

ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИЙ С ГРАВИМАНЕВРАМИ КА, ОСНАЩЕННЫХ СОЛНЕЧНЫМ ПАРУСОМ «РОТОРНОГО» ТИПА.

П.В.Казмерчук

Рассматривается специфика моделирования и методика оптимизации траекторий перелета КА с солнечным парусом «роторного» типа, включающих в себя множественные гравиманевры. Задача оптимизации траектории КА с солнечным парусом «роторного» типа ставится как задача оптимизации составной динамической системы, для решения которой предлагается метод последовательной линеаризации.

ВВЕДЕНИЕ

Солнечный парус является одним из перспективных направлений развития двигательных систем космических аппаратов. Космические аппараты, оснащенные солнечным парусом, в настоящее время активно разрабатываются ведущими мировыми космическими агентствами. При достаточно больших поверхностях паруса, давление солнечной радиации способно влиять на траекторию движения такого космического аппарата. В сочетании с гравитационными маневрами у планет применение солнечного паруса может дать существенную экономию энергетических затрат и тем самым повысить научную эффективность миссии.

Управление солнечным парусом осуществляется путем разворота его относительно потока солнечного излучения. Для классического «плоского» паруса это осуществляется поворотом всего паруса с помощью газовых сопел. Т.к. размеры солнечного паруса достаточно велики энергетические затраты на такие маневры могут свести к нулю эффект от использования паруса.

Указанных проблем лишена конструкция так называемого «роторного» паруса, который представляет собой набор лепестков треугольной формы, расположенных вокруг центрального тела. Управление таким парусом осуществляется путем разворота каждого отдельно взятого лепестка вокруг собственной оси с помощью специальных электрических сервоприводов.

Применение в качестве движителя малой тяги «роторного» солнечного паруса и наличие многократных гравитационных маневров вызывает значительные трудности при оптимизации

траекторий традиционными методами. В частности, наличие множественных гравитационных маневров и большей размерности вектора управления, по сравнению с «плоским» парусом, создают проблемы при решении «сквозной» краевой задачи, учитывающей все участки перелета.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ

Анализируя специфику КА с солнечным парусом (КАСП) можно видеть, что одним из ключевых факторов при использовании КАСП в качестве транспортного средства является время перелета, которое из-за малости тяги может быть довольно велико. Выбор в качестве критерия предпочтения максимальной массы полезной нагрузки нецелесообразен, он не может отражать эффективность КАСП как транспортного средства, т.к. в процессе полета масса не изменяется и конечная масса зависит только от выбора ракетного комплекса. Поэтому представляется возможным в качестве критерия предпочтения выбрать минимальное время перелета к месту назначения, а массу полезной нагрузки зафиксировать выбором ракеты-носителя и типа разгонного блока. Ограничение на время перелета не накладывается, т.к. при достаточно жестких ограничениях задача может не иметь решений.

Таким образом, задача оптимизации перелета КА с солнечным парусом, траектория которого включает участки проведения гравиманевров, может быть сформулирована следующим образом:

Определить такую программу ориентации лепестков «роторного» солнечного паруса относительно потока солнечного излучения, параметры и даты проведения гравиманевров, которые обеспечивают минимальное время перелета к месту назначения.

Основным инструментом для математического решения сформулированной технической задачи является расширенная модель движения КА с солнечным парусом, которая представляет собой последовательность межпланетных участков, стыкуемых между собой.

При моделировании межпланетных участков траекторий космических аппаратов с солнечным парусом для проектных расчетов достаточной точностью обладает модель, использующая следующие допущения:

- учитываются только силы центрального притягивающего тела и тяга создаваемая солнечным парусом (СП);
- все силы считаются детерминированными (система управления КА работает идеально);
- маневры, производимые с помощью СП, моделируются как непрерывное воздействие на траекторию;

- размеры сфер действия планет считаются нулевыми (метод точечных сфер действия), их пролет происходит мгновенно, а вектор скорости КА во время гравиманевра меняется скачкообразно.

Для моделирования движения КАСП на межпланетных участках используется гелиоцентрическая инерциальная система координат. Модель движения центра масс КА с солнечным парусом в проекции на оси гелиоцентрической не вращающейся системы координат записываются в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \chi \mathbf{V}; \\ \dot{\mathbf{V}} &= \chi \left(-\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \frac{P}{m} \mathbf{e} \right); \\ \dot{t} &= \chi; \end{aligned} \quad (1.1)$$

где,

$\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ – радиус-вектор; $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – длина радиус-вектора; $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)^T$ –

вектор скорости; t – время перелета; m – масса КА; $\chi = \frac{r^2}{|\mathbf{r} \times \mathbf{V}|}$ – производная по времени угловой дальности; μ – гравитационный параметр Солнца; P – величина тяги, создаваемой солнечным парусом, зависящая от расстояния до Солнца и от ориентации СП относительно потока солнечного излучения, и \mathbf{e} (вектор тяги солнечного паруса); \mathbf{e} – единичный вектор направления тяги, создаваемой парусом.

1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРАВЛЕНИЯ ТЯГИ, СОЗДАВАЕМОЙ «РОТОРНЫМ» СОЛНЕЧНЫМ ПАРУСОМ

Конструкция СП роторного типа позволяет изменять ориентацию каждого отдельного лепестка относительно потока солнечного излучения, но только путем поворота лепестка вокруг собственной оси. При таком повороте, очевидно, что все лепестки не будут лежать в одной плоскости. В связи с этим возникают определенные трудности для реализации управления такой конструкцией.

В общем случае вектор направления тяги, создаваемой роторным солнечным парусом, путем разворота каждого лепестка на некоторый угол ω_i , $i = 1 \dots 8$; может быть определен следующим образом. Введем в рассмотрение матрицу перехода $\mathbf{M}(\theta, \omega)$ из системы координат лепестка – $X_p Y_p Z_p$ (Рис. 1 –1) в связанную систему координат XYZ (Рис. 1 –2). Система координат лепестка определяется следующим образом: ось Y_p совпадает с нормалью к теневой

стороне паруса, ось Z_p совпадает с осевой линией лепестка, ось X_p дополняет систему до правой. Угол θ – угол, определяющий положение осевой линии лепестка (оси Z_p), отсчитывается от положительного направления оси Z связанной системы координат. Угол ω – угол поворота лепестка (Рис. 1–3).

