

Оптимальный вывод спутника на геостационарную орбиту с учётом неэффективных затрат топлива при включении и выключении двигателя

Пегачкова Е.А.

Аннотация

Рассматривается задача оптимального перехода искусственного спутника Земли с начальной круговой орбиты на геостационарную орбиту с наименьшими затратами топлива. Классическое решение задачи приводит к минимизирующей последовательности с бесконечным количеством включений двигателя на бесконечно малые промежутки времени. Такой импульсный режим практически не реализуем. Поэтому предлагается учитывать неэффективный расход топлива при включении и выключении реактивного двигателя, решая задачу в классе логико-динамических систем (ЛДС). В этом случае оптимальный процесс имеет конечное число включений двигателя и может быть реализован на практике. Приближенное решение находится на основе необходимых условий оптимальности ЛДС. Проводится сравнение применяемых необходимых условий с принципом максимума. Обсуждаются результаты расчетов, а также их практическая применимость.

Ключевые слова

геостационарная орбита, логико-динамические системы, необходимые условия оптимальности.

Введение

Рассматривается задача перехода искусственного спутника Земли на геостационарную орбиту (ГСО). ГСО искусственных спутников Земли (ИСЗ) обладают рядом преимуществ: исключаются перерывы связи и вещания, упрощается система наведения антенн земных станций на ИСЗ и др. Спутник, находящийся на ГСО, неподвижен относительно поверхности Земли, в результате, сориентированная на спутник и неподвижно закреплённая направленная антенна может сохранять постоянную связь с этим спутником длительное время. ГСО ИСЗ — это круговая, экваториальная (наклонение $i = 0^\circ$), синхронная орбита с периодом обращения 24 ч, с движением спутника в восточном направлении. Эту

орбиту еще в 1945 г. рассчитал и предложил использовать для спутников связи английский инженер Артур Кларк. В Англии и других странах геостационарную орбиту называют «Пояс Кларка».

Выведение космических аппаратов (КА) на ГСО обеспечивает, например, разгонный блок "Бриз-М" [1]. Применение разгонного блока "Бриз-М" в составе ракеты-носителя "Протон-М" позволяет увеличить массу полезной нагрузки, выводимой на ГСО. К преимуществам разгонного блока "Бриз-М" можно отнести: предельно малые габариты; возможность выведения тяжелых и крупногабаритных КА и возможность длительного функционирования в полете. Первый запуск комплекса "Протон-М"—"Бриз-М", разработанного в Государственном космическом научно-производственном центре им. М. В. Хруничева, состоялся 7 апреля 2001 года.

В работах [2,3] поставлена и решена задача об оптимальных плоских переходах между эллиптическими компланарными орбитами заданных размеров и форм в центральном ньютоновском поле. Если величину тяги считать ограниченной, то решение задачи аппроксимируется элементами последовательности, состоящими из двух систем активных участков, сначала двигатель включается с максимальной тягой в окрестности перицентров до тех пор, пока расстояние до апогея оскулирующей орбиты не станет равным радиусу конечной круговой орбиты; затем следует серия апоцентрических активных участков до выхода на конечную ГСО. Чем короче промежутки работы двигателя при каждом включении, тем больше таких включений необходимо сделать для вывода спутника на заданную высоту. Однако, общие затраты топлива при этом уменьшаются. В пределе получаем бесконечную последовательность импульсных включений (на бесконечно малое время) двигателя с максимальной тягой в окрестностях оптимальных положений на оскулирующих орбитах, при этом общее время стабилизации неограниченно возрастает. Разумеется, что это управление, практически нереализуемое, является абстрактным, идеальным решением, показывающим предельные возможности (экономии топлива) данной математической модели.

Задачу перехода спутника с одной орбиты на другую будем рассматривать в классе ЛДС [4-10], учитывая, что каждое включение реактивного двигателя от его запуска до достижения максимальной тяги представляет собой не мгновенный переходный процесс (как и выключение двигателя) и сопровождается расходом топлива. Добавляя в критерий качества соответствующие штрафные слагаемые за включение (и выключение) двигателя, получаем задачу, в которой определяется оптимальное (конечное) количество запусков двигателя, а процессы, требующие бесконечного числа включений, отбрасываются как неоптимальные. Такая постановка задачи ближе к практике, чем классический вариант.

Теория гибридных систем [11-17], к которым относятся и ЛДС, активно развивается в последние десятилетия. Для ЛДС получены необходимые [18,19] и достаточные [6,10,20] условия оптимальности в различных постановках. Применение этих условий для решения практических задач затруднительно, поскольку не разработаны соответствующие численные методы. Разные методики приближенного решения задачи оптимального управления ЛДС предлагались в [7,8,9,21]. Наряду с обычными проблемами, характерными для приближенного решения задач оптимального управления непрерывными системами [22,23], в классе ЛДС возникают дополнительные трудности. Они связаны в первую очередь с разными классами допустимых вариаций траекторий динамической и логической частей системы [18], а также с наличием оптимальных режимов с мгновенными многократными переключениями логической части [6,19].

Задача оптимального перехода ИСЗ с низкой круговой орбиты на ГСО рассматривается в классической постановке (в классе непрерывных систем) и с учетом неэффективных затрат топлива (в классе ЛДС). На основе необходимых условий оптимальности ЛДС разработана методика приближенного решения задачи. Найденная структура оптимального управления ЛДС сопоставляется с оптимальным решением В.И. Гурмана, полученным в классе непрерывных систем на основе принципа максимума. Составлены алгоритмы численного решения задачи в обеих постановках. Проведен сравнительный анализ полученных решений, а также их сравнение с применяемым на практике алгоритмом вывода ИСЗ на ГСО.

1. Постановка задачи в классе непрерывных систем

В начале движения спутник находится на низкой круговой околоземной орбите, с которой его необходимо перевести на ГСО. Особенностью ГСО является то, что спутник не приближается к Земле и не удаляется от неё, и, кроме того, вращаясь вместе с Землёй, постоянно находится над какой-либо точкой на экваторе. Конечная орбита должна быть круговой, иметь строго определенную высоту. Для реализации таких переходов используются переходные эллиптические орбиты. Геостационарные спутники достаточно быстро расходуют имеющийся у них запас топлива для коррекции высоты орбиты. Требуется перевести спутник на ГСО с минимальным расходом топлива за ограниченное время.

