

На правах рукописи

**Сахаров Александр Вадимович**

**Движение мобильного устройства без внешних  
двигателей по шероховатой плоскости**

Специальность 01.02.01 — Теоретическая механика

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Долгопрудный — 2015

Работа выполнена на кафедре теоретической механики «Московский физико-технический институт (государственный университет)»

Научный руководитель: **Иванов Александр Павлович**,  
доктор физико-математических наук,  
профессор

Официальные оппоненты: **Буров Александр Анатольевич**,  
доктор физико-математических наук, доцент,  
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, отдел механики,  
старший научный сотрудник  
**Пестерев Александр Витальевич**,  
доктор физико-математических наук,  
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, лаборатория № 16,  
ведущий научный сотрудник

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение высшего профессионального образования «Удмуртский государственный университет»

Защита состоится 11 марта 2016 г. в \_\_ часов на заседании диссертационного совета Д 212.125.14 на базе Московского авиационного института (национального исследовательского университета) по адресу: 125993, Москва А-8, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского авиационного института (национального исследовательского университета) и на сайте института <http://www.mai.ru>.

Автореферат разослан \_\_ \_\_\_\_\_ 2016 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
к.ф.-м.н., доцент

Гидаспов Владимир Юрьевич

# Общая характеристика работы

## Актуальность темы

Мобильные робототехнические системы в настоящее время находят широкое применение в различных областях человеческой деятельности: исследовательской, медицинской, космической и других. Среди большого разнообразия робототехнических средствдвигающихся по плоскости, можно выделить устройства без видимых внешних движителей, таких как реактивный двигатель, колеса, гусеницы или ноги. Такие системы имеют ряд преимуществ связанных с их герметичностью и изолированностью от окружающей среды. Движение робота без внешних движителей может достигаться благодаря перемещению внутренних тел и взаимодействию корпуса робота с опорной плоскостью посредством сил трения.

Вибрационная механика — раздел механики, посвященный движению тел под воздействием вибрации — впервые была обширно представлена в книге И.И. Блехмана и Г.Ю. Джанелидзе «Вибрационное перемещение» (1964 г.), где, в том числе, рассматриваются механические системы,двигающиеся под воздействием внутренней осциллирующей массы.

Одномерное поступательное движение мобильных устройств без внешних движителей с плоским основанием изучено достаточно хорошо. В работах Ф.Л. Черноусько, Н.Н. Болотника, Т.Ю. Фигуриной, Н.В. Fang и J. Xu рассматриваются поступательные движения робота, опирающегося на шероховатую плоскость и состоящего из твердого полого корпуса и внутреннего тела, способного двигаться вдоль продольной оси симметрии корпуса. Движение устройства достигается за счет определенных перемещений внутреннего тела и взаимодействия с опорной плоскостью посредством сил трения. Находятся оптимальные параметры законов управления смещением внутреннего тела, доставляющие средней скорости корпуса максимум с учетом наложенных на систему ограничений. При этом рассматриваются различные модели сопротивления среды: изотропное и анизотропное, кусочно-линейное и квадратичное относительно скорости корпуса мобильного устройства законы трения. Также в работах Ф.Л. Черноусько, Н.В. Fang и J. Xu изучается поступательные движения систем, состоящих из двух внешних тел,двигающихся по шероховатой плоскости и взаимодействующих друг с другом, например, посредством пружины.

Мобильные устройства,двигающиеся поступательно и состоящие из твердого корпуса, опирающегося на шероховатую плоскость, с двумя внутренними телами, одно из которых движется вдоль продольной оси симметрии

корпуса, а другое — вдоль вертикали, рассматривались в работах Ф.Л. Черноусько, Н.Н. Болотника, I.M. Zeidis, Н.А. Соболева, К.С. Сорокина и других. Отличительная особенность этой системы заключается в возможности управления нормальным давлением, действующим со стороны плоскости на корпус, благодаря движению одного из тел вдоль вертикали, что в свою очередь позволяет изменять силу трения. Авторы изучают изменения динамики корпуса в зависимости от выбора тех или иных значений параметров закона управления относительным движением тел. В работе Н.А. Соболева и К.С. Сорокина приведено экспериментальное исследование движения системы, проведенное благодаря сконструированному вибрационному мобильному средству, состоящему из платформы и эксцентриков.

Изучению трехмерного движения мобильного робота посвящены работы С.Ф. Яцуна и Л.Ю. Волковой. Рассматриваемое устройство состоит из твердого корпуса, двух подвижных масс, способных двигаться по направляющим, параллельным продольной оси симметрии корпуса и расположенным в горизонтальной плоскости на одинаковом расстоянии от его центра масс, а также четырех поплавков, погруженных в жидкость, на которые опирается корпус. Таким образом, перемещение робота происходит в вязкой среде.

Движению твердого тела с подвижными внутренними массами в вязкой жидкой среде посвящены работы С.М. Рамоданова, В.А. Тененева, Е.В. Ветчанинова и И.С. Мамаева, в рамках которых совместно используются уравнения Навье–Стокса и движения тела в условиях трехмерной нестационарной постановки задачи с учетом силы тяжести.

Большое внимание уделяется роботам-шарам, представляющим из себя сферическую оболочку с внутренними подвижными телами. В результате управления движениями тел можно реализовать проход сферической оболочки по заданной траектории. Исследования таких систем, включающие как теоретические так и экспериментальные работы, весьма обширно и проводятся, например, в работах И.А. Бизяева, А.В. Борисова, И.С. Мамаева, А.А. Килина, Ю.Л. Караваева и А.П. Иванова.

На конференции International Conference on Intelligent Robots and Systems (Токио, Япония, 3–8.11.2013) было представлено устройство, называемое M-block, состоящее из твердой кубической оболочки с размещенным внутри тяжелым ротором. Движение куба реализуется за счет быстрой остановки раскрученного ротора. В вершинах кубической оболочки находятся точечные постоянные магниты, позволяющие устройствам фиксироваться друг относительно друга. Таким образом, предполагается, что кубы сообща могут создавать модульные конструкции. В работе А.П. Иванова изучаются импульсные

движения куба, с расположенным внутри ротором, исследуются некоторые частные случаи его перемещений.

В диссертационной работе рассматривается трехмерное движение мобильного устройства с плоским основанием на шероховатой плоскости. Заметим, что все указанные выше работы, посвященные изучению динамики подвижного объекта с плоским основанием на шероховатой плоскости, формулируются для одномерного движения корпуса мобильного устройства.

### **Цель работы**

Цель диссертационной работы заключается в исследовании динамики мобильных устройств с плоским основанием, опирающихся на шероховатую плоскость и скользящих в результате движения материальных точек, расположенных внутри устройства.

