

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего  
профессионального образования  
Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет)

На правах рукописи

Нгуен Ле Зунг



**МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗМУЩЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ ЗЕМЛИ  
ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС НА КОРОТКИХ  
ИНТЕРВАЛАХ ВРЕМЕНИ**

Специальность: 01.02.01 – “Теоретическая механика”

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

к. ф.-м. н.

ПЕРЕПЁЛКИН Вадим Владимирович

Москва - 2014

ВВЕДЕНИЕ .....	4
Глава I Возмущенные колебательные движения полюса Земли (интерполяция и прогноз).....	14
1.1 Постановка задачи. Системы координат.....	14
1.2 Невозмущённое движение мгновенной оси вращения Земли .....	18
1.3 Теоретическая модель колебательного движения полюса Земли. Уравнения движения.....	22
1.4 Численное моделирование: интерполяция и прогноз траектории движения полюса Земли. ....	27
Глава II Небесномеханическая модель неравномерности вращения деформируемой Земли.....	35
2.1 Неравномерности осевого вращения Земли и атомная шкала времени....	35
2.2 Динамическая модель внутригодовых вариаций осевого вращения Земли.....	38
2.3 Численное моделирование: интерполяция и прогноз .....	41
2.4 Неравномерности вращения Земли и проблема нестабильности шкал времени.....	46
2.5 Моделирование неравномерности осевого вращения Земли на коротком интервале времени .....	51

2.6 Внутрисуточные вариации осевого вращения Земли.....	59
Глава III Амплитудно-частотный анализ колебательного процесса земного полюса .....	65
3.1 Амплитудно-частотный анализ внутрисуточного колебательного процесса земного полюса. ....	65
3.2 Моделирование внутрисуточного колебательного процесса земного полюса .....	75
3.3 Среднесуточное движение полюса Земли (интерполяция и прогноз).....	83
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	93
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....	94

# ВВЕДЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена развитию фундаментальной задачи построения математических моделей вращательно-колебательных движений деформируемой Земли относительно центра масс, адекватных данным наблюдений и измерений Международной службы вращения Земли (МСВЗ).

Для решения ряда актуальных задач небесной механики, астрометрии, навигации требуется создание высокоточной модели вращательного движения Земли относительно центра масс. В прикладном аспекте особый интерес представляет предельно точный прогноз на коротких интервалах времени (в интервалах длительностью от 1-2 до 10-30 суток).

На основе модели вязкоупругого тела для системы "Земля-Луна" в поле притяжения Солнца с помощью асимптотических методов нелинейной механики и математического моделирования уравнений движения в переменных действие-угол даны качественный анализ и количественные оценки сложного динамического процесса, учитывающего взаимное расположение мгновенной оси вращения Земли, оси фигуры и её вектора кинетического момента. Исследованы возможности идентификации и приближения аналитической модели к реальным траекторным измерениям движения Земного полюса по данным МСВЗ.

Изучаемые колебательные движения полюса для вязкоупругой Земли основываются на наиболее общих уравнениях механики, которые справедливы для произвольных деформируемых тел.

Известно из астрономических наблюдений (с конца 19-ого века проводились регулярные наблюдения и измерения), что ось вращения Земли с течением

времени изменяет свою ориентацию как по отношению к связанной с Землей (ITRF - International Terrestrial Reference Frame), так и инерциальной (ICRF - International Celestial Reference Frame) системам координат [56]. Анализ траектории полюса как одной из существенных характеристик вращения деформируемой Земли представляет научный и практический интерес. Сложный процесс колебаний полюса содержит составляющие с сильно различающимися частотными и амплитудными характеристиками. По данным МСВЗ за последние 50 лет в движении полюса выделяются следующие основные составляющие: чандлеровское колебание (свободная нутация), амплитуда которого достигает величин 0.20"–0.25", а период  $433 \pm 2$  звездных суток, годовое колебание с амплитудой 0.07"–0.08" и периодом, равным одному году (365.25 звездных суток); принципиальное значение для построения математической модели движения полюса Земли на больших промежутках времени (~50 лет и более) имеет тренд полюса Земли (0.5" по направлению 90° на запад от Гринвича). Наблюдаемые колебания полюса имеют характер биений. Траектория его движения на поверхности Земли представляет собой свертывающуюся и развертывающуюся спираль с периодом, близким к шести годам.

Существенным вкладом в развитие теории движения Земли относительно центра масс является исследование Л. Эйлера (1765), определившего 305-суточный период свободной нутации для твердой Земли, и модель С. Чандлера (1891), обнаружившего из многочисленных наблюдений изменчивость широт обсерваторий. Значительное отличие чандлеровского периода от предписываемого классической теорией твердого тела (периода прецессии Эйлера 305 суток для

недеформируемой фигуры Земли) рассматривалось на основе модели деформируемой Земли в исследованиях С. Ньюкомба, Г. Джеффриса, А. Лява, У. Манка и Г. Макдональда, Я. Вондрака, Ф.А. Слудского, М.С. Молоденского и многих других [6–8]. Исторически принято называть указанное движение свободной нутацией деформируемой Земли или чандлеровским колебанием полюса [2, 51, 54, 59].

Пятым параметром, задающим ориентацию системы ITRF по отношению к ICRF, является фазовый угол, характеризующий неравномерное вращение Земли. Связанное с вращением Земли Всемирное время (*UT* - Universal Time) является весьма важной величиной, требующей постоянных измерений. Так как среднее солнечное время, а следовательно, и *UT* не являются достаточно точными шкалами времени, то в качестве таковой на относительно коротких промежутках (несколько лет) может быть использована атомная шкала времени (*TAI* - International Atomic Time), обладающая относительной стабильностью  $10^{-14}$ . Создание единой атомной шкалы времени, принятой по соглашению в качестве международного стандарта – международного атомного времени *TAI*, позволило принять её в качестве практического стандарта шкалы времени. Она приспособлена для поддержания связи со шкалой *UT1*, определяемой вращением Земли и известна как всемирное координированное время *UTC* (*UTC* - Coordinated Universal Time).

Во второй половине 19-го века было установлено в пределах достигнутой точности измерений, что Земля вращается вокруг своей оси неравномерно. Скорость вращения и угол поворота не удовлетворяют требуемым условиям

стабильности и не могут служить шкалой времени. Сложность этого явления состоит и в том, что данные наблюдений МСВЗ угловой скорости вращения Земли содержат большое число «пиков» при спектральном анализе процесса.

Наблюдаемые неравномерности вращения Земли в научной литературе для удобства разделены на короткопериодические (с характерными временами менее одного года) – внутригодовые колебания, вариации от года к году – межгодовые с характерными временами 6 лет и до  $10^2$  лет, вековые вариации на периоде прецессии земной оси и, наконец изменения угловой скорости вращения Земли в геологическом масштабе ( $10^5 - 10^7$  и более лет).

Основное внимание в диссертации уделено анализу динамической модели на основе уравнений Эйлера-Лиувилля, описывающей вариации продолжительности суток на коротких интервалах времени. С её помощью получена поправка  $UT1-UTC$ , где Всемирное время  $UT1$  связано с вращением Земли, а  $UTC$  - Всемирное координированное время, т.е. атомное время, скорректированное на целое число секунд для приблизительного соответствия  $UT1$  [43,49].

В связи с введением новой шкалы времени  $UTC$  (1972 г) появилось понятие «скачущей секунды». Это введение осуществляется МСВЗ с интервалом от одного до двух лет в зависимости от вариаций угловой скорости вращения Земли. Изучение вращения деформируемой Земли базируется на геоцентрических координатных системах. Эти системы физически реализуются в международных опорных системах координат - небесной (ICRF - International Celestial Reference Frame) и земной (ITRF - International Terrestrial Reference Frame) и

устанавливаются МСВЗ (IERS - International Earth Rotation and Reference Systems Service).

Эта служба постоянно поддерживает и уточняет их. Международная земная опорная система координат ITRF включает список координат и скоростей для фиксированной опорной даты примерно для 200 пунктов, распределённых по всей Земле. Величины неопределённостей для координат выражаются сантиметрами. Ориентация системы ITRF по отношению к ICRF представляется пятью параметрами: две угловые координаты – прецессия, нутация ( $d\psi$ ,  $d\epsilon$ ) небесного полюса в системе ICRF и две угловые координаты в ITRF, описывающие движение земного полюса ( $x_p$ ,  $y_p$ ); пятым параметром является фазовый угол  $\varphi$ , характеризующий вращение земной системы по отношению к небесной. Эти две координатные системы используют одну временную координату ( $TCG$  - Geocentric Coordinate Time).

#### **Актуальность темы исследования.**

Математические модели вращательно-колебательного движения Земли, которые с высокой точностью идентифицируют ее параметры вращения и дают надежный их прогноз, являются основополагающими при исследовании ряда астрометрических, геодинамических и навигационных задач.

Достижение высоких точностей координатно-временного обеспечения наземных (стационарных и подвижных), а также движущихся в околоземном пространстве объектов связано с фундаментальной проблемой определения параметров вращения Земли (ПВЗ). Без точного знания этих параметров невозможна высокоточная навигация космических аппаратов (КА).



Для уточнения координатно-временного обеспечения наиболее существенное значение имеет высокоточный прогноз ПВЗ (движения земного полюса и неравномерности ее осевого вращения - временной поправки  $UT1-TAI$ ) на коротких интервалах времени (от 1-2 до 20-30 суток). С помощью методов небесной механики разрабатывается модель прогнозирования вращательно-колебательных характеристик движения Земли на коротких интервалах времени под воздействием гравитационно-приливных сил от Солнца и Луны.

Высокоточные данные экспериментальных наблюдений ПВЗ свидетельствуют о сложных динамических процессах, происходящих в системе Земля-Луна-Солнце. Исследование этой проблемы на основе модели деформируемой Земли было частично проведено в работах С. Ньюкомба, А.Пуанкаре, Г. Джеффриса, А. Лява, П. Мельхиора, У. Манка и Г. Макдональда, Ф.А. Слудского, М.С. Молоденского и многих других.

Актуальность проблемы обусловлена также существенно возросшей точностью астрометрических измерений и отсутствием рационального подхода при построении моделей прогнозирования вращательно-колебательного движения Земли на интервалы различной длительности с соответствующими им требуемыми современными приложениями точностями.

В этой связи решаемые в диссертационной работе задачи моделирования вращательно-колебательного движения Земли и их приложения являются **актуальными**.

**Цели и задачи диссертационной работы.** Целью диссертации является разработка динамических моделей вращательно-колебательного движения Земли,

адекватных данным наблюдений и измерений МСВЗ, и прогнозирование колебаний земного полюса и неравномерности осевого вращения Земли на коротких интервалах времени.

**Научная новизна** работы состоит в следующем:

- 1) Проведено численно-аналитическое моделирование колебательного движения полюса Земли в переменных действие-угол, адекватное данным наблюдений и измерений МСВЗ.
- 2) Разработана небесномеханическая модель приливной неравномерности осевого вращения деформируемой Земли, учитывающая короткопериодические возмущения Луны с комбинационными частотами.
- 3) Установлена целесообразность учёта поправок на возмущения короткопериодических лунных приливов для повышения точностных характеристик прогноза нестабильности шкалы Всемирного времени  $UT1$ , связанного с вращением Земли, на коротких и внутрисуточных интервалах времени.
- 4) Построена модель внутрисуточных колебаний полюса Земли, которая имеет прикладное значение для задач навигации.

**Теоретическая и практическая значимость.**

Одной из основных перспективных направлений применения математических моделей движения Земли является уточнение орбитально-вращательных характеристик КА, поскольку при функционировании космической техники и систем телекоммуникаций точность координатно-временного обеспечения имеет существенное, основополагающее значение.

Прогноз фундаментальных составляющих ПВЗ в коротком интервале времени (до 20 суток) позволяет заметно повысить точность оценки параметров орбиты КА, что, в свою очередь, обеспечивает значительное повышение точности прогноза эфемерид спутников на последующие сутки. Вычислительная сложность алгоритмов непосредственного учета колебаний ПВЗ и их малопараметрических математических моделей приемлема для аппаратуры потребителя.

Полученные результаты могут быть рекомендованы для реализации в аппаратуре потребителя при решении навигационных задач, а именно, достижения высокой точности эфемеридно-временного обеспечения навигационных спутниковых систем.

#### **Методология и методы исследований.**

Теоретическое моделирование вращательно-колебательных движений Земли, адекватное данным наблюдений и измерений МСВЗ, проводится с помощью приближенных методов нелинейной механики в сочетании с численным экспериментом. Модель вращательно-колебательного процесса Земли основана на учете гравитационно-приливных моментов сил от Солнца и Луны. Для построения математической модели первого приближения использовалась динамическая теория вращения твердого тела. Моделирование (интерполяция и прогноз) вращательно-колебательного движения Земли, адекватного наблюдениям и измерениям МСВЗ, проводится с помощью метода наименьших квадратов (МНК).

**Положения, выносимые на защиту.** На защиту выносятся следующие положения:

- 1) Проведено моделирование колебательного движения полюса Земли в переменных действие-угол, адекватное данным наблюдений и измерений МСВЗ.
- 2) На основе разработанной небесномеханической модели исследованы фундаментальные аспекты приливной неравномерности осевого вращения деформируемой Земли, учтены короткопериодические возмущения Луны с комбинационными частотами.
- 3) С помощью спектрального анализа рассмотрены нестационарные колебания неравномерности вращения Земли с малыми амплитудами.
- 4) Установлено, что для повышения точностных характеристик прогноза нестабильности шкалы Всемирного времени UT1, связанного с вращением Земли, на коротких и внутрисуточных интервалах времени представляется целесообразным учёт поправок на возмущения короткопериодических лунных приливов.
- 5) Построена модель внутрисуточных колебаний полюса Земли, которая имеет важное прикладное значение для задач навигации.

#### **Степень достоверности и апробация результатов.**

Достоверность построенных математических моделей и сделанных выводов обеспечена корректной математической постановкой задач, применением строгих математических выводов и подтверждается хорошим согласованием с данными наблюдений и измерений МСВЗ. Основные результаты диссертации докладывались автором на конференциях.

**Апробация и внедрение результатов.** Основные результаты диссертации опубликованы в 7 печатных работах, в том числе в 3 статьях в журналах из списка ВАК и докладывались и обсуждались на:

- конференции «Устойчивость, управление и динамика твердого тела» (Донецк, июль 2011г.);
- XXXXII Всероссийский симпозиум «механика и процессы управления» (г.Миасс, декабрь 2012 года);
- конференции «Инновации в авиации и космонавтике - 2013» (Москва, МАИ, апрель 2013 г.);
- конференции «Международная конференция по математической теории управления и механике» (г. Суздаль, июль 2013 г.).

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, 3 глав и заключения. Она содержит 100 страниц машинописного текста, включающего 19 рисунков, и список литературы из 59 наименований.

# Глава I Возмущенные колебательные движения полюса Земли (интерполяция и прогноз)

## 1.1 Постановка задачи. Системы координат

Исследование фундаментальной астрометрической проблемы высокоточной интерполяции и прогноза траектории движения полюса Земли имеет существенное научное значение. Задача заключается в построении адекватной теоретической модели сложного многочастотного колебательного процесса на основе учёта небесномеханических и геофизических факторов. Важные технические приложения, как известно, непосредственно связаны с фундаментальной проблемой вращательно-колебательных движений Земли вокруг центра масс. Разрабатываемые инновационные технологии должны быть ориентированы на повышение точностных характеристик навигационных спутниковых систем типа ГЛОНАСС/GPS и на их массовое применение при решении прикладных задач в областях навигации, геодезии и геофизики [34-35]. В связи с этим актуальным является вопрос о достижении высокой точности координатно-временного обеспечения навигационных систем.

Рассматривается пространственный вариант задачи: считается, что деформируемая планета (Земля) и точечный спутник (Луна) совершают взаимное поступательно-вращательное движение вокруг общего центра масс (барицентра) в поле притяжения Солнца. Предполагается, что орбита барицентра системы планета-спутник (эклиптика) фиксирована в инерциальном пространстве, тем

самым пренебрегаются её малые колебания, обусловленные эффектом взаимодействия тел солнечной системы. В пространственном варианте задачи плоскость орбиты спутника (Луны) наклонена под малым углом к плоскости эклиптики и совершает прецессионное движение. Далее, вводится инерциальная система координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  с началом в притягивающем центре  $O$ , ось  $O\xi_3$  которой ортогональна плоскости орбиты, точка  $C$  (барицентр) и система осей Кёнига  $C\xi'_1\xi'_2\xi'_3$  с началом в барицентре  $C$ . С твердой частью (ядром) планеты жестко связана система координат  $C'_2x'_1x'_2x'_3$ , оси которой направлены по главным центральным осям недеформированной планеты ( $C'_2$  – центр масс планеты в отсутствии деформацией). При деформациях центр масс планеты смещается из  $C'_2$  в точку  $C_2$  – на вектор  $\mathbf{u}_C$  (вектор упругого смещения частиц). Для описания деформированного состояния вводится система координат  $C_2x_1x_2x_3$ , оси которой параллельны главным центральным осям инерции недеформированной системы  $C'_2x'_i$ .

Для адекватного описания возмущенных движений деформируемой Земли вокруг центра масс в работе используется простая механическая модель вязкоупругого твердого тела. Планета представляется двухслойной, состоящей из твердого ядра и вязкоупругой мантии. На внутренней границе перемещения частиц упругой среды отсутствуют, а внешняя граница свободна.

Влияние упругой податливости мантии на вращение Земли вокруг центра масс изучалось в работах [12-16]. Вследствие важности этой проблемы на этапе построения математической модели движения системы Земля-Луна в

диссертационной работе приводятся основные положения, связанные с уточнением тензора инерции вращающейся деформируемой Земли и с вычислением вектора кинетического момента и его производной по времени.

Вследствие малости деформаций среда мантии описывается линейной теорией вязкоупругости, а процесс деформирования происходит квазистатически. Эти допущения позволяют применить строгие методы теоретической механики и методы теории возмущений [5, 6], оценить упругие деформации и получить аналитические выражения для главного центрального тензора инерции  $J^*$  деформируемой Земли в квазистатическом приближении [16- 17].

Упругие деформации  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{u}_*$  в системах  $C_2x_i$  и  $C'_2x'_i$  соответственно связаны выражением  $\mathbf{u}_* = \mathbf{u} - \mathbf{u}_c$ , где  $\mathbf{u}_c$  – смещение центра масс относительно ядра. С целью упрощения расчетов полагается, что мантия однородна и изотропна. Для искомого вектора  $\mathbf{u}$  имеют место уравнение состояния Эйлера-Коши [16-17] и граничные условия на поверхности  $P$  Земли и поверхности  $P_0$  ядра:

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla(\nabla, \mathbf{u}) + \frac{\rho}{\mu} \Phi = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \sigma_n|_P = 0, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{u}|_{P_0} = 0.$$

Здесь  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $\nabla$  – оператор Гамильтона,  $\rho$  – плотность,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\mu$  – модуль сдвига,  $\Phi$  – массовая плотность сил инерции,  $\mathbf{n}$  – вектор нормали к  $P$ ,  $\sigma_n$  – тензор напряжений. Далее в квазистатическом приближении ( $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{u}} = 0$ ) проводится исследование уравнения (1.1).



Важно отметить, что в функции  $\Phi$  можно пренебречь также членом, содержащим  $\dot{\omega}$ , где  $\omega$  – вектор угловой скорости вращения Земли. Это обусловлено близостью вектора  $\omega$  к главной оси инерции – оси фигуры Земли.

Представим искомую функцию в виде  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{u}_*(\mathbf{r}, t)$ , где  $\mathbf{u}_0$  – квазистатическое смещение (статический экваториальный выступ), а  $\mathbf{u}_*$  – деформации, вызванные приливными гравитационными силами Луны и Солнца. Функция  $\mathbf{u}_0$  – определяется на первом этапе исследований для уточнения тензора инерции деформируемой Земли при построении модели движения полюса на сравнительно коротких промежутках времени. Она находится как решение краевой задачи (1.1) при  $\Phi = \omega \times (\omega \times \mathbf{r})$  и может быть представлена в виде разложения по степеням числового параметра  $\rho \omega^2 R^2 / \mu$ , где  $R$  – характерный линейный размер (радиус Земли). Соответствующим образом с учётом астрометрических данных оценивается добавка  $\mathbf{u}_*$ , характеризующая диссипативные приливные моменты сил.

Выпишем вектор  $\mathbf{G}$  кинетического момента Земли в деформированном состоянии и его производную

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_u &= \int_{\Omega} (\mathbf{r} + \mathbf{u}) \times \mathbf{v} \rho dV, \\ \dot{\mathbf{G}}_u &= \int_{\Omega} (\mathbf{r} + \mathbf{u}) \times (\mathbf{w} + \omega \times \mathbf{v}) \rho dV. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь  $dV$  – элемент объёма,  $v$  и  $w$  – скорость и ускорение, вычисляемые по правилам кинематики для вращающейся системы координат. Область  $\Omega$  содержит абсолютно твёрдое ядро, для которого  $\mathbf{u} \equiv 0$ , и деформируемую мантию, для

которой вектор  $\mathbf{u}$  определяется согласно (1.1). Выражения для  $\mathbf{G}$  и  $\dot{\mathbf{G}}$  (1.2) могут быть упрощены отбрасыванием квадратичных членов по  $\mathbf{u}$ . В результате удается получить представления, содержащие главную часть (недеформируемая планета) и малые добавки, обусловленные смещениями  $\mathbf{u}$  и их производными по  $t$ .

На основе асимптотического анализа уравнений движения в переменных действие-угол можно определить стабильные характеристики вращательно-колебательного движения деформируемой Земли относительно центра масс в квазистатическом приближении. Сперва находятся уточненные периоды (частоты) осевого вращения и чандлеровского колебания и проводятся сопоставления с данными спектрального анализа [13, 16, 17]. Даются оценки амплитуд свободных колебаний вектора угловой скорости в связанной системе координат и сравниваются с наблюдаемыми значениями. Далее с помощью кинематических уравнений Эйлера и динамических уравнений Эйлера-Лиувилля строится математическая модель первого приближения чандлеровских и годовых колебаний полюса под воздействием гравитационно-приливных сил от Солнца и Луны. С использованием численного моделирования строится траектория и прогноз движения полюса Земли в сопоставлении с астрометрическими данными МСВЗ [59].

