

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

На правах рукописи



Киселёв Владимир Павлович

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛОВОГО СОСТОЯНИЯ
АДДИТИВНО ИЗГОТАВЛИВАЕМЫХ СТРУКТУР С
НАПРАВЛЕННЫМИ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ**

СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 1.3.14.

Теплофизика и теоретическая теплотехника

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
кандидат технических наук, доцент
Ежов Алексей Дмитриевич

Москва - 2026

Оглавление

Глава 1. Современное состояние теплового проектирования аддитивно изготовленных биметаллических структур	23
1.1. Металлическое аддитивное производство и инженерная мотивация применения биметаллических структур	23
1.2. Аддитивные технологии для биметаллов	24
1.2.1. Селективное лазерное сплавление	24
1.2.2. Прямой подвод энергии и материала, электродуговая наплавка проволокой	27
1.2.3. Альтернативные пути аддитивного создания биметаллов	30
1.2.4. Многоматериальные способы дозирования: SPD, ФГМ, селективная экструзия	34
1.2.5. Остаточные напряжения, усадка, термоциклирование и контроль зоны контакта	39
1.2.6. Стандарты и управление качеством	43
1.3. Источники анизотропии в аддитивных металлах	47
1.3.1. Кристаллографическая текстура, столбчатые зёрна, направленное затвердевание	48
1.3.2. Пористость, непровары, оксиды: влияние на теплопроводность и контактное тепловое сопротивление	50
1.3.3. Режимы печати и термообработка: влияние на величину и тензор теплопроводности	53
1.4. Металлы и сплавы для направленной теплопроводности	57
1.4.1. Подход к выбору пар материалов	57
1.4.2. Смачиваемость и свариваемость	58
1.4.3. Взаимная растворимость и фазовый состав	59
1.4.4. Образование хрупких интерметаллидов	61
1.4.5. Коррозионная совместимость	62
1.4.6. Обобщение критериев физико-химической совместимости	63

1.4.7. Температуры солидуса и рабочие температурные диапазоны конструкционных и теплопроводящих материалов	65
1.4.8. Термопрочность материалов: кратковременная прочность, температурная текучесть и поведение при ползучести	68
1.4.9. Термическое расширение и остаточные напряжения	71
1.4.10. Вывод о практической совместимости пар металлов «конструкционная матрица – теплопроводящий наполнитель»	74
1.5. Переходные зоны и дефекты в биметаллических структурах.....	75
1.5.1. Геометрическая граница, физическая переходная зона и расчётная интерфейсная фаза	75
1.5.2. Переходная зона как измеряемая область конечной толщины	76
1.5.3. Дефекты и неоднородность микроструктуры на границе металлов.....	77
1.5.4. Интерфейс в аддитивно изготовленных биметаллах: от смешения ванн расплава к управляемому переходу	77
1.6. Теплофизические свойства, определяющие тепловое поведение аддитивно изготовленных биметаллических композитов	79
1.6.1. Базовые свойства и их роль в тепловом поведении	79
1.6.2. Теплопроводность и температуропроводность	79
1.6.3. Теплоёмкость и коэффициент линейного теплового расширения	80
1.6.4. Межфазное тепловое сопротивление и тепловой контакт	81
1.7. Пространственные анизотропные структуры биметаллических композитов для управления тепловыми потоками	82
1.7.1. Слоистые структуры и направленная теплопроводность	82
1.7.2. Структуры с направленным наполнителем	83
1.7.3. Пространственные и перколяционные сети (непрерывная теплопроводящая фаза).....	83
1.7.4. Решётчатые структуры	84
1.7.5. Роль геометрии и интерфейса в формировании эффективного тензора теплопроводности и связь с аддитивной реализуемостью	85

1.8. Подходы к моделированию биметаллического композита и интерфейса ...	85
1.8.1. Модели с резкой границей свойств	85
1.8.2. Модели с контактным тепловым сопротивлением.....	86
1.8.3. Модели с эффективной переходной зоной.....	87
1.8.4. Модели с непрерывным градиентом свойств.....	88
1.8.5. Модели с явной интерфейсной фазой как самостоятельным расчётным компонентом.....	89
1.8.6. Сопоставление моделей границы между материалами.....	90
Заключение к Главе 1	91
 Глава 2. Математическая модель и постановка задачи рационального расположение теплопроводящего наполнителя.....	 94
2.1. Расчётная область, разбиение границы и физический смысл задачи.....	96
2.2. Теплопроводность материала	97
2.3. Прямая задача теплопроводности	98
2.3.1. Закон Фурье и уравнение стационарной теплопроводности.....	98
2.3.2. Граничные условия и знаки потоков.....	99
2.3.3. Линейный и общий нелинейный случай	99
2.4. Слабая постановка и конечно-элементная дискретизация	100
2.4.1. Функциональные пространства и слабая форма.....	100
2.4.2. Конечно-элементная аппроксимация и матричная запись	101
2.4.3. Нелинейная стационарная теплопроводность и итерационное решение	102
2.5. Параметризация материала и проектная переменная.....	103
2.5.1. Проектная переменная и ограничения	103
2.5.2. Фильтр Гельмгольца	103
2.5.3. Проекция Хевисайда для получения бинарных решений.....	103
2.5.4. Двухфазная интерполяция свойств	104
2.5.5. Трёхфазная параметризация	105

2.6. Целевой функционал и ограничения задачи рационального расположения теплопроводящего наполнителя	106
2.6.1. Температурные критерии и тепловое сопротивление	106
2.6.2. Ограничение по объёму материала	107
2.6.3. Полная постановка задачи рационального расположения теплопроводящего наполнителя	107
2.7. Метод объединения локальных ограничений с помощью функции агрегации Кееса–Смита	108
2.7.1. Функция агрегации Кееса–Смита для аппроксимации максимума	108
2.7.2. Сопряжённый метод	109
2.7.3. Частный линейный случай (для сопоставления)	109
2.7.4. Учёт цепочки $\rho \rightarrow \rho \rightarrow \rho \rightarrow$ свойства	110
2.8. Термоупругое расширение модели	110
2.8.1. Уравнения линейной термоупругости	110
2.8.2. Связь задач: последовательная и связанная постановки	111
2.8.3. Термоупругое расширение задачи рационального расположения теплопроводящего наполнителя и ограничения по напряжениям	112
2.8.4. Сопряжённые чувствительности в термоупругой задаче	113
Заключение к Главе 2	114
Глава 3. Программная реализация численного моделирования	118
3.1. Общая архитектура программного комплекса	120
3.1.1. Назначение модульной архитектуры	120
3.1.2. Исполняемые фасады верхнего уровня	122
3.1.3. Функциональные подсистемы	123
3.1.4. Стадия как преобразование артефактов	125
3.1.5. Классификация операций	125
3.2. Управление расчётным сценарием, контрактами и артефактами	126
3.2.1. Система управления стадиями расчёта	126

3.2.2. Конфигурация задачи и конфигурация времени выполнения.....	127
3.2.3. Унификация путей и обмен данными	128
3.2.4. Полный набор параметров расчётного сценария.....	128
3.3. Подготовка сетки, граничной разметки и свойств материалов.....	129
3.3.1. Подсистема построения и проверки сетки	129
3.3.2. Сеточные массивы и поверхностные группы	130
3.3.3. Проектируемая область и маски элементов	131
3.3.4. Геометрические проверки тетраэдров	131
3.3.5. Подсистема материалов.....	131
3.4. Конечно-элементная реализация прямой тепловой задачи	133
3.4.1. Назначение теплового решателя.....	133
3.4.2. Поэлементная сборка матрицы теплопроводности	134
3.4.3. Правая часть и граничные вклады.....	134
3.4.4. Наложение условий Дирихле и решение системы	135
3.4.5. Невязки, восстановление полей и тепловой баланс	135
3.5. Подсистема рационального расположения теплопроводящего наполнителя	137
3.5.1. Назначение подсистемы рационального расположения теплопроводящего наполнителя	137
3.5.2. Единичная итерация подсистемы.....	138
3.5.3. Фильтрация и проекция проектного поля	138
3.5.4. Интерполяция свойств материала	139
3.5.5. Целевые функционалы и ограничения.....	140
3.5.6. Сопряжённые чувствительности	140
3.5.7. Обновление проектной переменной.....	141
3.5.8. Многостартовый режим	141
3.6. Постобработка и повторная тепловая проверка	143
3.6.1. Назначение постобработки	143
3.6.2. Бинаризация и анализ связности	144

3.6.3. Граф тепловых путей и тепловая оценка рёбер	144
3.6.4. Построение неявного поля наполнителя	145
3.6.5. Интерфейсная фаза.....	145
3.6.6. Геометризация наполнителя	146
3.6.7. Наложение материала на фоновую сетку	147
3.6.8. Повторная тепловая проверка.....	148
3.7. Термопрочностная и производственная верификация.....	149
3.7.1. Назначение термопрочностной подсистемы.....	149
3.7.2. Термопрочностная проверка.....	149
3.7.3. Производственная верификация.....	150
3.8. Подсистема отчётности и визуализации.....	152
3.8.1. Назначение отчётной подсистемы	152
3.8.2. Сводные метрики и история рационального расположения теплопроводящего наполнителя	153
3.9. Границы строгого расчёта.....	153
3.9.1. Строгое расчётное ядро	153
3.9.2. Нестрогие методы	153
3.9.3. Диагностические блоки	154
Заключение к Главе 3.....	156
Глава 4. Численная и экспериментальная верификация	158
4.1. Назначение главы и общая программа подтверждения модели	158
4.2. Критерии сопоставления и правила интерпретации результатов	159
4.3. Аналитическая верификация	162
4.3.1. Линейная изотропная теплопроводность и объёмный источник.....	162
4.3.2. Граничные условия Неймана и Робина.....	163
4.3.3. Кусочно-однородный интерфейс, анизотропия и нелинейность	164
4.3.4. Верификация термоупругой подсистемы.....	165
4.4. Интеграционная проверка последовательности вычислений.....	166

4.4.1. Демонстрационный расчёт конструктивно подобного лопаточного элемента.....	166
4.4.2. Стадии расчёта и контролируемые результаты	167
4.5. Метод измерения и экспериментальная установка	170
4.5.1. Описание экспериментальной установки.....	171
4.5.2. Методика проведения эксперимента	174
4.5.3. Калибровка экспериментальной установки	175
4.6. Испытания аддитивно изготовленных образцов	180
4.6.1. Образцы CL 20ES с различной ориентацией слоёв.....	180
4.6.2. Образцы Co-Cr-Mo и ЭИ698	181
4.7. Модельный биметаллический образец ПОС-61 + Cu	183
4.8. Сводная оценка экспериментально выявленной анизотропии.....	185
Заключение к Главе 4.....	188
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	190
Список литературы	193

Введение

Актуальность темы исследования

Современные теплонагруженные элементы авиационной и ракетно-космической техники, энергетических установок, машин и приборов работают в условиях, где требуется одновременно обеспечить механическую работоспособность, устойчивость к температурному воздействию и заданную организацию теплового потока. В таких изделиях важны не только допустимые температуры и напряжения, но и направление переноса тепла, локальный отвод тепловой мощности, снижение температурных максимумов в критических зонах и сохранение работоспособности при изменении режима нагрева.

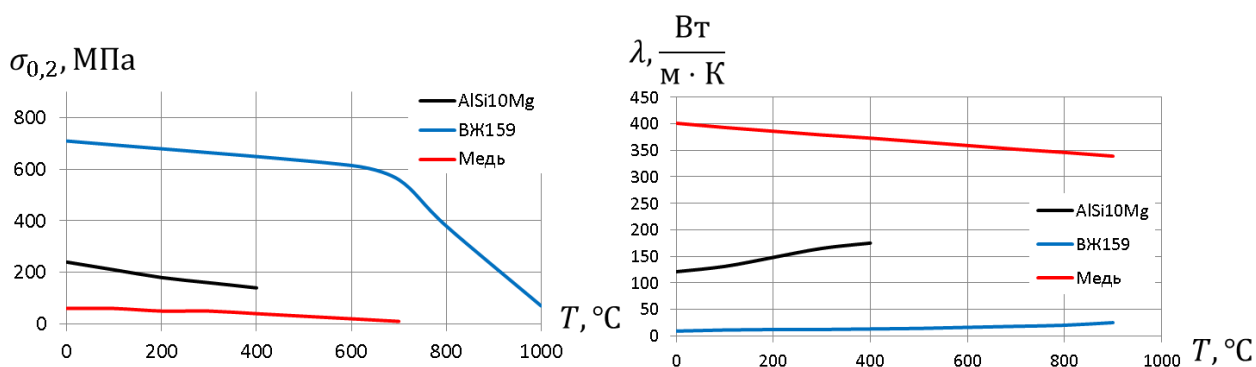


Рис. В.1.1. Противоречие между жаропрочностью (пределом ползучести) и теплопроводностью на примере сплавов AlSi10Mg, ВЖ159 и чистой меди.

Однородный материал в подобных условиях часто приводит к компромиссу между теплопроводностью, жаропрочностью, коррозионной стойкостью, коэффициентом теплового расширения и технологичностью. Высокотеплопроводные металлы и сплавы, как правило, не обладают тем же уровнем жаропрочности и эксплуатационной стойкости, который требуется от несущих элементов, тогда как жаропрочные и коррозионно-стойкие сплавы нередко имеют ограниченную теплопроводность. Поэтому возрастает интерес к биметаллическим и функционально-градиентным структурам, в которых один материал выполняет преимущественно несущую функцию, а другой формирует направленные пути теплопереноса.

Металлические аддитивные технологии расширяют возможности теплового проектирования таких структур: они позволяют формировать пространственно-заданное распределение материалов, переходные области между ними, локальные теплопроводящие включения и внутренние каналы сложной формы. Однако аддитивное изготовление одновременно усложняет расчётную постановку. В сформированной детали возникают направленная микроструктура, кристаллографическая текстура, межслойные границы, неоднородность по высоте построения, пористость, дефекты сплавления и межматериальная переходная зона. В результате коэффициент теплопроводности может зависеть от направления теплового потока, параметров технологического процесса и характера сопряжения материалов.

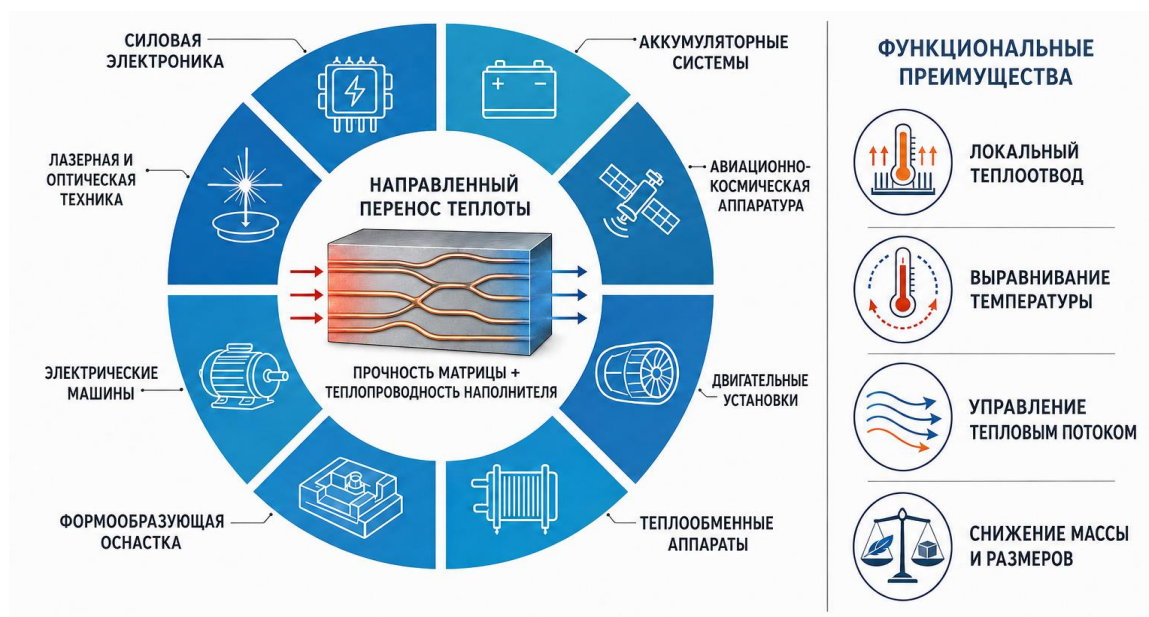


Рис. В.1.2. Области применения биметаллических композитов.

Особое значение имеет межматериальный переход. В инженерных расчётах биметалл часто представляют как две однородные области с идеальным тепловым контактом. Реальная переходная область, напротив, может иметь конечную толщину, отличные от исходных материалов теплофизические свойства, локальную пористость, фазовые включения, остаточные напряжения и технологически обусловленную неоднородность.

Игнорирование этих особенностей способно приводить к недостоверной оценке температурного поля, теплового сопротивления и последующего термомеханического состояния конструкции.

Для проектирования биметаллических структур с направленной теплопроводностью необходимо использование вычислительной методики рационального расположения теплопроводящего наполнителя.

Она позволяет не только проверять заранее заданные конструкции, но и синтезировать распределение материала в расчётной области по выбранному тепловому критерию. В случае биметаллических структур это означает возможность управлять формой и связностью теплопроводящего наполнителя, долей материалов, положением переходной области и направлением эффективного теплопереноса.

Актуальность диссертационной работы определяется необходимостью разработки расчётного подхода, позволяющего описывать, оптимизировать и проверять тепловое поведение аддитивно изготавливаемых биметаллических структур с учётом анизотропии теплофизических свойств, эффективного межматериального и технологических ограничений.

Степень разработанности темы исследования

Вопросы теплопроводности неоднородных и композиционных материалов достаточно широко представлены в научной литературе. Разработаны постановки для стационарной и нестационарной теплопроводности, модели идеального и неидеального теплового контакта, представления контактного термического сопротивления, подходы к эффективным свойствам композитов и функционально-градиентных материалов. Эти работы формируют теоретическую основу для описания межматериального перехода и теплового сопротивления на границе фаз.

Отдельное направление составляют исследования металлического аддитивного производства. В них рассматриваются селективное лазерное сплавление, процессы прямого подвода энергии и материала, проволоочная и порошковая наплавка, электронно-лучевые и гибридные процессы. Показано,

что в аддитивно изготовленных металлах возникают направленная микроструктура, текстура, неоднородность, пористость и дефекты сплавления. Эти факторы влияют не только на механические, но и на теплофизические свойства материала.

Исследования аддитивно изготовленных биметаллических и многоматериальных структур показывают, что качество межматериального сопряжения зависит от сочетания материалов, параметров источника энергии, последовательности построения, наличия промежуточных слоёв и термической истории. Для ряда сочетаний материалов характерны ограниченная взаимная растворимость, образование интерметаллидных фаз, локальные трещины, пористость и изменение твёрдости в зоне перехода. Следовательно, интерфейс в биметаллической структуре является не только технологическим, но и теплофизическим объектом.

Методы рационального выбора геометрии теплопроводящих конструкций, в свою очередь, развиты преимущественно для однородных или условно двухфазных расчётных областей. Используются плотностные постановки, интерполяция свойств, фильтрация проектной переменной, сглаженная проекция, агрегирование температурных критериев и сопряжённый анализ чувствительности. При переходе к аддитивно изготовленным биметаллическим структурам с выраженной переходной зоной эти методы требуют согласования с моделями анизотропной теплопроводности, межматериального перехода и последующей материализации результата.

Недостаточно разработанным остаётся вопрос о едином расчётном контуре, связывающем теплопроводность анизотропного неоднородного материала, модель межматериального перехода, рациональное расположение теплопроводящего наполнителя, построение материализованной биметаллической геометрии и повторную проверку теплового и термомеханического поведения.

Цель работы

Целью диссертационной работы является разработка научно-методического и инструментального обеспечения для многопараметрического моделирования, анализа и рационального выбора геометрии биметаллических структур с направленной теплопроводностью аддитивно изготавливаемых теплонагруженных элементов

Основные задачи диссертационной работы

Для достижения поставленной цели сформулированы следующие **задачи**:

1. Выполнить анализ научных публикаций по аддитивному изготовлению металлических биметаллов, анизотропии теплофизических свойств, межматериальным переходным зонам, контактному тепловому сопротивлению и моделям теплопереноса в неоднородных средах;
2. Систематизировать основные физические и технологические факторы, влияющие на теплоперенос в аддитивно изготовленных биметаллических структурах: текстура, пористость, направленность микроструктуры, межслойные границы, состав переходной зоны и качество сплавления материалов;
3. Сформулировать физико-математическую постановку стационарной теплопроводности для биметаллической структуры в изотропной и анизотропной формах с учётом граничных условий Дирихле, Неймана и Робина;
4. Разработать подход параметризации материала для задачи рационального выбора геометрии теплопроводов, позволяющий описывать распределение несущей матрицы, теплопроводящего наполнителя и эффективной межматериальной области;
5. Сформулировать целевые функционалы и ограничения рационального выбора геометрии теплопроводящего наполнителя, включая

температурные критерии, интегральный теплоотвод, эффективное тепловое сопротивление и ограничения на объём материала;

6. Реализовать конечно-элементную дискретизацию тепловой задачи, построение векторного поля плотности теплового потока, регуляризацию поля распределения теплопроводящего наполнителя, интерполяцию теплофизических свойств и вычисление чувствительностей целевых функционалов;

7. Разработать программный комплекс, связывающий прямой тепловой расчёт, рациональное проектирование теплопроводящего наполнителя, постобработку геометрии, повторный тепловой расчёт, термopрочностную и технологическую проверку, а также формирование отчётных данных;

8. Провести аналитическую и численную верификацию вычислительной модели на канонических задачах теплопроводности, анизотропии, межматериального интерфейса, нелинейной теплопроводности и термоупругости;

9. Провести экспериментальные измерения направленной теплопроводности аддитивно изготовленных образцов и модельного биметаллического композита;

10. Определить область применимости разработанной модели и программного комплекса для проектирования теплонагруженных биметаллических структур, а также сформулировать ограничения, требующие последующей численной или экспериментальной валидации.

Объект исследований

Объектом исследования являются теплонагруженные биметаллические структуры, ориентированные на изготовление методами металлического аддитивного производства и предназначенные для управления стационарным теплопереносом.

Предмет исследований

Предметом исследования являются физико-математические модели, численные методы и программные средства рационального теплового проектирования биметаллических структур с учётом анизотропии теплопроводности, эффективного межматериального перехода, распределения теплопроводящего наполнителя и последующей проверки материализованной биметаллической конфигурации.

Методология исследования

Методология включает теорию теплопроводности, тензорный закон Фурье, вариационные постановки, МКЭ, численную и экспериментальную верификацию. Для теплового расчёта решаются стационарные задачи для изотропных и анизотропных сред с источниками тепла и граничными условиями (температура, поток, конвекция); используется конечно-элементная аппроксимация на тетраэдральной сеточной модели, анализ тепловых потоков, тепловой баланс и эффективное термическое сопротивление. Рациональное проектирование теплопроводящего наполнителя включает параметризацию материала, фильтрацию, проекцию, интерполяцию свойств, температурные функционалы и ограничения по объёму; постобработка обеспечивает переход к биметаллической конструкции через бинаризацию и назначение материалов. Верификация проводится аналитически, сравнением с Ansys, повторным расчётом, термоупругой проверкой и экспериментами на аддитивно изготовленных образцах.

Научная новизна

Научная новизна диссертационной работы заключается в следующих результатах:

1. Сформулирована согласованная постановка задачи рационального теплового проектирования биметаллических структур, в которой краевая задача стационарной теплопроводности отделена от феноменологической

параметризации материала, постобработки поля распределения теплопроводящего наполнителя и процедур проверки результата;

2. Разработано расчётное представление биметаллической структуры через несущую матрицу, теплопроводящий наполнитель и эффективную межматериальную область, что позволяет учитывать переходную зону как элемент тепловой модели, а не только как геометрическую границу двух материалов;

3. Разработана вычислительная схема перехода от непрерывного поля теплопроводящего наполнителя к биметаллической конфигурации, включающая фильтрацию, проекцию, бинаризацию, построение неявного поля наполнителя, назначение материалов на конечно-элементную сетку и повторный тепловой расчёт;

4. Разработана модульная архитектура программного комплекса, в которой прямой тепловой расчёт, рациональный выбор геометрии теплопроводящего наполнителя, постобработка, геометризация, материализация, повторная проверка и термopрочностная диагностика разделены по функциональному назначению и проверяемым выходным данным;

5. Верифицирована вычислительная модель, последовательно проверяющая линейную и нелинейную теплопроводность, граничные условия Дирихле, Неймана и Робина, кусочно-однородные домены, идеальный интерфейс, тензорную анизотропию и многоматериальный термоупругий отклик.

Теоретическая значимость работы

Теоретическая значимость работы состоит в развитии расчётного подхода к тепловому проектированию биметаллических структур, в котором рациональный выбор геометрии теплопроводящего наполнителя рассматривается как часть полной физико-математической схемы: от закона Фурье и слабой формы теплопроводности до интерпретации межматериального перехода и проверки полученной геометрии.

Существенным элементом подхода является разграничение уровней описания биметалла: двухматериального приближения, эффективных свойств и расчётной интерфейсной области. Такое разграничение позволяет выбирать модель в зависимости от требуемой точности и масштаба задачи: идеальный контакт, контактное тепловое сопротивление, тонкий межфазный слой или явная область с эффективными свойствами.

Практическая значимость работы

Практическая значимость работы заключается в создании вычислительной основы для проектирования теплонагруженных биметаллических структур с заданными тепловыми функциями. Разработанный программный комплекс позволяет выполнять прямой тепловой расчёт, решать задачу рационального выбора геометрии теплопроводящего наполнителя, получать материализованное распределение фаз, проводить повторную тепловую проверку и выполнять термопрочностную диагностику.

Полученные результаты могут быть использованы при проектировании теплоотводящих вставок, теплопроводящих каналов, локальных тепловых мостов, тепловых барьеров, переходных биметаллических элементов и многоматериальных деталей, в которых требуется совместить интенсивный теплоперенос с механической или технологической функцией несущего материала.

Положения, выносимые на защиту

1. Физико-математическая постановка рационального выбора геометрии теплопроводящего наполнителя биметаллических структур, учитывающая изотропную и анизотропную теплопроводность, граничные условия, объёмные источники тепла и эффективное представление межматериального перехода.

2. Модель биметаллической структуры как несущей матрицы, теплопроводящего наполнителя и эффективной интерфейсной области, позволяющая учитывать влияние переходной зоны на температурное поле и тепловое сопротивление конструкции.

3. Вычислительная схема перехода от проектного поля рационального расположения теплопроводящего наполнителя к материализованной биметаллической геометрии с обязательной повторной тепловой проверкой полученного распределения материалов.

4. Модульный программный комплекс, обеспечивающий последовательное выполнение теплового расчёта, рационального теплового проектирования, постобработки, геометризации, наложения материалов, повторного и термopрочностного расчёта.

5. Программа аналитической и диагностической верификации вычислительной модели, подтверждающая корректность реализации основных физических механизмов: линейной и нелинейной теплопроводности, граничных условий, межматериального интерфейса, тензорной анизотропии и многоматериального термоупругого отклика.

6. Рекомендации по применимости разработанного подхода к тепловому проектированию аддитивно изготавливаемых биметаллических структур и по ограничениям, требующим дополнительной экспериментальной или независимой численной проверки.

Степень достоверности результатов

Достоверность результатов обеспечивается использованием математических моделей, основанных на фундаментальных законах теплофизики и механики сплошной среды, корректной вариационной постановкой краевых задач, конечно-элементной дискретизацией, контролем энергетического баланса и разделением уровней проверки вычислительной модели.

В тепловой части достоверность подтверждена проверкой линейного оператора теплопроводности, объёмных источников, граничных условий Дирихле, Неймана и Робина, кусочно-однородных доменов, идеального интерфейса, тензорной анизотропии и нелинейной зависимости теплопроводности от температуры. В термомеханической части проверены передача температурного поля в механическую задачу, свободное тепловое

расширение, явное поэлементное назначение материалов и многоматериальный термоупругий отклик.

Основные положения диссертации неоднократно обсуждались на международных и всероссийских научных конференциях и семинарах, а ключевые результаты опубликованы в рецензируемых научных журналах, что дополнительно подтверждает их корректность и научную обоснованность.

Личный вклад автора

Автором сформулирована физико-математическая постановка задачи рационального теплового проектирования биметаллических структур, разработана вычислительная схема перехода от релаксированного плотностного поля к материализованной биметаллической конфигурации, спроектирована и программно реализована модульная архитектура вычислительного комплекса. Автором разработана методика и проведены экспериментальные исследования коэффициента теплопроводности аддитивно изготовленных образцов CL 20ES, Co-Cr-Mo, ЭИ698 и модельного биметаллического композита ПОС-61 + Cu. Анализ численных и экспериментальных результатов, формулировка выводов и рекомендаций по области применимости выполнены автором лично.

Соответствие паспорту специальности

Диссертация посвящена разработке научно-методического и инструментального обеспечения для многопараметрического моделирования, анализа и рационального выбора геометрии биметаллических структур с направленной теплопроводностью аддитивно изготавливаемых теплонагруженных элементов и соответствует паспорту специальности 1.3.14. «Теплофизика и теоретическая теплотехника» в части п.1 «Экспериментальные исследования термодинамических и переносных свойств чистых веществ и их смесей в широкой области параметров состояния» и п. 2 «Аналитические и численные исследования теплофизических свойств веществ в различных агрегатных состояниях». Тематика диссертации также соответствует

направлению исследований, связанному с разработкой математических моделей, численных методов и экспериментально подтверждаемых расчетных процедур для анализа теплофизических свойств и теплового состояния твердых тел, неоднородных материалов и многоматериальных конструкций.

Рекомендации по внедрению

Результаты диссертационной работы могут быть использованы при разработке расчётных методик проектирования теплонагруженных биметаллических конструкций, при создании программных средств для рационального расположения теплопроводящего наполнителя и при подготовке инженерных решений для аддитивного изготовления многоматериальных металлических изделий.

Апробация работы

Основные положения и результаты исследований в рамках диссертации докладывались и обсуждались на следующих научно-технических конференциях всероссийского и международного уровня:

- 20-я, 21-я, 22-я Международная конференция «Авиация и космонавтика» (Москва, МАИ, 2021, 2022, 2023, 2024);
- 15-й Всероссийский межотраслевой молодёжный конкурс научно-технических работ и проектов в области авиационной и ракетно-космической техники и технологий «Молодёжь и будущее авиации и космонавтики» (Москва, МАИ, 2023);
- Минский международный симпозиум «Перспективные материалы и технологии», (Минск, ИТА НАН Беларуси, 2023);
- 17-й, 18-й Минский международный форум по тепломассообмену (Минск, ИТМ им. А.В. Лыкова, 2024, 2026);
- XIII Научно-техническая конференция «Энергия молодости». (Санкт-Петербург, ОАО Силовые машины, 19-20 февраля 2025 г.);
- XXXIX Международная научная конференция «Математические методы в технике и технологиях ММТТ-39» (г. Санкт-Петербург, 2026).

Публикации

По теме диссертации опубликованы 22 научные работы, в том числе 7 статей в журналах из перечня рецензируемых научных изданий, рекомендуемых ВАК при Минобрнауки России, и приравненных к ним по научной специальности диссертации (из них 4 входят в перечень ВАК [2–5], 2 – в базы данных Scopus/WoS [6,7] и 1 статья в журналах из перечня рецензируемых научных изданий, рекомендуемых ВАК при Минобрнауки России, по смежным научным специальностям [1]), 15 тезисов докладов на научных конференциях [8–22],. Кроме того, получено свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ [23].

Структура и объём диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка использованных. Работа изложена на 212 страницах машинописного текста, содержит 34 рисунка, 19 таблиц и список литературы из 189 наименований.

В первой главе приведён анализ литературных данных по тепловому проектированию аддитивно изготовленных биметаллических структур. Рассмотрены металлические аддитивные технологии, особенности формирования межматериального перехода, анизотропия и неоднородность теплофизических свойств, модели теплового контакта, эффективные представления интерфейса и ограничения существующих подходов к задаче рационального расположения теплопроводящего наполнителя.

Во второй главе сформулирована математическая модель стационарной теплопроводности и задача рационального расположения теплопроводящего наполнителя. Рассмотрены сильная и слабая формы краевой задачи, конечно-элементная дискретизация, изотропная и анизотропная теплопроводность, параметризация материала, фильтрация, проекция, интерполяция свойств, целевые функционалы, ограничения и термоупругая постановка для последующей проверки.

В третьей главе изложена программная реализация численной модели в программном комплексе. Описаны численная модель, стандарты входных и выходных данных, построение сетки, конечно-элементный решатель, подсистема рационального расположения теплопроводящего наполнителя, постобработка, построение поля наполнителя, материализация биметаллической конфигурации, повторный тепловой расчёт, термopрочностная проверка и формирование отчётных данных.

В четвёртой главе приведено подтверждение вычислительной модели. Представлены аналитические и численные тесты, критерии сопоставления результатов, проверка теплового баланса, анализ линейной и нелинейной теплопроводности, межматериального интерфейса, тензорной анизотропии и многоматериального термоупругого отклика. Показано экспериментальное подтверждение положениям, изложенным в настоящей работе.

В заключении сформулированы основные результаты диссертационной работы, выводы по разработанной модели и вычислительному контуру, а также направления дальнейших исследований.

Глава 1. Современное состояние теплового проектирования аддитивно изготовленных биметаллических структур

1.1. Металлическое аддитивное производство и инженерная мотивация применения биметаллических структур

Металлическое аддитивное производство за последнее десятилетие эволюционировало от быстрого прототипирования к промышленной технологии получения деталей с пространственно заданными свойствами, включая изделия с комбинированием материалов в пределах одного изделия. В обзорах по аддитивному формированию биметаллических структур подчёркивается, что ключевым драйвером многоматериальности выступает инженерная необходимость совмещения функционально противоречивых свойств (например, высокая теплопроводность и высокая жаропрочность/коррозионная стойкость), когда компромиссный однородный материал проигрывает композиции из двух (или более) материалов [22,24–35].

Для задач теплового проектирования (теплоотводы, локальные тепловые барьеры, теплонагруженные узлы) биметаллическая структура обеспечивает локальную интенсификация или подавление теплопереноса, перераспределение плотности теплового потока за счёт структурно организованной анизотропии, а также сопряжение функциональных зон без сборочных операций (пайка, сварка, разборное соединение). На отраслевом уровне это хорошо иллюстрируют решения в авиационной и ракетно-космической технике, где охлаждаемые элементы лопаток турбин, сопел и камер сгорания требуют одновременного обеспечения интенсивной теплопередачи и жаропрочности и коррозионной стойкости конструктивных элементов [12,15,36–41].

Именно здесь использование биметаллической композиции: медь или медный сплав в качестве теплопроводящего наполнителя и жаропрочный либо коррозионно-стойкий сплав для несущей матрицы становится конструктивно оправданным. Для биметаллических композитов (например, Inconel 718 и медный сплав GRCo-84) демонстрируется возможность получать улучшенные

теплофизическими характеристиками именно за счёт композиционного построения, включая функционально-градиентный переход [42–44].

При этом инженерная привлекательность биметаллических структур в аддитивном производстве связана не только с возможностью подбора пары материалов, но и с тем, что процессы аддитивного производства позволяют управлять пространственной организацией материала: последовательностью укладки, ориентацией границы материалов, локальными режимами подвода энергии при сплавлении, а также переходом от резкой границы к переходной зоне градиентного состава. Эта же совокупность факторов усложняет задачу моделирования теплового поведения: теплоперенос определяется не двумя однородными объёмами, а системой «теплопроводящий наполнитель – переходная зона – несущая матрица», причём геометрия и технологическая история формируют анизотропию, неоднородность и характерные дефекты микроструктуры в каждом из элементов этой системы [24,25,45–47].

Отсюда видна потребность рассмотреть аддитивные технологии получения биметаллических и градиентных структур и показать, как именно технологический путь предопределяет структуру материала и характер переходной зоны, а значит – и тепловое поведение изделия.

1.2. Аддитивные технологии для биметаллов

1.2.1. Селективное лазерное сплавление

Селективное лазерное сплавление (Laser Powder Bed Fusion, L-PBF, СЛС) позволяет изготавливать детали из металлов со сложной геометрией, в том числе биметаллические структуры с локально изменяемым составом [48]. В процессе СЛС металл плавится послойно под воздействием лазера в инертной атмосфере; при этом формируется характерная микроструктура с вытянутыми столбчатыми кристаллами вдоль направления построения (оси z) [49,50]. Такая столбчатая морфология обусловлена направленным отводом тепла вниз в порошковый слой и повторяющейся переплавкой верхних частей предыдущего слоя [50]. В результате возникает выраженная текстура кристаллографической

ориентации зерен (например, предпочтительная ориентация $\langle 100 \rangle$ вдоль оси печати для сплавов с кубической решёткой) [50]. Следствием этой текстуры является анизотропия свойств напечатанных деталей: прочностных, пластических и тепловых. Так, в образцах сплава Cu-2.4Ni-0.7Si, изготовленных методом СЛС, теплопроводность вдоль вертикального направления (~ 187 Вт/(м·К)) оказалась в три раза выше, чем в горизонтальной плоскости (~ 63 Вт/(м·К)), что объясняется преобладанием вдоль оси Z крупных столбчатых зерен с высокопроводящей ориентацией и меньшей долей высокоугловых границ [50]. Аналогично, для стареющей стали 1.2709 отмечена разница тепловой диффузии между плоскостью слоя и направлением наращивания в 13%, а также значительная анизотропия прочности и относительного удлинения [49]. Таким образом, **анизотропия** – характерная черта микроструктуры СЛС, важная при анализе направленной теплопроводности биметаллов.

При печати биметаллических изделий методом СЛС ключевой задачей является обеспечение качественного сплавления разных порошков и управление параметрами **энергетического воздействия** лазера для каждого материала. Оптимальная удельная энергия лазера (функция мощности, скорости сканирования и шага между треками) должна выбираться с учётом отличий в физико-термических свойствах сплавов [48]. Например, тугоплавкие или высокотеплопроводные материалы (медь, алюминий) требуют большей плотности энергии, чем стали или никелевые сплавы, для достижения полного проплавления слоя. В многоматериальной печати реализуются подходы селективного экспонирования: для каждой области, содержащей определённый материал, могут применяться индивидуальные настройки лазера (мощность, фокус, скорость) на каждом слое [48,51]. Это позволяет компенсировать различия в поглощательной способности и температуре плавления материалов, предотвращая дефекты непроплавления или перегрева. Так, в экспериментальной двухматериальной печати нержавеющей стали и бронзы для каждой из порошковых областей использовались оптимизированные

режимы лазерного плавления, что обеспечило удовлетворительное качество сплава на границе материалов [48].

Дефекты при аддитивном синтезе биметаллов методом СЛС во многом обусловлены различиями свойств материалов и особенностями их совместной кристаллизации. Одним из типичных дефектов является образование трещин на границе двух сплавов из-за термических напряжений и хрупких интерметаллидов. Большой градиент температур и неодинаковые коэффициенты термического расширения приводят к появлению остаточных растягивающих напряжений в зоне сплавления, которые могут превысить прочность слабейшего материала и вызвать растрескивание [52]. Например, при лазерной наплавке стали 316L с бронзовым сплавом CuSn10 наблюдались трещины по стальной стороне границы вследствие образования хрупких фаз и усадочных напряжений [53]. Другой дефект – поры и непровары на границе сплавления двух порошков – возникает при недостаточном лазерном проплавлении либо из-за разной смачиваемости расплавом подстилающего материала. Повышение энергии лазера и оптимизация стратегии сканирования (включая повторное плавление границы) позволяют уменьшить пористость [54]. Кроме того, возможно расслоение или сегрегация материалов: при печати сплавов с ограниченной взаимной растворимостью (например, медь–сталь, титан–алюминий) на границе может наблюдаться химическая неоднородность, обособление фаз или образование интерметаллидных прослоек [52]. Для борьбы с этим применяют предварительный подогрев слоя, снижение скорости охлаждения и добавление промежуточных переходных слоёв или градиентов состава.

Помимо прочего, существенную роль играет **текстура и направленность зерен** на границе двух материалов. Если смежные слои из разных сплавов формируют разнородные микроструктуры (например, один – мелкозернистую равновесную, другой – крупнозернистую столбчатую), то на интерфейсе возможна концентрация напряжений при нагрузках. Формирование общей взаимопроникающей структуры зёрен затруднено при резком контрасте свойств

расплава, поэтому исследуются подходы по созданию переходных зон – тонких прослоек или градиента, где композиция плавно меняется от первого материала ко второму [52]. Такие зоны функционально-градиентного материала (ФГМ) позволяют снизить уровень дефектов: в работах сообщается об успешном получении гладкого перехода без трещин между Inconel 718 и медным сплавом GRCo84 при послойном изменении доли порошков [26]. В целом для двухкомпонентной СЛС характерны проблемы **анизотропии** свойств (унаследованной от текстуры печати) и **неоднородности** в зоне сплавления, требующие специальной оптимизации режима лазера и дизайна смеси порошков.

1.2.2. Прямой подвод энергии и материала, электродуговая наплавка проволокой

Методы прямого подвода энергии и материала (Directed Energy Deposition, DED), включая лазерную наплавку порошком и дуговую наплавку проволокой (Wire-Arc Additive Manufacturing, WAAM), широко применяются для создания **крупногабаритных биметаллических конструкций**. В отличие от процессов СЛС, технология DED не ограничена размерами рабочей камеры и обеспечивает высокую скорость наплавления металла [55]. Так, проволочная дуговая наплавка позволяет теоретически изготавливать детали практически без ограничения по габаритам, с производительностью осаждения металла на порядки выше, чем у СЛС [56]. Это особенно актуально для крупногабаритных биметаллов, например, переходных секций труб, лопаток турбин с износостойким наплавленным слоем или гибридных панелей. При этом WAAM отличается сравнительно низким разрешением (более крупный валик наплавки) и требует последующей механической обработки для достижения конечных размеров [55], но выигрывает в экономичности и скорости.

Особенностью DED-процессов являются выраженные **термические градиенты** и сложная тепловая история, влияющие на формирование микроструктуры и напряжений. В дуговой наплавке (WAAM) источник тепла – электрическая дуга – вносит большое количество энергии, вызывая длительное

остывание и множество термоциклов при наложении слоёв. Это приводит к росту крупных столбчатых зерен в направлении отвода тепла и одновременно к частичному термическому переделу нижележащих слоёв [57]. Например, в наплавленных стенках из титанового сплава Ti–6Al–4V чередование слоёв вызывает смесь структур: в нижних участках – переохлаждённая мелкоигольчатая α -фаза, выше – более равновесная пластинчатая структура за счёт эффекта высоких межслоевых температур [58]. **Анизотропия** свойств в WAAM обычно менее выражена, чем в СЛС, благодаря многоосевому росту зерен при медленном остывании, однако неоднородность микроструктуры по высоте значительна из-за постепенного накопления тепла в детали [59]. Кроме того, большие температурные градиенты в WAAM приводят к крупному зерну и внутренним напряжениям, способным вызывать деформации (искривление, коробление) наплавленной детали при её отделении от основы, если не принять меры по управлению охлаждением [60,61]. Для уменьшения перегрева между слоями практикуют регулировку времени остывания (длительность пауз между проходами) и принудительное охлаждение. Например, установлено, что увеличение паузы между слоями с 5 с до 120 с предотвращает дефект «нависания» расплава и обрушения валика в алюминиевых WAAM-наплавках [60].

Важным фактором качества при создании крупногабаритных биметаллов методом DED/WAAM является **траектория наплавки** и стратегия чередования материалов. Поскольку головка наплавления может быть перемещена произвольно, возникает возможность укладывать разные материалы в разных участках согласно заданной траектории. В порошковых DED-системах применяют несколько бункеров с порошком и регулируемые дозаторы, позволяющие в режиме реального времени менять подачу порошковых потоков и получать сплав с переменным составом (градиент) или чередующимися дорожками разных материалов [24,62]. В проволочных WAAM-системах реализован подход «двухпроволочной наплавки» (twin-wire WAAM), когда одновременно или последовательно подаются две сварочные проволоки

разного состава [63]. Например, исследована двухпроволочная наплавка мягкой углеродистой стали ER70S-6 и нержавеющей SS 316L: при попеременной подаче этих материалов удалось вырастить биметаллическую стенку без дефектов, с диффузионным переходом элементов на границе и повышенной твёрдостью в зоне смещения [64]. Кроме того, предлагается использование ультразвукового воздействия для повышения однородности расплава [65]. Таким образом, управление траекторией и подачей материала позволяет создавать как слоистые биметаллы (один на другом), так и более сложные конфигурации – например, **радиальные или переплетённые структуры**.

При разработке траекторий наплавки для биметаллов важно обеспечить **равномерный прогрев и контроль формы валиков**. Исследования показывают, что при одностороннем (однонаправленном) наложении валиков металл имеет тенденцию накапливаться в начале траектории и истончаться в конце, что приводит к неравномерности слоя. Применение двунаправленной стратегии (чередование направления наплавки в соседних слоях или дорожках) устраняет эту проблему, распределяя избыточный металл равномерно [66]. Кроме того, при многопроходной наплавке (несколько параллельных валиков в одном слое) применяют специальные схемы перекрытия валиков – например, параболическую или тангенциальную – чтобы достичь оптимального профиля шва и избежать дефектов в зоне перекрытия [67,68]. В случае биметаллических наплавов траектория должна также учитывать порядок и способ укладки разных материалов. Простая стратегия – наплавлять материал В поверх основы из материала А (вертикальная многослойная структура). Сложнее – горизонтальные или радиальные переходы: например, когда один металл обрамляет другой по окружности. В недавней работе продемонстрирована **радиальная биметаллическая композиция WAAM**: два сварочных горелочных тракта (для нержавеющей и углеродистой стали) установлены на одном станке, наплавляя одновременно стенку из двух концентрических металлов – стальной сердцевины и оболочки из мягкой стали. Эта система с двумя головками подачи синхронизированно укладывала материалы слоями,

формируя по сути трубу «сталь-в-стали» с радиальным контактом. Отмечено, что такой процесс чрезвычайно сложен: необходимо учитывать взаимодействие двух ванн расплава, повышенную плотность теплового потока и высоту слоя при одновременной наплавке, чтобы слои обоих материалов росли равномерно. Также усложняется механика контакта – взаимное проникновение валиков и формирование «замков», что, с одной стороны, улучшает прочность сцепления, с другой – создает концентраторы напряжений при нагрузках [55]. Тем не менее, испытания напечатанного радиального биметалла показали качественное сплавление материалов без сварочных дефектов; на интерфейсе наблюдалась диффузия элементов (например, растворение Cr из нерж. стали в мягкой стали) и повышение твёрдости, хотя и ценой некоторого снижения пластичности в переходной зоне [64].

Таким образом, DED-методы (лазерные и дуговые) открывают широкие возможности для изготовления **больших биметаллических изделий** благодаря высокой производительности и гибкости траекторий. Основными вызовами остаются: поддержание стабильной формы и размеров наплавляемых валиков, минимизация температурных градиентов (через оптимизацию пауз, охлаждения, подогрева подложки) и обеспечение однородного качества сплавления материалов на всем протяжении их зоны контакта. Правильно подобранная стратегия движения инструмента и синхронизации подачи материалов является ключом к получению биметалла без дефектов и с заданными градиентами свойств.

1.2.3. Альтернативные пути аддитивного создания биметаллов

Помимо традиционных технологий плавления лазером или дугой, существуют **альтернативные аддитивные способы** создания биметаллических изделий, которые могут преодолевать ряд ограничений методов плавления. К ним относятся: электронно-лучевое сплавление порошка (Electron Beam PBF, E-PBF), холодное газодинамическое напыление (Cold Spray Additive Manufacturing, CSAM) и методы экструдирования металлополимерных

композитов с последующим спеканием (Metal Material Extrusion, в т.ч. Bound Metal Deposition, BMD).

E-PBF (Electron Beam Melting) – процесс плавления порошка электронным лучом в вакууме – используется для печати изделий из реактивных и тугоплавких металлов. Особенность E-PBF – высокая температура порошкового слоя перед и во время плавления за счёт подогрева лучом, что снижает термические напряжения и риск трещинообразования по сравнению с СЛС [69]. Например, при E-PBF печати титана или никелевых сплавов предварительный нагрев порошка (до ~600–700 °С) позволяет избежать быстрого охлаждения и образовать более равновесную крупнокристаллическую структуру без мартенситных фаз, характерных для лазера. Для биметаллов технология E-PBF теоретически применима путём чередования засыпки разных порошков на различные участки слоя или по слоям. Однако практически реализовать многоматериальный E-PBF сложно из-за вакуумного исполнения и инерционности замены порошка. Тем не менее, в исследованиях отмечается, что E-PBF пригоден для изготовления градиентных изделий, например, с плавным переходом состава внутри одного семейства сплавов (сталь – никелевый суперсплав) без заметных дефектов [70]. Кроме того, способность E-PBF длительно поддерживать деталь горячей во время построения способствует диффузионному выравниванию на границе материалов и снятию напряжений. Стандарт ГОСТ Р 59930-2021 ИСО/АСТМ 52904:2019 специально учитывает E-PBF наряду с лазерным в требованиях к контролю процесса для ответственных изделий [71]. Таким образом, E-PBF можно рассматривать как альтернативный маршрут создания биметаллов с пониженным уровнем остаточных напряжений, хотя на практике данных о разнородных сочетаниях в открытой литературе пока немного.

Низкотемпературный газодинамический метод напыление (НТГДМ, CSAM) – перспективная аддитивная техника, в которой металлические частицы осаждаются на подложку без плавления, за счёт высокоскоростного удара. Порошок разгоняется до сверхзвуковой скорости потоком нагретого газа и при

ударе пластически деформируется, образуя прочный контакт с ранее осаждённым слоем [72,73]. Этот **твёрдофазный подход** позволяет наносить покрытие или наращивать детали из различных металлов, избегая проблем плавления – таких как образование литых дефектов, крупных зерен или хрупких фаз от быстрой закалки. Для биметаллов CSAM особенно интересен тем, что можно последовательно напылять несколько разных материалов на одну основу, получая многослойную структуру. Например, технология успешно применяется для ремонта и модификации деталей: к алюминиевому или стальному основанию холодным напылением добавляют слой меди, никеля, титановых сплавов и т. п. На межфазной границе при холодном напылении, как правило, формируется зона ультрамелкого зерна с высокими плотностями дислокаций из-за ударной пластической деформации. Это обеспечивает хорошее сцепление материалов без диффузионного перемешивания (граница остаётся резкой). Интересно, что остаточные напряжения в холодно-напылённых биметаллах обычно сжимающие или низкие растягивающие (менее ~ 50 МПа), поскольку процесс проходит при сравнительно невысоких температурах. Низкий уровень растягивающих напряжений на интерфейсе способствует высокой прочности соединения и отсутствию трещин [72]. Недостатками НТГДМ являются относительно низкая плотность отложенного материала (из-за пористости $\sim 1\text{--}2\%$), необходимость пост-обработки (термообработки или прессования) для достижения плотности и прочности, сравнимых с литым металлом [74], а также сложность в обеспечении точной геометрии (требуется тщательное планирование движения сопла и регулировка напыления по толщине слоя). Тем не менее, CSAM уже зарекомендовал себя как метод аддитивного изготовления биметаллических деталей, где необходима локальная металлургическая связь без воздействия высоких температур – например, для медно-стальных токопроводящих элементов, биметаллических теплообменников, ремонта лопастей с напылением износостойкого сплава и пр. В контексте направленной теплопроводности CSAM интересен возможностью создавать композиции

металлов с минимальным термическим влиянием, сохраняя исходные свойства каждого компонента.

