

## **Комплекс программ для моделирования процессов волнового перемешивания**

В.В. Винников, К.О. Ганиев, Д.Л. Ревизников, В.В. Чередов

*В работе приведено описание разработанного комплекса алгоритмов и программ для математического моделирования процессов перемешивания в замкнутых емкостях и проточных трактах. Осуществлена компьютерная реализация различных методов для отслеживания эволюции пятна примеси. Тестирование программного комплекса проведено на представительном наборе задач. Проведен сравнительный анализ контурного и маркерного методов. Показано, что высокоточный контурный метод является наиболее затратным по машинному времени, в то время как экономичный маркерный метод имеет более низкую точность. Предложен оригинальный дипольный метод, представляющий собой компромисс между контурным и маркерным методами по точности и затратам машинного времени.*

*Процессы гомогенизации, смесительные установки, математическое моделирование перемешивания, маркерный метод, контурный метод, критерий качества перемешивания.*

*Homogenization processes, stirring machines, mathematical modeling of stirring, marker method, contour method, criteria of stirring quality.*

### **Введение**

Состояние современной вычислительной техники открывает широкие возможности для подробного исследования сложных природных явлений, в частности процессов перемешивания в жидкостях.

Изучение процессов перемешивания можно разделить на две больших исследовательских области: перемешивание жидкостей в замкнутых емкостях и перемешивание жидкостей в проточных трактах.

Несмотря на единую для обоих случаев постановку прямой задачи – вычисление критерия перемешивания в известном нестационарном поле скорости при подаче примеси в заданный участок, каждая из задач имеет свои индивидуальные особенности, которые будут рассмотрены подробно далее.

## Описание программно-алгоритмического комплекса

В общем случае исследование процессов перемешивания состоит из нескольких этапов. На первом этапе необходимо получить поле скорости, в котором происходит эволюция области, занимаемой перемешиваемой субстанцией. Вторым этапом непосредственно в моделировании нестационарного процесса распространения примеси по известному полю скорости. На третьем этапе выполняется расчет критериев эффективности перемешивания. Каждый из этапов представляет собой сложную задачу, решение которой осуществляется с привлечением различных численных методов.

### *Первый этап моделирования*

На первом этапе производится моделирование течений несущей жидкости в перемешивающем устройстве. Нестационарные поля скорости вычисляются из уравнений Навье-Стокса (1):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Расчет гидродинамических полей в сложных геометрических областях с криволинейными границами осуществляется в настоящей работе либо на прямоугольных сетках методом погруженной границы с фиктивными ячейками [8], либо на тетраэдральных неструктурированных сетках с помощью программного пакета вычислительной гидродинамики OpenFOAM.

### *Второй этап моделирования*

На втором этапе выполняется моделирование деформации и переноса пятна перемешиваемой примеси по известному полю скорости. Этот этап состоит из двух основных алгоритмических блоков:

- 1) Загрузка поля скорости из файла данных. Поддерживается формат Ensign Gold.
- 2) Перенос маркеров, задающих геометрическую форму пятна, полем скорости согласно решению уравнения движения в лагранжевой форме.

В зависимости от типа перемешивающего устройства алгоритмы расчетов и их программная реализация имеют свои особенности.

В замкнутой емкости гомогенизация смеси обычно осуществляется согласно разрывному периодическому протоколу перемешивания [1]. Одним из распространенных допущений является предположение о мгновенной смене картины течения в пренебрежении инерционными эффектами в несущей жидкости. Это справедливо для потенциальных течений и приемлемо для вязких течений, характеризуемых малыми числами Рейнольдса. Исходя из этого, нестационарное поле скорости можно аппроксимировать набором полей, кусочно-постоянных по времени. Максимальное упрощение приводит всего к двум стационарным полям скорости, между которыми периодически осуществляется переключение. Это оправдано, поскольку для качественной гомогенизации обычно требуется значительное число периодов перемешивания.

В целях ускорения расчетов для решения уравнений переноса маркеров используются поля скоростей, заданные на структурированных, обычно прямоугольных, сетках. Для восстановления значений скорости между узлами сетки применяется процедура интерполяции полиномами низкого порядка.

В отличие от замкнутых емкостей качественное перемешивание в плоских проточных трактах осуществляется течениями, нестационарными в каждый момент времени. В связи с этим актуальной задачей является повышение производительности алгоритмов загрузки и интерполяции нестационарных полей скорости, заданных неструктурированными тетраэдральными сетками. Эффективным решением этой задачи оказывается интерполяция исходных полей с тетраэдральной сетки на более подробную равномерную прямоугольную сетку. Это упрощает структуры данных, необходимые для хранения значений полей в узлах, и ускоряет восстановление значений в произвольной точке расчетной области. Исследования показали, что ошибками, вносимыми при переходе на равномерную сетку, можно пренебречь, если прямоугольная ячейка по своим размерам меньше самого малого тетраэдра.

Второй алгоритмический блок заключается в решении дифференциальных уравнений переноса маркеров (2).

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} = v(t, x, y). \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $u(t, x, y)$  и  $v(t, x, y)$  – поля скорости, полученные из решения уравнений Навье-Стокса (1).

В настоящем программном комплексе система ОДУ (2) интегрируется по времени методами Рунге-Кутты различного порядка точности. В частности используется метод пятого порядка с контролем погрешности  $\delta$  на временном шаге  $h$  :

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}(k_1 + 4k_4 + k_5) + O(h^5)$$

$$k_1 = \frac{1}{3}hf(t_n, x_n)$$

$$k_2 = \frac{1}{3}hf(t_n + \frac{1}{3}h, y_n + k_1)$$

$$k_3 = \frac{1}{3}hf(t_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2)$$

$$k_4 = \frac{1}{3}hf(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{3}{8}k_1 + \frac{9}{8}k_3)$$

$$k_5 = \frac{1}{3}hf(t_n + h, y_n + \frac{3}{2}k_1 - \frac{9}{2}k_3 + 6k_4)$$

$$\delta = k_1 - \frac{9}{2}k_3 + 4k_4 - \frac{1}{2}k_5.$$

Физический смысл маркера зависит от используемого метода отслеживания пятна примеси. Имеется несколько подходов к аппроксимации пятна конечным множеством дискретных маркеров. Согласно первому подходу область с примесью представляется большим количеством частиц конечного объема, каждая из которых переносится полем скорости. Несмотря на простоту, маркерный метод имеет ряд недостатков, подробно изложенных в работе [1].

