

УДК: 514.181.2:519.67:612.778.1.068

Об одной локальной системе координат на гладкой поверхности, применяемой в компьютерном моделировании процесса изготовления конструкций из композиционных материалов

Битюков Ю.И.

*Московский Авиационный Институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия
e-mail:yib72@mail.ru*

Аннотация

Представлено построение на гладкой поверхности локальной системы координат, обладающей двумя важными в практических приложениях свойствами. Во-первых, координатное отображение выписывается в явном виде, во-вторых, оно сколь угодно мало отличается от координатного отображения полугеодезической системы координат. Используя построенную систему координат и теорию графов, в статье находится оптимальный закон движения раскладочного механизма намоточного станка. Такой закон движения ищется в некотором ориентированном, взвешенном графе путем, который имеет наименьшую сумму весов ребер, представляющих собой время перехода между двумя последовательными вершинами.

Ключевые слова: намотка, геодезическая, полугеодезическая система координат

Введение

Последние десятилетия являются свидетелями все возрастающего применения композиционных материалов в авиастроении и ракетно-космической отрасли. Это объясняется простотой достижения аэродинамических свойств и заданного теоретического контура внешнего обвода летательных аппаратов при изготовлении конструкций из композиционных материалов, небольшим весом, а также возможностью получать монолитные конструкции без швов и креплений. Одним из недостатков композиционных материалов является до сих пор их высокая

стоимость. Поэтому при моделировании процесса изготовления конструкций из композитов методом намотки лентой, составленной из однонаправленных армирующих волокон, пропитанных связующим, которая укладывается с натяжением на поверхность технологической оправки, необходимо иметь высокую точность соответствующих моделей не только для достижения требуемых параметров конструкций, но и для экономии материалов за счет виртуальной компьютерной отладки процесса.

Основным технологическим фактором, регулирующим прилегание ленты к поверхности оправки, является заданное натяжение на раскладчике ленты намоточного станка. Натяжение может быть как постоянным, так и переменным, в зависимости от сложности поверхности технологической оправки, схемы армирования, возможностей намоточного оборудования. Обычно стараются задать некоторое среднее значение натяжения ленты, которое вызывает деформацию армирующего материала, не превышающую максимально допустимую. Такое натяжение не обеспечивает в полной мере прилегание ленты к поверхности технологической оправки. При разработке управляющей программы важно знать необходимое натяжение ленты на каждом этапе укладки ленты для формирования правильного закона движения раскладчика ленты. Кроме того, важное значение имеет учет скорости протяжки ленты через лентоформирующий тракт намоточного станка. Известно, что скорость протяжки ленты оказывает сильное возмущающее воздействие на интенсивность пропитки ленты, а, значит, и на качество изделия.

В статье [0] было дано построение оптимального закона движения раскладывающего механизма намоточного станка с использованием динамического программирования. Одним из недостатков такого подхода является большое время нахождения закона движения. Причиной тому, кроме применения динамического программирования, является использование интерполяционных кубических сплайнов в моделировании укладки ленты на оправку. В данной статье этот существенный недостаток устраняется посредством применения специальной локальной системы координат на поверхности (при ее построении интерполяция координатного отображения полугеодезической системы координат заменяется на

локальную аппроксимацию кубическими сплайнами) и поиска оптимального закона движения в некотором ориентированном, взвешенном графе путем, который имеет наименьшую сумму весов ребер, представляющих собой время перехода между двумя последовательными вершинами.

Постановка задачи

Дана поверхность $S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D = \{u_1; b_1\} \times \{u_2; b_2\}$ класса C^k и кривая $g : \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$, $t \in [q_0 - a_K; q_1 + a_K]$, $a_K > 0$ класса C^k .

1) Требуется построить на поверхности локальную систему координат t, d , для которой координатное отображение $F : (t, d) \rightarrow (u, v)$, $(t, d) \in [q_0; q_1] \times [-d/2; d/2]$, $d > 0$ принадлежит классу C^k , выписывается в явном виде и отображение F сколь угодно точно аппроксимирует (в смысле нормы в C^k) координатное отображение, возникающее при введении полугеодезической системы координат на поверхности, связанной с выбранной кривой на поверхности.

2) Схема укладки ленты задается с помощью гладкой кривой γ , называемой кривой армирования. Требуется переместить нитераскладчик из начального положения в конечное за минимальное время, не нарушая ограничений на натяжения нитей ленты, допустимые положения нитераскладчика и скорость протяжки ленты через лентоформирующий тракт.

О некоторых оценках погрешности при локальной аппроксимации сплайнами на равномерной сетке

Локальная сплайновая аппроксимация [0] основана на представлении сплайнов степени n дефекта 1 на сетке $-\infty < x_{-3} < \dots < x_0 = a < \dots < x_n = b < \dots < x_{n+3} < +\infty$ через нормализованные В-сплайны $S_n(x) = \sum_i b_i(f) \cdot N_{n+1,i}(x)$, где $b_i(f)$ – последовательность линейных функционалов, выбор которых и определяет вид приближения, а В-сплайны определены соотношением:

$$N_{m,i}(x) = \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-m+1}} N_{m-1,i}(x) + \frac{x - x_{i-m}}{x_{i-1} - x_{i-m}} N_{m-1,i-1}(x), \quad N_{1,i}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_{i-1}, x_i); \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_i). \end{cases}$$

Заметим, что В-сплайны обладают следующими важнейшими свойствами. Во-первых, они образуют разбиение единицы, т.е. для любого x выполняется равенство $\sum_i N_{m,i}(x) = 1$. Во-вторых, В-сплайн $N_{m,i}(x)$ отличен от нуля только на интервале $(x_{i-m}; x_i)$. Алгоритмическая сторона дела состоит в вычислении функционалов $b_i(f)$.

Мы будем рассматривать сплайны вида

$$S(x) = \sum_{p=1}^{n+3} (\lambda_0 f_{p-3} + \lambda_1 f_{p-2} + \lambda_2 f_{p-1}) \cdot N_{4,p}(x), \quad \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Изучим погрешность приближения. Для случая $\lambda_0 = -1/6, \lambda_1 = 4/3, \lambda_2 = -1/6$ погрешность приближения представлена в [0]. Предположим, что функция $f \in C[a;b]$, а сетка равномерная с шагом h . Тогда, если $x \in [x_{i-1}; x_i]$, то

$$\begin{aligned} |S(x) - f(x)| &= \left| \sum_{p=1}^{n+3} (\lambda_0 f_{p-3} + \lambda_1 f_{p-2} + \lambda_2 f_{p-1}) \cdot N_{4,p}(x) - f(x) \right| = \\ &= \left| \sum_{p=i}^{i+3} (\lambda_0 f_{p-3} + \lambda_1 f_{p-2} + \lambda_2 f_{p-1}) \cdot N_{4,p}(x) - f(x) \right| = \\ &= \left| \sum_{p=i}^{i+3} (\lambda_0 f_{p-3} + \lambda_1 f_{p-2} + \lambda_2 f_{p-1}) \cdot N_{4,p}(x) - \sum_{p=i}^{i+3} f(x) \cdot N_{4,p}(x) \right| \leq \\ &\leq \sum_{p=i}^{i+3} \left| \lambda_0 f_{p-3} + \lambda_1 f_{p-2} + \lambda_2 f_{p-1} - \lambda_0 f(x) - \lambda_1 f(x) - \lambda_2 f(x) \right| \cdot N_{4,p}(x) \leq \\ &\leq \sum_{p=i}^{i+3} \left(\left| \lambda_0 \right| \left| f_{p-3} - f(x) \right| + \left| \lambda_1 \right| \left| f_{p-2} - f(x) \right| + \left| \lambda_2 \right| \left| f_{p-1} - f(x) \right| \right) \cdot N_{4,p}(x) \leq \\ &\leq 3 \left(\left| \lambda_0 \right| + \left| \lambda_1 \right| + \left| \lambda_2 \right| \right) \cdot \omega(f, h), \end{aligned}$$

где $\omega(f, h) = \sup_{\substack{x', x'' \in [x_{i-3}; x_{i+3}] \\ |x' - x''| < h}} |f(x') - f(x'')|$ – модуль непрерывности функции f . Заметим,

что в случае равномерной сетки имеют место равенства:

$$(N_{4,i})'(x) = \frac{1}{h} N_{3,i-1}(x) - \frac{1}{h} N_{3,i}(x) \quad \text{и} \quad (N_{4,i})''(x) = \frac{1}{h^2} (N_{2,i}(x) - 2N_{2,i-1}(x) + N_{2,i-2}(x)).$$