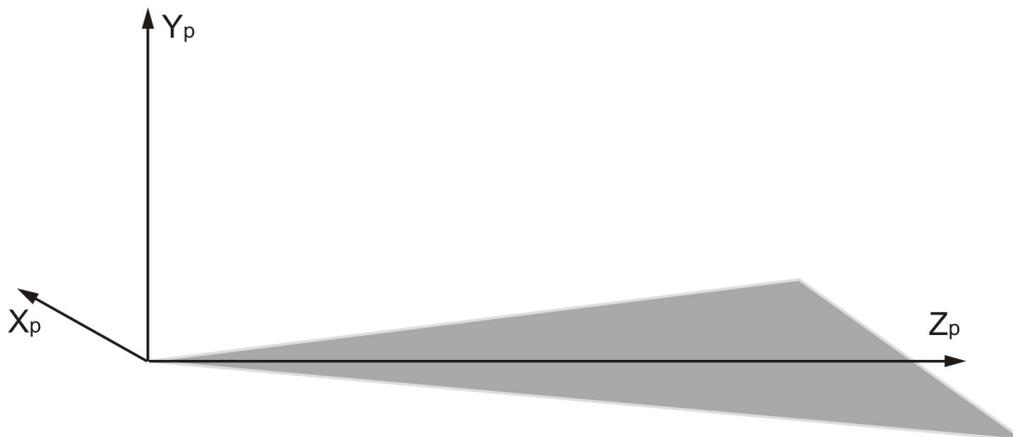


Рис. 1–1. Связанная с лепестком система координат

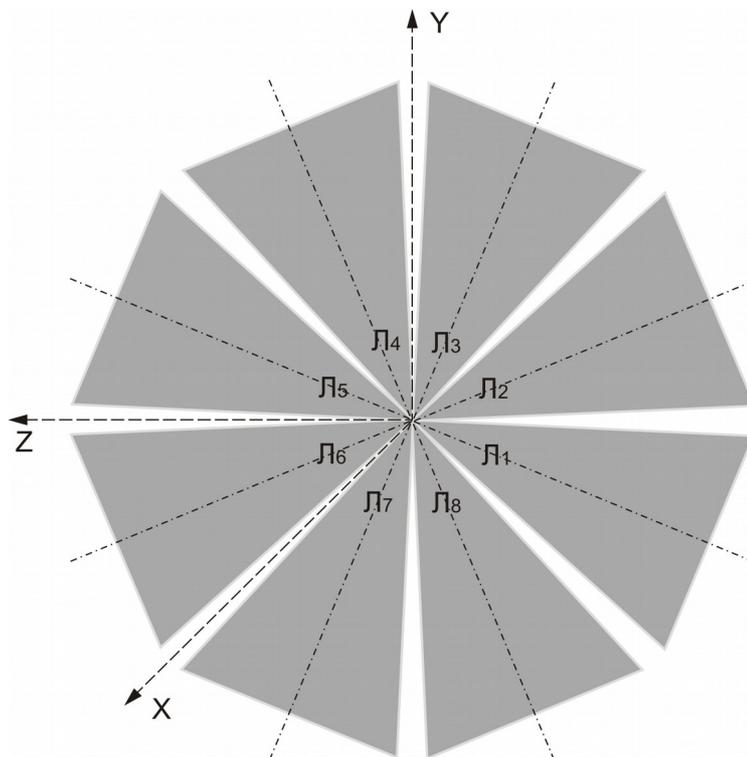


Рис. 1–2. Связанная с солнечным парусом система координат (ось X направлена на нас)

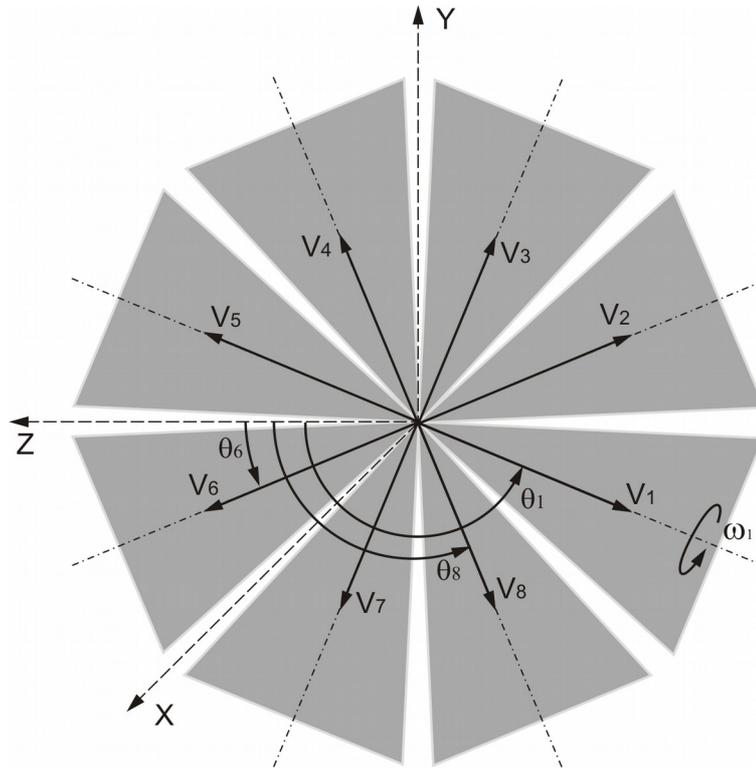


Рис. 1–3. Углы θ и ω , определяющие ориентацию вектора нормали лепестка

Для определения вида матрицы $\mathbf{M}(\theta, \omega)$ рассмотрим следующую последовательность поворотов. Первый поворот вокруг оси Z_p на угол ω для совмещения оси Y_p системы координат лепестка с осью $(-X)$ связанной системы координат. Матрица перехода, соответствующая такому повороту имеет вид:

$$\mathbf{M}_\omega = \begin{pmatrix} \cos(\omega) & -\sin(\omega) & 0 \\ \sin(\omega) & \cos(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Второй поворот опять вокруг оси Z_p на 90° для совмещения оси X_p системы координат лепестка с осью X связанной системы координат (Рис. 1 –4). Матрица перехода, соответствующая такому повороту имеет вид:

$$\mathbf{M}_{90} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

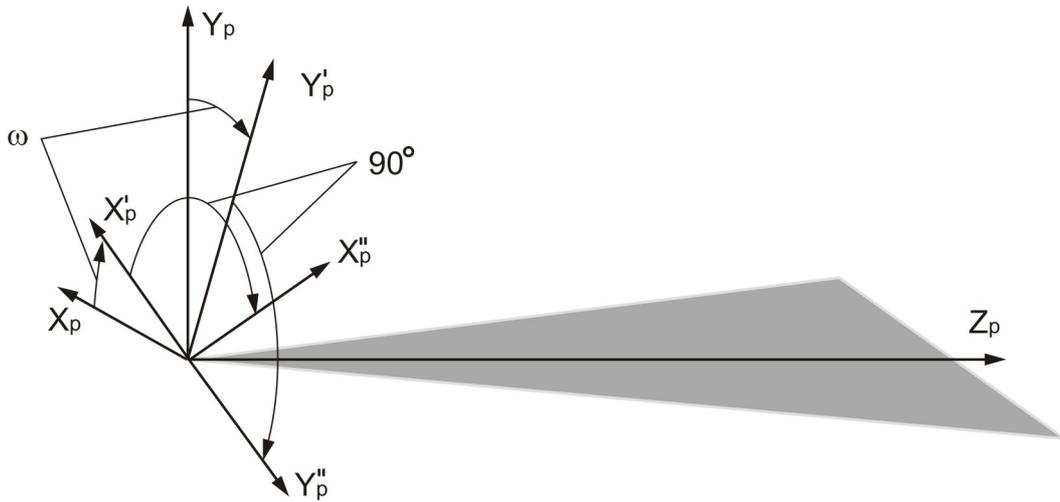


Рис. 1–4. Поворот на угол $\omega + \frac{\pi}{2}$ вокруг оси Z_p .