Альтернативный подход предусматривает слежение только за границей области с примесью. Контур пятна аппроксимируется замкнутой кусочно-линейной кривой, построенной по конечному упорядоченному набору маркеров. Общее количество маркеров варьируется на каждом временном шаге и зависит от расстояния между соседями по контуру. Контурный метод успешно использован в ряде работ [1], [5] и считается наиболее точным.

В настоящей работе используются методы, опирающиеся на оба подхода к представлению области с примесью. Сравнение методов производится по трем критериям: сложность программой реализации алгоритма, точность расчета, затраты машинного времени.

### ***Описание методов слежения за областью с примесью***

#### ***Контурный метод***

Наиболее точным считается алгоритм отслеживания последовательности маркеров, составляющих контур области с примесью. В общих чертах базовый алгоритм контурного метода изложен в работах [1], [5], однако в алгоритме имеется ряд тонких аспектов, редко упоминаемых в литературе.

Алгоритм имеет следующую структуру:

- 1) Начальный контур задается последовательностью маркеров, обычно равномерно распределенных по периметру области.
- 2) По заданному полю скорости выполняется перенос каждого из маркеров. Последовательность маркеров с новыми координатами образует основу контура на следующем временном шаге.
- 3) Поскольку длина контура на новом временном шаге изменилась, может потребоваться уточнение геометрических данных. С этой целью производится вычисление расстояния между соседними маркерами. Если расстояние превосходит некоторый заданный параметр, то в начальный контур необходимо добавить новый маркер. Вставка маркера осуществляется между каждыми двумя маркерами, разошедшимися со временем на расстояние, большее, чем заданный параметр. Добавление маркеров и вычисление расстояний производится многократно вплоть до достижения требуемой малости дистанций между маркерами.
- 4) По возможности контур должен иметь минимальную локальную кривизну. Угол, образованный маркером и двумя его соседями, не должен быть меньше заданного тупого угла. В противном случае необходимо добавить два новых маркера по сторонам от вершины и образовать новый угол. Добавление маркеров осуществляется аналогично пункту 3.
- 5) Удаление избыточных маркеров. Если расстояние между соседями меньше минимальной требуемой дистанции, и выполняется требование по величине угла, то допускается удаление лишних маркеров.
- 6) Вычисление площади области. По набору координат маркеров можно провести приближенное вычисление площади области, занятой примесью, используя

$$\text{формулу: } S = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (x_n y_{n+1} - x_{n+1} y_n).$$

- 7) Переход на следующий временной слой согласно пункту 2.

Следует отметить, что добавление маркеров в начальный контур не всегда возможно из-за ограничений машинной арифметики. Расстояние двумя соседними маркерами начального контура может сократиться до порядка машинного эpsilon. В этом случае координаты нового маркера совпадут координатами одного из соседей. Самым точным решением этой проблемы является добавление маркеров в наиболее ранний из контуров, не имеющих ограничений по машинному эpsilon. Однако для этого потребуется хранить в быстрой памяти богатую выборку из всей последовательности

контуров, что затруднительно в связи с большим объемом данных, представляющих каждый контур. В настоящей работе используется самый экономичный вариант, предусматривающий добавление маркеров только на предыдущий временной слой.

Важно также упомянуть, что добавление маркеров в пункте 4 может привести к заикливанию алгоритма, поскольку область с примесью может иметь негладкую границу, например, в случае, когда фрагмент контура представляет собой строгий клиновидный выступ с маркером в вершине. Во избежание добавления большого количества маркеров, необходимо предусмотреть дополнительное условие, ограничивающее снизу расстояние между новым маркером и вершиной.

Эволюция области в процессе перемешивания подразумевает удлинение контура, вытягивание его фрагментов в тонкие нити с образованием многократных складок. Это означает увеличение количества маркеров, необходимых для адекватного описания геометрии области. Рост числа маркеров требует высокой производительности алгоритма переноса маркера течением. Максимальная производительность при интерполяции поля скоростей достигается только при использовании структурированных сеток.

Повышения производительности алгоритма можно также добиться, используя параллельные вычисления для независимого решения уравнений переноса различных маркеров по полю скорости.

У контурного метода отмечены два недостатка. Первым недостатком контурного метода является сложность обобщения на трехмерный случай, когда симплексами, составляющими границу области с примесью, будут являться не отрезки, а треугольники, что потребует на каждом временном шаге использовать процедуры триангуляции для поверхности. Вторым недостатком – высокие машинные затраты на последующее вычисление критериев эффективности перемешивания, основанных на грубой плотности.

### *Маркерный метод*

Исторически первым методом, использованным для визуализации траекторий при анализе сложных течений, является маркерный метод.

Алгоритм маркерного метода имеет следующую структуру:

- 1) Начальное пятно задается последовательностью маркеров, обычно равномерно распределенных по площади пятна. Площадь каждого маркера постоянна и равна  $S_0$ .
- 2) По заданному полю скорости выполняется перенос каждого из маркеров. Последовательность маркеров с новыми координатами образует пятно на следующем временном шаге.

3)           Переход на следующий временной слой согласно пункту 2.

Положительной стороной маркерного метода является простота алгоритма и экономичность по затратам вычислительных ресурсов, включая экономичность вычисления критериев эффективности перемешивания и легкость обобщения на задачи перемешивания в трехмерных областях. Отрицательной стороной оказывается сравнительно низкая точность получаемого решения, в силу невозможности точного соблюдения геометрических законов сохранения.

*Дипольный метод*

В настоящей работе предлагается дипольный метод, сочетающий в себе некоторые достоинства контурного и маркерного методов. В дипольном методе, являющемся развитием маркерного метода, пятно примести представляется множеством квадратных маркеров со стороной  $h_0$ . В начальный момент времени каждый маркер имеет площадь  $S_0 = h_0^2$ , такую что суммарная площадь маркеров должна соответствовать начальной площади пятна. В отличие от классического маркерного метода независимыми элементами являются не отдельные маркеры, а диполи. Каждый диполь состоит из двух маркеров и характеризуется плечом  $\ell_0$ , равным расстоянию между центрами этих двух маркеров. Угловая ориентация диполей в начальный момент времени выбирается, исходя из максимально плотного заполнения непересекающимися маркерами исходного пятна с примесью.