Экструзия металлополимерных композитов (Metal-ME/BMD) – это класс технологий, где смесь металлического порошка с полимерным связующим (филамент или паста) экструдируется как пластик, формируя «сырую» заготовку, которая затем проходит стадию удаления связующего и спекания. Такие процессы, как Bound Metal Deposition (запатентованный Desktop Metal) или Metal Fused Filament Fabrication (например, Markforged Metal X), позволяют печатать металлические детали на относительно простом оборудовании, аналогичном FDM-принтерам. Применение их для биметаллов заключается в поочерёдной печати разными заполненными филаментами (например, сталь и медь) в составе одной детали, с последующим совместным спеканием. Преимущество подхода – отсутствие этапа сварки расплавов: материалы соединяются в твёрдом состоянии через диффузионное спекание, что уменьшает термические напряжения и риск трещин от неравномерного охлаждения [75]. Однако при **совместном спекании** разных металлов возникает ряд сложностей. Во-первых, разные порошковые материалы требуют различных условий спекания (температуры, атмосферы) для достижения высокой плотности. Необходимо подобрать компромиссный температурный режим, при котором оба материала спекутся достаточно хорошо [75–77]. Во-вторых, во время спекания происходит усадка, причём степень усадки у разных металлов различается. Это может привести к появлению внутренних напряжений на интерфейсе или даже к образованию пор или отслоений, если усадка не согласована. В эксперименте по совместному спеканию композиций Cu–Fe показано, что хотя полная плотность не достигнута (остаются поры), явных трещин на границе не возникает, но наличие внутренних напряжений подтверждается измерениями [75]. В-третьих, при повышенной температуре спекания возможна взаимная диффузия элементов на границе материалов и образование интерметаллидных фаз, ухудшающих прочность и теплопроводность интерфейса [52,75]. Например, при сочетании пар «сталь–

бронза» или «никелевый сплав–медь» в зоне контакта при спекании могут образовываться ломкие фазы на основе Fe-Cu или Ni-Cu. Для минимизации этого эффекта в некоторых работах предлагается проводить спекание в два этапа (с промежуточной термообработкой) или вводить в состав порошка специальные легирующие добавки, образующие на границе стабильные твёрдые растворы вместо интерметаллидов [24,78]. Несмотря на перечисленные трудности, методика Metal-ME уже демонстрирует успешные примеры: напечатаны двусоставные детали типа медно-стальных радиаторов, биметаллические разъёмы (медь/нержавеющая сталь) и др. Санкт-Петербургский политехнический университет представил обзор, где подчёркивается, что экструдированные биметаллы способны избавить от лишних операций по сборке и сварке отдельных частей, снизив общие энергозатраты производства подобных изделий [75]. При дальнейшем развитии данная технология может обеспечить изготовление мульти-материальных структур со сложным распределением материалов (в том числе градиентных) на относительно дешёвом оборудовании, хотя для стандартизации её воспроизводимости требуются дополнительные исследования.

1.2.4. Многоматериальные способы дозирования: SPD, ФГМ, селективная экструзия

В аддитивных технологиях для реализации **многоматериальных технологий** критически важна система подачи и дозирования нескольких материалов. Независимо от метода формирования (PBF, DED или экструзия), используются специальные способы селективного размещения разных материалов в заданных зонах каждого слоя. Рассмотрим основные подходы: селективное распределение порошка (Selective Powder Deposition, SPD) для СЛС, создание ФГМ через программируемое дозирование, и **селективную экструзию** в многоматериальных принтерах.

Метод **SPD** был разработан для преодоления моно-материальности классического СЛС. Он включает несколько стратегий. Первая – **послойное переключение порошков**: принтер оснащается двумя и более бункерами с

порошками и двумя ракетами. На определённых слоях используется порошок типа А, на других – порошок В, что позволяет напечатать, например, нижнюю часть детали из одного металла, верхнюю – из другого [52]. Такой метод годится для двухсоставных изделий с разделением по высоте, но не даёт сложной 3D-разметки материалов в плоскости слоя.

Вторая стратегия – селективное распределение в плоскости слоя. В установках SPD реализуют специальные распределяющие устройства: вращающиеся барабаны с пористой сеткой или вибрационные дозаторы, которые могут высыпать разные порошки в разных зонах одного слоя по цифровой маске CAD-модели [52]. Пример – система с тремя барабанами (Рис. 1.1), каждый из которых наносит свой порошок на определённые участки слоя, создавая **дискретные области** материалов внутри одного слоя [48]. После распределения многокомпонентного слоя лазер последовательно сплавляет каждый участок своими параметрами.

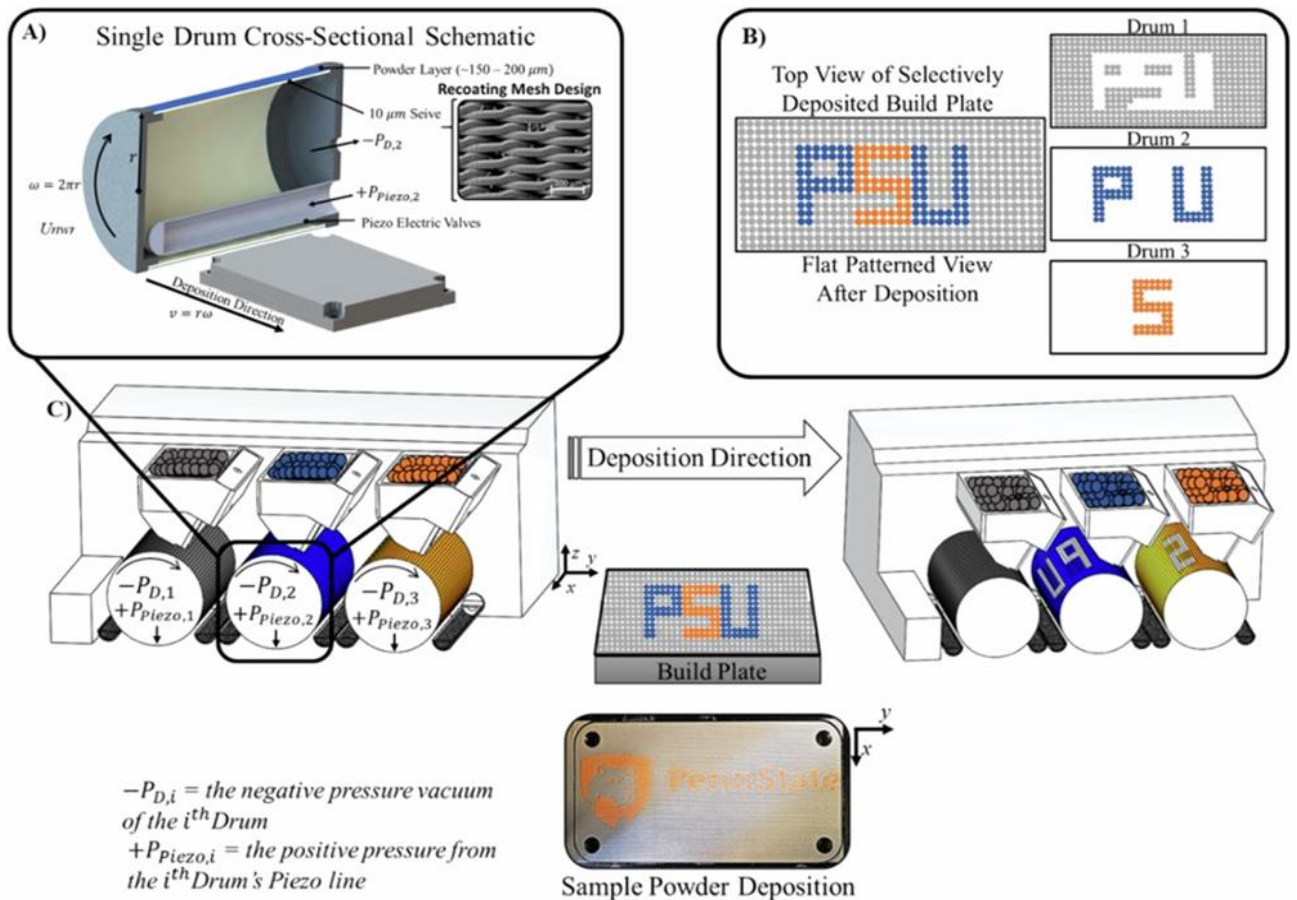


Рис. 1.1. Схема системы селективной подачи порошка (Selective Powder Deposition, SPD) для многоматериальной лазерной наплавки. Порошок трёх

видов подаётся из отдельных бункеров через вращающиеся барабаны с сетчатым рекоатером, позволяя избирательно формировать на каждом слое зоны из разных металлов согласно CAD-модели [48].

Третий подход – гибридное распределение: сначала весь слой засыпается порошком А, затем из определённых областей порошок удаляется (например, вакуумной насадкой) и эти пустоты заполняются порошком В вторичным ракем. Такой метод более сложен, но позволяет получать чёткие границы материалов (Рис. 1.2 – А, В, С). Наконец, существует электрофотографическая подача порошка, аналогичная принципу лазерного принтера: тонер-порошки разных металлов наносятся на слой за счёт зарядов по заданному рисунку (Рис. 1.2 – D, E). Все эти варианты SPD направлены на достижение высокой точности размещения материала, что критически важно для функциональных биметаллов (например, печать теплообменника: зоны из меди для теплопроводности, каркас из стали для прочности – внутри одного слоя).

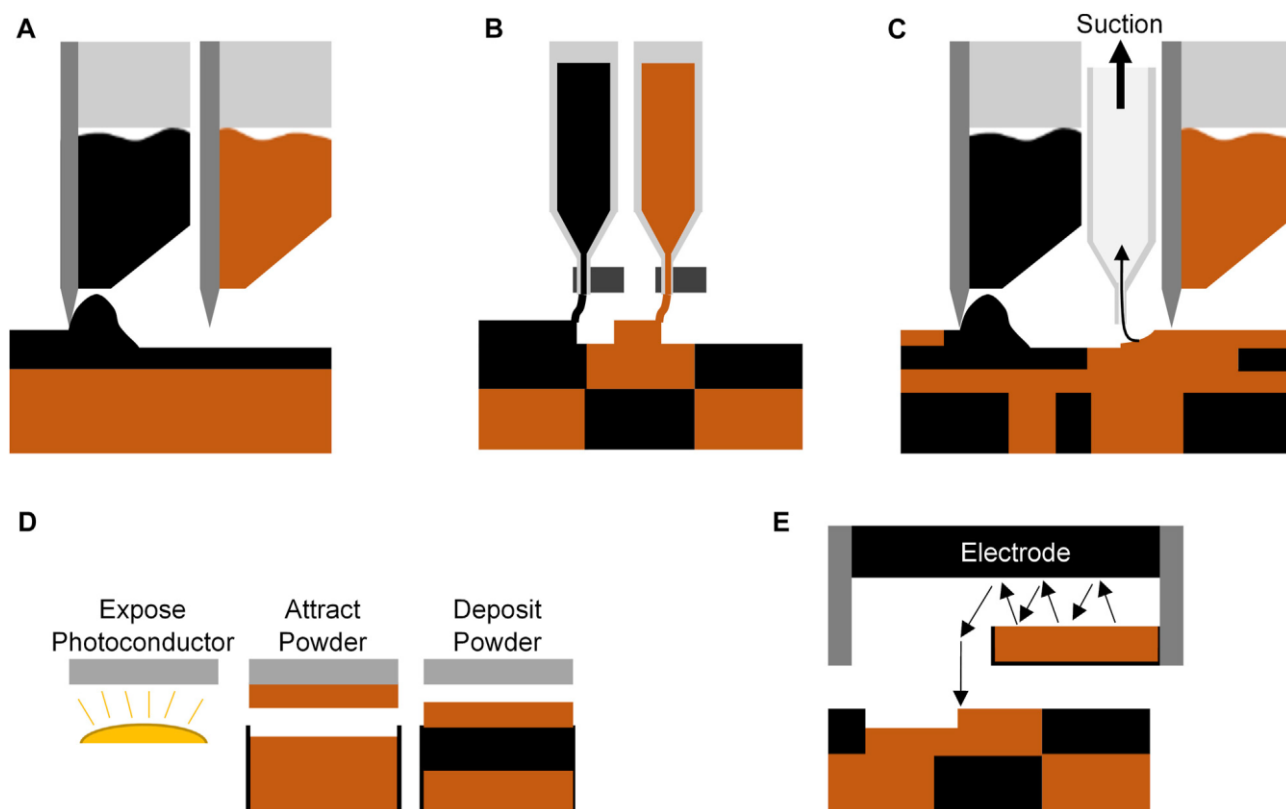


Рис. 1.2. Схемы методов нанесения порошка для процессов LPBF с использованием нескольких материалов. А – отдельные бункеры и системы ножей. В – Вибрирующие сопла для нанесения нескольких порошков на каждый

слой. С – гибридная система выборочного удаления и замены порошка. D – основные этапы электрофотографического метода нанесения порошка. E – электростатический распылитель порошка [52].

Концепция ФГМ реализуется главным образом в процессах DED (лазерных или дуговых), где можно непрерывно менять смесь подаваемых материалов. Идея состоит в плавном варьировании процентного соотношения двух (или более) порошковых потоков по высоте или длине изделия, создавая градиент свойств без резкой границы [79]. Например, при лазерной наплавке на подложку из стали постепенно добавляют всё больше порошка меди, переходя от чисто стального первого слоя к чисто медному верхнему. В результате формируется градиентная зона, где состав изменяется от 0 до 100% меди по толщине несколько миллиметров. Такая функционально-градиентная перемика между несмешивающимися материалами значительно снижает уровень остаточных напряжений и устраняет ломкие интерметаллиды, поскольку концентрационные скачки сглажены [80]. Кроме того, функциональный градиент позволяет достичь требуемого распределения свойств: например, внизу – высокая прочность стали, наверху – высокая теплопроводность меди. Реализация ФГМ требует прецизионного **дозирования** порошков: установки оснащаются двумя дозаторами, расход которых программно изменяется по закону (линейно, экспоненциально либо по сложной функции) в процессе постройки слоя. В литературе описаны успешные градиенты сталь–инвар, титан–инвар, Inconel718–CuCr и др. [81], где решена задача подавления трещин и пор путём оптимизации профиля изменения состава [82,83]. Аналогичные принципы применяются и в WAAM: система с двумя проволоками может менять скорость подачи каждой проволоки, получая сплав переменного состава на выходе дуги. Градиентные биметаллы требуют последующей аттестации на однородность – обычно выполняется локальный анализ состава и микротвёрдости по сечению, подтверждающий плавный профиль без скачков [24,79].

Селективная экструзия в контексте многоматериального аддитивного производства чаще всего относится к полимерным или композитным FDM-принтерам с двумя и более печатными головками. В случае металлов этот подход только начинает развиваться, преимущественно через вышеупомянутые Metal-МЕ технологии. Принцип заключается в том, что принтер оснащается двумя материалами (например, два разных металлополимерных филамента) и может по ходу печати переключаться между ними, выкладывая в нужных местах нужный материал [75,84,85]. Такая селективная экструзия уже используется для многокомпонентных керамических изделий и электроники (печать проводниковой пасты и диэлектрика одним устройством). Для металлов – более сложная задача: важна совместимость материалов по температурному режиму удаления связки и спекания. Однако ведутся исследования по селективной экструдированной печати пастами: через общий плунжерный дозатор подаются поочерёдно суспензии разных металлов для создания тонких слоёв сложной формы. Здесь остро стоит вопрос совместимого спекания: как отмечалось, нужен единый режим, подходящий всем материалам, либо дифференцированный подход (двойной нагрев, возможно различное время для каждой фазы) [86]. Решение этой проблемы напрямую связано с развитием материаловедения порошковых композитов – подбора сочетаний металлов с близкими температурами спекания или использования специальных активаторов спекания. Тем не менее, перспективы селективной экструзии заманчивы: она обещает объединить в одной детали разнородные части без сварки и болтов, снизить массу сборок, а также локально наделить изделие функциями, такими как встроенные проводники, тепловые отводы или износостойкие зоны, сэкономя материалы и энергию [75].

В заключение, многоматериальные траектории и дозирование – это краеугольный камень аддитивных биметаллических технологий. Методы SPD, ФГМ и селективной экструзии дополняют друг друга в разных масштабах: от микро-разметки порошка в каждом слое до глобального градиента по всей детали. Их успешное применение позволяет получать биметаллы с заданной

направленной теплопроводностью, комбинируя материалы так, чтобы тепло распространялось преимущественно в нужном направлении (за счёт высокопроводящих включений) при одновременном сохранении прочности конструкции. Дальнейшее развитие оборудования для точного дозирования и стандартизация таких процессов будут способствовать широкому внедрению аддитивных биметаллических решений.

1.2.5. Остаточные напряжения, усадка, термоциклирование и контроль зоны контакта

Остаточные напряжения неизбежно возникают в аддитивных металлах из-за неравномерного нагрева и охлаждения материала. В биметаллических структурах эта проблема усугубляется различием термофизических свойств компонентов. При остывании совмещённых разнородных слоёв каждый материал стремится сжаться согласно своему коэффициенту термического расширения (КТР); если КТР различаются, возникает несовместимая деформация, приводящая к высоким напряжениям на границе материалов. Например, при наплавке стали 316L на Inconel 718 (никелевый сплав) расчёты показывают накопление растягивающих напряжений до ~ 475 МПа вблизи интерфейса из-за резкого скачка свойств, с последующим переходом в зону сжатия внутри слоя [80]. Такие высокие растягивающие напряжения способны инициировать трещины по границе сразу при печати или впоследствии под нагрузкой. В экспериментах по WAAM биметаллам (нержавеющая сталь + мягкая сталь) наблюдалось, что после охлаждения образцы демонстрируют остаточное изгибающее напряжение: нержавеющая сердцевина испытывает сжатие, а наружная часть – растяжение, пытаясь «отделиться» [55]. Для **контроля остаточных напряжений** применяют несколько подходов:

- 1) предварительный подогрев подложки или слоя;
- 2) отжиг и термообработка;
- 3) оптимизация стратегии построения.

Предварительный подогрев подложки или слоя: нагрев основы до значительной температуры (200–500 °C для сталей, вплоть до 800 °C для

инструментальных сплавов) снижает термический градиент при печати, давая материалам остывать более равномерно [69]. Это уменьшает разницу усадок и тем самым уровень напряжений. Метод особенно эффективен в СЛС (где реализован в E-PBF) и DED: подогретый стол или индукционное подогревание детали между проходами позволяют изготавливать без трещин сочетания, которые иначе бы растрескались (например, твердосплавная сталь на углеродистой стали).

Отжиг и термообработка: после печати биметалл целиком подвергают термоциклу (например, медленному нагреву до 600–800 °С, выдержке и медленному охлаждению), что снимает часть внутренних напряжений за счёт релаксации и ползучести. Такой отжиг часто применяют для градиентов ФГМ, чтобы диффузионно выровнять переход и снять локальные пики напряжений [52].

Оптимизация стратегии построения: например, печать детали «от центра к периферии» или симметричное чередование сегментов позволяет распределять усадочные деформации более сбалансировано и избегать концентрации напряжений в одном месте. В упомянутом случае 316L–IN718 DED было показано, что введение плавного градиента вместо резкой границы превратило скачок продольных деформаций в постепенный переход, снизив максимум напряжений до ~320 МПа (на 30%) [80]. Таким образом, управление напряжениями – ключ к структурной целостности биметалла.

Усадка играет роль как при охлаждении расплава, так и при спекании (для BMD-технологий). В процессах плавления усадка выражается в отрывании краёв детали от платформы (деформация «эффектом стакана»), образовании изгибов. В биметаллах дифференциальная усадка двух материалов может приводить к деформации формы или образованию зазоров на их границе. Например, при совместном спекании биметаллической заготовки из меди и стали медная часть, обладая большей величиной усадки, стремится «отстать» от стальной, что теоретически могло бы вызвать трещину на стыке. Экспериментально отмечено, что даже без трещин может возникать остаточное

натяжение, способное снижать теплопроводный контакт между материалами [75]. Для компенсации разницы усадок используют промежуточные прослойки – например, между сплавами с сильно отличной усадкой печатают тонкий слой из материала смешанного состава (50/50), играющий роль буфера. В DED-печати, напротив, усадочные явления проявляются больше в масштабах всей детали: так, сварочные биметаллы часто требуют механического притягивания к жесткой основе или применения опорных конструкций, чтобы удержать форму до остывания. Усадку также учитывают при проектировании: моделирование процессов (например, методом конечных элементов) позволяет предсказать деформацию и подкорректировать геометрию модели («предвигнуть» детали в противоположную сторону, чтобы после усадки получить правильную форму) [80].

Термоциклирование – повторные циклы нагрева-охлаждения во время послойного наращивания – существенно влияют на микроструктуру интерфейса и его свойства. Когда один материал наносится поверх другого, нижележащий неоднократно переживает нагрев от последующей наплавки. Это может приводить к таким эффектам: (1) Диффузионное перемешивание: каждый цикл нагрева при температуре, близкой к плавлению, способствует взаимной диффузии элементов на границе. В результате после n слоёв граница может превратиться в зону твёрдого раствора или даже сформировать тонкий слой новой фазы. Например, в биметалле сталь–бронза при печати СЛС отмечалось образование прослойки твёрдого раствора Fe-Cu шириной порядка нескольких микрометров, сглаживающей химический переход. (2) Отпуск и старение: если первый материал склонен к упрочнению при нагреве (например, стареющая сталь требует старения при температуре $\sim 480^\circ\text{C}$), то тепловое воздействие от наплавки второго материала может инициировать выделения прочностных фаз на интерфейсе. Это может либо укрепить границу, либо вызвать хрупкость, завися от природы выделений. (3) Рекристаллизация: в некоторых случаях многократный нагрев интерфейса приводит к зарождению новых зерен и снятию накопленной деформации. Например, при холодном

напылении (которое само по себе твердит металл) последующий умеренный нагрев может привести к рекристаллизации, снизив твердость и внутренние напряжения [74]. Управление термоциклированием достигается подбором тактики печати: можно минимизировать повторный нагрев интерфейса (например, печатать сначала полностью одну часть, затем другую – тогда интерфейс греется один раз), либо наоборот, намеренно проводить промежуточные прогревы для улучшения структуры. Также доступны индукционный отжиг на лету (установки, где сразу за сварочной горелкой идет индукционная катушка, производящая мягкий отжиг свежего слоя для снятия напряжений). Таким образом, контроль термоциклирования – неотъемлемая часть **контроля интерфейса**.

Наконец, **контроль интерфейса** в биметаллах предполагает совокупность мер по обеспечению требуемой металлургической связи без дефектов и с заданными свойствами на границе. Сюда входят:

- Оптимизация состава сплавов: иногда для улучшения совместимости вводят третьи элементы. Пример – наплавка меди на сталь: добавка в медный сплав небольшого процента Ni или Si существенно уменьшает склонность к образованию хрупких фаз Fe-Cu и повышает прочность связи [52].
- Управление долей смешения: при дуговой наплавке можно регулировать глубину провара, избегая избыточного перемешивания материалов. Если необходимо чёткое разделение – применять режим «холодного» наплавления (СМТ, низкий ток) [57], если нужен небольшой переходный слой – слегка увеличить энергию для намеренного разбавления.
- Геометрическое проектирование интерфейса: вместо плоского стыка можно проектировать **замковое соединение** – зубчатый или волнистый интерфейс, увеличивающий площадь сцепления и сопротивляющийся смещению. В аддитивных процессах реально реализовать зубчатую границу, чередуя выступы и впадины из обоих

материалов (такие эксперименты проводились для биметаллов WAAM, показывая повышенную прочность при сдвиге [55]).

- Неразрушающий контроль интерфейса: так как внутренние дефекты (поры, трещины) недопустимы, важна инспекция. Для аддитивных изделий разрабатываются методы рентгеновского КТ, ультразвукового контроля и др. – например, новый технический отчет ISO/ASTM TR 52905:2023 посвящен классификации дефектов и методам неразрушающего контроля в СЛС и DED-процессах [71]. Он охватывает в том числе дефекты в ФГМ и на интерфейсах биметаллов, рекомендуя техники контроля качества. В производственной среде для ответственных биметаллических деталей интерфейс контролируют 100% объемно (радиография или КТ) и дополнительно механическими испытаниями образцов-свидетелей на прочность сцепления (например, ASTM D4501 блок-шЕar тест адаптирован для напечатанных биматериальных образцов [52]).

Таким образом, комплекс мер – от материаловедческих до метрологических – обеспечивает требуемое качество и надежность интерфейса биметалла.

1.2.6. Стандарты и управление качеством

По мере развития технологий аддитивного производства биметаллов возникает потребность в их **стандартизации и управлении качеством** для промышленного применения, особенно в критически важных отраслях (аэрокосмическая, энергетика, медицина). Сложность биметаллических структур – в их неоднородности, а следовательно, в новых рисках дефектов и отказов – требует разработки специальных нормативных документов. На данный момент можно выделить несколько ключевых стандартов и руководящих документов, затрагивающих вопросы качества и квалификационных испытаний аддитивных металлов, релевантных и для биметаллов.

ГОСТ Р 59930-2021 ИСО/АСТМ 52904:201 (оригинальное издание 2019 г., перевод в 2021 г.) – международный стандарт, устанавливающий **практические требования к управлению процессом** порошковой наплавки металлов для ответственных изделий. Он разработан совместно ISO TC 261 и ASTM F42 и носит характер руководства по обеспечению стабильности процесса СЛС для применения в авиации, медицине и других областях с высокими требованиями [71]. Стандарт охватывает все стадии: выбор и подготовка порошка, калибровка оборудования, параметры лазера/электронного луча, построение контрольных образцов, постобработка, а также требования к документации и отслеживаемости. Хотя ГОСТ Р 59930-2021 ИСО/АСТМ 52904:201 прямо не фокусируется на многоматериальной печати, его рекомендации по квалификации процесса (например, проведение испытательных построек на прочность, анализ дефектов) напрямую применимы при внедрении биметаллов. Для разработчиков биметаллических технологий соблюдение ГОСТ Р 59930-2021 ИСО/АСТМ 52904:201 служит отправной точкой в обеспечении качества: например, необходимо отдельно квалифицировать режимы печати для каждого из сочетаний материалов, проводить механические испытания как по отдельности, так и для интерфейсных зон.

NASA MSFC-STD-3716 (Standard for Additively Manufactured Spaceflight Hardware by L-PBF in Metals, издан в 2017 г.) – один из первых отраслевых стандартов, посвящённых аддитивным металлам. Разработан Центром Маршалла (MSFC) NASA для использования деталей, изготовленных методом лазерной порошковой наплавки, в космической технике [87]. Этот документ устанавливает **рамочные требования к внедрению СЛС-деталей в конструкцию летательных аппаратов**, охватывая вопросы материалов (допустимые сплавы и порошки), процесса (квалификация машины, операционные допуски), неразрушающего контроля и испытаний. В частности, NASA-3716 требует, чтобы изготовитель продемонстрировал стабильное качество печати через серию пробных построек, статистически обосновал

уровни дефектности и механических свойств, и только после этого детали могут считаться годными для полёта [88]. Хотя стандарт ориентирован на моно-материальные детали, его принципы пригодны и для биметаллов: требуется доказывать, что **интерфейс** не является слабым звеном. Например, могут быть заданы критерии прочности соединения (через испытание на разрыв двух материалов по шву) и циклической прочности (термоциклирование или вибрация). Дополнительно, NASA 3716 предписывает разработку проверяемых процедур для каждого изделия: от проектирования (учёт анизотропии свойств) до процесса (параметры лазера, стратегия поддержек) и пост-обработки (термообработка для снятия напряжений, горячее изостатическое прессование для устранения пор и т. д.). В контексте стандартизации, NASA-STD-3716 стал фактическим ориентиром: его положения учитываются в новых ISO/ASTM стандартах, а также в стандартах Европейского космического агентства.

ISO/ASTM TR 52905:2023 – технический отчет, посвящённый **неразрушающему контролю (НК) и дефектам** в аддитивных металлических деталях. Этот документ классифицирует типы дефектов для процессов порошкового и проволочного DED, лазерного и электронно-лучевого селективного сплавления. Например, определяются поры (газовые, усадочные), непровары, трещины горячие и холодные, включения и др., указывается их типичная форма и причины возникновения. Для каждого типа дефектов обзорно приводятся возможные методы их обнаружения: рентгенография и компьютерная томография для объемных дефектов, ультразвук для крупных покровочных трещин, капиллярный контроль для поверхностных трещин, и т.д.. Хотя данный стандарт не задаёт обязательных требований, он служит справочником как для производителей, так и для контролёров, какой метод контроля наиболее эффективен для конкретной аддитивной технологии. Для биметаллических структур наличие двух материалов может влиять на применимость методов НК (разный акустический импеданс для ультразвукового контроля, контраст на рентгене). В отчете отмечено, что для сложных многоматериальных геометрий часто требуется комбинация методов и

их адаптация. В частности, упоминается перспективность 3D-рентгенографии с высоким разрешением для выявления несовместимости на интерфейсе и фазовых неоднородностей. Данный стандарт также предусматривает разработку типовых образцов с искусственными дефектами для калибровки аппаратов НК применительно к аддитивным технологиям [89]. В будущем, вероятно, на основе этого техотчёта будут созданы полные стандарты контроля, и возможно – с учётом специфики многоматериальных изделий.

Кроме перечисленных, стоит упомянуть развивающийся комплекс стандартов серий **ISO/ASTM 52900+** и некоторые проекты NASA: например, стандарт NASA-STD-6030 по квалификации порошков и NASA-STD-8719 по качеству аддитивных процессов. Появляются и новые документы, ориентированные на конкретные задачи – например, ISO/ASTM 52911 (проект) для требований к многоосевым DED-машинам, где вероятно будут указания по многокомпонентным системам подачи. Российские стандарты (ГОСТ Р) также следуют мировым тенденциям – в 2022 г. выпущен перевод ISO/ASTM 52904, ведётся работа по адаптации стандартов контроля.

Управление качеством биметаллических аддитивных технологий требует, помимо соответствия упомянутым стандартам, ещё и разработки новых методик испытаний. Одной из задач является проверка долговечности интерфейса при эксплуатационных нагрузках: термоциклирование (многократный нагрев-охлаждение) для имитации термоударов, испытания на усталость изгибом или кручением, специальные измерения теплопроводности вдоль и поперёк интерфейса (важно для направленной теплопроводности – удостовериться, что переход не создает теплового сопротивления выше допустимого). В научной литературе предлагаются нестандартные подходы, например, испытание биматериальных образцов на расслоение под комбинированной нагрузкой, или т.н. *«биметаллический буклет»* – пара образцов с разным порядком материалов для оценки влияния направления печати на прочность интерфейса [52]. Все эти данные лягут в основу будущих стандартов, посвящённых именно аддитивным функциональным градиентам и

биметаллам. Уже сейчас в стандарте ISO/ASTM 52910 (руководство по дизайну для АМ) есть раздел о многоматериальных конструкциях, где рекомендовано избегать сочетаний с большим контрастом свойств без градиента и приводятся советы по моделированию теплопередачи.

В заключение, стандартизация и квалификация аддитивных биметаллов – активно формирующаяся область. Наличие базовых стандартов (52904, NASA-3716) обеспечивает фундамент для требований к процессу и качеству, а новые документы (TR 52905 и др.) закрывают вопросы дефектологии и контроля. Для успешного внедрения направленно теплопроводящих биметаллических структур в промышленность необходимо соответствовать этим нормам, проводить расширенные квалификационные испытания материалов и соединений, а также участвовать в развитии стандартов следующего поколения, которые учтут специфику аддитивных градиентных материалов. Такой подход гарантирует надежность и воспроизводимость изделий, где заложены преимущества нескольких металлов одновременно.

1.3. Источники анизотропии в аддитивных металлах

Аддитивные методы производства металлов (АМ) зачастую приводят к формированию анизотропной структуры материала – то есть свойства полученных деталей зависят от направления. Это принципиальное отличие от традиционных технологий, обусловленное специфическими условиями кристаллизации при послойном формировании. Зависимость свойств аддитивно изготовленных изделий проявляется не только в металлических системах: для топологически оптимизированных изделий из фотополимерных смол ранее рассматривалось влияние технологии изготовления на анизотропию механических свойств [6]. В идеальном случае металл без дефектов и с случайно ориентированными зернами был бы изотропным, однако реальный процесс АМ имеет выраженную направленность тепловых потоков и роста зерен, что практически гарантирует появление анизотропии [49,90–92]. Ниже рассмотрены основные источники анизотропии в аддитивных металлах,

критически важные в контексте направленной теплопроводности в биметаллических композитах.

1.3.1. Кристаллографическая текстура, столбчатые зёрна, направленное затвердевание

Одной из главных причин анизотропии в аддитивно изготовленных металлах является **кристаллографическая текстура**, возникающая вследствие направленного затвердевания и роста столбчатых зёрен. В процессах селективного лазерного плавления (СЛС) и электронно-лучевой плавки (ЭЛП) металл остывает преимущественно вдоль оси построения (обычно вертикально, вдоль оси z), что стимулирует эпитаксиальный рост зёрен из слоя в слой [25,93]. В результате формируется столбчатая (колончатая) структура зёрен, где их оси выстроены параллельно направлению отвода тепла. Такие удлинённые зерна часто имеют одинаковую кристаллографическую ориентацию (текстуру) вдоль оси роста. Например, для никелевых суперсплавов типа Inconel 718 и кобальт-хромовых сплавов в условиях СЛС наблюдается сильная ориентированная текстура $\langle 001 \rangle$ вдоль оси построения при определённых режимах, что приводит к анизотропии свойств [25,94]. Аналогично, в титановых сплавах (Ti-6Al-4V) методами СЛС формируется выраженная текстура α -фазы вследствие столбчатого роста β -зёрен, что существенно влияет на прочностные характеристики и может отражаться на теплопроводности [95,96]. В целом, направленное затвердевание в АМ обуславливает преимущественную ориентацию кристаллов, тогда как при литье или ковке зерна обычно более равномерно ориентированы.

Кристаллографическая текстура в сочетании с анизотропией свойств отдельных кристаллов приводит к анизотропии макроскопической теплопроводности. Хотя многие металлы кубической сингонии (например, аустенитная сталь, алюминий) обладают относительно изотропной теплопроводностью на уровне монокристалла, наличие направленной текстуры и вытянутых зёрен все же сказывается. Во-первых, теплоперенос может

несколько различаться вдоль разных кристаллографических направлений. Во-вторых, границы зёрен являются препятствием для передачи тепла (особенно фононной составляющей теплопроводности), поэтому структура с удлинёнными зёрнами будет проводить тепло лучше вдоль длинных зёрен (в плоскости слоя), чем поперек через множество границ между слоями. Например, в аддитивно изготовленной maraging-стали 1.2709 измеренная тепловая диффузия в плоскости слоёв оказалась ~13% выше, чем в направлении наращивания. Авторы связали это с наличием выраженной текстуры в плоскости xu и отсутствием ее по толщине из-за специальной стратегии сканирования, а также с рассеянием тепла на границах слоев [49]. Другой пример – сплав AlSi10Mg: в работах отмечено, что у СЛС-образцов наблюдается повышенная теплопроводность вдоль направления построения (ось z) по сравнению с поперечным направлением, примерно на 5–7% при комнатной температуре [45,97]. Это объясняется преимущественной ориентацией алюминиевых зёрен и эвтектического кремния вдоль столбчатых ячеек, образующихся при быстрой кристаллизации, а также распределением пор (будет рассмотрено далее). После термообработки (отжига) данная текстура частично разрушается за счёт рекристаллизации, и анизотропия теплопроводности уменьшается или исчезает [97].

Важно отметить, что степень текстурированности сильно зависит от режима сканирования лазера [41]. Если при печати каждый новый слой расплавляется с поворотом на фиксированный угол (например, на 67° или 90° относительно предыдущего слоя), то направленная кристаллографическая текстура «ломается». Таким образом, достигается более равномерная ориентация зёрен в объёме. Именно этим объясняется, почему в ряде случаев анизотропия свойств минимальна: так, при СЛС стареющей стали 300 исследователи не обнаружили существенной анизотропии механических свойств именно благодаря отсутствию выраженной текстуры вследствие вращения траектории лазера между слоями [49]. Следовательно, контролируя параметры затвердевания и траекторию лазерного луча, можно управлять

текстурой материала. В аддитивных биметаллических структурах (например, из сплавов на основе никеля и железа, либо алюминия и титана) за счёт подбора режимов можно либо уменьшить нежелательную анизотропию теплопроводности (делая структуру более изотропной), либо напротив, сформировать заданную текстуру, повышающую теплопроводность в требуемом направлении.

1.3.2. Пористость, непровары, оксиды: влияние на теплопроводность и контактное тепловое сопротивление

Второй крупный источник анизотропии в аддитивных металлах – это **дефекты и гетерогенность структуры**, прежде всего пористость, непровары (отсутствие сплавления) и оксидные включения [51]. Эти дефекты не только снижают среднюю теплопроводность материала, но и могут вводить различия между направлениями теплопереноса.

Поры в аддитивных металлах выступают тепловыми барьерами. Газовые поры практически не проводят тепло по сравнению с металлической матрицей, поэтому наличие даже небольшой пористости заметно уменьшает эффективную теплопроводность сплава [98]. Например, в работе с никелевым суперсплавом CM247LC (аналог Inconel) показано, что уменьшение относительной плотности образцов с $\sim 100\%$ до $\sim 95\%$ приводит к снижению коэффициента теплопроводности, причём это снижение было более выраженным в направлении, перпендикулярном слоям. Наименее плотные образцы, полученные при пониженной энергии лазера, обладали сильной анизотропией: теплопроводность кристаллической решётки (фоонная составляющая) оказалась примерно на 16,5% выше в плоскости XY по сравнению с направлением Z. Авторы установили, что причиной были поры плоско-эллипсоидальной формы, ориентированные вдоль слоёв [94]. Такие поры формируются между слоями при недостаточной энергии плавления и быстром остывании: захваченный в расплаве газ сжимается при охлаждении, создавая **плоские поровые прослойки** на границах слоёв, что приводит к анизотропии свойств [99,100]. В результате модуль упругости материала в плоскости слоёв

оказывается выше (~на 50% для данного сплава), чем вдоль наращивания, что и приводит к более высокой теплопроводности в плоскости (так как теплопроводность решётки пропорциональна $\sqrt{E}$ [94]). Этот пример демонстрирует, как пористость генерирует анизотропию: дефекты, вытянутые параллельно плоскости построения, практически не влияют на тепло, текущей внутри слоя, но сильно препятствуют теплопереносу поперёк слоёв.

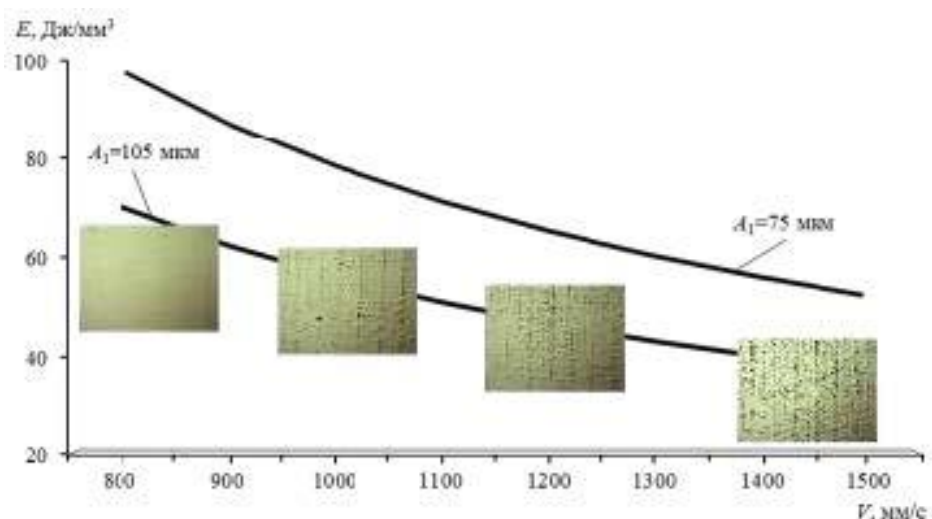


Рис. 1.3. Связь между скоростью сканирования, плотностью энергии лазерного луча и пористостью аддитивного материала [51].

Непровары (отсутствие сплавления) – тип дефекта, когда соседние дорожки или слои не провариваются полностью и остаются разделёнными тонкой щелью [25]. По сути, непроваренная граница – это макроскопический дефект типа трещины или несплошного контакта между участками металла. Наличие даже субмикронного зазора резко увеличивает тепловое сопротивление на границе двух слоев, создавая эффект контактного теплового сопротивления (КТС) [45]. Теплопередача через такой интерфейс ограничена реальной площадью контакта и теплопроводностью остаточного газа/оксида в зазоре. В слоях АМ-металла непровары обычно располагаются по границам слоёв (перпендикулярно оси z) и поэтому особенно ухудшают теплопроводность **вдоль направления построения**, тогда как в плоскости xy их влияние минимально. Можно сказать, что цепочка плохо сплавленных границ между слоями действует подобно теплоизолирующим прослойкам, накладываясь последовательно вдоль z . Исследования показывают, что

увеличение объёма пор и непроваров в образцах приводят к монотонному снижению их теплопроводности и электрической проводимости. Так, для стали 304L, напечатанной методом СЛС, обнаружено ухудшение всех характеристик (механических, электрических и тепловых) по мере роста пористости. В пределе при достижении полной плотности (непрерывная металлическая матрица без дефектов) теплопроводность приближается к уровню, присущему данному сплаву в литом или ковном состоянии. Для аустенитной нержавеющей стали 316L известно, что при оптимальных режимах печати удаётся получить практически изотропные свойства – благодаря отсутствию пор и слабой текстуре (благодаря вращению сканирования), теплопроводность таких образцов почти не зависит от ориентации [25,49].

Оксидные включения и плёнки также вносят вклад в анизотропию теплопередачи. Оксиды могут образовываться по границам слоёв, особенно при печати реактивных металлов (например, меди, титана) и недостаточной инертной атмосфере. Тонкая оксидная плёнка на поверхности предыдущего слоя ухудшает смачивание расплава и может приводить к непровару, а также сама по себе обладает низкой теплопроводностью. Например, при прямом лазерном наплавлении биметаллов на основе меди и стали высокая окисляемость меди приводит к образованию трудноудаляемой оксидной плёнки, препятствующей сцеплению и теплопередаче между медным и стальным слоем. Теплопроводность оксидного покрытия, сформированного на подложке AlSiMg позволяет рассматривать образование оксидных прослоек как самостоятельного фактора теплового сопротивления [2]. Решение проблемы – тщательная защита газовой атмосферой и легирование меди раскислителями [101]. В целом, в биметаллических аддитивных системах качество соединения материалов крайне важно: непрочный, окисленный интерфейс между двумя металлами действует как тепловой барьер. Для эффективного теплообмена в биметалле (например, «сталь–бронза» или «сталь–алюминий») необходимо минимизировать толщину переходной зоны и содержание в ней пор и оксидов. Высокая теплопроводность одного из компонентов может не реализоваться,

если тепло «застревает» на границе из-за большого КТС. Поэтому при разработке биметаллических теплообменных структур особое внимание уделяется чистоте границы раздела материалов и возможно пост-обработке (например, горячему изостатическому прессованию, диффузионному отжигу), чтобы устранить дефекты в зоне сплавления.

1.3.3. Режимы печати и термообработка: влияние на величину и тензор теплопроводности

Как видно из предыдущих разделов, микроструктура (текстура, пористость) и, следовательно, анизотропия свойств аддитивного металла значительно зависят от параметров печати. Режимы аддитивного синтеза – энергия лазера или электронного луча, скорость сканирования, стратегия укладки слоёв, толщина слоя, предварительный подогрев и др. – позволяют целенаправленно влиять на источники анизотропии [19].

Ключевым параметром является удельная энергия лазера (энергия, подводимая к единице объёма порошка). При недостаточной энергии формируются дефекты (поры, непровары) и мелкие зёрна, при избыточной энергии – крупные столбчатые зерна, но возможны пережоги и усадочные поры. Оптимум обычно стремятся подобрать для максимальной плотности. Изменяя энергию лазера или электронного луча, можно управлять и анизотропией: например, для Inconel 718 было показано, что при повышении плотности энергии улучшается сплавление слоёв и меняется характер текстуры, что отражается на механической анизотропии [102]. В целом, более высокая плотность обычно означает меньшую анизотропию теплопроводности. Так, в исследовании по суперсплаву CM247LC при увеличении плотности с ~97% до ~99,5% разница теплопроводности между горизонтальным и вертикальным направлениями снизилась с 16% до величины порядка нескольких процентов (близкой к погрешности измерений) [94]. Это логично, ибо исчезают плоские поры – главный фактор анизотропии в данном случае. Одновременно рост плотности энергии может усилить столбчатый рост зёрен и текстуру. Таким образом, настройка режима требует баланса между минимизацией дефектов и

контролем текстуры. При приоритете изотропности обычно рекомендуют стратегии: повышенная энергия до порога дефектов + чередование направления сканирования лазера по слоям. Для получения же направленной текстуры, наоборот, применяют строго одинаковое направление лазерного прохода в каждом слое (так называемое «паркетное» сканирование без поворота) – это усиливает ориентированный рост зёрен и может быть полезно, если требуется анизотропная теплопроводность.

Термическая обработка – ещё один эффективный инструмент управления анизотропией. Различные режимы термообработки (отжиг, закалка, старение, горячее изостатическое прессование) влияют на структуру зёрен и дефекты. Рекристаллизационный отжиг приводит к зарождению новых зерен и росту их без наследования прежней ориентации. В результате сильно выраженная первичная текстура может существенно ослабевать. Например, образцы AlSi10Mg после термообработки при 530–550 °C демонстрируют исчезновение анизотропии теплопроводности, наблюдаемой непосредственно после печати [97]. Это связано с укрупнением и переориентацией зёрен алюминиевой матрицы, а также с высвобождением и коалесценцией пор (так называемая термоиндуцированная пористость) – поры частично закрываются и перераспределяются более равномерно [45]. Кроме того, в AlSi10Mg отжиг приводит к значительному выпадению кремния из пересыщенного твердого раствора, что само по себе увеличивает теплопроводность сплава (приближая его к показателям литого Al–Si) и делает ее одинаковой в разных направлениях.

Горячее изостатическое прессование (ГИП) – ещё более радикальный метод: он устраняет практически все внутренние поры давлением и температурой, тем самым повышая плотность до 100%. ГИП часто применяют для критичных деталей из титановых и никелевых сплавов, требуя изотропных свойств – после ГИП механические свойства и теплопроводность таких деталей сопоставимы с поковками, а анизотропия минимальна [103].

Следует отметить, что помимо устранения анизотропии, термообработка может быть использована и для её направленного формирования. Например,

контролируемое охлаждение или термомеханическое воздействие способно усилить определённую текстуру за счёт роста наиболее энергетически выгодно ориентированных зёрен. Также возможно селективно воздействовать на разные части биметаллической конструкции: к примеру, закалкой одного из слоёв создать там более дисперсную структуру (понижая теплопроводность в этом элементе), тогда как другой материал оставить крупнозернистым столбчатым (с высокой теплопроводностью в заданном направлении). Такие приёмы позволяют градиентно менять теплопроводность в разных зонах изделия, добиваясь направленного теплоотвода или теплоизоляции там, где нужно. Однако практическая реализация управляемой анизотропии требует тонкого понимания взаимосвязи «режим – микроструктура – свойства» для конкретного материала. В литературе появляются сведения о возможности «настройки» морфологии зёрен через параметры процесса даже локально в пределах детали. Например, для ЭЛП-печати Inconel 718 показано, что изменением скорости и стратегии плавления в разных зонах можно получить чередование областей со столбчатыми и равноосными зёрнами [25]. В будущем это открывает путь к инженерии теплопроводности – когда внутри монолитной аддитивной детали заложены участки с различной (в том числе анизотропной) теплопроводностью, выполняющие роль тепловых каналов или изоляторов.

Чтобы наглядно сопоставить влияние рассмотренных факторов, в Табл. 1.1. приведены некоторые литературные данные об анизотропии теплопроводности в различных сплавах после аддитивного производства. Указаны относительные различия теплопроводности (или тепловой диффузии) между направлением построения (z) и горизонтальной плоскостью ($xу$) для нескольких типичных материалов.

Табл. 1.1. Примеры анизотропии теплопроводности в аддитивных сплавах.

Материал (метод аддитивного производства)	Анизотропия теплопроводности	Примечания и источник
---	------------------------------	-----------------------

Материал (метод аддитивного производства)	Анизотропия теплопроводности	Примечания и источник
Стареющая сталь 1.2709 (СЛС)	$\lambda_{xy} \approx 1,13\lambda_z$ (на 13% выше в плоскости)	Текстура: сильная в плоскости xy (74% в направлении $\langle 101 \rangle$), отсутствие текстуры вдоль z из-за вращения сканирования [49].
AlSi10Mg (СЛС)	λ_z на ~5–7% выше, чем λ_{xy} при 20 °C	Обусловлено столбчатой структурой алюминиевой матрицы и ориентацией пор; после отжига анизотропия исчезает [97].
Ni-суперсплав CM247LC (СЛС)	λ_{xy} выше λ_z на ~16,5% (при пониженной плотности)	Выявлено разделение на электронную и решёточную компоненты теплопроводности: электронная изотропна, решёточная анизотропна из-за плоских пор между слоями. При почти полной плотности разница снижается до нескольких процентов [94].
Сталь 316L (СЛС)	$\lambda_{xy} \approx \lambda_z$ (~0% разницы при оптимальных режимах)	При чередовании направления лазера и полном проплавлении слоёв анизотропия не превышает погрешность. Для сравнения: механическая анизотропия предела прочности 316L обычно <5% [104].
Сталь CL 20ES (СЛС)	$\lambda_z > \lambda_{xy}$ на 26%	Имеет место анизотропия, выраженная в большей теплопроводности в направлении оси построения [4,21].
Ti6Al4V (ЭЛП, СЛС)	Данные по теплопроводности ограничены; ожидается умеренная анизотропия	Известна высокая анизотропия механических свойств (прочность вдоль z ниже xy на 5–20%) из-за текстуры α -фазы. Теплопроводность α -Ti по оси построения ниже, чем по плоскости [95].

Как видно из таблицы, **величина анизотропии теплопроводности существенно варьируется** для разных материалов и условий печати. В одних случаях (сталь 316L, оптимизированная печать) она практически отсутствует; в других (никелевые и стареющие стали) достигает ~10–15%; в экстремальных случаях дефектной структуры – десятков процентов. Общая тенденция такова, что устранение дефектов (пор, непроваров) и рандомизация текстуры уменьшают анизотропию, тогда как выраженная текстура или слоистые дефекты её усиливают [25].

Анизотропия в аддитивных металлах имеет мультифакторную природу. Кристаллографическая текстура и столбчатые зерна, возникающие при

направленном затвердевании, дают базис для анизотропного теплопереноса. Дополнительные эффекты вносят пористость и непровары, формируя тепловые барьеры преимущественно между слоями. Параметры процесса и постобработка способны как нивелировать, так и усиливать эти факторы. Понимание и контроль источников анизотропии открывают возможности целенаправленной настройки **тензора теплопроводности** аддитивного материала. В контексте биметаллических композитов это означает, что грамотным подбором режимов печати для каждой из составляющих и обработки зоны их соединения можно добиться оптимального распределения теплового потока в изделии. Например, можно сконструировать композицию, в котором тепло распространяется преимущественно вдоль одной оси (за счёт текстуры или использования высокотеплопроводного слоя), оставаясь при этом изолированным в перпендикулярном направлении (за счёт пористой прослойки или материала с низкой теплопроводностью). Таким образом, управление анизотропией становится инструментом инженерии тепловых свойств аддитивных металлов, что особенно актуально для функционально градиентных и многоматериальных структур.

1.4. Металлы и сплавы для направленной теплопроводности

1.4.1. Подход к выбору пар материалов

Для организации направленных тепловых потоков в аддитивных биметаллических конструкциях требуются пары с большим различием в теплопроводности, приемлемой совместимостью по температуре плавления и коэффициенту линейного термического расширения (КЛТР), а также контролируемой реакционной способностью на границе раздела. Практически востребованы комбинации теплопроводных медных и алюминиевых сплавов со сталями, жаропрочными сплавами никеля и молибдена.

Успешность теплового проектирования подтверждена как для селективного лазерного и сплавления (СЛС), так и для прямого подвода энергии и дуговой наплавки проволоки, включая радиальные («ядро–

оболочка») биметаллы, показавшие механическую и интерфейсную стабильность при многослойной укладке по окружности [55].

Ниже систематизированы материалы по контрасту теплопроводности, физико-химической совместимости (температура плавления, смачиваемость, образование интерметаллидов, растворимость), рискам, связанным с КЛТР и коррозией и приведены способы их минимизации на интерфейсе для аддитивного изготовления.

Формирование работоспособного биметаллического композита) определяется не только термонапряжённым состоянием, но и физико-химической совместимостью контактирующих металлов. Для рассматриваемых в работе систем (Inconel 718 – медные сплавы, Inconel 718 – CoCrMo, аустенитные стали – бронзы и медь – стали) ключевыми являются четыре группы факторов:

- смачиваемость жидкой фазы и способность к образованию непрерывного сварного соединения;
- взаимная растворимость и характер фазовых превращений;
- склонность к образованию хрупких интерметаллидных фаз;
- коррозионная совместимость и гальванические эффекты.