Последний поворот осуществляется вокруг оси X''_p для совмещения оси Z_p системы координат лепестка с осью Z связанной системы координат. Матрица перехода, соответствующая такому повороту имеет вид:

$$\mathbf{M}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Таким образом, искомую матрица перехода $\mathbf{M}(\theta, \omega)$ из системы координат лепестка в связанную систему координат можно определить, перемножив в обратном порядке полученные матрицы.

$$\mathbf{M}(\theta, \omega) = \mathbf{M}_\theta \mathbf{M}_{90} \mathbf{M}_\omega;$$

$$\mathbf{M}(\theta, \omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega) & -\sin(\omega) & 0 \\ \sin(\omega) & \cos(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

После выполнения всех умножений матрица $\mathbf{M}(\theta, \omega)$ будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{M}(\theta, \omega) = \begin{pmatrix} -\sin(\omega) & -\cos(\omega) & 0 \\ \cos(\theta)\cos(\omega) & -\cos(\theta)\sin(\omega) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\omega) & -\sin(\theta)\sin(\omega) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Т.к. вектор нормали к теневой стороне лепестка совпадает с осью Y_p системы координат лепестка, его компоненты в связанной системе координат определяются из соотношения:

$$\mathbf{N}(\theta, \omega) = \mathbf{M}(\theta, \omega) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Или

$$\mathbf{N}(\theta, \omega) = \begin{pmatrix} -\sin(\omega) & -\cos(\omega) & 0 \\ \cos(\theta)\cos(\omega) & -\cos(\theta)\sin(\omega) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\omega) & -\sin(\theta)\sin(\omega) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(\omega) \\ -\cos(\theta)\sin(\omega) \\ -\sin(\theta)\sin(\omega) \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Роторный парус рассматриваемого типа состоит из восьми лепестков. Выражение для вычисления координат вектора нормали к теневой стороне i – ого лепестка будет иметь вид:

$$\mathbf{N}(\theta_i, \omega_i) = \begin{pmatrix} -\cos(\omega_i) \\ -\cos(\theta_i)\sin(\omega_i) \\ -\sin(\theta_i)\sin(\omega_i) \end{pmatrix}, \quad i = 1 \dots 8; \quad (1.9)$$

Т.к. угол θ_i определяет положение оси i – ого лепестка относительно оси Z он является константой для каждого лепестка и не участвует в управлении солнечным парусом.

Вектор направления тяги, создаваемой солнечным парусом роторного типа можно определить, просуммировав вектора нормалей к теневой стороне каждого лепестка.

$$\mathbf{N}(\omega) = \sum_{i=1}^8 \mathbf{N}(\theta_i, \omega_i)$$

(1.10)

А единичный вектор направления тяги:

$$\mathbf{e}_f = |\mathbf{N}(\omega)|_E \quad (1.11)$$

Вектор управления солнечным парусом роторного типа будет иметь вид:

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8)^T \quad (1.12)$$

Как видно размерность вектора управления для роторного паруса больше, чем вектор управления для плоского паруса. Однако ее можно уменьшить, приняв некоторую схему поворота лепестков. Будем исходить из того, что часто необходимо, чтобы вектор управления лежал в определенной плоскости (плоские маневры, не требующие изменения наклона орбиты). Потребуем, чтобы при повороте лепестков суммарный вектор направления тяги лежал в одной плоскости. Рассмотрим возможную схему управления солнечным парусом роторного типа, удовлетворяющую этому условию:

- Все лепестки поворачиваются синхронно;
- Противоположные (симметричные относительно начала координат) лепестки поворачиваются таким образом, что всегда лежат в одной плоскости;
- Будем поворачивать 1-ый, 2-ой, 7-ой и 8-ой лепестки на одинаковый угол ω , тогда в соответствии с предыдущим пунктом лепестки 3,4,5,6 повернутся на угол $(-\omega)$ (Рис. 1–6);
- Углом поворота солнечного паруса будем считать угол ω

Теперь в соответствие с указанной схемой повернем солнечный парус, допустим, на угол 45° и рассмотрим проекции нормалей к теневой стороне каждого лепестка на плоскости связанной системы координат XYZ. Сравнивая Рис. 1–5 и Рис. 1–6 можно видеть, что управление роторным парусом в соответствии с выбранной схемой возможно только в плоскости XOY т.к. проекции векторов нормалей (направление тяги каждого лепестка) в плоскости XOZ взаимно компенсируются.

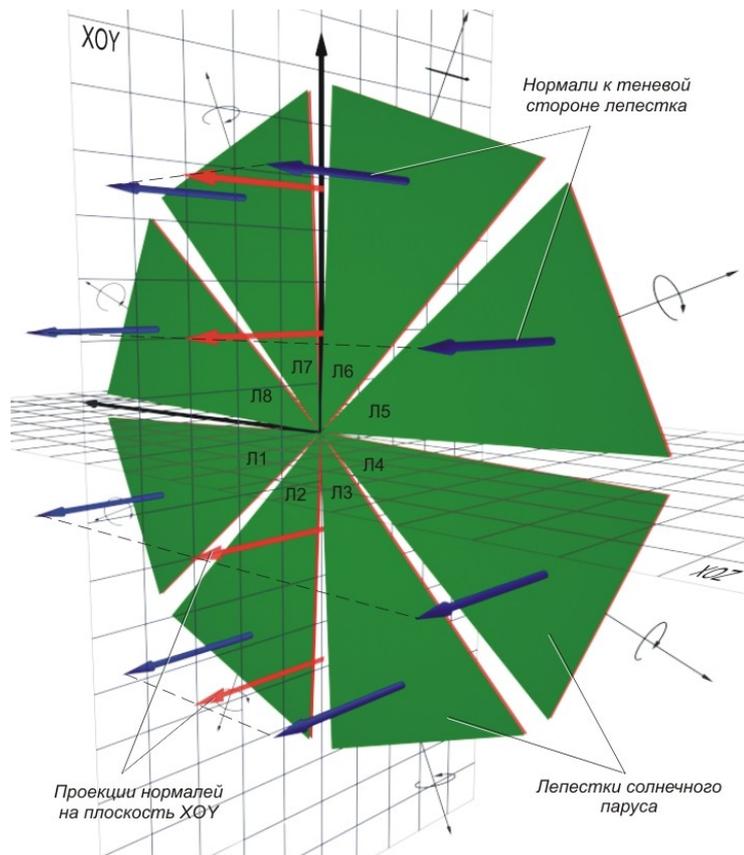


Рис. 1–5. Пространственная ориентация нормалей к теневой стороне паруса и их проекции на плоскость XOY (лепестки не развернуты)

