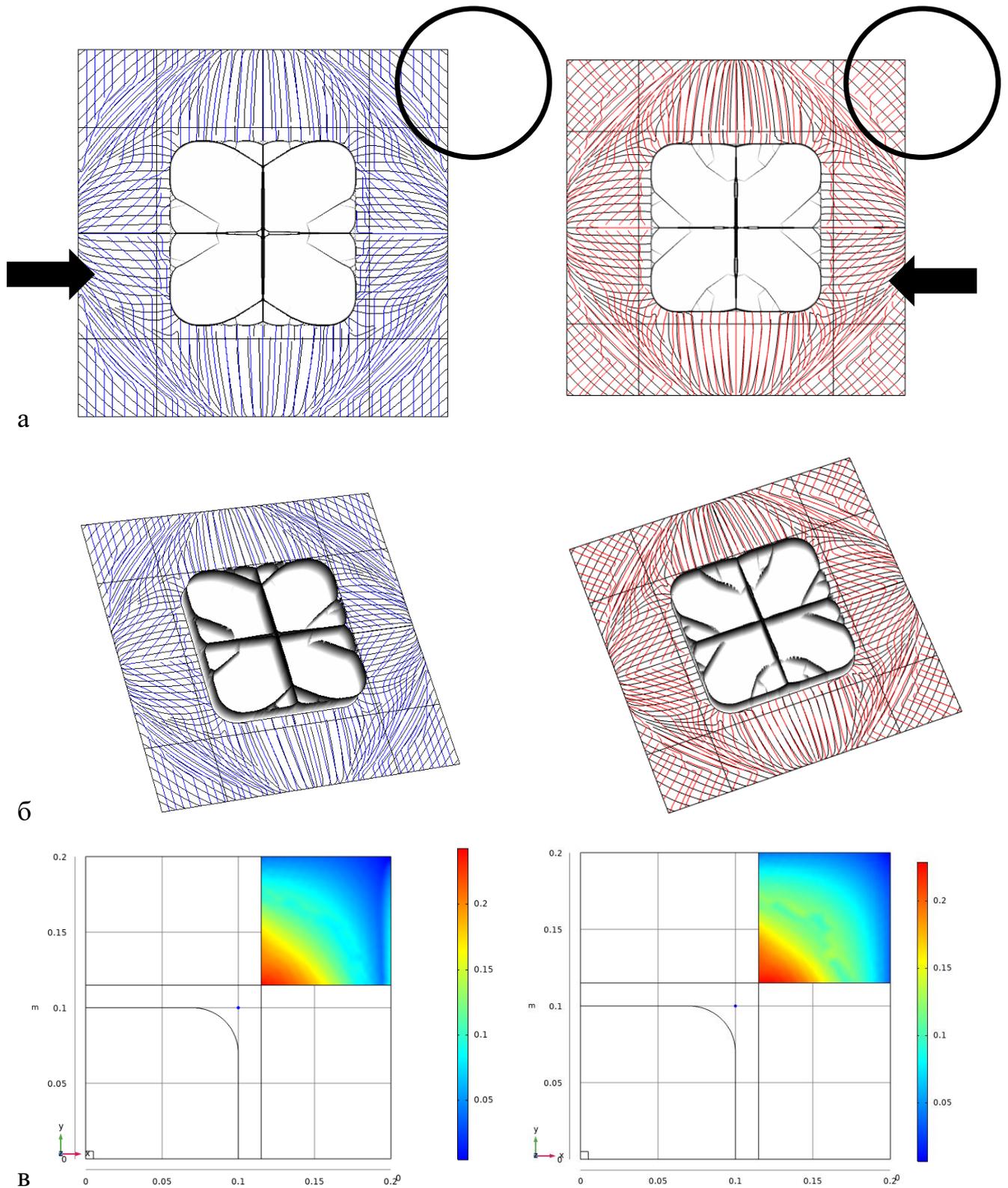


Рис. 4.13. Результаты оптимизации панели с четырехслойной стуркутурой композиционного материала и с криволинейной схемой армирования, а, б: результаты оптимизации в на 2д и 3д графиках, б: значения критерия прочности вблизи угла панели.

В обоих решениях, показанных на рис. 4.13, можно отметить недостаток, который возникает в укладке в боковых частях панели (показаны стрелками на рис. 4.13). В этих местах внутренние слои оказываются армированными под углом 45 градусов, что приводит к несимметрии и, очевидно, к снижению несущей способности панели. По результатам тестовых расчетов было установлено, что такое решение всегда возникает при определении углов арирования монослоев композита в единой (глобальной) системе координат. Исправить этот недостаток удалось введением локальной системы координат для внутренних слоев панели. В этих слоях направление, относительно которого рассчитывалась ориентация волокон было задано вдоль оси Y (вертикальное направление), в то время как во внешних слоях оставили отсчет относительно оси X (горизонтальное направление). В этом случае в решении удалось получить симметричную оптимальную структуру, показанную на рис. 4.14 с однонаправленной схемой армирования вдоль прямых граней панели, с армированием $+45$ градусов в углах панели и с криволинейной укладкой в переходных зонах.

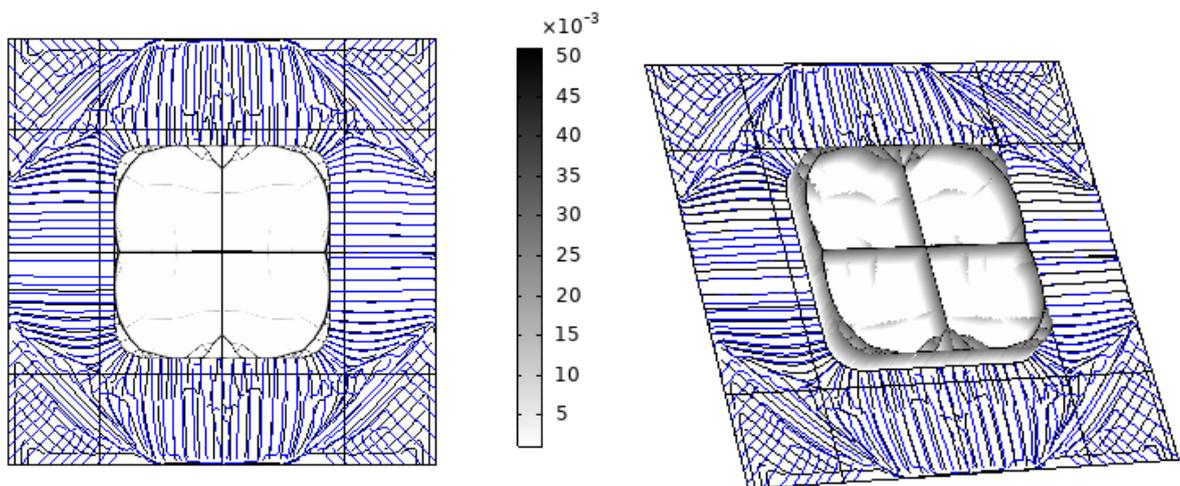


Рис. 4.14. Оптимальная геометрия ребер жесткости и схема армирования панели, полученная введением локальной системы координат для задания углов армирования внутренних монослоев композиционного материала. Черной штриховкой показано армирование внешних слоев, синей – внутренних слоев.