По мере продвижения пятна по нестационарному полю течения, плечо диполя  $d_i$  будет переменной величиной  $\ell_i(t)$ . В момент времени  $t^*$ , когда плечо  $\ell_i(t^*)$  достигнет или превысит некоторый максимальный порог  $\ell_{MAX}$ , произойдет расщепление диполя пополам. Будут образованы два новых диполя  $d_j, d_k$  с плечами  $\ell_j(t^*) = \ell_k(t^*) = (0.5 - \varepsilon)\ell_i(t^*)$ , где  $\varepsilon$  – малая величина, обеспечивающая несовпадение маркеров новых диполей. При этом суммарная площадь двух «новых» диполей  $d_j, d_k$  должна равняться площади «старого» диполя  $d_i$ . Площадь каждого маркера в «новых» диполях будет равна  $S_0/2$ .

Алгоритм дипольного метода имеет следующую структуру:

- 1)           Начальное пятно задается последовательностью маркерных пар – диполей, равномерно распределенных по площади пятна. Площадь каждого маркера  $S_i$  в начальный момент равна  $S_0$ .

- 2) По заданному полю скорости выполняется перенос каждого из диполей. Последовательность диполей с новыми координатами аппроксимирует пятно на следующем временном шаге.
- 3) Если плечо диполя на новом временном шаге превысило максимальный порог  $\ell_{MAX}$ , осуществляется однократное деление диполя, на два «новых». Производится пересчет площадей каждого из маркеров «новых диполей». Площадь маркера в диполе после  $m$  делений будет составлять  $1/2^m$  от площади маркера в исходном диполе.
- 4) Переход на следующий временной слой согласно пункту 2.

Можно отметить, что дипольный метод обладает резервом для повышения производительности благодаря контролю над расщеплением диполей. Если определить порог расщепления как некоторую минимально допустимую площадь маркера, то все диполи, состоящие из маркеров площадью, меньшей или равной этому порогу, не будут подлежать дальнейшему делению.

Дипольный метод естественным образом обобщается на случай использования в качестве элементов геометрических примитивов более высокого порядка. Например, вместо диполей можно использовать разомкнутые цепочки или многоугольники с аналогичными правилами расщепления. Дипольный метод также легко обобщить на задачи перемешивания в трехмерных областях.

### ***Третий этап моделирования***

На третьем этапе производится расчет критерия эффективности перемешивания. В каждый момент времени этот показатель является скалярной величиной и отражает мгновенное распределение примеси по расчетной области. Обычно ожидается, что с увеличением временного интервала перемешивания будет расти и качество гомогенизации. В силу статистической природы критерий не будет меняться монотонно. Также общепризнанна зависимость величины критерия от расчетной сетки.

### ***Расчет критериев эффективности перемешивания***

Для оценки эффективности перемешивания используется набор критериев, большинство которых основано на статистических моментах первого и второго порядка. В этих критериях входными данными служит только геометрическая информация об области с примесью. Обычно критерии рассчитываются на равномерной декартовой сетке, разбивающей всю расчетную область на  $N_s$  одинаковых ячеек. В  $n$ -ой ячейке

вычисляется грубая плотность распределения  $D_n$ , равная доли площади ячейки, занимаемой примесью:

$$D_n = S_n / S_\delta,$$

где  $S_n$  – площадь, занимаемая примесью в ячейке,  $S_\delta$  – полная площадь ячейки.

Для ячейки, свободной от примеси, грубая плотность распределения равна 0. Для ячейки, полностью занятой примесью, грубая плотность имеет значение 1.

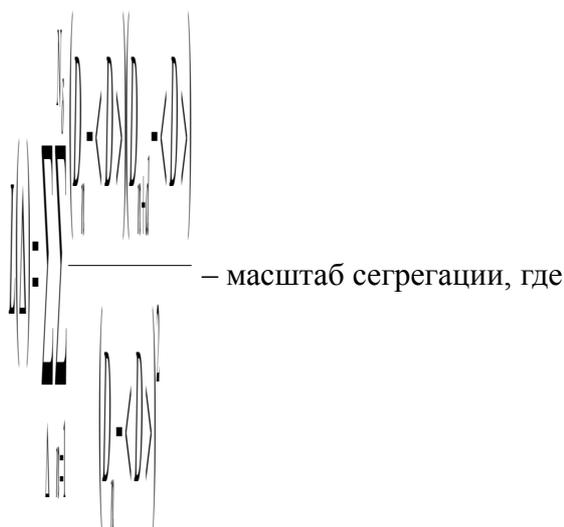
Основные критерии качества смеси описаны, например, в работах [6], [1]. Среднеквадратичная плотность, энтропия и интенсивность сегрегации являются критериями, использующие меры первого порядка, а масштаб сегрегации представляет меру второго порядка. Эти критерии задаются следующими выражениями:

$$\langle D^2 \rangle = \frac{1}{N_\delta} \sum_{n=1}^{N_\delta} D_n^2 \text{ – среднеквадратичная плотность;}$$

$$E = -\frac{1}{N_\delta} \sum_{n=1}^{N_\delta} D_n \log D_n \text{ – энтропия;}$$



$$\langle D \rangle = \frac{1}{N_\delta} \sum_{m=1}^{N_\delta} D_m ;$$



$\Delta$  – множество ячеек, пересекаемых кривой, вдоль которой определяется средний размер пятна.

Для расчета критериев в контурном методе авторами были разработаны два алгоритма, использующих эйлеров и лагранжев подходы соответственно.

Первый алгоритм использует только информацию о контуре области с примесью. Для каждой неподвижной ячейки грубая плотность определяется путем численного интегрирования фрагментов контура, находящихся внутри данной ячейки. Для определения этих фрагментов контура необходимы многократные проходы по всей последовательности маркеров. При этом следует учитывать, что в случае малости ячейки в ней самой может не оказаться ни одного маркера. В данном алгоритме не требуется определять, лежит ли точка внутри контура или снаружи. Для старта алгоритма требуется зафиксировать направление обхода замкнутого контура. Далее для каждой ячейки выполняется операция пересечения с пятном примеси. Результирующее множество в общем случае оказывается невыпуклым и многосвязным (см. рис.1). Это множество разбивается на выпуклые односвязные многогранники, площадь которых определяется методом трапеции.