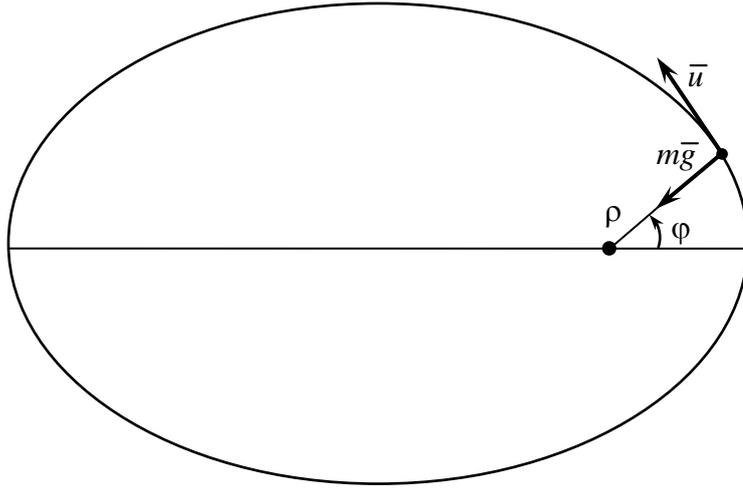


Рис.1

Рассмотрим математическую модель плоского движения КА в гравитационном поле Земли (рис.1). На активных участках тяга двигателя направлена вдоль скорости движения, что обеспечивается системой угловой ориентации КА. Уравнения движения в полярных координатах имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= v, \\ \dot{\phi} &= \omega, \\ \dot{v} &= \rho\omega^2 - \gamma \frac{M}{\rho^2} + \frac{uv}{m\sqrt{v^2 + \rho^2\omega^2}}, \quad t_0 \leq t \leq t_1, \\ \dot{\omega} &= -\frac{2v\omega}{\rho} + \frac{u\omega}{m\sqrt{v^2 + \rho^2\omega^2}}, \\ \dot{m} &= -\mu u, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где ρ – полярный радиус; ϕ – полярный угол (истинная аномалия); v – радиальная составляющая скорости движения спутника; ω – угловая скорость вращения спутника; u – величина тяги двигателя, ограниченная максимальным значением $U_{\max} = 20\,000$ Н: $0 \leq u \leq U_{\max}$; m – масса спутника (с топливом); $M = 5,9736 \cdot 10^{24}$ кг – масса Земли; $\gamma = 6,67428 \cdot 10^{-11}$ м³/кг · с² – гравитационная постоянная; $\mu = 3,07 \cdot 10^{-3}$ – коэффициент, обусловленный техническими характеристиками двигателя; $\mu U_{\max} = -6,14$ кг/с – секундный расход топлива. Время t_1 окончания процесса управления задано $t_1 = 730\,000$ с, (т.е. около 8,5 суток) Если вывести КА раньше заданного времени, то далее КА будет продолжать движение по круговой ГСО до наступления времени t_1 .

Начальное состояние системы задано:

$$\rho(t_0) = 6\,578\,137 \text{ м}, \quad \phi(t_0) = 0 \text{ рад}, \quad v(t_0) = 0 \text{ м/с}, \quad \omega(t_0) = \sqrt{\frac{\gamma \cdot M}{\rho^3}} \approx 1,18 \cdot 10^{-3} \text{ рад/с}, \quad (1.2)$$

$$m(t_0) = 22\,170 \text{ кг.}$$

В конечный момент времени задан полярный радиус $\rho(t_1) = 42\,164\,137$ м, а эксцентриситет орбиты равен нулю.

Требуется найти оптимальный процесс, минимизирующий расход топлива:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \mu u(t) dt. \quad (1.3)$$

2. Применение принципа максимума

Поставленную задачу (1.1)–(1.3) приведем к задаче оптимального управления со свободным правым концом. Для этого конечные условия будем учитывать, вводя дополнительные штрафные слагаемые в функционал (1.3):

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \mu u(t) dt + \lambda_1 e + \lambda_2 [\rho(t_1) - 42\,164\,137]^2, \quad (2.1)$$

где $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ – эксцентриситет эллиптической орбиты, a и b – малая и большая полуоси эллиптической орбиты соответственно. Выбор коэффициентов $\lambda_1 = 10^7$ и $\lambda_2 = 10^{-6}$ при минимизации функционала (2.1) обеспечивает приближенное равенство $\rho(t_1) \approx 42\,164\,137$, а также в конечный момент времени приближает эксцентриситет к нулю ($e(t_1) \approx 0$), так как ГСО круговая и $\rho(t_1) = 42\,164\,137$ м.

Используя принцип максимума, получим решение задачи (1.1)–(1.3), (2.1). Для этого составим гамильтониан

$$H = \psi_1 v + \psi_2 \omega + \psi_3 \left(\rho \omega^2 - \gamma \frac{M}{\rho^2} + \frac{uv}{m\sqrt{v^2 + \rho^2 \omega^2}} \right) + \psi_4 \left(-\frac{2v\omega}{\rho} + \frac{u\omega}{m\sqrt{v^2 + \rho^2 \omega^2}} \right) - \psi_5 \mu u - \mu u, \quad (2.2)$$

где $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5$ – вспомогательные переменные, удовлетворяющие сопряженной системе уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= -\psi_3 \omega^2 - 2\psi_3 \gamma \frac{M}{\rho^3} - 2\psi_4 \frac{v\omega}{\rho^2} + \frac{u\rho \omega^2 v \psi_3 + u\rho \omega^3 \psi_4}{m(v^2 + \rho^2 \omega^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ \dot{\psi}_2 &= 0, \\ \dot{\psi}_3 &= -\psi_1 + \frac{2\omega \psi_4}{\rho} - \frac{u\rho^2 \omega^2 \psi_3 - uv\omega \psi_4}{m(v^2 + \rho^2 \omega^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ \dot{\psi}_4 &= -\psi_2 - 2\psi_3 \rho \omega + \frac{uv\omega \rho^2 \psi_3 - uv^2 \psi_4}{m(v^2 + \rho^2 \omega^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2v\psi_4}{\rho}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\dot{\psi}_5 = \frac{uv\psi_3 + u\omega\psi_4}{m^2\sqrt{v^2 + \rho^2\omega^2}};$$

Учитывая, что эксцентриситет ГСО равен нулю, получаем терминальные условия:

$$\psi_1(t_1) = -2\lambda_2[\rho(t_1) - 42\ 164\ 137], \quad \psi_2(t_1) = 0, \quad \psi_3(t_1) = 0, \quad \psi_4(t_1) = 0, \quad \psi_5(t_1) = 0. \quad (2.4)$$

Обозначим $k(t) = \frac{v\psi_3 + \omega\psi_4}{\mu m\sqrt{v^2 + \rho^2\omega^2}} - \psi_5$, $h(t) = \psi_1 v + \psi_2 \omega + \psi_3(\rho\omega^2 - \gamma \frac{M}{\rho^2}) + \psi_4(-\frac{2v\omega}{\rho})$, тогда