Следовательно, имеет место оценка

$$\begin{aligned}
|S'(x) - f'(x)| &= \left| \sum_{p=1}^{n+3} (\lambda_0 f_{p-3} + \lambda_1 f_{p-2} + \lambda_2 f_{p-1}) \cdot \left(\frac{1}{h} N_{3,p-1}(x) - \frac{1}{h} N_{3,p}(x) \right) - f'(x) \right| = \\
&= \frac{1}{h} \left| \sum_{p=1}^{n+2} (\lambda_0 (f_{p-2} - f_{p-3}) + \lambda_1 (f_{p-1} - f_{p-2}) + \lambda_2 (f_p - f_{p-1})) \cdot N_{3,p}(x) - h f'(x) \right| = \\
&= \left| \sum_{p=1}^{n+2} (\lambda_0 f'_{p-2,p-3} + \lambda_1 f'_{p-1,p-2} + \lambda_2 f'_{p,p-1}) \cdot N_{3,p}(x) - \sum_{p=1}^{n+2} f'(x) \cdot N_{3,p}(x) \right| \leq \\
&\leq \sum_{p=i}^{i+2} \left(|\lambda_0| |f'_{p-2,p-3} - f'(x)| + |\lambda_1| |f'_{p-1,p-2} - f'(x)| + |\lambda_2| |f'_{p,p-1} - f'(x)| \right) \cdot N_{3,p}(x) \leq \\
&\leq 3 \left(|\lambda_0| + |\lambda_1| + |\lambda_2| \right) \cdot \omega(f', h).
\end{aligned}$$

Здесь была использована теорема Лагранжа:

$$f_j - f_{j-1} = f'(\xi_{j,j-1})h, \quad f'(\xi_{j,j-1}) = f'_{j,j-1}.$$

Аналогично, для второй производной находим

$$\begin{aligned}
|S''(x) - f''(x)| &= \\
&= \left| \sum_{p=1}^{n+3} (\lambda_0 f_{p-3} + \lambda_1 f_{p-2} + \lambda_2 f_{p-1}) \cdot \frac{N_{2,p}(x) - 2N_{2,p-1}(x) + N_{2,p-2}(x)}{h^2} - f''(x) \right| = \\
&= \frac{1}{h^2} \left| \sum_{p=1}^{n+1} (\lambda_0 (f_{p-3} - 2f_{p-2} + f_{p-1}) + \lambda_1 (f_{p-2} - 2f_{p-1} + f_p) + \right. \\
&\quad \left. + \lambda_2 (f_{p-1} - 2f_p + f_{p+1})) \cdot N_{2,p}(x) - h^2 f''(x) \right|.
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
f_{j-1} &= f(x_j - h) = f_j - hf'(x_j) + \frac{h^2}{2} f''(\xi_{j-1,j}); \\
f_{j+1} &= f(x_j + h) = f_j + hf'(x_j) + \frac{h^2}{2} f''(\xi_{j,j+1}).
\end{aligned}$$

Отсюда $f_{j-1} - f_j + f_{j+1} - f_j = \frac{h^2}{2} f''(\xi_{j-1,j}) + \frac{h^2}{2} f''(\xi_{j,j+1})$. Поэтому

$$f_{j-1} - f_j + f_{j+1} - f_j - h^2 f''(x) = \frac{h^2}{2} (f''(\xi_{j-1,j}) - f''(x)) + \frac{h^2}{2} (f''(\xi_{j,j+1}) - f''(x)).$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}
& |S''(x) - f''(x)| = \\
& = \left| \sum_{p=1}^{n+3} (\lambda_0 f_{p-3} + \lambda_1 f_{p-2} + \lambda_2 f_{p-1}) \cdot \frac{N_{2,p}(x) - 2N_{2,p-1}(x) + N_{2,p-2}(x)}{h^2} - f''(x) \right| = \\
& = \frac{1}{h^2} \left| \sum_{p=i}^{i+1} (\lambda_0 (f_{p-3} - 2f_{p-2} + f_{p-1}) + \lambda_1 (f_{p-2} - 2f_{p-1} + f_p) + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \lambda_2 (f_{p-1} - 2f_p + f_{p+1})) \cdot N_{2,p}(x) - h^2 f''(x) \right| \leq \\
& \leq \left(\frac{5}{2} |\lambda_0| + \frac{3}{2} |\lambda_1| + \frac{5}{2} |\lambda_2| \right) \omega(f'', h).
\end{aligned}$$

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $f \in C^k[a; b]$. Тогда имеет место оценка

$$\|S^{(k)} - f^{(k)}\|_{C[a;b]} \leq C_k \omega(f^{(k)}, h), \quad k = 0, 1, 2,$$

где $C_0 = C_1 = 3(|\lambda_0| + |\lambda_1| + |\lambda_2|)$, $C_2 = \frac{5}{2}|\lambda_0| + \frac{3}{2}|\lambda_1| + \frac{5}{2}|\lambda_2|$.

Для изучения локальной аппроксимации функции двух аргументов нам потребуется следующий результат.

Лемма 1. Пусть

$$\begin{aligned}
s(x) &= \sum_{p=1}^{n+3} (\lambda_0 f_{p-3} + \lambda_1 f_{p-2} + \lambda_2 f_{p-1}) \cdot N_{4,p}(x); \\
\sigma(x) &= \sum_{p=1}^{n+3} (\lambda_0 g_{p-3} + \lambda_1 g_{p-2} + \lambda_2 g_{p-1}) \cdot N_{4,p}(x)
\end{aligned}$$

локально аппроксимационные сплайны, причем $|f_j - g_j| < \delta$, $j = -2, \dots, n+2$. Тогда имеют место оценки

$$\|D^{(\alpha)} s - D^{(\alpha)} \sigma\|_{C[a;b]} \leq (|\lambda_0| + |\lambda_1| + |\lambda_2|) \cdot \frac{2^\alpha \cdot \delta}{h^\alpha}, \quad \alpha = 0, 1, 2.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
|s(x) - \sigma(x)| &\leq \sum_{p=1}^{n+3} (|\lambda_0| |f_{p-3} - g_{p-3}| + |\lambda_1| |f_{p-2} - g_{p-2}| + |\lambda_2| |f_{p-1} - g_{p-1}|) \cdot N_{4,p}(x) \leq \\
&\leq (|\lambda_0| + |\lambda_1| + |\lambda_2|) \cdot \delta.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s'(x) - \sigma'(x) &= \frac{1}{h} \sum_{p=1}^{n+2} (\lambda_0(f_{p-2} - f_{p-3}) + \lambda_1(f_{p-1} - f_{p-2}) + \lambda_2(f_p - f_{p-1})) \cdot N_{3,p}(x) - \\
&- \frac{1}{h} \sum_{p=1}^{n+2} (\lambda_0(g_{p-2} - g_{p-3}) + \lambda_1(g_{p-1} - g_{p-2}) + \lambda_2(g_p - g_{p-1})) \cdot N_{3,p}(x) = \\
&= \frac{1}{h} \sum_{p=1}^{n+2} (\lambda_0(f_{p-2} - f_{p-3} - g_{p-2} + g_{p-3}) + \lambda_1(f_{p-1} - f_{p-2} - g_{p-1} + g_{p-2}) + \\
&+ \lambda_2(f_p - f_{p-1} - g_p + g_{p-1})) \cdot N_{3,p}(x).
\end{aligned}$$

Отсюда

$$|s'(x) - \sigma'(x)| \leq (|\lambda_0| + |\lambda_1| + |\lambda_2|) \cdot \frac{2\delta}{h}.$$

Аналогично

$$|s''(x) - \sigma''(x)| \leq (|\lambda_0| + |\lambda_1| + |\lambda_2|) \cdot \frac{4\delta}{h^2}.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь локальную аппроксимацию функции двух аргументов кубическими сплайнами. Пусть функция $g(x, y)$ определена на прямоугольнике $[a_1 - \delta; b_1 + \delta] \times [a_2 - \delta; b_2 + \delta]$. Выберем на отрезках $[a_1 - \delta; b_1 + \delta]$, $[a_2 - \delta; b_2 + \delta]$ сетки так, чтобы

$$\begin{aligned}
a_1 - \delta &\leq x_{-3} < \dots < x_0 = a_1 < \dots < x_n = b_1 < \dots < x_{n+3} \leq b_1 + \delta; \\
a_2 - \delta &\leq y_{-3} < \dots < y_0 = a_2 < \dots < y_m = b_2 < \dots < y_{m+3} \leq b_2 + \delta.
\end{aligned}$$

Пусть h_x, h_y – шаги сеток и $h = \sqrt{h_x^2 + h_y^2}$. Пусть $g_{ij} = g(x_i, y_j)$. Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n+3} (\lambda_0 f_{i-3}(y) + \lambda_2 f_{i-2}(y) + \lambda_3 f_{i-1}(y)) \cdot N_{4,i}(x),$$

где $f_i(y) = \sum_{j=1}^{m+3} (\mu_0 g_{i,j-3} + \mu_1 g_{i,j-2} + \mu_2 g_{i,j-1}) \cdot N_{4,j}(y)$. Заметим, что функции $f_i(y)$ – это

локально аппроксимационные сплайны для $g(x_i, y)$. Поэтому имеют место оценки:

$$|D^{(k)} f_i(y) - D^{(0,k)} g(x_i, y)| \leq C_k \omega(D^{(0,k)} g, h), \quad k = 0, 1, 2.$$

Оценим погрешность приближения функции $g(x, y)$ функцией $f(x, y)$. Введем вспомогательную функцию

$$\sigma(x, y) = \sum_{i=1}^{n+3} (\lambda_0 g(x_{i-3}, y) + \lambda_1 g(x_{i-2}, y) + \lambda_2 g(x_{i-1}, y)) \cdot N_{4,i}(x).$$

Такая функция локально аппроксимирует функцию $g(x, y)$ при фиксированном y .