### **Научная новизна**

Научная новизна состоит в следующем. Разработан метод получения уравнений движения мобильного устройства с плоским основанием, опирающегося на шероховатую плоскость и способного двигаться по ней в результате перемещения внутренних тел. Проведены численные и аналитические исследования поступательного движения корпуса устройства с одной и двумя точечными массами, двигающимися в вертикальной плоскости симметрии корпуса в зависимости от параметров закона управления. Исследованы вращательные движения корпуса вокруг центра масс в результате поворота горизонтального диска внутри устройства, или движения двух точечных масс в противофазе. Во втором случае численно определены оптимальные параметры закона управления массами, доставляющие средней угловой скорости корпуса максимум в установившемся режиме поворота. Получены и численно проанализированы системы уравнений движения мобильного устройства, содержащего в себе подвижную материальную точку и диск, ось вращения которого ориентировалась двумя способами: вдоль продольной оси симметрии корпуса и по вертикали. Для обеих ориентаций предложено программное управление диском, позволяющее провести корпус по S-образной траектории. Произведено сравнение целесообразности выбора ориентации диска с точки зрения максимизации угла поворота корпуса.

### **Теоретическая и практическая ценность**

Предложенные в рамках диссертационной работы методы исследования динамики мобильных устройств могут быть использованы в изучении широкого класса подвижных объектов двигающихся по шероховатой плоскости

без внешних движителей. При этом конфигурация использующихся подвижных внутренних массивных тел неважна ввиду общности изучаемой задачи. Практическая ценность состоит в обосновании возможности движения мобильных роботов по шероховатой плоскости посредством смещения внутри них массивных тел, а также анализе получаемых движений робота. Полученные результаты могут быть использованы специалистами по теоретической механике и робототехнике в научно-исследовательских и учебных институтах, включая ИПМех РАН им. А.Ю. Ишлинского, ИПУ РАН, ИМАШ РАН им. А.А. Благонравова, МФТИ, МГУ им. М.В. Ломоносова, МГТУ им. Н.Э. Баумана, МАИ, УдГУ.

### **Методы исследования**

Для достижения поставленной цели используются методы теоретической механики. В частности, применение основных теорем динамики требует принятия моделей распределения тангенциальных и нормальных напряжений в области контакта. В качестве модели распределения тангенциальных напряжений используется локальный закон сухого трения Амонтона–Кулона, а в качестве модели распределения нормальных напряжений — динамически согласованная линейная модель. Также используются методы численного интегрирования дифференциальных уравнений, выполняемые в программе математического моделирования MATLAB. Для определения зависимости крутящего момента от угловой скорости применялось натурное моделирование.

### **Положения, выносимые на защиту**

На защиту выносятся следующие результаты диссертации:

- Уравнения движения системы, состоящей из твердого тела с плоским прямоугольным основанием, опирающегося на горизонтальную шероховатую поверхность с произвольной конфигурацией внутренних подвижных материальных точек.
- Траектории движения корпуса мобильного устройства, перемещающегося под действием гармонически колеблющейся вдоль продольной оси симметрии корпуса точечной массы, полученные в зависимости от частоты колебаний.
- Оптимальные параметры закона управления точечными массами, двигающимися в противофазе вдоль направляющих, параллельных продольной оси симметрии корпуса, доставляющие средней угловой скорости поворота устройства максимум в установившемся режиме движения.

- Численный анализ движения системы, состоящей из корпуса, точечной массы, двигающейся вдоль продольной оси его симметрии и диска, ориентированного двумя способами, а также программное управление относительным движением диска, позволяющее провести корпус по S-образной траектории.
- Сравнение величин углов поворота корпуса в зависимости от выбора расположения диска при различных значениях коэффициента сухого трения.

### **Обоснованность и достоверность результатов**

Достоверность результатов обеспечивается использованием фундаментальных теорем и уравнений теоретической механики, применением многократно проверенных моделей распределения напряжений, а также аналитических и численных методов интегрирования с оценкой погрешности вычислений. Кроме того, полученные результаты сравниваются с экспериментальными и теоретическими данными, полученными ранее другими авторами.

### **Апробация результатов**

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1–6], из которых изданы в журналах, входящих в перечень ВАК [1, 3–6]. Список работ приведен в конце автореферата. Кроме того, автор делал доклады по материалам диссертации на российских и международных конференциях, а также научных семинарах:

- IUTAM Symposium «From mechanical to biological systems — an integrated approach». 5–10 июня 2012, Ижевск, Россия.
- MCS–2012 «Моделирование, управление и устойчивость». 10–14 сентября 2012, Севастополь, Украина.
- 55-я научная конференция МФТИ «Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе». 19–25 ноября 2012, Долгопрудный, Россия.
- Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería — CMN 2013. 25–28 июня 2013, Бильбао, Испания.
- «Нелинейная динамика и ее приложения». 15–18 октября 2013, Ярославль, Россия.

- 56-я научная конференция МФТИ «Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных наук в современном информационном обществе». 25–30 ноября 2013, Долгопрудный, Россия.
- 8<sup>th</sup> European Nonlinear Dynamics Conference — ENOC 2014. 6–11 июля 2014, Вена, Австрия.
- 57-я научная конференция МФТИ с международным участием, посвященная 120-летию со дня рождения П.Л. Капицы: «Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных наук в области физики». 24–29 ноября 2014, Долгопрудный, Россия.
- VI International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering — COUPLED PROBLEMS 2015. 18–20 мая 2015, Сан Серволо, Венеция, Италия.
- Семинар в МАИ под руководством заведующего кафедрой теоретической механики МАИ, д.ф.-м.н., доцент Б.С. Бардина. 5 ноября 2015, Москва, Россия.
- Семинар в МФТИ под руководством заведующего кафедрой теоретической механики МФТИ, д.ф.-м.н., профессор А.П. Иванова. 27 ноября 2015, Долгопрудный, Россия.

Работа над диссертацией велась в рамках грантов РФФИ № 11-01-00354, 14-01-00432; гос. контракта ФЦП «Кадры» № 14.А18.21.0374; гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях ВПО (ФГБОУ ВПО «УдГУ», дог. № 11.G34.31.0039); гос. задания в сфере научной деятельности № 2014/120 «Исследование закономерностей динамики систем с трением и разработка мобильных роботов без внешних движителей» НИР № 2583.

### **Объем и структура работы**

Диссертация изложена на 118 страницах и состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и одного приложения.

### **Содержание работы**

Во **введении** приводится обзор литературы по изучаемой в диссертации теме, обосновывается актуальность исследований, формулируется цель, на-



учная новизна и ценность представляемой работы, а также методы исследования и положения выносимые на защиту. Приводится краткое содержание диссертации по главам.