## **1.2 Невозмущённое движение мгновенной оси вращения Земли**

Важным на этапе исследования колебательного движения полюса Земли под действием внешних возмущающих моментов гравитационно-приливных сил

является определение его невозмущённого движения. В [17] с помощью переменных действие-угол выписывается функционал Рауса для модельной задачи и строятся траектории в фазовом пространстве  $I_j, \omega_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Далее записывается усреднённый по быстрым угловым переменным (собственному вращению и орбитальному движению) функционал Рауса  $R_0$ :

$$R_0 = \frac{1}{2} \frac{I_2^2}{A^*} \left( 1 - \mu^* \frac{\alpha^2}{\chi^2} \right), \quad \mu^* = \frac{C^* - A^*}{C^*}. \quad (1.3)$$

Общее решение рассматриваемой на предварительном этапе усреднённой задачи, отвечающей функционалу Рауса  $R_0$ , имеет следующий вид:

$$I_i(t) = I_i^0 = \text{const}, \quad \omega_3(t) = w_3^0,$$

$$w_{1,2}(t) = n_{1,2}t + w_{1,2}^0, \quad w_i^0 = \text{const}, \quad (1.4)$$

$$n_1 = -\frac{\pi}{2} \frac{I_2}{A^*} \frac{\mu^* \kappa}{\kappa_* \chi K(\lambda)}, \quad n_2 = \frac{I_2}{A^*} \left( \frac{A^*}{C^*} + \mu^* \frac{\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \kappa^2, \lambda\right)}{K(\lambda)} \right),$$

$$\kappa_* = \sqrt{1 + \kappa^2}, \quad K = \frac{\pi}{2} + \frac{\lambda^2}{4} + O(\lambda^4),$$

$$\chi = \kappa \sqrt{1 + \varepsilon^2}, \quad \Pi = \frac{\pi}{2\kappa_*} + O(\lambda^2).$$

Здесь  $A^*, B^*, C^*$  - эффективные главные центральные моменты инерции с учётом деформаций «замороженной» фигуры Земли; фазы  $w_1, w_2$  и частоты  $n_1, n_2$  отвечают соответственно чандлеровскому движению полюсов и суточному вращению деформируемой Земли. Для модели абсолютно твёрдой планеты имеет

место регулярная прецессия Эйлера-Пуансо. В рассматриваемом случае деформируемой Земли выражения (1.4) также описывают регулярную прецессию, но угловые скорости прецессии и собственного вращения изменяются на некоторую относительно малую величину, обусловленную возмущающими факторами.

При возмущённом движении с учётом диссипативных свойств вязкоупругой мантии Земли имеет место регулярная прецессия с медленно изменяющимися во времени параметрами, т.е. возникает эволюция медленных переменных, подлежащая изучению на основе асимптотических методов нелинейной механики.

Оценка величины  $\lambda$  [17] для системы Земля-Луна свидетельствует о том, что величина  $\mu^*$  мала ( $\lambda^2 \approx 10^{-14}$ ). Это позволяет существенно упростить (1.4) и представить их с помощью алгебраических и тригонометрических функций. В первом приближении находим:

$$\frac{\chi^2}{\kappa^2} = \varepsilon^2 = \frac{2\mu^*}{\kappa_*}. \quad (1.5)$$

После подстановки  $\lambda^2$  в (1.4) для частот  $n_1$ ,  $n_2$  получаются выражения:

$$\dot{w}_1 = n_1 = -\frac{I_2}{A^*} \frac{2\mu^*}{\kappa_*} \left( 1 - \frac{2 + \kappa_*^2}{2\kappa_*} \mu^* \right), \quad (1.6)$$

$$\dot{w}_2 = n_2 = -\frac{I_2}{A^*} \left( \frac{A^*}{C^*} + \frac{\mu^*}{\kappa_*} \left[ 1 + \frac{\mu^*}{2\kappa_*} (2\kappa_* - 2 - \kappa^2) \right] \right).$$

Посредством (1.6) для  $n_1$  вычисляется теоретическое значение угловой скорости и периода колебаний  $T_1^* = \frac{2\pi}{n_1} \approx 430$  сут. Полученное значение находится

в хорошем соответствии с экспериментальными данными измерений периода колебаний  $T_1^* = 420 \div 440$  , известного как чандлеровский период колебаний полюса Земли [51, 6-8, 12-17].

Движение полюса определяется как угловое смещение оси вращения в теле планеты относительно связанной системы координат. Компоненты вектора угловой скорости представим через фазу  $w_1$  в виде разложений по малому параметру  $\varepsilon \sim 10^{-6}$  . С относительной погрешностью  $O(\varepsilon^2) \sim 10^{-12}$  составляющие вектора угловой скорости равны [3, 6 , 7]:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{\lambda}{\chi} \frac{I_2}{A^*} \operatorname{cn}(u, \lambda) = \varepsilon \frac{I_2}{A^*} \cos w_1 + O(\varepsilon^3), \\ \omega_2 &= \frac{\lambda}{\chi} \frac{I_2}{B^*} \operatorname{sn}(u, \lambda) = \varepsilon \sqrt{1 + \kappa^2} \frac{I_2}{B^*} \sin w_1 + O(\varepsilon^3), \\ \omega_3 &= \frac{\kappa}{\chi} \frac{I_2}{C^*} \operatorname{dn}(u, \lambda) = \frac{I_2}{C^*} + O(\varepsilon^3), \\ u &= \frac{2}{\pi} K(\lambda) w_1 = w_1 + O(\lambda^2) w_1, \quad \varepsilon = 1,2 \times 10^{-6}.\end{aligned}\tag{1.7}$$

Угловые координаты, отвечающие свободной нутации (чандлеровской компоненте движения  $(x_{ch}, y_{ch})$ ), соответствующий угол  $\alpha$  между осью фигуры и осью вращения и линейные координаты  $X_c, Y_c$  на касательной к геоиду плоскости с учётом главных членов разложений (1.7) определяются выражениями:

$$\begin{aligned}x_{ch} &= \frac{\omega_1}{\omega} \approx \frac{C^*}{A^*} \frac{\lambda}{\kappa} \cos w_1, \\ y_{ch} &= -\frac{\omega_2}{\omega} \approx \frac{C^*}{B^*} \frac{\lambda}{\kappa} \kappa_* \sin w_1,\end{aligned}\tag{1.8}$$

$$X_c = Rx_{ch}, Y_c = Ry_{ch},$$

$$\cos\alpha = \frac{\omega_3}{\omega} \cong 1 - \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{C^*}{A^{*2}} \cos^2 w_1 + (1 + \chi^2) \frac{C^{*2}}{B^{*2}} \sin^2 w_1 \right),$$

$$\max |X_c| |Y_c| \approx 7.5 \text{ м}, R = 6.38 \times 10^6 \text{ м}.$$

В первом приближении по  $\varepsilon$  полодия (спиралевидная кривая), отвечающая свободной нутации с периодом Чандлера, есть эллипс с весьма малым эксцентриситетом  $e \approx 0.005$ . Данные МСВЗ подтверждают теоретические оценки (1.8) [54,59].

Таким образом, в промежуточном движении деформируемая Земля равномерно вращается в поле центробежных сил инерции и гравитационного поля Луны. Для абсолютно твердой планеты ( $\mathbf{u} = 0$ ) имеет место регулярная прецессия Эйлера-Пуансо. Полученное решение (1.4) является порождающим для использования метода усреднения при учете возмущающих моментов сил различной физической природы.

### 1.3 Теоретическая модель колебательного движения полюса Земли.

#### Уравнения движения.

В [4-17] на основе небесномеханических представлений строится математическая модель вращательно-колебательных движений Земли вокруг центра масс, которая адекватна астрометрическим данным МСВЗ и позволяет объяснить наблюдаемые характеристики движения. Теоретическая модель удовлетворительно описывает чандлеровское движение полюса  $(x_p, y_p)$  типа

спирали с перемещающимся центром, содержащее колебания с периодом  $T_{ch} = 433$  звездных суток и амплитудой  $0,20'' - 0.25''$ , годовые колебания с периодом  $T_h = 365$  звездных суток и амплитудой  $0.07'' - 0.08''$ . Наблюдается также нерегулярный дрейф со скоростью около  $0.005''$  в год в сторону Северной Америки. Эти компоненты движения относятся к основным в описании траектории земного полюса.

В [6-8, 17] предлагается сравнительно простая модель движения полюса в терминах теоретической и небесной механики. Её основу составляет анализ орбитального движения центра масс системы Земля-Луна (барицентра), учет квазистатической деформации тензора инерции и суточного прилива в мантии Земли, обусловленной гравитационно-приливным воздействием Солнца и Луны.

Для построения упрощенной математической модели первого приближения воспользуемся классическими динамическими уравнениями Эйлера-Лиувилля с переменным тензором инерции  $J$  [17]:

$$\begin{aligned}
 J\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times J\boldsymbol{\omega} &= \mathbf{M}, \quad \boldsymbol{\omega} = (p, q, r)^T, \\
 J &= J^* + \delta J, \quad J^* = const, \delta J = \delta J(t), \\
 J^* &= diag(A^*, B^*, C^*), \quad \|\delta J\| \ll \|J^*\|.
 \end{aligned}
 \tag{1.9}$$

Здесь  $\boldsymbol{\omega}$  – вектор угловой скорости в некоторой связанной с Землей гринвичской геоцентрической системе координат, оси которой приближенно совпадают с главными центральными осями инерции  $J^*$  с учётом деформаций «замороженной» Земли, обусловленных сложным движением - собственным вращением и движением относительного барицентра системы Земля-Луна.

Считается, что малые вариации тензора инерции  $\delta J$  могут содержать различные гармонические составляющие, обусловленные влиянием лунно-солнечных суточных приливов, и, возможно, другие (годовые, полугодовые, месячные, полусуточные и т.п.). В качестве основных возмущающих внешних моментов сил  $\mathbf{M}$ , вызывающих нутационные колебания земного полюса, принимаются гравитационно-приливные воздействия от Солнца и Луны. Возможное наличие слагаемого типа  $\dot{J}\boldsymbol{\omega}$  не приводит к уточнению модели первого приближения.

Кинематические уравнения Эйлера, задающие ориентацию связанных осей относительно орбитальной системы координат имеют вид:

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= p\cos\varphi - q\sin\varphi - \omega_0(v)\sin\varphi, \\ \dot{v} &= \omega_0(v) = \omega_*(1 + e\cos v)^2, \\ \dot{\psi} &= \frac{p\sin\varphi + q\cos\varphi}{\sin\theta} - \omega_0(v)\operatorname{ctg}\theta\cos\psi, \quad e = 0.0167, \\ \dot{\varphi} &= r - (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta + \omega_0(v)\frac{\cos\psi}{\sin\theta}.\end{aligned}\tag{1.10}$$

Здесь  $v(t)$  – истинная аномалия,  $e$  – эксцентриситет орбиты,  $\omega_*$  – постоянная, определяемая гравитационным и фокальным параметрами. Структура выражений для компонент момента гравитационных сил от Солнца имеет вид:

$$\begin{aligned}M_q &= 3\omega^2 \left[ (A^* + \delta A - (C^* + \delta C))\gamma_r\gamma_p + \delta J_{pq}\gamma_r\gamma_q + \delta J_{pr}(\gamma_r^2 - \gamma_p^2) - \delta J_{rp}\gamma_p\gamma_q \right], \\ \omega &= \omega_*(1 + e\cos v)^{3/2}, \quad \gamma_p = \sin\theta\sin\varphi, \\ \gamma_q &= \sin\theta\sin\varphi, \quad \gamma_r = \cos\theta.\end{aligned}\tag{1.11}$$



Для вычисления  $M_{p,r}$  делается циклическая перестановка индексов  $p, q, r$ . В первом приближении решение кинематических уравнений Эйлера (1.10) будет

$$\begin{aligned}
 r &= r^0, \quad \varphi \approx rt + \varphi^0, \quad v \approx \omega_* t + v^0, \\
 \cos\theta(v) &= a(\theta^0, \psi^0) \cos v, \quad \theta(0) = \theta^0 = 66^{\circ}33', \\
 0.4 &\leq a \leq 1, \quad 0 \leq \psi^0 \leq 2\pi, \\
 \cos\theta \sin\theta &= b(\theta^0, \psi^0) \cos v + d \cos 3v + \dots, \\
 0.4 &\leq b \leq \frac{4}{3}\pi, \quad |d| \ll 1.
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Вторая и более высокие гармоники по  $v$  приводят к величинам, меньшим основных в  $10^2 \div 10^3$  раз, и поэтому не учитываются. Величина  $B^* - A^*$  также существенно меньше, чем  $C^* - A^*$  (приблизительно в 160 раз).

Оценка членов уравнений (1.9) для  $p, q$  приводит после усреднения по быстрой фазе  $\varphi$  (собственному вращению) к упрощенной аналитической модели вида:

$$\begin{aligned}
 \dot{p} + N_p q &= \kappa_q r^2 + 3b\omega_*^2 \chi_p \cos v, \\
 \dot{q} - N_q p &= -\kappa_p r^2 - 3b\omega_*^2 \chi_q \cos v, \\
 p(0) &= p^0, \quad q(0) = q^0, \\
 N_{p,q} &\cong N \cong 0.84\omega_*.
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

Здесь  $\kappa_p, \kappa_q$  – средние значения  $\frac{\delta J_{pr}}{B^*}, \frac{\delta J_{qr}}{A^*}$ , которые могут быть медленными функциями времени. Величины  $\chi_p, \chi_q$  получаются в результате усреднения по  $\varphi$

коэффициентов при  $\cos \nu$  в компонентах момента гравитационных сил от Солнца, они обусловлены суточными приливами. Моменты сил гравитации от Луны с месячным периодом 27.55 суток не учитываются из-за относительной малости их влияния на колебательные процессы земного полюса. Правые части уравнения (1.9) содержат в явной форме гармоническое воздействие с годичным периодом, объясняющее механизм нутационных колебаний, регистрируемых наблюдениями МСВЗ.

Введём переменные  $x(\tau) = p(t)$ ,  $y(\tau) = q(t)$ , где  $\tau = \frac{t}{T_h}$  – время, измеряемое в годах. Приведём выражения координат полюса для модели первого приближения с учетом коэффициентов тренда  $c_{x,y}$ , чандлеровской  $a_{x,y}^{c,s}$ , годичной  $d_{x,y}^{c,s}$  компонент:

$$\begin{aligned} x(\tau) &= c_x(\tau) - a_x^c \cos 2\pi N\tau + a_x^s \sin 2\pi N\tau - Nd_x^c \cos 2\pi\tau + d_x^s \sin 2\pi\tau, \\ y(\tau) &= c_y(\tau) - a_y^c \cos 2\pi N\tau + a_y^s \sin 2\pi N\tau - Nd_y^c \cos 2\pi\tau + d_y^s \sin 2\pi\tau, \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$N = 0.845 \div 0.850.$$

Численное значение чандлеровской частоты выбирается на основе дисперсионного анализа. Неизвестные  $c_{x,y}$ ,  $a_{x,y}^{c,s}$ ,  $d_{x,y}^{c,s}$  вычисляются с помощью метода наименьших квадратов по ежесуточным данным изменений МСВЗ [9]. При определении этих коэффициентов следует иметь в виду равенства  $a_x^{c,s} \approx a_y^{s,c}$ ,  $d_x^{c,s} \approx d_y^{s,c}$ , являющиеся структурным свойством модели.

#### 1.4 Численное моделирование: интерполяция и прогноз траектории движения полюса Земли.

Адекватная астрометрическим данным теоретическая модель, рассмотренная в предыдущем параграфе, содержит небольшое число неизвестных параметров, подверженных малым вариациям вследствие нестационарности возмущающих факторов. Оптимальные значения этих параметров находятся с помощью метода наименьших квадратов на основе статистической обработки астрометрических данных высокоточных измерений угловых параметров движения Земли. Удаётся установить высокую точность интерполяции процесса колебаний полюса на интервалах времени до 10-15 лет. Этот экспериментальный факт убедительно обосновывает небесномеханическую трактовку гравитационно-приливного механизма. Посредством настройки алгоритма оптимальной фильтрации производится надежный прогноз движения полюса, соответствующий данным наблюдений и измерений МСВЗ [59]. Ниже проводится интерполяция упрощенной модели без учёта мелкомасштабных колебаний, обусловленных возмущающими факторами с комбинационными частотами.

Численные расчёты проводились на основе упрощенной процедуры метода наименьших квадратов. Алгоритм применялся независимо к переменным  $x(\tau)$ ,  $y(\tau)$  в виде шестимерных аппроксимаций согласно построенной модели (1.4)

$$x(\tau) = (\zeta, f(\tau)), \quad y(\tau) = (\mu, f(\tau)),$$

$$\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_6)^T, \quad \mu = (\mu_1, \dots, \mu_6)^T, \quad (1.15)$$

$$f(\tau) = (1, \tau, \cos 2\pi N\tau, \sin 2\pi N\tau, \cos 2\pi\tau, \sin 2\pi\tau)^T,$$

$$N \approx 0.845 - 0.850.$$

Получены интерполяция траектории полюса на интервалах времени 6, 12 лет и более и прогноз на 1-3 года. Шестимерные векторы  $\zeta, \mu$  подлежат определению. Между компонентами векторов  $\zeta, \mu$  и коэффициентами модели (1.9) имеет место взаимно-однозначное соответствие. Исследование эффективности интерполяции и прогноза движения полюса на основе ежедневных данных измерений МСВЗ свидетельствует об удовлетворительной точности построенной модели (1.15).

В ряде практически важных задач, например, касающихся вопросов навигации, существенную роль может играть прогноз на коротком интервале времени (1- 2 месяца).

Из теории фильтрации случайных временных последовательностей общеизвестно, что оптимальная оценка измеряемых случайных процессов есть результат компромисса между динамической (точность модели) и стохастической (точность измерений) ошибками. Длительность интервала интерполяции, т.е. число обрабатываемых измерений, выбирается из условия минимума взвешенной суммарной ошибки при заданном наборе небольшого числа опорных функций.

Анализ погрешности свидетельствует, что ее уменьшение достигается повышением точности модели (выбором указанных функций).

Это позволяет удлинить интервал обработки (увеличить число замеров) и тем самым уменьшить дисперсии случайных составляющих оценок искомых параметров и всего процесса в целом. Однако возможности такого подхода весьма ограничены, так как рост числа функций и тем самым оцениваемых параметров

резко увеличивает указанные дисперсии при фиксированном числе замеров (интервала обработки). Практически он оправдывается, если добавление небольшого числа (одной-двух) опорных функций позволяет существенно уменьшить динамическую погрешность, т.е. увеличить относительную точность модели на порядки.

Построение вектора опорных функций, адекватных модели процесса, а также определение интервала интерполяции представляют основной интерес для задачи фильтрации и прогноза. Радикальным способом повышения точности интерполяции и прогноза является уменьшение ошибок измерений, погрешностей их предварительной обработки и искажений при интерпретации данных. Это может позволить существенно сократить интервал интерполяции и тем самым уменьшить динамическую погрешность. Однако значительное повышение точности наблюдений и измерений может быть достигнуто за счет огромных материальных затрат на разработку технических средств. Реальное уменьшение измерительных погрешностей происходит весьма медленно, поэтому основные возможности уточнения оценок заключаются в построении адекватных математических моделей процессов и соответствующих методов статистической обработки данных наблюдений и измерений. Конечно, наиболее эффективным оказывается сочетание обеих возможностей уменьшения динамических и стохастических погрешностей.

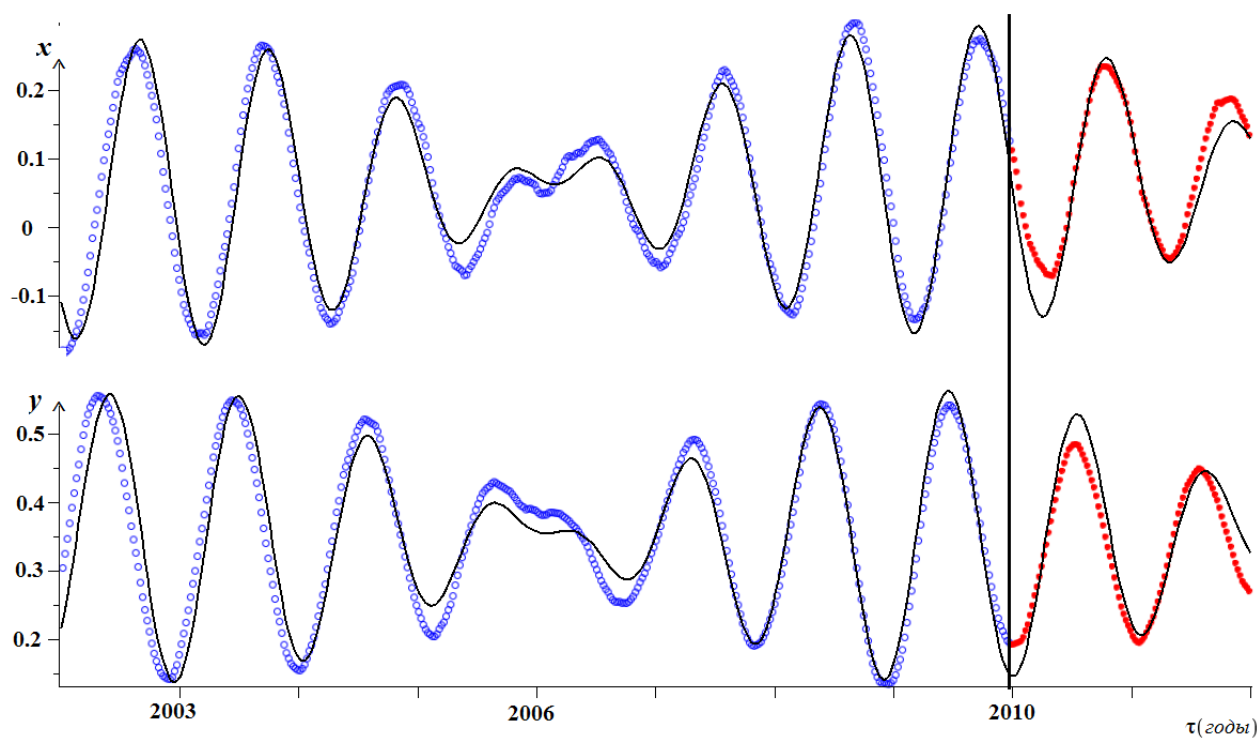


Рис. 1.1. Восьмилетняя интерполяция (2002 - 2010 гг.) и двухлетний прогноз (2010 - 2011 гг.) координат полюса  $x(\tau), y(\tau)$ .