Поэтому имеют место оценки

$$\left| D^{(k,0)} \sigma(x, y) - D^{(k,0)} g(x, y) \right| \leq C_k \omega(D^{(k,0)} g, h), \quad k = 0, 1, 2.$$

Более того, функция $D^{(0,k)} \sigma(x, y)$ представляет собой локально аппроксимационный сплайн для функции $D^{(0,k)} g(x, y)$ при фиксированном y . Поэтому имеет место оценка

$$\left| D^{(0,k)} \sigma(x, y) - D^{(0,k)} g(x, y) \right| \leq C_0 \omega(D^{(0,k)} g, h), \quad k = 0, 1, 2.$$

Так как функция $D^{(0,1)} \sigma(x, y)$ аппроксимирует функцию $D^{(0,1)} g(x, y)$ при фиксированном y , то имеет место оценка

$$\left| D^{(1,1)} \sigma(x, y) - D^{(1,1)} g(x, y) \right| \leq C_1 \omega(D^{(1,1)} g, h), \quad k = 0, 1, 2.$$

Оценим теперь $\left| D^{(i,j)} \sigma(x, y) - D^{(i,j)} f(x, y) \right|$. Имеем

$$\begin{aligned} \left| D^{(0,k)} f(x, y) - D^{(0,k)} \sigma(x, y) \right| &= \left| \sum_{i=1}^{n+3} (\lambda_0 (D^{(k)} f_{i-3}(y) - D^{(0,k)} g(x_{i-3}, y)) + \right. \\ &+ \lambda_2 (D^{(k)} f_{i-2}(y) - D^{(0,k)} g(x_{i-2}, y)) + \lambda_3 (D^{(k)} f_{i-1}(y) - D^{(0,k)} g(x_{i-1}, y))) \cdot N_{4,i}(x) \left| \leq \right. \\ &\leq \sum_{i=1}^{n+3} (|\lambda_0| |D^{(k)} f_{i-3}(y) - D^{(0,k)} g(x_{i-3}, y)| + |\lambda_2| |D^{(k)} f_{i-2}(y) - D^{(0,k)} g(x_{i-2}, y)| + \\ &+ |\lambda_3| |D^{(k)} f_{i-1}(y) - D^{(0,k)} g(x_{i-1}, y)|) \cdot N_{4,i}(x) \leq \frac{C_0 C_k}{3} \omega(D^{(0,k)} g, h). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} D^{(1,0)} f(x, y) &= \frac{1}{h_x} \sum_{p=1}^{n+2} (\lambda_0 (f_{p-2}(y) - f_{p-3}(y)) + \\ &+ \lambda_1 (f_{p-1}(y) - f_{p-2}(y)) + \lambda_2 (f_p(y) - f_{p-1}(y))) \cdot N_{3,p}(x) \end{aligned}$$

и функция

$$\begin{aligned} f_i(y) - f_{i-1}(y) &= \sum_{j=1}^{m+3} (\mu_0 (g_{i,j-3} - g_{i-1,j-3}) + \\ &+ \mu_1 (g_{i,j-2} - g_{i-1,j-2}) + \mu_2 (g_{i,j-1} - g_{i-1,j-1})) \cdot N_{4,j}(y) \end{aligned}$$

представляет собой локально аппроксимационный сплайн для $g(x_i, y) - g(x_{i-1}, y)$.

Поэтому имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & |(f_i(y) - f_{i-1}(y)) - (g(x_i, y) - g(x_{i-1}, y))| \leq C_0 \omega(g(x_i, y) - g(x_{i-1}, y), h_y) = \\ & = C_0 \sup_{\substack{y', y'' \in [a_2 - \delta, b_2 + \delta] \\ |y' - y''| < h_y}} |(g(x_i, y') - g(x_{i-1}, y')) - (g(x_i, y'') - g(x_{i-1}, y''))| \leq \\ & \leq h_y C_0 \sup_{\substack{y', y'' \in [a_2 - \delta, b_2 + \delta] \\ |y' - y''| < h_y}} |D^{(0,1)}(g(x_i, \xi_{y', y''}) - g(x_{i-1}, \xi_{y', y''}))| \leq h_y C_0 \omega(D^{(0,1)}g, h). \end{aligned}$$

Отсюда

$$|D^{(1,0)}f(x, y) - D^{(1,0)}\sigma(x, y)| \leq C_0 \frac{h_y}{h_x} \omega(D^{(0,1)}g, h).$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} & |(f_i(y) - f_{i-1}(y))' - (g(x_i, y) - g(x_{i-1}, y))'| \leq C_1 \omega(g'_y(x_i, y) - g'_y(x_{i-1}, y), h_y) = \\ & = C_1 \sup_{\substack{y', y'' \in [a_2 - \delta, b_2 + \delta] \\ |y' - y''| < h_y}} |(g'_y(x_i, y') - g'_y(x_{i-1}, y')) - (g'_y(x_i, y'') - g'_y(x_{i-1}, y''))| \leq \\ & \leq h_y C_1 \sup_{\substack{y', y'' \in [a_2 - \delta, b_2 + \delta] \\ |y' - y''| < h_y}} |D^{(0,2)}(g(x_i, \xi_{y', y''}) - g(x_{i-1}, \xi_{y', y''}))| \leq h_y C_1 \omega(D^{(0,2)}g, h). \end{aligned}$$

Поэтому

$$|D^{(1,1)}f(x, y) - D^{(1,1)}\sigma(x, y)| \leq C_1 \frac{h_y}{h_x} \omega(D^{(0,2)}g, h).$$

Далее

$$\begin{aligned} D^{(2,0)}f(x, y) &= \frac{1}{h_x^2} \sum_{p=1}^{n+1} (\lambda_0(f_{p-3}(y) - 2f_{p-2}(y) + f_{p-1}(y)) + \\ & + \lambda_1(f_{p-2}(y) - 2f_{p-1}(y) + f_p(y)) + \lambda_2(f_{p-1}(y) - 2f_p(y) + f_{p+1}(y))) \cdot N_{2,p}(x). \end{aligned}$$

Функция

$$\begin{aligned} & f_{i-2}(y) - 2f_{i-1}(y) + f_i(y) = \\ & = \sum_{j=1}^{m+3} (\mu_0(g_{i-2, j-3} - 2g_{i-1, j-3} + g_{i, j-3}) + \mu_1(g_{i-2, j-2} - 2g_{i-1, j-2} + g_{i, j-2}) + \\ & + \mu_2(g_{i-2, j-1} - 2g_{i-1, j-1} + g_{i, j-1})) \cdot N_{4,j}(y) \end{aligned}$$

представляет собой локально аппроксимационный сплайн для функции $g(x_{i-2}, y) - 2g(x_{i-1}, y) + g(x_i, y)$. Поэтому справедлива оценка

$$\begin{aligned}
& \left| (f_{i-2}(y) - 2f_{i-1}(y) + f_i(y)) - (g(x_{i-2}, y) - 2g(x_{i-1}, y) + g(x_i, y)) \right| \leq \\
& \leq C_0 \omega(g(x_{i-2}, y) - 2g(x_{i-1}, y) + g(x_i, y), h_y) = \\
& = h_y C_0 \sup_{\substack{y', y'' \in [a_2 - \delta, b_2 + \delta] \\ |y' - y''| < h_y}} \left| g'_y(x_{i-2}, \xi_{y'y''}) - 2g'_y(x_{i-1}, \xi_{y'y''}) + g'_y(x_i, \xi_{y'y''}) \right| \leq \\
& \leq 2h_y C_0 \omega(D^{(0,1)} g, h)
\end{aligned}$$

Отсюда $\left| D^{(2,0)} f(x, y) - D^{(2,0)} \sigma(x, y) \right| \leq 2C_0 \frac{h_y}{h_x^2} \omega(D^{(0,1)} g, h)$. Итак, доказана следующая

теорема.