В **первой** главе находятся уравнения движения мобильного устройства (ползуна) с плоским основанием на шероховатой плоскости, определяются модели касательных и нормальных напряжений. Устройство состоит из корпуса, представляющего собой полый прямоугольный параллелепипед и внутренних подвижных материальных точек. Положение корпуса определяется относительно неподвижной системы координат  $O'xyz$  при помощи трех координат: координаты  $x_O$  и  $y_O$  определяют центр корпуса  $O$  относительно  $O'xyz$ , угол  $\varphi$  определяет поворот корпуса относительно его начального положения. С корпусом связана система координат  $O\xi\eta\zeta$ , по осям которой располагается нормированный базис  $\mathbf{e}_\xi$ ,  $\mathbf{e}_\eta$  и  $\mathbf{k}$  соответственно.

Для нахождения координат используются теоремы о движении центра масс и изменении кинетического момента ползуна, преобразованные к виду:

$$m\mathbf{w}_O = \mathbf{W} + \mathbf{N} + \mathbf{F} - \sum_{i=1}^s m_i (\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_O), \quad m = m_0 + \sum_{i=1}^s m_i \quad (1)$$

$$C\ddot{\varphi}\mathbf{k} = \mathbf{M}_O^W + \mathbf{M}_O^N + \mathbf{M}_O^F - \sum_{i=1}^s m_i \mathbf{r}_{Oi} \times \mathbf{w}_i, \quad (2)$$

где  $m_0$  — масса корпуса,  $m_i$  — масса  $i$ -й внутренней материальной точки,  $s$  — количество внутренних точек,  $\mathbf{w}_O$  — ускорение центра корпуса  $O$ ,  $C$  — главный центральный момент инерции корпуса относительно оси, перпендикулярной опорной плоскости,  $\mathbf{w}_i$  — ускорение  $i$ -й внутренней материальной точки,  $\mathbf{r}_{Oi} = \xi_i \mathbf{e}_\xi + \eta_i \mathbf{e}_\eta + \zeta_i \mathbf{k}$  — радиус-вектор, проведенный из точки  $O$  к  $i$ -й точке;  $\mathbf{W}$  — действующая на ползун сила тяжести,  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{F}$  — главные векторы нормальной реакции и сил трения, действующие со стороны плоскости;  $\mathbf{M}_O^W$ ,  $\mathbf{M}_O^N$  и  $\mathbf{M}_O^F$  — соответствующие им моменты:

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= -mg\mathbf{k}, \quad \mathbf{M}_O^W = -\sum_{i=1}^s \mathbf{r}_{Oi} \times m_i g\mathbf{k}, \\ \mathbf{N} &= \iint n_A \mathbf{k} ds, \quad \mathbf{M}_O^N = \iint \mathbf{r}_{OA} \times n_A \mathbf{k} ds, \\ \mathbf{F} &= \iint \mathbf{t}_A ds, \quad \mathbf{M}_O^F = \iint \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{t}_A ds. \end{aligned}$$

Интегрирование всюду ведется по области  $S(\xi, \eta)$ , состоящей из точек корпуса соприкасающихся с опорой,  $n_A$  и  $\mathbf{t}_A$  — нормальное и касательное напряжения в точке  $A \in S$ ,  $\mathbf{r}_{OA} = \xi \mathbf{e}_\xi + \eta \mathbf{e}_\eta - h\mathbf{k}$  — радиус-вектор, проведенный из точки  $O$  к точке  $A$ ,  $h$  — половина высоты корпуса.

Касательные напряжения описываются локальным законом Амонтона–Кулона:

$$\mathbf{t}_A = -\mu n_A \mathbf{f}_A, \quad \mathbf{f}_A = f_\xi \mathbf{e}_\xi + f_\eta \mathbf{e}_\eta = \begin{cases} \mathbf{v}_A/v_A, & v_A \neq 0, \\ \boldsymbol{\alpha}_A, & v_A = 0, \end{cases}$$

где  $\mu$  — коэффициент трения,  $f_\xi$  и  $f_\eta$  — компоненты вектора  $\mathbf{f}_A$  в базисе  $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta$ ,  $\mathbf{v}_A$  — скорость точки  $A$ ,  $\boldsymbol{\alpha}_A$  — вектор, определяющий направление касательного напряжения в точке  $A$  в случае покоя корпуса (его модуль не превосходит единицы).

Для получения уравнений движения корпуса необходимо наложить ряд ограничений на распределение векторов  $\boldsymbol{\alpha}_A$ . Во-первых, предполагается, что для векторов  $\boldsymbol{\alpha}_A$  существует некоторая точка  $M$ , являющаяся аналогом мгновенного центра скоростей. Тогда вектор  $\boldsymbol{\alpha}_A$  направлен перпендикулярно радиус-вектору проведенному из точки  $M$  к точке  $A$ . Во-вторых, считается, что модуль  $\boldsymbol{\alpha}_A$  не зависит от выбора точки  $A$ , то есть  $\alpha_A \equiv \alpha$  и, соответственно,  $f_A \equiv f$ . Тогда проекции  $f_\xi$  и  $f_\eta$  выражаются уравнениями:

$$f_\xi = -f \frac{\eta - \eta_M}{\sqrt{(\xi - \xi_M)^2 + (\eta - \eta_M)^2}}, \quad f_\eta = f \frac{\xi - \xi_M}{\sqrt{(\xi - \xi_M)^2 + (\eta - \eta_M)^2}}.$$

Условие покоя корпуса на плоскости может быть выражено в трех независимых скалярных уравнениях, которые в каждый момент времени позволяют найти неизвестные величины  $f$ ,  $\xi_M$  и  $\eta_M$ .

Модель нормальных напряжений  $n_A$  включает в себя три независимых параметра  $\lambda_0$ ,  $\lambda_\xi$  и  $\lambda_\eta$ , определяемых в каждый момент времени:

$$n_A = \lambda_0 + \lambda_\xi \xi + \lambda_\eta \eta, \quad (\xi, \eta) \in S. \quad (3)$$

Известно, что такая модель контактных напряжений динамически совместна.

Между корпусом ползуна и плоскостью имеет место односторонний контакт, следовательно коэффициенты  $\lambda_0$ ,  $\lambda_\xi$  и  $\lambda_\eta$  ограничены условием  $n_A \geq 0$ ,  $\forall A \in S$ . Если в некоторых точках  $A$  это неравенство не выполняется, то для них следует принять  $n_A = 0$ , что соответствует случаю неполного контакта.