4.2. Оптимизация конструкций с композитными ребрами жесткости и металлической обшивкой

Далее рассмотрим результаты оптимизации металло-композитных панелей, в которых металлическим является слой обшивки, а композитными являются ребра жесткости. ТО проводится в соответствии с постановкой (2.35). Оптимизация проводится для квадратной панели 20x20 см, нагруженной давлением или сосредоточенной силой по центру. Было установлено, что несмотря на достаточно простой вариант геометрии и нагрузки, получаемое оптимальное решение не является единственным. Сильное влияние на результаты оптимизации оказывает значение начального угла армирования композитного слоя панели, который в результате ТО должен «вырождаться» в ребра жесткости заданного объема. Для рассматриваемых случаев это ограничение задавалось на уровне 20% от максимального объема, так как композитные подкрепляющие элементы, в отличие от металлических, не могут быть созданы слишком тонкими. Высота подкрепляющих элементов составляла до 30 мм. На рис. 4.15 показаны варианты геометрии подкрепляющих композитных элементов показаны для различных начальных значений угла армирования композитной панели. При случайной ориентации волокон в начальных условиях решение содержало существенно не симметричные структуры (рис. 4.15а). Решение для нулевого начального угла армирования вдоль оси X было также несимметричным и содержало большее количество ребер жесткости в поперечном направлении, чем в продольном к начальному углу армирования (рис. 4.15б). При задании армирования по схеме «ромб» (-45 в правой верхней и левой нижней части панели и +45 двух других частях) получалось симметричное решение (рис. 4.15в). С точки зрения оптимальности, все указанные решения были достаточно близки и отличались в не более чем на 3% в значениях целевой функции – полной энергии деформаций модели. Таким образом, по-видимому, действительно имеет место неединственность решения задачи оптимизации с таким расширенным списком переменных – и с полем плотности, и с полем углов армирования.

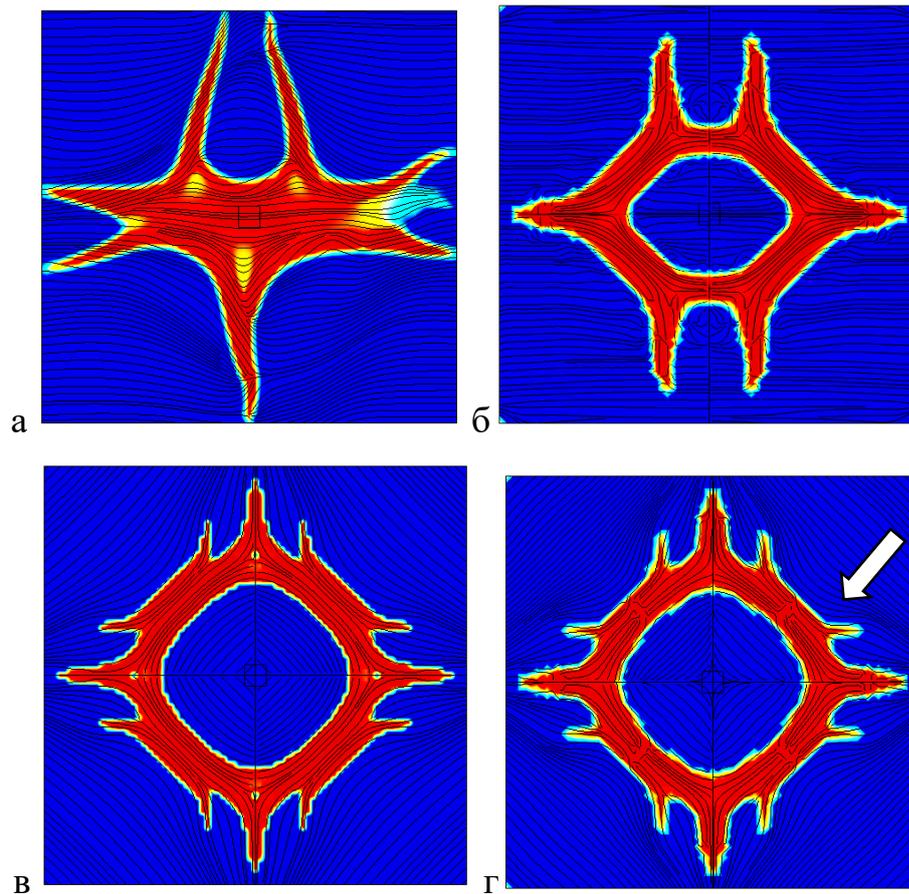


Рис. 4.15. Результаты ТО для определения оптимального расположения композитных подкрепляющих элементов (красный цвет) в свободно опертой панели размером 20x20 см, нагруженной давлением, а: начальный угол армирования задан функцией random, б: начальный угол 0 град., в: начальные угол армирования ± 45 град, г: сглаженное решение для случая (в).

Еще одной особенностью получаемых решений является сложность обеспечения гладкости функций, определяющих распределение плотности и углов армирования. Это показано на рис. 4.15г, где показан результат ТО, найденный с дополнительным требованием по снижению градиентов функций плотности и углов армирования. В этом случае возникла сглаженная геометрия области, занятой композитным элементом (по сравнению с рис. 4.15в, где то же решение представлено без сглаживания и содержит ступенчатую геометрию, повторяющую КЭ сетку). Однако, одновременно со сглаживанием геометрии, возникло негладкое распределение углов армирования – появились разрывы и случайные искривления

армирующих волокон, которые на рис. 4.15в показаны стрелкой. Таким образом, в рассматриваемых задачах возникает проблема обеспечения гладкости и четкости границ в задаче топологической оптимизации, одновременно с гладкостью решения для углов армирования. Решения, полученные на мелкой сетке без введения дополнительных ограничений на гладкость, для задач с нагружением панели давлением и сосредоточенной силой в моделях с количеством степеней свободы $\sim 10^6$ показаны на рис. 4.16. Здесь же показано распределение максимальных главных напряжений в получаемой геометрии.