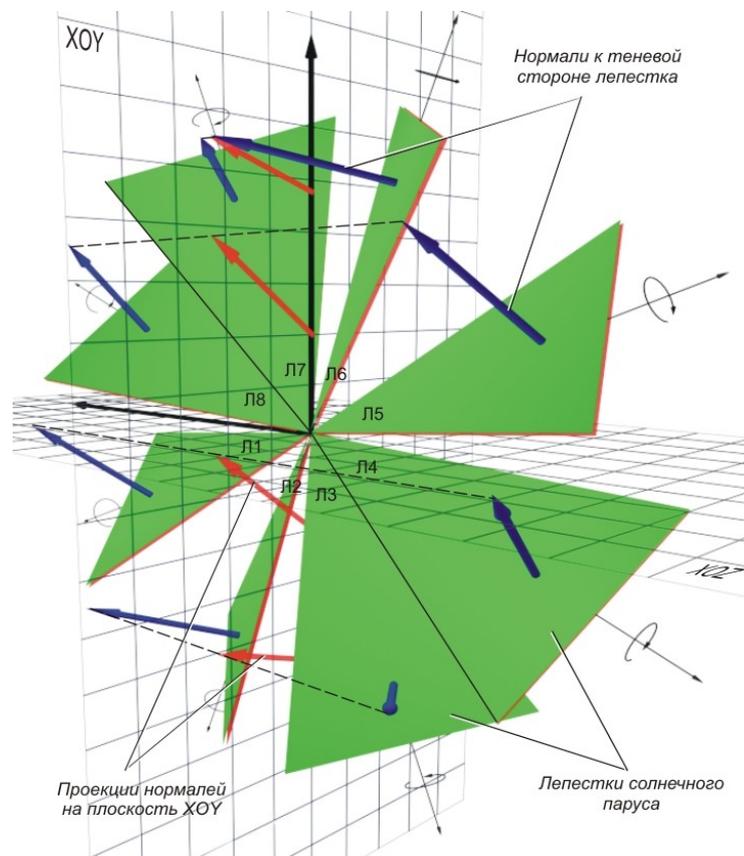


Рис. 1–6. Пространственная ориентация нормалей к теневой стороне паруса и их проекции на плоскость XOY (лепестки развернуты на 45°)

Как видно следующие вектора попарно совпадают по направлению (\mathbf{N}_i - нормаль к лепестку \mathcal{L}_i):

- $\mathbf{N}_5, \mathbf{N}_1$;
- $\mathbf{N}_4, \mathbf{N}_8$;
- $\mathbf{N}_2, \mathbf{N}_6$;
- $\mathbf{N}_3, \mathbf{N}_7$;

Так же вектора $\mathbf{N}_5, \mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_4, \mathbf{N}_8$ симметричны относительно плоскости XOY векторам $\mathbf{N}_2, \mathbf{N}_6$ и $\mathbf{N}_3, \mathbf{N}_7$ соответственно.

Таким образом, процедуру определения суммарного вектора направления тяги, создаваемой роторным солнечным парусом можно значительно упростить, определяя направления только двух векторов, например \mathbf{N}_1 и \mathbf{N}_8 (см. Рис. 1–7).

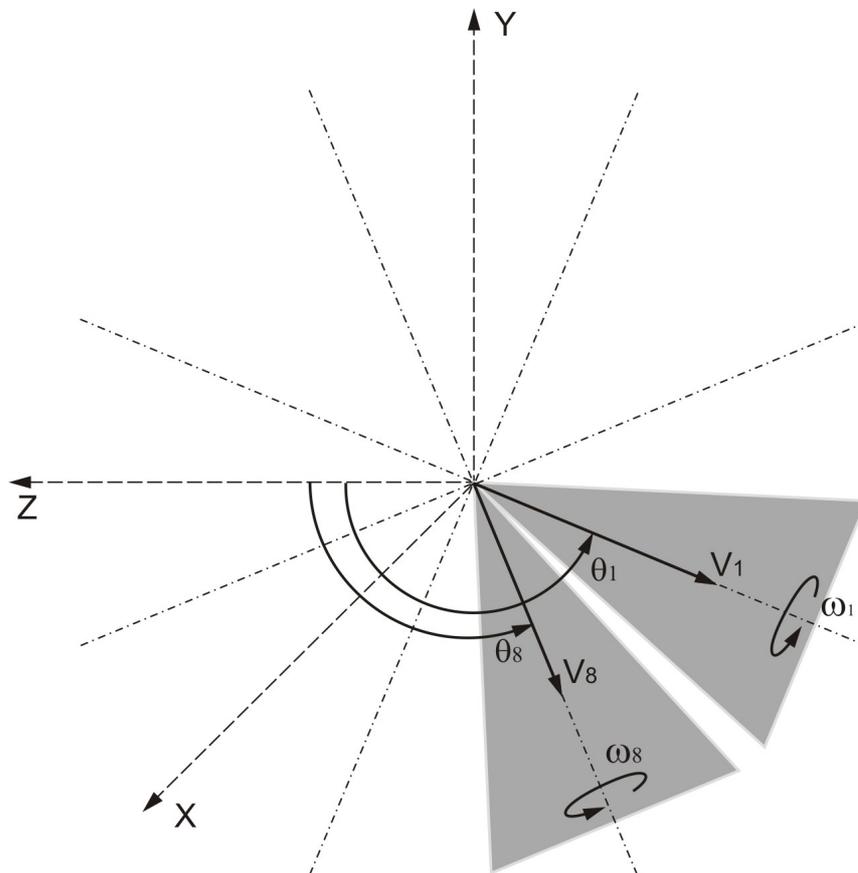


Рис. 1–7 Направление осевых векторов первого и восьмого лепестков

Результирующий вектор нормали к первому и восьмому лепестку можно определить из (1.9):

$$\mathbf{N}_1(\omega) = \begin{pmatrix} -\cos(\omega) \\ -\cos(\theta_1)\sin(\omega) \\ -\sin(\theta_1)\sin(\omega) \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{N}_8(\omega) = \begin{pmatrix} -\cos(\omega) \\ -\cos(\theta_8)\sin(\omega) \\ -\sin(\theta_8)\sin(\omega) \end{pmatrix};$$