Условием неразрывности контакта ползуна с плоскостью является равенство нулю проекций скоростей точек корпуса на вертикаль, что выражается тремя независимыми уравнениями. Первое уравнение получается из необходимого равенства нулю суммы проекций главных векторов на вертикаль, то есть проекции уравнения (1) на орт  $\mathbf{k}$ , откуда находится коэффициент  $\lambda_0$ :

$$\lambda_0 = \frac{mg + \sum_{i=1}^s m_i \ddot{\zeta}_i}{10 ab}, \quad (4)$$

где  $a$  — длина,  $b$  — ширина корпуса. Коэффициенты  $\lambda_\xi$  и  $\lambda_\eta$  находятся путем проектирования уравнения (2) на орты  $\mathbf{e}_\xi$  и  $\mathbf{e}_\eta$  ( $j = \xi, \eta$ ):

$$\sum_{i=1}^s m_i \chi_{ji} = \iint n_A \psi_j ds, \quad (5)$$

где введены обозначения:

$$\chi_{ji} = (\mathbf{w}_i + g\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{r}_{Oi}), \quad \psi_j = (\mathbf{k} - \mu\mathbf{f}_A) \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{r}_{OA}).$$

Подставляя модель (3) в формулы (5) получается линейная система алгебраических уравнений относительно  $\lambda_\xi$  и  $\lambda_\eta$ , которая имеет решение:

$$\lambda_\xi = \frac{a_{\eta\eta} \left( a_{\xi 0} \lambda_0 + \sum_{i=1}^s m_i \chi_{\xi i} \right) - a_{\xi\eta} \left( a_{\eta 0} \lambda_0 + \sum_{i=1}^s m_i \chi_{\eta i} \right)}{a_{\xi\xi} a_{\eta\eta} - a_{\xi\eta} a_{\eta\xi}}, \quad (6)$$

$$\lambda_\eta = \frac{a_{\xi\xi} \left( a_{\eta 0} \lambda_0 + \sum_{i=1}^s m_i \chi_{\eta i} \right) - a_{\eta\xi} \left( a_{\xi 0} \lambda_0 + \sum_{i=1}^s m_i \chi_{\xi i} \right)}{a_{\xi\xi} a_{\eta\eta} - a_{\xi\eta} a_{\eta\xi}},$$

где коэффициенты:

$$a_{\xi\xi} = \iint \psi_\xi \xi ds, \quad a_{\xi\eta} = \iint \psi_\xi \eta ds, \quad a_{\xi 0} = - \iint \psi_\xi ds,$$

$$a_{\eta\xi} = \iint \psi_\eta \xi ds, \quad a_{\eta\eta} = \iint \psi_\eta \eta ds, \quad a_{\eta 0} = - \iint \psi_\eta ds.$$

Уравнения движения корпуса ползуна находятся путем умножения формулы (1) на орты  $\mathbf{e}_\xi$  и  $\mathbf{e}_\eta$ , а равенства (2) — на орт  $\mathbf{k}$ :

$$m\ddot{x}_O = (R_\xi - fF_\xi) \cos \varphi - (R_\eta - fF_\eta) \sin \varphi,$$

$$m\ddot{y}_O = (R_\xi - fF_\xi) \sin \varphi + (R_\eta - fF_\eta) \cos \varphi, \quad (7)$$

$$J\ddot{\varphi} = M_\varphi - fF_\varphi,$$

где

$$R_\xi = - \sum_{i=1}^s m_i (\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_O) \cdot \mathbf{e}_\xi, \quad R_\eta = - \sum_{i=1}^s m_i (\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_O) \cdot \mathbf{e}_\eta,$$

$$F_\xi = \mu f^{-1} \iint n_A f_\xi ds, \quad F_\eta = \mu f^{-1} \iint n_A f_\eta ds,$$

$$J = C + \sum_{i=1}^s m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2), \quad F_\varphi = \mu f^{-1} \iint n_A (\xi f_\eta - \eta f_\xi) ds,$$

$$M_\varphi = - \sum_{i=1}^s m_i (\mathbf{r}_{Oi} \times (\mathbf{w}_O + \mathbf{w}_i^r + \mathbf{w}_i^c)) \cdot \mathbf{k},$$

$\mathbf{w}_i^r$  и  $\mathbf{w}_i^c$  — относительное и кориолисово ускорения  $i$ -й точки. Полученная система уравнений замкнута, при условии, что в каждый момент времени известны коэффициенты  $\lambda_0$ ,  $\lambda_\xi$  и  $\lambda_\eta$ , получаемые из выражений (4) и (6).

Приводятся достаточные условия равновесия корпуса на плоскости:

$$|R_\xi| \leq F_\xi, \quad |R_\eta| \leq F_\eta, \quad |M_\varphi| \leq F_\varphi.$$

**Вторая глава** посвящена исследованию поступательного движения (для определенности, вдоль продольной оси симметрии  $O\xi$ ) мобильного устройства. Показывается, что для его реализации достаточно, чтобы координаты внутренних масс, а также их вторые производные удовлетворяли трем условиям:

$$\sum_{i=1}^s m_i \eta_i = 0, \quad \sum_{i=1}^s m_i (\eta_i \ddot{\zeta}_i - \zeta_i \ddot{\eta}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^s m_i (\xi_i \ddot{\eta}_i - \eta_i \ddot{\xi}_i) = 0,$$

если только корпус преодолет силу трения покоя. Тогда движение описывается первой формулой системы (7), причем функции  $f$ ,  $R_\xi$  и  $F_\xi$  имеют вид:

$$m\ddot{x}_O = R_\xi - fF_\xi, \quad f = \begin{cases} \dot{x}_O/|\dot{x}_O|, & \dot{x}_O \neq 0, \\ R_\xi/F_\xi, & \dot{x}_O = 0, |R_\xi| \leq F_\xi, \\ R_\xi/|R_\xi|, & \dot{x}_O = 0, |R_\xi| > F_\xi, \end{cases}$$

$$R_\xi = -\sum_{i=1}^s m_i \ddot{\xi}_i, \quad F_\xi = \mu\lambda_0 ab.$$

1. Рассматривается случай одной материальной точки массы  $m_1$ , способной перемещаться вдоль продольной оси симметрии корпуса (рисунок 1). Тогда

$$R_\xi = -m_1 \ddot{\xi}_1, \quad F_\xi = \mu mg, \quad m = m_0 + m_1.$$

Показывается, что неравенство  $n_A > 0$  не выполняется внутри всей области контакта  $-a/2 \leq \xi \leq a/2$ , если непусто множество

$$\begin{cases} 6(\mu h m f + m_1 \xi_1) > ma, & \mu h m f + m_1 \xi_1 > 0, \\ 6(\mu h m f + m_1 \xi_1) < -ma, & \mu h m f + m_1 \xi_1 < 0, \end{cases}$$

а значит, существует область отрыва, где следует принять  $n_A = 0$ .