1.4.2. Смачиваемость и свариваемость

Смачиваемость оценивается равновесным контактным углом расплава на твёрдом подложке и определяет, насколько полно жидкий металл заполняет неровности поверхности и обеспечивает сцепление. Для систем медь – сталь показано, что при температурах порядка 1100 °С и выше поведение носит характер активного смачивания: растворение железа в жидкой меди приводит к быстрому уменьшению контактного угла (до ~10° для ферритной стали и до ~26° для стали 316L), что сопровождается интенсивным растеканием капли по поверхности и формированием переходной диффузионной зоны [105,106].

В биметаллических структурах 316L – CuSn10, полученных методом СЛС, наблюдается непрерывное сварное соединение с шириной переходной зоны порядка 160–400 мкм, что также свидетельствует о хорошей

смачиваемости и интенсивном межфазном обмене при плавлении бронзы на поверхности стали [107]. Аналогичный характер поведения фиксируется при лазерной сварке аустенитных сталей с медью: при правильно подобранной плотности теплового потока достигается полная проплавка и отсутствие несмоченных участков, хотя диапазон технологических параметров достаточно узок [108,109].

Для композиций Inconel 718 – медные сплавы (в частности, GRCo84) ряд работ по изготовлению биметаллических образцов показывает возможность получения прочной сварки без макроскопических непроваров: за счёт высоких температур в ванне расплава и близких параметров кристаллической решётки (ГЦК-решётка как у никелевой матрицы, так и у медного сплава) достигается полное смачивание и перемешивание в зоне шва [24,42,43].

В системе Inconel 718 – CoCrMo высокое сродство никеля и кобальта и одинаковый класс сплавов (коррозионно-стойкие, высоколегированные) также обеспечивает благоприятную смачиваемость и непрерывную сварку при наплавке. Соответствующие биметаллические образцы демонстрируют сплошную зону сплавления без непроваров, хотя локальные области ликвации легирующих элементов приводят к неоднородности микротвёрдости [24,110].

Для систем типа сталь/алюминий, представляющих интерес как предельный случай по несовместимости, смачиваемость расплавленным алюминием стали также улучшается при повышении температуры, однако уже на ранних стадиях формируется сплошной интерметаллидный слой, который одновременно обеспечивает сцепление и ухудшает пластичность соединения. Это задаёт верхнюю границу для теплового потока и времени пребывания в жидком состоянии [111].

1.4.3. Взаимная растворимость и фазовый состав

Совместимость пары во многом определяется положением системного диаграммы состояния. В системе Fe – Cu взаимная растворимость в твёрдом состоянии ограничена, при этом железо обладает заметной растворимостью в жидкой меди. Это приводит к формированию двухфазных структур (α -Fe и α -

Cu) и выраженной дендритной ликвации при быстрой кристаллизации. Для функционально-градиентных структур Fe – Cu, полученных методом прямой наплавки, показано, что именно ограниченная растворимость и различие в коэффициентах линейного расширения являются источником горячих трещин, что требует использования градиентных композиций и технологических приёмов снижения уровня растягивающих напряжений [47].

В медно-стальных биметаллических листах, получаемых горячей прокаткой, микроструктура также определяется частичной взаимной растворимостью железа и меди: в зоне соединения фиксируется тонкий слой, обогащённый медью, с отдельными включениями железа; при соблюдении температурно-деформационного режима удаётся избежать образования толстых хрупких прослоек и сохранить пластичность биметаллического листа [112].

Для пары Inconel 718 и GRCo84 (и других композиций никелевых суперсплавов с медными сплавами) диаграмма состояния характеризуется ограниченной растворимостью Cu в γ -матрице на основе никеля и наоборот. Устойчивых интерметаллидов Ni-Cu при рабочих температурах не образуется, поэтому переходная зона представляет собой градиентный твёрдый раствор Ni-Cu с частицами фаз, обогащённых хромом и ниобием. Это позволяет, с одной стороны, обеспечить повышенную теплопроводность по сравнению с монолитным Inconel 718, а с другой – сохранить приемлемый уровень прочности соединения [113].

В системе Inconel 718 – CoCrMo взаимная растворимость никеля и кобальта высока, а фазовый состав обеих легированных матриц определяется, главным образом, карбидами и интерметаллидами на основе ниобия, титана и хрома. Для родственных биметаллических систем (Inconel 718 – сплавы вольфрама) показано, что в процессе наплавки формируется широкая зона взаимного дисперсионного затвердевания без непрерывных хрупких прослоек, однако наблюдаются зоны сегрегации ниобия и формирование фазы Лавеса по границам дендритов. Аналогичное поведение ожидается и для связки Inconel 718 – CoCrMo [110,114].

Для границы аустенитной стали и бронзы (CuSn10, Al-бронзы) характерна значительная растворимость железа в жидкой бронзе и ограниченная растворимость меди в аустените; в переходной зоне формируются эвтектические структуры $\gamma\text{-Fe} + \alpha\text{-Cu}$ и, в случае оловянистых бронз, интерметаллиды типа железо – олово. В биметаллических структурах 316L – CuSn10 после СЛС фиксируются три характерные зоны с различным соотношением аустенитной и бронзовой составляющих и заметным градиентом твёрдости. Для алюминиевых бронз, наплавленных на сталь 316L, описана сложная многослойная переходная зона с участием богатых фаз, обогащённых медью и железом [47,52,107].

Наконец, для пары сталь/алюминий, представляющей предельный случай, фазовая диаграмма Fe – Al предопределяет образование сплошного слоя интерметаллидов FeAl_3 и Fe_2Al_5 , обеспечивающих сцепление, но резко снижающих пластичность и трещиностойкость [111].

1.4.4. Образование хрупких интерметаллидов

С точки зрения эксплуатационной надёжности особенно критична склонность системы к формированию непрерывных хрупких интерметаллидных слоёв в зоне контакта. Для медь – железо и медь – сталь при оптимальных режимах сварки, прокатки или наплавки характерно образование либо очень тонкого ($<5\text{--}10$ мкм) интерметаллидного слоя, либо вообще преимущественно двухфазной ($\alpha\text{-Fe} + \alpha\text{-Cu}$) структуры, что обеспечивает хорошую пластичность и усталостную прочность соединения. Однако при перегреве и длительном выдерживании в интервале $700\text{--}900$ °C возможно развитие более толстых слоёв интерметаллидов и горячих трещин [109].

В системе сталь – алюминий, напротив, даже при сравнительно коротком времени сварки образуется сплошная интерметаллидная прослойка (FeAl_3 , Fe_2Al_5), которая является типичным источником зарождения трещин. Это вынуждает применять промежуточные слои, термобарьерные покрытия или строго контролировать тепловой цикл [111].

Для композиций Inconel 718 – медные сплавы и Inconel 718 – CoCrMo критичны интерметаллиды на основе ниобия и титана (фазы Лавеса, карбиды NbC и др.) В биметаллических композициях Inconel 718 – GRCo84 показано, что при грамотном подборе параметров наплавки переходная зона содержит преимущественно градиентный твёрдый раствор Ni – Cu и дисперсные обогащённые ниобием частицы. При этом непрерывного хрупкого слоя не образуется, а прочность соединения по сдвигу достигает ~220–230 МПа даже после термоциклирования. Для интерфейса 316L/Inconel 718 при СЛС также наблюдается сплошная зона взаимного сплавления без трещин и с низким уровнем пористости (~0,27 %), но с повышенной микротвёрдостью по сравнению с каждой из монокристаллических зон вследствие упрочнения дисперсной фазой [42,113–115].

В биметаллических структурах 316L – CuSn10 после СЛС выделяются участки с сильно повышенной твёрдостью (>400 HV) и сложной эвтектической морфологией, что указывает на наличие жёстких интерметаллидных фаз Fe – Sn и Cu – Sn; при этом прочность при растяжении и изгибе остаётся удовлетворительной, если доля таких участков невелика и они не образуют непрерывного слоя [52,115].

1.4.5. Коррозионная совместимость

Коррозионная совместимость определяется одновременно химической стойкостью каждого компонента и возможностью возникновения гальванических пар. Медно-стальные биметаллы нашли широкое применение в коррозионно-агрессивных средах именно благодаря сочетанию высокой электро- и теплопроводности и удовлетворительной коррозионной стойкости. При этом отмечается, что в хлорид-содержащих растворах медь обычно играет роль более благородного электрода и может выступить в роли катода для стали в зонах повреждений, что требует учёта при проектировании [112].

Пара Inconel 718 – GRCo84 разрабатывалась в первую очередь для работы в условиях высокотемпературной газовой коррозии (камеры и сопла ЖРД). Никелевый суперсплав формирует защитную оксидную плёнку на

основе Cr_2O_3 , в то время как медный сплав GRCo84 обеспечивает интенсивный отвод тепла, препятствуя локальному перегреву и ускоренной окислительной деградации Inconel 718. При этом термоциклирование до температур порядка 300 °C практически не снижает прочность соединения [43,44,113].

В композициях нержавеющая сталь 316L – бронзы (CuSn10, Al-бронзы) в водных и особенно хлорид-содержащих средах бронза выступает менее благородным электродом по сравнению с аустенитной сталью, что создаёт риск локальной гальванической коррозии бронзовой фазы в зоне контакта. С другой стороны, наличие бронзового слоя повышает стойкость к кавитации и эрозии, что критично для узлов трения и теплообмена [107].

Для пары Inconel 718 – CoCrMo обе составляющие обладают высокой коррозионной стойкостью и формируют стабильные пассивные плёнки на основе Cr_2O_3 . В водных средах возможна гальваническая пара с умеренной разностью потенциалов, однако в области высокотемпературной газовой коррозии система в целом благоприятна [24,110].

1.4.6. Обобщение критериев физико-химической совместимости

С учётом изложенного, для теплонагруженных биметаллических элементов можно сформулировать следующие критерии физико-химической совместимости пар металлов:

- высокая или по крайней мере удовлетворительная смачиваемость при температурах порошкового сплавления или проволоочной наплавки, обеспечивающая сплошную сварку без непроваров;
- ограниченная, но не нулевая взаимная растворимость с отсутствием непрерывных хрупких интерметаллидных слоёв в зоне контакта;
- отсутствие резко различающихся потенциалов коррозии в предполагаемой рабочей среде либо возможность компенсировать гальванические эффекты конструктивными решениями;
- по возможности – родственный тип кристаллической решётки.

Обобщённо эти критерии представлены в **Ошибка! Источник ссылки не найден..**

Табл. 1.2. Физико-химическая совместимость основных пар металлов.

Пара	Смачиваемость	Растворимость	Интерметаллиды	Коррозия
Inconel 718 – GRCo84 [24,43,113]	Хорошая: формируется непрерывная зона сплавления с полным смачиванием	Ограниченная растворимость Cu в γ -матрице Ni и Ni в Cu; переходная зона – градиентный твёрдый раствор Ni–Cu с Nb- и Cr-обогащёнными частицами	Непрерывный интерметаллидный слой отсутствует; возможна локальная сегрегация Nb (фаза Лавеса) при перегреве	Высокая стойкость к газовой коррозии; медный слой снижает перегрев Inconel, но в водных средах возможны гальванические эффекты
Inconel 718 – CoCrMo [24,110]	Хорошая: сплавы никеля и кобальта обеспечивают активное смачивание и сплошную зону сплавления	Высокая взаимная растворимость никеля и кобальта	Склонность к формированию фаз Лавеса Nb/Ti/Cr и карбидов по границам дендритов, но без сплошного хрупкого слоя при оптимальных режимах	Обе фазы коррозионно-стойкие (Cr_2O_3 -плёнка); в водной среде возможны умеренные гальванические эффекты, но в газовых средах система устойчива
Нержавеющая сталь 316L – CuSn10 (оловянистая бронза) [53,107]	Хорошая: полное смачивание и прочное сваривание с шириной переходной зоны ~160–400 мкм	Значительная растворимость железа в жидкой бронзе, ограниченная растворимость меди в аустените; формируются эвтектики γ -Fe + α -Cu и фазы Fe – Sn	Локальные участки с высокой твёрдостью (>400 HV) и фазами Fe – Sn; при контролируемых режимах не образуют сплошного слоя	В водных и хлоридных средах бронза – менее благородный электрод, возможна гальваническая коррозия бронзы, но повышенная эрозионная стойкость
Нержавеющая сталь 316L – Al-бронза [47]	Удовлетворительная: наплавленная Al-бронза хорошо	Растворимость Fe в расплаве Al-бронзы, ограниченная растворимость	Возможны хрупкие фазы на основе Fe – Al и Fe – Cu, однако при градиентной	Коррозионная стойкость определяется сочетанием пассивируемой

	смачивает сталь 316L, образуя непрерывную переходную зону	Cu и Al в аустените, сложная многослойная структура переходной зоны	композиции и ограничении плотности теплового потока удаётся избежать толстых интерметаллидных слоёв	стали и кавитационно-стойкой бронзы; гальванические эффекты зависят от среды
Медь – железо (функционально-градиентный материал) [47]	Активное смачивание: жидкая медь интенсивно растекается по железу при высоких температурах	Ограниченная взаимная растворимость в твёрдом состоянии, значительная – в жидком; формируются двухфазные структуры (α -Fe + α -Cu)	При высоких долях меди и резких градиентах состава возможны горячие трещины, но при плавных градиентах и оптимальных режимах сплошного хрупкого слоя нет	В коррозионно-агрессивных средах возможно образование гальванических пар, но при рациональной конструкции обеспечиваются требуемые ресурсы
Медь – углеродистая сталь [112]	Хорошая: достигается надёжное металлическое сцепление с полным контактом слоёв	Частичная растворимость Fe и Cu, формирование тонкого переходного слоя, обогащённого Cu; отсутствие объёмных реакционных фаз при оптимальных режимах	Толстый интерметаллидный слой, как правило, не формируется	Биметаллические листы демонстрируют хорошую коррозионную стойкость и широко применяются в промышленности

1.4.7. Температуры солидуса и рабочие температурные диапазоны конструкционных и теплопроводящих материалов

Температура солидуса (T_s) определяет границу начала плавления и служит важнейшим параметром при выборе режимов аддитивного выращивания и оценки термостойкости металлических систем. Однако для биметаллических композитов, в которых слои выполняют разные функциональные роли, рабочая температура определяется не только T_s , но и:

- устойчивостью микроструктуры при заданной температуре;

- скоростью ползучести;
- устойчивостью к термоциклическому разрушению;
- поведением области контакта в условиях разности коэффициентов линейного расширения (КЛТР);
- наличием или отсутствием механической нагрузки на рассматриваемый слой.

Особенно важным является различие несущих материалов (Inconel 718, CoCrMo, нержавеющая сталь 316L, углеродистые стали) и теплопроводящих наполнителей (чистая медь, GRCo-84, CuSn10, алюминиевые бронзы), поскольку требования к рабочим температурам этих групп существенно отличаются.

Температура солидуса суперсплава Inconel 718 лежит в диапазоне 1260–1290 °С, ликвидуса – 1330–1360 °С. Прочность обеспечивается фазами γ' и γ'' ; при длительной эксплуатации пределом служат 650–700 °С, выше которых скорость ползучести существенно возрастает.

Температуры солидуса и ликвидуса CoCrMo находятся в пределах 1320–1400 °С. Прочностная и коррозионная стабильность сохраняются до 600–800 °С, благодаря устойчивости карбидов Co_2C_6 и Cr_7C_3 [117].

Солидус нержавеющей стали 316L – приблизительно 1370 °С, ликвидус – приблизительно 1400–1420 °С. Рабочие температуры ограничены 600 °С из-за роста ползучести и возможного σ -фазного превращения при длительных выдержках [47].

Температура солидуса углеродистой стали (содержание С до 0,8%) составляет около 1450 °С, ликвидуса – 1500–1520 °С. Рабочий диапазон 450–500 °С ограничивается ускоренной ползучестью и рекристаллизацией [118].

Температура плавления чистой бескислородной меди – 1084 °С. В самостоятельной несущей роли рабочий диапазон ограничивается 300–500 °С, однако в составе биметалла, при отсутствии растягивающих напряжений и надлежащем режиме теплообмена, возможна работа вплоть до 550–650 °С, что соответствует данным по охлаждаемым элементам ЖРД [119,120].

Солидус высокотеплопроводного медного сплава GRCo-84 составляет 1070–1080 °С, ликвидус – около 1200 °С. При работе в качестве стенки охлаждаемого канала используемая температура ограничивается 500–650 °С, что соответствует устойчивости дисперсий Cr₂Nb и допустимому уровню ползучести. Как теплопроводящий наполнитель допускает эксплуатацию до 650–700 °С, пока сохраняется стабильность дисперсий Cr₂Nb и отсутствуют механические нагрузки. Это подтверждается данными по камерам сгорания, где тепловой поток переносится через медный слой к высокопрочной оболочке. [121].

Для оловянистой бронзы CuSn10 солидус составляет 840–860 °С, ликвидус – 1020–1040 °С. В собственно несущем режиме рабочий диапазон ограничивается 300–350 °С, но в роли теплопроводящего наполнителя допустима температура порядка 400–450 °С, при условии отсутствия значительных напряжений и контроля роста интерметаллидов Fe–Sn в зоне контакта [122].

По данным металлографии и термофизических измерений алюминиевой бронзы (Cu–Al), солидус составляет 1020–1040 °С, ликвидус – 1040–1060 °С. В биметаллической структуре допустим диапазон 450–550 °С, поскольку β-фаза сохраняет стабильность, а тепловое расширение бронзы хорошо согласуется с нержавеющей сталью 316L [120].

Температуры плавления металлов и сплавов в различных парах приведены в Табл. 1.3.

Табл. 1.3. Температуры солидуса и допустимые рабочие диапазоны для конструкционных и теплопроводящих сплавов

Материал	Температура солидуса	Рабочий диапазон (как несущий материал)	Рабочий диапазон (как теплопроводящий материал)
Inconel 718	1260–1290 °С	650–700 °С	–
GRCo84	1070–1080 °С	500–650 °С	≤650–700 °С
CoCrMo	1320–1400 °С	600–800 °С	–
Нержавеющая сталь 316L	1370–1390 °С	≤600 °С	–
CuSn10	840–860 °С	≤300–350 °С	≤450 °С
Al-бронза	1020–1040 °С	≤450 °С	≤500–550 °С

Медь	1084 °С	≤300–500 °С	≤550–650 °С
Углеродистая сталь	1392–1538 °С	≤450–500 °С	–

Таким образом, для конструкционных матриц рабочая температура определяется жаропрочностью и скоростью ползучести, тогда как для медных сплавов, применяемых как теплопроводящие наполнители, критерием служит термическая и геометрическая стабильность при минимальных механических напряжениях. В этом случае допустимый диапазон может приближаться к 0,55–0,65 температуры солидуса, что соответствует 550–700 °С для различных сплавов – при условии стабильности интерфейса и отсутствия активного механического нагружения.

1.4.8. Термопрочность материалов: кратковременная прочность, температурная текучесть и поведение при ползучести

Термопрочность металлов, применяемых в биметаллических композитах, определяется их способностью сопротивляться текучести и ползучему течению при повышенных температурах, а также сохранять структурную целостность и стабильность интерфейса при циклическом нагружении. Для систем, включающих высокопрочные никелевые и кобальтовые сплавы в сочетании с медными теплоотводящими материалами, решающим является согласование свойств: несущие слои должны обладать достаточной жаропрочностью, тогда как теплопроводящие слои – минимальной склонностью к ползучести во избежание отслаивания от матрицы, особенно при остывании.

Никелевый суперсплав Inconel 625 характеризуется высоким пределом текучести при комнатной температуре (~460 МПа), что делает его эффективным несущим материалом в многослойных теплонагруженных конструкциях. При повышении температуры его прочность снижается умеренно благодаря стабильности твердорастворного упрочнения и устойчивой к старению микроструктуры. Показано, что сплав сохраняет значительную часть своих прочностных характеристик вплоть до 600 °С, демонстрируя

хорошую термopрочность и низкую склонность к высокотемпературной текучести [24].

Inconel 718 обладает более высокой жаропрочностью по сравнению с Inconel 625 благодаря наличию дисперсных фаз γ' и γ'' , обеспечивающих устойчивость структуры вплоть до 650–700 °C. Испытания биметаллических композиций Inconel 718 – CoCrMo показали, что этот сплав сохраняет пластичность и сопротивление разрушению даже при больших деформациях: образцы не разрушались вплоть до $\varepsilon \approx 0,4$. Высокотемпературная прочность Inconel 718 подтверждена множеством исследований, включая анализ фазового упрочнения и диффузионных процессов при нагреве [82].

Кобальт-хром-молибденовый сплав CoCrMo является одним из наиболее термopрочных материалов среди применяемых в биметаллах. Его микроструктура, насыщенная карбидами Cr_7C_3 и Co_{23}C_6 , обеспечивает высокий предел текучести и устойчивость к ползучести вплоть до 700–800 °C. Испытания биметаллической пары Inconel 718 – CoCrMo показывают, что CoCrMo сохраняет твёрдость и несущую способность при длительном нагреве (например, снижение твёрдости с ~ 430 HV до ~ 400 HV после выдержки при 800 °C является умеренным и не ведёт к деградации интерфейса). Сплав демонстрирует медленное развитие диффузионной ползучести, что делает его надёжным верхним слоем теплонагруженных деталей [115].

Аустенитная сталь 316L демонстрирует умеренную термopрочность благодаря стабильной аустенитной матрице и хорошей коррозионной стойкости. Однако в аддитивных технологиях её механическое поведение существенно зависит от текстурной анизотропии. Исследования, выполненные для образца СЛС, показывают, что вдоль направления построения предел текучести может достигать 480–500 МПа, тогда как в поперечном направлении он снижается до 430–450 МПа. При температурах выше 550–600 °C наблюдается рост ползучести и вероятность σ -фазного превращения, что ограничивает её применение в качестве несущего слоя при более высоких температурах [104,123].

Углеродистые стали обладают приемлемой кратковременной прочностью при умеренных температурах, но характеризуются сравнительно низкой термостойкостью. При температурах выше 450–500 °С начинается активная рекристаллизация и диффузионно-контролируемая ползучесть, что ограничивает их применение в качестве несущего слоя в теплонагруженных композитах. Тем не менее, их включение в состав функционально-градиентных структур Cu–Fe значительно повышает механические характеристики композита благодаря высокой жёсткости и способности стальной матрицы ограничивать пластическую деформацию медной фазы [47].

GRCor-84 – специализированный медный сплав, разработанный NASA для работы в зонах высоких тепловых потоков. Его термопрочность обусловлена дисперсией интерметаллида Cr_2Nb , который эффективно подавляет ползучесть и стабилизирует микроструктуру при температурах 500–650 °С. В условиях минимальной механической нагрузки (например, в роли теплопроводящего наполнителя) сплав способен сохранять микроструктурную стабильность и удовлетворительную прочность вплоть до 650–700 °С. Это делает GRCor-84 наиболее пригодным медным сплавом для интеграции с никелевыми суперсплавами в теплонагруженных композициях [24,124].

Чистая медь обладает низким пределом текучести (~33 МПа) и высокой склонностью к ползучести, которая начинает активно развиваться при температурах выше $0,45 \cdot T_{\text{пл}}$ (~400–450 °С). Однако в биметаллических структурах, где медь не несёт механическую нагрузку, а выполняет роль теплопроводящего наполнителя, её допустимый рабочий диапазон значительно расширяется – вплоть до 550–650 °С. В этом случае её функциональные свойства определяются не прочностью, а сохранением формы каналов и стабильностью теплопроводности при циклическом нагреве [47].

Оловянистая бронза CuSn10 обладает более высокой прочностью, чем чистая медь, но её термопрочность ограничена началом ползучести при температурах около 350 °С. В составе биметаллических структур её рабочий диапазон расширяется до ~450 °С благодаря тому, что медная фаза не несёт

значительной нагрузки, а стальная матрица или Ni-основанный слой препятствуют развитию пластической деформации и ползучего течения [53,107].

Алюминиевые бронзы обладают более высокой жаростойкостью, чем оловянистые, благодаря стабильности β -фазы. Как самостоятельные материалы они сохраняют прочность до 400–450 °С, а в составе биметаллических конструкций могут применяться при 500–550 °С. Их использование в функционально-градиентных структурах с нержавеющей сталью повышает как термостойкость, так и сопротивление ползучести бронзовой фазы [47].

В функционально-градиентных композитах Cu–Fe, получаемых методом прямого подвода энергии и материала, стальная матрица эффективно подавляет ползучесть медной фазы, обеспечивая повышение термостойкости композита до 450–550 °С. Композитные структуры демонстрируют сочетание высокой теплопроводности (за счёт меди) и высокой термопрочности (за счёт железа), что делает их перспективными для теплоотводящих элементов сложной формы [47].

1.4.9. Термическое расширение и остаточные напряжения

Коэффициенты линейного термического расширения определяют уровень остаточных напряжений в биметаллической структуре при охлаждении с температуры построения, а также напряжения при термоциклировании. Чем меньше разность КЛТР, тем ниже риск термических трещин, однако умеренная разность может быть использована для создания полезных предварительных напряжений сжатия.

Никелевый суперсплав Inconel 718 характеризуется умеренным КЛТР, составляющим $13,36\text{--}15,71 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ в диапазоне 25–427 °С [125]. Относительно низкое значение КЛТР для материала такого класса обеспечивает благоприятное сочетание тепловой стабильности и устойчивости размеров при повышении температуры. Это обстоятельство является одним из факторов, которые обеспечивают совместимость Inconel 718 с медным наполнителем в

биметаллических конструкциях, поскольку ограничивает термические напряжения, возникающие на интерфейсе в условиях циклических нагрузок.

Высокотеплопроводный медный сплав GRCo-84, разработанный NASA для теплонапряжённых узлов ракетных двигателей, обладает несколько более высоким коэффициентом теплового расширения – $17,3\text{--}18,9 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ при температурах $127\text{--}527 \text{ }^{\circ}\text{C}$ [121]. Данные демонстрируют, что КЛТР GRCo-84 хорошо согласуется с конструкционными материалами и остаётся технологически приемлемым для сопряжения с никелевыми суперсплавами в биметаллических композициях. Повышенный коэффициент расширения компенсируется высокой теплопроводностью и устойчивостью к разрушению при многократном термоциклировании [43,44,113].

Кобальтовый сплав CoCrMo демонстрирует зависимость КЛТР от метода изготовления. Например, при температуре $500 \text{ }^{\circ}\text{C}$ значения КЛТР для образцов, полученных методом СЛС и литья, составляют $15,0\text{--}19,5 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ и $22,0 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ соответственно. При $600 \text{ }^{\circ}\text{C}$ коэффициент снижается до $12,5\text{--}14,5 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ и $18,5 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ [126]. Сочетание умеренного КЛТР и высокой жаропрочности делает CoCrMo стабильным материалом для высокотемпературных областей биметаллических конструкций, где параметр теплового расширения критически важен для предотвращения межфазного растрескивания. Поскольку КЛТР CoCrMo близок к значениям для никелевых суперсплавов, их взаимодействие в составе биметаллов сопровождается минимальными термомеханическими напряжениями [26].

Аустенитная сталь 316L демонстрирует линейный рост коэффициента теплового расширения с $16,4 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ до $17,2 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ при температурах $0\text{--}975 \text{ }^{\circ}\text{C}$ [127]. Такие значения типичны для аустенитных сталей и обеспечивают удовлетворительную совместимость с медными сплавами, но требуют учёта тепловых деформаций при сопряжении со сплавами на основе никеля, имеющими более низкий КЛТР. При проектировании биметаллических структур на основе 316L необходимо учитывать относительно высокий коэффициент расширения, особенно при высоких температурах.

Оловянистая бронза CuSn10 характеризуется сравнительно высоким коэффициентом теплового расширения – $18 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ (20–300 °C), что отражено стандарте для этого сплава [128]. Значения КЛТР CuSn10 согласуются с данными для других бронз и указывают на повышенную чувствительность к термическим напряжениям при сопряжении с конструкционными материалами с низким КЛТР [53,107]. Несмотря на это, бронза часто используется как часть теплопроводящего слоя благодаря стабильности свойств в пределах рабочего диапазона и хорошей коррозионной и стойкости.

КЛТР алюминиевых бронз Cu–Al сильно зависит от температуры и от доли алюминия в составе. Зависимость КЛТР алюминиевых бронз от состава и температуры приведены на рис. 5.

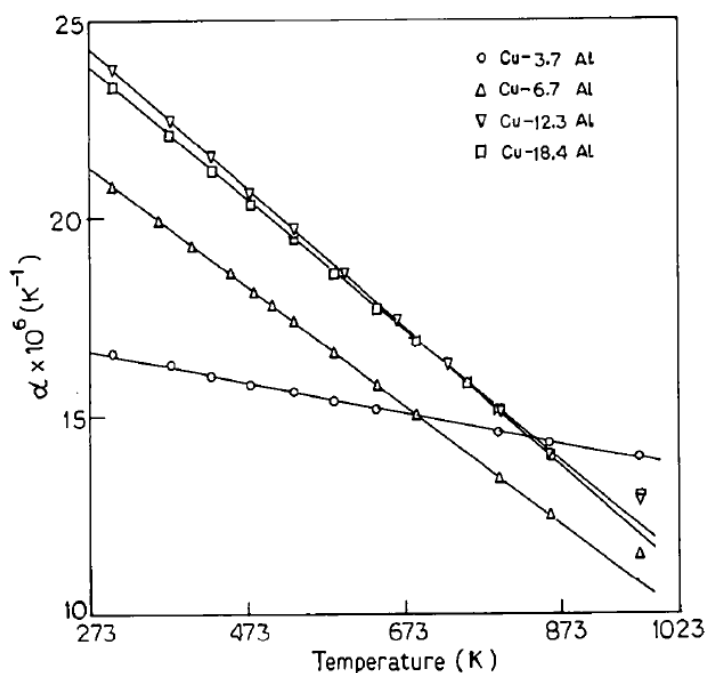


Рис. 1.4. Зависимость КЛТР алюминиевых бронз от состава и температуры [129].

Столь выраженная зависимость КЛТР от температуры накладывает ограничения на использование алюминиевых бронз при термоциклировании в большом диапазоне рабочих температур. Однако их преимуществом является высокая жаростойкость β-фазы Cu–Al, сохраняющей структуру и механические свойства при циклических нагревах [70].

Чистая медь (Cu) демонстрирует рост КЛТР с температурой ($16,7 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ при 300 K; $18,6 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ при 600 K и $20,9 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ при 900 K) [130]. Высокие значения КЛТР сочетаются с выдающейся теплопроводностью, что делает медь ключевым компонентом тепловых каналов и охлаждающих контуров. Несмотря на сравнительно высокие тепловые деформации, стабильность меди как теплопроводящего слоя в биметалле обеспечивается минимальной механической нагрузкой в связи с очень высокой пластичностью [109,120].

Углеродистые стали демонстрируют довольно низкий коэффициент теплового расширения среди рассмотренных материалов – $11,0\text{--}15,3 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ (0–1000 °C) [131]. Низкое значение КЛТР делает углеродистую сталь эффективным несущим слоем, устойчивым к термическим напряжениям, однако при соединении с медными или бронзовыми сплавами возникает существенная разница в тепловых деформациях, что требует применения компенсирующих интервалов, мягких переходных зон или градиентных интерфейсов [109,112].

1.4.10. Вывод о практической совместимости пар металлов

«конструкционная матрица – теплопроводящий наполнитель»

Успешное проектирование биметаллических композитов для направленной теплопроводности требует комплексного подхода, основанного на физико-химической и термомеханической совместимости материалов. Ключевыми критериями выбора пары являются: хорошая смачиваемость и свариваемость при аддитивном синтезе, ограниченная, но не нулевая взаимная растворимость, препятствующая образованию сплошных хрупких интерметаллидных прослоек, а также приемлемая коррозионная и гальваническая совместимость в рабочей среде. Наиболее перспективными с этой точки зрения являются пары на основе никелевых суперсплавов (Inconel 718) с высокотеплопроводными медными сплавами (GRCor-84, чистая медь), а также нержавеющей стали 316L с бронзами (CuSn10, Al-бронза).

Критически важно согласование рабочих температурных диапазонов и КЛТР. Конструкционная матрица (Inconel 718, CoCrMo, стали) выбирается

исходя из требований жаропрочности и стойкости к ползучести (обычно до 600–800 °С). Теплопроводящий наполнитель (медные сплавы) может работать при более высоких температурах (до 550–700 °С) при условии минимального механического нагружения и стабильности интерфейса. Разница в КЛТР должна быть минимизирована или компенсирована градиентными переходами для снижения остаточных напряжений и риска термического растрескивания.

Таким образом, оптимальный подбор пары материалов – это поиск баланса между высокой теплопроводностью наполнителя и конструкционной прочностью матрицы при обеспечении физико-химической совместимости на границе раздела. Технологические параметры аддитивного процесса (температура, скорость охлаждения, градиент состава) должны строго контролироваться для минимизации дефектов интерфейса (пор, непроваров, хрупких фаз) и достижения требуемой эксплуатационной надёжности композитной структуры.

1.5. Переходные зоны и дефекты в биметаллических структурах

1.5.1. Геометрическая граница, физическая переходная зона и расчётная интерфейсная фаза

В литературе по биметаллическим системам и их теплофизическому описанию принципиально различать три уровня представления области границы между металлами:

- 1) геометрическая граница – идеализированная поверхность раздела материалов в компьютерной графике или топологической модели;
- 2) переходная зона – реальная область конечной толщины, где состав, структура и свойства изменяются вследствие смешения, диффузии, реакций, а также дефектов соединения;
- 3) интерфейсная фаза – выделяемый в расчёте самостоятельный компонент (слой, область), которому приписываются эффективные свойства, отражающие теплофизическое поведение переходной зоны.

Переход от п. 1 к п. 2 означает переход от идеальной геометрии к физическому описанию, а переход от п. 2 к п. 3 – переход к вычислимой модели, достаточной для задач проектирования и оптимизации. Дальнейший обзор показывает, что для аддитивных биметаллов слишком грубое сведение п. 2 к п. 1 приводит к потере ключевых факторов теплопереноса. Более подробное различение трактовок области границы металлов и их связь с теплофизическими моделями приведены в разделе 1.9.

1.5.2. Переходная зона как измеряемая область конечной толщины

Экспериментальные данные по диффузионной сварке хорошо иллюстрируют тезис, что интерфейс в системе «сталь–никель–медь» формирует измеряемые переходные слои: показана глубина взаимной диффузии Fe/Ni порядка 25–30 мкм и переходный слой Ni/Cu порядка ~40 мкм [132]. Таким образом, интерфейс не является математической поверхностью, а представляет собой область, способную вносить вклад в тепловое сопротивление и локальную неоднородность свойств.

Более того, управление переходной зоной может осуществляться через промежуточные прослойки, которые не являются «второстепенной технологической деталью», а выполняют функцию стабилизации процесса соединения и снижения дефектности. Для соединения стали с оловянной бронзой показано, что применение пористых никелевых и медных прослоек позволяет снизить температуру диффузионной сварки до 660–700 °С, предотвращая развитие дефектов, связанных с высокотемпературными сегрегациями, и обеспечивая стабильность соединения при последующем кратковременном нагреве до 800–850 °С [133]. В логике рассматриваемой проблемы это усиливает аргумент: интерфейс является объектом технологического управления и, следовательно, объектом содержательного теплофизического моделирования.

1.5.3. Дефекты и неоднородность микроструктуры на границе металлов

Для биметаллических соединений, полученных высокоэнергетическими процессами (включая сварку взрывом), характерны сложные геометрии границы и локальные зоны перемешивания/оплавления. На примере медно-стального композита МЗ + 30ХГСА показано формирование оплавов различной конфигурации и изучено распределение химических элементов и микротвёрдости по сечению биметалла после последующего отжига при 880 °С [134].

В той же системе продемонстрировано, что последующие режимы термообработки (закалка от 880 °С и высокий отпуск при 520 °С) приводят к формированию мартенсита в оплавах после закалки и его распаду при отпуске, а также к изменению распределения твёрдости и химических элементов по сечению [135]. Это принципиально важно: интерфейсная область эволюционирует при технологических воздействиях после «получения биметалла», следовательно, задавать интерфейс как неизменную идеальную границу некорректно даже в рамках одной пары материалов.

Дополнительный аспект управления гетерогенностью интерфейса демонстрируется для сварки взрывом стали и меди с под воздействием ультразвука: экспериментально установлено уменьшение количества оплавленного металла на границе соединения при дополнительной энергии ультразвука [136]. Для задач теплопереноса это означает потенциальное изменение локального теплового сопротивления и направленности переноса у границы за счёт изменения морфологии и фазового состава переходной зоны.

1.5.4. Интерфейс в аддитивно изготовленных биметаллах: от смешения ванн расплава к управляемому переходу

В аддитивных биметаллах интерфейс почти всегда формируется при участии ванны расплава и локальной перекристаллизации, что предрасполагает к появлению:

- 1) зон смешения;

- 2) структуры столбчатых зёрен, ориентированных по температурному градиенту;
- 3) пористости и трещин вблизи границы, возникающих из-за несогласованности теплофизических свойств и различий в смачиваемости и растворимости [25,51,91–93,95,137–139].

Показательным примером является аддитивное формирование биметаллического композита Inconel 718 – GRCo-84 методом LENS. Сравнение прямого построения и композиционного градиента показывает, что градиентный подход обеспечивает постепенное изменение состава и отражается в профиле микротвёрдости зоны интерфейса, а также сопровождается ростом средней температуропроводности биметаллической структуры по сравнению с чистым Inconel 718 [42].

Для порошковых биметаллических композитов (например, нержавеющей стали 316L и сплава CuCrZr в СЛС) прямо подчёркивается роль ориентации и порядка изготовления материалов (316L поверх CuCrZr либо CuCrZr поверх 316L) в формировании дефектов интерфейса и в величине контактного термического сопротивления (КТС), определяемого методом лазерной вспышки [140]. Здесь интерфейс является не только местом возможного образования дефектов, но и самостоятельным фактором теплопереноса за счёт термического сопротивления, зависящего от ориентации.

При проволоочной наплавке возможности для управления параметрами интерфейса становятся ещё более явными: показано, что подбор погонной плотности энергии, стратегии сканирования и подачи проволоки позволяет получать как резкие, так и плавные интерфейсы и даже заданные распределения материалов в медно-железных биметаллах [34].

Именно эта управляемость создаёт предпосылку к переходу от технологического описания интерфейса к его теплофизическому моделированию: если межматериальный переход может быть спроектирован, то его тепловое поведение должно быть представлено как самостоятельный элемент расчётной схемы.

Помимо этого, аддитивные материалы характеризуются анизотропией и неоднородностью свойств, которые усиливают направленный характер теплопереноса и усложняют создание корректной модели теплопроводности в биметаллическом композите.

1.6. Теплофизические свойства, определяющие тепловое поведение аддитивно изготовленных биметаллических композитов

1.6.1. Базовые свойства и их роль в тепловом поведении

Тепловое поведение конструкций в стационарных и нестационарных режимах определяется, прежде всего, четырьмя группами величин:

- 1) теплопроводностью λ ,
- 2) температуропроводностью a ,
- 3) удельной теплоёмкостью c_p ,
- 4) коэффициентом линейного теплового расширения α .

Для расчётов теплопереноса ключевыми являются λ и a как показатели способности переносить тепло, а также c_p как фактор тепловой инерции. Коэффициент линейного расширения α напрямую участвует в формировании термических напряжений и может опосредованно влиять на контакт в зоне интерфейса через микрозазоры и контактные напряжения, поэтому для биметаллов он важен даже в чисто тепловой постановке.

В аддитивных металлах свойства λ , a и α оказываются чувствительными к текстуре, пористости и границам ванн расплава [20,45,46,94,141]. Следовательно, для аддитивных биметаллических композитов нельзя считать, что свойства каждого материала совпадают со справочными значениями для литого или механически обработанного аналога.

1.6.2. Теплопроводность и температуропроводность

Эксперименты по аддитивным композитам показывают, что эффективная теплопроводность может быть радикально изменена не только выбором материалов, но и пространственного распределения фаз.

Так, для системы 316L – Cu, полученной СЛС, показано, что рост доли меди и последующий отжиг могут приводить к кратному росту эффективной теплопроводности. Ключевым механизмом описывается формирование непрерывной медной сети, окружающей стальную матрицу, что резко повышает перенос тепла [142]. В этой логике перколяция теплопроводящей фазы выступает инструментом теплового проектирования, но одновременно усиливает роль межфазного теплового сопротивления и качества контакта.

В многоматериальной системе Inconel 718 – GRCo-84 продемонстрировано, что градиентный переход может обеспечивать резкое увеличение температуропроводности по сравнению с чистым Inconel 718 [42]. Это подчёркивает, что межматериальный переход – не только технологическая проблема, но и фактор, способный улучшать тепловое поведение при правильно выбранной структуре композита.

Отдельно важно учитывать неоднородность внутри аддитивного материала: измерения локальной теплопроводности аддитивной нержавеющей стали 316L демонстрируют широкий диапазон значений в зависимости от режимов и дефектов [141]. Для биметаллов это означает, что даже внутри одного материала теплоперенос может быть неоднородным и анизотропным, а переходная зона добавляет ещё один источник неоднородности.

1.6.3. Теплоёмкость и коэффициент линейного теплового расширения

Для аддитивных сплавов часто наблюдается меньшая анизотропия теплоёмкости c_p по сравнению с λ и α , хотя абсолютные значения c_p зависят от фазового состава и термообработки [45,94]. Однако в биметаллических структурах c_p становится важным как фактор нестационарного перераспределения температуры между зонами разных материалов, особенно при циклических тепловых нагрузках.

Коэффициент линейного расширения α в биметаллах является одним из источников термических напряжений и потенциальной деградации интерфейса при циклических тепловых нагрузках. Даже если прямых количественных

данных по α переходной зоны в литературе меньше (эта область в целом хуже обеспечена экспериментами), связь термообработки с эволюцией структуры в зоне соединения хорошо видна в работах по медно-стальным композитам после сварки взрывом и последующих термообработок [134,135].

Дополнительный материаловедческий аргумент даёт исследование Cu–Fe систем, полученных СЛС: измеряются линейное расширение и теплоёмкость в зависимости от состава и температуры, что подчёркивает необходимость учитывать реальный состав и его градиенты при оценке теплового поведения материалов семейства Cu–Fe [47].

1.6.4. Межфазное тепловое сопротивление и тепловой контакт

Даже если оба материала обладают высокой теплопроводностью, теплоперенос через интерфейс может ограничиваться межфазным (контактным) термическим сопротивлением. В классическом подходе КТС связывают с реальной площадью контакта (зависящей от шероховатости, деформации микронеровностей, контактного давления) и с теплопроводностью среды в микрозазорах. Для низких контактных давлений в широком диапазоне материалов показано, что КТС существенно зависит от контактного давления и параметров поверхностей [143]. Экспериментальные исследования контактной теплопроводности для металлических поверхностей также подчёркивают влияние давления, температуры и среды на величину теплового контакта [144]. Для расчётного использования контактного подхода существенным становится прогнозирование эффективных тепловых свойств твёрдого контакта [7].

Для аддитивных биметаллических композитов КТС становится ещё более критичным из-за возможных дефектов интерфейса (поры, непровары, оксидные включения) и зависимость от ориентации качества границы. В композите из нержавеющей стали 316L и сплава CuCrZr, изготовленном СЛС, КТС оценивается по данным лазерной вспышки, и показано, что оно зависит от ориентации интерфейса и порядка материалов [140].

С другой стороны, переходная зона может быть представлена как тонкий межфазный слой с собственными эффективными свойствами. Именно с этой

точки зрения далее становится важным вопрос: как взаимное расположение металлов (слои, каналы, сети проводимости) формирует эффективный тензор теплопроводности, и как на него влияет межфазное термическое сопротивление и качество интерфейса.

Эти вопросы логически приводят к рассмотрению пространственных анизотропных структур, применяемых для управления тепловыми потоками.

1.7. Пространственные анизотропные структуры биметаллических композитов для управления тепловыми потоками

1.7.1. Слоистые структуры и направленная теплопроводность

Слоистость – один из наиболее естественных способов формирования анизотропии теплопереноса. В простейшем приближении слоистая структура ведёт себя как среда с повышенной теплопроводностью вдоль слоёв и сниженной – поперёк слоёв, поскольку перенос через слои включает последовательное прохождение участков с различной проводимостью и (в реальных структурах) межслойные сопротивления.

Классические модели для однонаправленных композитов показывают различие эффективной теплопроводности вдоль и поперёк направления слоёв. Для этого выводятся выражения для эффективных проводимостей в предположении параллельного и последовательного соединения фаз [145]. Хотя исходная работа ориентирована на композиты типа «матрица-волокно», её выводы напрямую задают физический язык для анализа направленной теплопроводности в биметаллических композитах.

Эксперименты по металлическим слоистым композитам подтверждают принцип: теплопроводность перпендикулярно плоскости слоёв существенно ниже, чем в плоскости, и зависит от числа и толщины слоёв [146]. Для биметаллов это означает, что уже одна геометрическая послойная организация задаёт тензор теплопроводности, который нельзя свести к скаляру без потери физического смысла.

Важно, что в аддитивных материалах слоистость – функция не только геометрии, но и процессная: границы слоёв и ванн расплава становятся своего рода внутренними интерфейсами, влияющими на перенос тепла и формирующими анизотропию [25,46].

1.7.2. Структуры с направленным наполнителем

Если рассматривать биметаллическую структуру как композитную среду, где одна фаза играет роль направленного наполнителя с высокой теплопроводностью, то ключевыми факторами становятся:

- 1) ориентация наполнителя;
- 2) его связность;
- 3) качество контакта с матрицей.

Здесь особенно важно, что ориентация прямо формирует тензор эффективной теплопроводности (аналогично слоистым композитам), а качество межфазного контакта может нивелировать выигрыши от высокой теплопроводности наполнителя, если межфазное сопротивление велико.

В аддитивных металлах анизотропия теплопроводности может возникать и без теплопроводящего наполнителя за счёт столбчатых зёрен, текстуры и ориентированного распределения пор [50,94]. Однако в биметаллическом композите возникает возможность сделать теплопроводящую фазу именно основным рабочим элементом – например, как сеть или каналы.

1.7.3. Пространственные и перколяционные сети (непрерывная теплопроводящая фаза)

Перколяция теплопроводящей фазы – один из наиболее мощных механизмов повышения эффективной теплопроводности. В биметаллических АМ-системах это может реализовываться как:

- 1) непрерывная сеть теплопроводящего наполнителя в несущей матрице,
- 2) пространственно связанные теплопроводящие каналы,
- 3) взаимопроникающие структуры.

В композитах с взаимопроникающими фазами A356 и 316L показано, что при наличии межфазной пористости (отмечается пористый слой порядка десятков микрометров) теплопроводность существенно ниже оценки по правилу смесей. При этом структура ячейки и топология фаз становятся критичными [147]. Это подчёркивает роль переходной зоны: даже при высокой связности фаз тонкий дефектный межфазный слой может быть доминирующей составляющей теплового сопротивления.

В системе 316L–медь, полученной СЛС, показано, что после отжига формируется непрерывная сеть меди, окружающая сталь, что выступает ключевым механизмом кратного увеличения теплопроводности [142]. С точки зрения структуры композита это означает, что геометрия распределения материалов является не вторичной, а определяющей для направления и величины тепловых потоков.

1.7.4. Решётчатые структуры

Решётчатые структуры в аддитивном производстве часто обсуждаются как способ оптимизации массы и механических свойств, но в тепловом проектировании их роль проявляется через:

- 1) эффективную теплопроводность как функцию объёмной доли и ориентации стержней;
- 2) возможность задать направление предпочтительного переноса тепла;
- 3) наличие внутренних поверхностей, влияющих на теплообмен.

В рамках данной главы решётчатые структуры важны постольку, поскольку они являются аддитивно реализуемым способом формировать управляемый тензор теплопроводности и сопрягать материалы в биметаллическом изделии. Показательно, что топологическая оптимизация теплопроводящих каналов прямо ставит задачу проектирования эффективного теплопереноса через выбор распределения материалов и геометрии [148].

Для регулярных ячеистых конструкций близкая расчётно-теоретическая задача рассматривалась на примере факторов, влияющих на теплопроводность трёхслойной сотовой панели [3,13]. Этот пример полезен как переход от

геометрии сотового заполнителя к эффективной теплопроводности конструкции.

Однако для биметаллических структур решётка/квазирешётка почти неизбежно означает рост доли интерфейсов и контактных областей, а значит усиливает влияние межфазного теплового сопротивления и качества переходной зоны.

1.7.5. Роль геометрии и интерфейса в формировании эффективного тензора теплопроводности и связь с аддитивной реализуемостью

Сводя рассмотренное, можно выделить три ключевых положения, которые непосредственно важны для последующего моделирования и рационального расположения теплопроводящего наполнителя:

- 1) геометрия распределения фаз формирует эффективный тензор теплопроводности: слоистость, ориентация, связность [145,146,148];
- 2) переходная зона и КТС способны доминировать в тепловом сопротивлении биметаллической структуры при высокой доле интерфейсов или при наличии межфазной пористости [143,147];
- 3) аддитивная реализуемость делает возможными пространственно сложные распределения материалов и интерфейсов, но одновременно усложняет модель: интерфейс становится распределённым, анизотропным и технологически изменчивым [34,140].

1.8. Подходы к моделированию биметаллического композита и интерфейса

1.8.1. Модели с резкой границей свойств

В литературе модель с резкой границей свойств рассматривается как базовая постановка задачи теплопроводности для двух материалов, разделённых геометрической поверхностью, на которой предполагаются непрерывность температуры и теплового потока [149,150]. Такая схема оказывается естественной в тех случаях, когда переход между материалами действительно узок по сравнению с характерным размером задачи, а влияние межфазных дефектов на интегральный теплоперенос невелико. Именно

поэтому она широко используется в первичных инженерных оценках и в вычислительных постановках, где требуется минимальное число параметров и удобная связь с процедурами рационального расположения теплопроводящего наполнителя.

Однако применительно к реальным биметаллическим системам, особенно полученным аддитивными технологиями, это допущение быстро достигает предела применимости. Экспериментальные исследования показывают, что даже в сравнительно «классических» схемах соединения сталь–никель–медь переход формирует область конечной толщины порядка десятков микрометров, а не математическую поверхность [132]. Для взаимопроникающих металлических композитов дополнительную роль играют межфазная пористость и дефектные прослойки, которые ведут себя как самостоятельный тепловой барьер [147]. В многоматериальных АМ-системах ситуация дополнительно усложняется тем, что качество интерфейса зависит от порядка построения, ориентации и режимов подвода энергии, так что одна и та же пара материалов может формировать разные по тепловому поведению переходные области [140]. Поэтому для АМ-биметаллов модель с резкой границей сохраняет значение как предельный и удобный для первого приближения вариант, но не может рассматриваться как универсальное описание межматериального перехода [34].

1.8.2. Модели с контактным тепловым сопротивлением

Модели с контактным тепловым сопротивлением исходят из того, что геометрическая граница сохраняет нулевую толщину, но на ней допускается скачок температуры, пропорциональный тепловому потоку. В этой постановке дополнительное сопротивление локализуется непосредственно на поверхности раздела и интерпретируется как следствие шероховатости, микрозазоров, оксидных плёнок и неполного реального контакта [151–155]. Такой подход особенно широко используется для контактных соединений и сборок, где решающим фактором оказывается именно тепловой контакт, а не протяжённая реакционная зона. Такие модели могут дополняться расчётной оценкой

тепловых свойств твёрдого контакта, когда контактный слой не задаётся явно, а его влияние сводится к эффективному тепловому сопротивлению или теплопроводности [7].

С практической точки зрения эта модель удобна тем, что позволяет сохранить простую геометрию задачи и при этом ввести в расчёт сильное влияние интерфейса через параметр контактного теплового сопротивления или, эквивалентно, тепловой контактной проводимости. Вместе с тем её параметризация оказывается чувствительной к физике поверхности: величина сопротивления зависит от давления, шероховатости, температуры и среды в контактной области [143,144]. Для аддитивно изготовленных биметаллов такой подход остаётся полезным прежде всего тогда, когда интерфейс можно редуцировать к эффективному барьеру, обусловленному дефектностью или качеством контакта. Именно поэтому результаты по ориентационно-зависимому контактному термическому сопротивлению в многоматериальных PBF-LB/М системах особенно показательны: они демонстрируют, что для АМ-интерфейса важна не только величина сопротивления, но и конкретный тип формирования границы [140]. Ограничение этой группы моделей состоит в том, что нулевая толщина интерфейса не позволяет описывать внутреннюю структуру переходной зоны, если она представляет собой объёмную область смешения, реакции или диффузии.