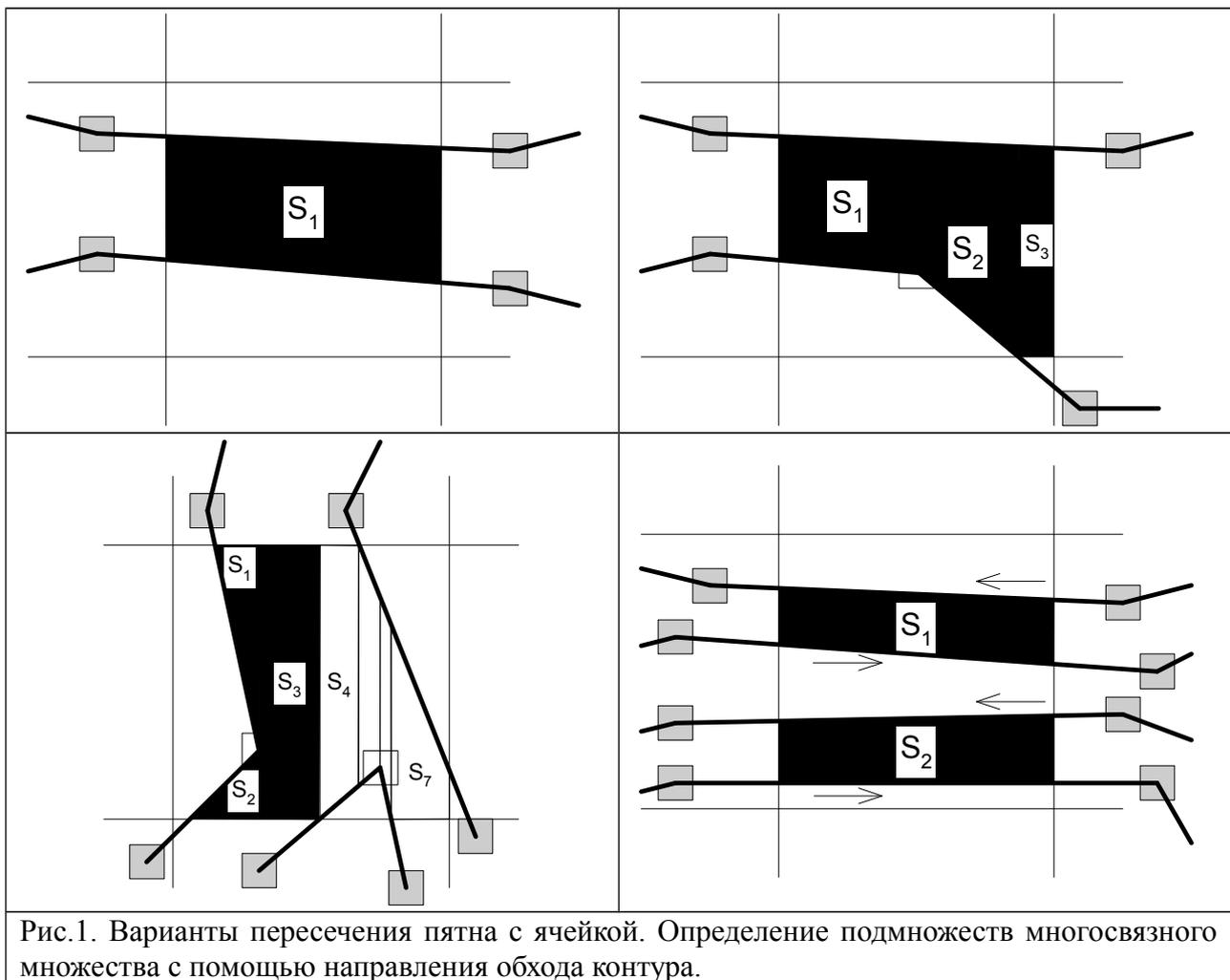


Рис.1. Варианты пересечения пятна с ячейкой. Определение подмножеств многосвязного множества с помощью направления обхода контура.

Производительность алгоритма находится в сильной зависимости от числа маркеров. При значительном увеличении количества маркеров в контуре авторами было отмечено существенное падение скорости вычислений.

Второй алгоритм использует лагранжев подход. Маркеры контура служат входными данными, по которым выполняется триангуляция области. Далее для каждого треугольника определяются подмножество пересекающих его ячеек. Для каждой ячейки из подмножества вычисляется площадь, занимаемой треугольником. Поскольку треугольники не имеют взаимных пересечений, то грубая плотность в каждой ячейке, равняется сумме площадей, занимаемых треугольниками. Хотя для сложных областей количество треугольников может достигать миллионов, этот алгоритм работает существенно быстрее по сравнению с первым, отчасти благодаря тому, что процесс триангуляции выполняется средствами графического ускорителя.

### *Критерий качества перемешивания в проточных трактах*

Задачи о перемешивании в проточных трактах представляются более сложными, поскольку пятно примеси в этом случае не имеет постоянной площади, а определяется расходом через некоторый криволинейный отрезок, помещенный внутрь расчетной области. С течением времени примесь сносится к выходному сечению и покидает вычислительную область. Задержка между поступлением примеси в тракт и достижением ею выходного сечения означает отличие в расходах примеси на входе и выходе из тракта. Постоянство расхода примеси соблюдается только в интегральном смысле.

Процессы перемешивания в проточных трактах, как правило, подразумевают постоянную подачу примеси в течение. В отличие от замкнутых областей площадь пятна не является постоянной величиной, а меняется по мере того, как примесь поступает или покидает тракт. Кроме того, критерий интенсивности сегрегации не зависит от величины расхода примеси через выходное сечение тракта. Таким образом, величины, полученные с помощью критерия интенсивности сегрегации, могут не выражать реальный показатель качества перемешивания. Для учета особенностей перемешивания в проточных трактах предлагается использовать критерий  $D_Q$ , основанный на величине расхода маркеров, отнесенного к расходу жидкости через единичную площадку выходного сечения за заданный временной интервал:

$$Q_i = \frac{S_i}{q_i}, \quad M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Q_i, \quad \sigma_Q = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Q_i - M)^2}, \quad D_Q = 1 - \frac{1}{1 + \alpha \cdot \sigma_Q},$$

где  $S_i$  – площадь маркеров, прошедших через площадку  $h$  за время  $\delta t$ ,  $q_i$  – расход жидкости, проходящей через площадку  $h$  за время  $\delta t$ ,  $Q_i$  – безразмерный расход смеси за время  $\delta t$ ,  $n$  – число единичных площадок,  $M$  – математическое ожидание величины  $Q_i$ ,  $\alpha = 1/3$  – скалярный калибровочный параметр. Аналогичный критерий, не зависящий от расхода жидкости, носит вспомогательный характер:

$$M_P = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i, \quad \sigma_P = \frac{1}{M_P} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (S_i - M_P)^2}, \quad D_P = 1 - \frac{1}{1 + \alpha \cdot \sigma_P}.$$

### **Особенности расчетов в трехмерных проточных трактах**

В настоящее время численное исследование процессов перемешивания в трехмерных проточных трактах в общем случае представляет значительную сложность и существенно превосходит аналогичные двумерные задачи как по вычислительным затратам, так и по сложности применяемых алгоритмов. Рост вычислительных затрат связан со значительным увеличением длины траекторий, описываемых маркерами, а

наиболее точный контурный метод отслеживания формы пятна с примесью не имеет простого обобщения на трехмерный случай. Маркерный метод применительно к трехмерным задачам визуально дает несколько худшие картины перемешивания, чем в двумерной формулировке. Исходя из этого, эффективным представляется использование оригинального дипольного метода, разработанного авторами ранее для моделирования перемешивания в плоских емкостях и трактах.