гамильтониан будет иметь вид $H = u\mu[k(t) - 1] + h(t)$. Найдем наибольшее значение гамильтониана по переменной u на промежутке $[0; U_{\max}]$. Учитывая линейность гамильтониана по переменной u заключаем, что гамильтониан достигает своего наибольшего значения на концах промежутка (рис.2):

$$u = \begin{cases} U_{\max}, & k(t) \geq 1, \\ 0, & k(t) < 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

Оптимальное движение КА состоит из чередующихся участков активного и пассивного движения, т.е., двигатель включается с максимальной тягой на промежутках, где $k(t) \geq 1$ (активный участок), и выключается при $k(t) < 1$ (пассивный участок). В [2] показано, что активные участки траектории находятся в окрестности перицентров (перигея или апогея). На этих участках двигатель включается с максимальной тягой, в остальное время двигатель выключен.

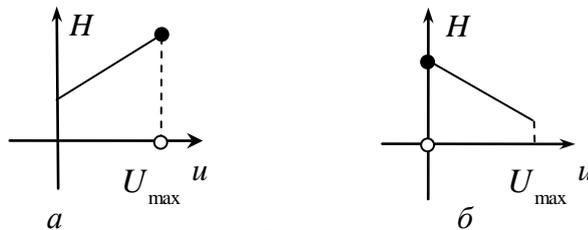


Рис.2

3. Методика приближенного решения задачи

Во время пассивного полёта спутника, когда его реактивные двигатели выключены, движение происходит под воздействием гравитационных сил. Если считать Землю сферической, а силу притяжения Земли – единственной силой, действующей на спутник, то движение КА подчиняется известным законам Кеплера: оно происходит в неподвижной плоскости, проходящей через центр Земли, – плоскости орбиты; а орбита имеет форму эллипса и описывается уравнением:

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}. \quad (3.1)$$

Уравнения движения (1.1) необходимо интегрировать только на активных участках. Выведем формулы для нахождения: e – эксцентриситета и p – фокального параметра эллиптической орбиты (3.1) при переходе с активного участка на пассивный. Обозначим через ψ угол отклонения оси эллиптической орбиты, которое происходит после активного участка, тогда

$$\rho = \frac{P}{1 + e \cos(\varphi - \psi)}, \quad (3.2)$$

Учитывая выражение (3.2) и уравнения (1.1) найдем производные $\dot{\rho} = v$ и $\ddot{\rho} = \dot{v}$:

$$v = \frac{pe \sin(\varphi - \psi)\omega}{(1 + e \cos(\varphi - \psi))^2}, \quad (3.3)$$

$$\rho\omega^2 - \gamma \frac{M}{\rho^2} = \frac{pe \left\{ \left[\cos(\varphi - \psi)\omega^2 - 2 \frac{v\omega}{\rho} \sin(\varphi - \psi) \right] (1 + e \cos(\varphi - \psi)) + 2e \sin^2(\varphi - \psi)\omega^2 \right\}}{(1 + e \cos(\varphi - \psi))^3}. \quad (3.4)$$

Выражая фокальный параметр p из (3.2) и подставляя в (3.3) получим формулы для вычисления параметров эллиптической орбиты:

$$e = \frac{v}{\rho\omega \sin(\varphi - \psi) - v \cos(\varphi - \psi)}, \quad (3.5)$$

$$p = \frac{\rho^2 \omega \sin(\varphi - \psi)}{\rho\omega \sin(\varphi - \psi) - v \cos(\varphi - \psi)}. \quad (3.6)$$

Подставляя выражения (3.5)-(3.6) в равенство (3.4), получим

$$\begin{aligned} & \frac{\rho^2 \omega^2 - \gamma M}{\rho^2} \left(1 + \frac{v \cos(\varphi - \psi)}{\rho\omega \sin(\varphi - \psi) - v \cos(\varphi - \psi)} \right)^3 = \\ & = \frac{\rho^2 \omega \sin(\varphi - \psi)v}{(\rho\omega \sin(\varphi - \psi) - v \cos(\varphi - \psi))^2} \left\{ \left[\frac{\rho \cos(\varphi - \psi)\omega^2 - 2v\omega \sin(\varphi - \psi)}{\rho} \right] (1 + \right. \\ & \left. + \frac{v \cos(\varphi - \psi)}{\rho\omega \sin(\varphi - \psi) - v \cos(\varphi - \psi)}) + \frac{2v\omega^2 \sin^2(\varphi - \psi)}{\rho\omega \sin(\varphi - \psi) - v \cos(\varphi - \psi)} \right\}. \end{aligned}$$

Приведем дроби в левой и правой частях равенства к общему знаменателю

$$\begin{aligned} & \frac{\rho^2 \omega^2 - \gamma M}{\rho^2} \left(\frac{\rho\omega \sin(\varphi - \psi)}{\rho\omega \sin(\varphi - \psi) - v \cos(\varphi - \psi)} \right)^3 = \\ & = \frac{\rho^2 \omega \sin(\varphi - \psi)v \{ [\rho \cos(\varphi - \psi)\omega^2 - 2v\omega \sin(\varphi - \psi)]\omega \sin(\varphi - \psi) + 2\omega^2 \sin^2(\varphi - \psi)v \}}{(\rho\omega \sin(\varphi - \psi) - v \cos(\varphi - \psi))^3}. \end{aligned}$$

Упростим это уравнение

$$\frac{(\rho^2\omega^2 - \gamma M)\rho^3\omega^3 \sin^3(\varphi - \psi)}{\rho^2(\rho\omega\sin(\varphi - \psi) - \nu\cos(\varphi - \psi))^3} = \frac{\rho^2\omega\sin(\varphi - \psi)\nu\{\rho\cos(\varphi - \psi)\omega^3 \sin(\varphi - \psi)\}}{(\rho\omega\sin(\varphi - \psi) - \nu\cos(\varphi - \psi))^3}.$$

Умножим обе части равенства на знаменатель

$(\rho^2\omega^2 - \gamma M)\rho\omega^3 \sin^3(\varphi - \psi) = \rho^3\nu\omega^4 \sin^2(\varphi - \psi)\cos(\varphi - \psi)$ и сократим одинаковые множители в обеих частях равенства

$$(\rho^2\omega^2 - \gamma M)\sin(\varphi - \psi) = \rho^2\nu\omega\cos(\varphi - \psi).$$

Отсюда приходим к уравнению для нахождения неизвестного угла ψ :

$$\operatorname{tg}(\varphi - \psi) = \frac{\rho^2\nu\omega}{\rho^3\omega^2 - \gamma M}. \quad (3.7)$$

Рассмотрим методику формирования траектории, составленную из двух последовательных участков: активного и пассивного.