Теорема 2. Пусть $\Pi_\delta = [a_1 - \delta; b_1 + \delta] \times [a_2 - \delta; b_2 + \delta]$, $\Pi = [a_1; b_1] \times [a_2; b_2]$ функция $g \in C^k(\Pi_\delta)$, $k = 0, 1, 2$. Тогда имеют место следующие оценки:

$$\left\| D^{(0,k)} g - D^{(0,k)} f \right\|_{C^k(\Pi)} \leq C_0 \left(1 + \frac{C_k}{3} \right) \omega(D^{(0,k)} g, h), \quad k = 0, 1, 2;$$

$$\left\| D^{(k,0)} g - D^{(k,0)} f \right\|_{C^k(\Pi)} \leq C_k \omega(D^{(k,0)} g, h) + k C_0 \frac{h_y}{h_x^k} \omega(D^{(0,1)} g, h), \quad k = 1, 2;$$

$$\left\| D^{(1,1)} g - D^{(1,1)} f \right\|_{C^2(\Pi)} \leq C_1 \omega(D^{(1,1)} g, h) + C_1 \frac{h_y}{h_x} \omega(D^{(0,2)} g, h), \quad k = 2.$$

Следствие 1. Если $g \in C^1(\Pi_\delta)$, то при $h_y \leq h_x$ имеет место

$\left\| D^{(i,j)} g - D^{(i,j)} f \right\|_{C^1(\Pi)} = o(1), h \rightarrow 0, i, j = 0, 1, i + j \leq 1$. Если $g \in C^2(\Pi_\delta)$ и $h_y \leq h_x^2$, то

$\left\| D^{(i,j)} g - D^{(i,j)} f \right\|_{C^1(\Pi)} = o(1), h \rightarrow 0, i, j = 0, 1, 2, i + j \leq 2$.

Построение локальной системы координат на гладкой поверхности с явно заданным координатным отображением

Пусть в пространстве фиксирована декартова система координат $Oxyz$ и поверхность Σ класса C^2 задана параметрическим представлением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (u, v) \in D = [a_1; b_1] \times [a_2; b_2],$$

где вектор-функция

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v) \cdot \mathbf{i} + y(u, v) \cdot \mathbf{j} + z(u, v) \cdot \mathbf{k} \quad (1)$$

удовлетворяет условию $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) \neq 0$ в любой точке $(u, v) \in [a_1; b_1] \times [a_2; b_2]$.

Пусть γ гладкая кривая на поверхности, заданная параметрическим представлением

$$\gamma: \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(u_K(t), v_K(t)), t \in [\theta_0 - \alpha_K; \theta_1 + \alpha_K], \alpha_K > 0. \quad (2)$$

Число α_K может быть сколь угодно малым и вводится для удобства. Как легко видеть, при выполнении условий, наложенных на вектор-функцию, определяющую поверхность, каждая точка этой поверхности является заведомо обыкновенной и поэтому для любой гладкой кривой на поверхности существует (если ограничиться достаточно малым ее куском) полугеодезическая система координат, в которую данная кривая входит в качестве координатной линии. Напомним способ построения такой системы координат. В каждой точке $\tilde{M}(t)$ кривой γ берем направление на поверхности, ортогональное к направлению γ и проводим через эту точку в этом направлении геодезическую линию (что всегда можно сделать и притом единственным образом). Отложим на геодезической дуге длины δ , которая может быть и положительной, и отрицательной в зависимости от того, по какую сторону от γ отложена дуга. В результате мы приходим в некоторую точку $\tilde{M}^*(u_{II}; v_{II})$ на поверхности, положение которой вполне определяется значениями t и δ (система координат $u' = t, v' = \delta$ на поверхности является полугеодезической). Точка \tilde{M}^* определяется также параметрами u_{II}, v_{II} , следовательно, u_{II}, v_{II} есть функции от параметров t и δ : $u_{II}(t, \delta), v_{II}(t, \delta)$. Предположим, что указанные функции определены на прямоугольнике $K = [\theta_0 - \alpha_K; \theta_1 + \alpha_K] \times [-d_{\max}/2 - \Delta_2; d_{\max}/2 + \Delta_2]$, $\Delta_2 > 0, d_{\max} > 0$. Как известно, для поверхности, удовлетворяющей сформулированным выше условиям, такой прямоугольник всегда можно указать (можно найти положительные d_{\max}, Δ_2).

Рассмотрим равномерную сетку

$$\Delta_t : \tau_{-2} < \tau_{-1} < \tau_0 = \theta_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = \theta_1 < \tau_{n+1} < \tau_{n+2};$$

$$\tau_i = t_0 + h_t \cdot i, \quad i = -2, \dots, n+2, \quad h_t = \frac{\theta_1 - \theta_0}{n}.$$

Причем, значение n выберем так, чтобы выполнялось неравенство $2 \cdot h_t < \alpha_K$. Из каждой точки

$$Q_i(x(u_K(\tau_i), v_K(\tau_i)); y(u_K(\tau_i), v_K(\tau_i)); z(u_K(\tau_i), v_K(\tau_i))), \quad i = -2, \dots, n, n+1$$

строим две возможные геодезические γ_i^+ и γ_i^- , перпендикулярные кривой γ .

Пусть параметрические представления геодезических линий имеют вид

$$\gamma_i^+ : \mathbf{r}_i^+(s) = \mathbf{r}(u_i^+(s), v_i^+(s)), \quad s \in [0, d/2 + \alpha_{\Pi}], \quad \alpha_{\Pi} > 0, \quad d/2 + \alpha_{\Pi} < d_{\max}/2,$$

$$\gamma_i^- : \mathbf{r}_i^-(s) = \mathbf{r}(u_i^-(s), v_i^-(s)), \quad s \in [0, d/2 + \alpha_{\Pi}].$$

Здесь через s обозначена переменная длина дуги геодезических линий. Рассмотрим равномерную сетку

$$\Delta_s : s_{-m-2} < s_{-m-1} < s_{-m} = -d/2 < \dots < s_{-1} < s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_m = d/2 < s_{m+1} < s_{m+2};$$

$$s_j = h_s \cdot j, \quad j = -m-2, \dots, m+2, \quad h_s = \frac{d}{2 \cdot m}.$$

Причем значение m выберем так, чтобы выполнялось неравенство $2 \cdot h_s < \alpha_{\Pi}$.

Введем следующие обозначения:

$$u_{ij} = u_i^-(s_{-j}), \quad v_{ij} = v_i^-(s_{-j}), \quad j = -m-2, \dots, -1;$$

$$u_{ij} = u_i^+(s_j), \quad v_{ij} = v_i^+(s_j), \quad j = 0, 1, \dots, m+2.$$

и определим на прямоугольнике $K' = [\theta_0; \theta_1] \times [-d/2; d/2]$ функции $U(t, s)$, $V(t, s)$ следующим образом:

$$U(t, s) = \sum_{i=1}^{n+3} (\lambda_0 U_{i-3}(s) + \lambda_1 U_{i-2}(s) + \lambda_2 U_{i-1}(s)) N_{4,i}(t);$$

$$U_i(s) = \sum_{j=1}^{2m+3} (\mu_0 u_{i,j-m-3} + \mu_1 u_{i,j-m-2} + \mu_2 u_{i,j-m-1}) N_{4,j}(s), \quad i = -2, \dots, n+2;$$

$$V(t, s) = \sum_{i=1}^{n+3} (\lambda_0 V_{i-3}(s) + \lambda_1 V_{i-2}(s) + \lambda_2 V_{i-1}(s)) N_{4,i}(t);$$

$$V_i(s) = \sum_{j=1}^{2m+3} (\mu_0 v_{i,j-m-3} + \mu_1 v_{i,j-m-2} + \mu_2 v_{i,j-m-1}) N_{4,j}(s), \quad i = -2, \dots, n+2.$$

Согласно следствию 1, если $h_s \leq h_t$, то при $u_{\Pi}, v_{\Pi} \in C^1(K)$ будет

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|D^{(i,j)}u_{\Pi} - D^{(i,j)}U\|_{C^1(K)} = 0; \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|D^{(i,j)}v_{\Pi} - D^{(i,j)}V\|_{C^1(K)} = 0;$$

$$0 \leq i + j \leq 1; \quad h = \sqrt{h_t^2 + h_s^2}.$$

Следовательно, отображение $F : (t, s) \mapsto (U(t, s), V(t, s)), (t, s) \in K'$ является координатным отображением некоторой локальной системы координат на поверхности близкой к полугеодезической системе. Заметим, что функции U, V можно записать в следующем виде:

$$U(t, s) = \sum_{i=1}^{n+3} \sum_{j=1}^{2m+3} p_{ij} N_{4,j}(s) N_{4,i}(t) = (N_{4,1}(t) \dots N_{4,n+3}(t)) \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1,2m+3} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n+3,1} & \dots & p_{n+3,2m+3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{4,1}(s) \\ \dots \\ N_{4,2m+3}(s) \end{pmatrix},$$

$$V(t, s) = \sum_{i=1}^{n+3} \sum_{j=1}^{2m+3} q_{ij} N_{4,j}(s) N_{4,i}(t) = (N_{4,1}(t) \dots N_{4,n+3}(t)) \begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1,2m+3} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{n+3,1} & \dots & q_{n+3,2m+3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{4,1}(s) \\ \dots \\ N_{4,2m+3}(s) \end{pmatrix},$$

где

$$p_{ij} = l_0(m_0 u_{i-3,j-m-3} + m_1 u_{i-3,j-m-2} + m_2 u_{i-3,j-m-1}) +$$

$$+ l_1(m_0 u_{i-2,j-m-3} + m_1 u_{i-2,j-m-2} + m_2 u_{i-2,j-m-1}) +$$

$$+ l_2(m_0 u_{i-1,j-m-3} + m_1 u_{i-1,j-m-2} + m_2 u_{i-1,j-m-1});$$

$$q_{ij} = l_0(m_0 v_{i-3,j-m-3} + m_1 v_{i-3,j-m-2} + m_2 v_{i-3,j-m-1}) +$$

$$+ l_1(m_0 v_{i-2,j-m-3} + m_1 v_{i-2,j-m-2} + m_2 v_{i-2,j-m-1}) +$$

$$+ l_2(m_0 v_{i-1,j-m-3} + m_1 v_{i-1,j-m-2} + m_2 v_{i-1,j-m-1}).$$

Следует отметить, что число ненулевых слагаемых в выражениях для функций U и V не превосходит 16, независимо от мелкости выбираемых сеток. За счет этого достигается относительно высокая скорость вычисления значения вектор-функции поверхности и ее частных производных.