Задачи трехмерного перемешивания могут быть несколько упрощены, если на поля течения наложить дополнительные допущения, такие как условия осесимметричности и стационарности. В первом случае картина перемешивания не зависит от угловой переменной, что позволяет ограничить количество точек подачи примеси до одной. Во втором случае каждый маркер пятна будет следовать вдоль своей линии тока. Благодаря этому, при моделировании непрерывную подачу примеси можно заменить однократным выбросом порции маркеров. Но, даже учитывая эти допущения, количество маркеров будет составлять от нескольких сотен тысяч до миллионов.

### **Примеры вычислительных экспериментов**

Приведенные выше алгоритмы расчета движения и деформации пятна примеси реализованы в программном комплексе для моделирования перемешивания в замкнутых емкостях и проточных трактах.

Первой рассматривалась задача о перемешивании в прямоугольной каверне с подвижными дном и крышкой. В работе [7] были приведены результаты натурального эксперимента, близкого к данной задаче.

Расчетная область представляет собой прямоугольную каверну размерами  $2 \times 1$  (см. рис.2). Скорости крышки и дна равны по модулю и противоположны по направлению. Движение верхней и нижней границ осуществляется попеременно, согласно разрывному протоколу перемешивания с периодом  $T = 15$ . В каждом из полупериодов течение полагается стационарным. Смена полей скорости осуществляется мгновенно, в пренебрежении инерционными эффектами.

Уравнения Навье-Стокса с соответствующими граничными условиями решались численно по методике, изложенной в [8].

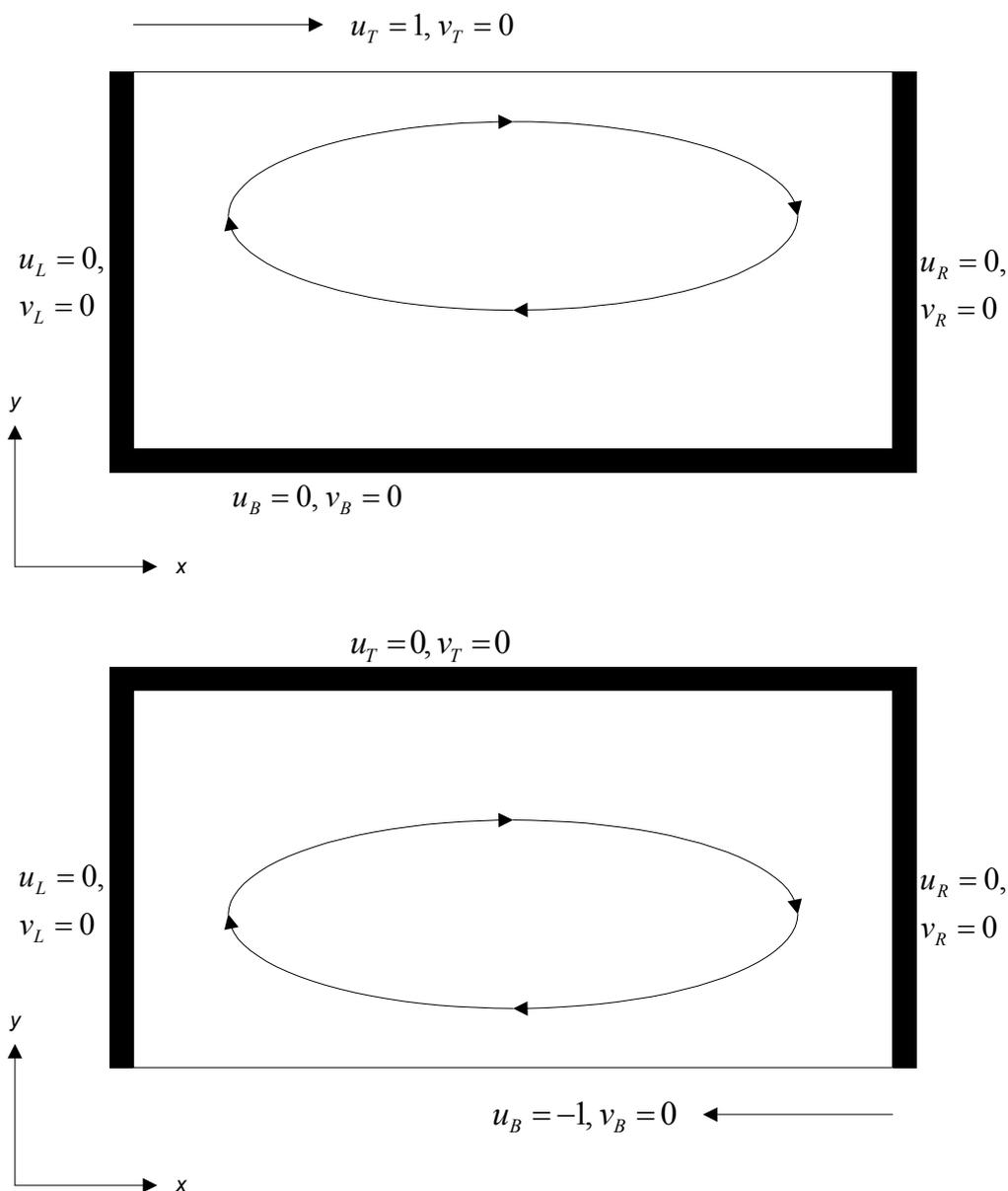


Рис. 2. Расчетная область и краевые условия для задачи о перемешивании в каверне.