(1.13)

Если $\mathbf{N}_1 = (x_1, y_1, z_1)^T$; и $\mathbf{N}_8 = (x_8, y_8, z_8)^T$; то вектора \mathbf{N}_6 и \mathbf{N}_7 определяются в силу указанной выше симметрии соответственно как:

$$\mathbf{N}_6 = (x_1, y_1, -z_1)^T;$$

$$\mathbf{N}_7 = (x_8, y_8, -z_8)^T;$$

(1.14)

Тогда выражение для определения единичного вектор направления тяги, создаваемой роторным солнечным парусом будет иметь вид:

$$\mathbf{e} = |\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_7 + \mathbf{N}_6 + \mathbf{N}_8|_E; \quad (1.15)$$

Как уже отмечалось выше, вектор \mathbf{e} будет лежать в плоскости XOY и составлять с осью $-X$ угол равный:

$$\psi = \arccos(\mathbf{e} \cdot \mathbf{N}); \quad (1.16)$$

1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ ТЯГИ, СОЗДАВАЕМОЙ «РОТОРНЫМ» СОЛНЕЧНЫМ ПАРУСОМ

Величина тяги, создаваемая плоским солнечным парусом определяется следующим образом:

$$p(r, \gamma) = P_\alpha \left(\frac{R_\varepsilon}{r} \right)^2 S \cos^2 \gamma \quad (1.17)$$

или

$$p(r, \gamma) = P_\alpha \left(\frac{R_\varepsilon}{r} \right)^2 S (\mathbf{i} \cdot \mathbf{e})^2 \quad (1.18)$$

Где, $P_\alpha \approx 0.464 \cdot 10^{-6} \left(\frac{R_\varepsilon}{r} \right)^2 (1 + \varepsilon) \frac{\kappa \Gamma}{M^2}$; ε – коэффициент отражения паруса;

$R_\varepsilon = 1.495 \cdot 10^{11}$ м. – средний радиус орбиты Земли; S – площадь поверхности паруса; r – текущее расстояние до Солнца; $\mathbf{i} = |\mathbf{r}|_E$ – единичный вектор направления солнечного излучения; \mathbf{e} – единичный вектор нормали к теневой стороне паруса;

Обозначим площадь одного лепестка S_l и единичные вектора нормали к лепесткам

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{N}_i, \quad i = 1 \dots 8;$$

$$(1.19)$$

В общем случае величину тяги, создаваемой роторным солнечным парусом можно определить суммированием вкладов от каждого лепестка:

$$p(r, \boldsymbol{\omega}) = \sum_{i=1}^8 2P_\alpha \left(\frac{R_\varepsilon}{r} \right)^2 S_l (\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}(\theta_i, \omega_i)) \quad (1.20)$$

Или

$$p(r, \boldsymbol{\omega}) = 2P_\alpha \left(\frac{R_\varepsilon}{r} \right)^2 S_l \sum_{i=1}^8 \mathbf{i} \cdot \mathbf{e}(\theta_i, \omega_i) \quad (1.21)$$

В частном случае (при использовании схемы управления, рассмотренной в предыдущем разделе) суммарную величину тяги создаваемую роторным парусом можно определить из соотношений:

$$\begin{aligned}
p_{1,5}(r, \gamma_1) &= 2P_\alpha \left(\frac{R_\varepsilon}{r} \right)^2 S_l(\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}_1)^2; \\
p_{4,8}(r, \gamma_2) &= 2P_\alpha \left(\frac{R_\varepsilon}{r} \right)^2 S_l(\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}_8)^2; \\
p_{2,6}(r, \gamma_3) &= 2P_\alpha \left(\frac{R_\varepsilon}{r} \right)^2 S_l(\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}_6)^2; \\
p_{3,7}(r, \gamma_4) &= 2P_\alpha \left(\frac{R_\varepsilon}{r} \right)^2 S_l(\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}_7)^2;
\end{aligned}
\tag{1.22}$$

Или, вынося общий множитель за скобки:

$$p_\Sigma = 2P_\alpha \left(\frac{R_\varepsilon}{r} \right)^2 S_l \left[(\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}_1)^2 + (\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}_6)^2 + (\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}_7)^2 + (\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}_8)^2 \right]
\tag{1.23}$$

Где, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_6, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_8$ – вектора нормалей соответственно к 1,6,7 и 8 – у лепесткам соответственно. Заметим, что $\mathbf{e}_6, \mathbf{e}_7$ определяются через значения $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_8$ через соотношения (1.14).

1.3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Моделирование гравитационных маневров (ГМ) КА с солнечным парусом ничем не отличается от моделирования ГМ для классических аппаратов. Согласно гипотезе о точечных сферах действия планет, считается, что гравитационные маневры КА происходят мгновенно. В результате в точке проведения гравитационного маневра, совпадающей с центром планеты проведения маневра, скачкообразно меняются параметры гелиоцентрических участков межпланетной траектории полета КА.

Пусть траектория межпланетного полета КА с солнечным парусом в самом общем случае состоит из N участков. И пусть на каждом i - м участке полета его траекторное движение описывается i - ой динамической системой (ДС) вида:

$$\frac{d\mathbf{x}^i}{dt^i} = \mathbf{f}^i(\mathbf{x}^i, \mathbf{u}^i, \mathbf{p}^i, \mathbf{q}, t^i), \quad t^i \in [t_0^i, t_k^i] \quad i = 1, \dots, N; \quad (1.24)$$

где:

$\mathbf{x}^i(t^i) \in E_{n_i}$ – вектор фазовых переменных, характеризующий текущее состояние КА на i - м участке полета;

$\mathbf{f}^i - n_i$ - мерная функция правых частей дифференциальных уравнений, которая считается дифференцируемой по своим аргументам столько раз, сколько потребуется;

$\mathbf{u}^i(t^i) \in \mathbf{U}^i(t^i) - r_i$ - мерная кусочно-непрерывная функция управления;

$\mathbf{U}^i(t^i) \subset E_{r_i}$ – ограниченная замкнутая область допустимых вариаций управления;

$\mathbf{p}^i \in \mathbf{P}^i$ – варьируемые параметры, влияющие на i - й участок полета КА;

$\mathbf{P}^i \subset E_{s_i}$ – ограниченная замкнутая область допустимых вариаций параметров;

$\mathbf{q} \in \mathbf{Q}$ – варьируемые параметры, влияющие на все участки траектории;

$\mathbf{Q} \subset E_s$ – ограниченная замкнутая область допустимых вариаций общих параметров;

t^i – независимая переменная.