1.8.3. Модели с эффективной переходной зоной

В тех случаях, когда переходная область объективно существует и может быть выделена структурно, в литературе используется модель эффективной переходной зоны. В ней межматериальный переход представляется как слой конечной толщины с эффективной теплопроводностью и, при необходимости, другими эффективными свойствами, которые усредняют влияние реальной зоны смешения, диффузии, пористости и локальных фазовых превращений [156–158]. Такой подход особенно естественен для систем, где сама переходная зона наблюдается экспериментально и не сводится к абстрактной поверхности раздела [132].

Преимущество этой постановки состоит в том, что она позволяет явно учесть конечную толщину перехода и включить его в расчёт как третий компонент среды. Для биметаллических композитов это важно ещё и потому, что межфазная пористость и дефектность часто снижают эффективную теплопроводность сильнее, чем можно было бы ожидать по простому правилу смесей [147]. Тем самым модель эффективной переходной зоны лучше согласуется с наблюдаемой физикой реального интерфейса, чем резкая граница и чисто контактная постановка. В то же время её использование требует идентификации толщины слоя и его эффективных параметров, а при слабой экспериментальной обеспеченности возрастает риск феноменологической подгонки. По этой причине корректность такого описания напрямую зависит от того, насколько надёжно переходная зона выделена микроструктурно и насколько её свойства связаны с технологией получения материала.

1.8.4. Модели с непрерывным градиентом свойств

Модели с непрерывным градиентом свойств представляют межматериальный переход как область, в которой теплопроводность, температуропроводность или другие параметры изменяются по координате без скачка. Подобная постановка наиболее естественна для функционально-градиентных материалов и для интерфейсов, сформированных как зона плавного смешения, где использование ступенчатой аппроксимации оказывается слишком грубым [159–161]. В аддитивном производстве этот подход особенно уместен для композиционных переходов, задаваемых целенаправленно через режимы подачи материала и подвода энергии; показательный пример дают градиентные переходы в системах Inconel 718–Cu-сплав, где изменение состава непосредственно связано с изменением термического отклика биметалла [42].

Одновременно именно этот класс моделей наиболее чувствителен к качеству исходных допущений. Сам по себе непрерывный градиент, заданный, например, по правилу смесей, ещё не гарантирует учёта тех факторов, которые в реальных АМ-биметаллах нередко определяют тепловой барьер: межфазной

пористости, локальных трещин, оксидных прослоек и контактной неоднородности [147]. Кроме того, связь между плавным градиентом свойств и реальной технологической реализуемостью должна проверяться отдельно. Хотя современные многоматериальные PBF-LB/M системы уже демонстрируют возможность воксельного распределения материала, для многих металлических пар реальный переход всё же остаётся узкой и локализованной областью, а не протяжённым гладким профилем [140]. Поэтому модель непрерывного градиента оказывается сильной там, где градиент действительно формируется как технологическая цель, но может быть избыточной или даже физически неточной при узких переходных зонах, насыщенных дефектами.

1.8.5. Модели с явной интерфейсной фазой как самостоятельным расчётным компонентом

Наиболее развитый вариант описания межматериального перехода состоит во введении явной интерфейсной фазы как самостоятельного расчётного компонента. В этом случае интерфейс рассматривается не как нулевая граница и не просто как область с усреднённым градиентом, а как третья среда со своей толщиной, набором эффективных свойств и, при необходимости, собственной анизотропией. В литературе по эффективной теплопроводности композитов с несовершенными интерфейсами такая логика широко реализуется через модели тонкого межфазного слоя, которые позволяют эквивалентно представлять влияние переходной области на интегральный теплоперенос [149,150,156,162].

Для аддитивно изготовленных металлических биметаллов этот подход особенно важен, когда переходная зона одновременно имеет конечную толщину, выраженную микроструктурную неоднородность и влияет на перенос тепла не только через температурный скачок, но и через распределённое сопротивление в объёме слоя. Именно такие признаки характерны для систем с выраженным смещением, межфазной пористостью или технологически обусловленной ориентационной зависимостью интерфейса [26,140,147]. В пользу этого класса моделей говорит и то, что многие АМ-исследования

описывают интерфейс прежде всего через микроструктуру, профиль твёрдости и механический отклик, то есть фактически как особую зону со своими свойствами, пусть и не всегда формализованную теплофизически [26]. Ограничение подхода состоит в необходимости надёжно идентифицировать толщину интерфейсной фазы и её параметры – прежде всего теплопроводность, а при нестационарных задачах также теплоёмкость и температуропроводность. Тем не менее именно такая постановка наиболее естественно связывает наблюдаемую переходную зону с расчётной моделью и делает возможным её дальнейшее включение в задачи проектирования и рационального расположения теплопроводящего наполнителя.

1.8.6. Сопоставление моделей границы между материалами

Сопоставление рассмотренных подходов показывает, что различия между ними определяются не только способом геометрического описания интерфейса, но и тем, где именно локализуется дополнительное тепловое сопротивление. В модели с резкой границей оно фактически игнорируется; в постановке с контактным тепловым сопротивлением оно сосредоточено на поверхности раздела; в моделях эффективной переходной зоны и непрерывного градиента распределяется по области конечной толщины; наконец, в модели с явной интерфейсной фазой эта область получает статус самостоятельного расчётного компонента со своими свойствами. По мере усложнения описания возрастает и способность модели воспроизводить физику аддитивно изготовленных биметаллов, где межматериальный переход редко сводится к идеальной поверхности.

При этом ни одна из схем не может считаться универсальной вне связи с конкретным классом задач. Для грубых инженерных оценок и предварительного анализа достаточно моделей с резкой границей или с контактным сопротивлением, тогда как для систем с наблюдаемой переходной зоной, межфазной пористостью и технологически управляемым градиентом свойств более содержательными оказываются модели эффективной зоны, непрерывного градиента или явной интерфейсной фазы. Следовательно, выбор

модели должен определяться не только удобством вычислительной реализации, но и тем, какая именно физическая трактовка межматериального перехода подтверждается литературными данными для рассматриваемой пары материалов и конкретной технологии изготовления.

Заключение к Главе 1

В настоящей главе представлен всесторонний анализ современного состояния теплового проектирования аддитивно изготавливаемых биметаллических структур. На основе выполненного обзора научных публикаций и систематизации литературных данных можно сделать следующие выводы:

1. Основные практические преимущества многоматериальности в аддитивном производстве из металлов связаны с возможностью локально совмещать противоречивые свойства и проектировать тепловые функции деталей [24–41].

2. Аддитивные технологии дают управляемость типа интерфейса: возможны резкие границы, градиентные переходы и гетерогенные распределения материалов, причём параметры процесса определяют форму и свойства переходной области [42–44,53,74,84,108,112].

3. Интерфейс в биметаллах является реальной переходной зоной конечной толщины, а не идеальной поверхностью: это подтверждается измерениями диффузионных слоёв десятков микрометров и исследованиями структуры и состава зоны соединения [52,53,107,115,134,135,144,149–152,156,157].

4. Анизотропия и неоднородность – системные свойства аддитивных материалов и биметаллов [25,45,46,49,50,94,96,97,100,102,104,114,123].

5. Межфазное тепловое сопротивление способно существенно изменять теплоперенос и зависит от микрогеометрии границы между металлами, наличия дефектов, а также их химических особенностей [70,80,143,149–151,153,155].

6. Пространственное распределение материалов (слои, сети, перколяция) непосредственно формирует эффективный тензор теплопроводности, а при наличии межфазных барьеров рациональное расположение теплопроводящего наполнителя невозможна без учёта интерфейса [140–148].

Однако, несмотря на существенный массив работ по микроструктуре и механике интерфейсов, прямых теплофизических измерений свойств именно переходной зоны в аддитивных биметаллах сравнительно мало. Чаще измеряются эффективные свойства образца или свойства объёмов материалов, а интерфейс учитывается косвенно (это особенно заметно на фоне богато представленных механических/структурных исследований). Частично этот пробел компенсируется работами, где контактное сопротивление и межфазные эффекты извлекаются из многослойных измерений [28,140].

Во многих моделях интерфейс либо идеализируется как поверхность, либо задаётся единым параметром контактного сопротивления, что теряет внутреннюю неоднородность переходной зоны (пористость, оплавы, градиенты состава), показанную экспериментально для ряда биметаллов [134,135,147].

В задачах, где пространственная структура материалов оптимизируется, требуется модель, одновременно способная учитывать: биметаллическую природу, анизотропию, неоднородность, интерфейсный барьер, и быть вычислительно совместимой с оптимизационными процедурами. Большая часть обзорной литературы рассматривает эти аспекты по отдельности.

Рациональный выбор тепловой топологии чувствителен к локальным тепловым сопротивлениям и к направленности переноса, поскольку алгоритм рационального выбора «перераспределяет материал» ради изменения путей теплового потока. В биметаллической структуре это означает:

1. Рациональный выбор тепловой топологии требует учёта интерфейса, потому что именно там концентрируется конфликт свойств и формируются ключевые тепловые сопротивления;

2. Игнорирование переходной зоны и межфазного сопротивления приводит к систематически оптимистичным предсказаниям эффективности (особенно для сетевых и взаимопроникающих структур, где доля интерфейсов высока);

3. анизотропия и неоднородность аддитивных материалов могут менять рациональную геометрию теплопроводящих путей по сравнению с изотропной постановкой, а значит должны быть совместимы с моделью среды.

Таким образом, упрощённая двухматериальная модель с идеальной границей плохо совместима с задачей корректного теплового проектирования и рационального выбора биметаллических АМ-структур с учётом технологически обусловленного интерфейса. Всё это формирует требования к модели биметаллического композита, которая может быть использована для его теплового рационального выбора.

Глава 2. Математическая модель и постановка задачи рационального расположение теплопроводящего наполнителя

Настоящая глава задаёт математическую модель стационарной теплопроводности и формулирует задачу рационального расположения теплопроводящего наполнителя в биметаллическом композите [5]. Для корректной интерпретации дальнейших выводов в ней разграничиваются элементы строгой физико-математической постановки, феноменологические расчётные конструкции, инженерные индикаторы и методы верификации. Такое разграничение необходимо, поскольку в литературе по аддитивно изготовленным биметаллам одновременно рассматриваются анизотропия свойств, переходные зоны, дефекты сплавления, функционально-градиентные материалы, но они по-разному учитываются в модели [24–26,32,47].

К математически строгой части относятся уравнение теплопроводности, локальный баланс энергии, закон Фурье в изотропном или анизотропном виде, корректно заданные граничные условия и, при расширении постановки, линейная термоупругость. Для записи и численного решения используются слабая форма, конечно-элементная дискретизация, фильтрация и гладкие агрегаторы [163–170].

К феноменологическим элементам относятся расчётно выделяемая интерфейсная фаза с эффективными свойствами и рабочая декомпозиция матрица – интерфейс – наполнитель в параметризации материала. Эти конструкции мотивированы наблюдаемыми в аддитивных биметаллах зонами смешения, градиента состава, взаимным проникновением материалов и профилями твёрдости, однако не тождественны термодинамически строгому понятию фазы [24,45,49,50,156–158,171,172].

Методы верификации здесь рассматриваются как внешние способы проверки полученной геометрии биметаллического изделия. Их включение в завершающий раздел главы служит только для явного отделения расчётного

ядра от процедур проверки решения задачи рационального расположения теплопроводящего наполнителя [173,174].

Таблица 2.1. Математические обозначения.

Обозначение	Описание	Единицы
$\mathbf{x}$	Радиус-вектор (координаты точки)	м
$\Omega, \partial\Omega$	Расчётная область и её граница	$\text{м}^3, \text{м}^2$
Ω_d, Ω_{nd}	Проектируемая и непроектируемая области	м^3
$\Gamma_D, \Gamma_N, \Gamma_R$	Границы с условиями Дирихле, Неймана и Робина соответственно	м^2
$\Gamma_{\text{sink}}, \Gamma_{\text{tar}}$	Участок теплоотвода и участок контроля температуры соответственно	м^2
$\mathbf{n}$	Внешняя единичная нормаль к $\partial\Omega$	—
T, T_D, T_∞	Температура, заданная температура и температура среды соответственно	К
$\mathbf{q}, q_n$	Плотность теплового потока и нормальная компонента $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$ соответственно	$\text{Вт}/\text{м}^2$
q_v	Объёмная мощность тепловыделения	$\text{Вт}/\text{м}^3$
h	Коэффициент теплоотдачи (Робин)	$\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$
$\Lambda(\mathbf{x}, T)$	Тензор теплопроводности	$\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$
$\lambda(\mathbf{x}, T)$	Скалярная теплопроводность	$\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$
$\rho, \bar{\rho}, \tilde{\rho}$	Проектная переменная, фильтрованная проектная переменная и проектная переменная в проекции Хевисайда соответственно	—
r_f	Радиус фильтра Гельмгольца	м
β, η	Параметры проекции Хевисайда	—
$\phi_m, \phi_f, \phi_{\text{int}}$	Начальные веса распределения матрицы, наполнителя и интерфейсной фазы соответственно	—
w_m, w_f, w_{int}	Нормированные веса распределения матрицы, наполнителя и интерфейсной фазы соответственно	—
m	Параметр резкости переходов	—
$\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$	Теплопроводность матрицы и наполнителя соответственно	$\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$
$\Lambda_{\min}, \Lambda_{\max}$	Тензор теплопроводности матрицы и наполнителя соответственно	$\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$
p_λ, p_Λ	Показатели SIMP для скалярной и тензорной теплопроводности соответственно	—
q_R	Параметр RAMP	—
Q_{sink}	Мощность теплоотвода через Γ_{sink}	Вт
$\Phi_{\text{avg}}, \Phi_{\max}, \Phi_R$	функционалы: средняя температура, максимальная температура и теплоотвод соответственно	К, Вт, К/Вт
KS_{κ}, κ	KS-агрегатор и параметр сглаживания	—
$R(T; \rho)$	Дискретная невязка прямой задачи	—

Обозначение	Описание	Единицы
p	Сопряжённая переменная (теплопроводность)	–
$\mathbf{u}$	Перемещения	м
$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$	Тензор малых деформаций	–
$\boldsymbol{\sigma}$	Тензор напряжений	Па
$\boldsymbol{\varepsilon}_{th}(T)$	Тепловая деформация	–
$\alpha(T)$	Коэффициент линейного теплового расширения	1/К
μ_L, λ_L	Параметры Ламе – модуль сдвига и сопротивление объёмным деформациям соответственно	Па
E	Модуль Юнга	Па
ν	Коэффициент Пуассона	–

2.1. Расчётная область, разбиение границы и физический смысл задачи

Рассматривается ограниченная связная область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, с липшицевой границей $\partial\Omega$. Внутри Ω выделяются поддомены: проектируемая область Ω_d и непроектируемая область Ω_{nd} , причём $\Omega = \Omega_d \cup \Omega_{nd}$, $\Omega_d \cap \Omega_{nd} = \emptyset$. Проектируемая область предназначена для размещения материала (например, теплоотводящих каналов), а непроектируемая содержит фиксированные конструктивные элементы (источник тепла, опоры, технологические зоны, запретные области).

Граница $\partial\Omega$ разбивается на непересекающиеся измеримые части: $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_R$, где Γ_D – участок с заданной температурой (условие Дирихле), Γ_N – участок с заданным тепловым потоком (условие Неймана), Γ_R – участок с теплообменом по закону Ньютона (условие Робина). Допускается, что Γ_R содержит участок теплоотвода $\Gamma_{sink} \subset \Gamma_R$, на котором определяется интегральный тепловой поток через конструкцию и/или формулируются температурные ограничения.

Вектор внешней нормали $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ определён почти всюду на $\partial\Omega$ и направлен наружу из Ω . Знак теплового потока фиксируется следующим образом: вектор плотности теплового потока $\mathbf{q}$ направлен в сторону переноса энергии и подчиняется закону Фурье. Нормальная компонента $q_n = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$ считается положительной при выходе тепла из области Ω . Такое соглашение приводит к стандартной записи граничных условий в нормальной форме [163].

Прямая задача стационарной теплопроводности задаёт распределение температуры $T(\mathbf{x})$ в Ω при фиксированных тепловых воздействиях (объёмный источник, заданные потоки и/или теплообмен). Задача рационального расположения теплопроводящего наполнителя состоит в выборе распределения материала в Ω_d (через проектную переменную) для улучшения тепловых характеристик: снижения максимальной температуры в заданной зоне, уменьшения теплового сопротивления либо интенсификации отвода тепла [175].

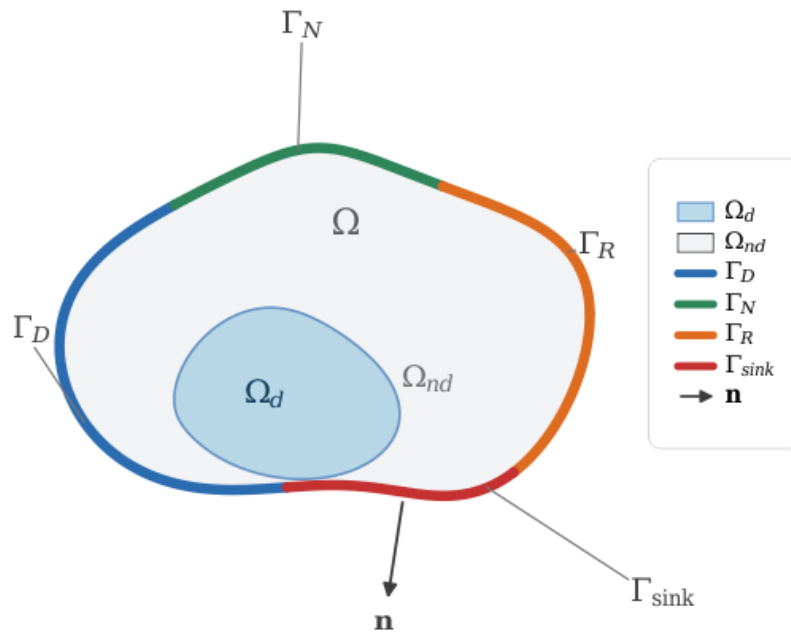


Рис. 2.1. Расчётная область и граничные условия.

2.2. Теплопроводность материала

В общем случае теплопроводность задаётся симметричным положительно определённым тензором второго ранга:

$$\mathbf{\Lambda}(\mathbf{x}, T) = \begin{pmatrix} \Lambda_{xx}(T) & \Lambda_{xy}(T) & \Lambda_{xz}(T) \\ \Lambda_{yx}(T) & \Lambda_{yy}(T) & \Lambda_{yz}(T) \\ \Lambda_{zx}(T) & \Lambda_{zy}(T) & \Lambda_{zz}(T) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}^T. \quad (2.1)$$

В изотропном частном случае $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{x}, T) = \lambda(\mathbf{x}, T) \cdot \mathbf{I}$, где $\lambda(\mathbf{x}, T)$ – скалярная теплопроводность, $\mathbf{I}$ – единичный тензор [163].

В рамках данной математической модели различаются варианты зависимости свойств:

- 1) линейный стационарный случай: $\Lambda = \Lambda(\mathbf{x})$ или $\lambda = \lambda(\mathbf{x})$;
- 2) нелинейный по температуре случай: $\Lambda = \Lambda(T)$ или $\lambda = \lambda(T)$;
- 3) общий нелинейный случай: $\Lambda = \Lambda(\mathbf{x}, T)$ или $\lambda = \lambda(\mathbf{x}, T)$.

Это различие важно как для сильной формы (учёт пространственных производных коэффициентов), так и для построения касательного оператора в сопряжённой задаче [168].

2.3. Прямая задача теплопроводности

2.3.1. Закон Фурье и уравнение стационарной теплопроводности

Сильная форма стационарной теплопроводности рассматривается как частный случай локального закона сохранения энергии для сплошной среды. В отсутствие конвективного переноса внутри твёрдого тела локальный баланс энергии может быть записан как [164,165]:

$$\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} = q_v. \quad (2.2)$$

В стационарном режиме временной член исчезает, и совместно с законом Фурье это равенство приводит к уравнению (2.3).

Закон Фурье в тензорной форме [165]:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = -\Lambda(\mathbf{x}, T) \nabla T(\mathbf{x}). \quad (2.3)$$

Уравнение стационарной теплопроводности с объёмным источником тепла $q_v(\mathbf{x})$:

$$\nabla \mathbf{q}(\mathbf{x}) = q_v(\mathbf{x}), \text{ то есть } -\nabla(\Lambda(\mathbf{x}, T) \nabla T) = q_v(\mathbf{x}). \quad (2.4)$$

В изотропном случае $\Lambda(\mathbf{x}, T) = \lambda(\mathbf{x}, T) \cdot \mathbf{I}$ уравнение (2.4) примет вид:

$$-\nabla(\lambda(\mathbf{x}, T) \nabla T) = q_v(\mathbf{x}) \quad (2.5)$$

2.3.2. Граничные условия и знаки потоков

Условие Дирихле (заданная температура):

$$T = T_D \text{ на } \Gamma_D. \quad (2.6)$$

Условие Неймана (заданный нормальный тепловой поток):

$$q_n = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{n} \cdot \Lambda \nabla T = \bar{q}_N \text{ на } \Gamma_N. \quad (2.7)$$

При этом $\bar{q}_N > 0$ означает заданный выход тепла из Ω , $\bar{q}_N < 0$ – ввод тепла в расчётную область Ω .

Условие Робина (конвективный теплообмен):

$$q_n = -\mathbf{n} \cdot \Lambda \nabla T = h(T - T_\infty) \text{ на } \Gamma_R, h \geq 0. \quad (2.8)$$

На участке стока тепла $\Gamma_{sink} \subset \Gamma_R$ далее будет вычисляться суммарная мощность теплоотвода:

$$Q_{sink} = \int_{\Gamma_{sink}} (T - T_\infty) d\Gamma. \quad (2.9)$$

Граничные условия являются частью строгой постановки и требуют явного указания знака потока и ориентации нормали. При выбранном соглашении $\bar{q}_N > 0$ соответствует отводу тепла из Ω , а условие Робина задаёт баланс между тепловым потоком из тела и теплообменом с окружающей средой. Это обеспечивает однозначность последующей слабой формы и вычисления интегрального потока через Γ_{sink} [167–169].

2.3.3. Линейный и общий нелинейный случаи

В общем случае $\Lambda = \Lambda(\mathbf{x}, T)$ уравнение (2.4) следует понимать как дивергенцию произведения переменного коэффициента на градиент, без неявного опускания членов с производными коэффициентов. Для изотропного случая (2.5):

$$\nabla(\lambda(\mathbf{x}, T) \nabla T) = \lambda(\mathbf{x}, T) \nabla^2 T + \nabla \lambda(\mathbf{x}, T) \nabla T, \quad (2.10)$$

где $\nabla \lambda(\mathbf{x}, T)$ – полный градиент, то есть

$$\nabla \lambda(\mathbf{x}, T) = \frac{\partial \lambda(\mathbf{x}, T)}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \lambda(\mathbf{x}, T)}{\partial T} \nabla T, \quad (2.11)$$

следовательно, при $\lambda = \lambda(T)$ (без явной зависимости от $\mathbf{x}$)

$$\nabla \lambda(T) = \frac{\partial \lambda(T)}{\partial T} \nabla T, \quad (2.12)$$

тогда (2.10) принимает вид:

$$\nabla(\lambda(T) \nabla T) = \lambda(T) \nabla^2 T + \frac{\partial \lambda(T)}{\partial T} \|\nabla T\|^2. \quad (2.13)$$

Для тензорного $\Lambda(\mathbf{x}, T)$ в компонентной записи:

$$\nabla(\Lambda \nabla T) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^3 \Lambda_{ij}(\mathbf{x}, T) \frac{\partial T}{\partial x_j} \right). \quad (2.14)$$

Разложение (2.14) включает члены вида

$$\frac{\partial \Lambda_{ij}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (2.15)$$

которые потребуются для построения касательного оператора $\partial R / \partial T$ [168].

2.4. Слабая постановка и конечно-элементная дискретизация

2.4.1. Функциональные пространства и слабая форма

Определим пространства [166]:

$$\begin{aligned} U &= \{ T \in H^1(\Omega) : T = T_D \text{ на } \Gamma_D \}, \\ V &= \{ v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ на } \Gamma_D \}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Умножая (2.3) на тестовую функцию $v \in V$, интегрируя по Ω и применяя формулу Грина, получаем слабую постановку [170]: найти $T \in U$ такое, что для всех $v \in V$ выполняется

$$\int_{\Omega} (\nabla v) \cdot \Lambda(\mathbf{x}, T) \nabla T \, d\Omega = \int_{\Omega} v q_v \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} v \bar{q}_N \, d\Gamma + \int_{\Gamma_R} v h (T - T_{\infty}) \, d\Gamma. \quad (2.17)$$

Переход к слабой форме и последующая конечно-элементная дискретизация не меняют физический смысл закона теплопроводности, а переводят краевую задачу в форму, удобную для функционального анализа и численного решения [166,167].

Левая часть (2.17) нелинейна по T при зависимости $\Lambda = \Lambda(\mathbf{x}, T)$. При $\Lambda = \Lambda(\mathbf{x})$ она приобретает билинейную форму [176].

2.4.2. Конечно-элементная аппроксимация и матричная запись

Пусть Ω разбита на N_e тетраэдральных элементов Ω_e . В качестве базисных функций используются линейные функции формы $N_a(\mathbf{x})$ (P1). Приближение [166]:

$$\begin{aligned} T_h(\mathbf{x}) &= \sum_{a=1}^{N_n} N_a(\mathbf{x}) T_a, \\ v_h(\mathbf{x}) &= \sum_{a=1}^{N_n} N_a(\mathbf{x}) v_a. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Градиентная матрица элемента $\mathbf{B}_e$ (константна для P1-тетраэдра) [170]:

$$\begin{aligned} \nabla T_h|_{\Omega_e} &= \mathbf{B}_e \mathbf{T}_e, \\ \nabla v_h|_{\Omega_e} &= \mathbf{B}_e \mathbf{v}_e. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Тогда вклад элемента в матрицу теплопроводности (в линейном случае) имеет вид:

$$\Lambda_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \Lambda_e^{mat} \mathbf{B}_e d\Omega, \quad (2.20)$$

где Λ_e^{mat} – тензор теплопроводности на элементе [169].

Вклад граничного условия Робина на границе элемента $\Gamma_e^R = \partial\Omega_e \cap \Gamma_R$ [176]:

$$\begin{aligned} \Lambda_e^R &= \int_{\Gamma_e^R} h \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Gamma, \\ \mathbf{f}_e^R &= \int_{\Gamma_e^R} h T_\infty \mathbf{N}^T d\Gamma. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Вклад объёмного источника:

$$\mathbf{f}_e^\Omega = \int_{\Omega_e} q_v \mathbf{N}^T d\Omega, \quad (2.22)$$

а граничного условия Неймана [169]:

$$\mathbf{f}_e^N = \int_{\Gamma_e^N} \bar{q}_N \mathbf{N}^\top d\Gamma, \quad \Gamma_e^N := \partial\Omega_e \cap \Gamma_N. \quad (2.23)$$

Сборка по элементам даёт глобальную систему уравнений в линейном случае $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{A}(\rho) \mathbf{T} = \mathbf{b}(\rho), \quad (2.24)$$

где учтена зависимость $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ от проектной переменной ρ через материал [166].

2.4.3. Нелинейная стационарная теплопроводность и итерационное решение

При зависимости $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}(\mathbf{x}, T)$ слабая форма (2.17) задаёт нелинейная невязка $\mathbf{R}(\mathbf{T}; \rho) = 0$. В дискретном виде:

$$\mathbf{R}(\mathbf{T}; \rho) = \mathbf{A}(\mathbf{T}; \rho) \mathbf{T} - \mathbf{b}(\mathbf{T}; \rho) = 0, \quad (2.25)$$

где зависимость от $\mathbf{T}$ может входить как через матрицу теплопроводности, так и через члены, обусловленные граничными условиями [168].

Для решения используется метод Ньютона. Линеаризация задаётся касательной матрицей (якобианом) [168]:

$$\mathbf{J}_T(\mathbf{T}; \rho) := \frac{\partial}{\partial \mathbf{T}} \mathbf{R}(\mathbf{T}; \rho). \quad (2.26)$$

В непрерывной форме (на уровне вариаций) касательный оператор определяется из приращения слабой формы: для произвольных δT , $v \in V$

$$\begin{aligned} \delta \left[\int_{\Omega} (\nabla v) \cdot \mathbf{\Lambda}(\mathbf{x}, T) \nabla T d\Omega \right] &= \int_{\Omega} (\nabla v) \cdot \mathbf{\Lambda}(\mathbf{x}, T) \nabla (\delta T) d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} (\nabla v) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{\Lambda}}{\partial T}(\mathbf{x}, T) \delta T \right) \nabla T d\Omega. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Именно (2.27) задаёт $\mathbf{J}_T$ в сопряжённой задаче. В линейном случае $\partial \mathbf{\Lambda} / \partial T = 0$ и остаётся только первый член.

2.5. Параметризация материала и проектная переменная

2.5.1. Проектная переменная и ограничения

Вводится проектная (плотностная) переменная $\rho(\mathbf{x}) \in [0, 1]$ для $\mathbf{x} \in \Omega_d$. В Ω_{nd} она фиксируется: $\rho(\mathbf{x}) = 0$.

Ограничение по объёму материала задаётся на проектируемой области.

2.5.2. Фильтр Гельмгольца

Для подавления перемежения материалов и обеспечения минимального масштаба вводится фильтрация $\bar{\rho}$ как решение уравнения Гельмгольца:

$$-r_f^2 \nabla^2 \bar{\rho} + \bar{\rho} = \rho \quad \text{в } \Omega_d, \quad (2.28)$$

с однородным граничным условием Неймана [177]:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \partial \Omega_d. \quad (2.29)$$

Параметр $r_f > 0$ задаёт характерный радиус фильтра (минимальный масштаб).

2.5.3. Проекция Хевисайда для получения бинарных решений

После фильтра применяется сглаженная проекция Хевисайда (регуляризованная ступенчатая функция) [177,178]:

$$\tilde{\rho} = P(\bar{\rho}; \beta, \eta) = \frac{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta(\bar{\rho} - \eta))}{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta(1 - \eta))}. \quad (2.30)$$

Здесь $\beta > 0$ – параметр резкости проекции, $\eta \in (0, 1)$ – порог. При $\beta \rightarrow \infty$ получаем приближение к идеальной ступенчатой функции.

Производная проекции по $P(\bar{\rho}; \beta, \eta)$:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \bar{\rho}} = \frac{\beta \operatorname{sech}^2(\beta(\bar{\rho} - \eta))}{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta(1 - \eta))}. \quad (2.31)$$

2.5.4. Двухфазная интерполяция свойств

В строгой двухфазной параметризации материал в элементе интерпретируется как смесь теплопроводящего (s) и конструкционного (v) материалов. Для изотропной теплопроводности:

$$\lambda_{\text{eff}}^{(2ph)}(\tilde{\rho}) = \lambda_{\min} + \tilde{\rho}^{p_\lambda}(\lambda_{\max} - \lambda_{\min}), \quad (2.32)$$

где p_λ – показатель SIMP для скалярной постановки [175,179].

Для тензорной теплопроводности:

$$\mathbf{\Lambda}_{\text{eff}}^{(2ph)}(\tilde{\rho}) = \mathbf{\Lambda}_{\min} + \tilde{\rho}^{p_\Lambda}(\mathbf{\Lambda}_{\max} - \mathbf{\Lambda}_{\min}), \quad (2.33)$$

где p_Λ – показатель SIMP для тензорной постановки, $\mathbf{\Lambda}_{\min}$ и $\mathbf{\Lambda}_{\max}$ – симметричные положительно определённые тензоры (обычно $\mathbf{\Lambda}_{\min} \ll \mathbf{\Lambda}_{\max}$) [179].

Альтернатива SIMP – рациональная аппроксимация RAMP (для минимизации областей с промежуточными значениями проектной переменной):

$$\lambda_{\text{eff}}^{(2ph)}(\tilde{\rho}) = \lambda_{\min} + \left[\frac{\tilde{\rho}}{1 + q_R(1 - \tilde{\rho})} \right] (\lambda_{\max} - \lambda_{\min}), \quad (2.34)$$

где q_R – параметр RAMP [180].

Аналогично записывается RAMP для тензора $\mathbf{\Lambda}$:

$$\mathbf{\Lambda}_{\text{eff}}^{(2ph)}(\tilde{\rho}) = \mathbf{\Lambda}_{\min} + \left[\frac{\tilde{\rho}}{1 + q_R(1 - \tilde{\rho})} \right] (\mathbf{\Lambda}_{\max} - \mathbf{\Lambda}_{\min}). \quad (2.35)$$

Для последующих чувствительностей необходимы производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_{\text{eff}}^{(2ph)}}{\partial \tilde{\rho}} &= p_k \tilde{\rho}^{p_k-1} (\lambda_{\max} - \lambda_{\min}) && \text{(SIMP),} \\ \frac{\partial \lambda_{\text{eff}}^{(2ph)}}{\partial \tilde{\rho}} &= \frac{1 + q_R}{[1 + q_R(1 - \tilde{\rho})]^2} (\lambda_{\max} - \lambda_{\min}) && \text{(RAMP).} \end{aligned} \quad (2.36)$$

2.5.5. Трёхфазная параметризация

Для описания переходной области может использоваться представление биметаллического композита в виде трёх фаз – матрицы, интерфейсной фазы и наполнителя. Здесь матрица обозначает основной несущий материал, интерфейс – расчётно выделяемую межфазную область, наполнитель – второй материал в вычислительной схеме. Такая триада удобна для параметризации, но не должна интерпретироваться как универсальное описание микроструктуры реального биметалла.

Вводится начальный набор весов (Бернштейн-подобные полиномы порядка $m \geq 1$):

$$\begin{aligned}\phi_m &= \tilde{\rho}^m, \\ \phi_f &= (1 - \tilde{\rho})^m, \\ \phi_{int} &= 2^m \tilde{\rho}^m (1 - \tilde{\rho})^m.\end{aligned}\tag{2.37}$$

Нормированные веса:

$$\begin{aligned}w_m &= \frac{\phi_m}{\phi_m + \phi_f + \phi_{int}}, \\ w_f &= \frac{\phi_f}{\phi_m + \phi_f + \phi_{int}}, \\ w_{int} &= \frac{\phi_{int}}{\phi_m + \phi_f + \phi_{int}}.\end{aligned}\tag{2.38}$$

Тогда феноменологическая эффективная теплопроводность записывается в виде

$$\lambda_{\text{eff}}^{(3ph)} = w_m \lambda_{\text{max}} + w_{int} \lambda_{\text{int}} + w_f \lambda_{\text{min}},\tag{2.39}$$

$$\Lambda_{\text{eff}}^{(3ph)} = w_m \Lambda_{\text{max}} + w_{int} \Lambda_{\text{int}} + w_f \Lambda_{\text{min}}\tag{2.40}$$

где λ_{int} или Λ_{int} интерпретируются как свойства интерфейсной зоны и должны определяться из экспериментальных данных, из строгой межфазной модели либо использоваться как калибруемые параметры при инженерном применении.

Связь со строгими межфазными моделями возможна через эквивалентное тепловое сопротивление $R_{int} = \delta/\lambda_{int}$ для тонкого слоя толщины δ , однако это требует явного задания δ и λ_{int} на основе экспериментальных данных [156,171].

2.6. Целевой функционал и ограничения задачи рационального расположения теплопроводящего наполнителя

2.6.1. Температурные критерии и тепловое сопротивление

В задачах теплоотвода используются несколько близких, но не эквивалентных критериев: средняя температура, тепловая податливость, тепловое сопротивление, максимальная температура. Различия между средними и экстремальными критериями принципиальны, особенно при низкой теплопроводности материала, где разрыв между максимумом и средним возрастает [181].

Критерий среднеинтегральной температуры на целевом участке:

$$\Phi_{\text{avg}}(T) = \frac{1}{|\Gamma_{\text{tar}}|} \int_{\Gamma_{\text{tar}}} T d\Gamma \quad (2.41)$$

Критерий максимальной температуры (в постановке рационального расположения теплопроводящего наполнителя используется сглаживание):

$$\Phi_{\text{max}}(T) = \max_{\mathbf{x} \in \Omega_{\text{tar}}} T(\mathbf{x}) \quad (2.42)$$

Критерий тепловой эффективности теплоотвода через сток тепла (важен, когда мощность отвода зависит от топологии через теплообмен):

$$\Phi_R(T) = \frac{\bar{T}_{\Gamma_{\text{sink}}}}{Q_{\text{sink}}(T)}, \quad (2.43)$$

$$\bar{T}_{\Gamma_{\text{sink}}} = \frac{1}{|\Gamma_{\text{sink}}|} \int_{\Gamma_{\text{sink}}} T d\Gamma.$$

Замечание о невырожденности: поскольку $Q_{\text{sink}}(T)$ может стремиться к нулю при отсутствии проводящих путей к Γ_{sink} , для корректной постановки требуется либо обеспечивать $Q_{\text{sink}} \geq Q_{\text{min}} > 0$ дополнительным

ограничением, либо выбирать критерий (2.41)/(2.42) при фиксированном тепловом вводе, когда вырождение невозможно [181].

2.6.2. Ограничение по объёму материала

Ограничение по доле материала в Ω_d [179]:

$$g_V(\rho) := \frac{1}{|\Omega_d|} \int_{\Omega_d} \tilde{\rho} \, d\Omega - V \leq 0, \quad 0 < V < 1. \quad (2.44)$$

2.6.3. Полная постановка задачи рационального расположения теплопроводящего наполнителя

В базовом варианте: минимизация максимума температуры при ограничении по объёму:

Минимизировать по $\rho(\mathbf{x}) \in [0, 1]$, $\mathbf{x} \in \Omega_d$:

$$J(\rho) := J_{KS}(T(\rho)), \quad (2.45)$$

при условиях:

$$\mathbf{R}(T; \rho) = 0, \quad (2.46)$$

$$g_V(\rho) \leq 0, \quad (2.47)$$

$$\rho = 0 \text{ на } \Omega_{nd}, \quad (2.48)$$

то есть, решения уравнения теплопроводности (2.46), ограничений по объёму теплопроводящего наполнителя (2.47) и его наличия только в проектируемой области (2.48).

Альтернативно Φ может задаваться (2.41) или (2.43), если это соответствует физическому смыслу рационального расположения теплопроводящего наполнителя [181,182].

Термопрочность в инженерных постановках с точки зрения задачи рационального расположения теплопроводящего наполнителя целесообразно трактовать как агрегированный индикатор ранжирования вариантов или как часть проектного критерия, объединяющего требования к тепловой

эффективности и механической работоспособности. Представленный в данной работе программный комплекс напрямую поддерживает только отдельные компоненты такого индикатора – теплопроводность, коэффициент линейного теплового расширения, модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Для биметаллических и градиентных материалов системы Cu–Fe непосредственно измеряются и используются отдельные теплофизические характеристики, прежде всего теплопроводность, коэффициент линейного теплового расширения и теплоёмкость, тогда как интегральная термopрочность выступает производным инженерным индикатором [47,183,184].

2.7. Метод объединения локальных ограничений с помощью функции агрегации Кееса–Смита

2.7.1. Функция агрегации Кееса–Смита для аппроксимации максимума

Пусть g_i – значения локального ограничения или целевой величины в дискретных точках (например, температуры в узлах зоны Ω_{tar} или на Γ_{tar}). Определим функцию агрегации Кееса–Смита (KS-агрегатор):

$$KS_{\kappa}(g) = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\sum_{i=1}^M \exp(\kappa g_i) \right), \quad \kappa > 0, \quad (2.49)$$

где κ – параметр сглаживания, $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_M)$ – вектор ограничений [185].

Свойство KS-агрегатора [185]:

$$\max_i g_i \leq KS_{\kappa}(g) \leq \max_i g_i + \frac{\ln M}{\kappa}. \quad (2.50)$$

Для цели минимизации температуры:

$$\Phi_{KS}(T) = KS_{\kappa}(\{T_i\}_{i \in I_{tar}}), \quad (2.51)$$

где I_{tar} – набор индексов узлов/точек в зоне контроля.

Производная KS по g_i :

$$\frac{\partial KS_{\kappa}}{\partial g_i} = \frac{\exp(\kappa g_i)}{\sum_{j=1}^M \exp(\kappa g_j)} \text{ для } i \in I_{\text{tar}}, \text{ и } 0 \text{ иначе.} \quad (2.52)$$

2.7.2. Сопряжённый метод

Пусть дискретная прямая задача записана как невязка:

$$\mathbf{R}(T; \rho) = 0. \quad (2.53)$$

Требуется полная производная цели $J(T, \rho)$ по ρ . По правилу цепочки:

$$\frac{d\Phi}{d\rho} = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial T}\right) \cdot \frac{dT}{d\rho}. \quad (2.54)$$

Дифференцируя (2.53):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial T}\right) \frac{dT}{d\rho} + \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\rho} &= 0, \\ \frac{dT}{d\rho} &= -\left(\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial T}\right)^{-1} \left(\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\rho}\right). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Подстановка (2.55) в (2.54) даёт:

$$\frac{d\Phi}{d\rho} = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial T}\right) \left(\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial T}\right)^{-1} \left(\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\rho}\right). \quad (2.56)$$

Вводим сопряжённую переменную $\mathbf{p}$ как решение:

$$\left(\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial T}\right)^{\top} \mathbf{p} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial T}\right)^{\top}. \quad (2.57)$$

Тогда:

$$\frac{d\Phi}{d\rho} = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} - \mathbf{p}^{\top} \left(\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\rho}\right). \quad (2.58)$$

Ключевое требование нелинейного случая: в (2.58) используется касательный оператор $\partial\mathbf{R}/\partial T$, соответствующий текущему решению T (то есть $\mathbf{J}_T$ из (2.26)), а не замороженная матрица линейной задачи [168].

2.7.3. Частный линейный случай (для сопоставления)

Если $\mathbf{A}$ не зависит от T и граничные условия линейны, то:

$$\mathbf{R}(T; \rho) = \mathbf{A}(\rho)T - \mathbf{b}(\rho) = 0. \quad (2.59)$$

Тогда $\partial \mathbf{R} / \partial T = \mathbf{A}(\rho)$ и сопряжённая задача:

$$\mathbf{A}(\rho)^\top \mathbf{p} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)^\top. \quad (2.60)$$

В свою очередь, чувствительность:

$$\frac{d\Phi}{d\rho} = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \mathbf{p}^\top \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \rho} T - \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \rho} \right). \quad (2.61)$$

2.7.4. Учёт цепочки $\rho \rightarrow \bar{\rho} \rightarrow \tilde{\rho} \rightarrow$ свойства

Зависимость коэффициентов $\Lambda_{\text{eff}}^{2ph}$ или $\lambda_{\text{eff}}^{2ph}$ от ρ проходит через фильтр и проекцию:

$$\rho \rightarrow \bar{\rho} \rightarrow \tilde{\rho} \rightarrow \Lambda_{\text{eff}}. \quad (2.62)$$

В дискретном виде производная цели по «сырой» ρ получается через цепочку:

$$\frac{d\Phi}{d\rho} = \left(\frac{d\Phi}{d\tilde{\rho}} \right) \left(\frac{d\tilde{\rho}}{d\bar{\rho}} \right) \left(\frac{d\bar{\rho}}{d\rho} \right). \quad (2.63)$$

Здесь $d\tilde{\rho}/d\bar{\rho}$ задаётся (2.31), а оператор $d\bar{\rho}/d\rho$ определяется линейным уравнением фильтра (2.28)–(2.29). В дискретной форме это решение линейной системы, эквивалентной матрице Гельмгольца [177].

2.8. Термоупругое расширение модели

2.8.1. Уравнения линейной термоупругости

Для термоупругого расширения рассматривается поле перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3$. Малые деформации [186]:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\top), \quad (2.64)$$

где $\mathbf{u}$ – векторное поле перемещений, $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ – тензор малых деформаций.

Тепловая деформация зависит от температуры. В общем случае при температурно-зависимом коэффициенте линейного расширения $\alpha(T)$ корректная запись тепловой деформации (для изотропии) имеет интегральный вид:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{th}(T) = \left[\int_{T_0}^T \alpha(\theta) d\theta \right] \mathbf{I}. \quad (2.65)$$

Частный случай постоянного α :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{th}(T) = \alpha(T - T_0) \mathbf{I}. \quad (2.66)$$

Соотношение для линейной изотропной термоупругости:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu_L \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \lambda_L \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \mathbf{I} - [3\lambda_L + 2\mu_L] \boldsymbol{\varepsilon}_{th}(T), \quad (2.67)$$

где μ_L характеризует сопротивление материала сдвиговым деформациям, λ_L характеризует сопротивление материала объёмным деформациям (параметры Ламе) [186]. В свою очередь параметры Ламе связаны с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν следующими соотношениями:

$$\lambda_L = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad (2.68)$$

$$\mu_L = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (2.69)$$

Уравнение равновесия:

$$-\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f} \quad \text{в } \Omega, \quad (2.70)$$

где $\mathbf{f}$ – вектор объёмных сил (в рамках данной работы принимается $\mathbf{f} = 0$), с граничными условиями на перемещения или напряжения по стандартной схеме (здесь опускаются для краткости, поскольку главный акцент – связь с тепловой частью и функционалом рационального расположения теплопроводящего наполнителя) [166].

2.8.2. Связь задач: последовательная и связанная постановки

В данной диссертационной постановке рассматривается задача стационарной теплопроводности, после решения которой поле T используется

как нагрузка в задаче термоупругости (слабосвязанный подход). Это соответствует инженерным постановкам, где влияние деформаций на теплоперенос пренебрежимо мало, но тепловые деформации существенно влияют на напряжения [187].

2.8.3. Термоупругое расширение задачи рационального расположения теплопроводящего наполнителя и ограничения по напряжениям

При учёте механической подсистемы в процессе решения задачи могут быть введены дополнительные цели и ограничения:

- 1) ограничение на максимальное значение эквивалентного напряжения Мизеса $\sigma_{VM}(\mathbf{x})$;
- 2) контроль локальных напряжений.

Для численного решения задачи рационального расположения теплопроводящего наполнителя могут быть использованы:

- 1) агрегирование (критерии KS или индуцированные агрегаты);
- 2) формулировка с ограничивающими условиями и дополнительной переменной.

Сравнительный анализ стресс-ориентированных подходов для термоупругих задач и обоснование выбора целевого функционала рассмотрены применительно к многоматериальным и функционально-градиентным средам [188].

При решении задачи рационального расположения теплопроводящего наполнителя с ограничением по эквивалентным напряжениям и температурно-зависимыми свойствами необходимо:

учитывать зависимости $E(T)$, $\alpha(T)$ и др. на уровне элементов по их средней температуре;

использовать фильтр Гельмгольца и проекцию Хевисайда для подавления численных артефактов [187].

Если вводится KS-ограничение по напряжениям, то для локальных значений $\sigma_{VM,e}$ в элементах $e = 1 \dots N$ формулируется:

$$g_\sigma(\rho) := KS_k(\{\sigma_{VM,e} - \sigma_{allow}\}_{e=1}^N) \leq 0. \quad (2.71)$$

2.8.4. Сопряжённые чувствительности в термоупругой задаче

При наличии двух полей $(T, \mathbf{u})$ и функционала $\Phi(T, \mathbf{u}, \rho)$ применяется двойная сопряжённость. В слабосвязной схеме (задача теплопроводности решается отдельно) удобно рассматривать производную по ρ как сумму вкладов:

$$\frac{d\Phi}{d\rho} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)_{\text{явн}} - \mathbf{p}_T^\top \left(\frac{\partial R_T}{\partial\rho}\right) - \mathbf{p}_u^\top \left(\frac{\partial R_u}{\partial\rho}\right) - \mathbf{p}_T^\top \left(\frac{\partial R_T}{\partial T}\right) \left(\frac{dT}{d\rho}\right) + \dots \quad (2.72)$$

где R_T – тепловая невязка, R_u – механическая невязка.

Практически для связанной постановки задачи корректнее представлять систему невязок в объединённом виде и использовать якобиан блочной системы. Конкретная реализация при этом зависит от выбранной схемы связи (монолитной или слабосвязанной).

Для настоящей главы принципиально следующее: в нелинейных задачах и задачах с температурно-зависимыми свойствами материалов сопряжённая задача должна строиться на основе касательного оператора соответствующей невязки (по аналогии с выражениями (2.26)–(2.27)) для каждого физического поля, а не на основе замороженной линейной матрицы [168].

Заключение к Главе 2

В настоящей главе построена многоуровневая математическая модель, объединяющая строгую физико-математическую основу с феноменологическими и вспомогательными вычислительными конструкциями, необходимыми для постановки задачи теплового рационального выбора биметаллических структур. Для предотвращения подмены строгой теории допущениями введено явное разграничение статуса каждого элемента модели.

Физико-математическая база исследования включает:

1. Уравнение стационарной теплопроводности с симметричным положительно определённым тензором теплопроводности и объёмным источником тепла;
2. Локальный баланс энергии, служащий в стационарном режиме основанием для вывода уравнения теплопроводности;
3. Анизотропный закон Фурье в тензорной форме;
4. Граничные условия Дирихле, Неймана и Робина с однозначным выбором внешней нормали и знака нормальной компоненты теплового потока;
5. Слабую форму краевой задачи с тестовыми функциями из соответствующего функционального пространства;
6. Конечно-элементную дискретизацию на тетраэдральных элементах первого порядка;
7. Линеаризацию и касательный оператор, причём для сопряжённой задачи используется именно касательный, а не замороженный оператор;
8. SIMP- и RAMP-интерполяцию свойств как строгую математическую параметризацию в рамках постановки рационального выбора;
9. Фильтр Гельмгольца и проекцию Хевисайда как строгие методы регуляризации проектного поля;
10. KS-агрегацию как гладкую аппроксимацию максимума для температурных критериев.

Феноменологические и вспомогательные элементы вводятся в тех случаях, когда полная идентификация межфазных параметров невозможна либо требуется регуляризация модели. К таким элементам относятся:

1. Межфазная область — эффективная интерфейсная область, обоснованная данными о переходной зоне в аддитивно изготовленных биметаллах, но не имеющая прямого термодинамического обоснования статуса «фазы»;
2. Рабочая декомпозиция «матрица – интерфейс – наполнитель»;
3. Встраивание материала — преобразование экспериментальных данных в параметры математической модели;
4. Переход от проектного поля к геометрии — преобразование значений проектных переменных в геометрические или топологические характеристики;
5. Морфология (текстура, пористость, дефекты, градиенты свойств) — набор характеристик, используемых для идентификации анизотропии и неоднородности материала, но не заменяющий уравнений теплового и механического поведения биметаллического композита;
6. Термопрочностной индикатор работоспособности конструкции при термомеханических нагрузках, учитывающий лишь отдельные аспекты поведения материала;
7. Источники данных аддитивного производства и их характеристика — сведения, используемые для выбора модели коэффициентов, но не заменяющие фундаментальных уравнений и конечно-элементной аппроксимации.

Интерфейсные эффекты требуют особого рассмотрения. Строгий учёт несовершенного теплового контакта должен вводиться на уровне прямой задачи одним из следующих способов:

- Как отдельная межфазная область конечной толщины с независимыми физико-механическими свойствами;

- Как нулевая поверхность с асимптотически выведенными условиями скачка температуры и теплового потока, включёнными в слабую вариационную форму записи уравнений.

Если же межфазная область вводится как интерфейсная фаза в рамках трёхфазной параметризации материала, то до независимой идентификации коэффициента теплопроводности межфазной области и калибровки весового коэффициента такая конструкция трактуется как феноменологическая регуляризация или индикаторная модель, используемая исключительно в целях рационального выбора.

Для термоупругой части модели критически важна корректная форма записи тепловой деформации. Упрощение до линейного выражения допустимо только в случае постоянного коэффициента теплового расширения. В общем случае при температурно-зависимом коэффициенте корректная запись тепловой деформации имеет интегральный вид.

Сформулирована полная постановка задачи теплового рационального выбора биметаллической структуры, включающая целевой функционал (минимизация максимума температуры, среднеинтегральной температуры или критерий теплоотвода), ограничение по объёму теплопроводящего наполнителя, уравнение теплопроводности как связь и условия принадлежности проектной переменной проектируемой области. Для объединения локальных ограничений и аппроксимации максимума применена функция агрегации Кееса–Смита. Разработан сопряжённый метод вычисления чувствительностей, опирающийся на касательный оператор прямой задачи, что обеспечивает корректность градиентной информации в нелинейных постановках.