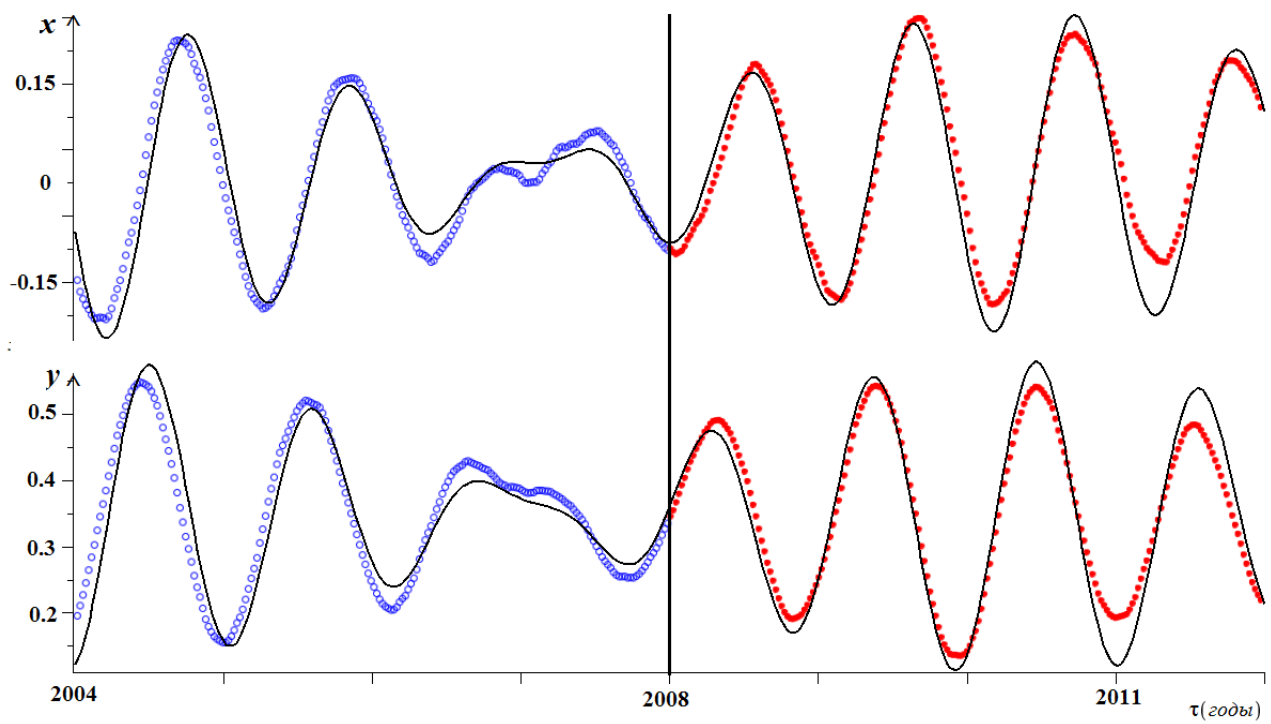


Рис. 1.2. Четырехлетняя интерполяция (2004 - 2008 гг.) и четырехлетний прогноз (2008 - 2011 гг.) координат полюса  $x(\tau), y(\tau)$ .

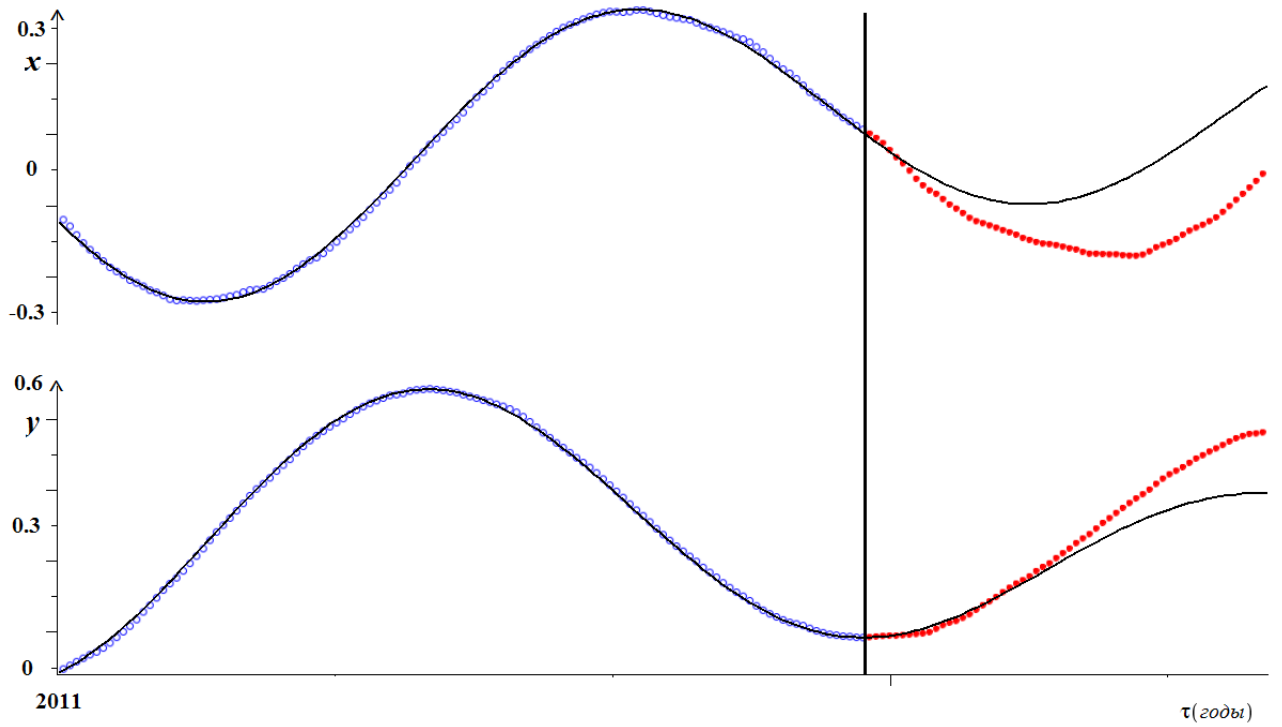


Рис. 1.3. Годичная интерполяция на 2011 г. и краткосрочный (~150сут.) прогноз координат полюса  $x(\tau)$ ,  $y(\tau)$ .



Для реальной ситуации, отвечающей современным данным МСВЗ, повышение точности краткосрочного прогноза (0.5-3 месяца) достигается уменьшением длительности интервала интерполяции. Это обусловлено уменьшением динамической ошибки аппроксимации процесса и сравнительно высокой точностью измерений. Процедура оптимизации интервала и его влияния на прогноз иллюстрируется на графиках рис 1.1-1.3. Длительность интервала обработки уменьшалась от 8 лет до 1 года (от 2922 до 365 точек). Установлено, что для однолетнего интервала обработки (рис. 1.3) погрешность прогноза составляет величину  $10^{-3}$  угл. сек на промежутке порядка 1.5 месяца по оси  $x$  и 2.5 месяца по оси  $y$ , т.е. линейная ошибка прогноза порядка  $5 \div 10$  см. Интерполяция на четырехлетнем интервале и соответствующий четырехлетний прогноз (рис.1.2) являются «умеренно удовлетворительными».

Из графиков рис. 1.1-1.3 видно, что наиболее высокая точность интерполяции достигается обычно в средней части интервала. Это свойство присуще методу наименьших квадратов и оно общеизвестно. В частности, теоретически его можно установить в случае полиномиальной фильтрации, т.е. набора опорных функций в виде полиномов (обычно невысокой степени) от временного параметра сглаживания. Поэтому повышение точности прогноза на коротком интервале, примыкающем к концу интервала интерполяции, может быть достигнуто введением «весовых» коэффициентов в алгоритме метода наименьших квадратов и их относительным увеличением к концу интервала. Это означает, что в оценках параметров влияние конечных измерений будет больше, а начальных – меньше.

Алгоритм фильтрации может содержать небольшое число параметров, которые позволят регулировать указанные весовые множители и оптимизировать алгоритм, в зависимости от предыдущих результатов интерполяции и прогноза. Такая настройка эквивалентна выбору эффективной длительности интервала интерполяции, т.е. «памяти» фильтра.

Построенная в начале 2010 г. 8-летняя интерполяция (с 2002 по 2010 гг.) и 2-летний прогноз на 2010-2011 гг. оказались высокоточными и привели к максимальной погрешности  $0.02''$ , т.е. 60 см для  $\Delta t = 500$  сут. (рис. 1.1). Среднеквадратичная угловая ошибка составляет величину  $\leq 0.01''$ , что соответствует линейной ошибке около 20 см.

## Глава II Небесномеханическая модель неравномерности вращения деформируемой Земли

### 2.1 Неравномерности осевого вращения Земли и атомная шкала времени

В настоящее время построена единая высокоточная, независимая от суточного и орбитального движения Земли, равномерная физическая шкала атомного времени (*TAI*). Её создание позволяет существенно более точно, чем ранее, изучать неравномерности осевого вращения Земли.

Согласно [27, 33, 39, 50] с начала 20-го века атомное время *TAI* «протекает быстрее» по сравнению со Всемирным временем *UT1*, связанным с вращением Земли. Поэтому *UT1* выражается через математическое соотношение, удовлетворяющее следующему условию: производная *UT1* по «времени» должна быть пропорциональна модулю изменяющегося вектора угловой скорости вращения  $\omega(t)$ , т.е.

$$\frac{d(UT1)}{dt} = \frac{\omega(t)}{r_0}, \quad \omega = (p, q, r)^T. \quad (2.1)$$

Для Земли осевая компонента  $r$  является доминирующей величиной на 6 порядков превышающей величины  $p$  и  $q$ . В научной литературе принята за единицу времени величина стандартных суток, состоящих из 86400 секунд *UTC* (СИ). Время  $t$  понимается здесь как «абсолютное» и измеряется международным атомным временем *UTC* с достаточно малой погрешностью [43, 49, 50, 59].

Константа пропорциональности, подразумеваемая в (2.1), и начальная фаза (при  $t = t_0$ ) должны быть выбраны так, чтобы на больших интервалах времени (например, тысячелетие) Солнце проходило через начальный меридиан (Гринвичский меридиан) в среднем в 12 часов  $UT1$ .

В интегральной форме (2.1) с учётом того, что значения  $UT1$  публикуются в виде поправок к  $UTC$  и являются функциями даты,  $UTC$  имеет вид [43]:

$$[UT1 - TAI](t) = [UT1 - TAI](t_0) + \int_{t_0}^t \frac{\delta r(t)}{r_0} dt, \quad (2.2)$$

где выражение  $\delta r(t) = r(t) - r_0$ ;  $r_0$  – постоянная («средняя») угловая скорость собственного вращения  $r_0 = 7.292115 \times 10^{-5}$  рад/с, которая соответствует указанной длительности стандартных суток.

Далее вводится величина  $D(t)$ , которая называется длительностью суток [43]:

$$D(t) = \frac{r_0}{r(t)} \times 86400c. \quad (2.3)$$

Для изучения вариаций вращения Земли вводится изменение (вариация) длительности суток –  $l.o.d.(t)$  (length of the day changes) [43, 54, 59]:

$$l.o.d.(t) = D(t) - 86400c. \quad (2.4)$$

На рис (2.1) приводится график  $l.o.d.(t)$  по данным измерений МСВЗ на 2008- 2013 гг.

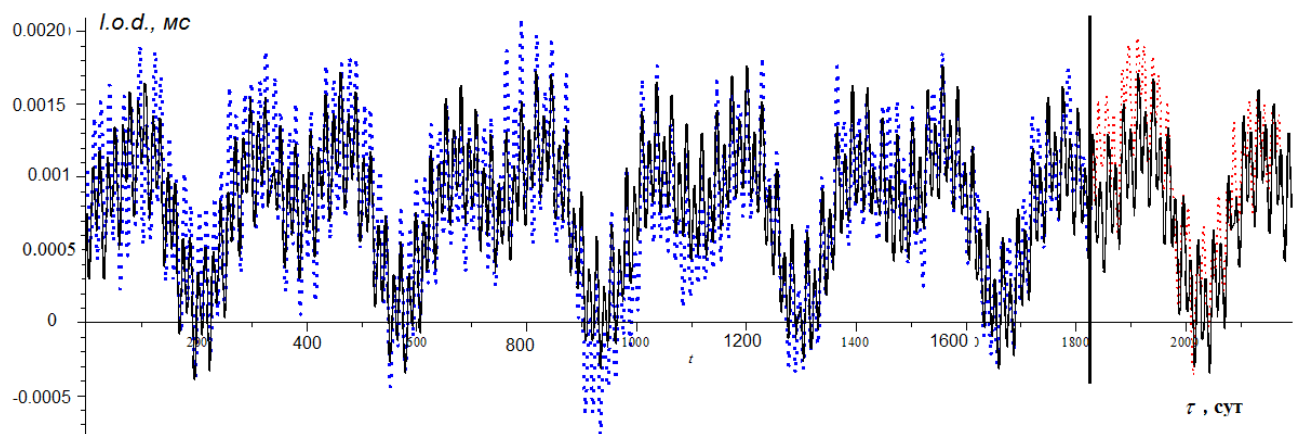


Рис. 2.1. Интерполяция 2008-2013 г. и прогноз 2013 г. длительности суток  $l.o.d.(t)$  и данные измерений МСВЗ на 2008-2013 г.

Величина  $r(t)$  может быть выведена из публикуемых значений  $l.o.d.(t)$  и имеет вид:

$$r(t) = \left[ 1 + \frac{d(UT1 - TAI)}{d(TAI)} \right] r_0 \cong \left[ 1 - \frac{l.o.d.(t)}{86400c} \right] r_0, \quad (2.5)$$

В последние 15-20 лет с высокой точностью измеряются приливные колебания скорости вращения деформируемой Земли. Известно [49, 54, 59], что в приливных изменениях скорости вращения Земли на относительно коротких интервалах времени выделяются составляющие с различными периодами - год, полгода, 13.7, 27.3 и, возможно, 9.1, 5.6 суток. Они определяются посредством учёта гравитационно-приливных моментов с помощью оптимальной интерполяции процесса на относительно коротких интервалах времени (несколько лет). Период 18.61 лет лунно-солнечной нутации (движение узлов лунной орбиты) Земли является главным из долгопериодических зональных приливов, который может формировать трендовую составляющую во временной эволюции моделирования неравномерности осевого вращения Земли.

## 2.2 Динамическая модель внутригодовых вариаций осевого вращения Земли

Для изучения осевого вращения деформируемой Земли воспользуемся классическими динамическими уравнениями Эйлера-Лиувилля с переменным тензором инерции (1.9).

Оси связанной с Землей системы координат приближенно совпадают с главными центральными осями инерции  $J^*$  - «замороженной» фигуры Земли с

учётом «экваториального выступа» [16-17]. Выбранная система координат качественно и количественно согласуется с ITRF [59]. Третье уравнение системы (1.9) для компоненты осевого вращения Земли  $r(t)$  имеет вид:

$$C^* \dot{r} + (B^* - A^*) pq + (J_{qr} p - J_{pr} q) r = M_r^S + M_r^L. \quad (2.6)$$

Здесь  $J_{pr}, J_{qr}$  – малые внедиагональные элементы тензора инерции,  $M_r^{S,L}$  – компонента гравитационно-приливных возмущающих моментов от Солнца и Луны соответственно. Например, выражение  $M_r^S$  имеет следующую структуру [16-17]:

$$M_r^S = 3\omega_0^2 \left[ (B^* + \delta B - (A^* + \delta A)) \gamma_p \gamma_q + \delta J_{pq} (\gamma_p^2 - \gamma_q^2) + \delta J_{qr} \gamma_p \gamma_r - \delta J_{pr} \gamma_q \gamma_r \right], \quad (2.7)$$

$$\gamma_p = \sin \theta \sin \varphi, \quad \gamma_q = \sin \theta \cos \varphi, \quad \gamma_r = \cos \theta.$$

Здесь  $\omega_0$  – частота орбитального движения;  $\gamma_p, \gamma_q, \gamma_r$  – направляющие косинусы радиус-вектора в связанной системе;  $\psi, \theta, \varphi$  – углы Эйлера;  $A^*, B^*, C^*$  – эффективные главные центральные моменты инерции с учётом деформаций «замороженной» Земли; коэффициенты  $\delta A, \delta B, \delta J_{pq}, \delta J_{qr}, \delta J_{pr}$  обусловлены приливными суточными и полусуточными гравитационными воздействиями Луны и Солнца. Они не поддаются прямым измерениям. Для них могут быть получены косвенные оценки на основе измерений характеристик процесса. После усреднения по быстрой переменной  $\varphi$  ( $\varphi$  – угол собственного вращения) для  $M_r^S$  получается простое выражение вида:

$$M_r^S = 3\omega_0^2 (\chi_{1r}^S \sin^2 \theta + \chi_{2r}^S \sin \theta \cos \theta). \quad (2.8)$$

Величины  $\chi_{1r}^S, \chi_{2r}^S$  в (2.8) обусловлены полусуточными и суточными приливами соответственно и получаются в результате усреднения по  $\varphi$  коэффициентов при  $\sin^2 \theta$  и  $\sin \theta \cos \theta$  в компонентах момента гравитационных сил от Солнца.

$$\chi_{1r}^S = \frac{1}{2} \left\langle \frac{\delta B - \delta A}{C^*} \sin 2\varphi \right\rangle_{\varphi} - \left\langle \frac{\delta J_{pq}}{C^*} \cos 2\varphi \right\rangle_{\varphi}, \quad (2.9)$$

$$\chi_{2r}^S = \frac{1}{2} \left\langle \frac{\delta J_{qr}}{C^*} \sin \varphi \right\rangle_{\varphi} - \left\langle \frac{\delta J_{pr}}{C^*} \cos \varphi \right\rangle_{\varphi}.$$

Величины коэффициентов  $\chi_{1r}^S, \chi_{2r}^S$  в (2.9) подлежат определению на основе данных наблюдений. Возмущающий момент от Луны  $M_r^L$  приводит к приливным изменениям скорости осевого вращения Земли на относительно коротких интервалах времени.

Интегрируя уравнение (2.6), получим с учётом (2.9) структуру флуктуаций длительности суток:

$$\begin{aligned} l.o.d.(\tau) = & c(\tau) + a_c^s \cos(2\pi\tau) + a_s^s \sin(2\pi\tau) + \\ & + b_c^s \cos(4\pi\tau) + b_s^s \sin(4\pi\tau) + a_c^L \cos(2\pi\nu_m\tau) + \\ & + a_s^L \sin(2\pi\nu_m\tau) + b_c^L \cos(2\pi\nu_f\tau) + b_s^L \sin(2\pi\nu_f\tau). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь  $\nu_m = 13.28$ ,  $\nu_f = 26.68$  – частоты месячного и двухнедельного колебаний, обусловленных лунным возмущением; неизвестные  $c$ ,  $a_{C,S}^{S,L}$ ,  $b_{C,S}^{S,L}$  – величины, подлежащие вычислению с помощью метода наименьших квадратов по измерениям МСВЗ. Эти коэффициенты однозначно связаны с неизвестными,



содержащимися в уравнении (1.9). Параметр  $\tau$  в (2.10) и далее измеряется стандартными годами.

Для внутригодовых интервалов из (2.6) и (2.10) запишем выражение для разности  $UT1-UTC$  :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{365.25}[UT1-UTC](\tau) &= -\int l.o.d.(\tau)d\tau \\
 &= const - c\tau - (2\pi)^{-1}(a_s^s \sin(2\pi\tau) - a_c^s \cos(2\pi\tau)) \\
 &\quad - (4\pi)^{-1}(b_s^s \sin(4\pi\tau) - b_c^s \cos(4\pi\tau)) \\
 &\quad - (2\pi\nu_m)^{-1}(a_s^L \sin(2\pi\nu_m\tau) - a_c^L \cos(2\pi\nu_m\tau)) \\
 &\quad - (2\pi\nu_f)^{-1}(b_s^L \sin(2\pi\nu_f\tau) - b_c^L \cos(2\pi\nu_f\tau)).
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

### 2.3 Численное моделирование: интерполяция и прогноз

Приведём результаты численного моделирования внутригодовой приливной неравномерности осевого вращения Земли на основе построенной модели (2.10) и (2.11). Расчёты проводятся методом наименьших квадратов [31] согласно 9-ти параметрической модели, соответствующей выражению (2.10):

$$l.o.d.(\tau) = (\zeta, f(\tau)), \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_9)^T, \tag{2.12}$$

$$f(\tau) = (1, \cos 2\pi\tau, \sin 2\pi\tau, \cos 4\pi\tau, \sin 4\pi\tau, \cos 2\pi\nu_m\tau, \sin 2\pi\nu_m\tau, \cos 2\pi\nu_f\tau, \sin 2\pi\nu_f\tau)^T.$$

На рис 2.2 и 2.3 в сравнении с данными измерений МСВЗ на 2012-2013 гг. представлены теоретические кривые интерполяции  $l.o.d.$  и  $UT1-UTC$  в соответствии с моделью (2.10) и (2.11) и прогноз на 2012-2013 гг.

Статистически состоятельной оказывается также и 11-ти параметрическая модель, учитывающая трендовую составляющую, обусловленную лунно-

солнечной нутацией с периодом 18.61 лет. Она может быть учтена при построении прогноза на длительные интервалы времени (от 2-х лет и более).

В результате получим:

$$l.o.d.(t) = (\zeta, f(\tau)), \quad \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_{11})^T, \quad (2.13)$$

$$f(\tau) = \left( 1, \cos \frac{2\pi}{18.61} \tau, \sin \frac{2\pi}{18.61} \tau, \cos 2\pi\tau, \sin 2\pi\tau, \cos 4\pi\tau, \sin 4\pi\tau, \cos 2\pi\nu_m \tau, \sin 2\pi\nu_m \tau, \cos 2\pi\nu_f \tau, \sin 2\pi\nu_f \tau \right)^T$$

Коэффициенты  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  трендовой составляющей модели (2.13)

определяются отдельно на длительном интервале времени. Аргумент  $\tau$  в (2.12), (2.13) измеряется годами, которые затем пересчитываются в стандартные сутки.

На рис 2.2 приводится прогноз вариаций длительности суток на 2012-2013 гг., выполненный с помощью моделей (2.12) и (2.13) на основе интерполяции данных измерений *l.o.d* 2012-2013 гг.

Соответствующие среднеквадратические ошибки  $\sigma$  моделей (2.12) и (2.13) на интервале интерполяции равны:

$$\sigma_1 = 0.201 \times 10^{-3}, \quad \sigma_2 = 0.203 \times 10^{-3}. \quad (2.14)$$

Сравнение реальной и теоретически полученной неравномерности приливных колебаний угловой скорости вращения Земли свидетельствует об адекватности построенной модели данным наблюдений МСВЗ.