При формировании изделия из композиционных материалов методом намотки, по исходному состоянию укладываемой ленты различают «сухую» и «мокрую» намотки. Для «сухой» намотки используется заранее изготовленная (сформированная из определенного числа нитей, определенной ширины и толщины, подсушенная и смотанная в барабаны) лента. При «мокрой» намотке лента

формируется из нитей, пропитываемых связующим в процессе намотки. Используя построенную локальную систему координат, мы можем моделировать укладку ленты на поверхность с помощью вектор-функции

$$\mathbf{w}(t,d) = \mathbf{r}(U(t,d), V(t,d)), (t,d) \in K_s = \{(t,d): t_0 \leq t \leq t_1, -s_1(t) \leq d \leq s_2(t)\}, \quad (3)$$

где положительные на отрезке $[q_0; q_1]$ функции $s_1(t)$ и $s_2(t)$ задают закон изменения ширины ленты. При этом $0 < d_{\min} \leq s_1(t) + s_2(t) \leq d$, $s_1(t), s_2(t) \leq d/2$. Здесь d – максимальная ширина ленты при «мокрой» намотке и неизменная ширина ленты при «сухой» намотке. Очевидно, что гомеоморфизм

$$H(t,s) = \left(\frac{2s}{d}, -s_1(t) + (s_1(t) + s_2(t)) \frac{2s + d}{2d} \right)$$

задает отображение прямоугольника $K \times [d/2; d/2]$ на замкнутую область $K_s = \{(t,d): t_0 \leq t \leq t_1, -s_1(t) \leq d \leq s_2(t)\}$. Поэтому укладку ленты на оправку можно моделировать с помощью вектор-функции $\mathbf{w}: K \times \mathbb{R}^3$, определенной формулой

$$\mathbf{w}: (t,s) \mapsto P, \quad \overline{OP} = \mathbf{r}(U \circ H(t,s), V \circ H(t,s)), (t,s) \in K \times \mathbb{R}. \quad (4)$$

Будем предполагать, что выполнены следующие допущения:

1. Лента состоит из n идеальных растяжимых однородных нитей.
2. Укладка крайних нитей ленты осуществляется по кривым с параметрическим представлением $\mathbf{w}(t, d/2), t \in [q_0; q_1]$ и $\mathbf{w}(t, -d/2), t \in [q_0; q_1]$. Укладка произвольной нити, лежащей между крайними, осуществляется по одной из кривых $\mathbf{w}(t,s), t \in [q_0; q_1]$, где $s \in (-d/2; d/2)$ и фиксировано. Параметру $s=0$ соответствует заданная кривая армирования $\mathbf{r}(u(t), v(t)), t \in [q_0; q_1]$.

Применение теории графов к нахождению оптимального закона движения нитераскладчика

Положение раскладывающего механизма намоточного станка можно задать, указав радиус-векторы $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ крайних точек А и В механизма (рис. 1). Точки А и В,

очевидно, должны принадлежать торсовым поверхностям Σ_A и Σ_B , направляющие которых представляют собой кривые на поверхности, по которым укладываются крайние нити ленты (рис. 1).

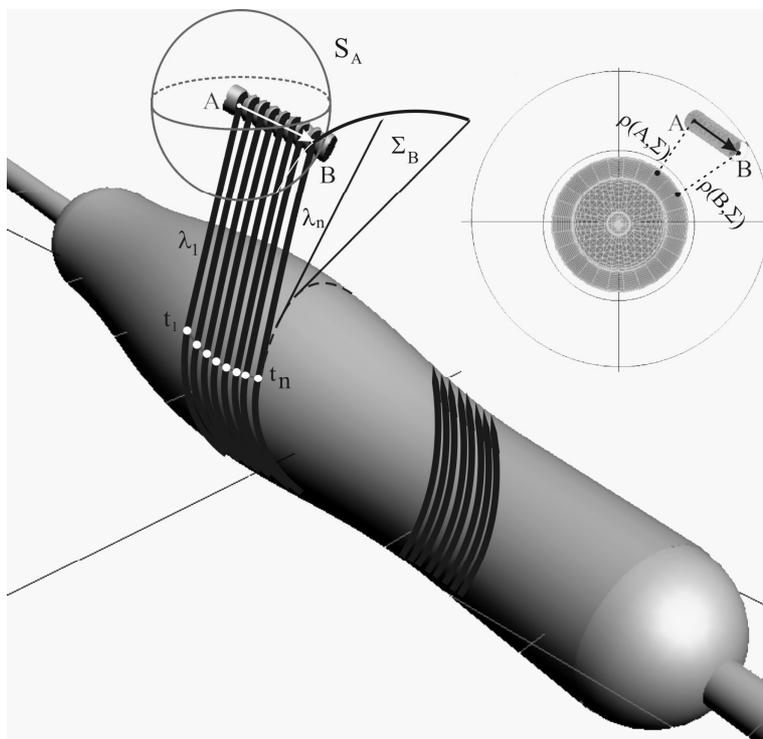


Рис. 1. Укладка нитей ленты на оправку

Используя вектор-функцию (4), легко написать параметрические представления торсовых поверхностей, которым должны принадлежать крайние точки нитераскладчика. Пусть

$$\alpha_1(t) = \frac{\mathbf{w}\check{\check{y}}(t, -d/2)}{|\mathbf{w}\check{\check{y}}(t, -d/2)|}; \quad \alpha_n(t) = \frac{\mathbf{w}\check{\check{y}}(t, d/2)}{|\mathbf{w}\check{\check{y}}(t, d/2)|}; \quad \beta_1(t) = \mathbf{w}(t, -d/2); \quad \beta_n(t) = \mathbf{w}(t, d/2).$$

Тогда параметрические представления поверхностей Σ_A и Σ_B имеют вид:

$$\begin{aligned} S_A: \mathbf{r}_A(t, l) &= \beta_1(t) + l \mathbf{C}\alpha_1(t), \quad t \in [q_0; q_1]; \quad l \geq 0; \\ S_B: \mathbf{r}_B(t, l) &= \beta_n(t) + l \mathbf{C}\alpha_n(t), \quad t \in [q_0; q_1]; \quad l \geq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, задать положения точек A и B можно указав значения параметров t, l . Обозначим t_1 – значение параметра t , определяющее образующую торсовой поверхности Σ_A , которой принадлежит точка A, l_1 – расстояние от точки A до точки касания нити и поверхности. Аналогично обозначим t_n, l_n – значения

параметров, определяющие точку В. Выбор таких параметров, конечно, не произволен и должен удовлетворять определенным ограничениям.

Во-первых, расстояние r между точками А и В не может изменяться, поэтому точка В должна принадлежать линии пересечения торсовой поверхности Σ_B и сферы S_A с центром в точке А и радиусом r (рис. 1). Таким образом, должно выполняться равенство $|\mathbf{r}_A(t_1, l_1) - \mathbf{r}_B(t_n, l_n)| = r$. Найдем возможные значения l_1 по заданному значению l_n и значениям t_1, t_n . Для этого рассмотрим образующие торсовых поверхностей, соответствующие выбранным значениям t_1, t_n и точку на образующей поверхности S_B , соответствующую значению l_n . Опустим перпендикуляр из этой точки на вторую образующую. Пусть основанием перпендикуляра соответствует значение \hat{l} . Это значение определяется из условия

$$(\alpha_1(t_1), \beta_1(t_1) - \beta_n(t_n) + \alpha_1(t_1)\hat{C} - \alpha_n(t_n)C_n) = 0.$$

Отсюда получаем

$$\hat{l}(t_1, t_n, l_n) = (\alpha_1(t_1), \alpha_n(t_n))C_n - \alpha_1(t_1)(\beta_1(t_1) - \beta_n(t_n)).$$

Следовательно, если выполняется неравенство $|\mathbf{r}_A(t_1, \hat{l}) - \mathbf{r}_B(t_n, l_n)| \leq r$, то возможные значения l_1 определяются равенством:

$$l_1 = \hat{l} \pm \sqrt{r^2 - |\mathbf{r}_A(t_1, \hat{l}) - \mathbf{r}_B(t_n, l_n)|^2}.$$

Итак, для того чтобы пары $(t_1, l_1), (t_n, l_n)$ удовлетворяли условию $|\mathbf{r}_A(t_1, l_1) - \mathbf{r}_B(t_n, l_n)| = r$ необходимо и достаточно, чтобы соблюдались условия

$$|\mathbf{r}_A(t_1, \hat{l}) - \mathbf{r}_B(t_n, l_n)| \leq r, l_1 = \hat{l} \pm \sqrt{r^2 - |\mathbf{r}_A(t_1, \hat{l}) - \mathbf{r}_B(t_n, l_n)|^2},$$

где $\hat{l} = (\alpha_1(t_1), \alpha_n(t_n))C_n - \alpha_1(t_1)(\beta_1(t_1) - \beta_n(t_n))$.