Таким образом, создан надёжный теоретический фундамент, позволяющий сохранить физическую корректность базовой постановки задачи теплопроводности при одновременном использовании современного математического аппарата рационального выбора структуры. Сформулированная модель обеспечивает необходимый баланс между

теоретической строгостью, требующей соблюдения законов сохранения энергии, и практической применимостью для задач аддитивно изготавливаемых биметаллических конструкций с учётом анизотропии и сложного интерфейса.

Глава 3. Программная реализация численного моделирования

Настоящая глава описывает программную реализацию численной модели, сформулированной в Главе 2. В отличие от предыдущей главы здесь не повторяется аналитический вывод уравнения теплопроводности, слабой формы, конечно-элементной аппроксимации, фильтрации, проекции, интерполяции свойств и сопряжённых чувствительностей. Основное внимание уделяется тому, как эти элементы реализованы в вычислительном контуре: какие массивы формируются, какие модули вызываются, какие системы линейных алгебраических уравнений решаются, какие артефакты передаются между стадиями и какие диагностические проверки выполняются после каждого расчётного блока.

Прямая тепловая задача реализует постановку (2.2)–(2.9), слабая форма и P1-дискретизация соответствуют (2.17)–(2.24), фильтрация и проекция реализуют (2.28)–(2.31), интерполяция свойств соответствует (2.32)–(2.35), агрегирование максимальной температуры и сопряжённые чувствительности связаны с (2.49)–(2.58), а термopрочностная подсистема использует термоупругую модель (2.64)–(2.72). Формулы настоящей главы имеют преимущественно дискретный и алгоритмический смысл: они фиксируют операции сборки, редукции, решения, восстановления полей, обратного прохода градиентов, материализации и повторной проверки.

В дальнейшем используется единая система обозначений. Если величина уже введена в Главе 2, её обозначение сохраняется. Для новых программных объектов применяются обозначения, не конфликтующие с главой 2: матрица координат узлов обозначается $\mathbf{X}_h$, множество тетраэдров – $\mathcal{K}_h$, множество поверхностных треугольников – $\mathcal{F}_h$, неявное поле наполнителя – ψ_{fill} , а программный файл `phi_filler.npz` рассматривается только как имя артефакта.

Табл. 3.1. Основные величины и программные имена, используемые в Главе 3.

Обозначение	Программное имя	Смысл	Единицы
N_n	n_nodes	число узлов фоновой сетки	–
N_e	n_tets	число тетраэдральных элементов	–
N_f	n_tris	число поверхностных треугольников	–

Обозначение	Программное имя	Смысл	Единицы
$\mathbf{X}_h$	points	матрица координат узлов; строки содержат координаты $\mathbf{x}_i$	м
$\mathcal{K}_h$	tets	связность тетраэдров	—
$\mathcal{F}_h$	tris	связность поверхностных треугольников	—
γ_f	tri_surface_ids	идентификатор поверхностной группы треугольника	—
V_e	volume_e	объём тетраэдра	м ³
J_e	J	якобиан аффинного отображения тетраэдра	м
B_e	B_e	матрица градиентов линейных функций формы	м ⁻¹
Λ_e	K_elem, Lambda_elem	элементный тензор теплопроводности	Вт/(м·К)
λ_e	k_elem	скалярная теплопроводность элемента	Вт/(м·К)
A_e	A_e	локальная матрица теплопроводности	Вт/К
A	A	глобальная разреженная матрица теплопроводности	Вт/К
b	b	глобальная правая часть тепловой задачи	Вт
T	T_nodes	вектор узловых температур	К
T_f, T_c	T_free, T_fixed	свободные и закреплённые температуры	К
∇T_e	gradT_elem	восстановленный градиент температуры элемента	К/м
$\mathbf{q}_e$	q_elem	восстановленный тепловой поток элемента	Вт/м ²
R_{bal}	balance_residual_w	тепловая балансовая невязка	Вт
ρ_e^{raw}	rho_raw	исходная проектная переменная, обновляемая в ходе решения задачи рационального расположения теплопроводящего наполнителя	—
$\tilde{\rho}_e$	rho_tilde	фильтрованная проектная переменная	—
$\bar{\rho}_e$	rho_phys	физическая проектная переменная после проекции Хевисайда	—
J	objective	целевой функционал текущего расчёта	зависит от цели
g_i	constraints[i]	i-е ограничение задачи рационального расположения теплопроводящего наполнителя	—
p_J, p_{g_i}	lambda_adj	сопряжённые поля для функционала и ограничений	зависит от задачи

Обозначение	Программное имя	Смысл	Единицы
χ_e	binary_mask	бинаризованное поле после постобработки	—
ψ_{fill}	phi_filler	неявное поле наполнителя	м
m_e^{id}	element_material_ids	идентификатор материала элемента	—
$\mathbf{u}$	u_nodes	вектор узловых перемещений термопрочностной задачи	м
$\sigma_{vm,e}$	sigma_vm_elem	эквивалентное напряжение Мизеса	Па

3.1. Общая архитектура программного комплекса

3.1.1. Назначение модульной архитектуры

Программный комплекс целесообразно описывать как совокупность взаимосвязанных подсистем. Внутреннее расчётное ядро образуют конечно-элементный тепловой решатель, моделирование материала, регуляризация проектного поля, вычисление целевых функционалов и ограничений, сопряжённый блок чувствительностей и модули обновления проектных переменных. Внешние стадии обеспечивают подготовку данных, геометрическую интерпретацию результата, построение наполнителя, повторную тепловую проверку, термопрочностную диагностику, проверку технологической реализуемости и формирование отчётов.

Такое разделение необходимо для корректной интерпретации вычислительного результата. Стадия, отвечающая за решение дискретной тепловой задачи, не смешивается с геометризацией, геометризация не подменяет повторный тепловой расчёт, а проверка изготовляемости не является физической моделью процесса прямого лазерного выращивания. Поэтому далее каждая подсистема описывается через её границу ответственности: входные данные, тип выполняемых операций, выходные артефакты и место в общем вычислительном контуре.

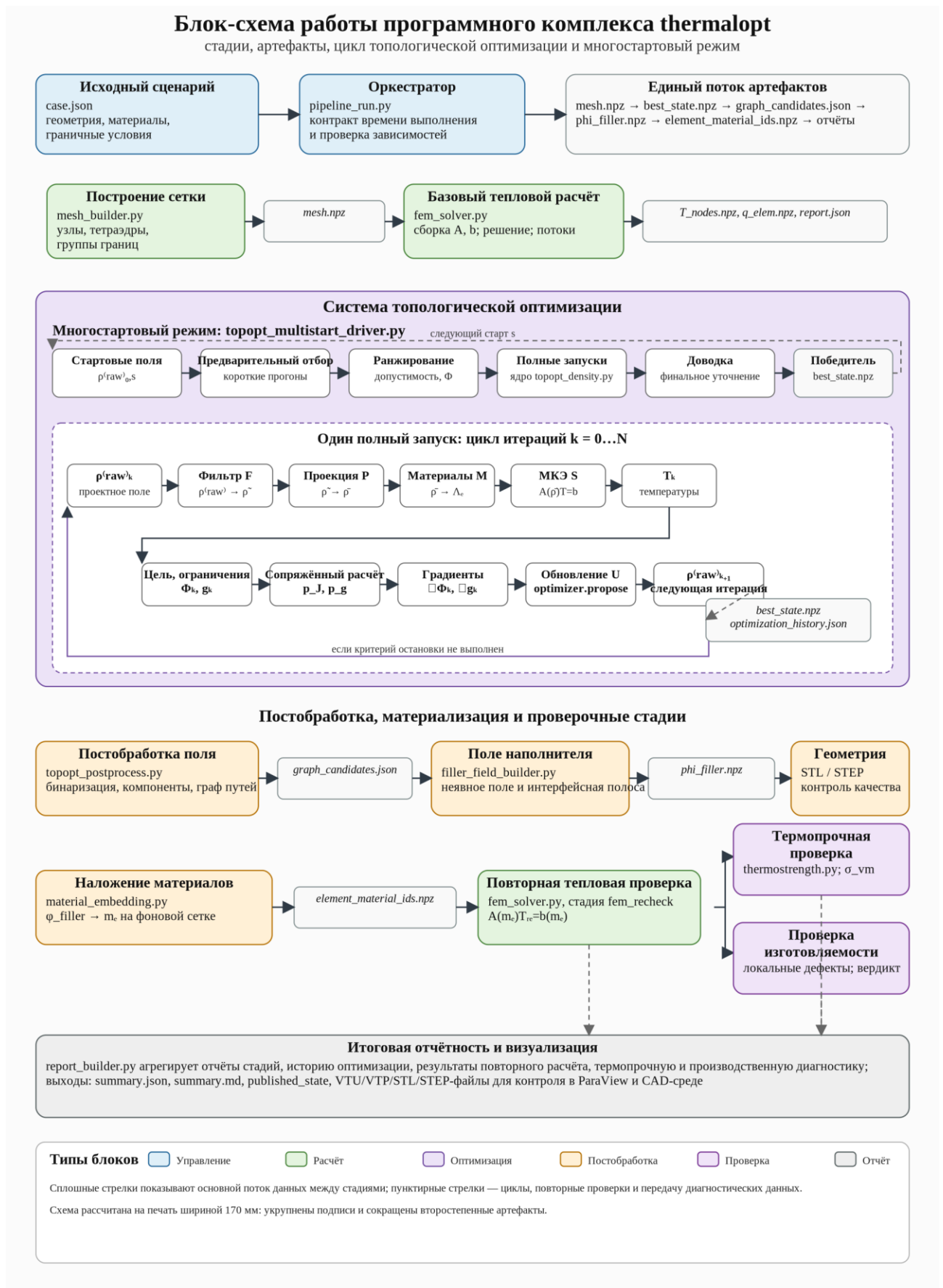


Рис. 3.1. Стадийная организация программного комплекса.

3.1.2. Исполняемые фасады верхнего уровня

Верхнеуровневые файлы проекта выполняют функцию исполняемых фасадов. Они принимают параметры запуска, читают исходный или промежуточный файл конфигурации, вызывают соответствующие пакетные модули и записывают выходные артефакты. Основные вычисления сосредоточены не в фасадах, а в специализированных подсистемах. Такой подход сохраняет совместимость с командным запуском стадий и одновременно позволяет использовать расчётные функции в сквозном вычислительном контуре. Такая организация программного комплекса позволяет в будущем использовать для него графический пользовательский интерфейс.

Табл. 3.2. Исполняемые фасады программного комплекса верхнего уровня.

Файл	Назначение
pipeline_run.py	Управление порядком стадий, подготовка конфигурации времени выполнения, проверка обязательных выходных данных
mesh_builder.py	Запуск построения или загрузки сетки, формирование mesh.npz, отчёта по сетке и визуализационных файлов
fem_solver.py	Фасад к тепловому решателю МКЭ; используется для базового и повторного тепловых расчётов
topopt_density.py	Запуск одиночной стадии решения задачи рационального расположения теплопроводящего наполнителя
topopt_multistart_driver.py	Запуск многостартового режима решения задачи рационального расположения теплопроводящего наполнителя
topopt_postprocess.py	Постобработка физической проектной переменной: бинаризация, анализ компонент, построение графов тепловых путей
filler_field_builder.py	Построение неявного поля наполнителя по графу тепловых путей или бинарной маске
filler_geometry_builder.py	Переход от неявного поля к поверхностной геометрии, проверкам качества и экспорту STL/STEP/VTU
material_embedding.py	Возврат неявного поля наполнителя на фоновую сетку и назначение материала элементам
thermostrength.py	Запуск термопрочностной проверки
manufacturing_checker.py	Проверка геометрии и материализованной структуры на технологическую реализуемость

Файл	Назначение
report_builder.py	Агрегация отчётов стадий, формирование сводных метрик и итоговой текстовой сводки
benchmark_compare.py	Сравнение опубликованных состояний расчёта и заданных метрик

3.1.3. Функциональные подсистемы

Программный комплекс делится на подсистемы, каждая из которых размещается в отдельной папке пакета thermalopt. Их перечень приведён в Табл. 3.3. В таблице указаны не строки кода, а функциональные роли модулей, поскольку дальнейшее изложение строится по подсистемам и передаваемым между ними артефактам.

Табл. 3.3. Функциональные подсистемы программного комплекса.

Подсистема	Основные модули	Назначение
contracts	case_contract.py, runtime_contract.py	Описание исходного расчётного сценария, проверка согласованности модели, формирование конфигурации времени выполнения и канонических путей артефактов
mesh	boundary_tags.py, design_region.py, mesh_checks.py, mesh_loader.py, surface_groups.py, vtk_export.py	Подготовка тетраэдральной сетки, разметка граничных и проектируемых областей, контроль качества сетки, визуализация
fem	assembly_thermal.py, bc_thermal.py, solver_thermal.py, linear_solvers.py, recovery.py, flux_integrals.py, assembly_structural.py, bc_structural.py, stage_runner.py	Прямой тепловой расчёт, восстановление полей, балансовые проверки и структурная часть термopрочностного расчёта
materials	conductivity_models.py, interpolation.py, effective_mixture.py, interface_models.py, property_models.py, tables.py, tensor_rotation.py	Модели теплопроводности, температурные зависимости, SIMP/RAMP-интерполяция, эффективные свойства, анизотропные тензоры

Подсистема	Основные модули	Назначение
topopt_density	filter_helmholtz.py, projection_heaviside.py, forward_thermal.py, objective_flux_sink.py, constraints.py, adjoint_thermal.py, sensitivities.py, optimizer_mma.py, runner_iteration.py, multistart_*	Рациональное расположение теплопроводящего наполнителя, регуляризация, вычисление чувствительностей, обновление проектной переменной, многостартовый режим
topology_post	binarize.py, component_analysis.py, morphology.py, skeletonize.py, graph_extract.py, graph_regularize.py, graph_export.py, stage_runner.py	Постобработка рационального поля распределения теплопроводящего наполнителя и построение графов тепловых путей
filler_field	implicit_field.py, interface_zone.py, field_export.py	Построение неявного поля наполнителя и интерфейсной зоны
geometry	implicit_to_surface.py, surface_smoothing.py, brep_fit.py, geometry_checks.py, geometry_export.py, filler_stage.py	Геометризация поля наполнителя, сглаживание, экспорт геометрии и проверки качества
embedding	field_to_elements.py, assignment_rules.py, embedding_export.py, stage_runner.py	Наложение неявного поля на фоновую сетку и назначение материалов элементам
thermo	thermal_to_structural.py, thermostrength_solver.py, strength_criteria.py, stage_runner.py	Слабосвязанный термопрочностной расчёт, восстановление напряжений и критериев прочности
manufacturing	stage_runner.py	Проверка технологической реализуемости по правилам
reports	stage_reports.py, summary_report.py, markdown_report.py, project_selection.py, published_state.py, physics_closure.py, interface_audit.py, trust_modes.py, benchmark_compare.py	Сбор, интерпретация, фиксация и сравнение результатов

3.1.4. Стадия как преобразование артефактов

В конфигурации времени выполнения каждая стадия рассматривается как преобразование входных артефактов и параметров в выходные артефакты. Такая запись не вводит новую математическую модель; она фиксирует архитектурный контракт между модулями.

$$\mathcal{A}_s^{out} = \mathcal{S}_s(\mathcal{A}_s^{in}, \theta_s). \quad (3.1)$$

Здесь $\mathcal{A}_s^{in}$ – набор входных артефактов стадии s , θ_s – параметры этой стадии, $\mathcal{S}_s$ – вызываемая программная стадия, $\mathcal{A}_s^{out}$ – набор выходных артефактов. На уровне данных основной поток артефактов имеет вид:

$$\begin{aligned} \text{mesh.npz} \rightarrow \{T, \nabla T_e, \mathbf{q}_e\} \rightarrow \{\rho^{\text{raw}}, \tilde{\rho}, \bar{\rho}\} \rightarrow \{\chi, \psi_{\text{fill}}\} \rightarrow m_e^{\text{id}} \\ \rightarrow \{T^{\text{rec}}, \sigma_{\text{vm}}, R_{\text{mfg}}\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Первый блок задаёт дискретную область, второй содержит поля прямого теплового расчёта, третий описывает рациональное расположение теплопроводящего наполнителя, четвёртый относится к постобработке и построению наполнителя, пятый задаёт материализацию на фоновой сетке, а последний содержит повторные проверки и отчётность.

3.1.5. Классификация операций

Для последующего изложения важно разграничить типы операций, выполняемых модулями. К вычислениям относятся сборка матриц, решение систем, восстановление полей, вычисление функционалов, ограничений и чувствительностей. К управлению относятся подготовка конфигурации времени выполнения, выбор стадий, запуск фасадов, контроль статусов и обработка отказов. К вводу и выводу относятся чтение и запись JSON, NPZ, VTU, VTP, VTI, STL, STEP и текстовых отчётов. К проверкам относятся контроль качества сетки, физического баланса, допустимости проектного состояния, качества геометрии, корректности термopрочностной постановки и технологических ограничений. Отчётность и визуализация фиксируют результат расчёта в машинно-читаемой и визуальной форме.

Табл. 3.4. Классификация характерных модулей по типу операций.

Тип операций	Характерные модули
Управление	pipeline_run.py, contracts/runtime_contract.py, toptopt_density/runner_iteration.py, toptopt_density/multistart_driver.py, модули stage-runner.py
Вычисления	assembly_thermal.py, solver_thermal.py, interpolation.py, filter_helmholtz.py, adjoint_thermal.py, sensitivities.py, thermostrength_solver.py
Ввод и вывод	mesh_loader.py, toptopt_density/io.py, graph_export.py, field_export.py, geometry_export.py, embedding_export.py
Проверка и диагностика	mesh_checks.py, validation.py, stopping.py, selection.py, geometry_checks.py, thermo/stage_runner.py, manufacturing/stage_runner.py, reports/interface_audit.py, reports/trust_modes.py
Отчётность и визуализация	vtk_export.py, fem_export.py, summary_report.py, markdown_report.py, published_state.py, benchmark_compare.py, report_builder.py

3.2. Управление расчётным сценарием, контрактами и артефактами

Принципиальная схема управления подсистемами программного комплекса приведена на Рис. 3.2.



Рис. 3.2. Подсистема управления расчётным сценарием и артефактами.

3.2.1. Система управления стадиями расчёта

Система управления стадиями расчёта отвечает за порядок запуска подсистем, передачу данных между ними и контролем результатов. Её

центральным модулем является `pipeline_run.py`, чья функция состоит в подготовке конфигурации времени выполнения, выборе подмножества стадий, запуске управляющих модулей соответствующих подсистем, контроле завершения стадий, проверке наличия обязательных выходных файлов и записи журнала выполнения.

Для каждой стадии данная система управления формирует запись с именем стадии, командой запуска, путями к ожидаемым артефактам, путём к журналу, флагом включения и текстовым описанием. На уровне состояния используются статусы «в очереди», «выполняется», «завершена», «завершена с ошибкой» и «пропущена».

3.2.2. Конфигурация задачи и конфигурация времени выполнения

Подсистема `contracts` задаёт формальное описание исходного расчётного сценария и конфигурации времени выполнения. Модуль `case_contract.py` описывает допустимые параметры исходного сценария: геометрию, сетку, материалы, граничные условия, параметры рационального расположения теплопроводящего наполнителя, режимы постобработки, геометризаций, повторной проверки, термopрочностного расчёта, производственной верификации и отчётности. На этом уровне проверяются допустимость стадий, уникальность имён групп поверхностей, наличие обязательных параметров, согласованность теплового сценария с граничными условиями и корректность ссылок на материалы.

Модуль `runtime_contract.py` преобразует исходную конфигурацию задачи в конфигурацию времени выполнения и фиксирует канонические группы артефактов. Благодаря этому пути к рабочим файлам задаются единообразно для всех стадий: решатель теплопроводности не ищет сетку произвольно, подсистема наложения материалов получает заранее определённый путь к полю наполнителя, а отчётная подсистема обращается к согласованному набору отчётов.

Для стадии s задаётся множество обязательных входных артефактов:

$$\mathcal{D}_s = \{a_{s,1}, a_{s,2}, \dots, a_{s,n_s}\}. \quad (3.3)$$

Стадия допускается к запуску только при выполнении условия:

$$a_{s,j} \in \mathcal{A}_{available} \quad \forall j = 1, \dots, n_s. \quad (3.4)$$

Иными словами, все обязательные входные файлы должны уже существовать перед началом работы стадии. Например, базовый тепловой расчёт требует `mesh.npz` и описание граничных условий; стадия `material_embedding.py` требует фоновую сетку и поле наполнителя; повторная тепловая проверка требует `element_material_ids.npz`. Такой подход обеспечивает воспроизводимость вычислительного контура, автоматическую проверку готовности данных и отделение вычислительной логики от управления путями.

3.2.3. Унификация путей и обмен данными

Модуль `pathing.py` производит унификацию путей: задаёт корневую папку расчёта, разрешает пути относительно корня проекта, определяет каталог артефактов по умолчанию и заполняет словарь конфигурации времени выполнения служебными путями. Его роль принципиальна: если разные стадии по-разному интерпретируют относительные пути, воспроизводимость расчёта нарушается.

На уровне программной реализации данные передаются двумя способами. Внутри одной итерации рационального расположения теплопроводящего наполнителя массивы обычно передаются в памяти: проектная переменная, фильтрованное поле, физическая проектная переменная, элементные свойства, матрица тепловой задачи, температурное поле и градиенты. Между крупными стадиями границы фиксируются файловыми артефактами: `mesh.npz`, `best_state.npz`, `graph_candidates.json`, `phi_filler.npz`, `element_material_ids.npz`, отчёты и визуализационные файлы.

3.2.4. Полный набор параметров расчётного сценария

Модель расчётного сценария задаёт единую точку конфигурирования. В компактной записи полный набор параметров можно представить как:

$$\theta = \{\theta_{mesh}, \theta_{fem}, \theta_{mat}, \theta_{opt}, \theta_{post}, \theta_{fld}, \theta_{geom}, \theta_{emb}, \theta_{rec}, \theta_{str}, \theta_{mfg}, \theta_{rep}\}. \quad (3.5)$$

Здесь θ_{mesh} – параметры сетки, θ_{fem} – настройки конечно-элементного решателя, θ_{mat} – параметры моделей материалов, θ_{opt} – параметры рационального расположения теплопроводящего наполнителя, θ_{post} – настройки постобработки, θ_{fld} – параметры построения неявного поля наполнителя, θ_{geom} – параметры геометризации, θ_{emb} – параметры наложения материалов на сетку, θ_{rec} – параметры повторной тепловой проверки, θ_{str} – параметры термopрочностного расчёта, θ_{mfg} – параметры проверки изготавливаемости, θ_{rep} – настройки отчётности.

3.3. Подготовка сетки, граничной разметки и свойств материалов

Принципиальная схема подсистемы подготовки сетки приведена на Рис. 3.3.



Рис. 3.3. Подсистема подготовки сетки и граничной разметки.

3.3.1. Подсистема построения и проверки сетки

Подсистема thermalopt/mesh отвечает за подготовку дискретного представления расчётной области. Она превращает геометрическое описание и разметку поверхностей в массивы узлов, тетраэдров, поверхностных треугольников, идентификаторов поверхностных групп, идентификаторов

доменов, а также в маски проектируемых и запрещённых областей. Результатом работы является файл `mesh.npz`, который далее используется конечно-элементным решателем, подсистемой рационального расположения теплопроводящего наполнителя, подсистемой наложения материала и проверочными стадиями.

Табл. 3.5. Модули подсистемы построения сетки.

Модуль	Назначение
<code>mesh_loader.py</code>	загрузка или построение сетки, чтение массивов, сопоставление доменов и поверхностей
<code>boundary_tags.py</code>	работа с идентификаторами поверхностных групп и доменов
<code>surface_groups.py</code>	извлечение, нормализация и кодирование групп поверхностей из конфигурации
<code>design_region.py</code>	построение масок проектируемой области и запрещённых областей
<code>mesh_checks.py</code>	контроль объёмов, ориентации тетраэдров, качества элементов и связности сетки
<code>vtk_export.py</code>	запись сетки, граничных поверхностей и отчёта для визуального контроля

3.3.2. Сеточные массивы и поверхностные группы

Фоновая тетраэдральная сетка задаётся массивами:

$$\mathbf{X}_h \in \mathbb{R}^{N_n \times 3}, \quad \mathcal{K}_h \in \mathbb{N}^{N_e \times 4}, \quad \mathcal{F}_h \in \mathbb{N}^{N_f \times 3}. \quad (3.6)$$

Здесь строки $\mathbf{X}_h$ содержат координаты узлов $\mathbf{x}_i$, строки $\mathcal{K}_h$ – индексы узлов тетраэдров, строки $\mathcal{F}_h$ – индексы узлов поверхностных треугольников. Поверхностные треугольники получают идентификаторы γ_f , а словарь имён групп поверхностей связывает физическое имя участка границы с численным идентификатором. Для группы g множество треугольников определяется как:

$$\mathcal{F}_{h,g} = \{f \in \mathcal{F}_h : \gamma_f = g\}. \quad (3.7)$$

Эти множества используются при сборке граничных вкладов Дирихле, Неймана и Робина, соответствующих условиям (2.6)–(2.8). На уровне программной реализации поверхностная группа является не абстрактным подмножеством границы, а формально идентифицируемым набором поверхностных треугольников.

3.3.3. Проектируемая область и маски элементов

Проектируемая область Ω_d , введённая в главе 2, в коде представляется маской тетраэдральных элементов. Для элемента e вводится индикатор:

$$d_e = \begin{cases} 1, & e \in \Omega_d, \\ 0, & e \in \Omega_{nd}. \end{cases} \quad (3.8)$$

Если $d_e = 1$, элемент участвует в обновлении проектной переменной. Если $d_e = 0$, его материал фиксирован и не изменяется подсистемой рационального расположения теплопроводящего наполнителя. Эта маска передаётся в подсистему рационального расположения теплопроводящего наполнителя и используется также при формировании начальных полей, ограничений по объёму и при возврате фиксированных областей после фильтрации и проекции.

3.3.4. Геометрические проверки тетраэдров

Для каждого тетраэдра строится матрица якобиана аффинного отображения:

$$\mathbf{J}_e = [\mathbf{x}_{i_2} - \mathbf{x}_{i_1} \quad \mathbf{x}_{i_3} - \mathbf{x}_{i_1} \quad \mathbf{x}_{i_4} - \mathbf{x}_{i_1}]. \quad (3.9)$$

Объём элемента вычисляется как:

$$V_e = \frac{|\det \mathbf{J}_e|}{6}. \quad (3.10)$$

Сетка допускается к расчёту только при положительном объёме всех используемых тетраэдров. Практически это проверяется подсистемой `mesh_checks.py` и дополнительно контролируется тепловым решателем, поскольку вырожденные элементы приводят к некорректным градиентам функций формы и нарушают корректность P1-дискретизации (2.18)–(2.24).

3.3.5. Подсистема материалов

Подсистема `thermalopt/materials` формирует теплофизические свойства, которые затем передаются в конечно-элементную сборку и подсистему рационального расположения теплопроводящего наполнителя. Она включает законы теплопроводности, табличные температурные зависимости, SIMP/RAMP-интерполяцию, эффективное смешивание свойств, модели

интерфейсной зоны и поворот анизотропного тензора в глобальную систему координат. Принципиальная схема подсистемы материалов и эффективных свойств приведена на Рис. 3.4.



Рис. 3.4. Подсистема материалов и эффективных свойств.

В тепловой задаче главы 2 основным объектом является тензор теплопроводности $\Lambda(\mathbf{x}, T)$. На элементном уровне программная реализация формирует либо тензор Λ_e , либо скаляр λ_e , который затем приводится к тензорной форме:

$$\Lambda_e = \begin{cases} \lambda_e \mathbf{I}, & \text{изотропный режим,} \\ \mathbf{Q}_e \Lambda_e^{loc} \mathbf{Q}_e^T, & \text{анизотропный режим.} \end{cases} \quad (3.11)$$

Здесь $\mathbf{I}$ — единичный тензор, $\mathbf{Q}_e$ — матрица локального ориентационного базиса элемента. Такая запись продолжает тензорную постановку (2.1) и позволяет использовать направленную теплопроводность без изменения конечно-элементного решателя.

3.4. Конечно-элементная реализация прямой тепловой задачи

3.4.1. Назначение теплового решателя

Тепловой конечно-элементный решатель реализует прямую стационарную задачу теплопроводности, заданную в Главе 2. Уравнение теплопроводности, закон Фурье, граничные условия и слабая форма заданы формулами (2.2)–(2.24). Принципиальная схема решателя приведена на Рис. 3.5.

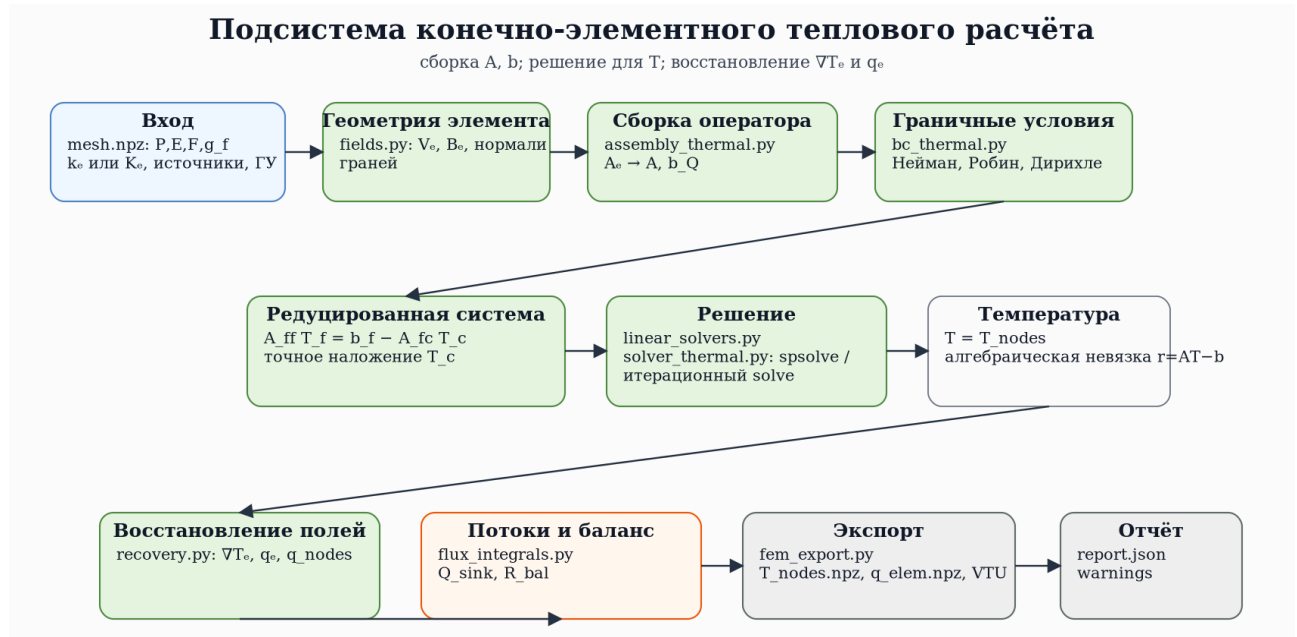


Рис. 3.5. Подсистема конечно-элементного теплового расчёта.

Модули подсистемы конечно-элементного теплового расчёта и их назначения приведены в Таблица. 3.6.

Таблица. 3.6. Модули теплового конечно-элементного расчёта.

Модуль	Роль в расчёте
fields.py	Вычисление объёмов, площадей, центроидов, локальных граней и нормалей
assembly_thermal.py	Поэлементная сборка тепловой матрицы и объёмной правой части
bc_thermal.py	Граничные условия и редукция системы
solver_thermal.py	Организация теплового решения, проверки якорения и нелинейная ветвь при необходимости
linear_solvers.py	Прямое или итерационное решение разреженной системы
recovery.py	Восстановление градиентов температуры и тепловых потоков
flux_integrals.py	Поверхностные интегралы теплового потока по группам границ
fem_export.py	Экспорт полей в визуализационные файлы
stage_runner.py	Чтение артефактов, запуск расчёта, запись результатов и отчёта стадии

3.4.2. Поэлементная сборка матрицы теплопроводности

На P1-тетраэдре градиенты функций формы постоянны внутри элемента. После построения J_e и V_e вычисляется матрица градиентов B_e , строки которой соответствуют градиентам локальных функций формы. Эта операция реализует дискретизацию (2.18)–(2.24). Локальная матрица теплопроводности элемента имеет вид:

$$\mathbf{A}_e = V_e \mathbf{B}_e \mathbf{\Lambda}_e \mathbf{B}_e^T. \quad (3.12)$$

В изотропном режиме $\mathbf{\Lambda}_e = \lambda_e \mathbf{I}$, и локальная матрица принимает форму:

$$\mathbf{A}_e = V_e \lambda_e \mathbf{B}_e \mathbf{B}_e^T. \quad (3.13)$$

Сборка глобальной матрицы выполняется операцией переноса локального блока в глобальные индексы узлов элемента:

$$A_{i_a i_b} \leftarrow A_{i_a i_b} + (A_e)_{ab}, \quad i_a = (\mathcal{K}_h)_{e,a}, \quad a, b = 1, \dots, 4. \quad (3.14)$$

В реализации этот шаг выполняется не через плотную матрицу, а через накопление массивов строк, столбцов и значений с последующим построением разреженной матрицы. Это принципиально для трёхмерных сеток, где число узлов и элементов делает плотное хранение матрицы нецелесообразным.

3.4.3. Правая часть и граничные вклады

Объёмный источник q_v , заданный как кусочно-постоянный на элементе, распределяется по узлам тетраэдра следующим образом:

$$b_{i_a} \leftarrow b_{i_a} + \frac{q_{v,e} V_e}{4}, \quad a = 1, \dots, 4. \quad (3.15)$$

Для граничного треугольника f , принадлежащего участку Неймана Γ_N , заданный нормальный поток q_n добавляется в правую часть как:

$$b_{i_a} \leftarrow b_{i_a} - \frac{q_{n,f} S_f}{3}, \quad a = 1, 2, 3. \quad (3.16)$$

Знак выбран в соответствии с соглашением главы 2: $q_n > 0$ соответствует выходу тепла из области. Для условия Робина модуль граничных условий одновременно добавляет матричный и векторный вклад:

$$A_{i_a i_b} \leftarrow A_{i_a i_b} + h_f S_f C_{ab}^\Delta, \quad b_{i_a} \leftarrow b_{i_a} + \frac{h_f T_{\infty,f} S_f}{3}. \quad (3.17)$$

где локальная поверхностная mass-матрица линейного треугольника записывается как:

$$C^{\Delta} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Такой блок соответствует граничному условию (2.8) и поверхностному вкладу в слабой форме, но описывает именно дискретную операцию сборки.

3.4.4. Наложение условий Дирихле и решение системы

После сборки полной системы узлы делятся на свободные и закреплённые. Условия Дирихле накладываются не штрафом и не заменой значений после решения, а точной редукцией системы:

$$A_{ff}T_f = b_f - A_{fc}T_c. \quad (3.19)$$

После решения редуцированной системы полное температурное поле восстанавливается объединением свободных и закреплённых компонент:

$$T_i = \{(T_f)_i, \quad i \in J_f, (T_c)_i, \quad i \in J_c\}. \quad (3.20)$$

Редуцированная система решается разреженным решателем:

$$T_f = \text{spsolve}(A_{ff}, b_f - A_{fc}T_c). \quad (3.21)$$

Численная корректность линейной задачи требует невырожденных тетраэдров, положительной скалярной теплопроводности или симметричного положительно определённого тензора Λ_e , а также теплового якорения каждой связной компоненты через условия Дирихле или Робина. Эти проверки выполняются на уровне решателя и стадии запуска.

3.4.5. Невязки, восстановление полей и тепловой баланс

После восстановления полного вектора температур вычисляется алгебраическая невязка:

$$r = AT - b, \quad r_{rel} = \frac{\|r\|_2}{\|b\|_2 + \varepsilon}. \quad (3.22)$$

Алгебраическая невязка характеризует качество решения линейной системы, но не заменяет физический тепловой баланс. Для инженерной

интерпретации дополнительно восстанавливаются градиент температуры и тепловой поток. Поэлементный градиент вычисляется как:

$$\nabla T_e = B_e^T T_e. \quad (3.23)$$

Поэлементный поток восстанавливается по дискретному закону Фурье:

$$\mathbf{q}_e = -\Lambda_e \nabla T_e. \quad (3.24)$$

Для визуализации может строиться узловое усреднение потока:

$$\mathbf{q}_i = \frac{\sum_{e \in \mathcal{S}(i)} V_e \mathbf{q}_e}{\sum_{e \in \mathcal{S}(i)} V_e + \varepsilon}. \quad (3.25)$$

Здесь $\mathcal{S}(i)$ – множество элементов, содержащих узел i . Восстановленные поля `gradT_elem`, `q_elem` и `q_nodes` используются для диагностики, визуализации и расчёта некоторых метрик, но первичной неизвестной тепловой задачи остаётся узловое температурное поле T .

Физический баланс формируется из объёмных, граничных и реакционных вкладов. Для закреплённых температур реакция вычисляется по полной системе:

$$r_c = (AT - b)_c. \quad (3.26)$$

Суммарная балансовая невязка записывается как:

$$R_{\text{bal}} = Q_{\Omega} + Q_D + Q_N + Q_R, \quad (3.27)$$

$$R_{\text{bal,rel}} = \frac{|R_{\text{bal}}|}{|Q_{\Omega}| + |Q_D| + |Q_N| + |Q_R| + \varepsilon}.$$

Поэтому поток, восстановленный из $\mathbf{q}_e$, и точные балансовые члены, построенные по дискретным реакциям и заданным граничным воздействиям, следует трактовать раздельно. Первый удобен для визуализации и анализа локальных направлений теплопереноса, второй служит основой строгого балансового контроля.

3.5. Подсистема рационального расположения теплопроводящего наполнителя

3.5.1. Назначение подсистемы рационального расположения теплопроводящего наполнителя

Подсистема рационального расположения теплопроводящего наполнителя в программном комплексе организована как отдельный вычислительный блок, связывающий прямой конечно-элементный тепловой расчёт, регуляризацию проектного поля, интерполяцию теплофизических свойств, вычисление целевых функционалов и ограничений, восстановление чувствительностей и обновление проектных переменных. В отличие от базовой конечно-элементной стадии, где распределение материала считается заданным, подсистема рационального расположения теплопроводящего наполнителя многократно изменяет поле ρ^{raw} , каждый раз заново формируя физическую проектную переменную $\bar{\rho}$, элементные тензоры теплопроводности Λ_e , температурное поле T , значение функционала Φ , ограничения g_i и их градиенты.

В свою очередь, рационального расположения теплопроводящего наполнителя на уровне архитектуры делится на 3 подсистемы. Первая подсистема – управляющая – подготавливает сетку, граничные условия, параметры материалов, ограничения и численные настройки. Вторая подсистема – собственно ядро `topopt_density` – выполняет итерационный проход: фильтрацию, проекцию, интерполяцию свойств, прямой тепловой расчёт, вычисление функционалов, сопряжённые чувствительности и обновление. Третья подсистема – многостартовый режим – управляет серией запусков из разных начальных распределений материала, выполняет предварительный отбор, полный расчёт перспективных кандидатов и финальную доводку выбранного состояния.

3.5.2. Единичная итерация подсистемы

Единичная итерация подсистемы представляет собой последовательный прямой и обратный проход по следующей цепочке модулей:

$$\rho_k^{\text{raw}} \xrightarrow{\mathcal{F}} \tilde{\rho}_k \xrightarrow{\mathcal{P}} \bar{\rho}_k \xrightarrow{\mathcal{M}} \Lambda_{e,k}(\bar{\rho}_k) \xrightarrow{\mathcal{S}} T_k \xrightarrow{(\mathcal{J}, \mathcal{G})} (\Phi_k, \mathbf{g}_k) \xrightarrow{\mathcal{A}} (\nabla \Phi_k, \nabla \mathbf{g}_k) \xrightarrow{\mathcal{U}} \rho_{k+1}^{\text{raw}}. \quad (3.28)$$

Оператор $\mathcal{F}$ соответствует фильтрации проектного поля, $\mathcal{P}$ – проекции Хевисайда, $\mathcal{M}$ – материальной интерполяции, $\mathcal{S}$ – прямому тепловому решению, $\mathcal{J}$ и $\mathcal{G}$ – вычислению функционала и ограничений, $\mathcal{A}$ – сопряжённому вычислению чувствительностей, $\mathcal{U}$ – обновлению проектных переменных.

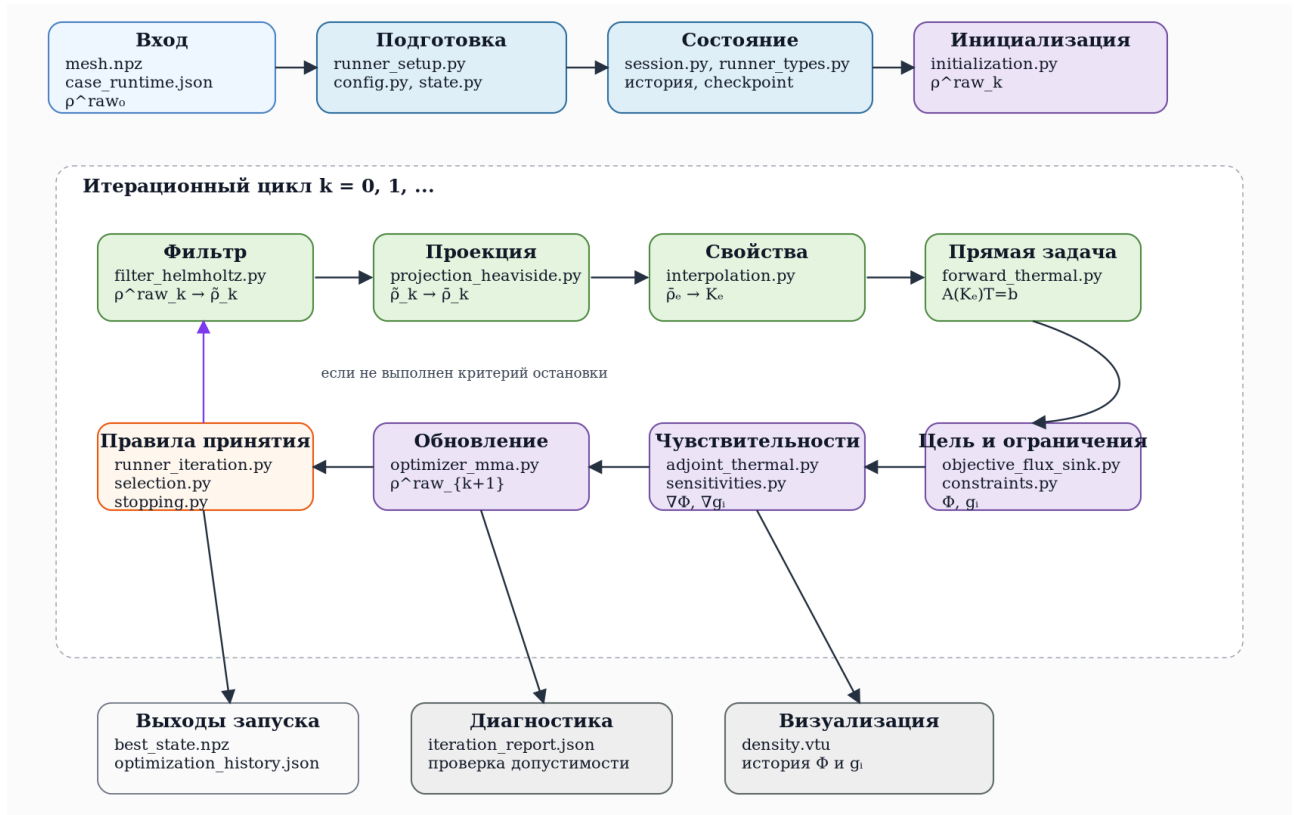


Рис. 3.6. Единичная итерация рационального расположения теплопроводящего наполнителя

3.5.3. Фильтрация и проекция проектного поля

Фильтр Гельмгольца реализует регуляризацию (2.28)–(2.29). В дискретном виде он применяется как решение разреженной системы:

$$\mathbf{H}\tilde{\rho} = \mathbf{M}_\rho \rho^{\text{raw}}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{M}_\rho + r_f^2 \mathbf{L}_\rho. \quad (3.29)$$

Матрица $\mathbf{H}$ при фиксированной сетке и радиусе фильтра может быть собрана и факторизована один раз, после чего используется на каждой итерации. В прямом проходе на вход поступает ρ^{raw} , на выходе формируется $\tilde{\rho}$.

В обратном проходе чувствительности передаются через транспонированный оператор фильтра:

$$\mathbf{H}^T \mathbf{z} = \mathbf{s}^{\tilde{\rho}}, \quad \mathbf{s}^{\text{raw}} = \mathbf{M}_{\rho}^T \mathbf{z}. \quad (3.30)$$

Проекция Хевисайда реализует преобразование $\tilde{\rho} \rightarrow \bar{\rho}$, соответствующее (2.30)–(2.31). В прямом проходе используется формула:

$$\bar{\rho}_e = \frac{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta(\tilde{\rho}_e - \eta))}{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta(1 - \eta))}. \quad (3.31)$$

Для обратного прохода сохраняется локальная производная:

$$\frac{\partial \bar{\rho}_e}{\partial \tilde{\rho}_e} = \frac{\beta[1 - \tanh^2(\beta(\tilde{\rho}_e - \eta))]}{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta(1 - \eta))}. \quad (3.32)$$

Параметр β может изменяться, постепенно повышая резкость проекции, что влияет на устойчивость итерационного процесса и степень бинарности результата.

3.5.4. Интерполяция свойств материала

Материальная модель преобразует физическую проектную переменную $\bar{\rho}$ в поэлементные свойства теплопроводности. Аналитические варианты SIMP и RAMP заданы в (2.32)–(2.35). В программной реализации соответствующий блок возвращает либо массив скалярной теплопроводности λ_e , либо массив тензоров Λ_e , а также производные свойств по $\bar{\rho}_e$ для последующего сопряжённого прохода.

Для тензорного режима интерполяция записывается в общей форме:

$$\Lambda_e(\bar{\rho}_e) = \Lambda_{min} + f(\bar{\rho}_e)(\Lambda_{max} - \Lambda_{min}). \quad (3.33)$$

Здесь $f(\bar{\rho}_e)$ – функция SIMP или RAMP. В скалярном изотропном режиме аналогичная операция выполняется для λ_e , после чего строится $\Lambda_e = \lambda_e \mathbf{I}$. Если активирована интерфейсная фаза, модуль формирует эффективное свойство через нормированные веса w_m , w_f , w_{int} , введённые в (2.37)–(2.40).

3.5.5. Целевые функционалы и ограничения

Блок функционала и ограничений получает температурное поле T_k , потоковые поля, объёмы элементов, группы поверхностей и поле $\bar{\rho}_k$. Если цель связана с теплоотводом через участок Γ_{sink} , суммарный поток вычисляется как поверхностная сумма:

$$Q_{sink,k} = \sum_{f \in \mathcal{F}_{h,sink}} q_{n,f,k} S_f. \quad (3.34)$$

Если цель связана с максимумом температуры, используется KS-агрегатор, соответствующий (2.49)–(2.50), в численно устойчивой форме:

$$\Phi_{max,k} = T_k^{max} + \frac{1}{\kappa} \ln \sum_{i \in \mathcal{I}_T} \exp[\kappa(T_{i,k} - T_k^{max})], \quad T_k^{max} = \max_{i \in \mathcal{I}_T} T_{i,k}. \quad (3.35)$$

Объёмное ограничение вычисляется по проектируемым элементам:

$$g_{V,k} = \frac{\sum_{e \in \mathcal{E}_d} V_e \bar{\rho}_{e,k}}{\sum_{e \in \mathcal{E}_d} V_e} - v^*. \quad (3.36)$$

Дополнительные температурные, прочностно-ориентированные и интерфейсные ограничения передаются в общий вектор $\mathbf{g}_k$. При этом строгие ограничения тепловой модели отделяются от инженерных индикаторов, используемых для ранней диагностики кандидатов.

3.5.6. Сопряжённые чувствительности

После прямого решения дискретная тепловая задача имеет вид:

$$\mathbf{A}(\bar{\rho}_k) \mathbf{T}_k = \mathbf{b}(\bar{\rho}_k). \quad (3.37)$$

Для функционала ψ , где ψ может быть целевым функционалом Φ или одним из ограничений g_i , решается сопряжённая система:

$$\mathbf{A}_k^T \mathbf{p}_{\psi,k} = \frac{\partial \psi_k}{\partial \mathbf{T}}. \quad (3.38)$$

После решения сопряжённой системы градиент по физической проектной переменной вычисляется как:

$$\frac{d\psi_k}{d\bar{\rho}_{e,k}} = \frac{\partial \psi_k}{\partial \bar{\rho}_{e,k}} + \mathbf{p}_{\psi,k}^T \left(\frac{\partial \mathbf{b}_k}{\partial \bar{\rho}_{e,k}} - \frac{\partial \mathbf{A}_k}{\partial \bar{\rho}_{e,k}} \mathbf{T}_k \right). \quad (3.39)$$

Если правая часть не зависит от проектной переменной, первый член в скобках равен нулю. Производная локальной матрицы теплопроводности по $\bar{\rho}_e$ строится как:

$$\frac{\partial \mathbf{A}_{e,k}}{\partial \bar{\rho}_{e,k}} = V_e \mathbf{B}_e \frac{\partial \Lambda_{e,k}}{\partial \bar{\rho}_{e,k}} \mathbf{B}_e^T. \quad (3.40)$$

После этого выполняется обратный проход через материальную интерполяцию, проекцию и фильтр. Итоговые массивы `grad_objective_raw` и `grad_constraints_raw` передаются модулю обновления проектных переменных.

3.5.7. Обновление проектной переменной

Модуль обновления получает текущее поле ρ_k^{raw} , значение функционала, вектор ограничений, градиенты, границы переменных, ограничения шага и маску проектируемой области. Кандидатное обновление ограничивается допустимым интервалом:

$$\rho_{e,k+1}^{\text{cand}} \in [\max(0, \rho_{e,k}^{\text{raw}} - m_k), \min(1, \rho_{e,k}^{\text{raw}} + m_k)]. \quad (3.41)$$

Для непроектируемых элементов значение не изменяется:

$$\rho_{e,k+1}^{\text{raw}} = \rho_e^{\text{fixed}}, \quad d_e = 0. \quad (3.42)$$

Вычислительно этот шаг выполняется через модуль `optimizer_mma.py`, реализующий совместимый с методом подвижных асимптот интерфейс обновления. Слой правил принятия решений может принять кандидат сразу либо выполнить его повторную оценку и принять только при улучшении допустимости или штрафной функции.

3.5.8. Многостартовый режим

Задача расположения теплопроводящего наполнителя внутри несущей матрицы биметаллического композита в общем случае невыпукла, поэтому результат зависит от начального поля. Строгого алгоритма поиска глобального оптимума, за исключением полного перебора, не существует, однако могут быть предложены нестрогие методы, значительно повышающие вероятность его нахождения и снижающие вероятность застревания в субоптимальном локальном экстремуме.

В качестве такого нестрогого метода в программном комплексе используется многостартовая стратегия. Многостартовый режим организует серию запусков подсистемы рационального расположения теплопроводящего наполнителя из разных начальных распределений.