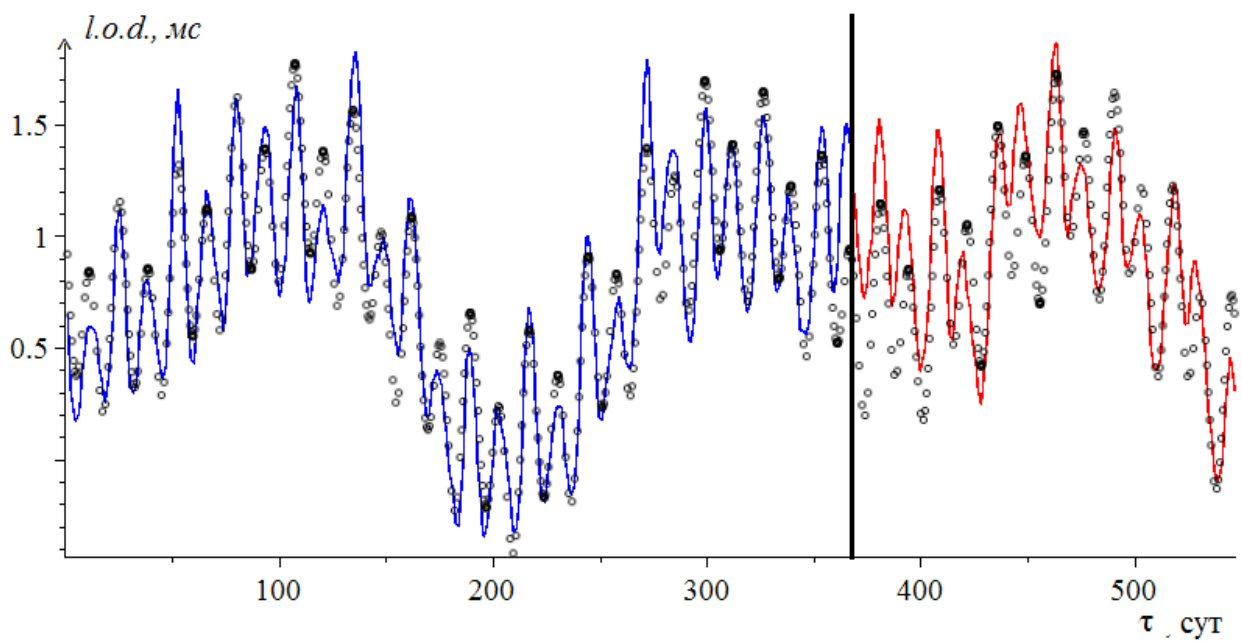


Рис. 2.2. Интерполяция и прогноз флуктуаций длительности суток (*l.o.d.*) на 2013-2014 гг. Линия – данные МСВЗ (интерполяция с 01.2012 по 01.2013, прогноз с 01.2013 по 07.2013), черные точки - теоретическая кривая, полученная согласно модели.

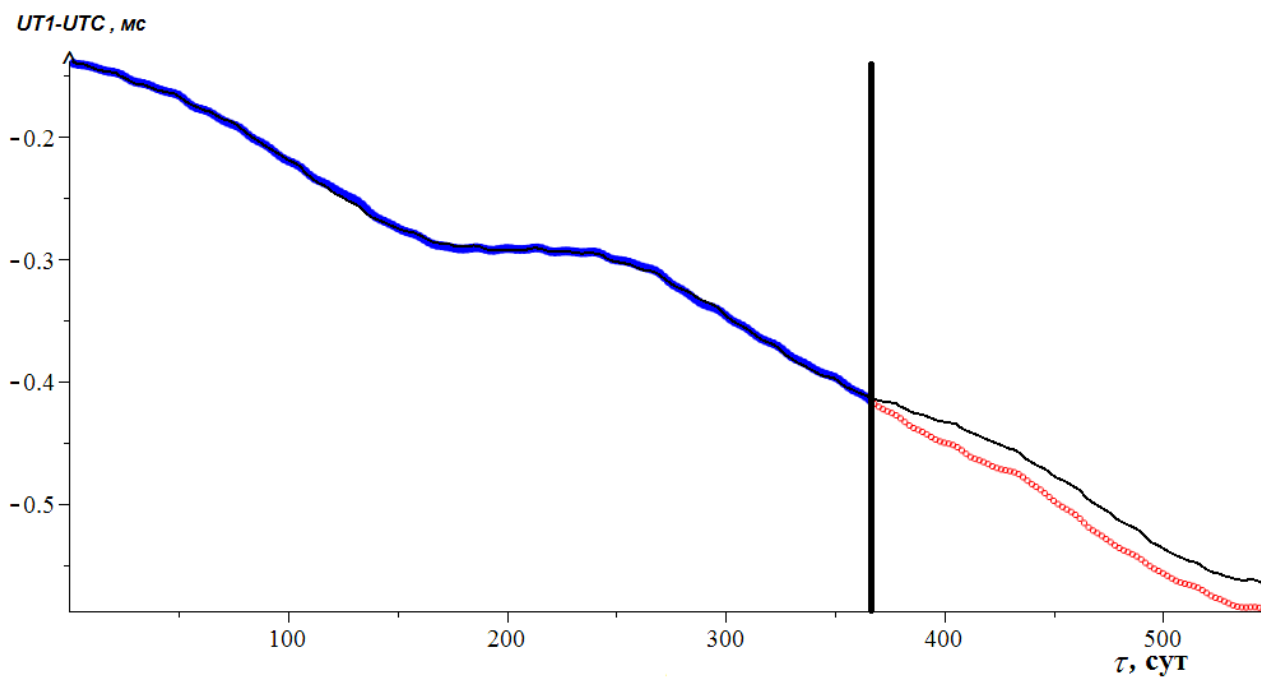


Рис. 2.3. Интерполяция и прогноз разности  $UT1-UTC$  на 2013-2014 гг. Красные и синие линии – данные МСВЗ (интерполяция с 01. 2012 по 01. 2013, прогноз с 01. 2013 по 07. 2013), черная линия - теоретическая кривая, полученная согласно модели.

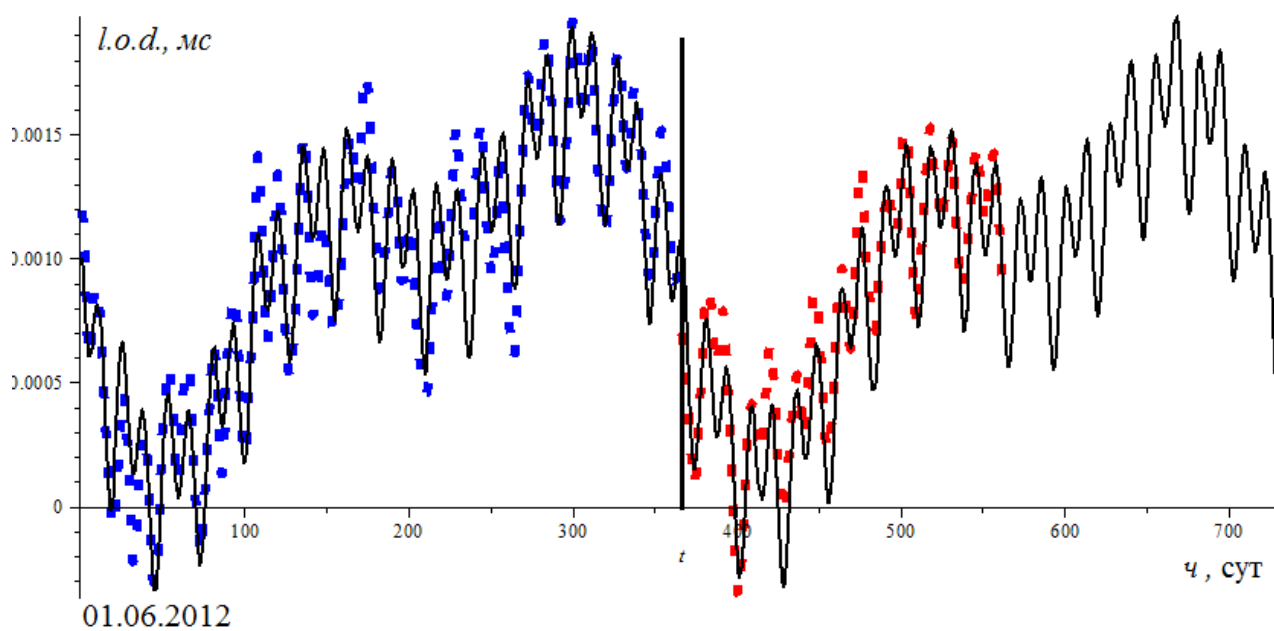


Рис. 2.4. Интерполяция и прогноз флуктуаций длительности суток (*l.o.d.*) на 2013-2014 гг. Точки – данные МСВЗ с 01.06.2012 по 01.01.2014, черная линия - теоретическая кривая, полученная согласно модели.

## 2.4 Неравномерности вращения Земли и проблема нестабильности шкал времени.

Разработанная математическая модель неравномерности осевого вращения Земли на основе пространственного варианта задачи система Земля-Луна в поле притяжения Солнца учитывает сложные мелкомасштабные свойства движения, обусловленные короткопериодическими возмущениями Луны с комбинационными частотами. С помощью спектрального анализа рассмотрены нестационарные колебания неравномерности вращения Земли с малыми амплитудами.

Известно [43], что понятие неравномерности вращения Земли тесно связано с определением шкалы времени, используемой в качестве первичного эталона времени. Так, например, всемирное время *UT* связано с вращением Земли и используется для установления всемирного координированного времени *UTC*, являющегося практической базой единого времени.

Введение различных шкал времени объясняется текущим определением секунды. Разные шкалы времени, основанные на различных физических явлениях, сохраняют присущее им значение. К примеру, всемирное время обусловлено вращением Земли, эфемеридное время и различные координатные времена, определенные с учетом общей теории относительности (ОТО), являются динамическими временами, связанными с теориями движения небесных тел.

Для большинства практических задач вполне удовлетворительным являлось астрономическое время (звездное или всемирное *UT*). Вместе с принятием эфемеридного времени *ET* (Ephemeris Time) начался период несовместимости

между шкалой времени  $UT$  и единицей времени  $ET$ . Атомная шкала времени  $UTC$  позволила на небольших интервалах времени устранить эти противоречия; она была принята по соглашению в качестве международной атомной шкалы времени. Эта шкала обладает относительной стабильностью секунды порядка  $10^{-14} \div 10^{-15}$ .

Барицентрическое координатное время ( $TCB$  - Barycentric Coordinate Time), которое используется при изучении планетарного движения и траекторий космических зондов к дальним планетам и к астероидам, как и шкала динамического земного времени  $TT$  (Terrestrial Time), основывается на шкале  $UTC$ . Время  $TT$  находится с помощью соотношения [43]:

$$TCG - TT = L_G \cdot 86400 \times \Delta D, \quad (2.15)$$

где  $TCG$  – геоцентрическое координатное время,  $TCG - UTC = 32.184$  с на 1 января 1977 г. в 0 ч по шкале  $TAI$  (погрешность шкалы  $TCG$  выдерживается в пределах 1 мкс);  $\Delta D$  – время, накопившееся по шкале  $TAI$  в сутках с 1 января 1977 г. в 0 ч по шкале  $TAI$ . Величина  $L_G$  – определяющая константа, она имеет согласованное значение  $L_G = 6.969290134 \times 10^{-10}$ , принятое по имеющейся оценке геопотенциала  $\frac{U}{c^2}$  в 2000 г.

Создание атомной шкалы времени позволило принять ее в качестве практического стандарта единой шкалы времени. Она приспособлена для поддержания связи со шкалой  $UT1$ , определяемой вращением Земли и известной как Всемирное координированное время ( $UTC$ ). Заметим, что международная атомная шкала  $UTC$  была установлена с использованием атомных часов без учета релятивистских эффектов.

С целью реализации координатно-временных систем в Солнечной системе Международный астрономический союз (МАС) рекомендует, чтобы пространственно-временные координаты  $x_0 = (ct, x^1, x^2, x^3)$  были выбраны таким образом, чтобы в каждой координатной системе, центр которой совмещен с барицентром любой системы масс, квадрат элемента интервала  $ds^2$  выражался бы с минимальной степенью отклонения мировой метрики [43]:

$$ds^2 = -c^2 d\tau = -\left(1 - \frac{2U}{c^2}\right)(dx^0)^2 + \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)\left[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\right], \quad (2.16)$$

где  $c$  – скорость света,  $\tau$  – собственное время системы и  $U$  – сумма приведенных Ньютоновского гравитационного потенциала для рассматриваемых небесных тел (масс) и приливного потенциала, создаваемого внешними небесными телами.

Заметим, что отношение  $\frac{U}{c^2}$  всегда мало по сравнению с единицей для современного состояния Солнечной системы.

Координатное время  $t = \frac{x^0}{c}$  близко к собственному времени часов  $\tau$ , движущихся в рассматриваемой координатной системе со скоростью, малой по сравнению со скоростью света  $c$ . Необходимо заметить, что все часы за исключением расположенных на полюсе в геоцентрической системе координат движутся с некоторой скоростью.

Соотношение между собственным временем часов  $\tau$  и координатным  $t$  основано на выражении связи между величинами  $d\tau$  и  $dt$ . Согласно [43], ее можно представить в виде:



$$\frac{d\tau}{dt} = 1 - h(1, x^1, x^2, x^3), \tau(t_0) = t_0. \quad (2.17)$$

Переменная  $h$  с использованием метрики (2.16) приводится к выражению:

$$h(t) = c^{-2} \left[ U(t) + \frac{1}{2} V^2(t) \right] + O(c^{-4}), \quad (2.18)$$

где функция  $V(t)$  является координатной скоростью часов; члены порядка  $O(c^{-4})$  пренебрежимо малы для современных задач. Отклонение собственного времени  $\Delta(t - \tau)$  на заданном интервале  $(t_0, t)$  будет равно:

$$\Delta(t - \tau) = \int_{t_0}^t h(t) dt. \quad (2.19)$$

Пусть “идеальные” часы установлены на вращающемся геоиде, тогда собственное время  $\tau$  связано с координатным  $t$  выражением (2.16):

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 = h(t) = 1 - \frac{U_g}{c^2} = 1 - 0.697 \times 10^{-9}. \quad (2.20)$$

т.е. собственное время  $\tau$  отстает на 22 мс в год по отношению к координатному времени  $t$ . Здесь  $U_g$  – сумма приведенных гравитационного потенциала и потенциала центробежных сил на поверхности геоида. Она оценивается величиной  $U_g = 6.263686 \times 10^7 [m^2 c^{-2}]$ .

Релятивистские эффекты и связанные с ними поправки к шкале времени в системе навигационно-временного обеспечения (на навигационных спутниках установлены цезиевые или рубидиевые бортовые часы) носят характер методических ошибок в измерениях расстояний (псевдодальностей) от спутника до приемника (пользователя). Погрешности постоянно накапливаются во времени

с периодами год, сутки для наземных часов и периодом витка для часов на спутнике.

Создание моделей неравномерности вращения Земли с надежным прогнозом может играть определяющую роль в данной проблеме, позволяя упростить процесс фазировки часов (синхронизации часов), повысить точностные характеристики координатно-временного обеспечения навигационных систем. Для повышения точностных характеристик прогноза нестабильности шкалы всемирного времени  $UT1$ , связанного с вращением Земли, на коротких и внутрисуточных интервалах времени представляется целесообразным учет поправок на возмущения короткопериодических приливов с малыми амплитудами. Классическая теория движения Луны для конфигурации системы Земля–Луна в поле притяжения Солнца в современных условиях используется совместно с данными наблюдений и измерений МСВЗ, что позволяет учитывать ряд тонких динамических эффектов во вращательно-колебательном движении Земли. Отметим, что вариации скорости осевого вращения Земли, период и среднее движение Луны, среднее расстояние или большая полуось лунной орбиты, включая также главные неравенства в движении Луны, являются существенно взаимосвязанными параметрами [43].

## 2.5 Моделирование неравномерности осевого вращения Земли на коротком интервале времени

В пространственном варианте ограниченной задачи трех тел Земля–Луна–Солнце уравнение возмущенного движения узла лунной орбиты  $\Omega_M$  и наклонение  $I$  плоскости лунной орбиты к эклиптике имеют вид:

$$\frac{d\Omega_M}{dt} = -\frac{3}{4} \frac{n_S^2}{n_M} \left[ 1 - \cos 2(l_M - \Omega_M) - \cos 2(l_S - \Omega_M) + \cos 2\lambda \right], \quad (2.21)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{3}{4} \frac{n_S^2}{n_M} \sin I \left[ \sin 2(l_S - \Omega_M) - \sin 2(l_M - \Omega_M) + \sin 2\lambda \right].$$

Здесь  $n_M, n_S$  – сидерические средние движения Луны и Солнца соответственно; периодические колебания угла  $I$  совершаются с периодом 18.61 года;  $l_M$  – средняя долгота Луны;  $a_M$  – большая полуось орбиты Луны;  $(l_M - \Omega_M)$  – угол между Луной и восходящим узлом лунной орбиты;  $\lambda = (n_M - n_S)t + \lambda_0$  – приближенно разность долгот Луны и Солнца (не является линейной функцией времени, поскольку среднее движение  $n_M$  подвергается, по крайней мере, периодическим изменениям) [1, 24, 25, 44].

Для ситуации, отвечающей квазипериодическому лунному воздействию, динамический анализ неравномерности вращения Земли позволяет установить более сложные мелкомасштабные свойства этого движения, которые содержатся в данных измерений. Прецессионное движение и малые вариации наклона плоскости лунной орбиты, соответствующие (2.21), приводят к дополнительным

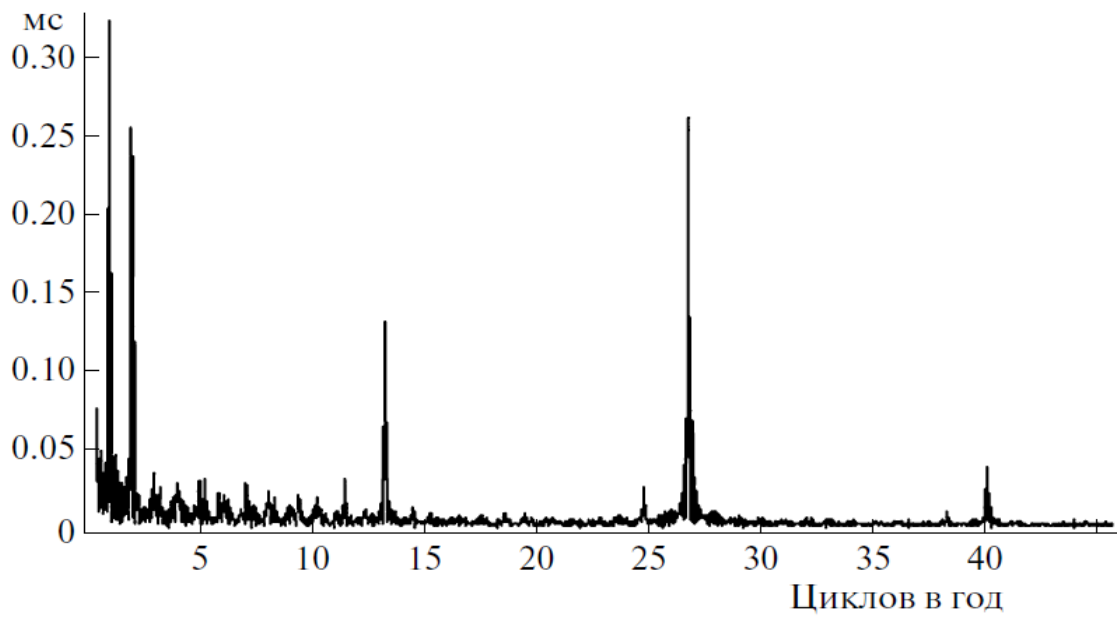


Рис. 2.5. Спектральная плотность мощности ряда наблюдений *l.o.d.*

гравитационно-приливным воздействиям, которые вызывают изменения продолжительности суток.

Из спектрального анализа обработанных рядов наблюдений вариаций длительности суток (рис. 2.5) следует наличие стабильной высокочастотной гармоник с аргументом  $(2\lambda + M)$  и периодом 9.56 суток, где  $M$  - средняя аномалия Луны, на которую влияют изменения средней долготы и смещения перигея. Периодическое лунное неравенство  $(2\lambda - M)$  представляет собой эвекцию, период которой соответствует 31.81 суток.

Небесномеханическая модель приливных регулярных изменений скорости осевого вращения Земли описывается линейной системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\left[(C^* + \delta C)l.o.d.(\varphi, t)\right]}{dt} = -\frac{D_0}{r_0}\left[M_r^S + M_r^L + \Delta M(\dot{\Omega}, \dot{I})\right],$$

$$\frac{d[UT1 - TAI](\varphi, t)}{dt} = -D_0^{-1}l.o.d.(\varphi, t), \quad (2.22)$$

$$D_0 = 86400c.$$

Здесь  $C^*$  – осевой момент инерции с учетом деформаций «замороженной» фигуры Земли;  $\varphi$  – угол собственного вращения;  $M_r^{S,L}$  – лунно-солнечные гравитационно-приливные моменты сил с основными частотами;  $\Delta M^{S,L}(\dot{\Omega}, \dot{I})$  – слагаемые более высокой степени малости в разложении лунно-солнечного гравитационно-приливного момента пространственного варианта данной задачи.

Обозначая  $\mu(t) = r_0^{-1} [M_r^S + M_r^L + \Delta M^{SL}(\dot{\Omega}, i)]$ , выражения изменения длительности суток и временной поправки будут иметь вид:

$$[UT1 - TAI](t) = [UT1 - TAI](0) - D_0^{-1} l.o.d.(0)t + \int_0^t (t - t_1) \langle \mu(t_1) \rangle_\phi dt_1, \quad (2.23)$$

$$l.o.d.(t) = l.o.d.(0) - D_0 \int_0^t \langle \mu(t_1) \rangle_\phi dt_1.$$

Здесь  $\langle \dots \rangle_\phi$  – символ осреднения на суточном интервале времени.

Рассмотрим возможность прогнозирования квазипериодических колебаний длительности суток в среднем диапазоне частот, учет которых является статистически значимым и может быть оправдан на интервалах, близких к периодам среднечастотных компонент.

На рис. 2.5 приводится спектральная плотность мощности усреднённого, многолетнего ряда наблюдений вариаций длительности суток  $l.o.d.$ . Представим приливные коэффициенты лунно-солнечных гравитационно-приливных моментов сил (амплитуд и фаз основных колебаний) в виде квазипериодических функций по времени. Необходимое для такого представления соответствие коэффициентов внутригодовых и внутрисуточных квазипериодических колебаний (наличия структурных свойств моделей) наглядно иллюстрируется на рис. 2.6 и получается из обработки наблюдений МСВЗ.