Основные этапы формирования траектории.

1. В момент времени t_i задано состояние $\rho_i, \varphi_i, \nu_i, \omega_i, m_i$. Для уменьшения угла ψ смещения оси эллиптической орбиты активный участок заданной продолжительности Δt будем располагать “симметрично” относительно перигея. Производим интегрирование уравнений движения (1.1) с $u = 0$ от момента времени t_i до момента $t = t_i - \frac{\Delta t}{2}$ (рис. 3,а). На рисунке полужирными линиями указаны участки, на которых производится интегрирование уравнений движения (1.1)). После интегрирования получаем значения $\rho_{i-0,5}$,

$$\varphi_{i-0,5}, \nu_{i-0,5}, \omega_{i-0,5}, m_{i-0,5} = m_i \cdot \frac{\Delta t}{2}.$$

2. На активном участке производим интегрирование уравнений (1.1) с $u = U_{\max}$ от момента времени $t = t_i - \frac{\Delta t}{2}$ до момента $t = t_i + \frac{\Delta t}{2}$ (рис. 3,б). В момент выключения двигателя получаем значения $\rho_{i+0,5}, \varphi_{i+0,5}, \nu_{i+0,5}, \omega_{i+0,5}, m_{i+0,5}$, причем оставшаяся масса топлива вычисляется по формуле

$$m_{i+0,5} = m_{i-0,5} - \int_{t_0 - \frac{\Delta t}{2}}^{t_0 + \frac{\Delta t}{2}} \mu u(t) dt.$$

3. Вычисляем параметры эллиптической орбиты в момент сопряжения пассивного и активного участков, решая для этого уравнение (3.7) относительно тангенса неизвестного угла поворота и находим ψ_{i+1} – угол смещения оси эллиптической орбиты (рис. 3, в).

$$\psi_{i+1} = \varphi_{i+0,5} - \arctg \left(\frac{\rho_{i+0,5}^2 v_{i+0,5} \omega_{i+0,5}}{\rho_{i+0,5}^3 \omega_{i+0,5}^2 - \gamma M} \right).$$

4. Находим эксцентриситет и фокальный параметр эллиптической орбиты, соответственно, по формулам (3.5), (3.6)

$$e_{i+1} = \frac{v_{i+0,5}}{\rho_{i+0,5} \omega_{i+0,5} \sin(\varphi_{i+0,5} - \psi_{i+1}) - v_{i+0,5} \cos(\varphi_{i+0,5} - \psi_{i+1})};$$

$$p_{i+1} = \frac{\rho_{i+0,5}^2 \omega_{i+0,5} \sin(\varphi_{i+0,5} - \psi_{i+1})}{\rho_{i+0,5} \omega_{i+0,5} \sin(\varphi_{i+0,5} - \psi_{i+1}) - v_{i+0,5} \cos(\varphi_{i+0,5} - \psi_{i+1})}.$$

Вычисляем полярный радиус, соответствующий новому перигею

$$\rho_{i+1} = \frac{p_{i+1}}{1 + e_{i+1} \cos(\varphi_{i+0,5} - \psi_{i+1})}.$$

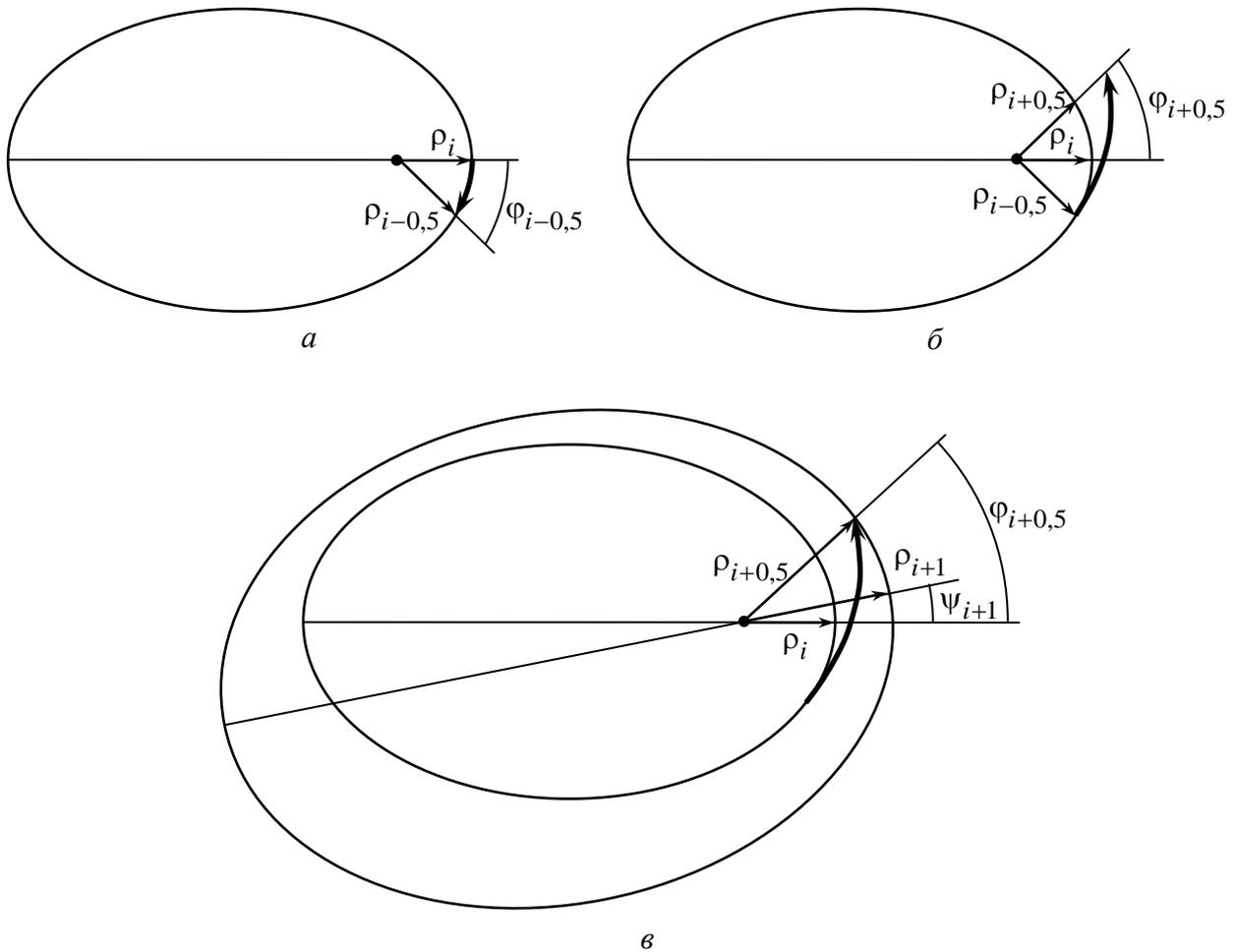


Рис. 3

5. Определяем конечное состояние v_{i+1} , ω_{i+1} КА на эллиптической орбите в перигеях по формулам