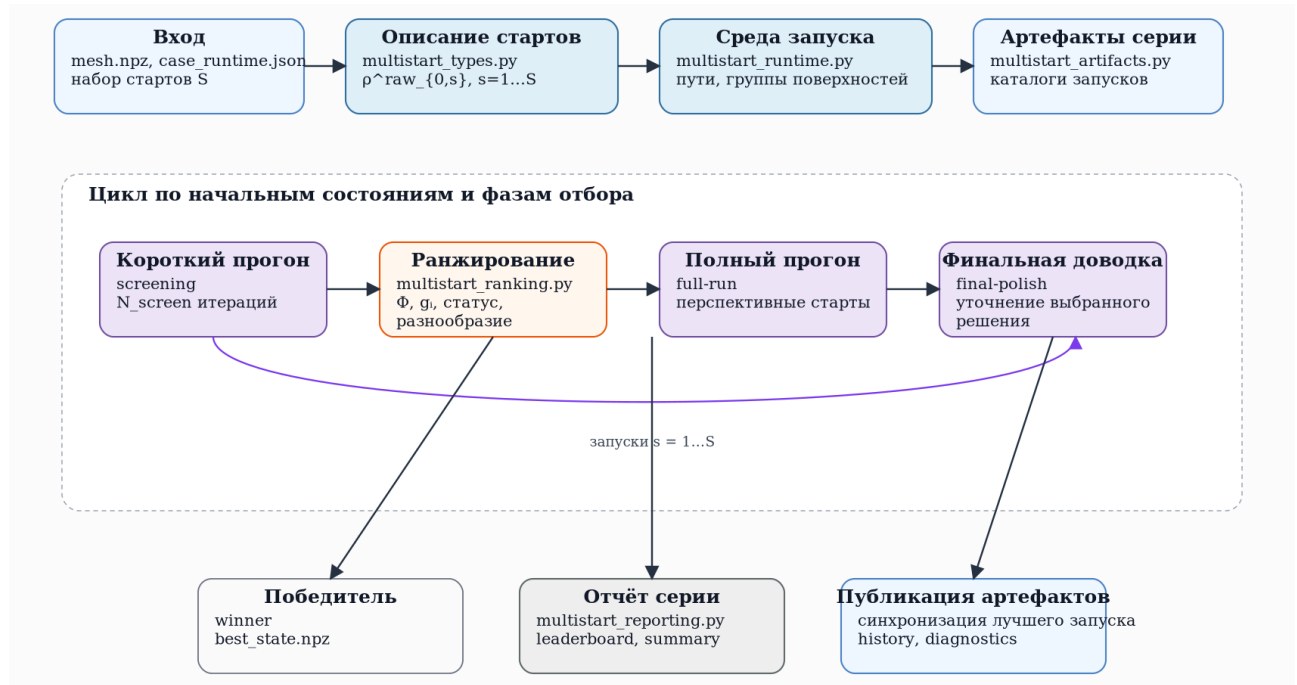


Рис. 3.7. Многостартовое решение задачи рационального расположения теплопроводящего наполнителя.

Многостартовое решение задачи рационального расположения теплопроводящего наполнителя состоит из трёх фаз:

- 1) скрининг – много коротких запусков (с ограниченным количеством итераций) из разных начальных полей с целью быстро отсеять неэффективные варианты;
- 2) полные запуски – несколько лучших и достаточно различных результатов скрининга прогоняются до сходимости с целью детально исследовать наиболее перспективные топологии.
- 3) финальная доводка одного или нескольких финалистов при изменённых параметрах продолжения, ограничений на шаг изменения и числа итераций (если кандидат уже допустим и практически бинарный, эта фаза может быть пропущена).

Для каждого запуска начальное поле задаётся генератором в модуле `multistart_execution.py`. Генераторы могут формировать равномерное, случайное, смещённое к источникам и стокам или привязанное к траекториям начальные состояния.

Итоговый выбор производится по правилу «допустимость прежде всего»:

$$s^* = \arg \min_s \{ \Phi_s^{final} : g_{i,s}^{final} \leq \tau_g \forall i \}, \quad (3.43)$$

где $\tau_g \geq 0$ – допуск на соблюдение ограничений. Если допустимых состояний нет, выбирается вариант с минимальной совокупной мерой нарушения ограничений. Такой режим повышает устойчивость поиска в невыпуклой задаче. Итоговое состояние сохраняется в `best_state.npz` и далее используется в постобработке.

3.6. Постобработка и повторная тепловая проверка

3.6.1. Назначение постобработки

Задача постобработки – подготовить топологию теплопроводящего наполнителя к построению неявного поля, геометризации, назначению материалов и повторной тепловой проверке.

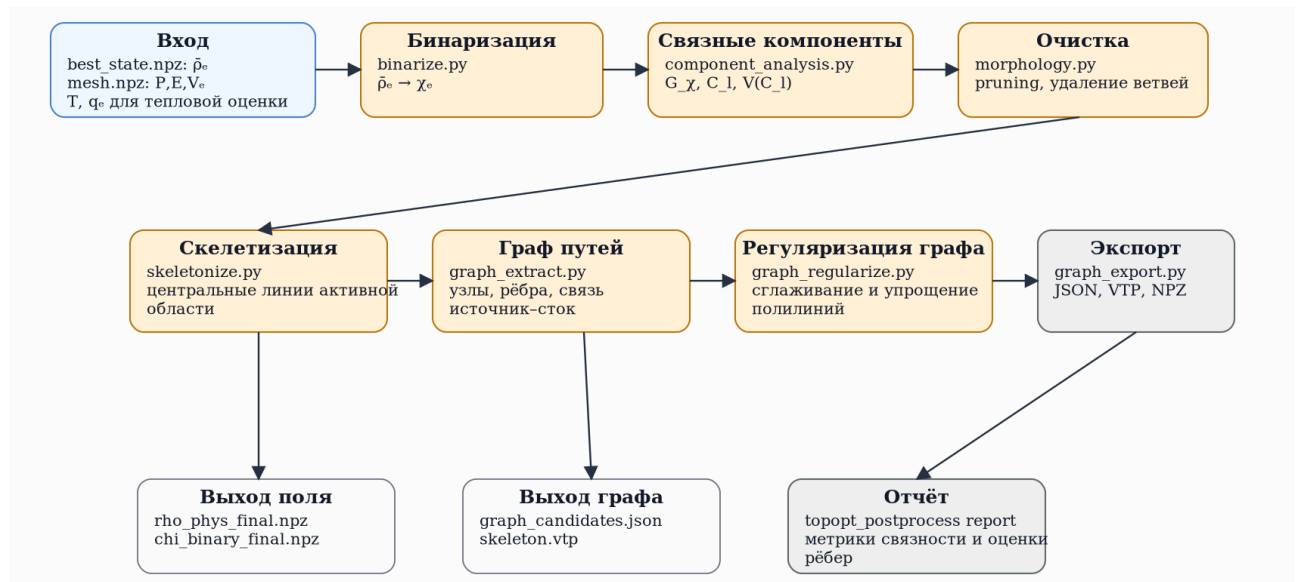


Рис. 3.8. Постобработка поля проектной переменной

Подсистема `topology_post` использует результат рационального расположения теплопроводящего наполнителя `best_state.npz` и сетку

mesh.npz. На вход поступает поле $\bar{\rho}$, маска проектируемой области, тетраэдральная сетка, восстановленные тепловые поля и настройки постобработки. На выходе формируются бинарная маска, очищенные компоненты, граф кандидатов тепловых путей и отчёт.

3.6.2. Бинаризация и анализ связности

Бинаризация физической проектной переменной выполняется пороговым правилом:

$$\chi_e = \begin{cases} 1, & \bar{\rho}_e \geq \tau_\rho, \\ 0, & \bar{\rho}_e < \tau_\rho. \end{cases} \quad (3.44)$$

По элементам с $\chi_e = 1$ строится граф смежности:

$$G_\chi = (V_\chi, E_\chi), \quad (e_i, e_j) \in E_\chi \Leftrightarrow \partial e_i \cap \partial e_j \text{ содержит общую грань}. \quad (3.45)$$

Для каждой связной компоненты C_l вычисляется объём:

$$V(C_l) = \sum_{e \in C_l} V_e. \quad (3.46)$$

Компоненты, не удовлетворяющие минимальному объёму или функциональной связности между источником и стоком, удаляются или помечаются как несущественные. Морфологическая очистка и удаление коротких ветвей относятся к инженерной постобработке: они улучшают интерпретируемость результата, но могут изменить геометрию, поэтому после них обязательна повторная тепловая проверка.

3.6.3. Граф тепловых путей и тепловая оценка рёбер

После очистки бинарная структура может быть сведена к графу тепловых путей. Узлы графа соответствуют концам, ветвлениям и привязкам к функциональным областям, а рёбра – центральным линиям теплопроводящих ветвей. Для ребра p может использоваться инженерная оценка, учитывающая согласованность с восстановленным тепловым потоком:

$$S_p = \sum_{e \in p} \left[w_q \frac{|\mathbf{q}_e \cdot \mathbf{t}_p|}{\|\mathbf{q}_e\| + \varepsilon} - w_L L_e \right]. \quad (3.47)$$

Здесь $\mathbf{t}_p$ – локальное направление пути, L_e – вклад длины. Это – математически нестрогая оценка, которая в общем случае не заменяет повторного расчёта теплопроводности.

3.6.4. Построение неявного поля наполнителя

Подсистема `filler_field` переводит бинарную топологию или граф тепловых путей в неявное поле наполнителя.

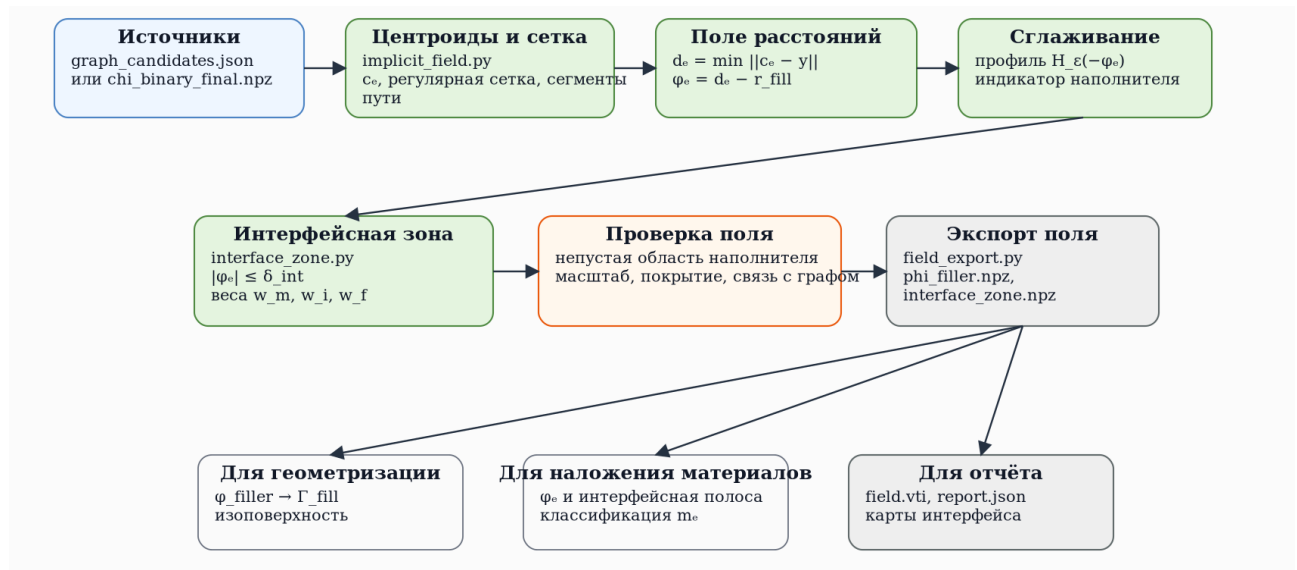


Рис. 3.9. Построение неявного поля наполнителя.

Для каждого тетраэдра вычисляется центроид:

$$\mathbf{c}_e = \frac{1}{4} \sum_{a=1}^4 \mathbf{x}_{i_a}. \quad (3.48)$$

Если поле строится от графа тепловых путей, расстояние до графа задаётся как:

$$d_e = \min_{y \in G_{path}} \|\mathbf{c}_e - \mathbf{y}\|_2, \quad \psi_e = d_e - r_{fill}. \quad (3.49)$$

При $\psi_e < 0$ элемент находится внутри области наполнителя, при $\psi_e > 0$ – вне её. Программный артефакт `phi_filler.npz` хранит это поле, но в математическом описании используется обозначение ψ_{fill} .

3.6.5. Интерфейсная фаза

Интерфейсная зона конечной толщины задаётся условием:

$$|\psi_e| \leq \delta_{int}. \quad (3.50)$$

Эта полоса используется при назначении материала или при построении смешанных весов. Для плавной материализации могут применяться сглаженные веса:

$$w_{f,e}^0 = H_\epsilon(-\psi_e), \quad w_{m,e}^0 = 1 - H_\epsilon(-\psi_e), \quad w_{int,e}^0 = \max\left(0, 1 - \frac{|\psi_e|}{\delta_{int}}\right). \quad (3.51)$$

После нормировки эти веса согласуются с трёхфазной параметризацией материала главы 2. Интерфейсная фаза не является фазой в термодинамическом понимании, а расчётным представлением переходной зоны конечной толщины.

3.6.6. Геометризация наполнителя

Подсистема `geometry` строит представление наполнителя как тела, ограниченного замкнутой поверхностью, по неявному полю. Граница наполнителя определяется нулевым уровнем:

$$\Gamma_{fill} = \{\mathbf{x}: \psi_{fill}(\mathbf{x}) = 0\}. \quad (3.52)$$

В дискретной реализации поверхность извлекается изоповерхностным алгоритмом, затем сглаживается и проверяется на геометрические дефекты. Один шаг лапласова сглаживания вершины поверхностной сетки:

$$\mathbf{v}_i^{new} = \mathbf{v}_i + l_s \left(\frac{1}{|\mathcal{N}(i)|} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i \right). \quad (3.53)$$

Принципиальная схема подсистемы геометризации наполнителя приведена на Рис. 3.10.

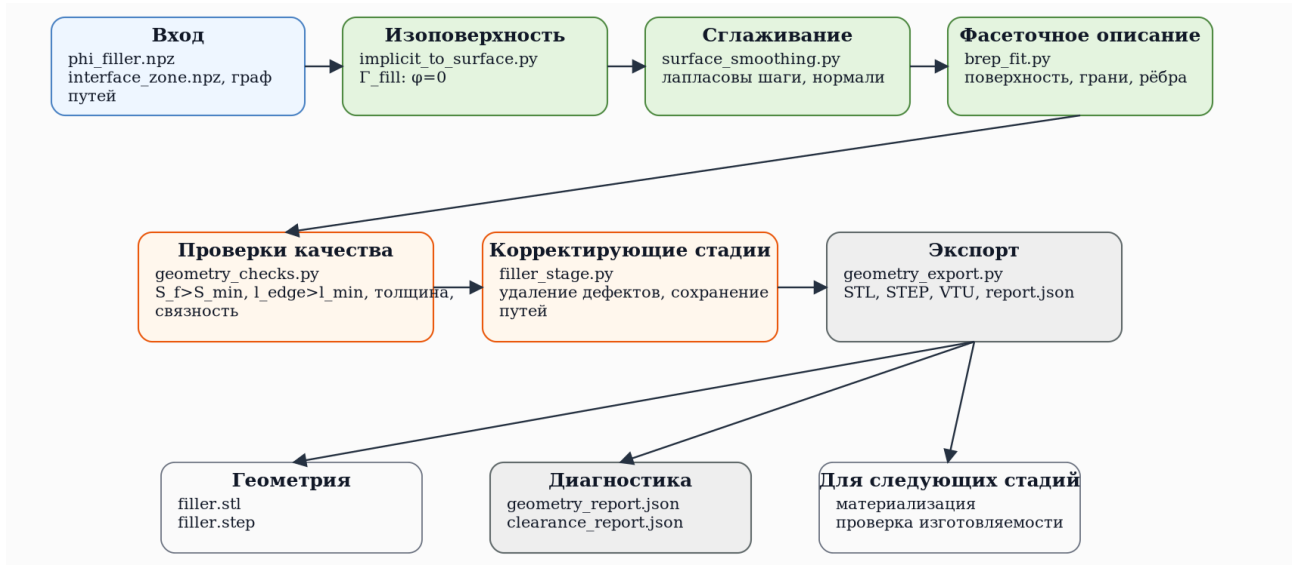


Рис. 3.10. Подсистема геометризации наполнителя.

Геометризация создаёт STL/STEP-представление и файлы визуализации, но не является единственным источником для тепловой проверки. Каноническая повторная тепловая проверка выполняется на фоновой сетке после назначения материалов элементам.

3.6.7. Наложение материала на фоновую сетку

Подсистема `embedding` сопоставляет неявное поле наполнителя исходной тетраэдральной сетке. Значение поля в элементе вычисляется по центроиду или усреднением по узлам:

$$\psi_e = \psi_{\text{fill}}(\mathbf{c}_e) \quad \text{или} \quad \psi_e = \frac{1}{4} \sum_{a=1}^4 \psi_{\text{fill}}(\mathbf{x}_{i_a}). \quad (3.54)$$

Поэлементный идентификатор материала назначается правилом:

$$m_e^{\text{id}} = \begin{cases} m_f, & \psi_e < -\delta_{\text{int}}, \\ m_{\text{int}}, & |\psi_e| \leq \delta_{\text{int}}, \\ m_m, & \psi_e > \delta_{\text{int}}. \end{cases} \quad (3.55)$$

Здесь m_f – материал наполнителя, m_{int} – интерфейсная зона, m_m – материал матрицы. После этого элементные свойства для повторного расчёта задаются как:

$$\Lambda_e = \Lambda_{m_e^{\text{id}}}. \quad (3.56)$$

Если интерфейсная зона реализована через смешанные веса, свойства задаются через нормированное смешивание весов, описанное в Главе 2.

3.6.8. Повторная тепловая проверка

Повторная тепловая проверка необходима для оценки и подтверждения тепловой работоспособности итоговой биметаллической структуры. Принципиальная схема подсистемы повторного наложения материалов теплового расчёта приведена на Рис. 3.11.

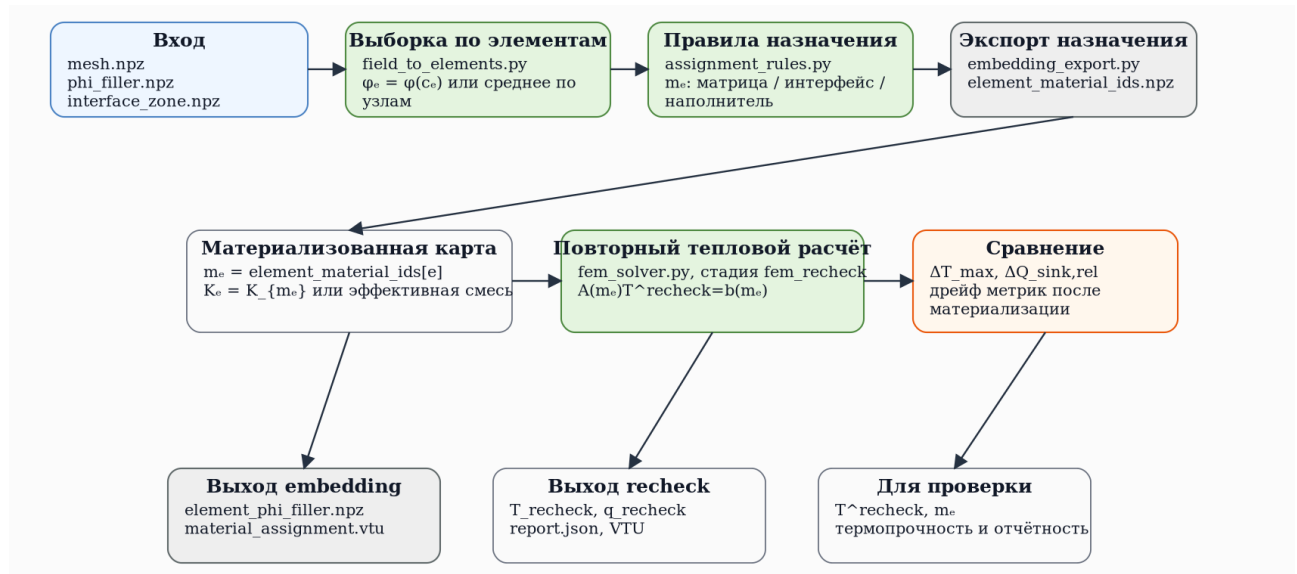


Рис. 3.11. Наложение материалов и повторная тепловая проверка.

Повторная тепловая проверка решает прямую тепловую задачу уже не по релаксированному полю $\bar{\rho}$, а по материализованной карте материалов:

$$\mathbf{A}(m_e^{\text{id}})\mathbf{T}^{\text{rec}} = \mathbf{b}(m_e^{\text{id}}). \quad (3.57)$$

Эта стадия использует тот же конечно-элементный решатель, что и базовый тепловой расчёт, и опирается на постановку (2.2)–(2.24). Её задача – проверить, сохраняет ли материализованная конфигурация тепловой эффект релаксированного поля рационального расположения теплопроводящего наполнителя. Для сравнения вычисляются, например:

$$\Delta T_{\text{max}} = T_{\text{max}}^{\text{rec}} - T_{\text{max}}^{\text{opt}}, \quad \Delta Q_{\text{sink,rel}} = \frac{Q_{\text{sink}}^{\text{rec}} - Q_{\text{sink}}^{\text{opt}}}{|Q_{\text{sink}}^{\text{opt}}| + \varepsilon}. \quad (3.58)$$

Эти величины позволяют отличить устойчивый результат от результата, который ухудшается при бинаризации, геометризации или назначении материалов.

3.7. Термопрочностная и производственная верификация

3.7.1. Назначение термопрочностной подсистемы

Термопрочностная подсистема использует температурное поле после тепловой проверки для линейной термоупругой задачи. Аналитическая модель термоупругости задана в Главе 2 формулами (2.64)–(2.72).

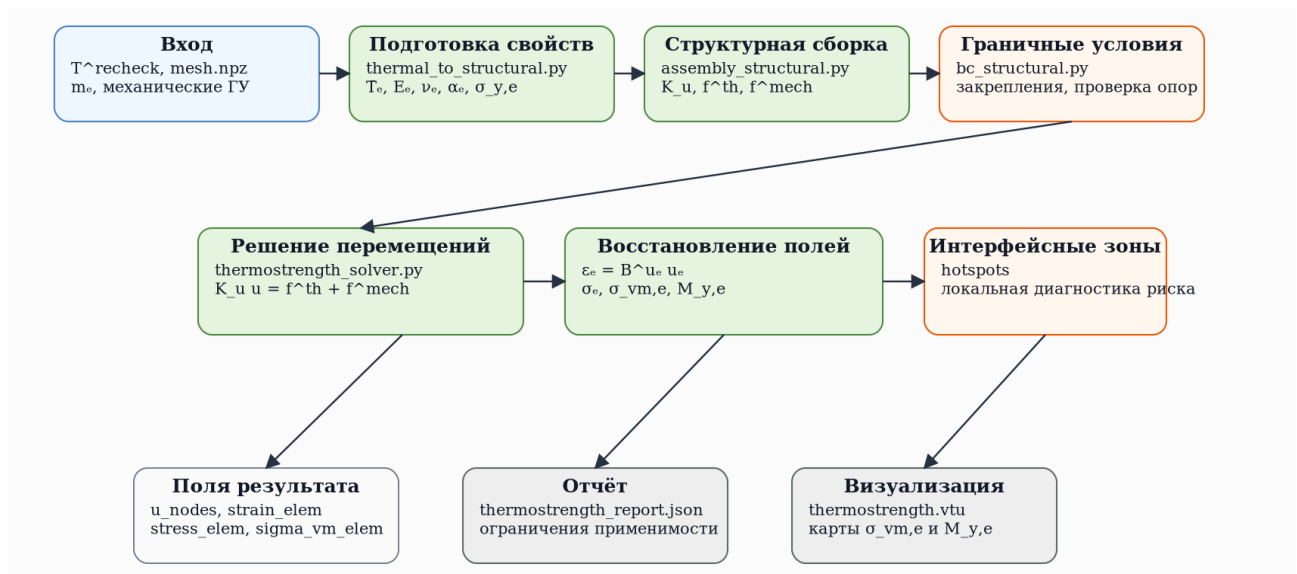


Рис. 3.12. Подсистема термопрочностной проверки.

3.7.2. Термопрочностная проверка

На вход поступают значения температуры в узлах, теплопроводность материалов по элементам сетки, механические свойства, коэффициенты линейного теплового расширения и механические граничные условия.

Средняя температура элемента вычисляется как:

$$\bar{T}_e = \frac{1}{4} \sum_{a=1}^4 T_{i_a}. \quad (3.59)$$

Тепловая деформация элемента в векторной записи имеет вид:

$$\varepsilon_e^{th} = \alpha_e (\bar{T}_e - T_0) [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T. \quad (3.60)$$

После сборки матрицы жёсткости решается система:

$$\mathbf{K}_u \mathbf{u} = \mathbf{f}^{th} + \mathbf{f}^{mech}. \quad (3.61)$$

Здесь $\mathbf{u}$ – вектор узловых перемещений, $\mathbf{f}^{th}$ – эквивалентная тепловая нагрузка, $\mathbf{f}^{mech}$ – внешняя механическая нагрузка, если она задана. Для элемента деформация и напряжение восстанавливаются как:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{B}_e^u \mathbf{u}_e, \quad \boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{D}_e (\boldsymbol{\varepsilon}_e - \boldsymbol{\varepsilon}_e^{th}). \quad (3.62)$$

Эквивалентное напряжение Мизеса вычисляется по компонентам тензора напряжений:

$$\sigma_{vm,e} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + 3(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{13}^2)}. \quad (3.63)$$

Запас по текучести можно представить как:

$$M_{y,e} = \frac{\sigma_{y,e}}{\sigma_{vm,e} + \varepsilon}. \quad (3.64)$$

Если $M_{y,e} < 1$, элемент попадает в зону превышения допускаемого напряжения. Для элементов интерфейсной зоны может формироваться индикатор превышения:

$$H_{int,e} = \mathbf{1}_{m_e^{id}=m_{int}} \max\left(0, \frac{\sigma_{vm,e}}{\sigma_{lim}} - 1\right). \quad (3.65)$$

Этот блок является диагностикой риска вблизи интерфейса и не должен интерпретироваться как модель разрушения интерфейса.

3.7.3. Производственная верификация

Подсистема manufacturing выполняет проверку геометрии и материализованного представления по набору формальных правил. Её задача – выявить геометрические признаки, потенциально опасные для изготовления: локальные утонения, изолированные компоненты, тупиковые ветви, чрезмерную кривизну, короткие сегменты и концентрации интерфейсной зоны. Принципиальная схема производственной верификации приведена на Рис. 3.13.

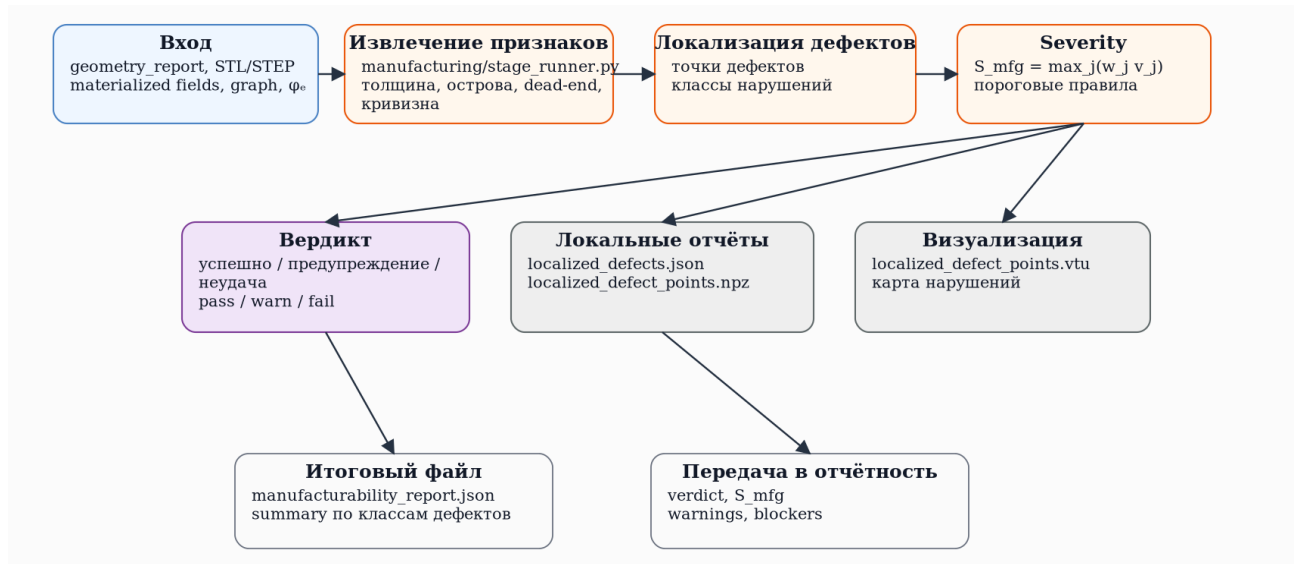


Рис. 3.13. Подсистема производственной верификации.

Для признака минимального размера локальное нарушение задаётся как:

$$v_d(\mathbf{x}) = \max\left(0, \frac{d_{\min} - d_{\text{local}}(\mathbf{x})}{d_{\min}}\right). \quad (3.66)$$

Для малой компоненты C_l используется:

$$v_{\text{island},l} = \max\left(0, \frac{V_{\min} - V(C_l)}{V_{\min}}\right). \quad (3.67)$$

Итоговая мера серьёзности может строиться как максимум по классам нарушений:

$$S_{\text{mfg}} = \max_j(w_j v_j). \quad (3.68)$$

Вердикт формируется пороговым правилом:

$$\text{вердикт} = \begin{cases} \text{успешно,} & S_{\text{mfg}} < S_{\text{warn}}, \\ \text{предупреждение,} & S_{\text{warn}} \leq S_{\text{mfg}} < S_{\text{fail}}, \\ \text{неудача,} & S_{\text{mfg}} \geq S_{\text{fail}}. \end{cases} \quad (3.69)$$

Пороговые значения являются инженерными параметрами и выносятся в конфигурацию, чтобы их можно было калибровать под конкретный материал, оборудование и технологический процесс.

3.8. Подсистема отчётности и визуализации

3.8.1. Назначение отчётной подсистемы

Подсистема reports агрегирует результаты всех стадий и формирует итоговое представление вычислительного эксперимента. Её задача – собрать расчётные метрики, историю рационального расположения теплопроводящего наполнителя, результаты повторной тепловой проверки, термопрочностные показатели, производственные предупреждения и ссылки на файлы визуализации.

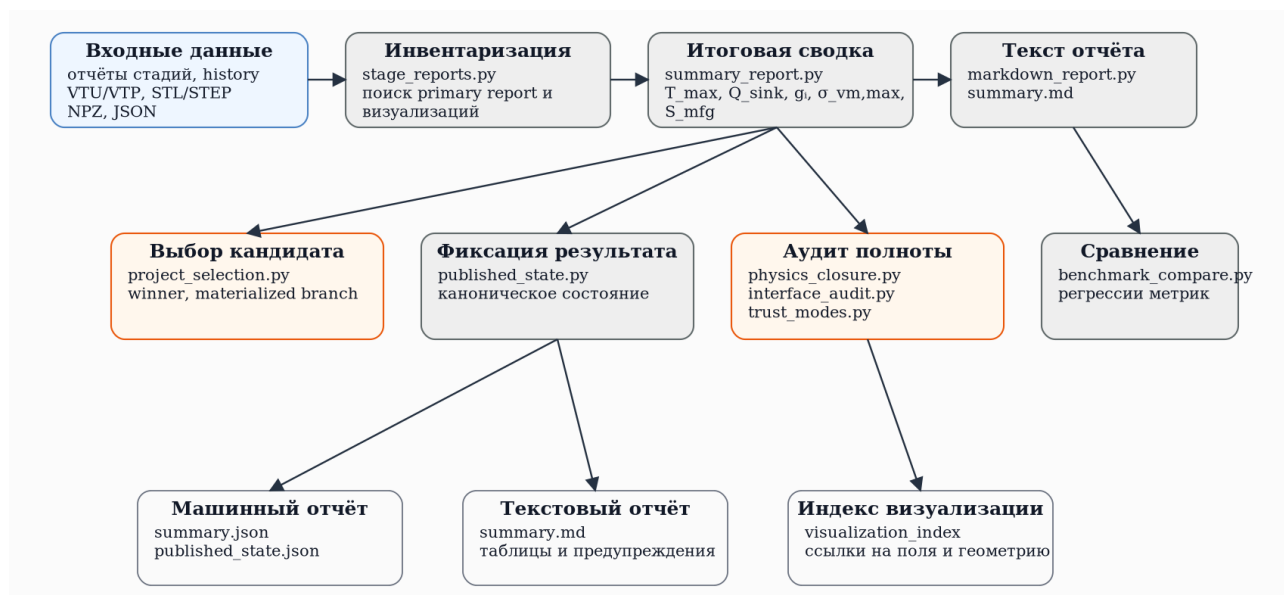


Рис. 3.14. Формирование итоговой отчётности.

Таблица 3.7. Модули подсистемы отчётности.

Модуль	Назначение
stage_reports.py	Сбор отчётов стадий и инвентаризация артефактов
summary_report.py	Формирование итоговых численных метрик
markdown_report.py	Подготовка текстовой сводки
project_selection.py	Выбор итогового проектного состояния из допустимых кандидатов
published_state.py	Фиксация канонического опубликованного состояния расчёта
physics_closure.py	Аудит физического замыкания расчётной цепочки
interface_audit.py	Аудит интерфейса и связанных ограничений
trust_modes.py	Оценка полноты подтверждения результата по доступным артефактам
benchmark_compare.py	Сравнение опубликованных состояний расчёта с эталонными метриками

3.8.2. Сводные метрики и история рационального расположения теплопроводящего наполнителя

Итоговый отчёт содержит набор ключевых величин:

$$R_{\text{summary}} = \{T_{\min}, T_{\max}, T_{\text{mean}}, Q_{\text{sink}}, g_V, g_T, \sigma_{\text{vm},\max}, S_{\text{mfg}}, \text{вердикт}\}. \quad (3.70)$$

История решения задачи рационального расположения теплопроводящего наполнителя сохраняется как последовательность:

$$\mathcal{H} = \{J_k, g_{1,k}, \dots, g_{n_g,k}, \beta_k, \|\nabla J_k\|\}_{k=1}^N. \quad (3.71)$$

Если решена задача рационального расположения теплопроводящего наполнителя, выполнены повторная тепловая проверка и термopрочностный расчёт, отчёт включает сравнительный блок:

$$\mathcal{C} = \{\Delta T_{\max}, \Delta Q_{\text{sink,rel}}, \sigma_{\text{vm},\max}, M_{y,\min}\}. \quad (3.72)$$

Файлы визуализации сохраняют поля температуры, плотности теплового потока, проектной переменной, распределения материалов, перемещений, напряжений и индикаторов риска в форматах, пригодных для просмотра в программе ParaView.

3.9. Границы строгого расчёта

3.9.1. Строгое расчётное ядро

К строгому расчётному ядру относятся конечно-элементная сборка и решение тепловой задачи, интерполяция свойств, фильтрация, проекция, сопряжённые чувствительности, повторная тепловая проверка и линейная термоупругая проверка. Эти блоки прямо опираются на математическую модель Главы 2: (2.2)–(2.24), (2.28)–(2.35), (2.49)–(2.58), (2.64)–(2.72). Их результаты имеют статус численного решения поставленных дискретных задач.

3.9.2. Нестрогие методы

К нестрогим методам относятся бинаризация поля наполнителя, многостартовый режим, ограничения шага, правила принятия кандидата, отслеживание лучшего допустимого состояния и процедуры восстановления допустимости. Эти блоки не меняют физическую постановку задачи

теплопроводности, но влияют на возможность решения невыпуклой задачи, воспроизводимость результата и выбор итогового проектного состояния.

Бинаризация, выделение интерфейсной зоны, анализ связности тепловых путей, удаление коротких ветвей, построение графов, неявное поле наполнителя, геометризация и назначение материалов переводят релаксированный результат рационального расположения теплопроводящего наполнителя в пригодном для практического использования виде. Эти стадии могут изменить топологию и локальную геометрию, поэтому их результат обязательно проверяется повторным тепловым расчётом на материализованной карте материалов.

3.9.3. Диагностические блоки

Термопрочностная подсистема является физическим расширением строгого расчётного ядра, но вызывается после тепловой материализации. Производственная верификация является проверкой по правилам и не заменяет экспериментальную или процессную модель изготовления. Подсистема отчётности фиксирует результаты и ограничения, но не изменяет проектное состояние.

Таблица 3.8. Статус основных блоков программной реализации.

Блок	Модули	Статус
Прямой тепловой расчёт	thermalopt/fem	Строгий расчёт
Фильтрация и проекция	filter_helmholtz.py, projection_heaviside.py	Численная регуляризация
Интерполяция свойств	materials, topopt_density/interpolation.py	Строгая часть модели рационального расположения теплопроводящего наполнителя
Сопряжённые чувствительности	adjoint_thermal.py, sensitivities.py	Строгий расчёт градиентов
Многостартовый режим	multistart_*	Нестрогое решение
Постобработка	topology_post	Нестрогое решение
Поле наполнителя и геометризация	filler_field, geometry	Геометрическая интерпретация

Повторная тепловая проверка	fem_solver.py, fem/stage_runner.py	Строгая проверка
Термопрочность	thermo	Физическое расширение
Производственная проверка	manufacturing	Проверка по формальным правилам
Отчётность	reports	Фиксация и интерпретация результатов

Заключение к Главе 3

В главе 3 представлена программная реализация численного решения, представляющая собой не просто набор вычислительных алгоритмов, а целостный физико-математический инструментарий, строго наследующий классическим канонам теоретической теплотехники и механики сплошной среды. Принципиальной особенностью сформированного вычислительного контура является жёсткое разграничение строгого расчётного ядра, основанного на фундаментальных законах сохранения энергии и тензорном законе Фурье, и вспомогательных методов, необходимых для упрощения решения невыпуклой задачи и геометрической интерпретации результата.

Модульная архитектура программного комплекса, основанная на стадийном преобразовании артефактов, обеспечивает высокую степень воспроизводимости и прозрачности расчётов. Разделение ответственности между подсистемами подготовки сетки, конечно-элементного решения, рационального расположения теплопроводящего наполнителя, постобработки и геометризации исключает незаметную подмену физических моделей численными ухищрениями. Конечно-элементный решатель, опирающийся на строгую слабую постановку краевой задачи и корректную реализацию граничных условий Дирихле, Неймана и Робина, гарантирует физическую достоверность прямого теплового расчёта. Особо следует отметить использование касательного оператора при построении сопряжённых уравнений для нелинейных задач, что является критически важным для получения корректной градиентной информации в задачах рационального выбора структуры.

Подсистема рационального расположения теплопроводящего наполнителя, включающая фильтрацию Гельмгольца, проекцию Хевисайда и интерполяцию свойств по схемам SIMP и RAMP, реализована как строгий математический механизм регуляризации некорректно поставленных задач. Многостартовый режим и процедуры бинаризации проектного поля используют нестрогие методы, не гарантирующие нахождения глобального

экстремума, но повышающие его вероятность по. Как показывает многолетний опыт теплофизического моделирования, подобные вычислительные стратегии, повышая вероятность нахождения глобального экстремума и обеспечивая переход к дискретной топологии, неизбежно искажают исходное непрерывное распределение материала.

В связи с этим критически важным достижением главы является обязательное введение стадии повторной тепловой проверки. Переход от релаксированного плотностного поля к материализованной биметаллической конфигурации с явным выделением несущей матрицы, теплопроводящего наполнителя и эффективной интерфейсной области требует независимого подтверждения теплового баланса. Повторный расчёт на фоновой сетке с поэлементным назначением материалов позволяет выявить потери тепловой эффективности, вызванные геометризацией и дискретизацией, и отделить свойства математической модели от характеристик реальной аддитивно изготовленной конструкции.

Слабосвязанная термopочностная подсистема и блок производственной верификации дополняют вычислительный контур, переводя его из плоскости чисто математической задачи рационального расположения теплопроводящего наполнителя в область прикладного теплового проектирования. Оценка термомеханического состояния и анализ технологической реализуемости материализованной геометрии обеспечивают необходимую обратную связь для оценки работоспособности биметаллических структур в условиях реальных эксплуатационных нагрузок.

Таким образом, в настоящей главе сформирован надёжный вычислительный фундамент, обеспечивающий баланс между теоретической строгостью физической постановки и практической применимостью для задач аддитивного производства. Разработанный программный комплекс готов к проведению численной верификации и решению прикладных задач теплового проектирования биметаллических конструкций с направленными теплофизическими свойствами.

Глава 4. Численная и экспериментальная верификация

4.1. Назначение главы и общая программа подтверждения модели

Цель главы состоит в подтверждении работоспособности программного комплекса и в проверке тех физических механизмов, которые используются при расчёте и рационального расположения теплопроводящего наполнителя в теплонагруженных биметаллических структурах. В предыдущих главах были сформулированы физические предпосылки задачи, математическая постановка теплопроводности и термоупругости, а также вычислительная архитектура модели. В настоящей главе проверяется, что её реализация воспроизводит контролируемые тепловые и термомеханические эффекты.

Подтверждение модели выполнено на нескольких уровнях. Первый уровень образует аналитическая верификация на задачах с известным решением. Второй уровень включает схожим образом организованную проверку рационального расположения теплопроводящего наполнителя, где оценивается не только решение уравнения теплопроводности, но и корректность постановки целевого функционала, нормировки и энергетического баланса. Третий уровень представляет собой численную валидацию в программном пакете Ansys на трёхмерных задачах, не имеющих удобного аналитического решения. Четвёртый уровень связан с экспериментальными данными по направленной теплопроводности аддитивных и биметаллических образцов.

Такое разделение необходимо потому, что разные уровни проверки отвечают на разные вопросы. Аналитическая верификация устанавливает корректность программной реализации уравнений и граничных условий. Сравнение с Ansys призвано подтвердить, что реализованная конечно-элементная постановка согласуется с общепризнанным промышленным конечно-элементным пакетом на неаналитических задачах. Экспериментальные испытания подтверждают физическую необходимость анизотропного и многоматериального описания теплопереноса в рассматриваемом классе аддитивных биметаллических материалов.

4.2. Критерии сопоставления и правила интерпретации результатов

Для тепловых задач основными величинами являются температуры в контрольных точках, температурные профили вдоль заданных линий, максимальная и средняя температура, интегральные тепловые потоки через заданные поверхности, тепловой баланс и эффективное тепловое сопротивление. Такой набор величин выбран потому, что температура характеризует само решение эллиптической краевой задачи, а поток и тепловое сопротивление контролируют производные и интегральные свойства полей температуры и плотности теплового потока согласно (2.2). Кроме того, для аддитивных и направленно организованных материалов в общем случае требуется тензорная форма закона Фурье (2.3).

При сравнении результатов на независимых сетках некорректно проводить прямое узловое сопоставление температур или тепловых потоков. Сравнение должно выполняться через общие геометрические точки, линии отбора и интегральные поверхностные величины. Это особенно важно для валидации посредством Ansys, поскольку сетка внешнего пакета и сетка рассматриваемого программного комплекса, вообще говоря, не являются идентичными, а локальный тепловой поток дополнительно зависит от способа восстановления градиента температуры.

Для термомеханических задач в качестве основных величин используются перемещения в контрольных точках, реакции опор, средние напряжения по материалам и напряжения вдоль заданных путей. Локальные пики эквивалентного напряжения около острых углов, контактов и границ материалов рассматриваются как диагностические показатели, но не используются как единственный критерий отбраковки результата рационального расположения теплопроводящего наполнителя, если аналитический или численный эталон относится к усреднённым величинам.

Основные контролируемые величины, источники расхождений и их оценки приведены в Табл. 4.1.

Табл. 4.1. Контролируемые величины и критерии интерпретации результатов

Класс задачи	Основные величины	Типичный источник расхождений	Допустимое расхождение
Линейная изотропная теплопроводность	T в точках, T вдоль линий, Q через поверхности, тепловой баланс	Дискретизация и локальная сетка у границ нагрузок	Температуры до 0,5-1 % от ΔT , потоки до 1 %
Двухматериальная задача	T на границе, профиль через интерфейс, эффективное R_c	Разметка доменов, трактовка контакта	Температуры до 1-1,5 %, потоки до 1,5-2 %
Интерфейсная фаза	Профиль T через слой, q , R_c интерфейса	Недостаточное сеточно разрешение тонкого слоя	Интегральные величины до 2-3 %
Анизотропия	Компоненты q , профили T , направление теплового потока	Поворот локальных осей и восстановление потока	T до 1-1,5 %, компоненты q до 2 %
Нелинейная теплопроводность	T , Q , число итераций, устойчивость сходимости	Интерполяция $\lambda(T)$, критерии нелинейной сходимости	T и Q до 2-3 %
Термоупругость	Перемещения, реакции, эквивалентные напряжения	Закрепления, опорная температура, восстановление напряжений	u до 2-3 %, реакции до 3-5 %, эквивалентные напряжения до 5 %

В процессе верификации выявлена необходимость разграничивать типы эталонных решений. Аналитические формулы для одномерных и слоистых структур широко применяются как контрольные ориентиры, однако они не являются глобальной нижней границей для общей трёхмерной задачи. Трёхмерное распределение теплопроводящего материала может формировать пути переноса тепла, отсутствующие в редуцированной постановке, поэтому механическое сравнение с одномерной формулой способно привести к ошибочной отбраковке физически допустимого результата.

В работе используется классификация эталонов, приведённая в . Строгий аналитический эталон воспроизводит ту же краевую задачу и допускает прямое сопоставление. Эталон сходимости используется там, где точное совпадение на конечной сетке не ожидается, но ошибка должна уменьшаться при её сгущении.

Балансовый эталон используется для контроля выполнения законов сохранения. Редуцированный ориентир применяется только для сравнения с одномерной или слоистой моделью.

Табл. 4.2. Классификация эталонов для интерпретации результатов верификации

Тип эталона	Назначение	Применение в верификации
Строгий аналитический	Точное решение той же краевой задачи	Линейная теплопроводность; условия Неймана и Робина; идеальный интерфейс
Эталон сходимости	Контроль уменьшения ошибки при сгущении сетки	Объёмный источник тепла; нелинейная теплопроводность
Балансовый	Проверка интегральных законов сохранения	Суммарные тепловые потоки; энергетический баланс; реакции опор
Редуцированный ориентир	Диагностическое сравнение с одномерной или слоистой моделью	Многоматериальная термоупругость; согласованная симметричная постановка

Для тепловых задач сопоставляются температуры в контрольных точках, температурные профили вдоль заданных линий, максимальная и средняя температура, интегральные тепловые потоки через геометрически определённые поверхности и энергетический баланс. Температура характеризует решение краевой задачи, а тепловые потоки контролируют градиентные и интегральные свойства поля. Для анизотропной среды дополнительно проверяются направление и компоненты вектора плотности теплового потока.

Для термоупругих задач используются перемещения в контрольных точках, реакции опор и средние напряжения по материалам. Локальные пики эквивалентного напряжения около острых углов и границ материалов имеют диагностическое значение, но не могут рассматриваться как единственный критерий совпадения, если аналитический ориентир относится к усреднённому напряжённому состоянию.

При сравнении результатов, полученных на разных сетках, узловое сопоставление не является достаточным, поскольку узлы могут не совпадать геометрически, а восстановленный тепловой поток зависит от способа

вычисления градиента температуры. Поэтому приоритет отдан общим контрольным точкам и линиям, интегральным поверхностным величинам, балансу тепла и значениям целевых функционалов, определённым на одной и той же физической области.

4.3. Аналитическая верификация

В ходе аналитической верификации конечно-элементного решателя, он последовательно тестировался на задачах теплопроводности и термоупругости. Каждое следующее испытание добавляло только один новый физический элемент по сравнению с предыдущим: сначала линейная изотропная теплопроводность, затем объёмный источник, тепловые потоки на поверхности, интерфейс двух доменов, тензорная анизотропия и нелинейная зависимость теплопроводности от температуры. Такой набор делает расхождения интерпретируемыми и позволяет локализовать причину возможного сбоя в работе решателя.

Дополнительное основание для такого выбора состоит в том, что вся подсистема рационального расположения теплопроводящего наполнителя на каждой своей итерации использует тот же самый прямой решатель. Следовательно, любая систематическая ошибка в тепловом ядре переносится в значения целевого функционала, ограничений и чувствительностей [179,181,184].

4.3.1. Линейная изотропная теплопроводность и объёмный источник

Первая задача была выбрана как минимальный тест на корректность линейного теплового оператора. В однородном теле при двух условиях Дирихле аналитическое решение линейно по продольной координате и должно воспроизводиться линейными тетраэдральными элементами с точностью практически до последнего знака. Именно такое поведение и наблюдалось: отклонения температуры носили характер численного шума, а интегральный тепловой баланс замыкался до уровня точности числа с плавающей запятой.

Во второй задаче в постановку был введён объёмный источник тепла. Здесь аналитический профиль уже квадратичный, поэтому главным критерием становилась правильная сеточная сходимость. Серия расчётов показала ожидаемое убывание ошибки: максимальная ошибка температуры уменьшалась от 0,1204 до 0,0328 °С, а среднеквадратическая – от 0,0323 до 0,0104 °С. При этом корректно воспроизводились объёмная мощность источника и общий энергетический баланс.

4.3.2. Граничные условия Неймана и Робина

В третьей и четвёртой задачах проверялись поверхностные вклады в слабой форме уравнения. В 3-й задаче на одной из граней задавался известный тепловой поток, а на противоположной – температура. Расчёт дал максимальную ошибку температуры $2,14 \cdot 10^{-12}$ °С, ошибку интегрального потока $8,33 \cdot 10^{-17}$ Вт и восстановленный наклон профиля $-10,0$ °С/мм с предельной точностью. Это подтверждает корректность реализации условия Неймана [176].

В 4-й задаче использовалось граничное условие Робина. Проверялись линейность профиля, поток через выбранную поверхность и выполнение закона Ньютона для теплоотдачи. Расчёт показал температуру на поверхности 50,000000000000269 °С и тепловой поток 0,10000000000000558 Вт при аналитическом решении 0,1 Вт; ошибка проверки самого закона составила $1,39 \cdot 10^{-17}$ Вт. Следовательно, конвективный член в матрице и правой части реализован согласованно.

Табл. 4.3. Основные численные результаты решения тестовых тепловых задач 1–4 в сравнении с аналитическими решениями.

№ п/п	Контролируемая величина	Аналитический ориентир	Численный результат	Вывод
1	Макс. ошибка T	0	порядка 10^{-13} °С	Высокая точность
	Баланс тепла	0	порядка 10^{-15} Вт	Замыкается
2	Макс. ошибка T	сходимость	0,1204 → 0,0328 °С	Ожидаемая сеточная сходимость

№ п/п	Контролируемая величина	Аналитический ориентир	Численный результат	Вывод
	Среднекв. отклонение T	сходимость	$0,0323 \rightarrow 0,0104$ °C	Ожидаемая сеточная сходимость
3	Ошибка потока	0	$8,33 \cdot 10^{-17}$ Вт	Условие Неймана подтверждено
4	Поток через ГР	0,1 Вт	0,10000000000000558 Вт	Условие Робина подтверждено

4.3.3. Кусочно-однородный интерфейс, анизотропия и нелинейность

Пятая задача была посвящена интерфейсу двух доменов с различной теплопроводностью. Он подтверждал предельный случай резкой границы свойств: непрерывность температуры на интерфейсе, разрыв продольного градиента и непрерывность теплового потока. Расчёт дал температуру на интерфейсе 20,0 °C с ошибкой порядка $4,4 \cdot 10^{-13}$ °C, разрыв температуры не превышал $2,84 \cdot 10^{-14}$ °C, а наклоны профиля по обе стороны от интерфейса совпали с эталонными значениями $-16,0$ и $-4,0$ °C/мм. Тем самым было подтверждено отсутствие фиктивного контактного сопротивления в задаче с идеальным интерфейсом.

В шестой задаче проверялась тензорная теплопроводность. Её роль особенно велика, поскольку для аддитивно изготовленных металлов теплопроводность в общем случае должна задаваться в тензорной форме [45,47,49,50,94]. В тестовой задаче использовался постоянный тензор Λ с ненулевыми внедиагональными компонентами. Расчёт воспроизвёл средний тепловой поток в полном согласии с аналитическим ориентиром. Следовательно, программная реализация действительно решает тензорную задачу, а не редуцирует её к скалярной теплопроводности.

Седьмая задача проверяла нелинейную зависимость $\lambda(T)$. Максимальная ошибка температуры составила 0,009755 °C, среднеквадратическая – 0,002081 °C, а нелинейный решатель сходил за 12 итераций. Это подтверждает корректность решения задач с нелинейной теплопроводностью.

Таблица 4.4. Основные численные результаты решения тестовых тепловых задач 5–7 в сравнении с аналитическими решениями.