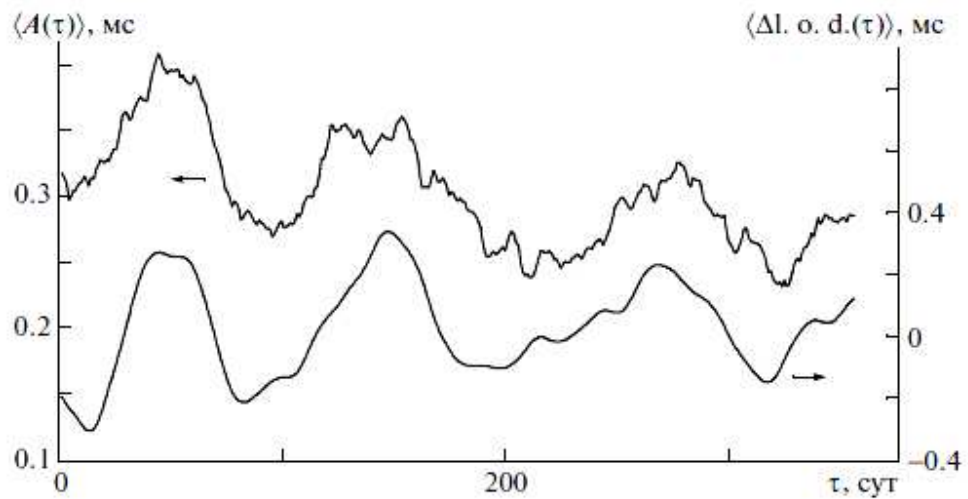


Рис. 2.6. Усредненные амплитудные модуляции нестационарных внутрисуточных флуктуаций  $\langle A(\tau) \rangle_{\varphi}$  и усредненные квазипериодические внутригодовые колебания  $\langle \Delta l.o.d.(\tau) \rangle$  (усредненный резидиум на 40-суточном интервале времени) в течение лунного года в 2008 г.

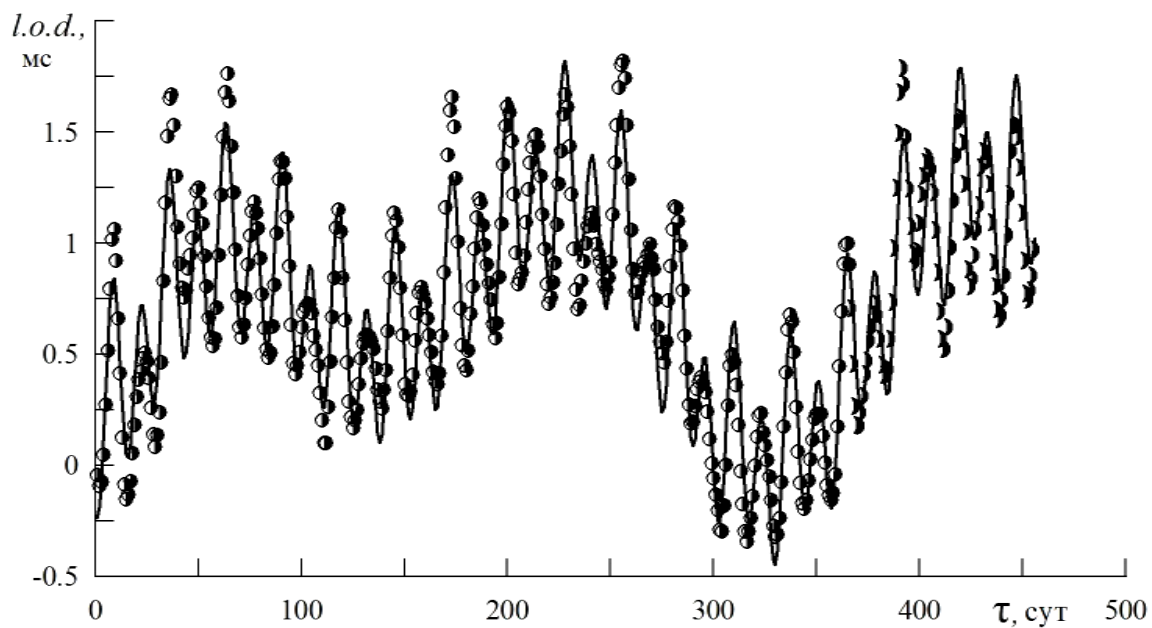


Рис. 2.7. Интерполяция изменения длительности суток  $l.o.d.$  в сравнении с данными наблюдений (01.09.2010 г. – 01.09.2011 г.) и прогноз до 01.01.2012 г. Сплошная линия – теоретическая модель. Дискретные данные (точки и полумесяцы) – результаты наблюдений МСВЗ в сравнении с интерполяцией и прогнозом соответственно.



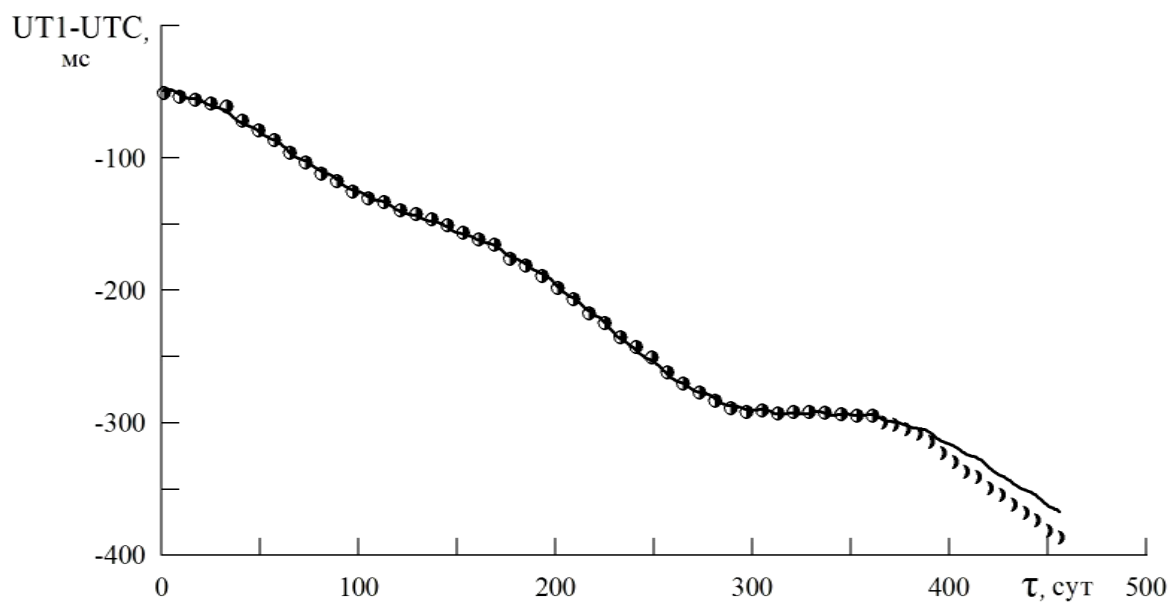


Рис. 2.8. Интерполяция временной поправки  $UT1 - UTC$  в сравнении с данными наблюдений (01.09.2010 г. – 01.09.2011г.) и прогноз до 01.01.2012 г. Дискретные данные (точки и полумесяцы) – результаты наблюдений МСВЗ в сравнении с интерполяцией и прогнозом соответственно.

На нем приводится сравнение нестационарных усредненных внутригодовых и амплитудных модуляций внутрисуточных колебаний длительности суток  $l.o.d.(\tau)$  соответственно. В этом случае “нерегулярные” колебания во вращательном движении Земли аппроксимируются квазипериодическим процессом, производная которого имеет структуру гравитационно-приливного момента с периодическими коэффициентами.

Тогда выражение  $l.o.d.(t)$  может быть представлено в следующем общем виде:

$$l.o.d.(t) = l.o.d.(0) - D_0 \int_0^t \langle \mu(t_1) \rangle_\phi dt_1 + \overline{\Delta l.o.d.}(t), \quad (2.24)$$

где  $\overline{\Delta l.o.d.}$  – усреднённый на 10-ти суточном интервале времени резидиум ряда наблюдений вариаций длительности суток – сумма гармоник с постоянными коэффициентами и модифицированным набором частот  $\vartheta_j$  вариаций тензора инерции деформированной Земли. На рис. 2.7 приводятся интерполяция изменения длительности суток  $l.o.d.$ , выполненная с помощью построенной модели на интервале времени с 01.09.2010 г. по 01.09.2011 г., в сравнении с данными наблюдений и прогноз до 01.01.2012 г. На рис. 2.8 приводятся интерполяция и прогноз временной поправки  $UT1 - UTC$  на тех же интервалах. Следует отметить, что поправка  $UT1 - UTC$  отличается от  $UT1 - UTC$ , входящей в выражение (2.23), на целое число секунд. Вынужденная процедура введения “скачущих” секунд осуществляется МСВЗ, и частота их определяется межгодовой неравномерностью осевого вращения Земли.

## 2.6 Внутрисуточные вариации осевого вращения Земли.

Для уточнения внутригодовой модели неравномерности вращения Земли наряду с дополнительным слагаемым в разложении лунно-солнечного гравитационно-приливного момента учитываются поправки на возмущения зональных приливов с малыми амплитудами. Для этого вводится резидиум  $\Delta d(t)$  - флуктуации изменения длительности суток  $l.o.d.(t)$ , вызванные приливными возмущениями тензора инерции деформируемой Земли.

Для записи выражений модели параметров вращательного движения Земли на внутрисуточном интервале времени рассматривается неусреднённая по собственному вращению линейная система дифференциальных уравнений (2.22).

Выражения гравитационно-приливных моментов в результате вычислений и преобразований имеют гармоническую структуру. После интегрирования уравнений (2.22) выражение для вариации длительности суток  $l.o.d.(\varphi, \tau)$  представляется как совокупность построенной ранее основной модели  $d(\tau)$ , поправки на возмущения зональных короткопериодических приливов  $\Delta d(\tau)$  (резидиум) и модели суточных флуктуаций  $\Delta_{\varphi} l.o.d.(\tau)$  вращения Земли [47-48]

$$l.o.d.(\varphi, \tau) = d(\tau) + \Delta d(\tau) + \Delta_{\varphi} l.o.d.(\tau),$$

$$d(\tau) = a_0 + \sum_{i=1}^6 a_{i0} \sin(2\pi\nu_i \tau + \alpha_i), \quad (2.25)$$

$$\Delta d(\tau) = \Delta_1 d(\tau) + \Delta_2 d(\tau) = -\chi_3 \left[ a_0 + \sum_{i=1}^4 a_{i0} \sin(2\pi\nu_i \tau + \alpha_i) \right] +$$

$$+ \frac{1}{(1 + \chi_3)} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^N \int a_{ij}(\tau) \cos(2\pi\nu_j\tau + \beta_{ij}) \times \cos(2\pi\nu_i\tau + \alpha_i) d\tau.$$

$$\Delta_{\varphi} l.o.d.(\tau) = \Delta_{\varphi}^S l.o.d.(\tau) + \Delta_{\varphi}^L l.o.d.(\tau).$$

Здесь  $\tau$  – время, измеряемое в годах;  $\nu_1 = 1$ ,  $\nu_2 = 2$ ,  $\nu_3 = 13.28$ ,  $\nu_4 = 26.68$ ,  $\nu_5 = 3$ ,  $\nu_6 = 40$  – частоты, обусловленные лунно-солнечным возмущением;  $\nu_j$  – частоты лунно-солнечных приливных воздействий и других факторов, определяющих колебания вариаций тензора инерции (подразумевается, что набор частот  $\nu_j$  может быть эмпирически скорректирован в ходе численного моделирования);  $\chi_3$  – приливной коэффициент, являющийся периодической функцией с частотами  $\nu_j$ ;  $\alpha_i$  – фазы соответствующих колебаний;  $a_{ij}(\tau)$  – неизвестные величины, подлежащие определению по измерениям МСВЗ. Слагаемое  $\Delta_{\varphi}^S l.o.d.(\tau)$  в (2.25), обусловленное суточным вращением Земли, имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta_{\varphi}^S l.o.d.(\tau) = \int \{ & [k_1 \sin(2\varphi + \beta_{2\varphi}) + k_2 \sin(\varphi - \beta_{\varphi})] \sin \theta + \\ & + [k_3 \sin(\varphi + \gamma_{\varphi}^1) + k_4 \sin(\varphi + \gamma_{\varphi}^2) + k_5 \sin(2\varphi + \gamma_{\varphi})] \cos \theta \} \sin \theta d\tau, \end{aligned} \quad (2.26)$$

где  $\theta$  – угол нутации; амплитуды и фазы гармонических составляющих подынтегрального выражения – коэффициенты, однозначно связанные с неизвестными, содержащимися в (2.22).

На внутригодовых интервалах выражение для разности всемирного времени и атомного времени  $UT1 - TAI$  получается из (2.25), и оно содержит составляющие с периодами от года до внутрисуточных периодов:

$$\begin{aligned}
(UT1 - TAI)(\varphi, \tau) &= -365.25 \int l.o.d.(\tau) d\tau = \\
&= (UT1 - TAI)(\tau) + \Delta UT1(\tau) + \Delta_{\varphi} UT1(\tau),
\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\frac{1}{365.25} (UT1 - TAI)(\tau) = const - a_0 \tau + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^6 \left( \frac{a_{i0}}{v_i} \right) \cos(2\pi v_i \tau + \alpha_i),$$

$$\Delta UT1(\tau) = -365.25 \int \Delta d(\tau) d\tau,$$

$$\Delta_{\varphi} UT1(\tau) = -365.25 \int \Delta_{\varphi} d(\tau) d\tau.$$

Интегрируя (2.22), приходим к окончательному выражению для модели внутрисуточных вариаций вращения Земли

$$\begin{aligned}
\Delta_{\varphi} l.o.d.(\tau) &= \sum_{i=1}^2 \left[ a_i + \sum_{j=3}^4 b_{ij} \sin \left( 2\pi v_j \frac{\tau}{365.25} + \alpha_j \right) \right] \times \\
&\times \sin \left( 2\pi v_j \frac{\tau}{365.25} + \alpha_j \right) \times \sum_{k=1}^2 [c_{1k} \sin(2k\pi\tau) + c_{2k} \cos(2k\pi\tau)],
\end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\Delta_{\varphi} UT1(\tau) = - \int \Delta_{\varphi} d(\tau) d\tau.$$

Здесь величины  $a_i$ ,  $b_{ij}$ ,  $c_{1k}$ ,  $c_{2k}$ ,  $\alpha$  - неизвестные амплитуды и фазы соответствующих колебаний, подлежащие определению на основе данных наблюдений;  $\tau$  - время, измеряемое сутками.

При прогнозировании на короткие интервалы времени (от одних до десяти суток) коэффициенты модели считаются медленными функциями времени и рассматриваются как квазипостоянные, для которых требуется регулярная корректировка на интервале интерполяции. Применяемая настройка модели

позволяет обойтись без учета дополнительных долгопериодических возмущающих факторов, однако, как следует из результатов численного моделирования, не устраняет ошибки в амплитудных модуляциях и фазовом сдвиге высокочастотных колебаний прогноза на более длительные интервалы времени.

Приведем графические результаты численного моделирования суточной приливной неравномерности осевого вращения Земли, согласно модели (2.28), в сравнении с высокоточными данными наблюдений и измерений GPS/VLBI [55, 58].

Численные расчеты проводились на основе использования базового набора опорных функций модели (2.28) с основными частотами лунно-солнечных возмущений, наблюдаемых МСВЗ [59]. Следует отметить, что учет дополнительных слагаемых модели может привести к уменьшению точности краткосрочного прогноза вследствие возросшего числа неизвестных коэффициентов и наличия опорных функций с близкими частотами, а также потребует увеличения длины интервала интерполяции.

На рис. 2.9а, 2.9б, согласно (2.28), приводятся 10-сут и 13-сут интерполяции внутрисуточных вариаций всемирного времени  $\Delta_{\varphi}UT1$  и даются прогнозы на 2 сут на интервалах в 1994, 2005 гг. соответственно, в сравнении со сглаженными часовыми данными наблюдений и измерений VLBI [58] (из данных наблюдений были удалены составляющие с периодами, большими близосуточных, ввиду малых амплитуд суточных вариаций вращения Земли). Сравнение теоретически

полученных кривых с данными измерений показывает наличие флуктуаций различного характера.

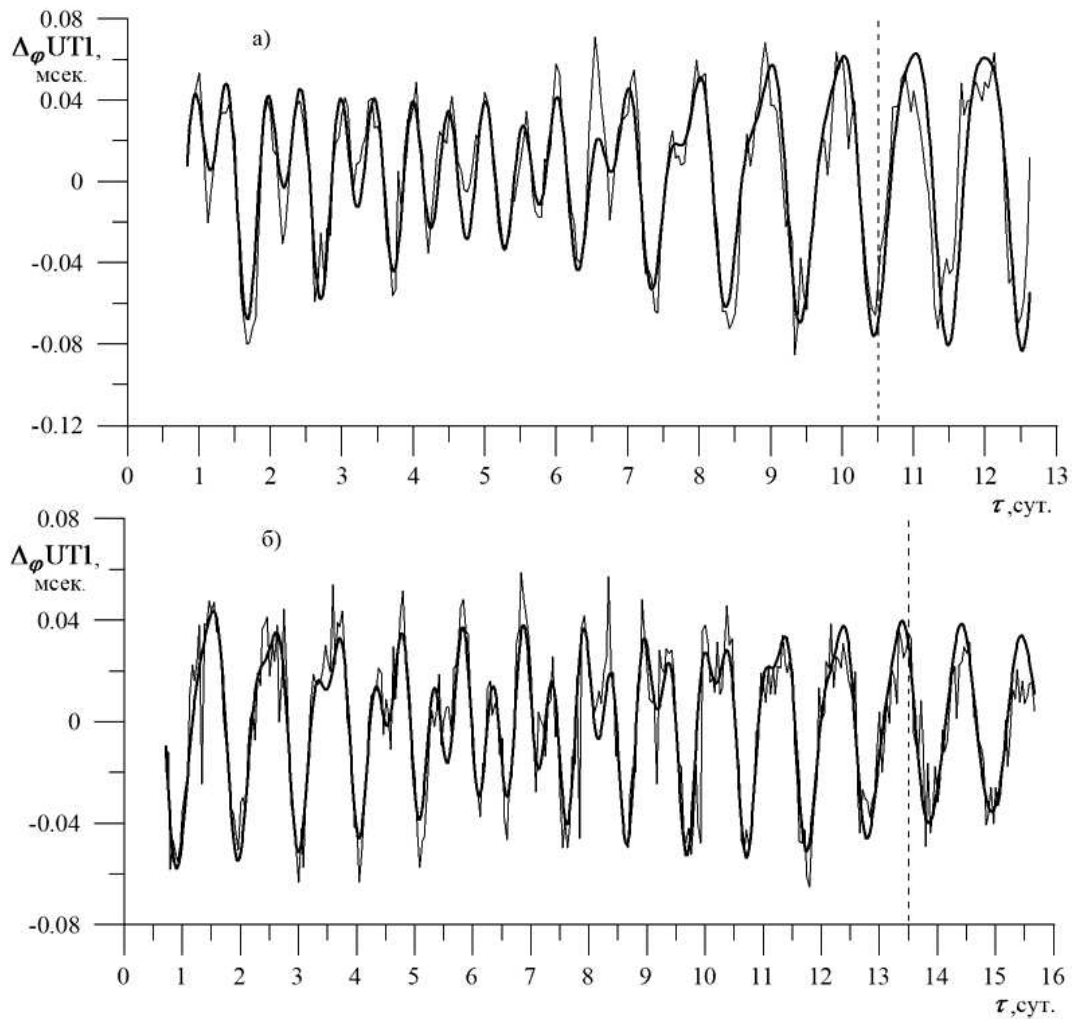


Рис. 2.9: а) Интерполяция внутрисуточных вариаций  $\Delta\varphi_{UT1}$  на интервале времени с 13.01.1994 по 22.01.1994 и прогноз на 2 суток (контрастная линия) в сравнении с данными наблюдений и измерений VLBI (обычная линия).

б) Интерполяция внутрисуточных вариаций  $\Delta\varphi_{UT1}$  на интервале времени с 12.09.2005 по 25.09.2005 и прогноз на 2 суток (контрастная линия) в сравнении с данными наблюдений и измерений VLBI (обычная линия).



## **Глава III Амплитудно-частотный анализ колебательного процесса земного полюса**

### **3.1 Амплитудно-частотный анализ внутрисуточного колебательного процесса земного полюса.**

Достижение высоких точностей координатно-временного обеспечения наземных (стационарных и подвижных), а также движущихся в околоземном пространстве объектов связано с фундаментальной задачей построения динамических моделей вращательно-колебательных движений Земли, адекватных данным наблюдений и измерений Международной службы вращения Земли. В ряде практически важных задач, например, касающихся вопросов высокоточной навигации космических аппаратов [26, 28, 52, 54], существенную роль может играть внутрисуточный прогноз движения земного полюса [34, 35]. Короткопериодические (с периодами от субсуточных до суток) регулярные колебания и нерегулярные флуктуации мгновенной оси вращения обусловлены как небесномеханическими (лунно-солнечные гравитационно-приливные моменты сил), так и различными геофизическими факторами (атмосферными, океаническими, сезонными и многими другими).

В рамках классической механики проводится амплитудно-частотный анализ малопараметрической модели внутрисуточного колебательного процесса земного

полюса под воздействием гравитационно-приливных моментов сил от Солнца и Луны [18]. Дифференциальные уравнения колебательного движения земного полюса на внутрисуточных интервалах времени могут быть получены из динамических уравнений Эйлера-Лиувилля пространственного варианта задачи «деформируемая Земля-Луна» в поле притяжения Солнца [29]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [1 + \chi_A + \kappa_p r_0] p + N_p \frac{B}{A} (1 + \chi_B) q &= \kappa_q r^2 + M_p^{SL}(\Omega, I, \pi), \\ \frac{d}{dt} [1 + \chi_B + \kappa_q r_0] q - N_q \frac{A}{B} (1 + \chi_A) p &= -\kappa_p r^2 + M_q^{SL}(\Omega, I, \pi), \\ N &= \sqrt{N_p N_q (1 + \chi_A)(1 + \chi_B)} \approx (0.84 \div 0.85) \omega_0, \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$A = A^* + \delta A, B = B^* + \delta B, C = C^* + \delta C,$$

$$\chi_A = \frac{\delta A}{A^*}, \chi_B = \frac{\delta B}{B^*}, \kappa_p = \frac{\delta J_{pr}}{A^*}, \kappa_q = \frac{\delta J_{qr}}{B^*}.$$

Здесь  $\omega = (p, q, r)^T$  - вектор угловой скорости в связанной с Землей системе координат;  $N$  - чандлеровская частота;  $\omega_0$  - среднее движение Земли по орбите вокруг Солнца;  $A^*, B^*, C^*$  - эффективные главные центральные моменты инерции с учетом деформаций «замороженной» фигуры Земли; малые вариации тензора инерции  $\delta J_{ij} (i, j = p, q, r)$  содержат различные гармонические составляющие (зональные, тессеральные, секториальные), обусловленные возмущающим влиянием гравитационных приливов от Солнца и Луны и других факторов;  $\chi_A, \chi_B, \kappa_p, \kappa_q$  - приливные горбы и выступы соответственно;  $M_{p,q}^{SL}(\Omega, I, \pi)$  - зависящие от переменных Эйлера (углов нутации  $\theta$ , прецессии  $\psi$  и собственного

вращения  $\varphi$ ) и средних движений Земли и Луны удельные моменты лунно-солнечных гравитационно-приливных сил;  $\Omega$  - долгота восходящего узла лунной орбиты;  $\pi$  - долгота перигея орбиты Луны;  $I$  - наклонение плоскости лунной орбиты к эклиптике.