Рассматривается гармонический закон управления относительным движением массы  $m_1$ :  $\xi_1(t) = a_1 \cos \omega t$ , где  $a_1$  — амплитуда,  $\omega = 2\pi/T$  — частота, а  $T$  — период колебаний точки. Тогда уравнение движения принимает вид:

$$m\ddot{x}_O = m_1 a_1 \omega^2 \cos \omega t - f F_\xi. \quad (8)$$

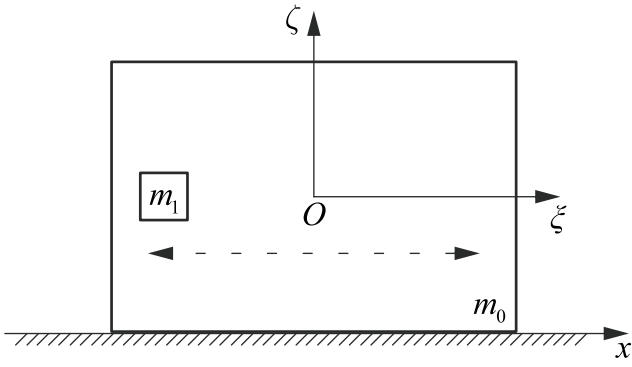


Рисунок 1. Ползун с точечной массой, движущейся вдоль оси  $O\xi$

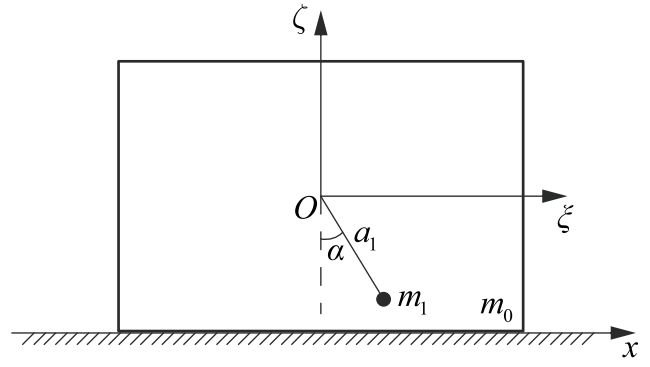


Рисунок 2. Ползун с маятником, движущимся в вертикальной плоскости его симметрии

Аналитически найдены четыре типа траекторий движения в зависимости от частоты колебаний точки.

Также исследуется кусочно-квадратичный закон управления смещением внутренней массы. Полученные результаты используются в четвертой главе.

2. Далее рассматривается случай двух материальных точек массами  $m_1$  и  $m_2$ , первая из которых может перемещаться вдоль оси  $O\xi$ , а вторая — вдоль вертикали. В этом случае выражение для функции  $R_\xi$  остается прежним, а функция  $F_\xi = \mu (mg + m_2\ddot{\zeta}_2)$ , откуда следует, что величина силы трения зависит от движения точки массой  $m_2$ .

Основное внимание уделяется подслучаю, когда массы точек равны, а сами они движутся по гармоническому закону со сдвигом фаз на  $\pi/2$ :  $\xi_1 = a_1 \sin \alpha$ ,  $\zeta_2 = -a_1 \cos \alpha$ , где  $\alpha = \alpha(t)$  — некоторая скалярная функция времени. Показывается, что такая система эквивалентна математическому маятнику, закрепленному в точке  $O$  (рисунок 2). Считая, что маятник имеет длину  $a_1$  и массу  $m_1$ ,  $\alpha$  — угол, который он составляет с вертикалью, а также вводя переобозначения  $\dot{x}_O = v_O$ ,  $\dot{\alpha} = \omega$ , находятся уравнения движения корпуса и маятника:

$$\begin{aligned} m\dot{v}_O + m_1 a_1 (\cos \alpha + f\mu \sin \alpha) \dot{\omega} &= m_1 a_1 \omega^2 (\sin \alpha - f\mu \cos \alpha) - f\mu mg, \\ m_1 a_1 \cos \alpha \dot{v}_O + m_1 a_1^2 \dot{\omega} &= M_1 - m_1 a_1 g \sin \alpha, \end{aligned}$$

где  $M_1$  — управляющий момент, приложенный к маятнику. Решение этой системы представляется в виде  $\dot{v}_O = \Delta_1/\Delta$ ,  $\dot{\omega} = \Delta_2/\Delta$ , где

$$\begin{aligned} \Delta &= mm_1 a_1^2 - m_1^2 a_1^2 \cos \alpha (\cos \alpha + f\mu \sin \alpha), \\ \Delta_1 &= m_1 a_1^2 (m_1 a_1 \omega^2 (\sin \alpha - f\mu \cos \alpha) - f\mu mg) - \\ &\quad - m_1 a_1 (\cos \alpha + f\mu \sin \alpha) (M_1 - m_1 a_1 g \sin \alpha). \end{aligned}$$

$$\Delta_2 = m (M_1 - m_1 a_1 g \sin \alpha) - m_1 a_1 \cos \alpha (m_1 a_1 \omega^2 (\sin \alpha - f\mu \cos \alpha) - f\mu mg).$$

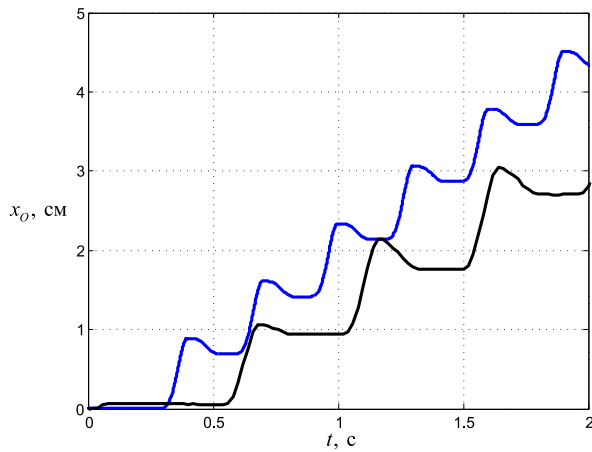


Рисунок 3. Зависимость координаты корпуса ползуна от времени: черная линия — эксперимент, синяя линия — модель

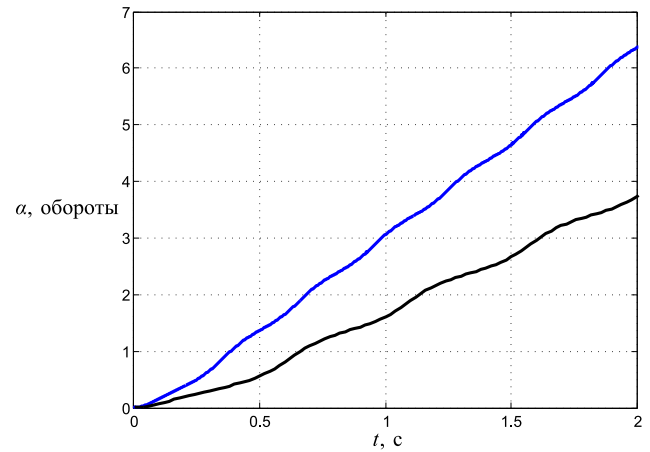


Рисунок 4. Зависимость количества оборотов эксцентрика от времени: черная линия — эксперимент, синяя линия — модель

Доцентом кафедры теоретической механики МФТИ С.В. Семендяевым был сконструирован робот, состоящий из прямоугольной платформы, опирающейся на плоскость в четырех точках и тяжелого диска, способного вращаться вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной продольной оси симметрии платформы, благодаря установленным двигателям постоянного тока. Ось вращения диска не проходила через его центр масс, благодаря чему его можно рассматривать как эксцентрик. Совместно со студентом ФАКИ МФТИ А.А. Цыгановым был проведен эксперимент, в процессе которого робот приводился в движение благодаря вращению эксцентрика. В результате проведенного эксперимента были сняты зависимости смещения координаты корпуса и угла поворота эксцентрика от времени.