№ п/п	Контролируемая величина	Аналитический ориентир	Численный результат	Вывод
5	T на интерфейсе	20,0 °C	20,0 °C	Непрерывность T выполнена
	Разрыв T	0	$2,84 \cdot 10^{-14}$ °C	Фиктивное сопротивление отсутствует
6	Средний поток q	(0,20; 0,05; –0,03)	(0,20; 0,05; –0,03)	Тензорная теплопроводность подтверждена
7	Макс. ошибка T	0	0,009755 °C	Нелинейное решение корректно
	Число итераций	сходимость	12	Устойчивая нелинейная сходимость

4.3.4. Верификация термоупругой подсистемы

После подтверждения теплового блока программа испытаний была продолжена на слабосвязанной термоупругой постановке. Проверялась вся связка «температура – тепловая деформация – перемещения – напряжения», что необходимо для последующей термопрочностной диагностики результата рационального расположения теплопроводящего наполнителя [186].

Восьмая тестовая задача описывала однородный брусок при равномерном нагреве и роликовых опорах на трёх взаимно ортогональных гранях. Аналитически это соответствует почти свободному тепловому расширению: поле перемещений линейно по координатам, а напряжения в объёме должны быть близки к нулю. Расчёт показал именно такое поведение: ошибки по перемещениям находились на уровне точности числа с плавающей запятой, а эквивалентные напряжения оставались практически нулевыми.

Девятая задача имела симметричную трёхслойную постановку, когда материал с большим значением КЛТР располагался между одинаковыми слоями материала с меньшим значением КЛТР. В результате расчёт дал смещение торца 0,0132792 мм при эталоне 0,0133333 мм, а средние осевые

напряжения по материалам составили 51,62 и –51,66 МПа при эталоне $\pm 53,33$ МПа, т. е. абсолютные ошибки не превышали 1,7 МПа.

Таблица 4.5. Основные численные результаты решения тестовых тепловых задач 5–7 в сравнении с аналитическими решениями

№ п/п	Контролируемая величина	Аналитический ориентир	Численный результат	Вывод
8	Перемещения	Линейное свободное расширение	совпадение с машинной точностью	Пройдено
	Эквивалентное напряжение	≈ 0	практически 0	Пройдено
9	Перемещение торца	0,0133333 мм	0,0132792 мм	Пройдено
	Осевое напряжение	$\pm 53,33$ МПа	+51,62 / –51,66 МПа	Пройдено

4.4. Интеграционная проверка последовательности вычислений

Аналитическая верификация, представленная в разделе 4.3, подтверждает корректность отдельных физических и вычислительных механизмов модели: стационарной теплопроводности, граничных условий, анизотропии, неоднородности материала и последовательной термоупругой постановки. Однако раздельная проверка операторов не подтверждает автоматически согласованность полной расчётной цепочки. Поэтому дополнительно выполнена интеграционная проверка, предназначенная для контроля переходов между указанными представлениями и сохранения физического смысла задачи.

4.4.1. Демонстрационный расчёт конструктивно подобного лопаточного элемента

В качестве интеграционного примера рассмотрен конструктивно подобный лопаточный элемент, включающий перо и корневую зону теплоотвода. Тепловая нагрузка приложена к локальному участку пера, а отвод тепла осуществляется через корневую часть. Внутри конструкционной матрицы выделена проектируемая область, в которой допускается изменение распределения материала. Остальные участки относятся к непроектируемым областям и сохраняют заданные свойства на всех стадиях расчёта.

Теплопроводящий наполнитель должен формировать связный путь между теплонагруженной областью и корневым теплоотводом, не выходить за пределы проектируемой области, соблюдать ограничение объёмной доли и не образовывать изолированных включений. Выбор лопаточного элемента обусловлен криволинейной трёхмерной геометрией, локализованной тепловой нагрузкой и пространственно изменяющимся направлением плотности теплового потока. В отличие от одномерных и слоистых эталонов такая постановка не допускает предварительного сведения рациональной конфигурации наполнителя к прямому стержню или плоскому слою.

Последовательность основных представлений показана на рис. Рис. 4.1. Исходная геометрия преобразуется в конечно-элементную сетку, на которой определяется базовое температурное поле и анализируются линии теплового потока. Затем выполняется рациональный выбор геометрии наполнителя, после чего проектное поле переводится в материализованное распределение фаз.

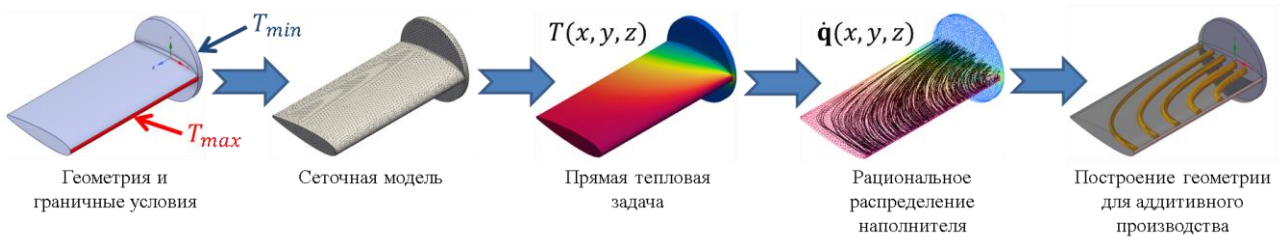


Рис. 4.1. Схема сквозного расчётного примера лопаточного элемента с теплопроводящим наполнителем

4.4.2. Стадии расчёта и контролируемые результаты

Сквозной расчёт включает построение сетки исходной геометрии, базовый конечно-элементный тепловой расчёт, рациональное расположение теплопроводящего наполнителя, многостартовый выбор допустимого решения, бинаризацию, построение поля наполнителя, геометрическую материализацию и повторный тепловой расчёт конечной конфигурации. Последовательность стадий и контролируемые результаты приведены в таблице Таблица 4.6.

Таблица 4.6. Стадии интеграционного расчёта и контролируемые результаты

Стадия	Формируемый результат	Контроль
--------	-----------------------	----------

Подготовка геометрии и сетки	Тетраэдральная расчётная модель с граничной разметкой	Геометрическая корректность; соответствие областей нагрузки и теплоотвода
Базовый тепловой расчёт	Температурное поле и поле плотности теплового потока для исходной матрицы	Энергетический баланс; максимальная и средняя температура; тепловой поток через сток
Рациональный выбор геометрии наполнителя	Релаксированное проектное поле при ограничении объёмной доли	Значение температурного функционала; соблюдение ограничения по объёму
Многостартовый режим	Набор допустимых кандидатов и выбранное решение	Ранжирование по физическому функционалу среди допустимых решений
Бинаризация и поле наполнителя	Дискретное распределение матрицы и наполнителя	Связность теплопроводящей фазы; отсутствие изолированных включений
Геометрическая материализация	Материализованная биметаллическая конфигурация	Сохранение объёмной доли и геометрической связности
Повторный тепловой расчёт	Температурное поле конечной конфигурации	Изменение максимальной температуры, теплового потока и энергетического баланса после материализации

На первой стадии было построено тетраэдральное конечно-элементное представление и проконтролированы положительность объёмов элементов, наличие нагреваемой и охлаждаемой поверхностей, непустота проектируемой области. Затем выполнен базовый тепловой расчёт для конструкции из материала матрицы: определены температурное поле, максимум температуры, функционал, градиент температуры, плотность теплового потока и интегральная мощность теплоотвода, проверен энергетический баланс. Далее проведена оптимизация проектной переменной с последовательным применением фильтрации, проекции, интерполяции свойств, прямого расчёта, вычисления функционала и ограничений, определения сопряжённых чувствительностей и обновления поля. В виду неочевидной выпуклости задачи использовался многостартовый режим. Лучший допустимый результат был выбран из нескольких начальных приближений, при этом достижение глобального оптимума не доказывалось.

Полученное релаксированное поле было бинаризовано, проведён анализ связности теплопроводящей фазы – выявлены связные компоненты, наличие непрерывного пути, изолированные включения и малые ответвления. Морфологическая постобработка, способная изменить локальные характеристики, была выполнена с последующим повторным расчётом. На основе бинарного распределения сформировано неявное поле наполнителя; по его нулевому уровню задана граница фазы, а в окрестности выделена эффективная межматериальная область конечной толщины.

Геометрическая материализация включила построение и сглаживание поверхности наполнителя, проверку её положения внутри матрицы и присвоение каждому элементу статуса матрицы, наполнителя или переходной зоны. Контролировались сохранение ненулевых объёмов основных материалов, объёмная доля наполнителя, связность и отсутствие изолированных областей.

Завершающей стадией стал повторный тепловой расчёт материализованной конфигурации при тех же граничных условиях. Были сопоставлены исходная конструкция, релаксированное поле и дискретное распределение фаз; проверены максимальная температура, температурный функционал, интегральный теплоотвод, распределение потока и энергетический баланс. Полученное температурное поле может быть передано в термоупругую задачу. Дополнительно выполнена диагностика по формальным технологическим признакам (локальные утонения, тупиковые ветви, кривизна, концентрация переходной области) – эти проверки носят диагностический характер и не заменяют моделирование аддитивного производства или натурные испытания.

Интеграционная проверка подтвердила согласованность перехода от исходной тепловой постановки к материализованной структуре и необходимость повторного расчёта после геометрических преобразований. Вместе с тем она не заменяет аналитическую верификацию операторов, не доказывает глобальную оптимальность и не является экспериментальной валидацией лопаточного элемента.

Таким образом, была проверена согласованность переходов между представлениями: геометрией, сеткой, температурным полем, проектной переменной, бинарным полем и материализованной конфигурацией. Обязательный повторный тепловой расчёт отделяет свойства релаксированного поля рационального расположения теплопроводящего наполнителя от характеристик конечного распределения материалов. В имеющемся наборе результатов данный пример используется как проверка вычислительной последовательности и состава контролируемых метрик в дополнение к количественной аналитической верификации отдельных подсистем и экспериментальное определение свойств материалов.

4.5. Метод измерения и экспериментальная установка

Выбор метода измерения был обусловлен следующими соображениями. Во-первых, так как целью исследования является определение анизотропии теплопроводности, метод должен был позволять проводить измерение в конкретном направлении. Это исключало методы, при которых в образце создаётся сложное трёхмерное температурное поле, например, метод лазерной вспышки. Во-вторых, чтобы снизить влияние контактных явлений на определение анизотропии теплопроводности, измерение должно проводиться на образце, характерный продольный размер которого значительно больше толщины области контакта. В-третьих, из соображений удобства измерений точность метода должна минимальным образом зависеть от внешних условий. Это делало метод полубесконечного стержня менее предпочтительным, так как для него требовалось бы поддерживать стабильные условия конвекции. Что касается косвенных методов измерения, то они могут быть интересны в качестве дополнения, но не замены прямого определения теплопроводности.

Основываясь на приведённых доводах, в качестве рабочего метода был выбран стационарный метод продольного теплового потока, который обеспечивает стабильное одномерное температурное поле внутри образца, а относительный вклад контактных явлений в общую картину теплопроводности невелик.

4.5.1. Описание экспериментальной установки

Экспериментальная установка, используемая в данной работе, предназначена для определения коэффициента теплопроводности образца материала в одном направлении стационарным методом продольного теплового потока.

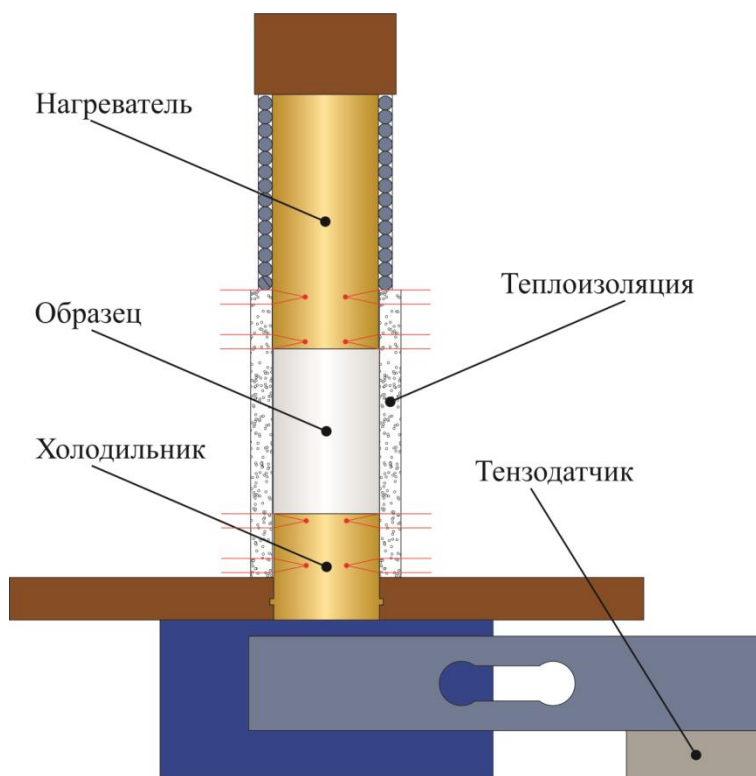


Рис. 4.2. Принципиальная схема экспериментальной установки

Экспериментальная установка состоит из основания и рамы из алюминиевого профиля, на которой закреплены все остальные элементы: рабочий участок с теплоизоляцией и термопарами, механизм прижима, система охлаждения и блок управления.

Рабочий участок экспериментальной установки ориентирован вертикально и состоит из нагревателя и холодильника, между которыми помещается исследуемый образец. С целью исключения влияния свободной конвекции на результаты измерений нагреватель установлен выше исследуемого образца, а холодильник – снизу. Таким образом, в эксперименте реализуется направление теплового потока вдоль вертикальной оси сверху вниз.

Нагреватель представляет собой цилиндр диаметром 30 мм из высокоочищенной меди, вокруг верхней части которого намотана нихромовая проволока, на которую подаётся электрический ток. С целью минимизации потерь тепла верхний торец и боковая поверхность нагревателя теплоизолированы. На нижнем торце медного цилиндра и в его сечении на некотором расстоянии выше расположены по 2 термопары, показания которых позволяют определить тепловой поток, поступающий к исследуемому образцу.

Холодильник состоит из цилиндра диаметром 30 мм из высокоочищенной меди, нижняя часть которого находится в термическом контакте с системой водяного охлаждения, что необходимо для отведения тепла от рабочего участка и поддержания стационарного теплового потока. С целью минимизации потерь тепла боковая поверхность холодильника теплоизолирована. На верхнем торце медного цилиндра и в его сечении на некотором расстоянии ниже расположены по 2 термопары, показания которых позволяют определить тепловой поток, поступающий от исследуемого образца.

С целью теплоизоляции рабочего участка вокруг него установлен цилиндрический кожух из стеклопластика, а свободное пространство между элементами рабочего участка и кожухом засыпается стеклянными микросферами.

Для поддержания эффективных термических контактов между исследуемым образцом, нагревателем и холодильником, они прижимаются друг к другу винтовым прижимом. Для контроля силы сжатия платформа, на которой установлен рабочий участок, установлен тензодатчик.

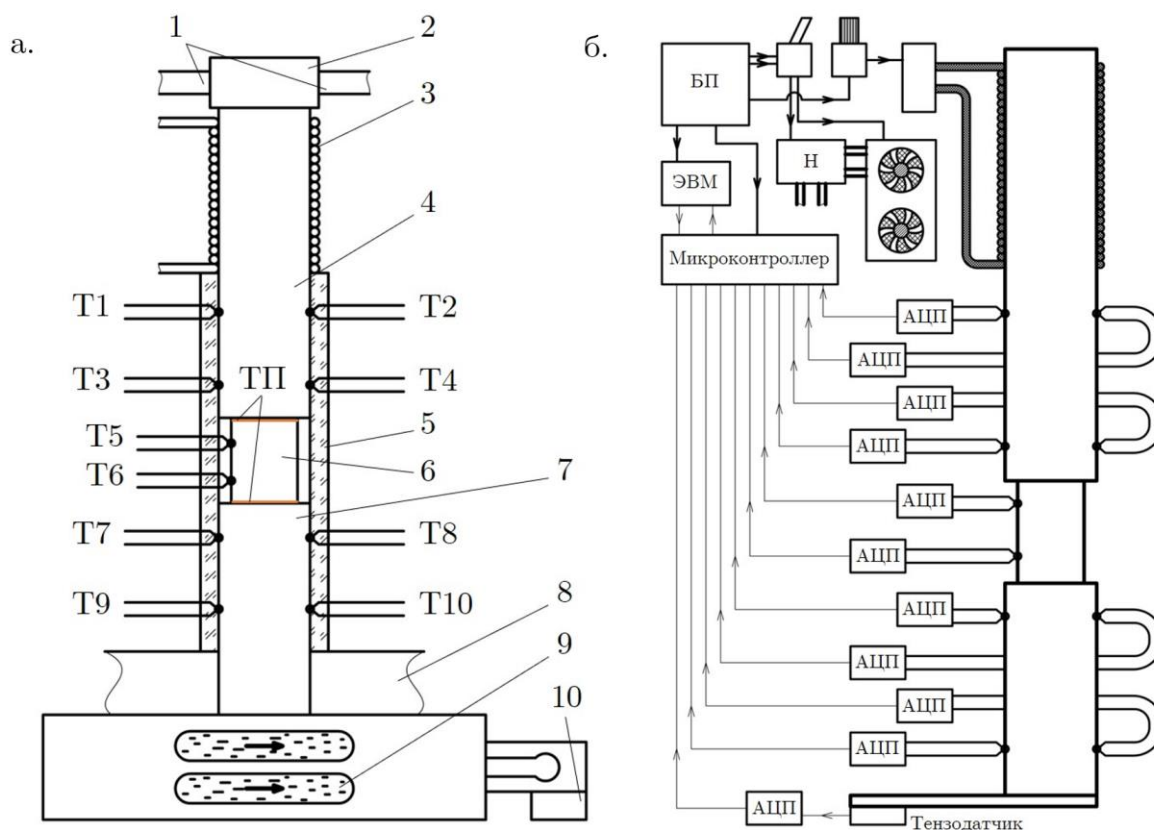


Рис. 4.3. Экспериментальная установка стационарного продольного теплового потока: а – конструктивная схема рабочего участка (1 – рама прижима, 2 – теплоизолированная проставка прижима, 3 – нагреватель, 4 – горячий медный цилиндр, 5 – боковая теплоизоляция, 6 – образец, 7 – холодный медный цилиндр, 8 – опора рабочего участка, 9 – жидкостное охлаждение, 10 – тензодатчик); б – функциональная схема системы регистрации и управления.

Для измерения температуры в различных сечениях исследуемого образца экспериментальная установка позволяет установить в этих сечениях термопары, что даёт возможность получить информацию о его температурном поле.

ТермоЭДС от всех термопар подаётся в блок управления, где эти данные преобразуются в численные значения, которые затем программным способом преобразуются в значения температур через тарировочные функции. Опрос термопар производится автоматически с частотой 1 Гц. Все данные сводятся в файл CSV, пригодный для обработки на компьютере.

4.5.2. Методика проведения эксперимента

Принцип работы экспериментальной установки заключается в создании стационарного теплового потока вдоль заданного направления внутри образца и измерении градиента температуры вдоль этого направления.

Выход экспериментальной установки на стационарный режим определяется по постоянству во времени показаний всех термопар.

Таким образом, коэффициент теплопроводности материала в данном направлении рассчитывается посредством закона Фурье для одномерного случая:

$$q = -\lambda_x \frac{dT}{dx}. \quad (4.1)$$

Сделав допущения об однородности материала вдоль выбранного направления и о пренебрежимо малой величине тепловых потерь через боковую поверхность образца, можно применить закон Фурье в такой записи:

$$q = -\lambda_x \frac{T_{w,1} - T_{w,2}}{l}, \quad (4.2)$$

где l – линейный размер образца в выбранном направлении;

$T_{w,1}$ – температура горячей стороны образца;

$T_{w,2}$ – температура холодной стороны образца.

Таким образом, значение коэффициента теплопроводности при средней температуре $T_m = \frac{T_{w,1} + T_{w,2}}{2}$ будет определяться:

$$\lambda_x = \frac{q \cdot l}{T_{w,1} - T_{w,2}}. \quad (4.3)$$

Так как для расчёта величины коэффициента теплопроводности требуется значение плотности теплового потока, то её необходимо получить. Для этого с горячей и с холодной сторон образца располагаются эталонные медные цилиндры с известными зависимостями коэффициента от температуры, на торцах которых также измеряются значения температуры. Плотность теплового потока q_h для горячего и q_c для холодного эталонных цилиндров аналогичным образом определяется по формуле (4.2).

В качестве величины плотности теплового потока через образец принимается среднее арифметическое значение плотностей теплового потока через горячий и холодный эталонные цилиндры:

$$q = \frac{q_h + q_c}{2}. \quad (4.4)$$

В виду того, что теплопроводность материала зависит от его температуры, эксперимент необходимо проводить в виде серии испытаний при различных температурах с последующим построением зависимости $\lambda(T)$.

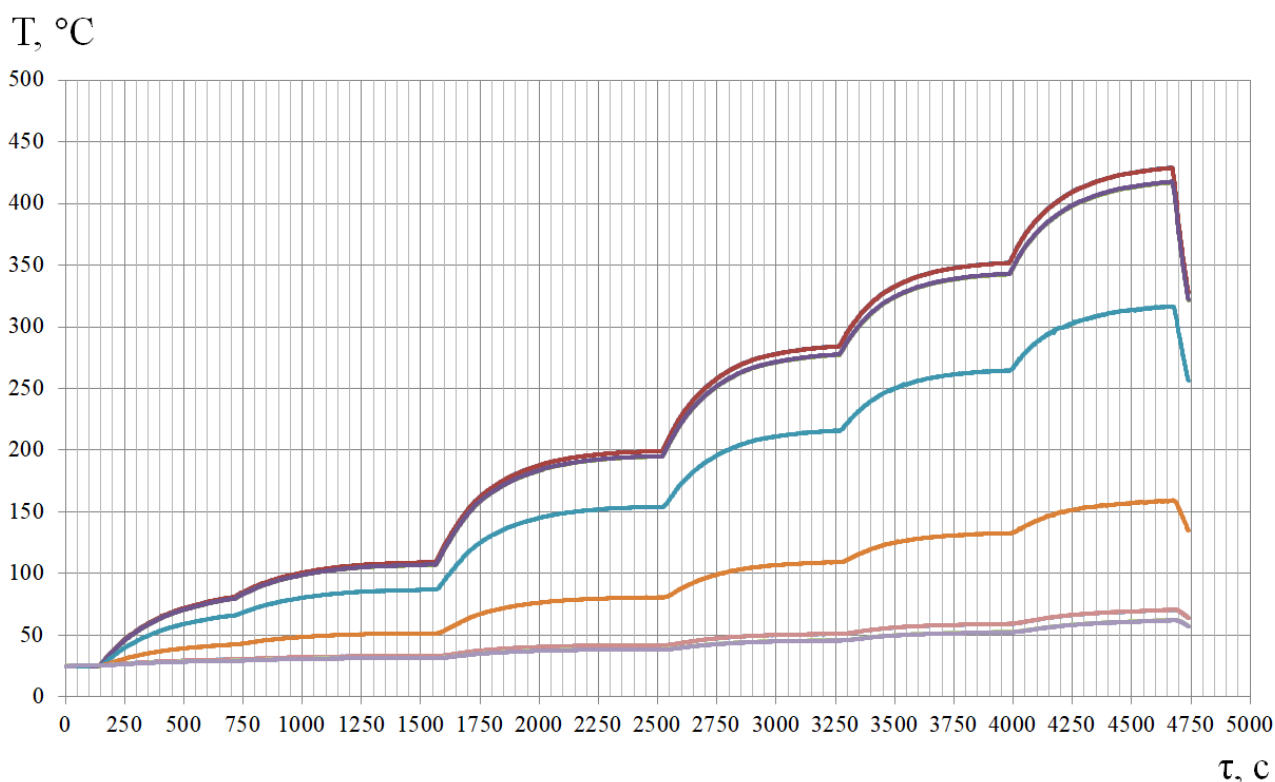


Рис. 4.4. Типичный график измерения температур в образце.

4.5.3. Калибровка экспериментальной установки

Вышеизложенная методика определения теплопроводности образца, зажатого между нагревателем и теплоотводом, связана с практическими сложностями — неидеальными тепловыми контактами между ними, а также потерей тела с боковой поверхности. Для улучшения теплового контакта использовалась термопаста КТП-8, что принципиально не устраняло проблему КТС и связанное с ней падение температуры между контактирующими поверхностями. Для снижения потерь тепла с боковой поверхности использовалась теплоизоляция из стеклоткани.

Для определения истинной температуры торцов образца было необходимо определить величину КТС в зоне контакта с использованием термопасты. С этой целью была проведена серия измерений, при которой поверхности нагревателя и теплоотвода смыкались между собой при заполнении зоны контакта термопастой КТП-8.

КТС определялось следующим образом. По известным температурам в сечениях нагревателя и теплоотвода строились линейные графики распределения температуры. Данные графики пересекали плоскость контакта в двух различных точках. Расстояние между этими точками соответствовало падению температуры вследствие неидеального теплового контакта. Пример такого графика представлен на Рис. 4.5.

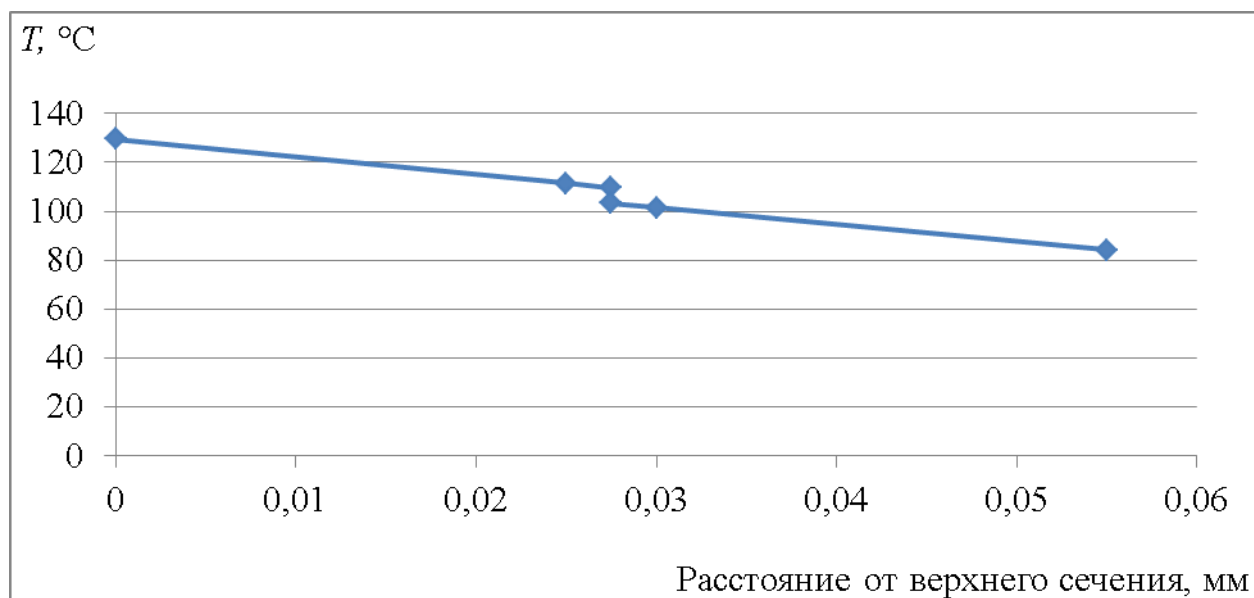


Рис. 4.5. Падение температуры в области неидеального теплового контакта.

Вычисление КТС производится по следующей формуле:

$$R_k = \frac{\Delta T}{q_k}, \quad (4.5)$$

где ΔT – падение температуры в зоне контакта, q_k – средняя плотность теплового потока в зоне контакта.

Всего было проведено 5 калибровочных испытаний. Вычисленные значения контактного термического сопротивления представлены на Рис. 4.6.

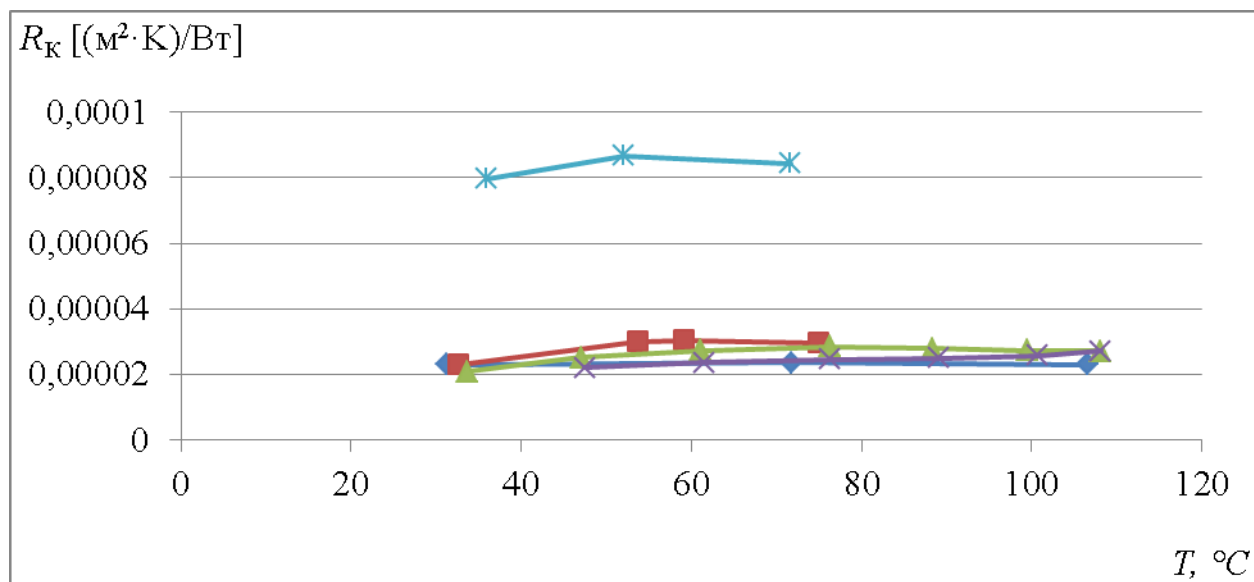


Рис. 4.6. Измеренные значения КТС с использованием термонасты. Цветами выделены различные испытания.

Как можно видеть, значения КТС довольно стабильны и не зависят от температуры. Более высокие значения КТС, полученные при одном из испытаний были, по-видимому, связаны с засорением зоны контакта. Эти значения были исключены из расчёта величины КТС, используемой в данной работе для вычисления истинных температур торцов образца.

Значение КТС, используемое в данной работе было вычислено как $2,56587 \cdot 10^{-5} \text{ (м}^2 \cdot \text{К)/Вт}$. В данной работе это значение принято как константа.

Помимо определения КТС при калибровке экспериментальной установки также проводилась оценка потерь тепла с боковой поверхности через теплоизоляцию. Данная оценка основана на следующих предположениях:

- потеря тепла описывается законом Ньютона для теплоотдачи:

$$\Delta Q = \alpha(T_w - T_f)F_w, \quad (4.6)$$

где α – коэффициент теплоотдачи, T_w – температура боковой поверхности, T_f – температура окружающей среды, F_w – площадь поверхности теплообмена;

- величина потери тепла с боковой поверхности равна разнице поступившего в рабочий участок теплового потока через горячий торец и покинувшего его через холодный:

$$\Delta Q = Q_{\text{гор}} - Q_{\text{хол}}; \quad (4.7)$$

- в качестве температуры боковой поверхности принимается средняя температура рабочего участка как среднее арифметическое наибольшей температуры нагревателя и наименьшей температуры теплоотвода:

$$T_w = \frac{T_{\text{нагр, макс}} + T_{\text{хол, мин}}}{2}; \quad (4.8)$$

- контрольными сечениями для тепловых потоков принимаются середины участков между сечениями с термопарами нагревателя и теплоотвода;
- площадь поверхности потери тепла определяется как площадь боковой поверхности цилиндра между вышеуказанными сечениями.

В ходе калибровочных испытаний без образца потери тепла были измерены и представлены на Рис. 4.7. Можно отметить линейность зависимости величины потерь тепла от температуры поверхности, что свидетельствует в пользу применимости закона Ньютона.

Линейность данной зависимости соответствует постоянству значения коэффициента теплоотдачи, что видно из оценки погрешности его определения.

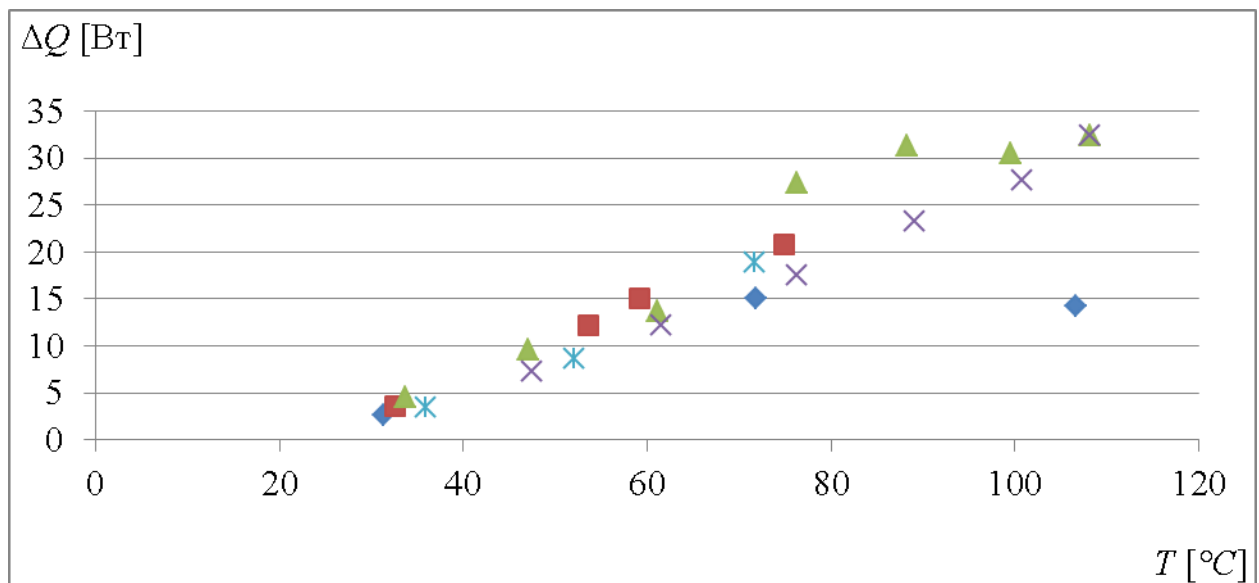


Рис. 4.7. Измеренные значения потерь тепла с боковой поверхности. Цветами выделены различные испытания.

Далее по известным значениям площади, потерь тепла, температур поверхности и окружающего воздуха были рассчитаны значения коэффициента теплоотдачи для каждого измерения. Данные значения представлены на Рис.

4.8. Можно отметить, что величина коэффициента теплоотдачи практически не зависит от температуры в исследуемом диапазоне.

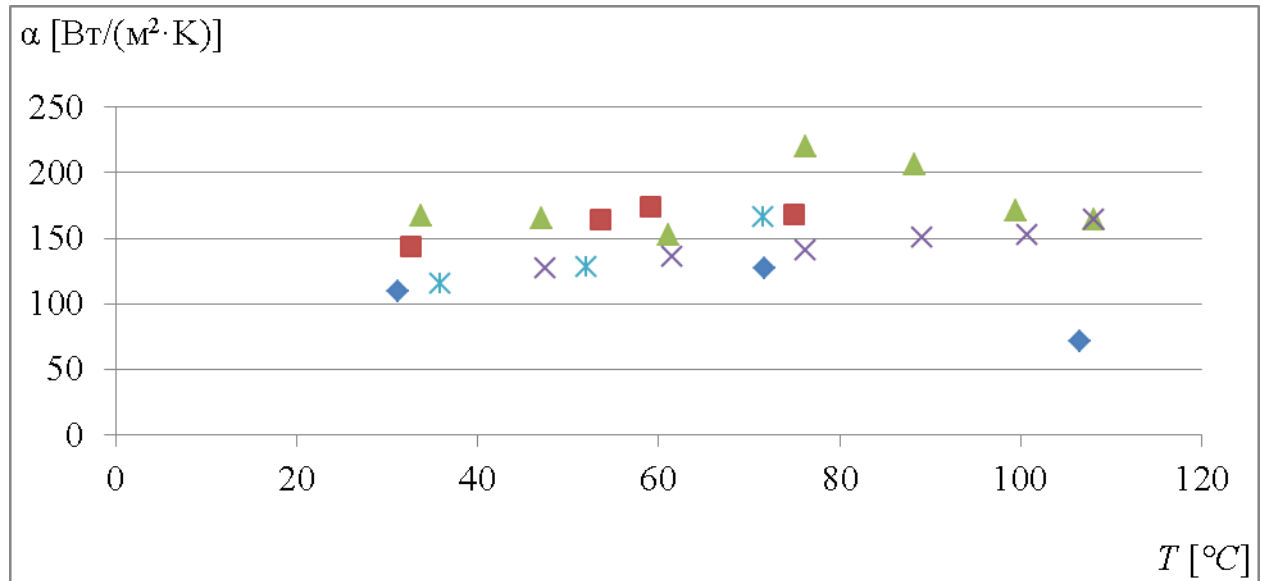


Рис. 4.8. Значения коэффициента теплоотдачи на боковой поверхности. Цветами выделены различные испытания.

Среднее значение коэффициента теплоотдачи для $N = 22$ измерений:

$$\bar{h} = \frac{\sum h_i}{N} = 151,09 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}} \quad (4.9)$$

Среднеквадратическое отклонение:

$$\sigma_h = \sqrt{\frac{(\bar{h} - h_i)^2}{N(N-1)}} = 31,28 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}} \quad (4.10)$$

Для доверительной вероятности $\vartheta = 0,99$ и $N = 22$ измерений из таблицы определяется коэффициент Стьюдента $t_{\vartheta N} = 2,807$ [189]. Таким образом, значение коэффициента теплоотдачи с учётом погрешности:

$$h = \bar{h} \pm \sigma_h \frac{t_{\vartheta N}}{\sqrt{N}} = 151,09 \pm 18,72 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}} \quad (4.11)$$

Наконец, была проведена оценка доли потерь тепла через боковую поверхность, то есть отношение величины потери тепла к входящему тепловому потоку. Данные значения представлены на Рис. 4.9.

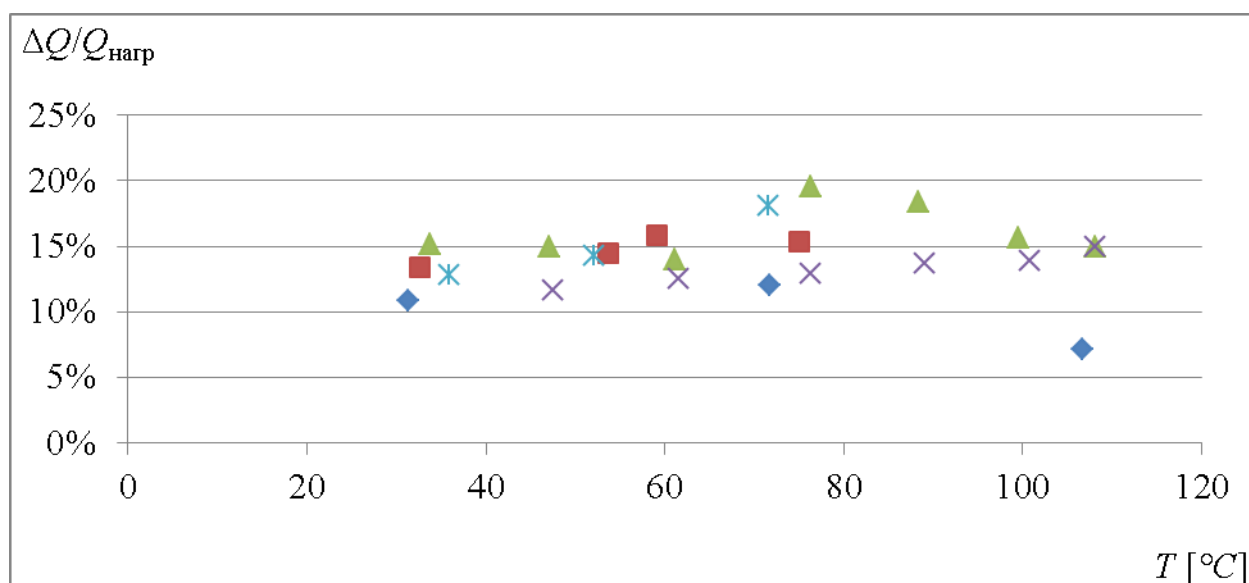


Рис. 4.9. Доли потери тепла с боковой поверхности. Цветами выделены различные испытания.

4.6. Испытания аддитивно изготовленных образцов

Экспериментальный блок направлен на проверку физической предпосылки, положенной в основу расчётной модели: для аддитивных металлов и биметаллических структур теплопроводность может зависеть от направления теплового потока. В программу включены образцы аддитивной нержавеющей стали CL 20ES, образцы Co-Cr-Mo и ЭИ698 с различной ориентацией слоёв относительно теплового потока, а также модельный биметаллический композиционный образец ПОС-61 + Cu с однонаправленным медным наполнителем.

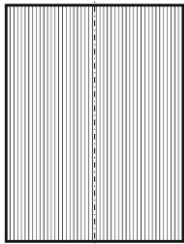
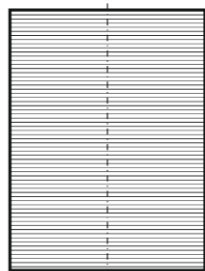
Для каждого материала сравнивались значения теплопроводности вдоль и поперёк технологического или структурного направления. В аддитивных металлах таким направлением является направление построения или ориентация слоёв сплавления, а в биметаллическом образце – направление расположения медной проволоки.

4.6.1. Образцы CL 20ES с различной ориентацией слоёв

На первом этапе были исследованы четыре цилиндрических образца из нержавеющей стали CL 20ES, изготовленные методом селективного лазерного сплавления. Две заготовки соответствовали продольной ориентации

построения, две другие – ортогональной ориентации слоёв относительно направления теплового потока. Такая схема позволила сопоставить теплопроводность вдоль и поперёк характерной технологической ориентации материала.

Табл. 4.7 Результаты измерения теплопроводности образцов CL 20ES.

№ п/п	Направление слоёв	Теплопроводность образца, Вт/(м·К)	Средняя теплопроводность для данной ориентации слоёв, Вт/(м·К)
1		24,165	26,676
2		29,187	
3		20,204	19,777
4		19,349	

Средние значения теплопроводности двух ориентационных групп составили 26,68 и 19,78 Вт/(м·К). Следовательно, для исследованной партии образцов ориентация слоёв сплавления приводит к измеримому и инженерно значимому различию теплопроводности [4].

4.6.2. Образцы Co-Cr-Mo и ЭИ698

Следующая серия испытаний была направлена на сравнение выраженной и слабой анизотропии теплопроводности у двух аддитивных материалов: Co-Cr-Mo и жаропрочной стали ЭИ698. Образцы были изготовлены методом СЛС в форме цилиндров. Для каждой марки была изготовлена пара образцов с осями цилиндров, ориентированными параллельно и перпендикулярно направлению построения. После изготовления образцы обрабатывались на токарном станке, а торцы дополнительно шлифовались.

Каждый образец испытывался в серии стационарных режимов дважды: при последовательном повышении температуры и при последовательном понижении. Такая схема использовалась для снижения влияния систематических ошибок, связанных с тепловой инерцией образца и установки.

Результаты испытаний образцов из сплава Co-Cr-Mo и линейная аппроксимация зависимости $\lambda(T)$ приведены на Рис. 4.10.

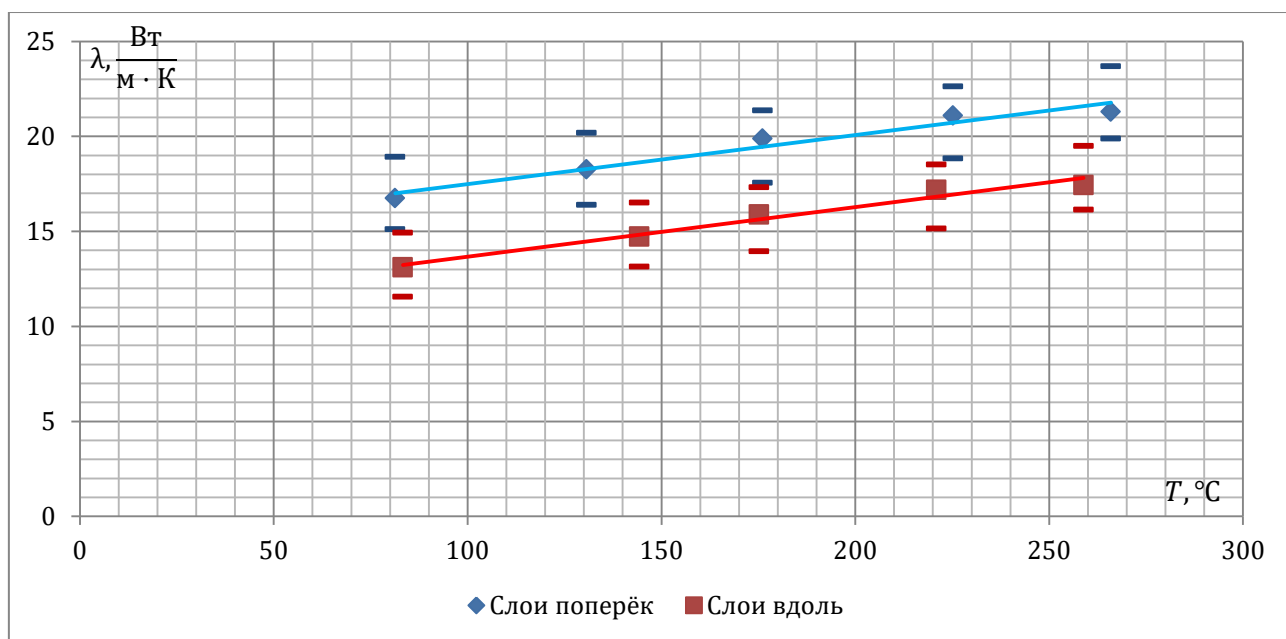


Рис. 4.10. Результаты испытаний образцов из сплава Co-Cr-Mo: точками отмечены результаты измерений, линиями – их аппроксимация.

Полученные результаты показывают наличие анизотропии теплопроводности, которая согласно данным из литературы связывается с анизотропией микроструктуры.

Также были проведены испытания образцов из жаропрочной стали ЭИ698, результаты которых и линейная аппроксимация зависимости $\lambda(T)$ приведены на Рис. 4.11.

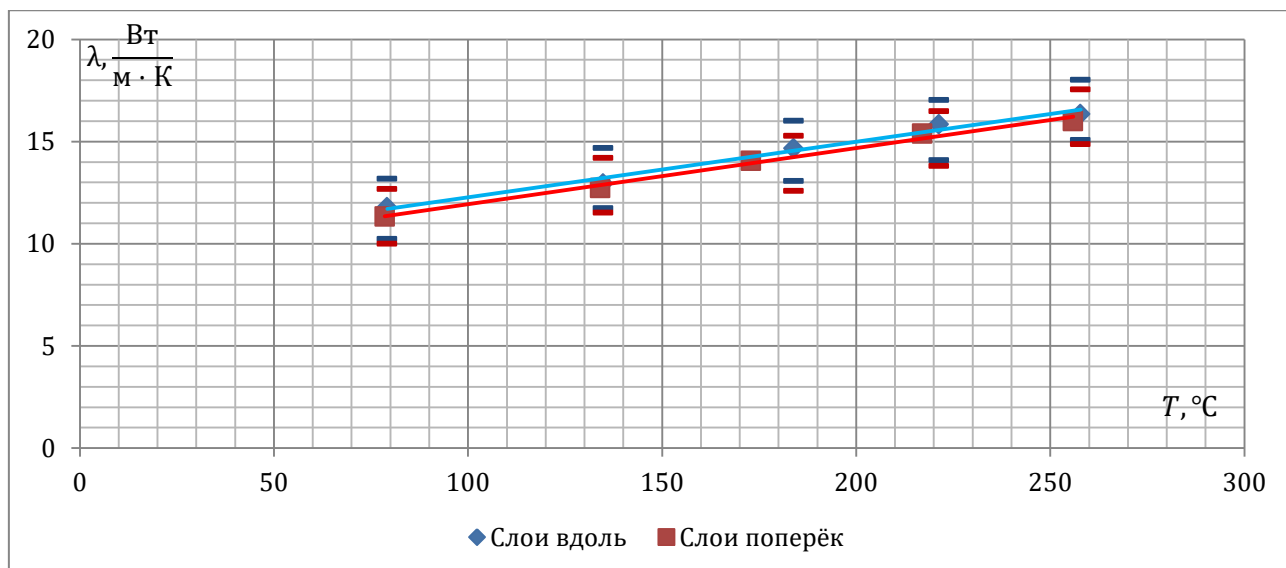


Рис. 4.11. Результаты испытаний образцов из жаропрочной стали ЭИ698: точками отмечены результаты измерений, линиями – их аппроксимация.

Испытания образцов из жаропрочной стали ЭИ698 значимой анизотропии теплопроводности не выявили.

Данные о результатах испытания образцов приведены в табл. 12.

Таблица 4.8. Результаты измерений анизотропии теплопроводности

Материал	Направление слоёв относительно теплового потока	Коэффициент теплопроводности λ при различных температурах [Вт/(м·К)]				Выраженность анизотропии [%]
		100 °C	150 °C	200 °C	250 °C	
Co-Cr-Mo	Поперёк	16,622	17,572	18,522	19,472	18,076
Co-Cr-Mo	Вдоль	13,321	14,306	15,291	16,276	
ЭИ698	Поперёк	12,004	13,339	14,674	16,009	2,268
ЭИ698	Вдоль	12,367	13,672	14,977	16,282	

4.7. Модельный биметаллический образец ПОС-61 + Cu

Отдельная серия испытаний была выполнена для модельного биметаллического композиционного образца. В отличие от аддитивных мономатериалов, где направленность теплопроводности обусловлена технологической микроструктурой, в данном случае анизотропия задаётся макрогеометрией высокотеплопроводящей фазы. Образец представлял собой

куб размером $18,5 \times 18,5 \times 18,5$ мм с матрицей из ПОС-61 и однонаправленным наполнителем из медной проволоки диаметром 1 мм с шагом 2 мм.

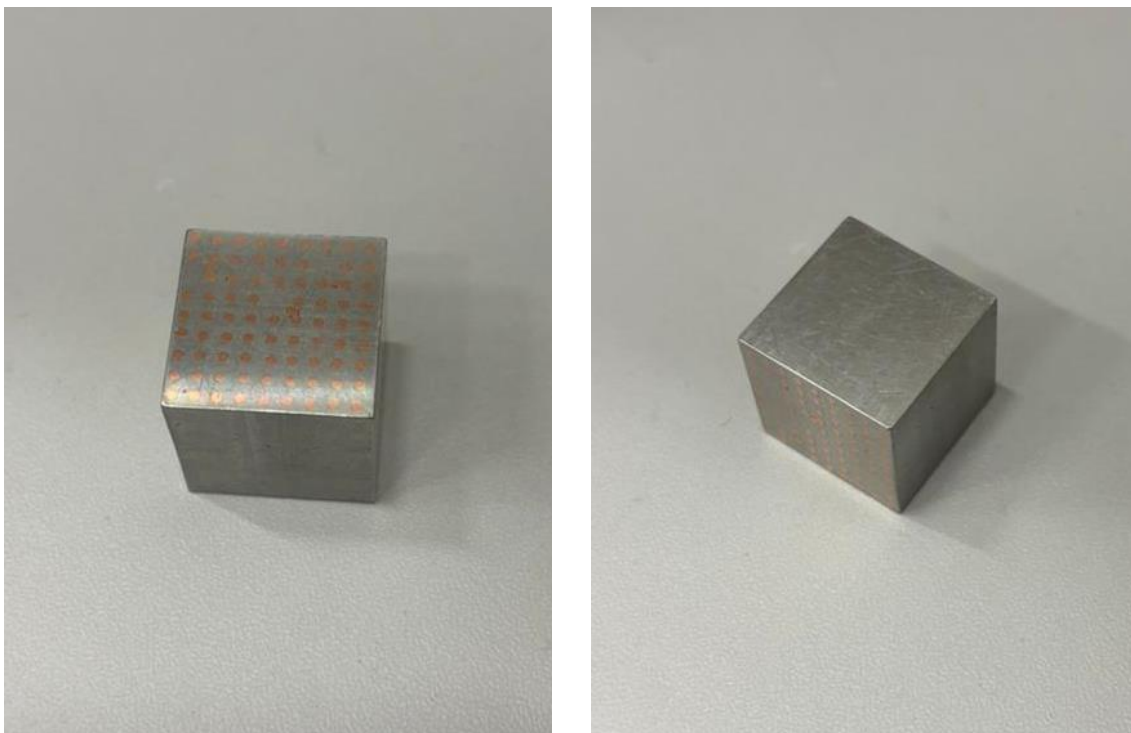


Рис. 4.12. Модельный биметаллический образец ПОС-61 + Cu с однонаправленным медным наполнителем

Таблица 4.1 - Теплопроводность модельного биметаллического образца ПОС-61 + Cu

Величина	Значение, Вт/(м·К)	Комментарий
$\lambda_{\parallel}$	130,32	Направление вдоль медной проволоки
$\lambda_{\perp}$	80,97	Направление поперёк медной проволоки
$\lambda_{\text{ПОС-61}}$	около 45	Справочное значение матрицы в рассматриваемом диапазоне
λ_{Cu}	400	Ориентир для медного наполнителя

Отношение направленных коэффициентов теплопроводности для модельного биметалла равно $130,32/80,97 \approx 1,61$. Таким образом, однонаправленный медный наполнитель повышает теплопроводность как вдоль, так и поперёк армирования относительно матрицы, но в направлении высокотеплопроводящей фазы эффект выражен значительно сильнее. Это подтверждает, что макроскопическая организация второй фазы способна формировать эффективную анизотропию даже тогда, когда каждый компонент сам по себе может рассматриваться как изотропный материал.