Колебания компонент тензора инерции Земли зависят от многих факторов, таких как механические и физические параметры планеты, движение приливообразующих тел, наблюдаемые крупномасштабные природные явления. Изменения во времени этих и других факторов (регулярные и нерегулярные колебания, флуктуации стохастического характера, вековые изменения) отражаются на вращательно-колебательных процессах Земли и ее параметрах вращения.

Так, годовые вариации моментов инерции и вращательно-колебательные движения Земли происходят синфазно. Функциональная зависимость  $\delta J_{ij} = \delta J_{ij}(\theta)$  может быть проиллюстрирована сопоставлением вариаций коэффициента  $c_{2,0}$  при второй зональной гармонике, выделенных из данных МСВЗ [59] в рамках вращательно-колебательной модели Земли [29, 38] с результатами спутниковых наблюдений (рис. 3.1).

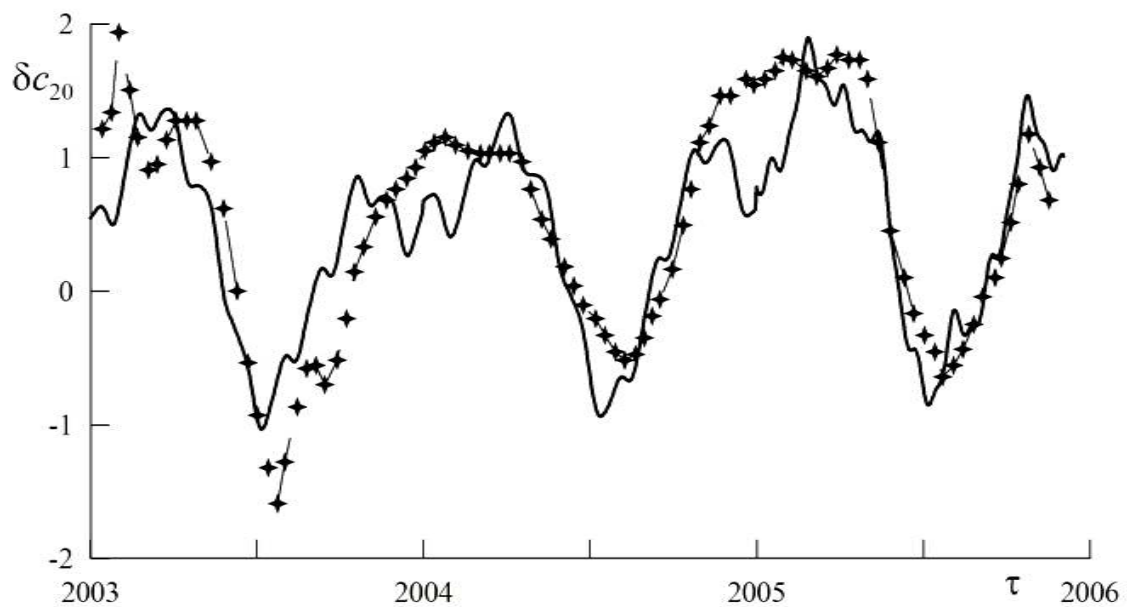


Рис. 3.1. Вариации коэффициента  $c_{2,0}$  при второй зональной гармонике на временном интервале 2003–2005 гг.: точки – результаты спутниковых наблюдений; сплошная линия – вариации, выделенные из данных наблюдений параметров вращения Земли.

Небесномеханические представления годовых колебаний полюса [17, 19-21] основаны на учете гравитационно-приливного момента сил и его комбинационной структуры, зависящей от угла нутации  $\theta$ . При этом годовые компоненты  $M_{p,q}^S$  момента гравитационно-приливных сил от Солнца составляют вектор, вращающийся в связанной системе координат с угловой скоростью среднего движения Земли по орбите вокруг Солнца.

Внутрисуточные колебания параметров вращения Земли (ПВЗ) наиболее детально отражают динамические процессы, приводящие к значимым изменениям как в ПВЗ, так и в геофизических явлениях, а задача наблюдения, идентификации и амплитудно-частотного анализа высокочастотных колебаний ПВЗ представляет значительные трудности.

Численно-аналитический подход в решении уравнений (2.29) допускает уточнение выражения гравитационно-приливного момента правой части (2.29) на внутригодовых интервалах времени. Дополнительные слагаемые  $\Delta M_{pq}(\vartheta_j)$  с неизвестными частотами  $\dot{\vartheta}_j(t)$  входят аддитивно в  $M_{pq}^{SL}$  и обусловлены нестационарными возмущениями тензора инерции деформируемой Земли.

Дополнительное слагаемое внутрисуточного возмущающего момента записывается в виде:

$$\Delta M_{pq}(\vartheta_j) = \sum [a_j^{pq} \cos(\varphi + \vartheta_j) + b_j^{pq} \sin(\varphi + \vartheta_j)], \quad (2.30)$$

где  $a_j^{pq}$ ,  $b_j^{pq}$  - неизвестные амплитуды колебаний.

Зависимость гравитационного потенциала Земли от времени определяется известным движением приливообразующих тел (Солнца и Луны) и функциями

$\vartheta_j(t)$ , которые в линейном приближении находятся из наблюдений на коротком интервале времени.

Для описания внутрисуточных колебаний земного полюса примем следующие обозначения в разложении вариаций тензора инерции  $\delta J_{ij}$ :

$$\delta J_{ij} = \delta J_{ij}^{(t)} + \delta J_{ij}^{(\varphi)} + \delta J_{ij}^{(2\varphi)} + \dots \quad (2.31)$$

где  $\delta J_{ij}^{(t)}$  - внутригодовые и межгодовые вариации;  $\delta J_{ij}^{(\varphi)}$ ,  $\delta J_{ij}^{(2\varphi)}$  - суточные и полусуточные вариации.

Фигура Земли вследствие вариаций тензора инерции (возникающих из-за периодических приливных деформаций - океанических и твердотельных приливов и квазипериодических колебаний) является динамической фигурой геоида, так что при этом создается дополнительный возмущающий потенциал  $\delta W(t)$ , зависящий от времени. При моделировании флуктуаций геопотенциала вариации  $\delta C_{2,i}$ ,  $\delta S_{2,j}$ , ( $i = 0, 1, 2$ ;  $j = 1, 2$ ) зональных тессеральных и секториальных коэффициентов

$$\begin{aligned} C_{2i} &= C_{2i}^* + \delta C_{2i} \\ S_{2i} &= S_{2i}^* + \delta S_{2i} \end{aligned}$$

могут быть выражены через вариации компонентов тензора инерции

$$\delta J = \begin{pmatrix} \delta A & \delta J_{pq} & \delta J_{pr} \\ \delta J_{pq} & \delta B & \delta J_{qr} \\ \delta J_{pr} & \delta J_{qr} & \delta C \end{pmatrix}$$

следующим образом:

$$\begin{aligned}
\delta C_{20} &= \frac{\delta A + \delta B - 2\delta C}{2m_E^2} \\
\delta C_{21} &= \frac{\delta J_{pr}}{m_E R_E^2}; \quad \delta S_{21} = \frac{\delta J_{qr}}{m_E R_E^2} \\
\delta C_{22} &= \frac{\delta B - \delta A}{4m_E R_E^2}; \quad \delta S_{22} = \frac{\delta J_{pq}}{2m_E R_E^2}
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Здесь введены следующие обозначения:  $C_{2,i}^*$ ,  $S_{2,j}^*$  ( $i = 0, 1, 2; j = 1, 2$ ) коэффициенты, соответствующие статической модели гравитационного поля, а  $\delta C_{2,i}^{(t)}$ ,  $\delta S_{2,j}^{(t)}$  ( $i = 0, 1, 2; j = 1, 2$ ) - поправки, учитывающие малые вариации динамического сжатия фигуры Земли во времени,  $R_E \approx 6.38 \times 10^6$  м,  $m_E$  - масса Земли.

Известно [3, 52, 56-57], что зональные гармоники дают вековые и долгопериодические возмущения в элементах орбит спутников, которые на больших интервалах времени приводят к значительным ошибкам прогноза их эфемерид. Если в разложении потенциала притяжения Земли удерживать только зональные гармоники, то его выражение примет вид [22, 39]:

$$\begin{aligned}
V &= \frac{fm_E}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) \right], \\
J_n &= -c_{n0}, \quad P_n(\sin \varphi) = P_n^{(0)}(\sin \varphi), \\
fm_E &= 3.98600442 \times 10^{14}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Тогда гравитационный потенциал Земли представляется в виде суммы

$$U = U_g + \delta W(t), \tag{2.34}$$

где  $U_g$  - потенциал сил притяжения Земли  $V$  с учетом потенциала центробежных сил на поверхности геоида. Дополнительный потенциал  $\delta W(t)$  обусловлен переменностью тензора инерции.

Для второй зональной гармоники он имеет вид:

$$\begin{aligned} \delta W &= \frac{f m_E a^2}{r^3} P_{20}(\cos \varphi) \delta J_2, \\ \delta J_2 &= -\delta C_{20} = \frac{2\delta C - \delta A - \delta B}{2m_E r_0^2} \end{aligned} \quad (2.35)$$

и соответствует приливообразующему потенциалу от Солнца и Луны.

Для орбитального движения планет Солнечной системы преобладающее влияние имеет центральное тело - Солнце. Возмущающее влияние планет друг на друга и собственных спутников оказывается весьма слабым. Это следует из результатов применения и усреднения оскулирующих элементов орбит. Движения планет оказывается весьма близким к кеплеровским.

Движение системы Земля-Луна значительно отличается от указанного выше. Ее динамические характеристики являются по сравнению с другими планетами уникальными и для ряда постановок задач динамики она рассматривается как двойная планета. Поступательно-вращательное движение системы изучается в различных вариантах, обычно в следующих:

- Классическая "гравитационная теория" описывает орбитальное движение системы Земля-Луна вокруг Солнца в рамках точечных моделей [23].
- С помощью классических методов динамики исследуется поступательно-вращательное движение Земли и Луны как твердых тел [30]. Уравнения движения рассматриваются на основе переменных Эйлера или Андуайе с помощью методов



возмущений малого параметра. Такая теория, однако, не позволяет объяснить ряд наблюдаемых явлений, в частности, колебания полюса.

- Современные высокоточные исследования вращений и колебаний относительно центра масс учитывают упругие деформации весьма сложной фигуры Земли и Луны под действием гравитационных приливов [7-10, 33, 39].

- В эволюционных теориях исследуется влияние упруго-диссипативных факторов с учетом гравитационных приливов и нерегулярных воздействий геофизического характера. Эти подходы интенсивно развиваются и в настоящее время далеки от завершенности [26, 28].

Гравитационно-приливные силы без учета диссипации обладают потенциалом, который выражается суммой гармонических слагаемых. В рассматриваемом случае, когда для Луны можно ограничиться моделью гравитирующей точки или шара, потенциал  $U_M$  может быть представлен в виде [24, 25, 33]:

$$\begin{aligned}
 U_M = & -\frac{1}{4}Kg \frac{r^2}{R_E} \left(1 - 3\cos^2 \theta\right) \sum_i^{(0)} C_i \cos A_i - \frac{1}{2}Kg \frac{r^2}{R_E} \sin 2\theta \sum_i^{(1)} C_i \cos(A_i + \varphi) - \\
 & - \frac{1}{2}Kg \frac{r^2}{R_E} \sin^2 \theta \sum_i^{(2)} C_i \cos(A_i + 2\varphi) - \tag{2.36} \\
 K = & \frac{3}{2} \frac{m_M}{m_E} \left(\frac{R_E}{R_{EM}}\right)^3 = 0.843 \times 10^{-7}, \quad 0 \leq r < R_E.
 \end{aligned}$$

Здесь  $\theta$  и  $\varphi$  - географические координаты точки,  $r$  - расстояние от центра масс,  $R_E$  - средний радиус Земли,  $R_{EM}$  - среднее расстояние от центра масс Земли до Луны,  $g$  - ускорение сил тяготения. Угловые переменные  $A_i$  суть линейные

комбинации с целочисленными коэффициентами следующих шести параметров:  $\tau_0, l_{M,S}, p_{M,S}, \Omega_M$ . Величина  $\tau_0$  есть гринвичское среднее лунное время  $\tau_0 = t - l_M + l_S$ , где  $t$  гринвичское среднее солнечное время. Параметры  $l_M$  и  $l_S$  суть средние долготы Луны и Солнца соответственно с периодами 27.55 и 365.25 звездных суток. Величина  $p_M$  есть средняя долгота перигея Луны, изменяющаяся с периодом 8.85 года, а  $p_S$  - средняя долгота перигея Солнца, изменяющаяся с периодом 25.700 лет. Параметр  $\Omega_M$  определяет долготу восходящего узла Луны: он изменяется с периодом 18.61 года.

Суммы  $\sum_i^{(j)}$  учитывают соответственно долгопериодические, суточные и полусуточные гравитационно-приливные воздействия Луны на Землю. Отметим, что для анализа годовых колебаний полюса основной интерес представляют составляющие потенциала гравитационно-приливных сил от Луны, отвечающие суточным приливам. Учитываются компоненты воздействия с 6-летней модуляцией, обусловленной лунно-солнечной прецессией.

Внутрисуточные вариации  $\delta J_{ij}^{(\varphi)}, \delta J_{ij}^{(2\varphi)}$  содержат составляющие колебаний с комбинационными частотными  $\nu_i$  пространственного варианта задачи и частотами  $\dot{\nu}_j$ , обусловленными нерегулярными возмущениями. Например, суточные колебания приливных выступов  $\kappa_p, \kappa_q$  представимы следующим образом:

$$\kappa_p^{(\varphi)} = \sum_i A_i^{(\varphi)} \cos(\varphi + \alpha_i), \quad (2.37)$$

$$\kappa_q^{(\varphi)} = \sum_i B_i^{(\varphi)} \cos(\varphi + \beta_i),$$

где амплитуды  $A_i^{(\varphi)}$ ,  $B_i^{(\varphi)}$  подлежат определению из наблюдений; фазы  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  соответствуют компонентам приливообразующего геопотенциала. Следует отметить, что в отличие от случая регулярных колебаний приливного потенциала вязкоупругой планеты, когда  $\kappa_q^{(\varphi)} \approx \kappa_p^{(\varphi+\pi/2)}$ , функции  $\kappa_p^{(\varphi)}$  и  $\kappa_q^{(\varphi)}$  принимаются существенно различными. Они могут содержать произвольного вида наблюдаемые компоненты, которые аппроксимируются гармоническими составляющими с частотами  $\dot{\vartheta}_j$ . Полусуточные составляющие приливных коэффициентов – горбов и выступов – имеют аналогичный выражениям (2.37) вид.

### 3.2 Моделирование внутрисуточного колебательного процесса земного полюса

Выражения координат земного полюса  $x_p$ ,  $y_p$  в результате решения системы представим в виде суммы:

$$x_p = \bar{x}_p + x_p^{(\varphi)} + x_p^{(2\varphi)}, \quad (2.38)$$

$$y_p = \bar{y}_p + y_p^{(\varphi)} + y_p^{(2\varphi)},$$

где  $\bar{x}_p$ ,  $\bar{y}_p$  - основная математическая модель колебаний земного полюса [8, 40-42], а  $x_p^{(\varphi)}$ ,  $y_p^{(\varphi)}$ ,  $x_p^{(2\varphi)}$ ,  $y_p^{(2\varphi)}$  - суточные и полусуточные слагаемые модели его высокочастотных колебаний:

$$\begin{aligned}
x_p^{(\varphi)} &= \sum_i a_i^{(\varphi)} \cos(\varphi + v_i + \alpha_i^{(\varphi)}) + \sum_j c_j^{(\varphi)} \cos(\varphi + \vartheta_j + \beta_j^{(\varphi)}), \\
y_p^{(\varphi)} &= \sum_i a_i^{(\varphi)} \sin(\varphi + v_i + \alpha_i^{(\varphi)}) + \sum_j c_j^{(\varphi)} \sin(\varphi + \vartheta_j + \beta_j^{(\varphi)}), \\
x_p^{(2\varphi)} &= \sum_i a_i^{(2\varphi)} \cos(2\varphi + v_i + \alpha_i^{(2\varphi)}) + \sum_j c_j^{(2\varphi)} \cos(2\varphi + \vartheta_j + \beta_j^{(2\varphi)}), \\
y_p^{(2\varphi)} &= \sum_i b_i^{(2\varphi)} \cos(2\varphi + v_i + \gamma_i^{(2\varphi)}) + \sum_j d_j^{(2\varphi)} \cos(2\varphi + \vartheta_j + \delta_j^{(2\varphi)}).
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Выражение (2.39) определяется как сумма гармонических составляющих - основных известных внутрисуточных и близсуточных волн (K1, P1, K2, J1, M1, SO1 и т.д.), подтверждаемых наблюдениями MCB3 [59]. Эти составляющие получают естественным образом из динамических уравнений Эйлера-Лиувилля как комбинации суточного и полусуточного колебаний с лунно-солнечными гравитационно-приливными возмущениями.

В частном случае решения рассмотренных уравнений для предельно короткого интервала времени (1-3 суток) определять высокочастотные колебания будут полусуточная и суточная гармоники. А именно, если главными частотами в модели (2.39) являются полусуточные гармоники, то в течение суток наблюдаются два ускорения и два замедления; если суточная частота - главная, то наблюдаются одно ускорение и одно замедление.

В построенной модели (2.38) и (2.39) амплитуды и фазы внутрисуточных и близсуточных колебаний осевого вращения Земли являются коэффициентами с высокой чувствительностью к изменению элементов орбиты Луны, положению на орбите и скорости орбитального движения Земли и Луны. При прогнозировании на короткие интервалы времени (от одних до нескольких суток) указанные

коэффициенты считаются медленными функциями времени и рассматриваются как квазипостоянные, для которых требуется регулярная корректировка на основе данных наблюдений.

На основе оценок слагаемых модели главным образом коэффициенты  $\kappa_p$ ,  $\kappa_q$  определяют положение мгновенной оси деформируемой фигуры Земли. Между коэффициентами модели существует структурное свойство, при котором будет выполняться равенство  $y_p^{(\varphi)} = x_p^{(\varphi+\pi/2)}$ .

Приведем результаты численного моделирования, выполненного на основе метода наименьших квадратов, в сравнении с высокоточными данными наблюдений и измерений МСВЗ и РСДБ-наблюдений.

На рис 3.3 приведены интерполяция внутрисуточных колебаний координат  $x_p$ ,  $y_p$  земного полюса на интервале времени с 12.08.2008 г. по 24.08.2008 г. и прогноз на двое суток в сравнении с данными РСДБ-наблюдений (наблюдений радиоинтерферометрии со сверхдлинными базами) (здесь и далее координаты  $x_p$ ,  $y_p$  измеряются в угловых миллисекундах).

Моделирование результирующей траектории земного полюса проводится независимо для основной модели  $(\bar{x}_p, \bar{y}_p)$  и модели его внутрисуточных колебаний  $(x_p^{(\varphi)} + x_p^{(2\varphi)}, y_p^{(\varphi)} + y_p^{(2\varphi)})$  согласно.

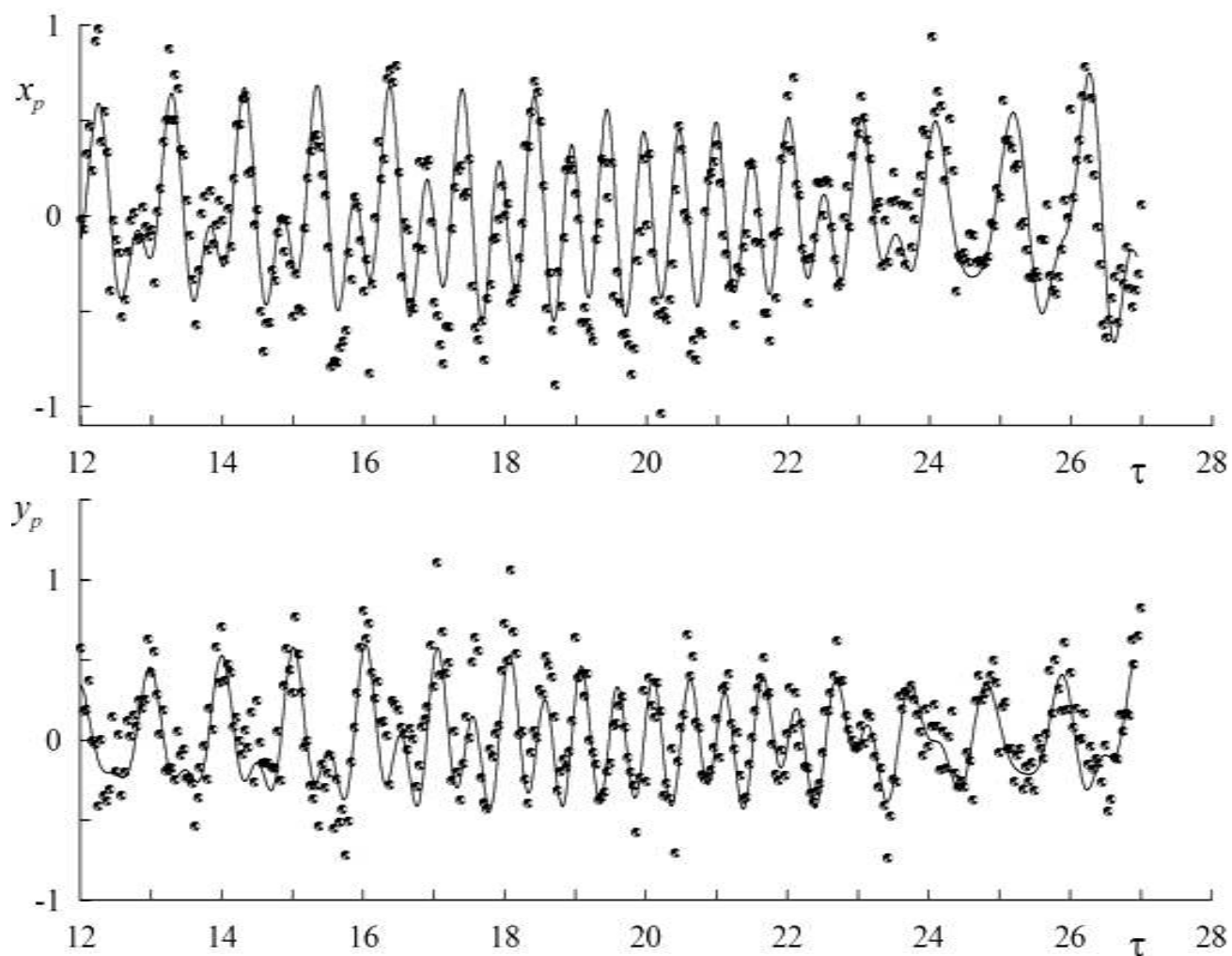


Рис. 3.2. Интерполяция внутрисуточных колебаний координат  $x_p$ ,  $y_p$  земного полюса на интервале времени с 12.08.2008 г. по 24.08.2008 г. и прогноз на двое суток в сравнении с данными РСДБ-наблюдений. Точки – данные наблюдений, сплошная линия – теоретическая модель.