Для верификации рассматриваемой модели полученная относительно  $\dot{v}_O$  и  $\dot{\omega}$  система уравнений была численно проинтегрирована. При этом было учтено, что с хорошей точностью электродвигатели постоянного тока имеют линейную зависимость момента от угловой скорости:

$$M_1 = A|\omega| - B, \quad A, B = \text{const} > 0,$$

где параметры  $A$  и  $B$  определялись таким образом, чтобы минимизировать расхождение траектории движения корпуса и маятника полученного путем интегрирования системы уравнений движения с данными, полученными экспериментальным путем: Модель показала качественное согласие с результатами эксперимента (рисунки 3 и 4). Количественное расхождение в первую очередь объясняется рядом несоответствий достаточно грубой модели экспериментальному роботу.

**Третья глава** посвящена исследованию поворота мобильного устройства вокруг неподвижного центра масс  $O$  на шероховатой плоскости, в результате

перемещения внутренних материальных точек. Доказывается, что для реализации такого движения достаточно, чтобы распределение внутренних точек удовлетворяло условиям:

$$\sum_{i=1}^s m_i \xi_i = 0, \quad \sum_{i=1}^s m_i \eta_i = 0, \quad \zeta_1 = \zeta_2 = \dots = \zeta_s,$$

если только корпус преодолевает силу трения покоя.

Показывается, что в рамках выбранной модели (3) и при указанных условиях распределение нормальных напряжений в области контакта оказывается равномерным:  $n_A = \lambda_0$ . Движение описывается третьей формулой системы (7), где функции  $f$ ,  $M_\varphi$  и  $F_\varphi$  имеют вид:

$$J\ddot{\varphi} = M_\varphi - fF_\varphi, \quad f = \begin{cases} \dot{\varphi}/|\dot{\varphi}|, & \dot{\varphi} \neq 0, \\ M_\varphi/F_\varphi, & \dot{\varphi} = 0, |M_\varphi| \leq F_\varphi, \\ M_\varphi/|M_\varphi|, & \dot{\varphi} = 0, |M_\varphi| > F_\varphi, \end{cases}$$

$$M_\varphi = -\sum_{i=1}^s m_i (\mathbf{r}_{Oi} \times (\mathbf{w}_i^r + \mathbf{w}_i^e)) \cdot \mathbf{k}, \quad F_\varphi = \mu\lambda_0 \iint \sqrt{\xi^2 + \eta^2} ds.$$

Окончательное выражение функции  $M_\varphi$  определяется в зависимости от выбранной конфигурации внутренних материальных точек и закона их относительного движения.

1. В качестве первого примера рассматривается случай однородного горизонтального диска массы  $m_d$  и радиусом  $d$ , центр которого совпадает с центром корпуса. Предполагается, что диск может вращаться вокруг своей оси благодаря наличию некоторого двигателя. Тогда  $M_\varphi = -J_d \varepsilon_d$  и  $J = C + J_d$ , где  $J_d = m_d d^2/2$  — осевой момент инерции диска, а  $\varepsilon_d$  — величина его относительного углового ускорения. Для преодоления главного момента силы трения, действующего на корпус со стороны плоскости, необходимо выполнение неравенства

$$|\varepsilon_d| > \frac{F_\varphi}{J_d}. \quad (9)$$

Предлагается управление углом поворота диска по гармоническому закону:  $\alpha_d = \alpha_1 \cos \omega t$ , где  $\alpha_1$  и  $\omega$  — амплитуда и частота колебаний. Тогда уравнение движения корпуса принимает вид

$$J\ddot{\varphi} = J_d \alpha_1 \omega^2 \cos \omega t - fF_\varphi,$$

который в точности совпадает с видом уравнения (8), описывающим поступательное движение корпуса с гармонически колеблющейся массой. Следовательно, все выводы сделанные для этого закона управления во второй главе,

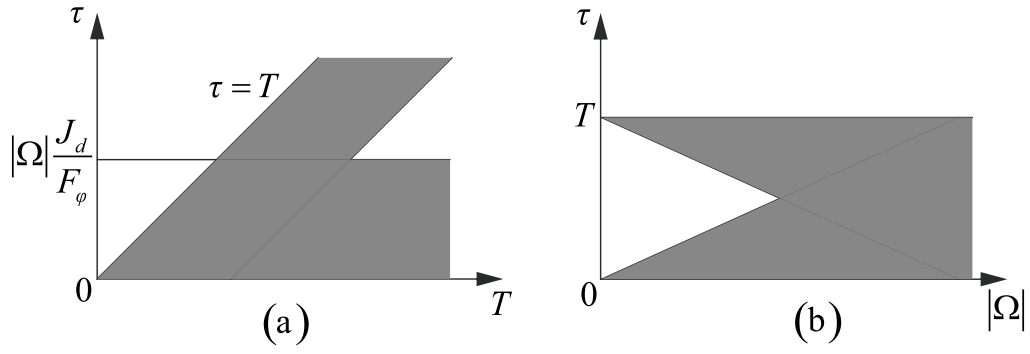


Рисунок 5. Плоскость параметров: (а) —  $(\tau, T)$ , (б) —  $(\tau, |\Omega|)$ ; закрашенные области соответствуют значениям параметров, при которых силы трения покоя преодолеваются

включая полученные траектории движения, справедливы и здесь, с точностью до переобозначений.

Далее предлагается двухфазная кусочно-линейная периодическая (с периодом  $T$ ) функция управления относительной угловой скоростью диска:

$$\omega_d = \Omega \cdot \begin{cases} t/\tau, & 0 \leq t < \tau, \\ (t - T)/(\tau - T), & \tau \leq t < T, \end{cases} \quad (10)$$

где  $0 < \tau < T$ ,  $\Omega$  — максимальная величина относительной угловой скорости  $\omega_d$ . В соответствии с условием (9) находятся значения параметров закона управления, подстановка которых в уравнение движения корпуса гарантирует преодоление главного момента сил трения покоя и приведение корпуса во вращательное движение вокруг точки  $O$  (рисунок 5):

$$\begin{cases} \tau < |\Omega| J_d / F_\varphi, \\ \tau > T - |\Omega| J_d / F_\varphi. \end{cases}$$

Для указанного закона управления правая часть уравнения движения корпуса кусочно-постоянная. В зависимости от функции  $f$ , уравнение принимает следующие три вида:

$$\ddot{\varphi} = 0, \quad J\ddot{\varphi} = -J_d \varepsilon_d \pm F_\varphi.$$

Следовательно, график изменения угла поворота корпуса состоит из набора прямых линий и кусков парабол.