Из полученных решений видно, что реализованный метод ТО позволяет выбрать геометрию композитных ребер жесткости и их схему армирования, однако, как представляется из интуитивных соображений, схема армирования не является окончательно оптимальной. Алгоритм ТО задает армирование ребер жесткости не вдоль их ориентации, а под некоторым углом, что делает такой подкрепляющий элемент, очевидно, менее жестким. Причина этого явления требует дополнительных исследований. По всей видимости, в процессе решения задачи возникает некоторая «конкуренция» между изменением функции плотности, углом армирования материала и влиянием этих параметров на энергию деформаций ребер жесткости и обшивки. Аналогичная ситуация реализуется и в задачах мульти-материальной оптимизации, решаемых в соответствии с постановкой (2.38). Пример таких решений показан на рис. 4.17. Здесь показано решение для квадратной панели, нагруженной давлением, и выполняемой из соединяемых композитных и металлических элементов. Видно, что углы армирования композитных элементов (показаны красным цветом) не следуют за их геометрией – они ориентированы поперек или под углом к ориентации вытянутых элементов, что представляет неоптимальным.

Решение указанных проблем может быть связано, во первых, с реализацией многоцелевой оптимизации, в которой основная целевая функция (энергия деформаций) и дополнительные цели (интегралы от градиентов оптимизационных переменных) вводятся с весовыми коэффициентами, алгоритм выбора которых

должен быть разработан. Еще одним подходом для решения указанных проблем может стать замена целевой функции, например, на значение максимальной интенсивности напряжений в области построения решения – это может позволить получать сглаженные результаты для функций плотности и угла армирования даже без введения дополнительных целевых функций.

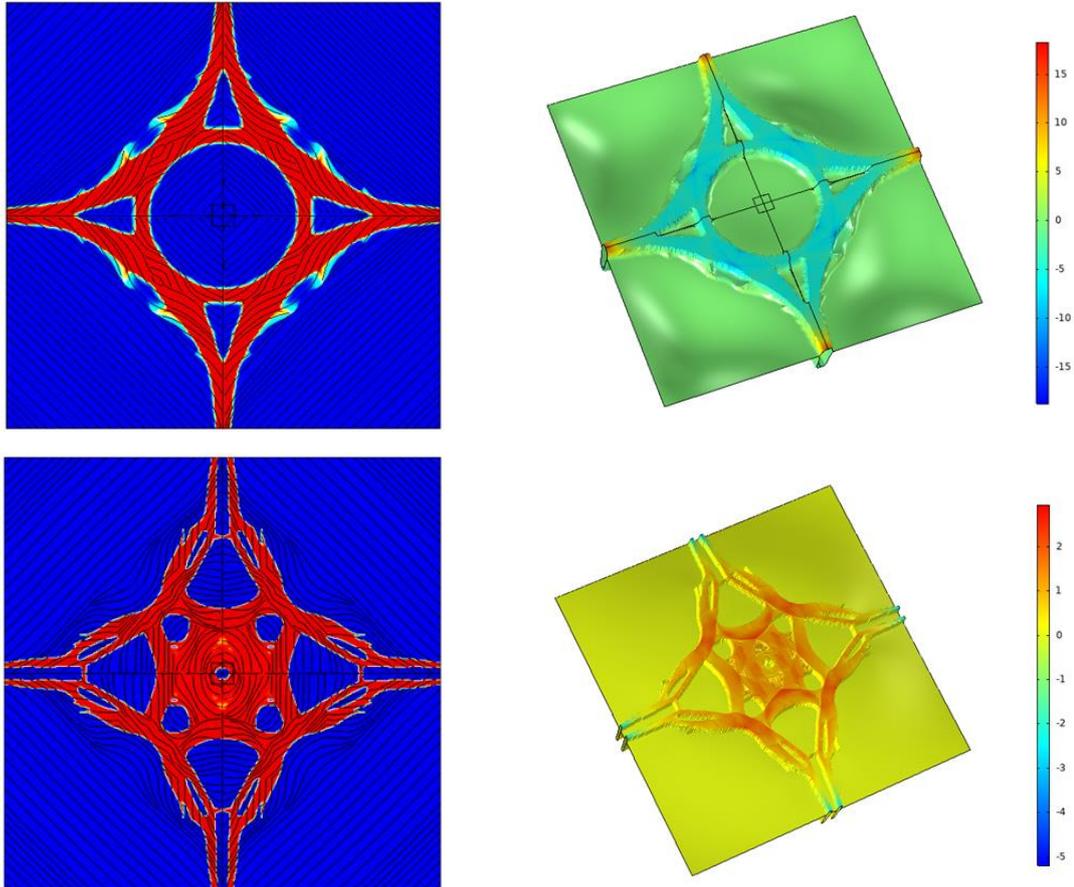


Рисунок 4.16. Результаты ТО для панелей 20x20 см с металлической обшивкой и композитными подкрепляющими элементами, нагруженными давлением (а) и сосредоточенным усилием на площадке 1x1 см по центру (б). На рисунках справа показано распределение максимальных главных напряжений [МПа].