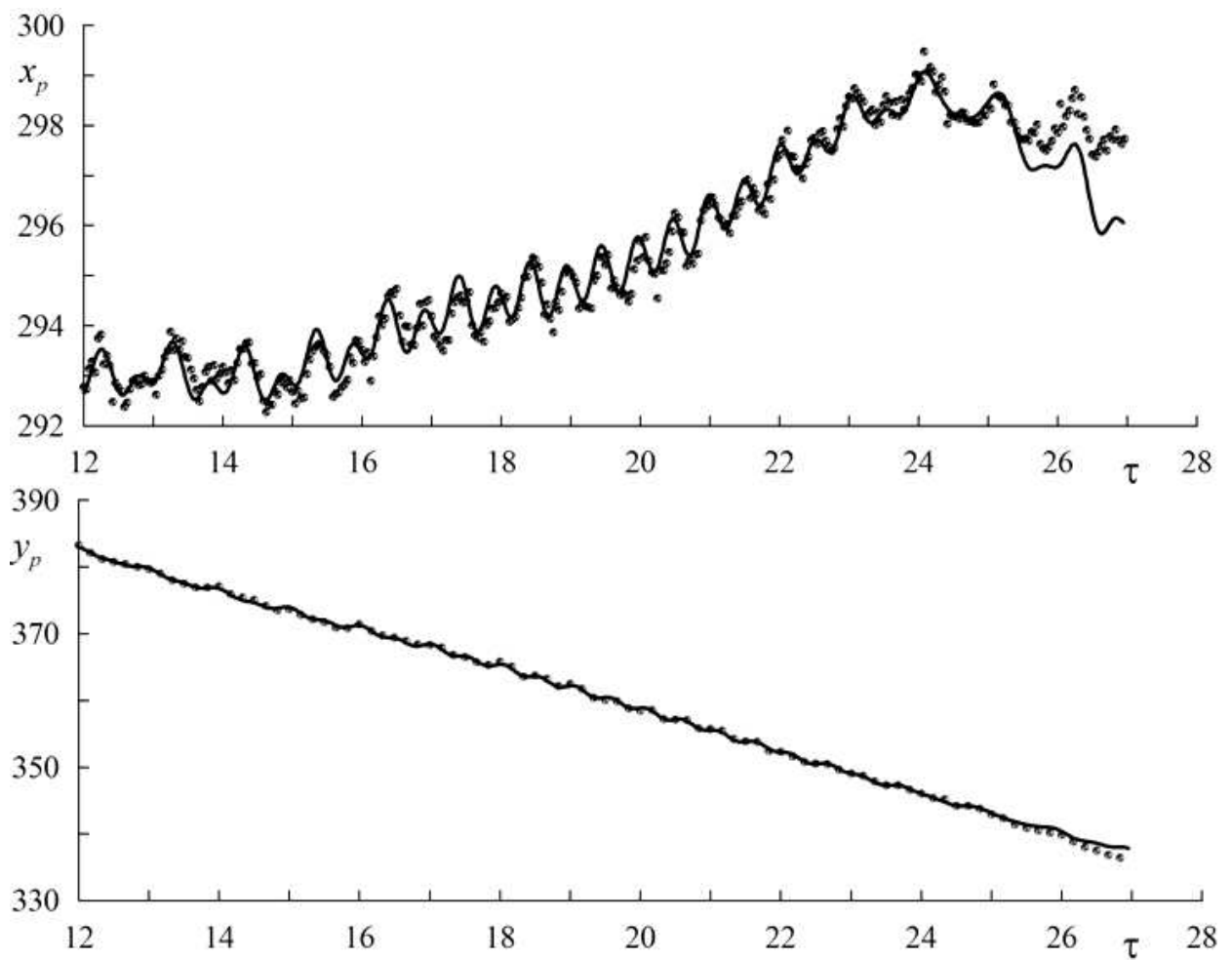


Рис. 3.3. Интерполяция (с 12.08.2008 г. по 24.08.2008 г.) и прогноз (с 25.08.2008 г. по 26.08.2008 г.) координат земного полюса  $x_p$ ,  $y_p$ . Точки – данные наблюдений, сплошная линия – теоретическая модель.

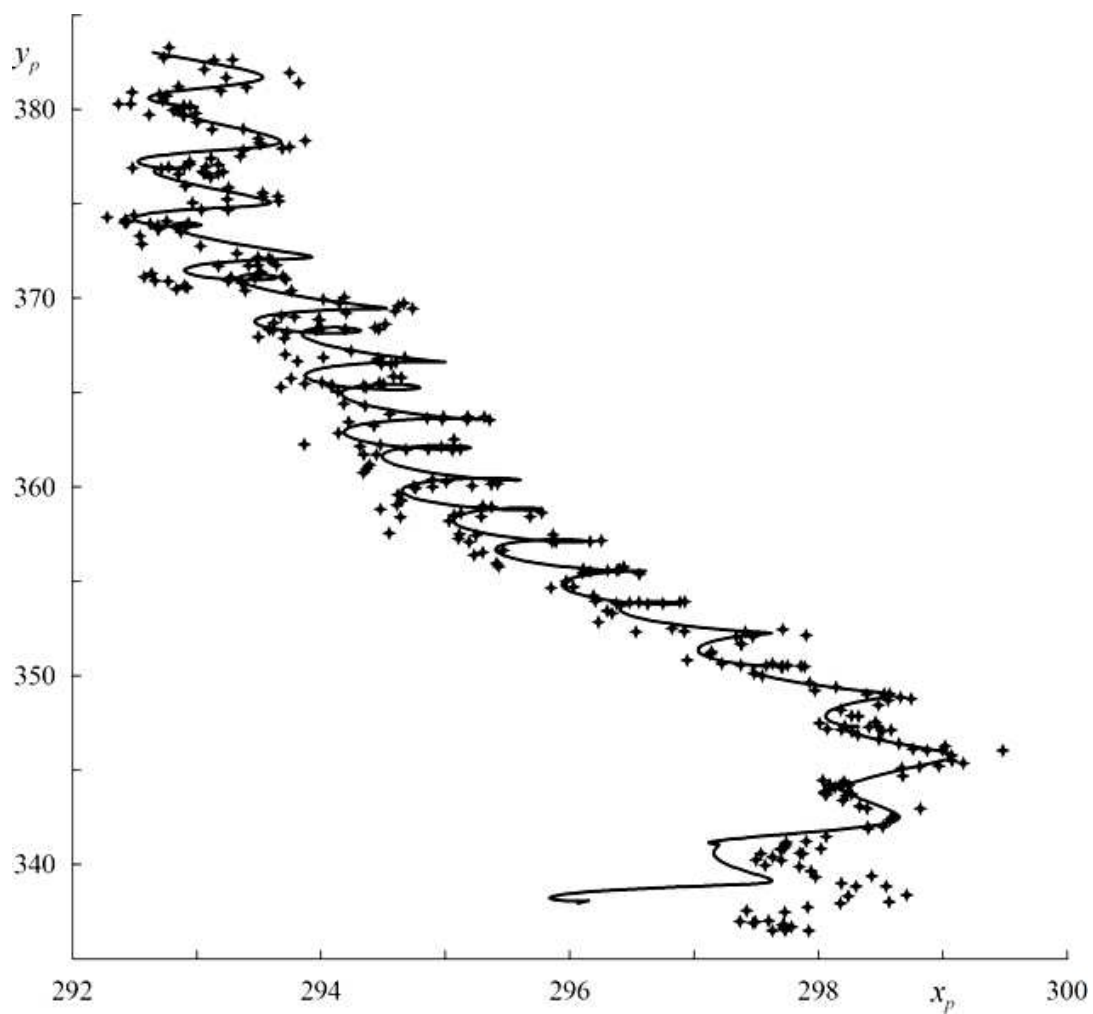


Рис. 3.4. Интерполяция (с 12.08.2008 г. по 24.08.2008 г.) и прогноз (с 26.08.2008 г. по 26.08.2008 г.) траектории земного полюса. Точки – данные наблюдений, сплошная линия – теоретическая модель.



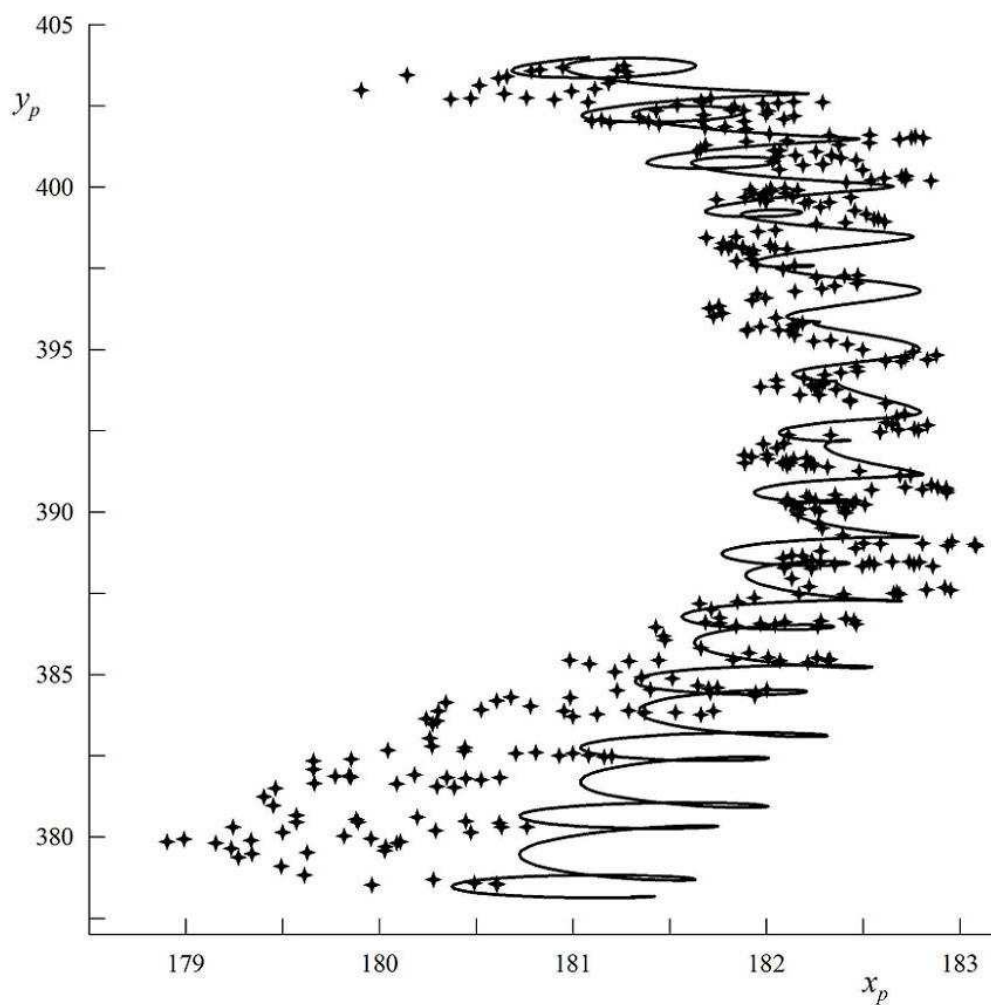


Рис.3.5. Интерполяция (с 15.09.2011 г. по 27.09.2011 г.) и прогноз (с 27.09.2011 г. по 29.09.2011 г.) траектории земного полюса. Точки – данные наблюдений, сплошная линия – теоретическая модель.

Основная траектория полюса строится с помощью взвешенного метода наименьших квадратов на длительном интервале интерполяции, примыкающем к прогнозируемому интервалу. На рис 3.4 приведены интерполяция с 12.08.2008 г. по 24.08.2008 г. и прогноз с 26.08.2008 г. по 26.08.2008 г.

На рис. 3.5 приводятся интерполяция (с 15.09.2011 по 27.09.2011) и прогноз (с 27.09.2011 по 29.09.2011) координат земного полюса  $x_p, y_p$  и его траектории согласно разработанной модели (2.38) в сравнении с данными наблюдений и измерений МСВЗ.

Заметим, что из анализа результатов численного моделирования среднесуточного движения земного полюса на различных интервалах времени оценки точности прогноза основной модели лежат в пределах  $1.5 \div 2$  см.

Таким образом на основе динамических уравнений Эйлера-Лиувилля с учетом нерегулярных возмущений найдены структурные свойства внутрисуточных колебаний координат полюса Земли. Приведено сравнение результатов моделирования движения земного полюса с высокоточными данными РСДБ-наблюдений на коротком интервале времени [29, 38, 40, 58], подтверждающее адекватность модели.

В качестве дальнейшего развития построенной модели представляется целесообразным исследование резких непрогнозируемых флуктуаций и их связи с геофизическими процессами планетарного масштаба, а также учет нерегулярных флуктуаций стохастического характера в рамках комбинированных спектрально-корреляционных моделей [32, 36, 37, 45, 46].

### 3.3 Среднесуточное движение полюса Земли (интерполяция и прогноз)

Для прикладных целей представляет интерес построение прогноза движения полюса Земли на предельно коротких интервалах времени, например, 1-2 суток [19-21, 34, 35, 41, 52, 53, 56]. Короткопериодические (высокочастотные) субсуточные (от 3 часов до суток) нерегулярные колебания земного «среднесуточного» полюса могут быть обусловлены указанными выше геофизическими факторами. Учет второстепенных воздействий, в том числе нерегулярных, имеющих стохастический характер, как отмечалось, на данном этапе исследований не представляется целесообразным и оправданным вследствие недостаточно высокой точности и полноты геофизических измерений, а также трудностей их интерпретации и учета [2, 27, 33, 40-43, 49]. Рассмотрим решение задачи интерполяции и прогноза среднесуточного движения земного полюса  $(\bar{x}_p, \bar{y}_p)$  на основе полиномиального фильтра, полученного методом наименьших квадратов. В пределах точности наблюдений и измерений хаотические отклонения внутри суток  $\bar{x}_p, \bar{y}_p$  колеблются на уровне угл. мсек., т.е. порядка  $5 \div 10$  см.

Необходимо по текущим данным измерений:

$$z_{i-j} = z(t_{i-j}) = x_{i-j} + \xi_{i-j}, \quad j = 0, \dots, n, \quad (2.40)$$

где  $x$  и  $\xi$  - соответственно неизвестные точное значение и ошибка измерений координаты полюса (к примеру,  $x_p$ ) произвести оценку параметров. Полиномиальная фильтрация на основе дискретных измерений МСВЗ, произведенных и интервале времени  $[t_{i-n}, t_i]$ , позволяет оценить параметры траектории полюса (т.е. координаты, скорость и ускорение) в текущий момент

времени  $t_i$ . Число  $n+1$  есть длительность интервала обработки и называется памятью фильтра. Для построения оценок используется число точек  $n+1$ , которое требуется выбрать на основе вычислительных экспериментов для соответствующего критерия качества. Аналогичное выражение имеет место для компоненты  $y_p$ .

Предложим, что переменная  $x(t)$  – координата полюса (для определенности,  $x_p$ ) на интервале  $[t_{i-n}, t_i]$  может быть достаточно точно аппроксимирована полиномом 2-го порядка  $P_2$ . Неизвестные коэффициенты полинома  $a_0, a_1, a_2$ , т.е. положение  $a_0(i)$ , скорость  $a_1(i)$ , ускорение  $a_2(i)$ , будем оценивать оптимальным образом с помощью метода «взвешенных» наименьших квадратов на основе  $z_{i-j}$ -проводимых измерений. Заметим, что, поскольку решается задача фильтрации измерений для оценки параметров движения в текущий момент времени  $t_i$ , то полином целесообразно строить, используя в качестве коэффициентов параметры движения в текущей точке  $t_i$ .

Для искомого полинома  $P_2$  получается следующее представление:

$$P_2(a_0(i), a_1(i), a_2(i), j) = a_0(i) + a_1(i)(-jh) + a_2(i) \frac{(-jh)^2}{2}, \quad (2.41)$$

$$j = 0, 1, \dots, n, \quad t_{i-j} = t_i - jh.$$

Здесь коэффициент  $a_0(i)$  имеет смысл сглаженного текущего значения (оценки) координаты  $a_0(i) = \bar{x}_i$ ,  $a_1(i)$  – сглаженной производной (скорости изменения) координаты  $a_1(i) = \bar{\dot{x}} = \bar{v}_i$ ,  $a_2(i)$  – второй производной (ускорения) координаты

$a_2(i) = \bar{x} = \bar{\omega}_i$ , а  $h$  – постоянный шаг дискретного изменения времени (эквивалентные измерения).

Вектор  $X = [a_0, a_1, a_2]^T$  будем называть вектором состояния для координаты полюса  $x$  (“фазовым” вектором) полюса. Аналогичный вектор  $Y$  строится для координаты  $y_p$ . Таким образом, соотношение выражает значения оценки переменной  $\bar{x}_{i-j}$  ( $j = 0, \dots, n$ ) в интервале  $t_{i-n} \dots t_i$  через значения фазового вектора в точке  $t_i$ . Значение фазового вектора неизвестно и подлежит определению из имеющихся на интервале  $t_{i-n} \dots t_i$  измерений  $z_{i-j}$  ( $j = 0, \dots, n$ ). Погрешности измерений  $\xi_{i-j}$  на интервале фильтрации  $[t_{i-n}, t_i]$  полагаем центрированными, некоррелированными и стационарными случайными величинами, распределение которых близко к нормальному.

В качестве критерия оптимальности при определении оценки «фазового» вектора  $X_i$  выберем:

$$E_i^2 = \sum_{j=0}^n \{z_{i-j} - P_2[X_i, j]\}^2 \rightarrow \min_{X_i}. \quad (2.42)$$

Аналогичный (2.42) критерий минимизируется для оценки вектора  $Y$  координаты  $y_p$ .

Из условий минимума по  $a_0, a_1, a_2$  унимодальной функции  $E_i^2(a_0, a_1, a_2)$  записывается система линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов  $a_0, a_1, a_2$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^n \left( a_0 + a_1(-jh) + a_2 \frac{(-jh)^2}{2} \right) &= \sum_{j=0}^n z_{i-j}, \\
\sum_{j=0}^n \left( a_0 j + a_1(-j^2 h) + a_2 \frac{(-jh)^2 j}{2} \right) &= \sum_{j=1}^n j z_{i-j}, \\
\sum_{j=0}^n \left( a_0 j^2 + a_1(-j^3 h) + a_2 \frac{(-j^2 h)^2}{2} \right) &= \sum_{j=1}^n j^2 z_{i-j}.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Разрешив линейную систему (2.43) относительно коэффициентов  $a_k$  ( $k = 0, 1, 2$ ), получим следующие выражения:

$$a = \sum_{j=0}^n F^{(2)}(j, n) z_{i-j}, \quad a = \begin{vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{vmatrix}, \tag{2.44}$$

$$F^{(2)}(j, n) = \begin{vmatrix} F_0^{(2)} \\ F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \end{vmatrix},$$

где функции  $F_0^{(2)}, F_1^{(2)}, F_2^{(2)}$  - соответственно весовые функции коэффициентов  $a_0, a_1, a_2$ , представляющие собой полиномы второго порядка от  $j$  вида:

$$F_0^{(2)} = \frac{3}{n+1} \left[ \frac{3n^2 + 3n + 2}{(n+2)(n+3)} - \frac{6(2n+1)j}{(n+2)(n+3)} + \frac{10j^2}{(n+2)(n+3)} \right], \tag{2.45}$$

$$F_1^{(2)} = \frac{6}{n(n-1)h} \left[ \frac{3n(n-1)(2n+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{2(8n-3)(2n+1)j}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{30nj^2}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right],$$

$$F_2^{(2)} = \frac{60}{n(n+1)(n-1)h^2} \left[ \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+3)} - \frac{6nj}{(n+2)(n+3)} + \frac{6j^2}{(n+2)(n+3)} \right],$$

$$n \geq 2, 0 \leq j \leq n.$$

Заметим, что весовые функции  $F_{0,1,2}^{(2)}$  (2.45) определяют несмещенные оценки (2.44) искомых величин на классе полиномов второго порядка.