$$v_{i+1} = \frac{p_{i+1} e_{i+1} \sin(\varphi_{i+0,5} - \psi_{i+1})}{\rho_{i+1} (1 + e_{i+1} \cos(\varphi_{i+0,5} - \psi_{i+1}))} \sqrt{\frac{\gamma M}{\rho_{i+1} (1 + e_{i+1} \cos(\varphi_{i+0,5} - \psi_{i+1}))^2 - p_{i+1} e_{i+1} \cos(\varphi_{i+0,5} - \psi_{i+1})}};$$

$$\omega_{i+1} = \frac{v_{i+1} (1 + e_{i+1} \cos(\varphi_{i+0,5} - \psi_{i+1}))^2}{p_{i+1} e_{i+1} \sin(\varphi_{i+0,5} - \psi_{i+1})}.$$

Полученные значения ρ_{i+1} , φ_{i+1} , v_{i+1} , ω_{i+1} , $m_{i+1} = m_{i+0,5}$ являются начальными для п.1.

Серия перигелических участков заканчивается, когда апоцентр оскуллирующей орбиты совпадет с апоцентром ГСО, т.е. $|\rho(t_1) - 42\,164\,137| < \varepsilon$, где ε – значение допустимого отклонения от заданной орбиты. Затем следуют вычисления для серии апоцентрических активных участков, аналогичная описанной процедуре, до выхода на конечную круговую ГСО. Повторяя эту процедуру, получим последовательность эллиптических орбит с увеличивающимися полуосями.

4. Результаты приближенного решения задачи для непрерывной системы

Для синтеза оптимального перехода искусственного спутника Земли с одной круговой орбиты на другую была разработана программа, позволяющая находить приближенное решение задачи. Оптимизация ведется по двум параметрам: количеству запусков двигателя (переключений) и продолжительности интервала работы двигателя. В результате минимизации получен процесс с 18-ю включениями двигателя. Найденное решение является субоптимальным, поскольку применяются одинаковые по продолжительности активные участки в окрестности каждого из перигелиев. С целью уменьшения отклонения от ГСО, производится подбор времени работы двигателя при последних включениях в перигее и в апогее соответственно. Это время немного (на несколько секунд) отличается от продолжительности остальных активных участков. Найденный оптимальный процесс имеет: 7 включений в окрестности перигея продолжительностью 273 с (на последнем шаге – 270 с, чтобы отклонение от было наименьшим) и 11 включений в окрестности апогея, продолжительность каждого включения 56 с (на последнем шаге 52 с, чтобы эксцентриситет $e(t_1)$ приблизить к нулю), общее время движения составляет 725033 сек $\approx 8,5$ суток, что соответствует требуемому времени вывода спутника на орбиту. Расход топлива составляет 15 628 кг. На рис.4 приведена графическая иллюстрация найденного процесса (на осях откладывается расстояние в км).

После каждого активного участка происходит отклонение оси эллиптической орбиты на угол ψ . Это отклонение возникает за счёт того, что в отличие от [3] режим работы

двигателя не является импульсным. Эти углы отклонения на рис.4 не видны из-за их малости (величина ψ не превосходит $0,273^\circ$).

Для численного интегрирования был выбран один из явных методов высокого порядка – метод Дормана-Принса 5-го порядка. Выбор данного метода является не случайным, поскольку использование классических методов Рунге-Кутты приводит к большим погрешностям для большинства задач небесной механики. В [25] произведено сравнение методов и наглядно проиллюстрирован данный факт.

5. Постановка задачи в классе ЛДС

Будем учитывать перерасход топлива при включении и выключении двигателя. При запуске реактивного двигателя максимальная тяга достигается не сразу, часть топлива тратится на переходный процесс. В некоторых конструкциях топливо используется также для запуска и работы турбонасосного агрегата. Кроме того, при выключении двигателя часть топлива дожигается менее эффективно, чем при номинальном режиме.

Пусть поведение модели ЛДС описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= v, \\ \dot{\phi} &= \omega, \\ \dot{v} &= \rho\omega^2 - \gamma \frac{M}{\rho^2} + \frac{yU_{\max} v}{m\sqrt{v^2 + \rho^2\omega^2}}, \\ \dot{\omega} &= -\frac{2v\omega}{\rho} + \frac{yU_{\max} \omega}{m\sqrt{v^2 + \rho^2\omega^2}}, \\ \dot{m} &= -\mu y U_{\max}, \\ y(t) &\in Y, \end{aligned} \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (5.1)$$

где y – состояние автоматной (логической) части системы, $Y = [0;1]$ – множество возможных состояний автоматной части. Остальные обозначения такие же, как в (1.1). Кусочно-постоянная непрерывная справа функция $y(\cdot): [t_0, t_1] \rightarrow Y$ задает траекторию автоматной части ЛДС. Она связана с тягой $u(\cdot)$ двигателя в модели (1.1) равенством

$$u(t) = U_{\max} y(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (5.2)$$

т.е. значение $y(t)$ определяет рабочее состояние двигателя: $y = 0$ – двигатель выключен; $y \neq 0$ – двигатель включен.

Требуется найти допустимый процесс, минимизирующий функционал

$$I_\lambda = \int_{t_0}^{t_1} \mu u(t) dt + \lambda_1 e + \lambda_2 [\rho(t_1) - 42\,164\,137]^2 + \sum_{\tau} \lambda_3, \quad (5.3)$$

где $\lambda_3 > 0$ – "штраф" за включение двигателя. Суммирование в функционале (5.3) происходит по всем моментам τ включения двигателя.