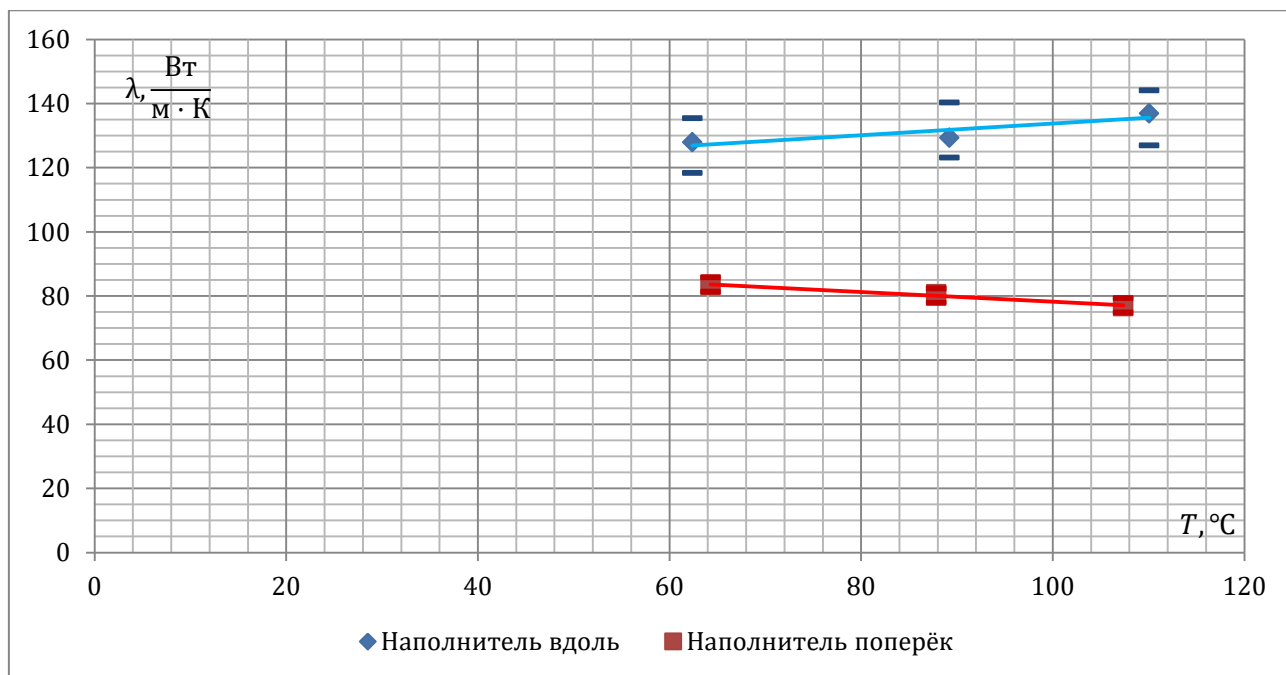


Рис. 4.13. Результаты измерения теплопроводности модельного биметаллического образца ПОС-61 + Си.

Данный образец следует рассматривать как физический прототип направленного теплопроводящего наполнителя, а не как прямой технологический аналог целевой структуры биметаллического композита с жаропрочной матрицей и теплопроводящем наполнителем. Тем не менее, он подтверждает принципиальный эффект: геометрически связная фаза с высокой теплопроводностью формирует направленные каналы теплопереноса, которые должны учитываться либо через явную геометрию включений, либо через эффективный ортотропный тензор теплопроводности.

4.8. Сводная оценка экспериментально выявленной анизотропии

Экспериментальные данные выделяют два механизма формирования направленной теплопроводности. Первый связан с технологически обусловленной микроструктурой аддитивного металла: ориентацией слоёв, направленным ростом зёрен, распределением дефектов и границами сплавления. Второй связан с геометрической организацией высокотеплопроводящей фазы, которая образует связные каналы теплового потока. В первом случае модель требует идентифицированного тензора

теплопроводности материала; во втором — явного описания геометрии наполнителя либо эффективного ортотропного представления.

Табл. 4.9. Сводная оценка экспериментально выявленной анизотропии теплопроводности.

Материал / структура	Источник анизотропии	Основной результат	Интерпретация для модели
CL 20ES, СЛС	Ориентация слоёв сплавления	26,68 и 19,78 Вт/(м·К)	Требуется учёт направленности свойств
Co-Cr-Mo, СЛС	Ориентация слоёв относительно теплового потока	Анизотропия около 18 %	Тензорная теплопроводность оправдана
ЭИ698, СЛС	Ориентация слоёв относительно теплового потока	Анизотропия около 2 %	Допустимо скалярное приближение при отсутствии иных факторов
ПОС-61 + Cu	Однонаправленный медный наполнитель	130,32 и 80,97 Вт/(м·К)	Нужна явная геометрия или эффективный тензор

Полученные результаты обосновывают наличие в программном Экспериментальные данные подтверждают физическую необходимость тех режимов модели, которые были ранее проверены аналитически и должны быть далее сопоставлены с Ansys. Результаты по CL 20ES и Co-Cr-Mo обосновывают наличие анизотропного режима, результаты по ЭИ698 показывают необходимость сохранения изотропного режима, а результаты по ПОС-61 + Cu подтверждают значимость явной геометрии или эффективной ортотропной модели направленного наполнителя.

Для материалов с малым различием направленных коэффициентов теплопроводности применение скалярного коэффициента может быть оправдано, если ожидаемая ошибка ниже погрешности измерения и не влияет на инженерный вывод. Для материалов с выраженной ориентационной зависимостью скалярное приближение может приводить к неверным градиентам температуры, неверному распределению тепловых потоков и, как следствие, к ошибкам в связанных термоупругих расчётах.

Для биметаллических структур дополнительным фактором является межматериальный переход. В экспериментальной установке контактное термическое сопротивление выступает метрологической поправкой, а в биметаллическом материале межфазная зона становится физическим элементом структуры. В численной модели она может представляться как идеальный контакт, как поверхностное тепловое сопротивление или как явная интерфейсная фаза конечной толщины. Выбор между этими уровнями представления должен определяться требуемой точностью, доступностью данных о переходной зоне и характерным размером геометрии.

Заключение к Главе 4

В Главе 4 сформирована и реализована трехуровневая программа подтверждения физической достоверности и вычислительной состоятельности разработанной модели. Объединение аналитической верификации, интеграционного контроля вычислительного процесса и натурных экспериментов позволяет всесторонне оценить как корректность математических операторов, так и адекватность описания реальных физических механизмов направленного теплопереноса в аддитивных биметаллических структурах.

Результаты аналитической верификации, выполненные на девяти канонических задачах, свидетельствуют о корректности реализации линейного и нелинейного тепловых операторов, граничных условий Дирихле, Неймана и Робина, а также тензорной анизотропии и слабосвязанной термоупругой постановки. Существенным методологическим результатом, полученным в ходе верификационных исследований, является обоснование положения о том, что одномерные и слоистые аналитические зависимости не могут рассматриваться в качестве глобальной нижней границы для общей трёхмерной краевой задачи. Прямое сопоставление с редуцированными ориентирами может обусловить некорректное отклонение физически допустимых трёхмерных путей теплопереноса, что требует применения исключительно полных балансовых соотношений и строгих аналитических эталонов при оценке достоверности численных решений.

Интеграционный расчет лопаточного элемента доказал полную согласованность стадий вычислительного процесса: от построения сетки до геометрической материализации. Обязательная стадия повторной тепловой проверки на фоновой сеточной модели, после назначения материалов, позволила отделить свойства релаксированного поля рационального расположения теплопроводящего наполнителя от характеристик конечной биметаллической конфигурации, исключив тем самым подмену математической абстракции реальной инженерной геометрией.

Экспериментальный блок, базирующийся на стационарном методе продольного теплового потока с тщательной калибровкой контактных сопротивлений и боковых потерь, выявил два независимых механизма формирования направленной теплопроводности:

- Первый механизм обусловлен технологической микроструктурой аддитивного металла: испытания сталей CL 20ES и Co-Cr-Mo подтвердили выраженную анизотропию (до 25,38 %), вызванную ориентацией слоев и направленным ростом зерен.
- Второй механизм диктуется макрогеометрией связной высокотеплопроводной фазы, что однозначно доказано на модельном композите ПОС-61 + Cu, где геометрически непрерывные медные каналы обеспечили анизотропию на уровне 60,95 % даже при использовании изотропных компонентов.

При этом для сплава ЭИ698 различие направлений не превысило 2,64 %, что обосновывает необходимость гибкого выбора между скалярным, тензорным и явно геометрическим описанием в зависимости от материалоспецифических особенностей.

Совокупность полученных аналитических, интеграционных и экспериментальных данных гарантирует физическую корректность разработанного вычислительного контура. Подтверждено, что упрощенное двухматериальное приближение с идеальной границей неприменимо для задач теплового проектирования аддитивных биметаллов. Межматериальный переход требует явного выделения интерфейсной фазы конечной толщины, а анизотропия должна учитываться либо через идентифицированный тензор теплопроводности, либо через явное описание геометрии наполнителя. Разработанная и верифицированная модель полностью готова к решению прикладных задач рационального выбора структуры и теплового проектирования ответственных биметаллических конструкций с направленными теплофизическими свойствами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан новый метод многопараметрического моделирования и рационального выбора геометрии биметаллических структур с направленной теплопроводностью для обеспечения эффективного теплоотвода аддитивно изготавливаемых теплонагруженных элементов, в котором влияние микроструктурной анизотропии и межматериальных переходных зон учитывается через тензорную параметризацию материала и эффективные теплофизические характеристики, а поиск оптимальной формы тепловодов реализуется посредством разработанного программно-методического комплекса с последующей термопрочностной верификацией.

Основные новые результаты, полученные в диссертационной работе, состоят в следующем:

1. Выполнен анализ современного состояния теплового проектирования аддитивно изготовленных биметаллических структур. Установлено, что для корректного расчёта таких объектов необходимо учитывать не только свойства объёмных материалов, но и анизотропию, неоднородность, контактное тепловое сопротивление и межматериальный переход конечной толщины. Систематизированы физические и технологические факторы, влияющие на теплоперенос: текстура, пористость, направленность микроструктуры, межслойные границы, состав переходной зоны и качество сплавления материалов.

2. Сформулирована физико-математическая постановка стационарной теплопроводности для биметаллической структуры в изотропной и анизотропной формах с граничными условиями Дирихле, Неймана и Робина. Показана необходимость тензорной формы теплопроводности для материалов и структур с выраженной направленностью теплопереноса.

3. Разработано расчётное представление биметаллической структуры как системы «несущая матрица – теплопроводящий наполнитель – эффективная межматериальная область». Такое представление позволяет учитывать

переходную зону как элемент тепловой модели, а не только как геометрическую линию раздела материалов.

4. Разработана методика рационального проектирования биметаллического композита с теплопроводящим наполнителем, включающая параметризацию материала, регуляризацию проектного поля, интерполяцию теплофизических свойств, построение поля плотности теплового потока, вычисление чувствительностей, температурные целевые функционалы, критерии интегрального теплоотвода и эффективного теплового сопротивления, ограничения по объёму, постобработку и переход от плотностного поля к материализованной биметаллической геометрии.

5. Создан модульный программный комплекс, связывающий прямой конечно-элементный расчёт, рациональное расположение теплопроводящего материала, постобработку, построение поля наполнителя, геометризацию, назначение материалов, повторную тепловую, термопрочностную и технологическую проверку и формирование отчётных данных.

6. Проведена аналитическая и численная верификация вычислительной модели. Подтверждена корректность реализации линейной и нелинейной теплопроводности, объёмных источников, условий Дирихле, Неймана и Робина, идеального интерфейса, тензорной анизотропии, свободного теплового расширения и многоматериальной термоупругости.

7. Проведены экспериментальные измерения направленной теплопроводности аддитивно изготовленных образцов и модельного биметаллического композита. Показано, что для CL 20ES, CoCrMo и ПОС-61 + Cu ориентационная зависимость теплопроводности является значимой, тогда как для ЭИ698 в исследованном диапазоне температур выраженная анизотропия теплопроводности не выявлена.

8. Определена область применимости разработанного подхода: он предназначен для расчётного проектирования теплонагруженных биметаллических структур, в которых направленность теплопереноса формируется анизотропией материала, геометрией высокотеплопроводящей

фазы или их сочетанием. Ограничения подхода связаны с необходимостью независимой идентификации параметров межматериальной области, проверкой технологической реализуемости и дополнительной валидацией для конкретных пар материалов и режимов аддитивного изготовления.

Перспективы дальнейшей разработки темы

Разработанный подход переводит создание направленных аддитивных структур из разряда дорогостоящего эмпирического подбора в плоскость точного инженерного расчета. Полученные результаты открывают путь к созданию принципиально новых радиаторов, теплоотводов и элементов систем терморегулирования аэрокосмической и микроэлектронной техники, где требуется не просто отвод тепла, а его целенаправленное транспортирование по заданным траекториям внутри конструкционного объема детали. Системный подход, реализованный в рамках работы, формирует надежный теоретический фундамент для проектирования конструкций нового поколения. Это, в свою очередь, создает предпосылки для глубокой интеграции отечественного производственного сектора в передовые международные инновационные и производственные цепочки.

Список литературы

1. Киселев В. П. и др. Особенности теплофизических свойств функционально-градиентных биметаллических композиций, сформированных аддитивными технологиями // Цветные металлы. 2026. № 2. С. 26–37.
2. Киселев В. П. и др. Исследование теплопроводности оксидного покрытия, сформированного на материале подложки AlSiMg // Тепловые процессы в технике. 2025. Т. 17, № 7. С. 313–320.
3. Киселев В. П. и др. Результаты расчетно-теоретического исследования влияния основных факторов на теплопроводность трехслойной сотовой панели // Тепловые процессы в технике. 2025. Т. 17, № 4. С. 161–170.
4. Киселёв В. П. и др. Анизотропия теплопроводности аддитивных металлов, полученных методом селективного лазерного сплавления на примере нержавеющей стали CL 20ES // Тепловые процессы в технике. 2021. Т. 13, № 7. С. 329–335.
5. Киселёв В. П., Ежов А. Д. Математическое моделирование и постановка задачи тепловой топологической оптимизации аддитивных биметаллических структур с учетом анизотропии и межфазного перехода // Тепловые процессы в технике. 2026. Т. 18, № 4. С. 155–165.
6. Kiselev V. P., Ezhov A. D., Kotovich I. V. Influence of additive manufacturing technology of topologically optimized products from photopolymer resins on the anisotropy of their mechanical properties // PNRPU Mechanics Bulletin. 2024. № 2. С. 16–23.
7. Kiselev V. P. и др. Prediction of thermal properties of solid contact // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2024. Т. 20, № 4. С. 601–617.
8. Киселёв В. П. и др. Контактный теплообмен в соединении металла со сформированным газодинамическим низкотемпературным методом барьерным покрытием композитного материала // Сборник материалов Minsk International Heat and Mass Transfer Forum MIF–XVII. Минск, 2024. С. 532–534.

9. Киселев В. П. и др. Металло-композитный переход в замковых соединениях высоконагруженных энергоустановок, формируемый с использованием низкотемпературного послойного выращивания гетерогенным потоком // Сборник тезисов докладов 22-й Международной конференции «Авиация и космонавтика». Москва, 2023. С. 106–107.
10. Киселев В. П., Талалаева П. И., Ежов А. Д. Концепция металло-композитного перехода для замковых соединений высоконагруженных энергоустановок, сформированного на базе низкотемпературного послойного выращивания гетерогенным потоком // Сборник аннотаций конкурсных работ XV Всероссийского межотраслевого молодёжного конкурса научно-технических работ и проектов «Молодёжь и будущее авиации и космонавтики». Москва, 2023. С. 62.
11. Киселёв В. П., Крылова Ю. А., Ежов А. Д. Моделирование термо-механического взаимодействия поверхности тепловой трубы и изоляционного материала спускаемого аппарата // Сборник тезисов докладов 20-й Международной конференции «Авиация и космонавтика – 2021». Москва, 2021. С. 118–120.
12. Киселёв В. П. и др. Управление направлением теплового потока в изделиях, изготовленных по аддитивным технологиям, за счёт использования анизотропии теплофизических свойств материала. Минск, Беларусь, 2024.
13. Киселёв В. П. и др. Анализ применимости программных пакетов топологической оптимизации при проектировании изделий сложных форм, изготовленных с использованием аддитивных технологий // Сборник тезисов докладов международного симпозиума «Перспективные материалы и технологии». Минск, 2023. С. 269–270.
14. Киселёв В. П. и др. Анализ возможности применения адаптивных сотовых конструкций в аэродинамических элементах беспилотных летательных аппаратов // Сборник тезисов докладов 22-й Международной конференции «Авиация и космонавтика». Москва, 2023. С. 30–31.

15. Киселев В. П., Ежов А. Д., Быков Л. В. Управление температурным режимом конструкции на основе проектирования анизотропии тепловых свойств изделий, изготовленных с применением аддитивных технологий // Сборник тезисов XIII научно-технической конференции молодых инженеров «Энергия молодости». Москва, 2025. С. 85–89.
16. Киселев В. П., Ежов А. Д., Быков Л. В. Нейросетевая модель контактного теплообмена для решения задач обеспечения теплового состояния сборных узлов энергетических установок // Сборник тезисов XIII научно-технической конференции молодых инженеров «Энергия молодости». Москва, 2025. С. 43–49.
17. Киселёв В. П. и др. Управление направлением теплового потока в изделиях, изготовленных по аддитивным технологиям, за счет использования анизотропии теплофизических свойств материала // Сборник материалов Minsk International Heat and Mass Transfer Forum MIF–XVII. Минск, 2024. С. 626–628.
18. Киселёв В. П. и др. Решение задачи контактного теплообмена в сборных узлах энергетических установок на основе цифрового двойника поверхностей // Сборник материалов Minsk International Heat and Mass Transfer Forum MIF–XVII. Минск, 2024. С. 929–932.
19. Киселев В. П. и др. Теоретическое и экспериментальное обоснование влияния технологии аддитивного производства на теплофизические свойства деталей из алюминиевого сплава AlSi10Mg // Сборник тезисов докладов 22-й Международной конференции «Авиация и космонавтика». Москва, 2023. С. 292–293.
20. Киселёв В. П. и др. Оценка влияния технологии аддитивного производства на теплофизические свойства изделия // Сборник тезисов докладов международного симпозиума «Перспективные материалы и технологии». Минск, 2023. С. 156–157.
21. Киселёв В. П., Ежов А. Д., Быков Л. В. Исследование влияния ориентации слоев аддитивных металлов, полученных методом селективного лазерного

- сплавания, на величину коэффициента теплопроводности // Сборник тезисов докладов 20-й Международной конференции «Авиация и космонавтика – 2021». Москва, 2021. С. 110–112.
22. Киселёв В. П. Использование анизотропии теплофизических свойств материалов созданных с применением аддитивных технологий при разработке теплонагруженных узлов и деталей энергетических установок. Москва, Россия: Издательство «Перо», 2022. С. 121–122.
23. Киселёв В. П. Программа для моделирования структуры биметаллического композита с управляемым распределением высокотеплопроводного материала: пат. 2026661046. 2026.
24. Bandyopadhyay A., Zhang Y., Onuik B. Additive manufacturing of bimetallic structures // *Virtual and Physical Prototyping*. 2022. Т. 17, № 2. С. 256–294.
25. Kok Y. и др. Anisotropy and heterogeneity of microstructure and mechanical properties in metal additive manufacturing: A critical review // *Materials and Design*. 2018. № 139. С. 565–586.
26. Groden C. и др. Inconel 718-CoCrMo bimetallic structures through directed energy deposition-based additive manufacturing // *MSAM*. 2022. Т. 1, № 3. С. 18.
27. Blakey-Milner B. и др. Metal additive manufacturing in aerospace: A review // *Materials & Design*. 2021. Т. 209.
28. Zhang X., Li L., Liou F. Additive manufacturing of stainless steel – Copper functionally graded materials via Inconel 718 interlayer // *Journal of Materials Research and Technology*. 2021. Т. 15. С. 2045–2058.
29. Liu J. и др. Effect of heat treatment on microstructure and properties of additively manufactured aluminum bronze-steel bimetallic structures // *Materials Characterization*. 2024. Т. 207. С. 113462.
30. Хаба Этьен, Тимирязев В. Использование аддитивных технологий для изготовления деталей машин // *Горный информационно-аналитический бюллетень*. 2018. № 11. С. 136–144.

31. Токарев С. М. и др. Методы аддитивного производства заготовок из магниевых сплавов (обзор) // Труды ВИАМ. 2021. № 6 (100).
32. Григорьянц А. и др. Формирование биметаллических структур методом коаксиального лазерного плавления // Научно-технические технологии в машиностроении. 2019. Т. 2019, № 3. С. 32–38.
33. Зыкова А. П. и др. Электронно-лучевое аддитивное производство композиционного сплава из нержавеющей стали и алюминиевой бронзы: микроструктура и механические характеристики // Izv. vysš. učebn. zaved., Čern. metall. 2023. Т. 66, № 2. С. 197–205.
34. Осипович К. С. и др. Условия изготовления биметаллических образцов на основе железных и медных сплавов методом проволочного электронно-лучевого аддитивного производства // Metal Working and Material Science. 2025. Т. 27, № 2. С. 142–158.
35. Семин В. О. и др. Коррозионные характеристики композитов БрАМц9-2/06Х18Н9Т, полученных двухпроволочным электронно-лучевым аддитивным производством // Metal Working and Material Science. 2024. Т. 26, № 3. С. 163–178.
36. Gradl P. и др. Advancement of extreme environment additively manufactured alloys for next generation space propulsion applications // Acta Astronautica. 2023. Т. 211. С. 483–497.
37. Рогалев А., Шевченко М. Применение аддитивных лазерных технологий при проектировании охлаждаемых лопаток газовых турбин // Вестник ИГЭУ. 2016. № 3.
38. Магеррамова Л. А. и др. Перспективы применения аддитивных технологий для создания деталей и узлов авиационных газотурбинных двигателей и прямоточных воздушно-реактивных двигателей // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2019. Т. 18, № 3.
39. Кривоногов В. А. Методика расчёта толщины камеры сгорания жидкостного реактивного двигателя, выполненного с применением

- инновационных технологий и материалов // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2016. Т. 15, № 4. С. 81–90.
40. Мосолов С. и др. Результаты испытаний модельной кислородно-метановой камеры сгорания жидкостного ракетного двигателя, созданной с использованием методов аддитивного производства // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2021. № 3. С. 60–79.
41. Волосова М., Окунькова А. Пути оптимизации процесса селективного лазерного плавления при помощи выбора стратегии обработки лазерным лучом // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. Механика и машиностроение. 2012. Т. 14, № 4 (2). С. 587–591.
42. Onuike B., Heer B., Bandyopadhyay A. Additive manufacturing of Inconel 718—Copper alloy bimetallic structure using laser engineered net shaping (LENSTM) // Additive Manufacturing. 2018. Т. 21. С. 133–140.
43. Gradl P. R. и др. Advancing GRCoP-based Bimetallic Additive Manufacturing to Optimize Component Design and Applications for Liquid Rocket Engines // AIAA Propulsion and Energy 2021 Forum. VIRTUAL EVENT: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2021.
44. Wang Z. и др. Thermal and Microstructural Characterization of GRCoP-84/In718 Bi-metallic Structures Additively Manufactured by Directed Energy Deposition // JOM. 2024. Т. 76, № 2. С. 919–929.
45. Strumza E., Yeheskel O., Hayun S. The effect of texture on the anisotropy of thermophysical properties of additively manufactured AlSi10Mg // Additive Manufacturing. 2019. Т. 29. С. 100762.
46. Shanmugasundaram S. A. и др. Mechanical Anisotropy and Surface Roughness in Additively Manufactured Parts Fabricated by Stereolithography (SLA) Using Statistical Analysis // Materials. 2020. Т. 13, № 11.
47. Makarenko K. I., Dubinin O. N., Shishkovsky I. V. Linear Thermal Expansion and Specific Heat Capacity of Cu-Fe System Laser-Deposited Materials // Metals. 2023. Т. 13, № 3. С. 451.

48. Griffis J. C. и др. Multi-material laser powder bed fusion: effects of build orientation on defects, material structure and mechanical properties // npj Adv. Manuf. 2025. Т. 2, № 1. С. 5.
49. Jarfors A. E. W. и др. On the nature of the anisotropy of Maraging steel (1.2709) in additive manufacturing through powder bed laser-based fusion processing // Materials & Design. 2021. Т. 204. С. 109608.
50. Zhou Y. и др. Effect of crystallographic textures on thermal anisotropy of selective laser melted Cu-2.4Ni-0.7Si alloy // Journal of Alloys and Compounds. 2018. Т. 743. С. 258–261.
51. Сухов Д. И. и др. Влияние параметров селективного лазерного сплавления на образование пористости в синтезированном материале коррозионностойкой стали // Труды ВИАМ. 2017. № 8. С. 34–44.
52. Wu Z. и др. A review on experimentally observed mechanical and microstructural characteristics of interfaces in multi-material laser powder bed fusion // Front. Mech. Eng. 2023. Т. 9. С. 1087021.
53. Chen K. и др. Selective laser melting 316L/CuSn10 multi-materials: Processing optimization, interfacial characterization and mechanical property // Journal of Materials Processing Technology. 2020. Т. 283. С. 116701.
54. Sun Z. и др. Selective laser melting of stainless steel 316L with low porosity and high build rates // Materials & Design. 2016. Т. 104. С. 197–204.
55. Squires L., Roberts E., Bandyopadhyay A. Radial bimetallic structures via wire arc directed energy deposition-based additive manufacturing // Nat Commun. 2023. Т. 14, № 1. С. 3544.
56. Pragana J. P. M. и др. Hybrid metal additive manufacturing: A state-of-the-art review // Advances in Industrial and Manufacturing Engineering. 2021. Т. 2. С. 100032.
57. Shah A. и др. A Review of the Recent Developments and Challenges in Wire Arc Additive Manufacturing (WAAM) Process // JMMP. 2023. Т. 7, № 3. С. 97.

58. Wu B. и др. The effects of forced interpass cooling on the material properties of wire arc additively manufactured Ti6Al4V alloy // *Journal of Materials Processing Technology*. 2018. Т. 258. С. 97–105.
59. Wu B. и др. Effects of heat accumulation on microstructure and mechanical properties of Ti6Al4V alloy deposited by wire arc additive manufacturing // *Additive Manufacturing*. 2018. Т. 23. С. 151–160.
60. Belhadj M. и др. Effect of Cold Metal Transfer-Based Wire Arc Additive Manufacturing parameters on geometry and machining allowance. In Review, 2022.
61. Li F. и др. Thermoelectric Cooling-Aided Bead Geometry Regulation in Wire and Arc-Based Additive Manufacturing of Thin-Walled Structures // *Applied Sciences*. 2018. Т. 8, № 2. С. 207.
62. Afrouzian A. и др. Additive manufacturing of Ti-Ni bimetallic structures // *Materials & Design*. 2022. Т. 215. С. 110461.
63. Hussain M. S., Mardi K. B., Mandal A. Fabrication of FGM structure with gradation of stainless steel and low carbon steel using twin wire arc additive manufacturing // *Weld World*. 2025. Т. 69, № 11. С. 3467–3481.
64. Ahsan Md. R. U. и др. Fabrication of bimetallic additively manufactured structure (BAMS) of low carbon steel and 316L austenitic stainless steel with wire + arc additive manufacturing // *RPJ*. 2019. Т. 26, № 3. С. 519–530.
65. Чумаевский А. В. и др. Формирование неоднородностей и дефектов в структуре композиционных материалов и функционально-градиентных биметаллических изделий, полученных методом проволоочной электронно-лучевой аддитивной технологии // *Вестник СибГИУ*. 2023. Т. 1, № 1. С. 66–75.
66. Lehmann T. и др. Concurrent geometry- and material-based process identification and optimization for robotic CMT-based wire arc additive manufacturing // *Materials & Design*. 2020. Т. 194. С. 108841.

67. Suryakumar S. и др. Weld bead modeling and process optimization in Hybrid Layered Manufacturing // Computer-Aided Design. 2011. Т. 43, № 4. С. 331–344.
68. Ding D. и др. A multi-bead overlapping model for robotic wire and arc additive manufacturing (WAAM) // Robotics and Computer-Integrated Manufacturing. 2015. Т. 31. С. 101–110.
69. Bera T., Mohanty S. A Review on Residual Stress in Metal Additive Manufacturing // 3D Printing and Additive Manufacturing. 2024. Т. 11, № 4. С. 1462–1470.
70. Li R. и др. Simulation of residual stress and distortion evolution in dual-robot collaborative wire-arc additive manufactured Al-Cu alloys // Virtual and Physical Prototyping. 2024. Т. 19, № 1. С. e2409390.
71. ГОСТ Р 59930-2021 ИСО/АСТМ 52904:2019 Аддитивные технологии. Процесс синтеза изделий из металлических порошков на подложке для критических применений. Общие положения.
72. Никитин П. В. Гетерогенные потоки в инновационных технологиях. М.: Янус-К, 2010. 244 с.
73. Vaz R. и др. A Review of Advances in Cold Spray Additive Manufacturing // Coatings. 2023. Т. 13, № 2. С. 267.
74. Wu H. и др. Bonding behavior of Bi-metal-deposits produced by hybrid cold spray additive manufacturing // Journal of Materials Processing Technology. 2022. Т. 299. С. 117375.
75. Mazeeva A. и др. Multi-Metal Additive Manufacturing by Extrusion-Based 3D Printing for Structural Applications: A Review // Metals. 2024. Т. 14, № 11. С. 1296.
76. Ferro P. и др. Creating IN718-High Carbon Steel bi-metallic parts by Fused Deposition Modeling and Sintering // Procedia Structural Integrity. 2023. Т. 47. С. 535–544.

77. Ferro P. и др. High carbon steel/Inconel 718 bimetallic parts produced via Fused Filament Fabrication and Sintering // *Frattura ed Integrità Strutturale*. 2023. Т. 17, № 65. С. 246–256.
78. Laleh M. и др. Heat treatment for metal additive manufacturing // *Progress in Materials Science*. 2023. Т. 133. С. 101051.
79. Zhang L. и др. Additive manufacturing of Inconel 718/CuCrZr multi-metallic materials fabricated by laser powder bed fusion // *Additive Manufacturing*. 2024. Т. 92. С. 104377.
80. Ghanavati R. и др. Residual stresses and distortion in additively-manufactured SS316L-IN718 multi-material by laser-directed energy deposition: A validated numerical-statistical approach // *Journal of Manufacturing Processes*. 2023. Т. 108. С. 292–309.
81. С А. R. и др. A review on Additive Production of Functionally Graded Materials Based on Titanium // *Proceedings of the International Conference on Advancements in Materials, Design and Manufacturing for Sustainable Development, ICAMDMS 2024, 23-24 February 2024, Coimbatore, Tamil Nadu, India. Coimbatore, India: EAI, 2024.*
82. Chen N. и др. Microstructural characteristics and crack formation in additively manufactured bimetal material of 316L stainless steel and Inconel 625 // *Additive Manufacturing*. 2020. Т. 32. С. 101037.
83. Kim E. S. и др. Local composition detouring for defect-free compositionally graded materials in additive manufacturing // *Materials Research Letters*. 2023. Т. 11, № 7. С. 586–594.
84. Mousapour M. и др. Feasibility study of producing multi-metal parts by Fused Filament Fabrication (FFF) technique // *Journal of Manufacturing Processes*. 2021. Т. 67. С. 438–446.
85. Kim T., Kim S. Hot-end co-extrusion of multiple thermoplastic filaments for unblended composite additive manufacturing // *Virtual and Physical Prototyping*. 2025. Т. 20, № 1. С. e2526797.

86. N. Samad S. и др. Multi-material additive manufacturing of metals: A review of structures and mechanical characteristics // ESAM. 2025. Т. 1, № 2. С. 025180010.
87. MSFC-STD-3716 Standard for additively manufactured spaceflight hardware by laser powder bed fusion in metals.
88. Russell R. NASA's Efforts for the Development of Standards for Additive Manufactured Components // Structural Integrity of Additive Manufactured Parts. ASTM International 100 Barr Harbor Drive, PO Box C700, West Conshohocken, PA 19428-2959, 2020. С. 573–581.
89. ISO/ASTM TR 52905:2023 Аддитивное производство металлов. Неразрушающий контроль и оценка. Обнаружения дефектов в деталях.
90. Зленко М., Попович А., Мутылина И. Аддитивные технологии в машиностроении. Санкт-Петербург: СПбГУ, 2013.
91. Назаркин М. Р., Петрушин В. Н., Рогалев М. А. Структурно-фазовые характеристики сплава ЖС32-ВИ, полученного методами направленной кристаллизации, гранульной металлургии и селективного лазерного сплавления // Труды ВИАМ. 2017. № 2 (50).
92. Караваев А., Пучков Ю. Исследование структуры и свойств сплава AlSi10Mg, полученного методом селективного лазерного сплавления // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2020. № 5. С. 71–85.
93. Wang T. и др. Grain morphology evolution behavior of titanium alloy components during laser melting deposition additive manufacturing // Journal of Alloys and Compounds. 2015. № 632. С. 505–513.
94. Kim K. и др. Anisotropic Thermal Conductivity of Nickel-Based Superalloy CM247LC Fabricated via Selective Laser Melting // Applied Sciences. 2021. № 4843.
95. Оспенникова О. Г. и др. Особенности структуры сплава Ti–6Al–4V, полученного методом селективного лазерного сплавления // Труды ВИАМ. 2019. № 10. С. 14–24.

96. Попович А. А. и др. Анизотропия механических свойств изделий, изготовленных методом селективного лазерного плавления порошковых материалов // Изв. вузов. Порошк. металлургия и функц. покрытия. 2016. № 3. С. 4–11.
97. Sarap M. и др. Electrical and Thermal Anisotropy in Additively Manufactured AlSi10Mg and Fe-Si Samples // Machines. 2024. Т. 13, № 1. С. 1.
98. Tomanek L. B. и др. Influence of porosity on the thermal, electrical, and mechanical performance of selective laser melted stainless steel // Additive Manufacturing. 2021. Т. 39. С. 101886.
99. Kan W. H. и др. A critical review on the effects of process-induced porosity on the mechanical properties of alloys fabricated by laser powder bed fusion // J Mater Sci. 2022. Т. 57, № 21. С. 9818–9865.
100. Чуканов А. Н., Яковенко А. А., Цой Е. В. Морфология технологических несплошностей в структуре изделий аддитивного производства как причина анизотропии их физико-механических свойств // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24, № 5. С. 343–356.
101. Мельникова М. А., Холопов А. А., Трушников А. Н. Особенности формирования деталей из биметаллов методом прямого лазерного выращивания // Аддитивные технологии в цифровом производстве. Металлы, сплавы, композиты. 2019. № 1. С. 45–46.
102. Liu S. Y. и др. The effect of energy density on texture and mechanical anisotropy in selective laser melted Inconel 718 // Materials & Design. 2020. Т. 191. С. 108642.
103. Sentyurina Zh. A. и др. The effect of hot isostatic pressing and heat treatment on the microstructure and properties of EP741NP nickel alloy manufactured by laser powder bed fusion // Additive Manufacturing. 2023. № 37.
104. Zhou B. и др. Microstructure and Anisotropy of the Mechanical Properties of 316L Stainless Steel Fabricated by Selective Laser Melting // Metals. 2021. Т. 11, № 5. С. 775.

105. Izaguirre I. и др. Wettability and microstructural evolution of copper filler in W and EUROFER brazed joints // *Int J Adv Manuf Technol*. 2024. Т. 131, № 12. С. 5905–5921.
106. Lin Q., Ma Z., Sui R. Wetting and pressureless infiltration behavior of Cu/316L system at 1100°C // *Surfaces and Interfaces*. 2023. Т. 42. С. 103462.
107. Chen J. и др. Interfacial microstructure and mechanical properties of 316L /CuSn10 multi-material bimetallic structure fabricated by selective laser melting // *Materials Science and Engineering: A*. 2019. Т. 752. С. 75–85.
108. Moharana B. R. и др. An experimental study on joining of AISI 304 SS to Cu by Nd-YAG laser welding process // *Materials Today: Proceedings*. 2020. Т. 33. С. 5262–5268.
109. Sadeghian A., Iqbal N. A review on dissimilar laser welding of steel-copper, steel-aluminum, aluminum-copper, and steel-nickel for electric vehicle battery manufacturing // *Optics & Laser Technology*. 2022. Т. 146. С. 107595.
110. Groden C. и др. Inconel 718-W7Ni3Fe bimetallic structures using directed energy deposition-based additive manufacturing // *Virtual and Physical Prototyping*. 2022. Т. 17, № 2. С. 170–180.
111. Amirkhanlou S., Ji S. A review on high stiffness aluminum-based composites and bimetals // *Critical Reviews in Solid State and Materials Sciences*. 2020. Т. 45, № 1. С. 1–21.
112. Manh Hung Le, Van Thong Vu, Truong An Dao. The Influence of Process Parameters on the Deformability of the Copper-Carbon Steel Bimetal Composite Fabricated by Hot Rolling // *International Journal of Latest Research in Engineering and Technology*. 2021. Т. 7, № 12. С. 1–8.
113. Onuikwe B., Bandyopadhyay A. Bond strength measurement for additively manufactured Inconel 718- GRCop84 copper alloy bimetallic joints // *Additive Manufacturing*. 2019. Т. 27. С. 576–585.
114. Mohd Yusuf S. и др. Microstructures and Hardening Mechanisms of a 316L Stainless Steel/Inconel 718 Interface Additively Manufactured by Multi-Material Selective Laser Melting // *Metals*. 2023. Т. 13, № 2. С. 400.

115. Mohd Yusuf S. и др. Interfacial characterisation of multi-material 316L stainless steel/Inconel 718 fabricated by laser powder bed fusion // *Materials Letters*. 2021. Т. 284. С. 128928.
116. Reed R. C. *The Superalloys: Fundamentals and Applications*. 1-е изд. Cambridge University Press, 2006.
117. Liu R. и др. Investigation of solidification behavior and associate microstructures of Co–Cr–W and Co–Cr–Mo alloy systems using DSC technique // *J Mater Sci*. 2010. Т. 45, № 22. С. 6225–6234.
118. Кузьмин Б. А., Самохоцкий А. И., Кузнецова Т. Н. *Металлургия, металловедение и конструкционные материалы*. Москва: Высшая школа, 1971. 352 с.
119. Зиновьев Е. В. *Теплофизические свойства металлов при высоких температурах*. Москва: Metallurgy, 1989.
120. *Copper and copper alloys* / под ред. Davis J. R., ASM International. Materials Park, Ohio: ASM International, 2001. 652 с.
121. Ellis D., Keller D., Nathal M. *Thermophysical Properties of GRCo-84*. 2000.
122. Shim J.-H. и др. Thermodynamic Assessment of the Cu-Sn System // *International Journal of Materials Research*. 1996. Т. 87, № 3. С. 205–212.
123. Hitzler L. и др. On the Anisotropic Mechanical Properties of Selective Laser-Melted Stainless Steel // *Materials*. 2017. Т. 10, № 10. С. 1136.
124. Ellis D. L. *GRCo-84: A High-Temperature Copper Alloy for High-Heat-Flux Applications: Technical Memorandum (NASA TM) NASA/TM—2005-213566*. Cleveland, Ohio: NASA Glenn Research Center, 2005. С. 29.
125. Agazhanov A. S., Samoshkin D. A., Kozlovskii Y. M. Thermophysical properties of Inconel 718 alloy // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2019. Т. 1382, № 1. С. 012175.
126. Mergulhão M. Investigation of mechanical, microstructural and thermal behavior of CoCrMo alloy manufactured by selective laser melting and casting techniques // *Anais do IX Congresso Brasileiro de Engenharia de Fabricação. ABCM*, 2017.

127. Yaggee F. L., Gilbert E. R., Styles J. W. Thermal expansivities, thermal conductivities, and densities of vanadium, titanium, chromium and some vanadium-base alloys // Journal of the Less Common Metals. 1969. Т. 19, № 1. С. 39–51.
128. DIN EN 1982:2017-11, Kupfer und Kupferlegierungen_- Blockmetalle und Gussstücke; Deutsche Fassung EN_1982:2017. DIN Media GmbH.
129. Pradhan S. K., De M. An X-ray determination of the thermal expansion of α -phase Cu–Al alloys at high temperature // J Appl Crystallogr. 1988. Т. 21, № 6. С. 980–981.
130. Новикова С. И. Тепловое расширение твердых тел. М.: Наука, 1974. 292 с.
131. Марочник сталей и сплавов. 2. изд., перераб. и доп. / под ред. Зубченко А. С. М.: Машиностроение, 2003. 782 с.
132. Довженко Н. Н., Константинов И. Л., Сидельников С. Б. Разработка режимов диффузионной сварки для получения биметаллической сталемедной заготовки металлургического назначения // tsm. 2017. Т. 7. С. 84–89.
133. Минько Д. В., Белявин К. Е., Шелег В. К. Теория и практика получения функционально-градиентных материалов импульсными электрофизическими методами. Минск: БНТУ, 2020. 451 с.
134. Арисова В. Н. и др. Трансформация структуры в зоне соединения биметалла медь М3 + сталь 30ХГСА после сварки взрывом и последующего отжига // IZVESTIA VGTU. 2021. № 4(251). С. 13–18.
135. Арисова В. Н. и др. Особенности формирования структуры в зоне соединения медно-стального композита медь М3 + сталь 30ХГСА после сварки взрывом и термического улучшения // IZVESTIA VGTU. 2021. № 6(253). С. 11–17.
136. Кузьмин Е. В. и др. Особенности формирования соединения композита сталь–медь при сварке взрывом с воздействием ультразвука // Izvestiya VSTU. 2024. № 11(294). С. 37–43.

137. Aboulkhai N. T., Maskery I., Tuck C. The microstructure and mechanical properties of selectively laser melted AlSi10Mg: The effect of a conventional T6-like heat treatment // *Materials Science & Engineering*. 2016. T. 667. C. 139–146.
138. Wei K., Wang Z., Zeng X. Influence of element vaporization on formability, composition, microstructure, and mechanical performance of the selective laser melted Mg–Zn–Zr components // *Materials Letters*. 2015. № 156. C. 187–190.
139. Popkova S. D. и др. The effect of the selective laser melting mode on second phases precipitation in 316L steel during subsequent heat treatment. Rostov-on-Don, 2020. T. 1029.
140. Meyer I. и др. Additive manufacturing of multi-material parts – Effect of heat treatment on thermal, electrical, and mechanical part properties of 316L/CuCrZr // *Materials & Design*. 2025. T. 252. C. 113783.
141. Simmons J. C. и др. Influence of processing and microstructure on the local and bulk thermal conductivity of selective laser melted 316L stainless steel // *Additive Manufacturing*. 2020. T. 32. C. 100996.
142. Mirzababaei S. и др. Remarkable enhancement in thermal conductivity of stainless-steel leveraging metal composite via laser powder bed fusion: 316L-Cu composite // *Additive Manufacturing*. 2023. T. 70. C. 103576.
143. Bahrami M., Yovanovich M. M., Culham J. R. Thermal contact resistance at low contact pressure: Effect of elastic deformation // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2005. T. 48, № 16. C. 3284–3293.
144. Dou R. и др. Effects of contact pressure, interface temperature, and surface roughness on thermal contact conductance between stainless steel surfaces under atmosphere condition // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2016. T. 94. C. 156–163.
145. Springer G. S., Tsai S. W. Thermal Conductivities of Unidirectional Materials // *Journal of Composite Materials*. 1967. T. 1, № 2. C. 166–173.
146. Radhakrishna M. C. и др. Thermal conductivity of metal-metal microlaminate composites // *Surface and Coatings Technology*. 1989. T. 39–40. C. 153–159.

147. Moustafa A. R. и др. Mesostructure and porosity effects on the thermal conductivity of additively manufactured interpenetrating phase composites // Additive Manufacturing. 2018. Т. 22. С. 223–229.
148. Park J. и др. Conceptual design of efficient heat conductors using multi-material topology optimization // Engineering Optimization. 2019. Т. 51, № 5. С. 796–814.
149. Nan C.-W. и др. Effective thermal conductivity of particulate composites with interfacial thermal resistance // Journal of Applied Physics. 1997. Т. 81, № 10. С. 6692–6699.
150. Lee S. и др. A micromechanics-based analytical solution for the effective thermal conductivity of composites with orthotropic matrices and interfacial thermal resistance // Sci Rep. 2018. Т. 8, № 1. С. 7266.
151. Hasselman D. P. H., Johnson L. F. Effective Thermal Conductivity of Composites with Interfacial Thermal Barrier Resistance // Journal of Composite Materials. 1987. Т. 21, № 6. С. 508–515.
152. Benveniste Y., Miloh T. The effective conductivity of composites with imperfect thermal contact at constituent interfaces // International Journal of Engineering Science. 1986. Т. 24, № 9. С. 1537–1552.
153. Swartz E. T., Pohl R. O. Thermal boundary resistance // Rev. Mod. Phys. 1989. Т. 61, № 3. С. 605–668.
154. Xu R., Xu L. An experimental investigation of thermal contact conductance of stainless steel at low temperatures // Cryogenics. 2005. Т. 45, № 10–11. С. 694–704.
155. Bi D. и др. Effects of thermal conductivity on the thermal contact resistance between non-conforming rough surfaces: An experimental and modeling study // Applied Thermal Engineering. 2020. Т. 171. С. 115037.
156. Tian W. и др. Interphase model for FE prediction of the effective thermal conductivity of the composites with imperfect interfaces // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2019. Т. 145. С. 118796.

- 157.Hashin Z. Thin interphase/imperfect interface in conduction // Journal of Applied Physics. 2001. T. 89, № 4. C. 2261–2267.
- 158.Lutz M. P., Zimmerman R. W. Effect of the interphase zone on the conductivity or diffusivity of a particulate composite using Maxwell's homogenization method // International Journal of Engineering Science. 2016. T. 98. C. 51–59.
- 159.Sladek J., Sladek V., Zhang Ch. Transient heat conduction analysis in functionally graded materials by the meshless local boundary integral equation method // Computational Materials Science. 2003. T. 28, № 3–4. C. 494–504.
- 160.Chen B., Tong L. Sensitivity analysis of heat conduction for functionally graded materials // Materials & Design. 2004. T. 25, № 8. C. 663–672.
- 161.Wang X. и др. Exact analytical solution for steady-state heat transfer in functionally graded sandwich slabs with convective-radiative boundary conditions // Composite Structures. 2018. T. 192. C. 379–386.
- 162.Alali B., Milton G. W. Effective conductivities of thin-interphase composites // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2013. T. 61, № 12. C. 2680–2691.
- 163.Hahn D. W. Heat conduction. 3rd ed. Hoboken, N.J: Wiley, 2012. 718 с.
- 164.Çengel Y. A. Heat Transfer: A Practical Approach. 2-e-nd edition изд. McGraw-Hill, 2002. 932 с.
- 165.Мазо А. Основы теории и методы расчета теплопередачи. Казань: Казан. ун-т, 2013.
- 166.Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация / под ред. Бахвалов Н. С.; пер. Квасов Б. И. Москва: Мир, 1986. 318 с.
- 167.Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов / пер. Степанова под ред Г. Ю. Москва: Мир, 1977. 349 с.
- 168.Bathe K.-J., Khoshgoftaar M. R. Finite element formulation and solution of nonlinear heat transfer // Nuclear Engineering and Design. 1979. T. 51, № 3. C. 389–401.
- 169.Nithiarasu P. Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Mass Transfer. Second edition. Chichester, West Sussex: Wiley, 2016. 1 с.

170. Hughes T. J. R. The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis. Mineola, NY: Dover Publications, 2000. 682 c.
171. Gu S. T., Monteiro E., He Q. C. Coordinate-free derivation and weak formulation of a general imperfect interface model for thermal conduction in composites // Composites Science and Technology. 2011. T. 71, № 9. C. 1209–1216.
172. Yilmaz O., Çelik H. Electrical and thermal properties of the interface at diffusion-bonded and soldered 304 stainless steel and copper bimetal // Journal of Materials Processing Technology. 2003. T. 141, № 1. C. 67–76.
173. Oberkampf W. L., Roy C. J. Verification and validation in scientific computing. Reprint. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2012. 767 c.
174. Pace D. K. Verification, Validation, and Accreditation of Simulation Models // Applied System Simulation / под ред. Obaidat M. S., Papadimitriou G. I. Boston, MA: Springer US, 2003. C. 487–506.
175. Bendsøe M. P. Optimal shape design as a material distribution problem // Structural Optimization. 1989. T. 1, № 4. C. 193–202.
176. Huang H.-C., Usmani A. S. Finite Element Analysis for Heat Transfer. London: Springer London, 1994.
177. Lazarov B. S., Sigmund O. Filters in topology optimization based on Helmholtz-type differential equations // Numerical Meth Engineering. 2011. T. 86, № 6. C. 765–781.
178. Guest J. K., Prévost J. H., Belytschko T. Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions // Numerical Meth Engineering. 2004. T. 61, № 2. C. 238–254.
179. Bendsøe M. P., Sigmund O. Topology Optimization. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2004.
180. Stolpe M., Svanberg K. An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization // Struct Multidisc Optim. 2001. T. 22, № 2. C. 116–124.

181. Lee G., Joo Y., Kim S. J. On the Objective Function for Topology Optimization of Heat Sinks // IEEE Trans. Compon., Packag. Manufact. Technol. 2021. T. 11, № 11. C. 1776–1782.
182. Cheng C.-H., Chen Y.-F. Topology optimization of heat conduction paths by a non-constrained volume-of-solid function method // International Journal of Thermal Sciences. 2014. T. 78. C. 16–25.
183. Wu C., Fang J., Li Q. Multi-material topology optimization for thermal buckling criteria // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2019. T. 346. C. 1136–1155.
184. Takezawa A. и др. Structural topology optimization with strength and heat conduction constraints // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2014. T. 276. C. 341–361.
185. Kennedy G. J., Hicken J. E. Improved constraint-aggregation methods // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2015. T. 289. C. 332–354.
186. Reza Eslami M. и др. Theory of Elasticity and Thermal Stresses: Explanations, Problems and Solutions. Dordrecht: Springer Netherlands, 2013. T. 197.
187. Wang B. и др. Stress-constrained thermo-elastic topology optimization of axisymmetric disks considering temperature-dependent material properties // Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2022. T. 29, № 28. C. 7459–7475.
188. Silva R. F. и др. Topology optimization of thermoelastic structures with single and functionally graded materials exploring energy and stress-based formulations // Struct Multidisc Optim. 2025. T. 68, № 1. C. 11.
189. Ван дер Варден Б. Л. Математическая статистика. Москва: Издательство иностранной литературы, 1960.