Согласно разработанной модели и данных наблюдений и измерений МСВЗ переменная  $x(t)$  – координата полюса (для определенности  $x_p(t)$ ) на прогнозируемом интервале  $(t_i, t_i+T)$  может быть достаточно точно аппроксимирована полиномом второго порядка:

$$x_p(t) = x_p(t^*) + x_p'(t^*)t + \frac{1}{2} x_p''(t^*)t^2 + O(t^3), \quad (2.46)$$

где  $t^*$  – момент времени, соответствующий середине прогнозируемого интервала  $(t_i, t_i+T)$ . Необходимо отметить, что в особенности на коротких интервалах времени квазипостоянные (в среднем для основных моделей ПВЗ на интервале 1-6 лет) приливные коэффициенты модели (1.14) подвержены существенным локальным изменениям различного характера. Эти короткопериодические нерегулярные колебания параметров вращения Земли с частотами  $\vartheta_i$  обусловлены различными геофизическими факторами (атмосферными, океаническими, сезонными и многими другими), анализ и прогнозирование которых на коротких интервалах времени представляет значительные трудности. В этом случае, удерживая в модели (1.9) нерегулярные слагаемые (слагаемые с набором частот  $\vartheta_i$  и переменными амплитудами), полином (2.46) будет записан в виде:

$$x_p(t) = x_p(t^*) + \left[ x_p'(t^*) + \Delta x_p'(t^*, \vartheta_i) \right] t + \frac{1}{2} \left[ x_p''(t^*) + \Delta x_p''(t^*, \vartheta_i) \right] t^2 + O(t^3), \quad (2.47)$$

Здесь  $x_p(t^*)$ ,  $x_p'(t^*)$ ,  $x_p^I(t^*)$  - значение основной модели (1.14) и ее производных в момент времени  $t^*$ ,  $\Delta x_p(t^*, \vartheta_i)$  - резидуум между данными наблюдений и измерений МСВЗ и основной моделью в момент времени  $t^*$ .

Коэффициенты этого полинома, т.е. положение, скорость, ускорение, необходимо оценивать с помощью проводимых измерений. Вначале рассмотрим корректировку линейной аппроксимации  $x_p(t_i, \dots, t_{i-n}) + \left[ x_p'(t_i, \dots, t_{i-n}) + \Delta x_p'(t_i, \dots, t_{i-n}, \vartheta_i) \right] t$  небольшого числа наблюдений на интервале  $(t_{i-n}, t_i)$ . Тогда коэффициент линейной части модели (2.47) может быть записан в виде:

$$x_p'(t^*) + \Delta x_p'(t^*, \vartheta_i) \approx x_p'(t_i, \dots, t_{i-n}) + \Delta x_p'(t_i, \dots, t_{i-n}, \vartheta_i) + \Lambda(t^*), \quad (2.48)$$

где  $\Lambda(t^*) = \lambda x_p'(t^*)$  - корректирующее слагаемое скорости движения полюса по оси  $x$ ; множитель  $\lambda$ , (аналогичный коэффициент  $\mu$  вводится для ускорения) является постоянной величиной и определяется из наблюдений и измерений МСВЗ на длительном интервале времени. Таким образом модель может быть записана в виде:

$$x_p(t^*) = x_p^\circ(t_i, \dots, t_{i-n}) + \left[ x_p'(t_i, \dots, t_{i-n}) + \Delta x_p'(t_i, \dots, t_{i-n}, \vartheta_i) + \lambda x_p'(t^*) \right] t + \frac{\mu}{2} x_p''(t^*) t^2 + O(t^3). \quad (2.49)$$

Упрощенным вариантом модели (2.49) является следующая:

$$x_p(\tau) = \frac{\bar{x}_p(\tau_{i-1})\tau_i - \bar{x}_p(\tau_i)\tau_{i-1}}{\tau_i - \tau_{i-1}} + \left[ \frac{\bar{x}_p(\tau_i) - \bar{x}_p(\tau_{i-1})}{\tau_i - \tau_{i-1}} + \lambda x_p'(\tau^*) \right] \tau + \frac{\mu}{2} x_p''(\tau^*) \tau^2 \quad (2.50)$$



Здесь  $\lambda = 0.0017$ ,  $\mu = 3$  (для  $y$  значения такие же);  $\tau_i$  и  $\tau_{i-1}$  - текущий и предыдущий моменты времени в сутках *MJD* (подразумевается, что временной интервал  $(\tau_{i-1}, \tau_i)$  составляет 3-4 суток).  $\bar{x}_p(\tau_i)$ ,  $\bar{x}_p(\tau_{i-1})$  - данные измерений координаты  $x_p$  в соответствующие моменты времени.

Модели для координат полюса принимаются следующие ( $\tau$  измеряется в сутках *MJD*):

$$x_p = 0.04229626792 - 0.1075454442 \sin(0.01456357202\tau) + \\ + 0.01639898315 \cos(0.01720242384\tau) - 0.1152415172 \cos(0.01456357202\tau) - \quad (2.51) \\ - 0.08654613622 \sin(0.01720242384\tau)$$

$$y_p = 0.3199712685 - 0.1147148183 \sin(0.01456357202\tau) - \\ - 0.07842621334 \cos(0.01720242384\tau) - 0.1062834629 \cos(0.01456357202\tau) - \\ - 0.01609896888 \sin(0.01720242384\tau)$$

Приведем графические результаты расчетов, выполненных согласно рассмотренному методу (2.41) - (2.45) оценки параметров движения полюса полиномиальным фильтром на основе метода наименьших квадратов.

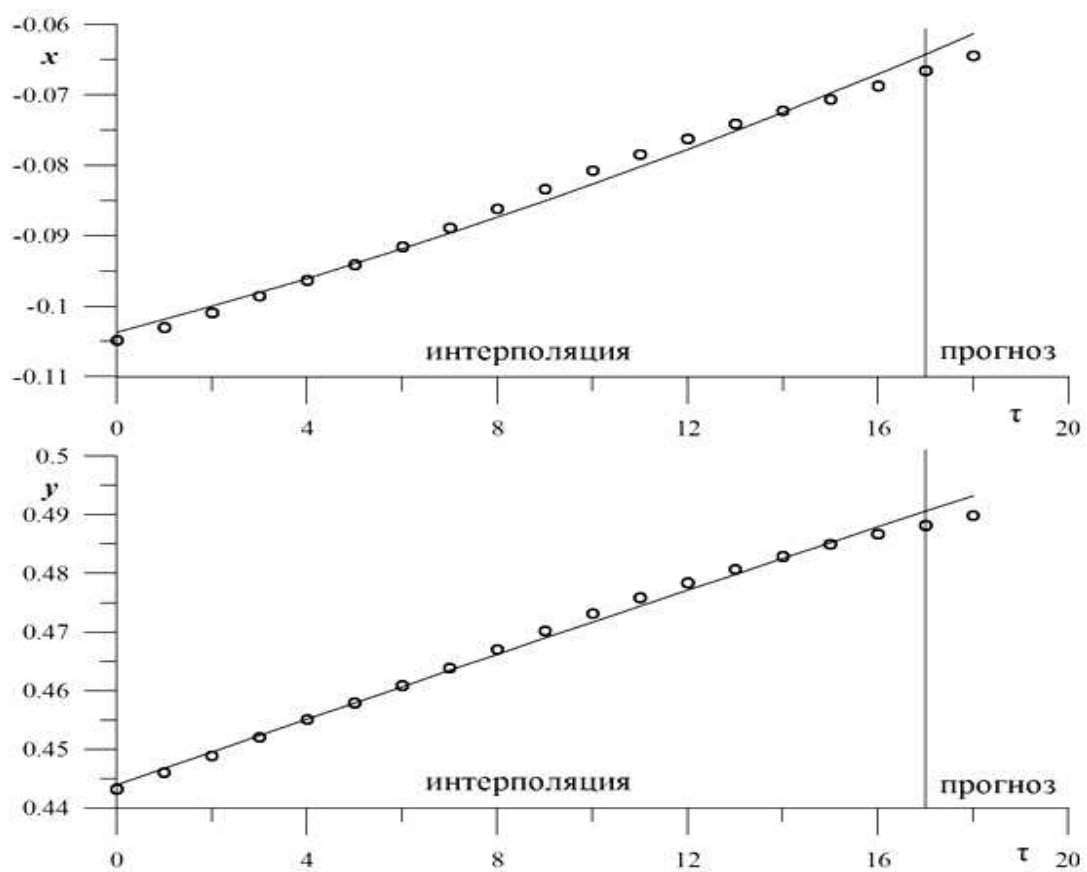


Рис. 3.6. 15-суточная интерполяция и суточный прогноз траектории движения полюса; сплошная линия — теоретическая кривая; кружки — данные МСВЗ.

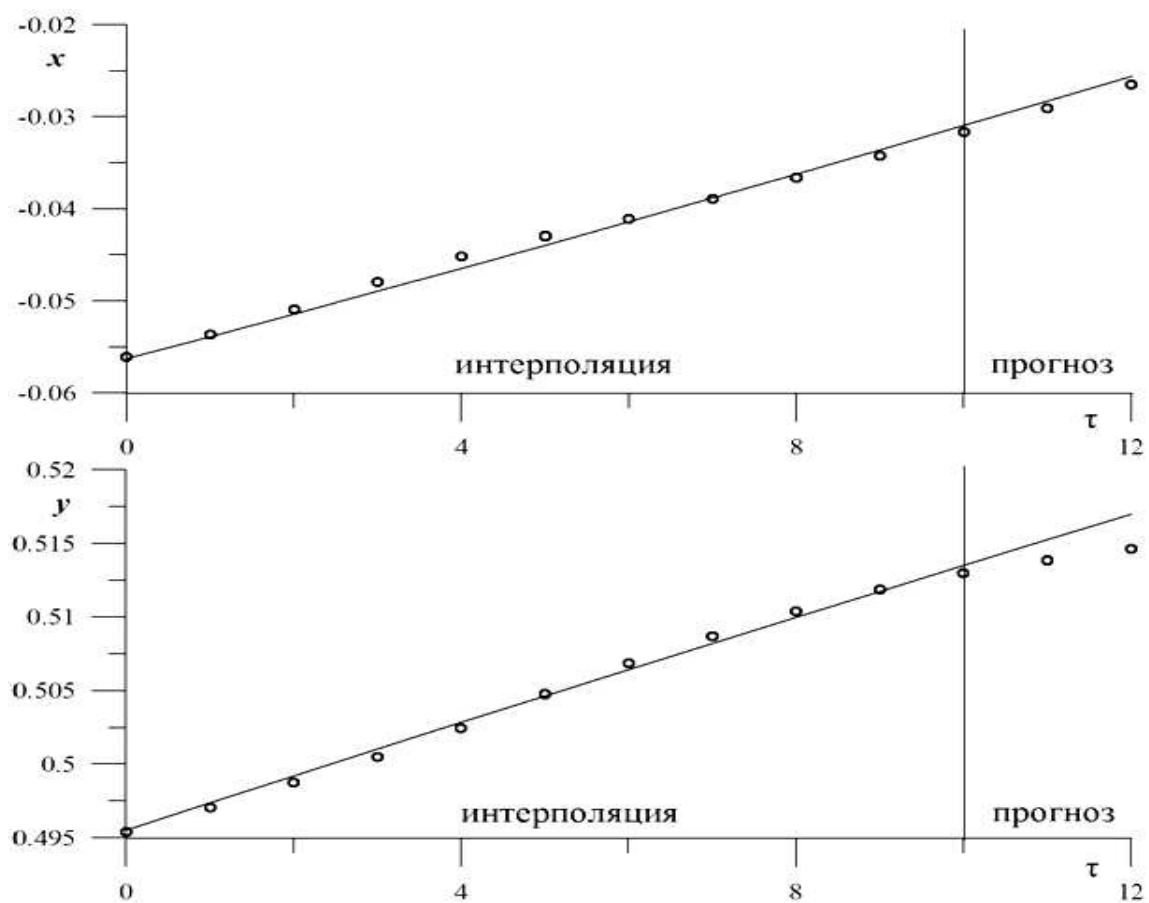


Рис. 3.7. 11-суточная интерполяция и двухсуточный прогноз траектории движения полюса; сплошная линия— теоретическая кривая; кружки — данные МСВЗ.

На рис 3.6 показана интерполяция (с 14.03.2008 по 31.03.2008) и дан суточный прогноз траектории движения полюса. Погрешность интерполяции порядка 1 угл. мсек а прогноза – 2 угл. мсек ( т.е. соответственно 3 и 6 см).

На рис 3.7 приведена интерполяция (с 03.04.2008 по 14.04.2008) и прогноз траектории движения полюса на 2 сут; погрешности аналогичны предыдущему варианту.

Из приведенных графиков (рис 3.6 и 3.7) следует, что для повышения точности прогноза требуется провести модификацию полиномиальных фильтров.

В частности, число учитываемых измерений МСВЗ должно быть уменьшено или (и) весовые множители конечных замеров увеличены.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении сформируем основные результаты диссертационной работы:

1. Проведено моделирование колебательного движения полюса Земли в переменных действие-угол, адекватное данным наблюдений и измерений МСВЗ.
2. На основе разработанной небесномеханической модели исследованы фундаментальные аспекты приливной неравномерности осевого вращения деформируемой Земли, учтены короткопериодические возмущения Луны с комбинационными частотами.
3. С помощью спектрального анализа рассмотрены нестационарные колебания неравномерности вращения Земли с малыми амплитудами.
4. Установлено, что для повышения точностных характеристик прогноза нестабильности шкалы Всемирного времени UT1, связанного с вращением Земли, на коротких и внутрисуточных интервалах времени представляется целесообразным учёт поправок на возмущения короткопериодических лунных приливов.
5. Построена модель внутрисуточных колебаний полюса Земли, которая имеет прикладное значение для задач навигации.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Абалакин В. К. Основы эфемеридой астрономии. — М.: Наука, 1979.— 448 с.
2. Авсюк Ю. Н. Приливные силы и природные процессы. — М.: Изд-во ОИФЗ, 1996.— 188 с.
3. Аксёнов Е. П., Теория движения искусственных спутников Земли — М.: Наука, 1977. — 360 с.
4. Акуленко А.Д., Марков Ю.Г., Нгуен Ле Зунг, Перепёлкин В.В. Неравномерности вращения Земли и проблема нестабильности шкал времени // ДАН. 2012. — Т. 442(4). — С. 468-473.
5. Акуленко Л. Д., Киселев М.Л., Марков Ю. Г. Уточненная модель неравномерности вращения Земли // Космические исследования. — 2012.— Т. 4(65). — С. 13-19.
6. Акуленко Л. Д., Кумакшев С. А., Марков Ю. Г. др. Высокоточный прогноз движения полюса Земли // Астрономический журнал. — 2006. — Т. 4(83). — С. 376-384.
7. Акуленко Л. Д., Кумакшев С. А., Марков Ю. Г. и др. Гравитационно-приливной механизм колебаний полюса Земли // Астрономический журнал. — 2005. — Т. 10(82). — С. 950-960.
8. Акуленко Л. Д., Кумакшев С. А., Марков Ю. Г. и др. Прогноз движения полюса деформируемой Земли вращения Земли // Астрономический журнал. — 2006. — Т. 10(79). — С. 952-960.

9. Акуленко Л. Д., Марков Ю. Г., Перепелкин В. В. Внутригодовые неравномерности вращения Земли // *Астрономический журнал*.— 2008.— Т. 3(85). — С. 9-12.
10. Акуленко Л. Д., Марков Ю. Г., Перепелкин В. В. Моделирование движения полюса Земли на коротком интервале // *ДАН*. — 2009. — Т. 2(425). — С. 326-331.
11. Акуленко Л. Д., Марков Ю. Г., Перепелкин В. В. Небесномеханическая модель неравномерности вращения Земли // *Космические исследования*. — 2009. — Т. 5(47). — С. 452-459.
12. Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Марков Ю.Г. Движение полюса Земли // *Доклады академии наук*. 2002. — Т. 382(2). С. 199-205.
13. Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Марков Ю.Г. Моделирование движения полюса деформируемой Земли // *Доклады академии наук*. 2001. — Т. 379(2). — С. 191-195.
14. Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Марков Ю.Г. Модель гравитационно-приливного механизма возбуждения колебаний полюса Земли // *Доклады академии наук*. 2005. — Т. 400(6). — С. 758-763.
15. Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Марков Ю.Г., Рыхлова Л.В. Анализ влияния многочастотных воздействий на колебания полюса Земли // *Астрономический журнал*. 2007. — Т. 84(5). — С. 471-478.
16. Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Марков Ю.Г., Рыхлова Л.В. Модель движения полюса деформируемой Земли, адекватная астрометрическим данным // *Астрономический журнал*. 2002. — Т. 79(1). — С. 81-89.

17. Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Марков Ю.Г., Рыхлова Л.В. Прогноз движения полюса деформируемой Земли // *Астрономический журнал*. 2002. — № 10. — С. 952-960.
18. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматлит, 1963.
19. Бондаренко В.В., Перепелкин В.В. Вращательно-колебательные движения деформируемой Земли вокруг центра масс // *Изв. РАН. МТТ*. 2009. — № 5. — С. 25-35.
20. Бондаренко В.В., Перепелкин В.В. Моделирование и анализ колебательного процесса полюса Земли // *Изв. РАН. МТТ*. 2007. — № 2. — С. 28-35.
21. Бондаренко В.В., Перепёлкин В.В., Нгуен Ле Зунг. Моделирование внутрисуточных колебаний полюса деформируемой Земли // «Международная конференция по математической теории управления и механике». Тезисы докладов, г. Суздаль, 2013.
22. Вулард Э.. Теория вращения Земли около центра масс. — М.: Физматгиз, 1963.— 167 с.
23. Григорьяна А. Т., Погребысского И. Б. История механики (с конца XVIII века до середины XX века). — М. : Наука, 1972. — 415 с.
24. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. — М.: Наука, 1968. — 799 с.
25. Дубошин Г. Н. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. — Москва : Наука, 1971. — 584 с.



26. Ишлинский А. Ю. Механика относительного движения и силы инерции. — М.: Наука, 1981.— 192 с.
27. Киселев В. М. Неравномерность суточного вращения Земли. — Новосибирск : Наука, 1980. — 149 с.
28. Красовский А.А. (ред.). Справочник по теории автоматического управления. М.: Наука, 1987.
29. Крылов С.С., Филиппова А.С., Нгуен Ле Зунг. Внутрисуточный анализ колебаний полюса Земли // Космонавтика и ракетостроение, 2014 — Т. 91(3).— С. 251-260.
30. Л. Эйлер. Сборник статей в честь 250-летия со дня рождения, представленных Академией наук СССР. — М.: Изд-во АН СССР, 1958. — 611 с.
31. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математической статической теории обработки наблюдений. — М.: Физматиз, 1962.— 352 с.
32. Малахов А. Н. Флуктуации в автоколебательных системах. М.: Физматлит, 1968.
33. Манк Н., Макдональд Г. Вращение Земли. М.: Мир. — 1964. — 384 с.
34. Марков Ю. Г., Михайлов М. В., Почукаев В. Н. Учет фундаментальных составляющих параметров вращения земли в формировании высокоточной орбиты навигационных спутников // ДАН. — 2012. — Т. 1.— С. 37-41.
35. Марков Ю. Г., Михайлов М. В., Почукаев В. Н. Фундаментальные составляющие параметров вращения земли в формировании высокоточных систем навигации космических аппаратов // ДАН.— 2013.— Т. 3(451).— С. 283-287.

36. Марков Ю. Г., Сеницын И.Н. ДАН. Флуктуационно-диссипативная модель движения полюса деформируемой Земли // ДАН. 2002. — Т. 387(4). — С. 482--486.
37. Марков Ю. Г., Сеницын И.Н. Спектрально-корреляционная модель флуктуаций чандлеровских колебаний полюса Земли // *Астрономический журнал*, 2006. —Т. 83(10). — С.950-958.
38. Марков Ю.Г, Перепёлкин В.В., Рыхлова Л.В., Филиппова А.С., Нгуен Ле Зунг. Моделирование внутрисуточного колебательного процесса земного полюса // *Астрономический журнал*, 2014. — Т. 58(3). — С.194-203.
39. Мориц Г., Мюллер А. Вращение Земли: теория и наблюдения.— Киев : Наукова думка, 1992. — 512 с.
40. Нгуен Ле Зунг, Перепёлкин В.В. Разработка динамических моделей прогнозирования параметров вращения Земли на базе информационных ресурсов МСВЗ // *Одиннадцатая международная конференция «Устойчивость, управление и динамика твердого тела» Донецк . 2011. —С.92.*
41. Нгуен Ле Зунг. Высокоточный прогноз временных поправок в спутниковой навигации // *Московская молодежная научно-практическая конференция. «Инновации в авиации и космонавтике». Сборник тезисов докладов, Москва, 2013.*
42. Нгуен Ле Зунг. Моделирование вращательно-колебательных движений деформируемой Земли (интерполяция и прогноз) // *XXXXII Всероссийский симпозиум «механика и процессы управления».г.Миасс (18-20 декабря 2012 года).* — Т.3. — С.17-23.

43. Одуан К. Измерение времени. Основы GPS. — М. : Техносфера, 2002. — 400 с.
44. Подобед В. В., Нестеров В. В. Общая астрометрия. 2-е изд. — М. : Наука, 1982. — 576 с.
45. Пугачев В. С., Сеницын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М.: Наука, 1990.
46. Пугачев В. С., Сеницын И.Н. Теория стохастических систем. М.: Логос, 2004.
47. Перепёлкин В.В. Анализ внутрисуточных вариаций осевого вращения Земли // Космические исследования. 2012.— Т.50(1) .— С.95-96.
48. Перепёлкин В.В. Динамическая модель внутрисуточной неравномерности вращения деформируемой Земли // Изв. МТТ РАН. 2011.— №6.— С.176-186.
49. Сидоренков Н.С. Физика нестабильностей вращения Земли. М.: Наука; Физматлит. — 2002. — 384 с.
50. Capitane N., Guinot B., McCarthy D.D. Definition of the Celestial Ephemerides origin and UT1 in the International Reference Frame // Astron. Astrophys. 2000. 355. P. 398-405p.
51. Chandler S. On the variation in latitude // Astron. J., 1891. V. 11. P. 83.
52. Curtis Howard D. Orbital mechanics for engineering students. Second edition. — Elsevier, 2009. — 722 p.
53. Gear C. William. Numerical initial value problems in ordinary differential equations. — New Jersey : Prentice-Hall, 1971.— 251 p.
54. Guinot B. The Chandlerian nutation from 1900 to 1980 // Geophys. J. Roy. Soc. 1982. V. 71. P. 295- 301.

55. Institut géographique national. — URL: <http://www.ign.fr>.
56. Kaplan George H. Circular NO. 179. The IAU Resolutions on Astronomical Reference Systems, Time Scales and Earth Rotation Models: Explanation and Implementation. — Washington D.C. : U.S. Naval Observatory, 2005. — 104 p.
57. Tapley Byron D. Statistical Orbit Determination. — Elsevier, 2004. — 547 p.
58. VLBI Observing programs: CONT'94, CONT'05, CONT'08  
<http://ivs.nict.go.jp/mirror/program/>.
59. IERS Annual Reports, 1990–1999, eds W.Dick, B.Richter, International Earth Rotation and Reference Systems Service, Central Bureau (Observatoire de Paris, 1991–2000); IERS Annual Reports, 2000 – 2002 eds W.Dick, B.Richter, International Earth Rotation and Reference Systems Service, Central Bureau (Frankfurt am Main: BKG, 2001– 2003).