6. Применение необходимых условий оптимальности ЛДС

Необходимые условия оптимальности [18] к задаче будем применять (5.1) – (5.3) в следующем порядке:

- устанавливаем, что гамильтониан $H(\psi(t), t, x(t), y(t))$ и вспомогательная функция $\psi(t)$ непрерывны при $t \in T$ (см. п."А");
- находим оптимальные состояния автоматной части $y = 0$ или $y = 1$ (см. п."Б");
- получаем оптимальную структуру автоматной части (см. п."В");
- выводим условия для переключений автоматной части (см. п."Г");

А. Запишем гамильтониан динамической части системы

$$H = \psi_1 v + \psi_2 \omega + \psi_3 \left(\rho \omega^2 - \frac{\gamma M}{\rho^2} + \frac{y U_{\max} v}{m \sqrt{v^2 + \rho^2 \omega^2}} \right) + \psi_4 \left(-\frac{2v\omega}{\rho} + \frac{y U_{\max} \omega}{m \sqrt{v^2 + \rho^2 \omega^2}} \right) - \psi_5 \mu y U_{\max} - y \mu U_{\max}.$$

Так как в рассматриваемой задаче штрафное слагаемое λ_3 постоянно, то скачки вспомогательной функции $\psi(\cdot)$ равны нулю:

$$\psi(\tau_k - 0) = \psi(\tau_k),$$

т.е. функция $\psi(\cdot)$ непрерывна. Из непрерывности вспомогательных переменных следует, что и скачки гамильтониана также равны нулю:

$$H(\psi(\tau), \tau, x(\tau), y(\tau)) - H(\psi(\tau), \tau, x(\tau), y(\tau - 0)) = 0.$$

Следовательно, гамильтониан также непрерывен на оптимальном процессе.

Б. Поскольку для функции $y(\cdot)$ возможны малые кусочно-постоянные вариации, то для любых допустимых вариаций $\delta y(\cdot)$

$$\int_{\tau}^{\tau_k} H_y[t] dt \cdot \delta y(\tau) \leq 0 \quad \forall \tau \in [\tau_{k-1}, \tau_k), k = 1, \dots, N. \quad (6.1)$$

Предположим, что $y(\tau) \in (0, 1)$. Тогда допустимы вариации $\delta y(\tau)$ любого знака.

Учитывая, что $H_y = \mu[k(t) - 1] \cdot U_{\max}$, где $k(t) = \frac{v\psi_3 + \omega\psi_4}{\mu m \sqrt{v^2 + \rho^2 \omega^2}} - \psi_5$.

При $y \in (0, 1)$, получаем

$$\int_{\tau}^{\tau_k} H_y[t] dt = 0 \Leftrightarrow \int_{\tau}^{\tau_k} \mu[k(t) - 1] dt = 0 \quad \forall \tau \in [\tau_{k-1}, \tau_k), k = 1, \dots, N.$$

Следовательно, $k(t) = 1$ при $t \in [\tau_{k-1}, \tau_k)$. Но это противоречит уравнениям сопряженной системы, так как данная функция не является постоянной на всём временном интервале. Значит, состояние автоматной части $y(\tau) \notin (0, 1)$. Таким образом, оптимальные состояния автоматной части $y = 0$ (двигатель выключен) или $y = 1$ (двигатель включен с максимальной тягой).

В. Используя неравенство (6.1) для найденных состояний автоматной части, получим ее оптимальную структуру. Пусть $y(\tau) = 1$. Тогда допустимы только отрицательные вариации $\delta y(\tau) < 0$. Поэтому из условия (6.1) следует

$$\int_{\tau}^{\tau_k} H_y[t] dt \geq 0 \Leftrightarrow \int_{\tau}^{\tau_k} \mu[k(t) - 1] dt \geq 0 \quad \forall \tau \in [\tau_{k-1}, \tau_k), k = 1, \dots, N.$$

При $y = 0$ функция Гамильтона не дифференцируема. Поэтому для состояния $y(\tau) = 0$ найдем непосредственно приращение функционала. Для $\delta y(\tau) > 0$ имеем

$$\begin{aligned} & H(\psi(\tau), \tau, x(\tau), y(\tau) + \delta y(\tau)) - H(\psi(\tau), \tau, x(\tau), y(\tau)) = \\ & = H(\psi(\tau), \tau, x(\tau), \delta y(\tau)) - H(\psi(\tau), \tau, x(\tau), 0) = \\ & = \psi_1 v + \psi_2 \omega + \psi_3 (\rho \omega^2 - \gamma \frac{M}{\rho^2} + \frac{\delta y(\tau) U_{\max} \cdot v}{m \sqrt{v^2 + \rho^2 \omega^2}}) + \psi_4 (-\frac{2v\omega}{\rho} + \frac{\delta y(\tau) U_{\max} \omega}{m \sqrt{v^2 + \rho^2 \omega^2}}) - \\ & - \psi_5 \mu \delta y(\tau) U_{\max} - \delta y(\tau) \mu U_{\max} - \psi_1 v - \psi_2 \omega - \psi_3 (\rho \omega^2 - \frac{\gamma M}{\rho^2}) + \psi_4 \frac{2v\omega}{\rho} = \\ & = \left(\frac{v\psi_3 + \omega\psi_4}{\mu m \sqrt{v^2 + \rho^2 \omega^2}} - \psi_5 - 1 \right) \mu U_{\max} \delta y(\tau) = [k(t) - 1] \mu U_{\max} \delta y(\tau). \end{aligned}$$

Тогда из (6.1) следует, что $\int_{\tau}^{\tau_k} \mu[k(t) - 1] dt \leq 0 \quad \forall \tau \in [\tau_{k-1}, \tau_k), k = 1, \dots, N.$

Таким образом, оптимальная структура автоматной части имеет вид

$$y(\tau) = \begin{cases} 1, & \int_{\tau}^{\tau_k} \mu[k(t) - 1] dt \geq 0, \\ 0, & \int_{\tau}^{\tau_k} \mu[k(t) - 1] dt < 0; \end{cases} \quad \forall \tau \in [\tau_{k-1}, \tau_k), k = 1, \dots, N. \quad (6.2)$$

Г. Получим условия для переключений автоматной части, подставляя выражение для гамильтониана в условие в точках разрыва функции $y(\cdot)$:

$$\psi_1 v + \psi_2 \omega + \psi_3 (\rho \omega^2 - \gamma \frac{M}{\rho^2} + \frac{y(\tau) U_{\max} \cdot v}{m \sqrt{v^2 + \rho^2 \omega^2}}) + \psi_4 (-\frac{2v\omega}{\rho} + \frac{y(\tau) U_{\max} \omega}{m \sqrt{v^2 + \rho^2 \omega^2}}) -$$

$$\begin{aligned}
& -\psi_5 \mu y(\tau) U_{\max} - y(\tau) U_{\max} - \psi_1 v - \psi_2 \omega - \psi_3 (\rho \omega^2 - \gamma \frac{M}{\rho^2} + \frac{y(\tau-0) U_{\max} \cdot v}{m \sqrt{v^2 + \rho^2 \omega^2}}) - \\
& - \psi_4 \left(-\frac{2v\omega}{\rho} + \frac{y(\tau-0) U_{\max} \omega}{m \sqrt{v^2 + \rho^2 \omega^2}} \right) + \psi_5 \mu y(\tau-0) U_{\max} + \mu y(\tau-0) U_{\max} = 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \left(\frac{v\psi_3 + \omega\psi_4}{\mu m \sqrt{v^2 + \rho^2 \omega^2}} - \psi_5 \right) \mu [y(\tau) - y(\tau-0)] - [y(\tau) - y(\tau-0)] = 0.
\end{aligned}$$