Для моделирования процесса перемешивания в область помещалось круглое пятно радиусом 0.125. Процесс перемешивания зависит от исходного положения пятна примеси. Расчеты проводились для координат центра исходного пятна, равных (1.75, 0.25), с различными шагами по времени от  $\Delta t = 10^{-2}$  до  $\Delta t = 10^{-5}$ . Для контурного метода сходимость решения по временному шагу наблюдалась, начиная с  $\Delta t = 10^{-3}$ . Маркерный и дипольный методы сходились по временному шагу, начиная с величины  $\Delta t = 10^{-2}$ .

Картины эволюции контура пятна отражают основные механизмы, приводящие к перемешиванию, а именно: вытягивание в нити и образование складок, что показано на рис.3.

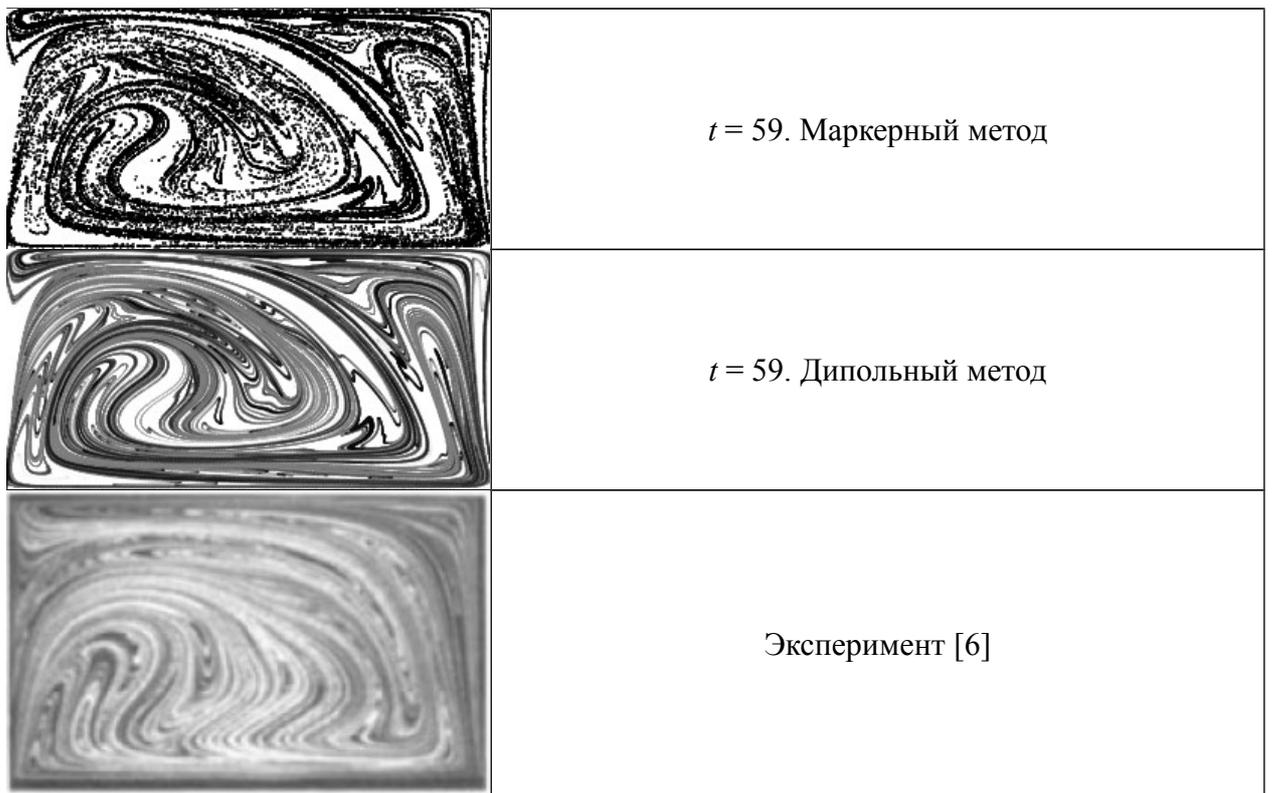


Рис.3. Картина развитой стадии перемешивания.

Во втором примере моделировалось перемешивание в плоском проточном тракте. Рассматриваемый тракт имел следующие геометрические размеры: максимальная ширина 0.2 м, длина 0.9 м. Геометрическая форма начального участка тракта приведена на рис.4.

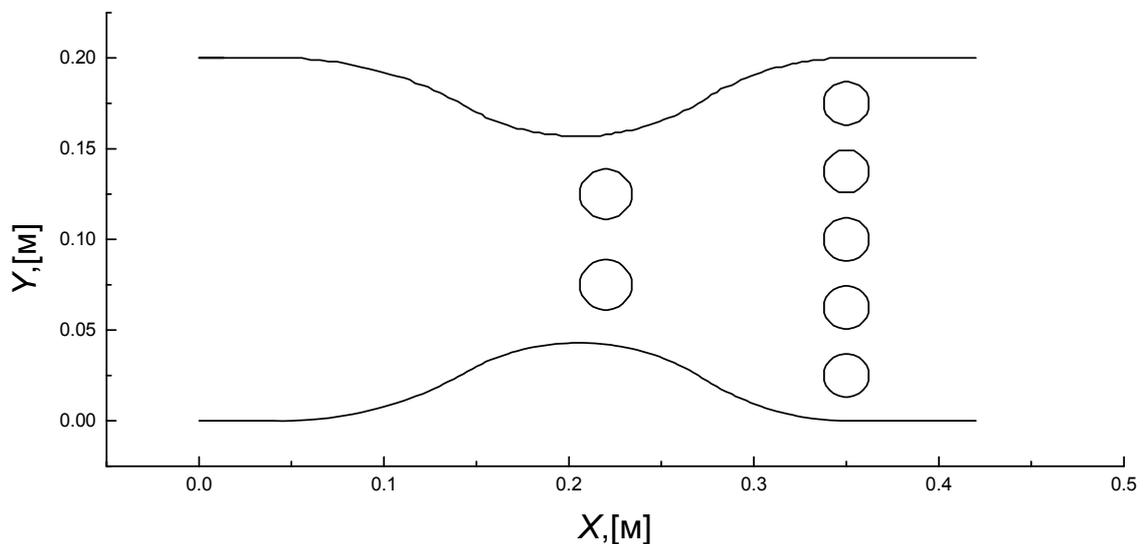


Рис.4. Геометрическая форма начального участка проточного тракта.

Внутренние препятствия состояли из двух рядов цилиндров: Первый ряд из двух цилиндров диаметром 0.026 м и второй ряд из пяти цилиндров диаметром 0.02 м. Скорость во входном сечении равнялась 15.0 м/с. Сравнение картин перемешивания и

полей завихренности (рис.5 а,б) на одном временном шаге показало наличие взаимосвязи между вихревыми структурами и особыми точками течения.