2. Далее исследуется случай двух материальных точек одинаковой массы  $m_1 = m_2$ , способных перемещаться относительно корпуса по двум направляющим, параллельным его продольной оси симметрии и лежащим в горизонтальной плоскости, проходящий через центр масс корпуса, причем направляющие расположены на равных расстояниях  $\eta_1 = -\eta_2$  от точки  $O$  (рисунок 6).



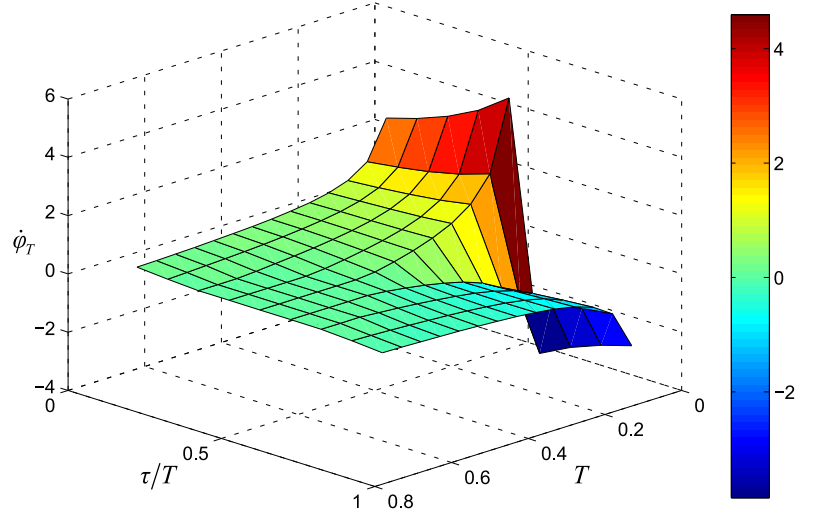
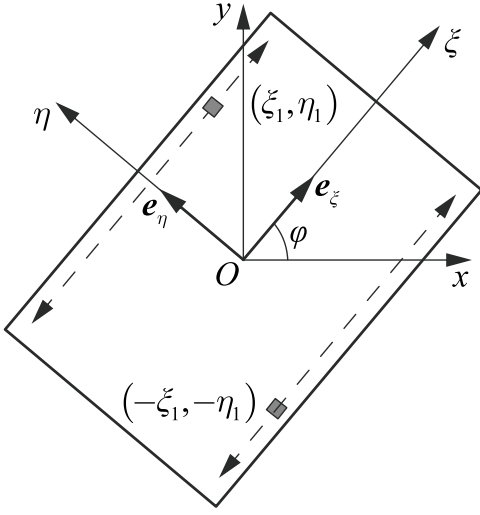


Рисунок 6. Ползун с двумя точечными массами

Рисунок 7. График средней угловой скорости корпуса ползуна в зависимости от параметров  $T$  и  $\tau/T$

Управление внутренними массами заключается в перемещении их периодически и в противофазе:  $\xi_1(t) = -\xi_2(t)$ . Определяются функция  $M_\varphi$  и момент инерции  $J$ :

$$M_\varphi = 2m_1 \left( \ddot{\xi}_1 \eta_1 - 2\dot{\varphi} \dot{\xi}_1 \xi_1 \right), \quad J = C + 2m_1 (\xi_1^2 + \eta_1^2).$$

В качестве закона управления массой  $m_1$  выбирается периодическая двухфазная кусочно-линейная функция  $\xi_1(t)$ , где  $a_1$  — амплитуда колебаний:

$$\xi_1(t) = a_1 + \begin{cases} 2a_1(t - \tau)/\tau, & 0 \leq t < \tau, \\ -2a_1(t - \tau)/(T - \tau), & \tau \leq t < T, \end{cases}$$

Относительное ускорение подвижных точек равно нулю всегда, за исключением моментов времени  $kT$  и  $kT + \tau$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), в которые их относительная скорость изменяется скачкообразно. Тогда

$$\ddot{\xi}_1(t) = \frac{2a_1}{\tau} \delta(t) - \left( \frac{2a_1}{\tau} + \frac{2a_1}{T - \tau} \right) \sum_{k=0}^{\infty} (\delta(t - kT - \tau) - \delta(t - kT - T)),$$

где  $\delta(t)$  — дельта-функция Дирака. Скачкообразное изменение относительной скорости точек означает наличие удара в системе, который оказывает существенное влияние на динамику корпуса. В моменты времени  $kT$  и  $kT + \tau$  корпус получает приращение угловой скорости  $\Delta\dot{\varphi}$ :

$$\Delta\dot{\varphi} = \frac{2m_1\eta_1}{J} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} \ddot{\xi}_1(t) dt, \quad t = kT, kT + \tau.$$

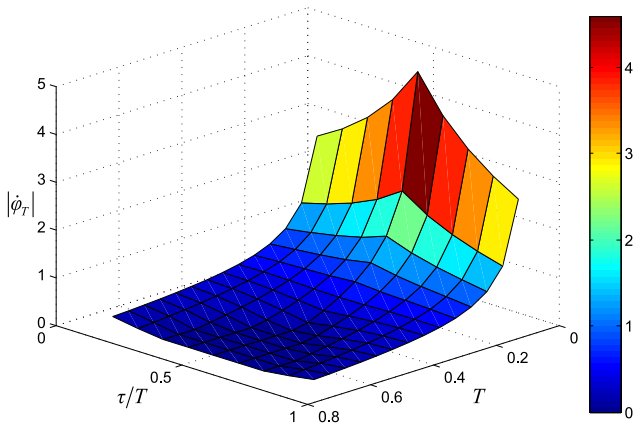


Рисунок 8. График модуля средней угловой скорости корпуса в зависимости от параметров  $T$  и  $\tau/T$

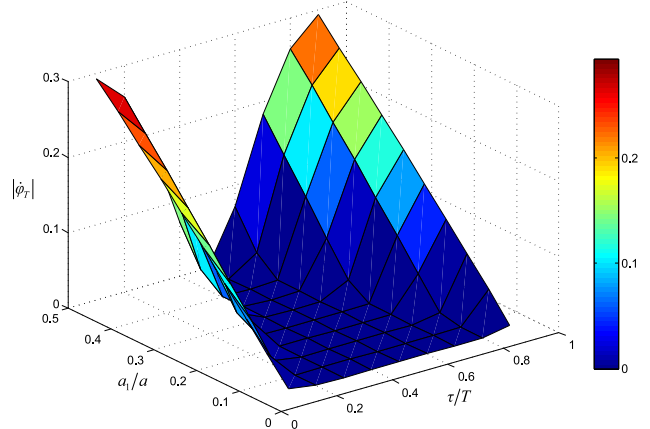


Рисунок 9. График модуля средней угловой скорости корпуса в зависимости от параметров  $\tau/T$  и  $a_1/a$

Проводится численное моделирование поворота корпуса в зависимости от величин параметров закона управления. В частности, показывается, что поворот выходит на установившийся периодический режим. Выполняется численная оценка количества периодов движения подвижных точек, необходимых для перехода в установившийся режим поворота. Необходимое количество периодов возрастает с уменьшением  $T$ , приближением  $\tau/T$  к 0.5 и  $a_1/a$  к 0.5.