Во-вторых, нитераскладчик должен находиться в области DMR^3 его допустимых положений. Эта область определяется возможностями намоточного станка, и в рассматриваемой модели будет задаваться двумя поверхностями Σ_1 и Σ_2

(рис.1) с параметрическими представлениями $\mathbf{r}_1(u, v), \mathbf{r}_2(u, v), (u, v) \in F \subset \mathbb{R}^2$. Следовательно, должно выполняться условие $M(q) \in D$, где $OM(q) = \mathbf{r}_A(t_n, l_n) + m(\mathbf{r}_B(t_1, l_1) - \mathbf{r}_A(t_n, l_n)), m \in [0; 1]$.

Рассмотрим теперь ограничения на скорость протяжки ленты. Обозначим через $L_j(t_j, l_j), j = 1, n$, длины протянутых крайних нитей ленты, а через $D^{(a,b)}L_j = \frac{\partial^{a+b} L_j}{\partial t_j^a \partial l_j^b}$ соответствующие производные. Пусть t обозначает время. Тогда t_j, l_j являются функциями от времени t . Обозначим через \dot{t}_j, \dot{l}_j , первые производные этих функций по времени. Тогда скорость протяжки нити может быть найдены по формуле $\dot{L}_j = D^{(1,0)}L_j \dot{t}_j + D^{(0,1)}L_j \dot{l}_j$. Таким образом, должны выполняться неравенства $0 \leq \dot{L}_j \leq c_1$, где c_1 заданная константа.

Натяжения нитей ленты должны обеспечивать плотное прилегание их к поверхности технологической оправки. Для нахождения ограничений, накладываемых на натяжения нитей при намотке ленты, рассмотрим задачу их определения.

Рассмотрим произвольную нить, укладываемую по кривой $g_s : \mathbf{w}(t, s), t \in [q_0; q_1]$. В каждой ее точке имеется натяжение. При равновесии нити на оправке, натяжение будет функцией параметра t . Таким образом, натяжение нити, укладываемой по кривой g_s , описывается функцией $T(t, s)$ (s фиксировано). Мы будем рассматривать упругие деформации нитей. Тогда натяжение связано с относительным удлинением нити законом Гука и, как видно из [0], его можно найти по следующей формуле

$$T(t, s) = \frac{|D^{(1,0)}\mathbf{w}(t, s)|}{|D^{(1,0)}\mathbf{w}(t, s_0)|} (T(t, s_0) + E) - E,$$

где $s_0 \in [d/2; d/2]$ произвольное фиксированное значение, а E – модуль упругости материала нити. Итак, натяжение $T(t, s)$ произвольной нити ленты выражается через натяжение $T(t, s_0)$ одной из ее нитей.

Пусть лента состоит из n нитей, укладываемых по кривым $g_i : \mathbf{w}(t, s_i), t \in [q_0; q_1], i = 1, 2, \dots, n$. Так же, как и крайние точки А, В нитераскладчика, точка схода A_i i -ой нити $(A_1=A, A_n=B)$ принадлежит торсовой поверхности $S_{A_i} : \mathbf{r}_{A_i}(t, l) = \mathbf{w}(t, s_i) + l \frac{\mathbf{w}'(t, s_i)}{|\mathbf{w}'(t, s_i)|}, t \in [q_0; q_1], l \geq 0$. Пусть t_i – значение параметра t , определяющее образующую торсовой поверхности S_{A_i} , которой принадлежит точка A_i . Очевидно, что при выбранных t_1, t_n , значения $t_i, i = 2, \dots, n-1$ не могут быть выбраны произвольно. Так как нити должны быть в натянутом состоянии, то значения $t_i = t_i(t_1, t_n)$ должны быть выбраны из условия пересечения торсовой поверхности S_{A_i} и отрезка АВ. Таким образом, значение t_i находится из уравнения

$$\mathbf{w}(t, s_i) + l \frac{\mathbf{w}'(t, s_i)}{|\mathbf{w}'(t, s_i)|} = \mathbf{r}_B(t_n, l_n) + m(\mathbf{r}_A(t_1, l_1) - \mathbf{r}_B(t_n, l_n)),$$

где $l \geq 0, m \in [0; 1]$, а $t \in [\min(t_1; t_n) - d; \min(t_1; t_n) + d], d > 0$.

Пусть T_p – разрывная нагрузка материала нитей ленты. Тогда условие плотного прилегания нитей ленты к поверхности выражается следующими неравенствами:

$$0 < \frac{|D^{(1,0)} \mathbf{w}(t_i, s_i)|}{|D^{(1,0)} \mathbf{w}(t_i, s_0)|} (T(t_i, s_0) + E) - E < T_p, i = 1, 2, \dots, n$$

Итак, условие плотного прилегания нитей ленты к поверхности, выраженное предыдущими неравенствами, есть дополнительное ограничение на траекторию движения нитераскладчика и значения натяжения $T(t, s_0)$. Для упрощения дальнейших уравнений будем считать, что

$$T(t_1, s_0) = T(t_2(t_1, t_n), s_0) = \dots = T(t_{n-1}(t_1, t_n), s_0) = T(t_n, s_0).$$

Введем следующие обозначения

$$t_{ij} = t_i(t_j), l_{ij} = l_i(t_j), \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i(t_j), l_{ij}^{\&} = l_i^{\&}(t_j), T_j = T(t_{nj}, s_0).$$

В качестве значения $s_0 \in [-d/2; d/2]$ примем значение $d/2$. Тогда, если $t_{j,j+1}$ – время перехода нитераскладчика из состояния, в котором он находился в момент

времени t_j , в состояние, в котором он оказывается в момент времени t_{j+1} , то справедливы приближенные равенства

$$t_{i,j+1} = t_{ij} + \frac{D}{l_{ij}} t_{j,j+1}, \quad l_{i,j+1} = l_{ij} + l_{ij} \frac{D}{l_{ij}} \frac{t_{j,j+1}}{t_{ij}}, \quad T_{j+1} = T_j + DT_j.$$

Следовательно, должны выполняться равенства

$$t_{1,j+1} = t_{1j} + \frac{D}{l_{1j}} (t_{n,j+1} - t_{n,j}); \quad l_{n,j+1} = l_{nj} + \frac{l_{nj} D}{l_{nj}} (t_{n,j+1} - t_{n,j}).$$

В целях увеличения быстродействия алгоритма поиска траектории движения раскладчика ленты мы рассмотрим упрощенный, но вполне приемлемый вариант описанных выше ограничений. Выберем на отрезке $[q_0; q_1]$ равномерную сетку с шагом $D = (q_1 - q_0)/N$, $N \in \mathbb{N}$. Пусть $t_{n,j} = q_0 + D \cdot j$, $j = 0, 1, \dots, N$. Тогда

$$t_{1,j+1} = t_{1j} + D \frac{t_{n,j+1}}{l_{n,j}}; \quad l_{n,j+1} = l_{nj} + D \frac{l_{nj}}{l_{nj}}.$$

Время перехода $t_{j,j+1}$ из j -го состояния в $(j+1)$ -е может быть найдено следующим образом $t_{j,j+1} = \frac{D}{l_{nj}}$. Эффективность всего процесса в целом будем

характеризовать функцией вида: $J = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{D}{l_{nk}}$, которая представляет собой полное

время движения нитераскладчика из начального состояния в конечное. Оптимальность закона движения нитераскладчика будем понимать в смысле увеличения производительности процесса за счет сокращения времени изготовления конструкции.