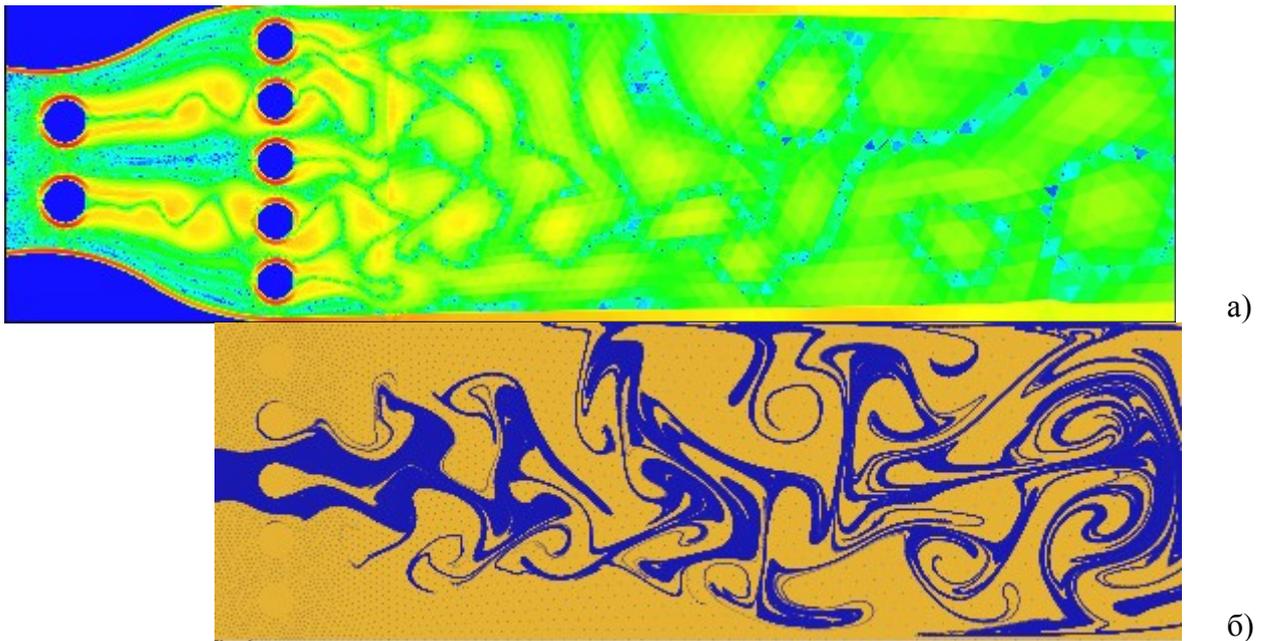


Рис.5. Поле завихренности (а) и картина перемешивания (б) в проточном тракте.

На рис.6 приведены картины перемешивания на выходе из проточного тракта, соответствующие одному моменту времени, но полученные различными методами.

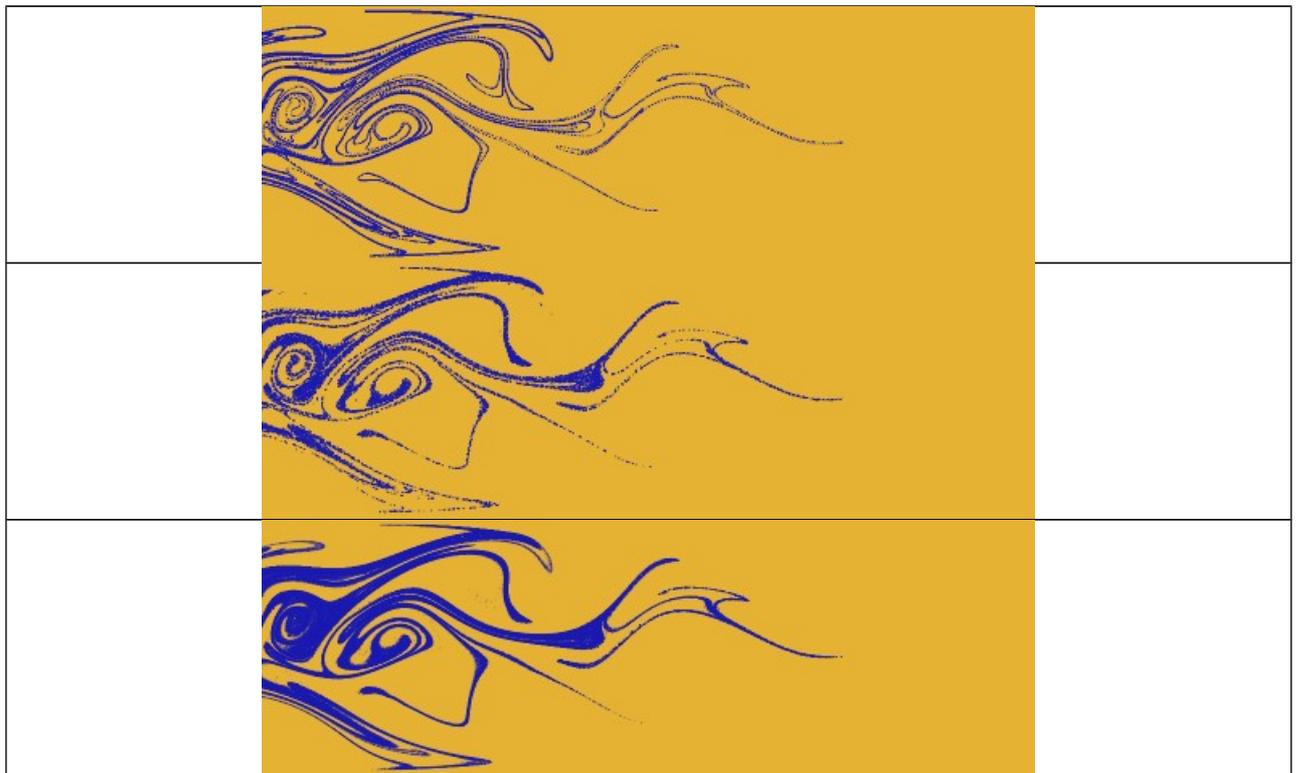


Рис.6. Сравнение картин перемешивания на выходе из проточного тракта, полученных разными методами (контурный, маркерный, дипольный).