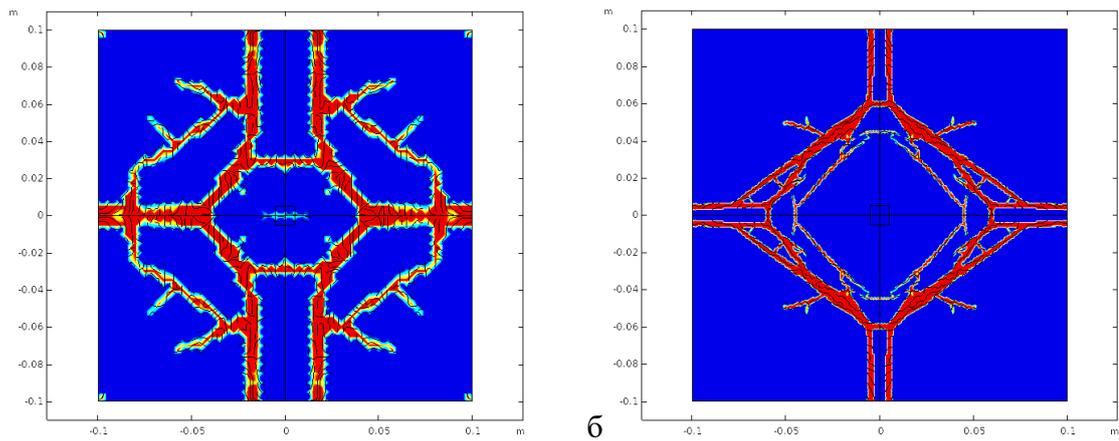


Рис. 4.17. Примеры результатов мульти-материальной ТО для свободно опертой металло-композитной панели, нагруженной давлением, а: размер КЭ 2 мм, б: размер КЭ 0.5 мм.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе представлены метод ТО и представлены результаты применения этого метода для подкрепленных металло-композитных тонкостенных конструкций. Основным отличием предложенного метода является использованием функции фиктивной плотности для задания локальной толщины пластин (или их слоев) с целью выбора оптимального расположения ребер жесткости. Такая методика является альтернативной и более удобной для тонкостенных конструкций, по сравнению с общепринятыми подходами, основанными на введении интерполяции для упругих характеристик оптимизируемых конструкций. Эта методика позволяет выбирать варианты оптимальных подкрепленных (оробренных) конструкций повышенной жесткости. В данной работе предложенный метод также объединен с некоторыми дополнительными подходами, позволяющими учитывать расширенные требования к оптимизируемым конструкциям, в том числе к схеме армирования композитных элементов. По результатам расчетов для тестовой геометрии металло-композитных плоских панелей, показана возможность получения оптимальных «биоморфных» конструкций, отвечающих требованиям по минимальной податливости, ограничениям по прочности, жесткости, устойчивости, в условиях сложного нагружения.

Основным выводом представленных результатов расчетов является продемонстрированная возможность эффективного применения ТО для оптимизации силового набора оробренных панелей на основе моделей пластин переменной толщины. Эти результаты получены как на основе численного моделирования, так и валидированы на основе аналитических решений и экспериментальных данных. Предложенная методика может быть полезна для широкого класса тонкостенных конструкций, применяемых в различных отраслях промышленности. Дальнейшее развитие предложенной методики ТО должно быть связано с ее обобщением на оболочечные конструкции, работающие в условиях сложно-напряженного состояния, а также развитие методов учета эффектов потери

устойчивости в оптимизированных конструкциях, получаемых в процессе численного моделирования по предложенной методике.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Bendsøe M, Sigmund O. Topology optimization: theory, methods, and applications. Springer-Verlag, Berlin, 2003. 370 p.
2. Bendsøe M.P., Optimization of Structural Topology, Shape and Material. Springer Berlin, Heidelberg, New York, 1995. 273 p.
3. Rozvany, G. I. N., & Lewiński, T. (Eds.). Topology Optimization in Structural and Continuum Mechanics. CISM International Centre for Mechanical Sciences. Springer. 2014. Vol. 549. 471 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-7091-1643-2>
4. Warzecha, M.; Schatz, M.E.; Lucarelli, S.; Jüttner, C. Increasing Structural Performance of Space Telescope Mirrors Through Simultaneous Shape and Size Optimization. Aerospace. 2022, Vol. 9. Pp. 1–14. <https://doi.org/10.3390/aerospace9110646>
5. Yu, Y., Wang, D., Zhao, G. et al. Size optimization of mid-frequency vibro-acoustic systems in the framework of modal energy analysis. Struct Multidisc Optim. 2022. Vol. 65. Pp. 1–23. <https://doi.org/10.1007/s00158-022-03396-6>
6. Fukada, Y., Minagawa, H., Nakazato, C. et al. Response of shape optimization of thin-walled curved beam and rib formation from unstable structure growth in optimization. Struct Multidisc Optim. 2018. Vol. 58. Pp. 1769–1782. <https://doi.org/10.1007/s00158-018-1999-y>
7. Kaudur S.B., Patil M.J. Shape optimization with immersed interface finite element method. Int J Numer Methods Eng. 2022. Vol.123. Issue. 23. Pp. 5907–5936. <https://doi.org/10.1002/nme.7093>
8. Lam YC, Santhikumar S. Automated rib location and optimization for plate structures Structural and Multidisciplinary Optimization. 2003. Vol. 25. Issue. 1. Pp. 35–45. <https://doi.org/10.1007/s00158-002-0270-7>
9. Olhoff N, Taylor JE. On structural optimization. Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME. 1983. Vol. 50. Issue. 4 (b). Pp. 1139–1151.
10. Rozvany G, Kirsch U. Layout optimization of structures Applied Mechanics Reviews. 1995. Vol.4. Pp. 41–111.

11. Rozvany G.I.N. Foundations of structural optimization: A unified approach: A.J. Morris, ed. (Wiley, Chichester, 1982). Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1985. Vol. 49. Issue.1. Pp. 123–127. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(85\)90054-4](https://doi.org/10.1016/0045-7825(85)90054-4).
12. Ferrari F., Sigmund O. Revisiting topology optimization with buckling constraints. Structural and Multidisciplinary Optimization. 2019. Vol. 59. №. 5. Pp. 1401–1415. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1809.05300>
13. Nouman Saeed, Kai Long, Jamshed Ahmed Ansari, Nasif Raza Jaffri, Usama Abrar. Improved Efficient Projection Density Function Based on Topology Optimization. Journal of Mathematics. 2021. Vol. 2021, Article ID 1077990. 10 p. <https://doi.org/10.1155/2021/1077990>
14. Wang, J., Chang, S., Liu, G. et al. Optimal rib layout design for noise reduction based on topology optimization and acoustic contribution analysis. Struct Multidisc Optim. 2017. Vol. 56. Pp. 1093–1108. <https://doi.org/10.1007/s00158-017-1705-5>
15. Ling, Z., Ronglu, X., Yi, W., & El-Sabbagh, A. Topology Optimization of Constrained Layer Damping on Plates Using Method of Moving Asymptote (MMA) Approach. Shock and Vibration. 2011. Vol.18. Issue. (1-2). Pp. 221–244. <https://doi.org/10.1155/2011/830793>
16. Li D., Kim I. Y. Multi-material topology optimization for practical lightweight design //Structural and Multidisciplinary Optimization. 2018. Vol. 58. №. 3. Pp. 1081–1094.
17. Bendsøe M.P, Kikuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. Comput Methods Appl Mech Eng. 1988. Vol. 71. №. 2. Pp. 197–224.
18. Chung J, Lee K. Optimal design of rib structures using the topology optimization technique. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 1997. Vol. 211. Issue. 6. Pp. 425–437. <https://doi.org/10.1243/0954406971521836>