Зададим область D допустимых положений нитераскладчика с помощью двух эквидистантных поверхностей исходной поверхности оправки, т.е. будем считать, что нитераскладчик находится в допустимом положении, если

$$h_1 \leq \min_{(u,v) \in [a_1;b_1] \times [a_2;b_2]} |\mathbf{r}_A(t_1, l_1) - \mathbf{r}(u,v)| \leq h_2; \quad h_1 \leq \min_{(u,v) \in [a_1;b_1] \times [a_2;b_2]} |\mathbf{r}_B(t_n, l_n) - \mathbf{r}(u,v)| \leq h_2,$$

где h_1, h_2 – заданные положительные числа. Пусть $L_B^{(1)}(t_n)$ и $L_B^{(2)}(t_n)$ корни уравнений

$$h_1 - \min_{(u,v) \in [a_1;b_1] \times [a_2;b_2]} |\mathbf{r}_B(t_n, l) - \mathbf{r}(u,v)| = 0; \quad h_2 - \min_{(u,v) \in [a_1;b_1] \times [a_2;b_2]} |\mathbf{r}_B(t_n, l) - \mathbf{r}(u,v)| = 0,$$

соответственно. Тогда допустимые значения $l_n \in \mathbb{O}_{\mathbb{H}_B}^{(1)}(t_n); \mathbb{L}_B^{(2)}(t_n)$. Выберем на отрезке $\mathbb{H}_B^{(1)}(q_0 + j\mathcal{D}); \mathbb{L}_B^{(2)}(q_0 + j\mathcal{D})$ равномерную сетку $w_l^{(j,n)}$ с $M+1$ узлами. Аналогично вводятся значения $L_A^{(1)}(t_1), L_A^{(2)}(t_1)$, и тогда допустимые значения $l_1 \in \mathbb{O}_{\mathbb{H}_A}^{(1)}(t_1); \mathbb{L}_A^{(2)}(t_1)$.

Отметим, что значения параметров t_1 и t_n принадлежат отрезку $[q_0; q_1]$, но значение $t_{1,j}$ следует искать поблизости от $t_{n,j} = q_0 + j\mathcal{D}$, на некотором интервале, меньшем, чем весь отрезок $[q_0; q_1]$. Поставим в соответствие каждому значению $l_n \in \mathbb{O}[\mathbb{L}_B^{(1)}(q_0 + j\mathcal{D}); \mathbb{L}_B^{(2)}(q_0 + j\mathcal{D})]$ функцию $f_j(l_n): [q_0; q_1] \rightarrow \mathbb{R}$, определенную равенством

$$f_j(l_n)(d) = r^2 - |\mathbf{r}_A(d, \hat{l}(q_0 + j\mathcal{D}, d, l_n)) - \mathbf{r}_B(q_0 + j\mathcal{D}, l_n)|^2, \quad d \in [q_0; q_1].$$

Пусть значения $d_j^{(1)}(l_n)$ и $d_j^{(2)}(l_n)$ определяют концы отрезка самого близкого к $t_{n,j} = q_0 + j\mathcal{D}$, удовлетворяющего условию $f_j(l_n)(d) \geq 0, d \in [d_j^{(1)}(l_n); d_j^{(2)}(l_n)]$. Тогда значения $t_{1,j}$ принадлежат этому отрезку. Выберем на отрезке $[d_j^{(1)}(l_n); d_j^{(2)}(l_n)]$ равномерную сетку $w_t^{(j,1)}(l_n)$ с $M+1$ узлами.

Далее, будем учитывать только натяжение крайних нитей ленты. Таким образом, должны выполняться условия:

$$E \frac{\left| D^{(1,0)} \mathbf{w}(t_{1,j}, d/2) \right|}{\left| D^{(1,0)} \mathbf{w}(t_{1,j}, -d/2) \right|} - E < T_j < (T_p + E) \frac{\left| D^{(1,0)} \mathbf{w}(t_{1,j}, d/2) \right|}{\left| D^{(1,0)} \mathbf{w}(t_{1,j}, -d/2) \right|} - E, \quad 0 < T_j < T_p. \quad (5)$$

Значение $t_{1,j} \in w_t^{(j,1)}(l_n)$ будем считать допустимым, если указанные интервалы изменения T_j имеют непустое пересечение.

Обозначим $w_j = \{(l_{n,j}, t_{1,j}) : l_{n,j} \in w_l^{(j,n)}, t_{1,j} \in w_t^{(j,1)}(l_{n,j})\}, j = 0, 1, \dots, N$. Тогда, если $(l_{n,j}, t_{1,j}) \in w_j, (l_{n,j+1}, t_{1,j+1}) \in w_{j+1}$, то

$$l_{1j}^{\&} = \frac{t_{1,j+1} - t_{1,j}}{D} l_{nj}^{\&}; \quad l_{1j}^{\&} = \frac{l_{n,j+1} - l_{n,j}}{D} l_{nj}^{\&}.$$

Как было сказано выше, значение $l_{1,j}$ для допустимых $t_{1,j}, l_{n,j}$ определяется равенством $l_{1,j} = \hat{l}(q_0 + j^j \mathcal{D}, t_{1,j}, l_{n,j}) \pm \sqrt{f_j(l_{n,j})(t_{1,j})}$. При этом, как отмечалось,

допустимым мы будем считать то значение, для которого $l_{1,j} \in \mathcal{O}_{\mathbb{H}}^{(1)}(t_{1,j}); L_A^{(2)}(t_{1,j}) \cap \mathbb{H}$.

Поскольку имеет место приближенное равенство $l_{1,j+1} \gg l_{1,j} + l_{1j}^{\&} \frac{D}{t_{nj}^{\&}}$, то

$l_{1j}^{\&} = \frac{l_{1,j+1} - l_{1,j}}{D} c_{1j}^{\&}$. С учетом ограничений на скорость протяжки ленты, должны

выполняться неравенства:

$$\begin{aligned} 0 & \leq \mathcal{J}_{\mathbb{H}}^{\mathcal{J}} D^{(1,0)} L_1(t_{1,j}, l_{1,j}) \frac{t_{1,j+1} - t_{1,j}}{D} + D^{(0,1)} L_1(t_{1,j}, l_{1,j}) \frac{l_{1,j+1} - l_{1,j}}{D} c_{1j}^{\&}; \\ 0 & \leq \mathcal{J}_{\mathbb{H}}^{\mathcal{J}} D^{(1,0)} L_n(t_{n,j}, l_{n,j}) + D^{(0,1)} L_n(t_{n,j}, l_{n,j}) \frac{l_{n,j+1} - l_{n,j}}{D} c_{nj}^{\&}. \end{aligned}$$

Поскольку $c_{nj}^{\&} > 0$, то должны выполняться условия

$$\begin{aligned} W_{j,j+1}^{(1)} &= D^{(1,0)} L_1(t_{1,j}, l_{1,j}) \frac{t_{1,j+1} - t_{1,j}}{D} + D^{(0,1)} L_1(t_{1,j}, l_{1,j}) \frac{l_{1,j+1} - l_{1,j}}{D} > 0; \\ W_{j,j+1}^{(2)} &= D^{(1,0)} L_n(t_{n,j}, l_{n,j}) + D^{(0,1)} L_n(t_{n,j}, l_{n,j}) \frac{l_{n,j+1} - l_{n,j}}{D} > 0. \end{aligned}$$

В этом случае положим $c_{nj}^{\&} = \min(\frac{c_1}{W_{j,j+1}^{(1)}}, \frac{c_1}{W_{j,j+1}^{(2)}})$. Такой выбор обеспечит максимальную скорость перемещения нитераскладчика между двумя последовательными состояниями. Время перемещения будет равно

$$t_{j,j+1} = \frac{D}{\min(\frac{c_1}{W_{j,j+1}^{(1)}}, \frac{c_1}{W_{j,j+1}^{(2)}})}.$$

Перейдем теперь к построению ориентированного, взвешенного графа G . В качестве его вершин будут выступать допустимые тройки (т.е. интервалы (5) имеют

непустое пересечение) $v_l = (l_{n_{j_s}}, t_{1_{j_s}}, l_{1_{j_s}})$, $s = 0, 1, \dots, n_j - 1$, $l = s + \sum_{k=0}^{j-1} n_k$, где

$$(l_{n_{j_s}}, t_{1_{j_s}}) \in \mathcal{O} w_j, l_{1_{j_s}} \in \mathcal{O}_{\mathbb{H}}^{(1)}(t_{1_{j_s}}); L_A^{(2)}(t_{1_{j_s}}) \cap \mathbb{H} \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

Под ребром графа G будем понимать упорядоченную пару $((l_{n_{j_s}}, t_{1_{j_s}}, l_{1_{j_s}}), (l_{n_{j_{p+1}}}, t_{1_{j_{p+1}}}, l_{1_{j_{p+1}}}))$, для которой $W_{j_s, j_{p+1}}^{(1)} > 0, W_{j_s, j_{p+1}}^{(2)} > 0$. Поставим в соответствие такому ребру вес, равный $t_{j_s, j_{p+1}}$.

Таким образом, поиск оптимальной траектории нитераскладчика сводится к поиску пути длины N в графе G , для которого сумма весов (времен перехода от одного положения нитераскладчика к следующему), составляющих его ребер, была бы наименьшей. Поиск такого пути (если он существует) может быть осуществлен с помощью, например, алгоритма Дейкстры [0].