Из рис.6. видно, что дипольный метод не уступает по качеству контурному и превосходит маркерный метод по точности воспроизведения тонких нитевидных структур.

В качестве третьего примера рассматривалась задача перемешивания в осесимметричном проточном тракте в случае стационарного течения. Расчетная область представляет собой цилиндр длиной  $L=0.165$  м и радиусом  $R=0.006965$  м. Подача жидкости осуществляется через кольцевой разрез, расположенный на расстоянии 2.5 радиуса от закрытого торца цилиндра. Стационарное векторное поле скоростей схематично изображено на рис.7.

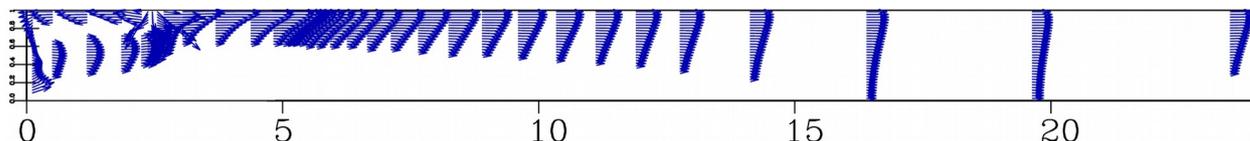


Рис.7. Стационарное векторное поле скоростей в осесимметричном проточном тракте.

На рис.8 показана мгновенная картина перемешивания для четырех разноцветных примесей, брошенных через кольцевой разрез. Углы вброса локализованы и равны  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  и  $270^\circ$ , соответственно.

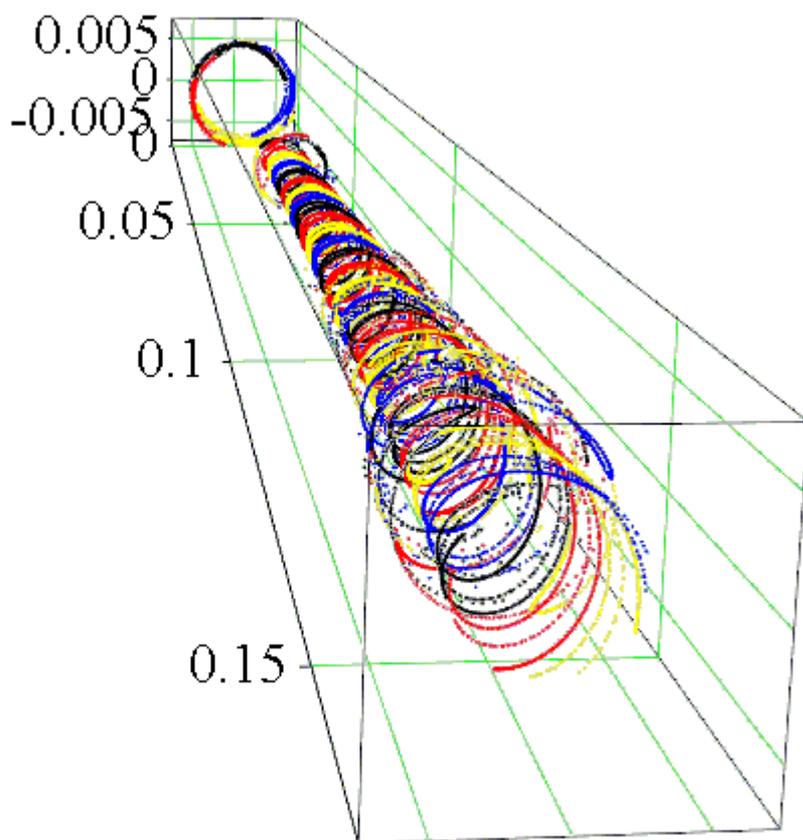


Рис.8. Мгновенная картина перемешивания примесей.

## **Заключение**

В настоящей работе реализован комплекс алгоритмов и программ для моделирования процессов перемешивания в жидкостях и последующей оценке качества получаемой смеси как в замкнутых емкостях, так и в проточных трактах.

Предложен дипольный метод для моделирования процессов перемешивания в жидкостях и последующей оценке качества получаемой смеси. Проведен сравнительный анализ различных методов. Показано, что дипольный метод является компромиссом между высокоточным, но затратным контурным методом и экономичным, но менее точным, маркерным методом. Дипольный метод несложен в программной реализации, что выгодно отличает его от контурного метода.

Рассмотрены различные критерии оценки качества получаемой смеси на выходе из проточного тракта, которые максимально эффективно используют преимущества всех трех имеющихся методов.

## **Литература**

1. Мелешко В.В., Краснопольская Т.С. Смешивание вязких жидкостей // Нелинейная динамика, 2005, Т.1, №1, с.69-109
2. Sethian J.A. Curvature and the Evolution of Fronts // Communication of Mathematical Physics, 101, 4, 1985.
3. Sethian J.A. Level Set Methods, Evolving Interface in Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Material Science, Cambridge University Press (1996)
4. Enright D., Fedkiw R., Ferziger J., Mitchell I. A Hybrid Particle Level Set Method for Improved Interface Capturing // J. Comput. Phys. 183, 83-116 (2002).
5. Vikhansky A. Simulation of topological chaos in laminar flows//CHAOS, V.14, №1, 2004.
6. Ottino J.M. Mixing, Chaotic Advection and Turbulence // Annu. Rev. Fluid Mech. 1990, №22, p.207-253
7. Ottino J.M. The Mixing of Fluids // Scientific American, January 1989
8. Винников В.В., Ревизников Д.Л. Применение декартовых сеток для решения уравнений Навье-Стокса в областях с криволинейными границами// Математическое Моделирование, 2005, т.17, №8, с. 15-30.

---

Сведения об авторах:

*Винников Владимир Владимирович, научный сотрудник кафедры вычислительной математики и программирования Московского авиационного института (государственного технического университета), к.ф.-м.н.;  
e-mail: vvinnikov@list.ru;  
контактный телефон: 158-48-94;*

*Ганиев Кирилл Олегович, аспирант кафедры вычислительной математики и программирования Московского авиационного института (государственного технического университета);*

*Ревизников Дмитрий Леонидович, профессор кафедры вычислительной математики и программирования Московского авиационного института (государственного технического университета), д.ф.-м.н;  
e-mail: reviz@k806.mainet.msk.su;  
контактный телефон: 158-48-94.*

*Чередов Владимир Владимирович, научный сотрудник Научного центра нелинейной волновой механики и технологии РАН;*