19. Bruggi M, Taliercio A. 19 - Topology optimization for the development of eco-efficient masonry units, Editor(s): F. Pacheco-Torgal, P.B. Lourenço, J.A. Labrincha, S. Kumar, P. Chindaprasirt, Eco-Efficient Masonry Bricks and Blocks, Woodhead Publishing. 2015. Pp. 425–445, <https://doi.org/10.1016/B978-1-78242-305-8.00019-X>
20. Querin OM, Victoria M, Gordo CA, Ansola R, Martí P. Topology Design Methods for Structural Optimization. London: Academic Press. 2017.
21. Dems K. First-and second-order shape sensitivity analysis of structures. Structural Optimization. 1991. Vol.3. Issue.2. Pp. 79–88.
22. Sigmund O, Maute K. Topology optimization approaches. Structural and Multidisciplinary Optimization. 2013. Vol.48. Issue. 6. Pp. 1031–1055.
23. Vanderplaats, G.N. Thirty years of modern structural optimization. Adv.in Eng. Software. 1993. Vol. 16. Issue. 2. Pp. 81–88.
24. Scott Townsend., H. Alicia Kim. A level set topology optimization method for the buckling of shell structures. Structural and Multidisciplinary Optimization. 2019. vol. 60. Pp.1783–1800. URL: <https://doi.org/10.1007/s00158-019-02374-94>
25. Lam, Y.C., Manickarajah D. Bertolini, A.A. 2000: L Performance characteristic of resizing algorithms for thickness optimization of plate structures. Finite Elements in Anal.and Des. Vol. 34. Pp. 159–174.
26. Yoon, G. H. , Dede, E. M. , Nomura, T. , and Schmalenberg, P. “Topology Optimization of Time-Transient Heat Conduction for Thermo-Optic Silicon Modulators,” Int. J. Heat Mass Transfer. 2020. Vol.157. 119862.
27. Desai, J., Faure, A., Michailidis, G., Parry, G., & Estevez, R. Topology optimization in acoustics and elasto-acoustics via a level-set method. Journal of Sound and Vibration. 2018. Vol. 420. Pp. 73–103. URL: doi.org/10.1016/j.jsv.2018.01.032
28. Chen, L., Lu, C., Lian, H., Liu, Z., Zhao, W. et al. Acoustic topology optimization of sound absorbing materials directly from subdivision surfaces with isogeometric boundary element methods. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2020. Vol. 362. 112806. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.112806>

29. Savsani, V., Dave, P., Raja, B. D. et al. Topology optimization of an offshore jacket structure considering aerodynamic, hydrodynamic and structural forces. *Engineering with Computers*. 2021. Vol. 37. Pp. 2911–2930. <https://doi.org/10.1007/s00366-020-00983-3>
30. L. Højgaard Olesen, F. Okkels, and H. Bruus, “A High-level Programming-language Implementation of Topology Optimization Applied to Steady-state Navier-Stokes Flow,” *Int. J. Num. Meth. Engrg.* 2005. Vol. 65. Pp. 975–1001.
31. Deng, Y., & Korvink, J. G. Topology optimization for three-dimensional electromagnetic waves using an edge element-based finite-element method. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*. 2016. Vol. 472(2189). 20150835. <https://doi.org/10.1098/rspa.2015.0835>
32. Kuznetsov, S., & Guest, J. K. Topology optimization of magnetic source distributions for diamagnetic and superconducting levitation. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2017. Vol. 438. Pp. 60–69. <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2017.04.052>
33. Kambampati, S., Townsend, S., & Kim, H. A. Aeroelastic Level Set Topology Optimization for a 3D Wing. 2018 AIAA/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. 8–12 January 2018 <https://doi.org/10.2514/6.2018-2151>
34. Hodson, J. D., Christopherson, A. P., Deaton, J. D., Pankonien, A. M., Reich, G. W., & Beran, P. S. Aeroelastic Topology Optimization of a Morphing Airfoil in Supersonic Flow using Evolutionary Design. AIAA Scitech 2019 Forum. 7-11 January 2019. <https://doi.org/10.2514/6.2019-1466>
35. Gao T., Xu P., Zhang W. Topology optimization of thermo-elastic structures with multiple materials under mass constraint. *Computers & Structures*. 2016. Vol. 173. Pp. 150–160. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2016.06.002>
36. Deng S., Suresh K. Stress constrained thermo-elastic topology optimization with varying temperature fields via augmented topological sensitivity based level-set. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2017. Vol. 56. №. 6. Pp. 1413–1427.

37. Sun, S., Liebersbach, P., & Qian, X. 3D Topology Optimization of Heat Sinks for Liquid Cooling. *Applied Thermal Engineering*. 2020. Vol. 178. 115540. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2020.115540>
38. Li, H., Ding, X., Meng, F., Jing, D., & Xiong, M. Optimal design and thermal modelling for liquid-cooled heat sink based on multi-objective topology optimization: An experimental and numerical study. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2019. Vol. 144, 118638. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.118638>
39. Zhang, Y., Gao, L., & Xiao, M. Maximizing natural frequencies of inhomogeneous cellular structures by Kriging-assisted multiscale topology optimization. *Computers & Structures*. 2020. Vol. 230. 106197. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2019.106197>
40. Picelli, R., Vicente, W. M., Pavanello, R., & Xie, Y. M. Evolutionary topology optimization for natural frequency maximization problems considering acoustic–structure interaction. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2015. Vol.106. Pp. 56–64. <https://doi.org/10.1016/j.finel.2015.07.010>
41. Alberdi, R., & Khandelwal, K. (2017). Topology optimization of pressure dependent elastoplastic energy absorbing structures with material damage constraints. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2017. Vol. 133. Pp. 42–61. <https://doi.org/10.1016/j.finel.2017.05.004>
42. Yun, K.-S., Youn, S.-K. Microstructural topology optimization of viscoelastic materials of damped structures subjected to dynamic loads. *International Journal of Solids and Structures*. 2018. Vol. 147. Pp. 67–79. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.04.022>
43. Dapogny, C., Estevez, R., Faure, A., Michailidis, G. Shape and topology optimization considering anisotropic features induced by additive manufacturing processes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2018. Vol. 344. Pp. 626–665. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.09.036>