Моменты времени t_k^i окончания полета КА на каждом i – м участке траектории определяются из условий:

$$\mu^i[\mathbf{x}^i(t_k^i), \mathbf{p}^i, \mathbf{q}, t_k^i] = 0, \quad i = 1, \dots, N; \quad (1.25)$$

где:

μ^i – скалярные функции, обладающие необходимой степенью гладкости.

В самом общем случае в моменты времени $t_k^i, i = 1, \dots, N$ происходят преобразования векторов фазового состояния КА при переходе от одной ДС к другой, моделирующих движение КА на соответствующих этапах:

$$\mathbf{x}^{i+1}(t_0^{i+1}) = \Phi^i[\mathbf{x}^i(t_k^i), \mathbf{p}^i, \mathbf{q}, t_k^i], \quad i = 1, \dots, N; \quad (1.26)$$

где:

$\Phi^i - n_{i+1}$ - мерная вектор-функция, обладающая необходимой степенью гладкости.

В эти же моменты могут изменяться независимые переменные:

$$t_0^{i+1} = \tau^i[\mathbf{x}^i(t_k^i), \mathbf{p}^i, \mathbf{q}, t_k^i] \quad i = 1, \dots, N-1; \quad (1.27)$$

где:

τ^i – скалярная функция необходимой гладкости.

Начальные условия межпланетного перелета представляются в виде:

$$\mathbf{x}^1(t_0^1) = \Phi^0(t_0^1, \mathbf{p}^0, \mathbf{q}); \quad (1.28)$$

где:

Φ^0 – n_1 -мерная дифференцируемая вектор-функция;

$\mathbf{p}^0 \in \mathbf{P}^0$ – варьируемые параметры;

$\mathbf{P}^0 \subset E_{s_0}$ – ограниченная замкнутая область допустимых вариаций параметров;

$t_0^1 \in [t_0^-, t_0^+]$ – варьируемый момент начала полета КА.

В дальнейшем для рассматриваемых факторов влияния: функций управления и проектно-баллистических параметров траектории КА, варьируемых на каждом i -м участке траектории используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\cdot) &= \left\{ \mathbf{u}^i(\cdot); \quad i = 1, \dots, N \right\}, \\ \mathbf{p} &= \left\{ \mathbf{p}^i, \mathbf{q}, t_0^1; \quad i = 0, \dots, N \right\}, \\ \mathbf{p} \in \mathbf{P} &\Leftrightarrow \left\{ \mathbf{p}^i \in \mathbf{P}^i, \quad i = 0, \dots, N; \quad \mathbf{q} \in \mathbf{Q}; \quad t_0^1 \in [t_0^-, t_0^+] \right\}, \\ \mathbf{u}(\cdot) \in \mathbf{U} &\Leftrightarrow \left\{ \mathbf{u}^i(t^i) \in \mathbf{U}^i(t^i), \quad \forall t^i \in [t_0^i, t_k^i], \quad i = 1, \dots, N \right\}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

С учетом разбиения траектории межпланетного перелета на участки критерий качества управления динамической системой и ограничения могут быть записаны в следующем виде:

$$J_j[\mathbf{u}(\cdot), \mathbf{p}] = \sum_{i=1}^{N_j} \int_{t_0^i}^{t_k^i} \Phi_j^i(\mathbf{x}^i, \mathbf{u}^i, \mathbf{p}^i, \mathbf{q}, t^i) dt^i + F_j[\mathbf{x}^{N_j}(t_k^{N_j}), \mathbf{p}^{N_j}, \mathbf{q}, t_k^{N_j}] \quad j = 0, \dots, m; \quad (1.30)$$

где:

Φ_j^i и F_j – гладкие скалярные функции; $N_j \leq N$ – номер участка полета, на конце которого вычисляется терминальная часть j -го функционала.

Таким образом, в рамках этапа межпланетного полета может быть сформулирована следующая обобщенная оптимизационная задача с учетом разбиения траектории перелета на ряд участков:

Определить такие $\mathbf{u}(\cdot) \in \mathbf{U}$ и $\mathbf{p} \in \mathbf{P}$ (используются обозначения (1.29)), которые при условии выполнения соотношений (1.24)÷(1.28) обеспечат минимум совокупного функционала J_{Σ} , который в общем виде будет выглядеть как (1.31), то есть:

$$J_{\Sigma}[\mathbf{u}(\cdot), \mathbf{p}] \rightarrow \min_{\substack{\mathbf{u}(\cdot) \in \mathbf{U} \\ \mathbf{p} \in \mathbf{P}}} \quad (1.31)$$

а также выполнение условий:

$$\begin{aligned} J_j[\mathbf{u}(\cdot), \mathbf{p}] &= 0, \quad j = 1, \dots, m_1; \\ J_j[\mathbf{u}(\cdot), \mathbf{p}] &\leq 0, \quad j = m_1 + 1, \dots, m, \quad m_1 \leq m; \end{aligned} \quad (1.32)$$

где J_j – функционалы вида (1.30), учитывающие разделение траектории на участки.

Таким образом, задача оптимизации межпланетных перелетов КА с «ротормым» солнечным парусом ставится как задача оптимизации составной динамической системы. Основным отличием ее от известных постановок является наличие варьируемых параметров $\mathbf{p} \in \mathbf{P}$ перехода от одного участка траектории к другому.

2. МЕТОДИКА ОПТИМИЗАЦИИ ТРАЕКТОРИЙ КА С СОЛНЕЧНЫМ ПАРУСОМ

Рассматриваемая методика оптимизации сложных межпланетных траекторий аппаратов с солнечным парусом, допускает при их моделировании разбиение на ограниченный ряд стыкуемых между собой участков. Задача оптимизации траектории КА с солнечным парусом ставится как задача оптимизации составной динамической системы [1].

Сформулированная выше задача условной оптимизации составной динамической системы включает, кроме критерия оптимальности (1.31), ряд функциональных ограничений (1.32), для учета которых используется приближенный численный метод оптимизации – «Метод последовательной линеаризации», разработанный Р.П. Федоренко [2].

Суть метода заключается в сведении задачи условной оптимизации управления к итерационно решаемой задаче линейного программирования путем последовательной линеаризации всех функционалов (критерия и ограничений) по кусочно-постоянным аппроксимациям управления в окрестности итерационно улучшаемых траектории и управления.

В рассматриваемом случае идея метода последовательной линеаризации остается неизменной, однако в связи с его применением к оптимизации составных динамических систем потребовалось развитие методики вычисления производных Фреше, а также применение приема регуляризации для вырожденных случаев задачи линейного программирования [1]. Алгоритм метода последовательной линеаризации можно представить в следующем виде:

Пусть имеются некоторые допустимые значения варьируемых параметров \mathbf{P} и реализаций управлений $\mathbf{u}(\cdot)$. И пусть им соответствует некоторая траектория $\mathbf{x}(\cdot)$ и значения функционалов $\{J_j\}$.