Если в момент τ происходит переключение $0 \rightarrow 1$ автоматной части, т.е. автоматная часть переходит из состояния $y(\tau-0) = 0$ в состояние $y(\tau) = 1$, то $k(t)[1-0] - [1-0] = 0$. Для переключения $1 \rightarrow 0$ получаем такое же равенство. Таким образом, получены следующие условия для переключений автоматной части:

$$k(t) - 1 = 0 \text{ для переключений } 0 \rightarrow 1 \text{ или } 1 \rightarrow 0. \quad (6.3)$$

При численном решении сопряженной системы на субоптимальном процессе изменение функции $k(t)$ является почти периодическим. Максимальные значения она достигает в окрестностях перицентров (перигея либо апогея). Учитывая это обстоятельство, а также условие (6.3) включения двигателя, из (6.2) получаем

$$y(t) = \begin{cases} 1, & k(t) \geq 1, \\ 0, & k(t) < 1. \end{cases} \quad (6.4)$$

Найденное управление (6.4) равносильно управлению (6.2), полученному при помощи принципа максимума в классической постановке задачи (для непрерывной системы).

7. Результаты приближенного решения задачи для ЛДС

Алгоритм работы программы приближенного решения задачи в классе ЛДС остается прежним. Величина штрафа $\lambda_3 = 90$ соответствует дополнительным 5% неэффективным затратам топлива на каждом активном участке. В результате решения получен процесс с 6 активными участками: 4 участка в окрестности перигея продолжительностью 479 с (последний участок – 476 с) и 2 участка в окрестности апогея, продолжительностью 305 с (на последнем участке – 304 с). Общее время движения выхода на ГСО составляет 220686 с (примерно 2,5 суток). Величина ψ отклонения оси эллиптической орбиты не превосходит $0,615^\circ$. Расход топлива без учета неэффективных затрат топлива составляет 15 641 кг. Эта величина превосходит расход топлива 15 628 кг, полученный при решении задачи в классической постановке. Однако, если в обеих постановках учитывать неэффективный расход, то в классическом варианте получим 17 248 кг, а в классе ЛДС – 16181 кг. Таким образом, экономия топлива составляет 1067 кг. Кроме того, конструкция разгонно-

го блока "Бриз-М" позволяет производить не более 8 запусков двигателя, поэтому найденный для ЛДС процесс можно считать практически реализуемым, а в классическом варианте – нет. Графическая иллюстрация полученного решения приведена на рис.5 (на осях откладывается расстояние в км).