44. Hvejsel C. F., Lund E. Material interpolation schemes for unified topology and multi-material optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2011. – Vol. 43. №. 6. Pp. 811–825.
45. Li D., Kim I. Y. Multi-material topology optimization for practical lightweight design. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2018. Vol. 58. №. 3. Pp. 1081–1094.
46. David Weinberg, Jeff Strain. *Topology Optimization in Autodesk Nastran In-CAD/Autodesk*. University Instructional Demo DE121004. Jul 23 2020.
47. M. Zhou, G.I.N. Rozvany, DCOC: An optimality criterion method for large systems. Part I: theory. *Struct. Optim.* 1992. Vol. 5. Pp.12–25.
48. M. Zhou, G.I.N. Rozvany, DCOC: An optimality criterion method for large systems. Part II: algorithm. *Structural Optimization*. 1993. Vol. 6. Pp. 250–262. <https://doi.org/10.1007/BF01743384>
49. M.P. Bendsøe, Optimal shape design as a material distribution problem, *Structural Optimization*. 1989. Vol. 1. Issue. 4. Pp. 193–202. Available from: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01650949>
50. G.I.N. Rozvany, M. Zhou, Applications of the COC algorithm in layout optimization, in: H.A. Eschenauer, C. Mattheck, N. Olhoff (Eds.), *Engineering Optimization in Design Processes*. Lecture Notes in Engineering. Springer, Berlin, Heidelberg. 1991. vol. 63. https://doi.org/10.1007/978-3-642-84397-6_6
51. G. Allaire, F. Jouve, A.-M. Toader. Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method. *J. Comput. Phys.* 2004. Vol.194. Issue. 1. Pp. 363–393
52. S. Amstutz, H. Andra. A new algorithm for topology optimization using a level-set method, *J. Comput. Phys.* 2006. Vol. 216. Issue. 2. Pp. 573–588.
53. M.Y. Wang, X. Wang, D. Guo. A level set method for structural topology optimization, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2003. Vol. 192. Vol. 12. Pp. 227–246.
54. Raphael T. Haftka, Zafer Gürdal, *Elements of Structural Optimization*, third ed., Kluwer, Dordrecht, 1992. 481 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-011-2550-5>

55. C. Mattheck, M. Scherrer, K. Bethge, I. Tesari, Shape optimization: an analytical approach, Computer Aided Optimum Design in Engineering IX, WIT Press, Southampton. 2005.
56. Y.M. Xie, G.P. Steven, A simple evolutionary procedure for structural optimization, Comput. Struct. 1993. Vol. 49. Pp. 885–896.
57. Y.M. Xie, G.P. Steven, Evolutionary Structural Optimization, Springer-Verlag, Berlin, 1997. 188 p.
58. X. Huang, M. Xie, Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures: Methods and Applications, John Wiley & Sons, Ltd, Sussex, UK, 2010. 240 p.
59. O.M. Querin, G.P. Steven, Y.M. Xie, Evolutionary structural optimization using a bidirectional algorithm, Eng. Comput. 1998. Vol. 15. Pp. 1031–1048.
60. Rozvany, G.I.N., Zhou, M. & Birker, T. Generalized shape optimization without homogenization. Structural Optimization. 1992. Vol. 4. Pp. 250–252. <https://doi.org/10.1007/BF01742754>
61. Browne, Philip A. Topology Optimization of Linear Elastic Structures."Thesis. University of Bath, 2013. Print.
62. C. Mattheck, Engineering components grow like trees, Mat.-wiss. Werkstofftech. 1990. Vol. 21. Pp. 143–168. Available from: <http://dx.doi.org/10.1002/mawe.19900210403>
63. C. Mattheck, M. Scherrer, K. Bethge, I. Tesari, Shape optimization: an analytical approach, Computer Aided Optimum Design in Engineering IX, WIT Press, Southampton. 2005.
64. Alexis Dugr'e, Aurelian Vadean, et al. Challenges of using topology optimization for the design of pressurized stiffened panels. Structural and Multidisciplinary Optimization. 2016. Vol. 53. Issue. 2. Pp. 303–320.
65. M Rais-Rohani and J Lokits. Reinforcement layout and sizing optimization of composite submarine sail structures. Structural and Multidisciplinary Optimization. 2007. Vol. 34(1). Pp. 75–90.

66. Keng-Tung Cheng and Niels Olhoff. An investigation concerning optimal design of solid elastic plates. *International Journal of Solids and Structures*. 1981. Vol. 17(3). Pp. 305–323.
67. Julio Munoz and Pablo Pedregal. A review of an optimal design problem for a plate of variable thickness. *SIAM journal on control and optimization*. 2007. Vol. 46(1). Pp. 1–13.
68. Frithiof Niordson. Optimal design of elastic plates with a constraint on the slope of the thickness function. *International Journal of Solids and Structures*. 1983. Vol.19(2). Pp. 141–151.
69. Guy Bouchitté, Ilaria Fragalà, and Pierre Seppecher. Structural optimization of thin elastic plates: the three dimensional approach. *Archive for rational mechanics and analysis*. 2011. Vol. 202(3). Pp. 829–874.
70. Xudong Jiang, Chang Liu, Zongliang Du, Wendong Huo, Xiaoyu Zhang, Feng Liu, and Xu Guo. A unified framework for explicit layout/topology optimization of thinwalled structures based on moving morphable components (MMC) method and adaptive ground structure approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2022. Vol. 396. 115047. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2022.115047>
71. Linyuan Li, Chang Liu, Weisheng Zhang, Zongliang Du, and Xu Guo. Combined modelbased topology optimization of stiffened plate structures via mmc approach. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2021. Vol. 208. 106682. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2021.106682>
72. Erik A Tråff, Ole Sigmund, and Niels Aage. Topology optimization of ultra high resolution shell structures. *Thin-Walled Structures*. 2021. Vol. 160.107349. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2020.107349>
73. Jin Ji, Xiaohong Ding, and Min Xiong. Optimal stiffener layout of plate/shell structures by bionic growth method. *Computers & Structures*. 2014. Vol. 135. Pp. 88–99. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2014.01.022>
74. Ggjrtjwha Dachuan Liu, Peng Hao, Kunpeng Zhang, Kuo Tian, Bo Wang, Gang Li, and Weixiu Xu. On the integrated design of curvilinearly grid-stiffened panel

with non-uniform distribution and variable stiffener profile. *Materials & Design*. 2020. Vol. 190.108556. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2020.108556>