Пусть A матрица смежности построенного графа G . Ее элемент, стоящий в i -ой строке и j -ом столбце равен единице, если существует ребро (v_i, v_j) , и нулю – в противном случае. Следовательно, матрица смежности представляет собой булеву матрицу. Если A и B булевы матрицы размера $n \times m$, то элементы матрицы $A \times B$ определяются, как $A_{ij} \times B_{ij}$. Если матрицы A и B имеют размеры $m \times n$ и $n \times k$, то элементы матрицы $A \times B$ размера $m \times k$ определяются, как $(A_{i1} \times B_{1j}) \times (A_{i2} \times B_{2j}) \times \dots \times (A_{in} \times B_{nj})$. Как обычно, обозначим $A^k = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_k$. Имеет место теорема [0].

Теорема 3. Пусть G – ориентированный граф с вершинами v_1, v_2, \dots, v_n и матрицей смежности A . Пусть $\hat{A} = A \times A^2 \times \dots \times A^n$. Из вершины v_i в вершину v_j имеется путь тогда и только тогда, когда $(\hat{A})_{ij} = 1$.

Следовательно, на основании данной теоремы можно сделать вывод о разрешимости задачи поиска оптимальной траектории нитераскладчика при выбранных сетках на соответствующих отрезках. Если в матрице

$\hat{A} = A \times A^2 \times \dots \times A^{\sum_{k=0}^N n_k}$ существует элемент $(\hat{A})_{ij} \neq 0$, где $i \in \{0, 1, \dots, n_0 - 1\}$, а $j \in \{e_{n_0}, e_{n_0 + 1}, \dots, e_{n_0 + n_1}, \dots, e_{n_0 + n_1 + n_2}, \dots, e_{n_0 + n_1 + n_2 + \dots + n_{N-1}}\}$, то задача разрешима. Для построения матрицы

\hat{A} удобно воспользоваться алгоритмом Уоршола [0].

После нахождения кратчайшего пути

$$v_{i_0} = (l_{n_0}, t_{10}, l_{10}), v_{i_1} = (l_{n_1}, t_{11}, l_{11}), \dots, v_{i_N} = (l_{n_N}, t_{1N}, l_{1N})$$

в графе G мы одновременно получаем промежуточные положения нитераскладчика и время перехода $t_{i_s, i_{s+1}}$ между двумя последовательными положениями. По определению допустимых положений интервалы (5) имеют непустое пересечение, поэтому мы всегда можем выбрать значение T_j в каждом из состояний так, чтобы обеспечивалось прилегание нитей ленты к оправке.

Рассмотрим пример намотки поверхности прямоугольного профиля и для сравнения кругового цилиндра по геодезической линии. На рисунке 2 показан граф, соответствующий четверти витка ленты при намотке поверхности прямоугольного профиля. На рисунке 3 показаны один виток ленты на поверхности прямоугольного профиля (рис 3а) и цилиндра (рис 3б) и поверхности, замотаемые при своем движении нитераскладчиком. На рисунке 4 показаны графики зависимости натяжения крайних нитей ленты от параметра t кривой армирования. В рассмотренных примерах предполагалось, что

$$L_1(t_1, l_{11}) = \int_{q_0}^{t_1} |\mathbf{w}\ddot{\mathbf{y}}(t, -d/2)| dt + l_{11}; \quad L_n(t_n, l_{1n}) = \int_{q_0}^{t_n} |\mathbf{w}\ddot{\mathbf{y}}(t, d/2)| dt + l_{1n}.$$

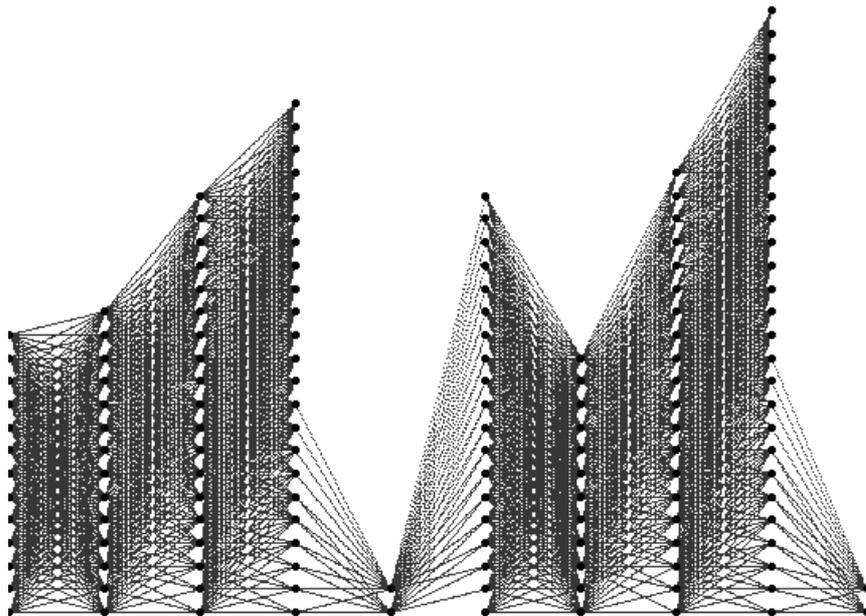


Рис. 2. Граф, соответствующий половине витка ленты при намотке поверхности
прямоугольного профиля

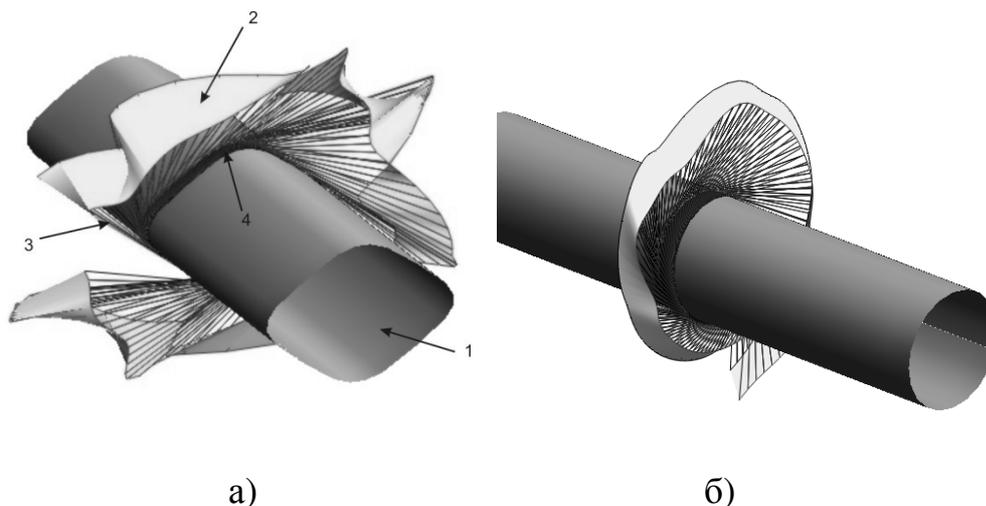


Рис. 3. Намотка поверхности прямоугольного профиля а) и кругового цилиндра б)
1 – поверхность оправки; 2 – поверхность, заматаемая нитераскладчиком при своем
движении; 3 – крайние нити ленты, 4 – лента на поверхности

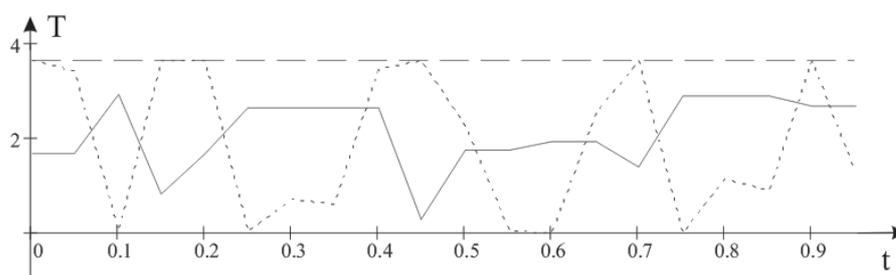


Рис. 4. Графики зависимости натяжения крайних нитей ленты от параметра t кривой
армирования

Заключение

Итак, в данной статье рассмотрено сведение задачи поиска оптимальной траектории и закона движения во времени нитераскладывающего механизма намоточного станка при изготовлении конструкций из композиционных материалов методом намотки к задаче поиска кратчайшего пути в некотором ориентированном взвешенном графе. Такой закон строится с учетом структуры ленты и различных ограничений на допустимые положения нитераскладчика, в том числе,

обеспечивается сохранение требуемого натяжения нитей ленты. Поскольку существуют стандартные алгоритмы поиска кратчайшего пути в графе, полученный в статье метод легко реализуется в CAD/CAM/CAE системах.

Библиографический список

1. Завьялов Ю. С. Методы сплайн-функций / Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.П. Мирошниченко. – М.: Наука, 1980 – 352 с.
2. Битюков Ю.И., Калинин В.А., Денискин Ю.И., Мирошниченко П.В. Нахождение оптимальной траектории движения нитераскладчика в процессе намотки конструкций из волокнистых композиционных материалов // Омский научный вестник. – 2012. – №2(110). – С. 14-18.
3. Андерсон Джеймс А. Дискретная математика и комбинаторика: Пер. с англ. – М.: Издательство дом «Вильямс», 2004. – 960 с.: ил.