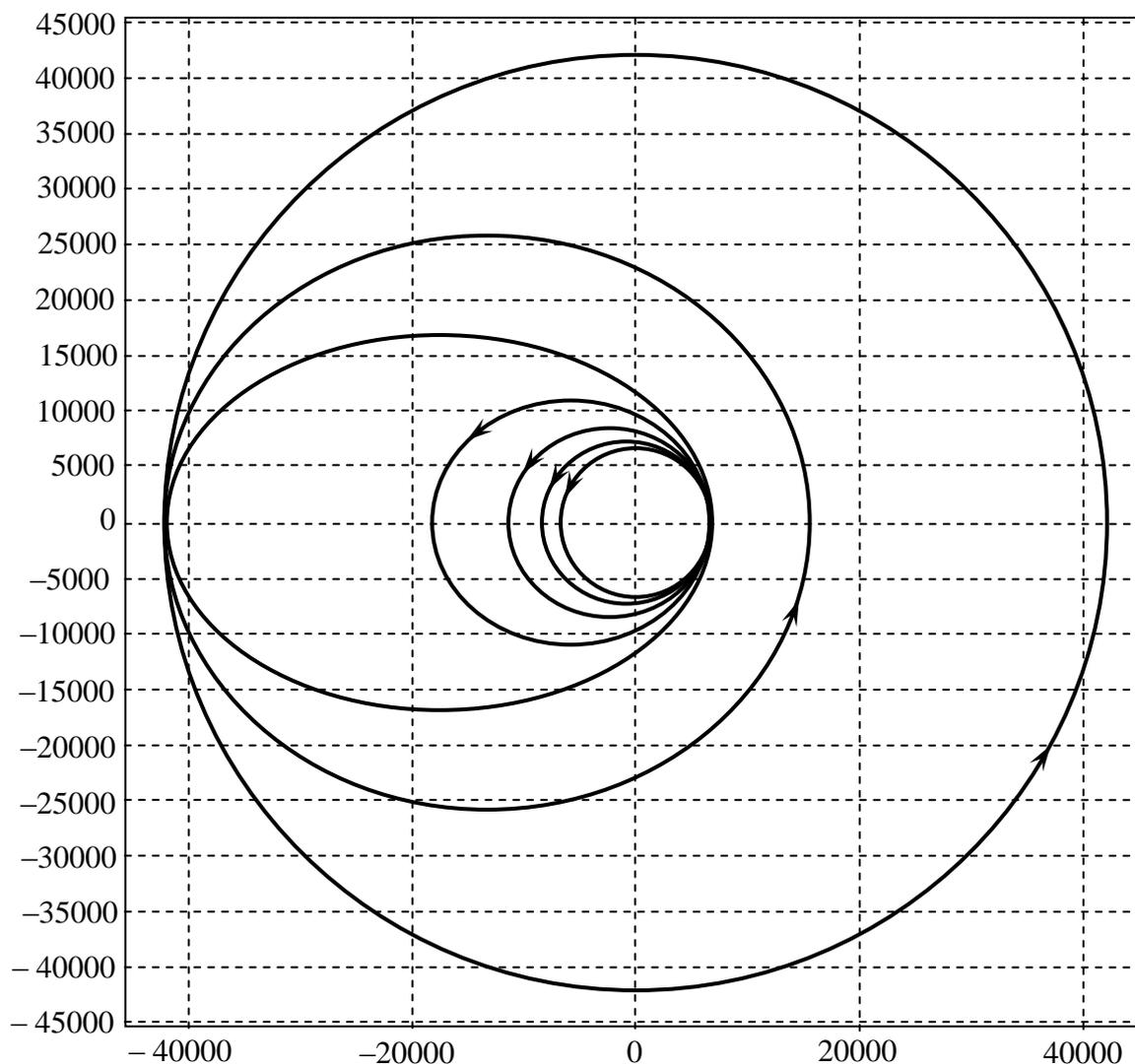


Рис.5

При практическом применении разгонного блока "Бриз-М" 7 апреля 2001 г. применялась схема с четырьмя активными участками. Первый участок – доразгон КА для выхода на низкую орбиту – предварительный для рассматриваемой задачи. Остальные три активных участка определяют траекторию перехода с низкой круговой орбиты на ГСО, а именно: два включения двигателя на 972 с и на 967 с в окрестности перигея орбиты для поднятия высоты апогея и одно включение на 720 с в окрестности апогея для поднятия высоты апогея и изменения наклона. Расход топлива на последних трех активных участках при такой схеме полета, вычисленный в рамках принятой математической модели, составил 16326 кг, а с учетом дополнительных неэффективных затрат – 16596 кг. Результаты показывают, что практически применяемая схема не является опти-

мальной по расходу топлива. Разумеется, что выбор схемы полета на практике определяется не только затратами топлива. Учитываются многие обстоятельства и факторы, которые отсутствуют в рассматриваемой математической модели.

Выводы

Поставлена задача перехода искусственного спутника Земли с начальной круговой орбиты на геостационарную орбиту с учетом неэффективных затрат топлива при включении и выключении реактивного двигателя. К задаче применены необходимые условия оптимальности автоматной части логико-динамической системы. В результате найдена оптимальная структура автоматной части логико-динамической системы, аналогичная полученной при помощи принципа максимума Понтрягина.

Составлена программа приближенного решения задачи. Приведены результаты приближенного решения задач в классической постановке и в классе логико-динамических систем. Сравнительный анализ полученных результатов показывает, что решение задачи с учетом неэффективных затрат топлива в классе логико-динамических систем позволяет сэкономить около тонны топлива по сравнению с классическим решением.

Библиографический список

1. Государственный космический научно-производственный центр имени М. В. Хруничева <http://www.khrunichev.ru/main.php>
2. Гурман В.И. Вырожденные задачи оптимального управления. – М.: Наука, 1977.
3. Гурман В.И. Об оптимальных переходах между компланарными эллиптическими орбитами в центральном поле // Космические исследования. 1966 г., т.4, выпуск 6, – С.26-39.
4. Modelling and Analysis of Logic Controlled Dynamic Systems: IFAC Workshop. Irkutsk: Inst. Syst. Dyn. and Control Theory. Sib. Branch RAS, 2003.
5. Васильев С.Н., Жерлов А.К., Федосов Е.А. и др. Интеллектуальное управление динамическими системами. М.: Физматлит, 2000.
6. Бортакровский А.С. Достаточные условия оптимальности автоматной части логико-динамической системы // Известия РАН. Теория и системы управления, 2006, №6. – С.77–92.

7. Бортаковский А.С., Пегачкова Е.А. Синтез управления активной стабилизацией спутника на основе необходимых условий оптимальности логико-динамических систем // Вестник Московского авиационного института. – 2008. – Т.15. – № 2. – С.28–35.
8. Пегачкова Е.А. Методика приближенного синтеза оптимальных линейных логико-динамических систем // Вестник Московского Авиационного Института, № 3, 2010 г., т. 17.
9. Батурин В.А., Гончарова Е.В., Малтугуева Н.С. Итеративные методы решения задач оптимального управления логико-динамическими системами // Известия РАН. Теория и системы управления, 2010, №5. – С.53–61.
10. Малтугуева Н.С. Достаточные условия оптимальности для задач оптимального управления логико-динамическими системами // Программные системы: теория и приложения. – 2011. – Т.2. – №1. – С. 63-70.
11. *Brockett R.W.* Hybrid models for motion control systems // *Perspectives in the Theory and its Applications*. Boston, Birkhäuser, 1993. – P.29-53.
12. *Matveev A.S., Savkin A.V.* Qualitative theory of hybrid dynamical systems. Boston: Birkhäuser, 2000.
13. *Cassandras C.G., Pepyne D.L., Wardi Y.* Optimal control of a class of hybrid systems // *IEEE Trans. Aut. Con.* 2001. V.46. №3, P. 398-415.
14. *Hedlund S., Rantzer A.* Optimal control of hybrid systems // *Proc. 38th IEEE Conference on Decision and Control*. Phoenix, AZ, 1999. P.3972-3977.
15. *Xu X., Antsaklis P.J.* On time optimal control of integrator switched systems with state constrains // *J. of Nonlinear Analysis Special Issue on Hybrid Systems*. 2005. V.62. – P.1453-1465.
16. *Axelsson H., Boccadoro M., Egerstedt M.* et al. Optimal Mode-Switching for Hybrid Systems with Varying Initial States // *J. of Nonlinear Analysis: Hybrid Systems and Applications*. 2008. V.2. №3. P.765-772.
17. Куржанский А.Б., Точилин П.А. Импульсное управление в моделях гибридных систем // *Дифференц. уравнения*. 2009. Т.45. №3. С.716-727.

18. Бортаковский А.С. Необходимые условия оптимальности управления логико-динамическими системами // Известия РАН. Теория и системы управления, 2007, №6. – С.16–33.
19. Бортаковский А.С. Необходимые условия оптимальности автоматной части логико-динамической системы // Тр. МИАН. – 2008. – Т.262. – С.50–63.
20. Бортаковский А.С., Пегачкова Е.А. Синтез оптимального управления линейными логико-динамическими системами // "Труды МАИ", №27. – <http://www.mai.ru> (25.04.2007)
21. Бортаковский А.С. Синтез логико-динамических систем на основе достаточных условий оптимальности // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2010.– №2.– С.54–68.
22. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. – 488 с.
23. Грачев Н.И., Евтушенко Ю.Г. Библиотека программ для решения задач оптимального управления // Ж-л вычислит. математика и матем. физики. – 1979. – Т.10. – №2. – С.367-387.
24. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.
25. Э. Хайнер, С. Нерсетт, Г. Ваннер Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. // Москва "Мир" 1990 г.

Сведения об авторах

Пегачкова Елена Александровна, аспирант Московского авиационного института (национального исследовательского университета).

моб. тел.: 8-926-533-10-07;
e-mail: pegachkova@mail.ru