75. Ivan Giorgio, Alessandro Ciallella, and Daria Scerrato. A study about the impact of the topological arrangement of fibers on fiber-reinforced composites: some guidelines aiming at the development of new ultra-stiff and ultra-soft metamaterials. *International Journal of Solids and Structures*. 2020. Vol. 203. Pp. 73–83. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.07.016>

76. Boris Desmorat, Mario Spagnuolo, and Emilio Turco. Stiffness optimization in nonlinear pantographic structures. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2020. Vol. 25(12). Pp. 2252–2262. <https://doi.org/10.1177/108128652093550>

77. Navid Shekarchizadeh, Bilen Emek Abali, Emilio Barchiesi, and Alberto Maria Bersani. Inverse analysis of metamaterials and parameter determination by means of an automatized optimization problem. *Z Angew Math Mech*. 2021. Vol. 101(8):e202000277. <https://doi.org/10.1002/zamm.202000277>

78. Pierre Seppecher, Jean Jacques Alibert, Tomasz Lekszycki, Roman Grygoruk, Marek Pawlikowski, David Steigmann, Ivan Giorgio, Ugo Andreaus, Emilio Turco, Maciej Gołaszewski, et al. Pantographic metamaterials: an example of mathematically driven design and of its technological challenges. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2019. Vol. 31(4). Pp. 851–884. <https://doi.org/10.1007/s00161-018-0689-8>

79. S. M. Huybrechts, T. E. Meink, P. M. Wegner, J. M. Ganley, Manufacturing theory for advanced grid stiffened structures, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. 2002. Vol. 33(2). Pp. 155–161. [https://doi.org/10.1016/S1359-835X\(01\)00113-0](https://doi.org/10.1016/S1359-835X(01)00113-0)

80. J. A. Lozano-Galant, I. Pay'a-Zaforteza. Structural analysis of eduardo torroja's front'on de recoletos' roof. *Engineering Structures*. 2011. Vol. 33 (3). Pp. 843–854. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2010.12.006>

81. H. Wu, A. Liew, T. Van Mele, P. Block. Analysis and optimisation of a rib-stiffened vaulted floor for dynamic performance. *Engineering Structures*. 2020. Vol. 213. 110577. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.110577>
82. K. S. Challagulla, A. Georgiades, A. Kalamkarov. Asymptotic homogenization modeling of smart composite generally orthotropic grid-reinforced shells: Part I–theory. *European Journal of Mechanics-A/Solids*. 2010. Vol. 29 (4). Pp. 530–540. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2010.03.007>
83. D. Hadjiloizi, A. L. Kalamkarov, A. Georgiades. Plane stress analysis of magnetoelectric composite and reinforced plates: Applications to wafer-and rib-reinforced plates and three-layered honeycomb shells. *Z. Angew. Math. Mech.* 2017. Vol. 97 (7). Pp. 786–814. <https://doi.org/10.1002/zamm.201500228>
84. O. Bedair, Analysis and limit state design of stiffened plates and shells: A World View. *Appl. Mech. Rev.* 2009. Vol. 62 (2). 020801. <https://doi.org/10.1115/1.3077137>
85. O. Bedair. Recent developments in modeling and design procedures of stiffened plates and shells. *Recent Patents on Engineering*. 2013. Vol. 7 (3). Pp. 196–208. <https://doi.org/10.2174/1872212107999131120161751>
86. O. Sigmund, K. Maute, Topology optimization approaches, *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2013. Vol. 48 (6). Pp. 1031–1055. <https://doi.org/10.1007/s00158-013-0978-6>
87. J. Wu, O. Sigmund, J. P. Groen. Topology optimization of multi-scale structures: a review. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2021. Vol. 63 (3). Pp. 1455–1480. <https://doi.org/10.1007/s00158-021-02881-8>
88. H. Lin, A. Xu, A. Misra, R. Zhao. An ANSYS APDL code for topology optimization of structures with multi-constraints using the beso method with dynamic evolution rate (der-beso). *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2020. Vol. 62 (4). Pp. 2229–2254. <https://doi.org/10.1007/s00158-020-02588-2>
89. I. Giorgio. Lattice shells composed of two families of curved Kirchhoff rods: an archetypal example, topology optimization of a cycloidal metamaterial. *Continuum*

Mech. Thermodyn. 2021. Vol. 33 (4). Pp. 1063–1082. <https://doi.org/10.1007/s00161-020-00955-4>

90. K.-T. Cheng, N. Olhoff. An investigation concerning optimal design of solid elastic plates. *International Journal of Solids and Structures*. 1981. Vol. 17 (3). Pp. 305–323. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(81\)90065-2](https://doi.org/10.1016/0020-7683(81)90065-2)

91. J. Munoz, P. Pedregal. A review of an optimal design problem for a plate of variable thickness. *SIAM journal on control and optimization*. 2007. Vol. 46 (1). Pp. 1–13. <https://doi.org/10.1137/050639569>

92. V. Litvinov. Optimal control of the natural frequency of a plate of variable thickness. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1979. Vol. 19 (4). Pp. 70–86. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(79\)90157-5](https://doi.org/10.1016/0041-5553(79)90157-5)

93. S. Czarnecki, T. Lewin'ski. On minimum compliance problems of thin elastic plates of varying thickness. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2013. Vol. 48 (1). Pp. 17–31. <https://doi.org/10.1007/s00158-013-0893-x>

94. C. Keng-Tuno. On non-smoothness in optimal design of solid, elastic plates. *International Journal of Solids and Structures*. 1981. Vol. 17 (8). Pp. 795–810. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(81\)90089-5](https://doi.org/10.1016/0020-7683(81)90089-5)

95. F. Niordson. Optimal design of elastic plates with a constraint on the slope of the thickness function. *International Journal of Solids and Structures*. 1983. Vol. 19 (2). Pp. 141–151. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(83\)90005-7](https://doi.org/10.1016/0020-7683(83)90005-7)

96. E. Bonnetier, C. Conca. Approximation of young measures by functions and application to a problem of optimal design for plates with variable thickness. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*. 1994. Vol. 124 (3). Pp. 399–422. <https://doi.org/10.1017/S0308210500028717>

97. N. Antoni'c, N. Balenovi'c. Optimal design for plates and relaxation. *Mathematical Communications*. 1999. Vol. 4 (1). Pp. 111–119.