При малых вариациях $\delta\mathbf{p}$ и $\delta\mathbf{u}(\cdot)$ изменения функционалов могут быть представлены в линейном приближении [2]:

$$\delta J_j = \mathbf{\Pi}_j \delta \mathbf{p} + \sum_{i=1}^{N_j} \int_{t_0^i}^{t_k^i} \boldsymbol{\omega}_j^i(s) \delta \mathbf{u}^i(s) ds, \quad j = \overline{1, \dots, m}; \quad (2.33)$$

где:

$\mathbf{\Pi}_j$ – матрицы, составленные из производных функционалов по управляемым параметрам \mathbf{P} ;

$\boldsymbol{\omega}_j^i(\cdot)$ – функции (производные Фреше), вычисляемые на основе итерационно улучшаемой реализации траектории $\mathbf{x}(\cdot)$, соответствующей управлению $\mathbf{u}(\cdot)$.

Производится конечномерная аппроксимация задачи путем замены кусочно-непрерывного управления $\mathbf{u}(\cdot)$ на близкую к нему кусочно-постоянную функцию. Для этого:

- каждый из участков траектории движения составной ДС – $[t_0^i, t_k^i]$ разбивается на достаточно большое число $K_i - 1$ подинтервалов с крайними точками:

$$t_0^i = t_1^i < t_2^i < \dots < t_{K_i}^i = t_k^i;$$

- на каждом g -м подинтервале непрерывное управление считается постоянным и

$$\text{равным значению } \mathbf{u}_g^i \text{ (например } \mathbf{u}_g^i = \mathbf{u}^i \left[\frac{(t_g^i + t_{g+1}^i)}{2} \right]);$$

Численно моделируется управляемое движение системы (1 .24)÷(1 .28) для некоторых

$\mathbf{p} \in \mathbf{P}$, $\mathbf{u}(\cdot) \in \mathbf{U}$ и рассчитываются значения функционалов: $\left\{ J_{\Sigma}^i \right\}$ (1 .31) и $\left\{ J_j \right\}$ (1 .32).

В процессе моделирования производные Фреше – $\omega_j^i(\cdot)$ вычисляются и запоминаются в

виде таблицы: $\left\{ \omega_{jg}^i = \int_{t_g^i}^{t_{g+1}^i} \omega_j^i(s) ds \right\}$;

Рассчитываются производные Π_j и $\omega_j^i(\cdot)$ для каждого из функционалов.

Формируется малая окрестность $\{\delta\mathbf{P}, \delta\mathbf{U}_g^i\}$ параметров и управлений $\{\mathbf{p}, \mathbf{u}_g^i\}$ такие, чтобы вариации управления, принадлежащие этой окрестности, были, во-первых, малы настолько, чтобы линейные модели вариаций функционалов достаточно точно описывали их реальные приращения, во-вторых, достаточно велики, чтобы процесс оптимизации сходился как можно быстрее, в-третьих, не нарушались ограничения $\mathbf{p} \in \mathbf{P}$, $\mathbf{u}(\cdot) \in \mathbf{U}$;

Формируется конечномерная задача линейного программирования, аппроксимирующая исходную задачу в окрестности $\{\delta\mathbf{P}, \delta\mathbf{U}_g^i\}$:

$$\begin{aligned} & \min_{\{\delta\mathbf{p}, \delta\mathbf{u}_g^i\}} \left(\Pi_0 \delta\mathbf{p} + \sum_{i=1}^N \sum_{g=1}^{K_i-1} \omega_{0g}^i \delta\mathbf{u}_g^i \right); \\ & J_j + \Pi_j \delta\mathbf{p} + \sum_{i=1}^N \sum_{g=1}^{K_i-1} \omega_{jg}^i \delta\mathbf{u}_g^i = 0 (\leq 0), \quad j = 1, \dots, m; \\ & \delta\mathbf{p} \in \delta\mathbf{P}, \quad \delta\mathbf{u}_g^i \in \delta\mathbf{U}_g^i, \quad g = 1, \dots, K_i - 1, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Решается задача линейного программирования (2 .34) (например, одним из симплекс-методов), а затем находится новое улучшенное приближение параметров и управления в виде $\{\mathbf{p} + \delta\mathbf{p}, \mathbf{u}_g^i + \delta\mathbf{u}_g^i\}$.

Переход к новой итерации происходит после проверки условия окончания процесса оптимизации, например, после сравнения полученного и предыдущего значений совокупного критериального функционала (1 .31)

$$\left| J_{\Sigma}^{l+1} - J_{\Sigma}^l \right| \leq \varepsilon_J \quad (2.35)$$

Где l – номер итерации.

Специфика решения обобщенной задачи оптимизации составной динамической системы

Как было сказано выше, задача оптимизации траектории перелета КА с солнечным парусом решается как задача условной оптимизации составной динамической системы. Ее решение основано на «Методом последовательной линеаризации Федоренко».

В общем случае оптимизации подлежат следующие факторы:

- порядок прохождения и количество планет, используемых для проведения гравиманевров;
- дата старта (выход из сферы действия Земли);
- вектор скорости КА при выведении из сферы действия Земли;
- функция направления тяги на участках перелета между планетами проведения гравиманевров;
- параметры гравиманевров.

Задача определения порядка прохождения и количества планет, используемых для проведения гравиманевров, может быть решена путем перебора и сравнения различных вариантов в смысле целевого критерия, оценивающего эффективность экспедиции. Перебор всех возможных вариантов требует огромных вычислительных затрат. Однако, часто исходя из целей экспедиции, требований к ней (например, по окнам старта) и здравого смысла оказывается возможным отбросить большинство малоперспективных вариантов.

Каждый участок траектории моделируется как участок составной динамической системы. Рассмотрим условия начала и окончания участков. Обозначим независимую переменную на i -ом участке – φ^i , $i = 1 \dots N$; где N – количество участков, функцию направления тяги – $\mathbf{e}(\varphi^i)$, независимую переменную в момент старта – φ^0 , вектор варьируемых параметров на участке – \mathbf{p}^i и вектор варьируемых параметров начала перелета – \mathbf{p}^0 .

В состав варьируемых параметров, определяющих фазовый вектор в момент старта, входят:

- дата старта;
- вектор скорости КА при выведении из сферы действия Земли.

В соответствии с методом точечных сфер действия считается, что выведение КА на межпланетную траекторию производится мгновенно. В момент старта радиус-вектор Земли равен:

$$\mathbf{r}_e = \mathbf{r}(\varphi^0) \quad (2.36)$$

Отметим, что φ^0 по существу является отклонением даты старта от эпохи, на момент которой фиксируется гелиоцентрическая инерциальная система координат, используемая для моделирования движения на межпланетных участках.