98. G. Bouchitt'e, I. Fragal'a, P. Seppecher. Structural Optimization of Thin Elastic Plates: The Three Dimensional Approach. *Arch Rational Mech Anal*. 2011. Vol. 202. Pp. 829–874. <https://doi.org/10.1007/s00205-011-0435-x>

99. Banh, T.T., Lee, D. Topology optimization of multi-directional variable thickness thin plate with multiple materials. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2019. Vol. 59 (5). Pp. 1503–1520. <https://doi.org/10.1007/s00158-018-2143-8>
100. J. Wang, S. Chang, G. Liu, L. Liu, L. Wu. Optimal rib layout design for noise reduction based on topology optimization and acoustic contribution analysis. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2017. Vol. 56 (5). Pp. 1093–1108. <https://doi.org/10.1007/s00158-017-1705-5>
101. Svanberg K. The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 1987. Vol. 24. Pp. 359–373. <https://doi.org/10.1002/nme.1620240207>
102. Лизин В. Т., Пяткин В. А. Проектирование тонкостенных конструкций. – Машиностроение. 1976.
103. Lurie S. A. et al. Design of the corrugated-core sandwich panel with external active cooling system. *Composite Structures*. 2018. Vol. 188. Pp. 278–286. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.12.082>
104. Дзюба А. С., Липин Е. К. Оптимальное проектирование силовых конструкций минимального объема при ограничениях по прочности и устойчивости // Ученые записки ЦАГИ. 1980. Т. 11. №. 1.
105. Дудченко А. А., Кьонг Л. К., Лурье С. А. Расчет и проектирование контурно подкрепленной композитной панели, нагруженной поперечной силой // Труды МАИ. 2012. №. 50. С. 14–14.
106. Кусяков А. Ш. Анализ эффективности подкрепляющих элементов в задаче оптимизации ребристой оболочки из композитного материала // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2020. №. 4. С. 29–33.
107. Сайт COMSOL <https://www.comsol.ru/blogs/performing-topology-optimization-with-the-density-method>.

108. Bendsøe M. P., Sigmund O. Material interpolation schemes in topology optimization. *Archive of applied mechanics*. 1999. Vol. 69. №. 9-10. Pp. 635-654. <https://doi.org/10.1007/s004190050248>
109. Aage N. et al. Giga-voxel computational morphogenesis for structural design. *Nature*. 2017. Vol. 550. №. 7674. Pp. 84–86. <https://doi.org/10.1038/nature23911>
110. Vasiliev V. V., Morozov E. V. *Advanced mechanics of composite materials and structural elements*. Third Edition. 2013.
111. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. *Пластины и оболочки*. М.: Физматгиз, 1963.
112. Solyaev Y. et al. On a combined thermal/mechanical performance of a foam-filled sandwich panels // *International Journal of Engineering Science*. 2019. Vol. 134. Pp. 66–76. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2018.10.010>
113. Jones R. M. *Mechanics of composite materials*. – CRC press, 1998.
114. Bruggi, M. On an alternative approach to stress constraints relaxation in topology optimization. *Struct Multidisc Optim*. 2008. Vol. 36. Pp. 125–141. <https://doi.org/10.1007/s00158-007-0203-6>
115. Kyaw, Y.K., Kuznetsova, E.L., Makarenko, A.V. Complex mathematical modelling of mechatronic modules of promising mobile objects. *INCAS Bulletin*, 2020, 12(Special Issue). Pp. 91–98. <https://doi.org/10.13111/2066-8201.2020.12.S.8>
116. Babaytsev, A.V., Kyaw, Y.K., Vakhneev, S.N., Zin Hein, T. Study of the influence of spherical inclusions on mechanical characteristics. *Periodico Tche Quimica*, 2020, 17(35), Pp. 654–662.
117. Egorova, O.V., Kyaw, Y.K. The solution of inverse non-stationary boundary value problems of diffraction of plane pressure wave on convex surfaces based on analytical solution. *Journal of Applied Engineering Science*, 2020, 18(4), Pp. 676–680. <https://doi.org/10.5937/jaes0-28051>
118. Kyaw, Y.K., Pronina, P.F., Polyakov, P.O. Mathematical modelling of the effect of heat fluxes from external sources on the surface of spacecraft. *Journal of Applied Engineering Science*, 2020, 18(4), Pp. 732–736. <https://doi.org/10.5937/jaes0-28180>

119. Okorokova, N.S., Perchenok, A.V., Sevruk, S.D., Farmakovskaya, A.A., Kyaw, Y.K. Autonomous hydrogen generator based on a chemical current source with an aluminum anode and water as a cathode component. *Oxidation Communications*, 2021, 44(3), pp. 672–685.
120. Klychnikova, M.V., Ko, K.Y. Investigation of mechanical properties of low-density polyethylene with copper nanoparticles. *International Journal of Mechanics*, 2021. Vol. 15. Pp. 181–188. <https://doi.org/10.46300/9104.2021.15.21>
121. Bugaev, N.M., Kuznetsova, E.L., Ko, K.Y. Thermophysical and magnetic properties of magnetite – polyethylene composite. *International Journal of Mechanics*, 2021, 15. Pp. 165–171. <https://doi.org/10.46300/9104.2021.15.19>
122. Tarasenko, O.S., Ko, K.Y. Study of electric conductivity of low-density polyethylene with copper nanoparticles. *International Journal of Circuits, Systems and Signal Processing*, 2021, Vol. 15. Pp. 1429–1435. <https://doi.org/10.46300/9106.2021.15.154>
123. Kostrichenko, A.B., Ko, K.Y. Preparation of low-density polyethylene composite with copper nanoparticles. *WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics*, 2021, 16, pp. 150–157. <https://doi.org/10.37394/232011.2021.16.16>
124. Rodchenko, V.V., Ko, K.Y. Investigation of adsorption capacity of magnetite nanoparticles. *WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics*, 2021, 16, pp. 165–171. <https://doi.org/10.37394/232011.2021.16.18>
125. Kyaw Ye Ko., Polina F. PRONINA. Mechanical Properties of Thin and Thick Coatings Applied to Various Substrates. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*. Vol.12 No.10 (2021), 1645-1650.