Для определения начальной гелиоцентрической скорости КА воспользуемся вспомогательной системой координат, ось X' которой совпадает по направлению с радиус-вектором \mathbf{r}_e Земли на момент старта; ось Z' сонаправлена вектору $\mathbf{r}_e \times \mathbf{W}_e$ (перпендикулярна плоскости орбиты Земли, \mathbf{W}_e – вектор скорости Земли на момент старта); ось Y' дополняет систему до правой. Тогда начальную гелиоцентрическую скорость КА определим по формуле:

$$\mathbf{V}(0) = \mathbf{W}_e + V'_x \mathbf{x}' + V'_y \mathbf{y}' + V'_z \mathbf{z}'; \quad (2.37)$$

Где, $\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}'$ – единичные орты вспомогательной системы $X'Y'Z'$, записанные в основной системе координат XYZ

Масса КА при вылете из сферы действия Земли определяется, с одной стороны, модулем $V' = \sqrt{V_x'^2 + V_y'^2 + V_z'^2}$, с другой стороны, типом разгонных средств и схемой выведения.

Таким образом, вектор варьируемых параметров начала перелета (1.28) будет иметь вид:

$$\mathbf{p}^0 = (\varphi^0, V'_x, V'_y, V'_z)^T \quad (2.38)$$

Т. к. солнечный парус может создавать тягу на протяжении всего перелета, то не существует деления участков на активные и пассивные (все участки считаются активными). Переход от одного участка составной динамической системы к другому происходит в момент проведения гравитационного маневра.

Пусть известна независимая переменная φ^{i*} начала или окончания i -го участка движения, которая в дальнейшем подлежит оптимизации. Она является параметром \mathbf{p}^i в условии окончания i -го участка. Условие окончания i -го участка (1.25) примет вид:

$$\varphi - \varphi^{i*} = 0 \quad (2.39)$$

Важно отметить, что варьируемый параметр φ^{i*} по существу является моментом (датой) проведения гравиманевра, который определяется в процессе оптимизации.

В начале или конце участка уравнения движения и независимая переменная не меняются. Изменяется только вектор скорости КА, новое значение которого находится исходя из методики моделирования гравиманевров.

Для проведения гравиманевра необходимо обеспечить попадание в сферу действия планеты. Для этого на окончание участка накладывается следующее ограничение типа неравенств:

$$|\mathbf{r}_h| - R_{pl}^g \leq 0 \quad (2.40)$$

где,

$\mathbf{r}_h = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{pl}$ – планетоцентрический радиус-вектор КА в момент проведения гравиманевра; \mathbf{r} – гелиоцентрический радиус-вектор КА в момент проведения гравиманевра; \mathbf{r}_{pl} – радиус-вектор планеты в момент проведения гравиманевра; R_{pl}^g – радиус сферы действия планеты.

Вектор скорости КА после гравиманевра зависит от угла между плоскостью гравиманевра и плоскостью эклиптики Ω и радиусом перицентра гиперболической траектории облета планеты r_π , следовательно, их необходимо включить в число варьируемых параметров:

$$\mathbf{p}^i = (r_\pi, \Omega, \varphi^{i*})^T \quad (2.41)$$

Таким образом, в данном разделе были получены все необходимые соотношения для моделирования траектории КА с «роторным» солнечным парусом, а также описан подход к оптимизации траектории КАСП как к задаче оптимизации составной динамической системы.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена методика моделирования и оптимизации межпланетных перелетов, включающих участки проведения гравиманевров, аппаратов с «роторным» солнечным парусом, которая позволяет:

- решать задачи оптимизации межпланетных перелетов с «роторным» солнечным парусом;
- решать задачи оптимизации траекторий с наличием множественных гравиманевров, количество которых не ограничено;
- учитывать произвольное количество ограничений (типа равенств и неравенств), накладываемых на любые участки перелета;
- проводить «сквозную» оптимизацию всей миссий в целом;
- проводить оптимизацию моментов (дат) проведения гравитационных маневров;

Ядром методики является метод последовательной линеаризации, с помощью которой исходная задача сводится на каждой итерации к задаче линейного программирования, имеющая в отличие от нелинейных численных методов оптимизации гарантированную сходимость.

Рассмотрена специфика управления парусом «роторного» типа, особенности моделирования, и предложен подход, позволяющий уменьшить размерность вектора управления «роторного» солнечного паруса.

Для решения задач оптимизации миссий космических аппаратов с солнечным парусом разработано программно-алгоритмическое обеспечение, представляющее собой объектно-ориентированную библиотеку на языке C++. Гибкая архитектура библиотеки позволяет легко адаптировать ее для решения широкого класса задач оптимизации космических перелетов аппаратов с различными конструкциями солнечных парусов и КА, оснащенных ЭРДУ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рыжов Ю.А., Малышев В.В., Усачов В.Е. и др. Российско-американский космический комплекс «Пламя» для первых прямых исследований ближайшего околосолнечного пространства и Солнца. // Вестник МАИ. 1996. Т.3. № 2 с. 3–23.
2. Величенко В.В. Оптимальное управление составными системами. – ДАН СССР, 1967, 176, № 4, с. 754-756.
3. Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета. Проблемы оптимизации. Наука, М., 1975. – 704 с.
4. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. –М.: Наука, 1975. – 528 с.
5. Бэттин Р. Наведение в космосе. М.: Машиностроение, 1966. - 447с.
6. Ильин В.А., Кузмак Г.Е. Оптимальные перелеты космических аппаратов. -М.: Наука, 1976. -744 с.

7. *Усачов В.Е., Тычинский Ю.Д.* Оптимизация составных динамических систем. Полет солнечного зонда с электрореактивными двигателями и гравитационными маневрами у планет. Деп. в ВИНТИ № 1967-В99, 17.06.1999 г.- 62 с.
8. *Рыжов Ю.А., Малышев В.В., Усачов В.Е., Тычинский Ю.Д.* и др. Анализ и синтез космического комплекса на базе РН «Союз-2» для научно-исследовательского полета в корону Солнца // Вестник МАИ, 1998, т.5, № 2. с. 3-14.
9. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М., Наука, 1978.- 488 с.
10. *Сихарулидзе Ю.Г.* Баллистика летательных аппаратов. Наука, М., 1982.- 351 с.
11. *Тихонравова М. К.* Основы теории полета космических аппаратов. Под ред. Нариманова Г. С.,–М.: Машиностроение, 1976. – 608 с.

Сведения об авторе

*Казмерчук Павел Владимирович, аспирант кафедры системного анализа и управления Московского авиационного института (государственного технического университета)
e-mail: moskus@mail.ru*