Численно находятся оптимальные значения параметров  $T$ ,  $\tau$  и  $a_1$ , доставляющие максимум средней угловой скорости корпуса в установившемся режиме поворота из области определения

$$0.05 \leq T \leq 0.70, \quad 0.1 \leq \tau/T \leq 0.9, \quad 0.05 \leq a_1/a \leq 0.5, \quad (11)$$

где выбор верхней границы параметра  $a_1$  обусловлен длиной корпуса. На рисунке 7 изображена зависимость средней угловой скорости корпуса, а на рисунке 8 — зависимость модуля этой величины от параметров  $T$  и  $\tau/T$ . Показано, что при  $0.1 \leq \tau/T \leq 0.4$  средняя угловая скорость корпуса положительна, а при  $0.6 \leq \tau/T \leq 0.9$  — отрицательна. В окрестности значения  $\tau/T = 0.5$  ее знак может меняться в зависимости от выбора периода.

Устанавливается, что модуль средней угловой скорости монотонно возрастает с увеличением амплитуды колебаний точек  $a_1$ . На рисунке 9 представлен график при  $T = 0.5$  в диапазонах значений  $\tau/T$  и  $a_1/a$  (11). Максимальная средняя угловая скорость поворота корпуса достигается при величинах

$$T^* = 0.05 \pm 0.01, \quad \tau^*/T^* = 0.51 \pm 0.01, \quad a_1^*/a = 0.50 \pm 0.01.$$

В **четвертой главе** приводится исследование трехмерных движений ползуна на шероховатой плоскости, содержащего в себе подвижную материальную точку массы  $m_1$  и однородный диск массы  $m_d$  и радиуса  $d$ , центр кото-

рого совпадает с центром корпуса. Продольное движение ползуна предлагается реализовывать за счет периодических перемещений материальной точки вдоль оси  $O\xi$ , а поворот — за счет ускоренного вращения диска, ориентированного двумя способами.

В обоих случаях в качестве закона относительного движения точки  $\xi_1(t)$  используется кусочно-квадратичная функция, рассмотренная во второй главе, где показано, что в моменты времени  $kT$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) корпус получает приращение скорости  $\Delta v_O$ :

$$\Delta v_O = \frac{4(a_1 - b_1)m_1}{mT}, \quad k = 0; \quad \Delta v_O = \frac{8(a_1 - b_1)m_1}{mT}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где  $m = m_0 + m_1 + m_d$ ,  $a_1$  и  $b_1$  — границы, в которых перемещается точка, причем  $a_1 > b_1$ . При этом установлено, что если выполняется неравенство

$$T \geq T_0 = 2\sqrt{\frac{2(a_1 - b_1)m_1}{\mu mg}},$$

то попятного движения корпуса не происходит. Другими словами, при выполнении этого неравенства в процессе поступательного движения корпус получает импульс в результате перемещения массы  $m_1$  только в моменты  $kT$ .

Для управления относительной угловой скоростью диска  $\omega_d$  используется кусочно-линейная функция (10), рассмотренная в третьей главе.

1. В первом случае диск располагается таким образом, что ось его вращения параллельна продольной оси симметрии корпуса (рисунок 10). Такое расположение называется горизонтально-осевым. Используя формулы, полученные в первой главе, находятся коэффициенты модели распределения нормальных напряжений:  $\lambda_0 = mg/(ab)$ ,

$$\lambda_\xi = \frac{a_{\eta\eta}(a_{\xi 0}\lambda_0 + J_d \varepsilon_d) - a_{\xi\eta}(a_{\eta 0}\lambda_0 - m_1 g \xi_1 + J_d \dot{\varphi} \omega_d)}{a_{\xi\xi}a_{\eta\eta} - a_{\xi\eta}a_{\eta\xi}},$$

$$\lambda_\eta = \frac{a_{\xi\xi}(a_{\eta 0}\lambda_0 - m_1 g \xi_1 + J_d \dot{\varphi} \omega_d) - a_{\eta\xi}(a_{\xi 0}\lambda_0 + J_d \varepsilon_d)}{a_{\xi\xi}a_{\eta\eta} - a_{\xi\eta}a_{\eta\xi}},$$

и уравнения движения корпуса:

$$m\ddot{x}_O = (R_\xi - fF_\xi) \cos \varphi - (R_\eta - fF_\eta) \sin \varphi,$$

$$m\ddot{y}_O = (R_\xi - fF_\xi) \sin \varphi + (R_\eta - fF_\eta) \cos \varphi,$$

$$J'\ddot{\varphi} = -2m_1 \left(1 - \frac{m_1}{m}\right) \dot{\varphi} \dot{\xi}_1 \xi_1 - f \left(F_\varphi - \frac{m_1}{m} \xi_1 F_\eta\right),$$

где

$$J' = C + m_1 \left(1 - \frac{m_1}{m}\right) \xi_1^2 + J_d/2,$$

$$R_\xi = -m_1 \left(-\dot{\varphi}^2 \xi_1 + \ddot{\xi}_1\right), \quad R_\eta = -m_1 \left(\ddot{\varphi} \xi_1 + 2\dot{\varphi} \dot{\xi}_1\right). \quad (12)$$

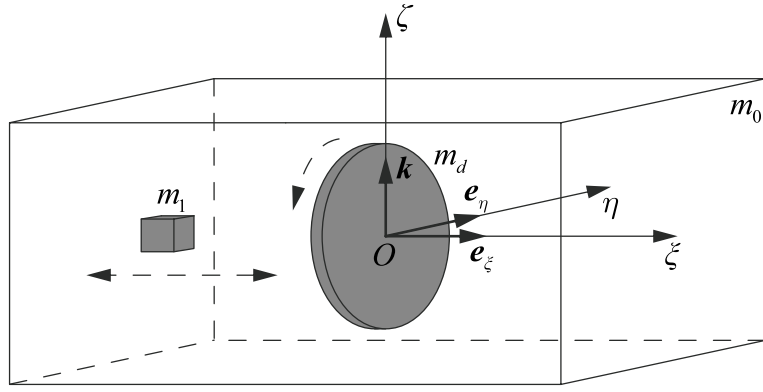


Рисунок 10. Ползун с точечной массой и диском, ось которого направлена по оси  $O\xi$

Показывается, что вращение корпуса достигается за счет несимметричного распределения нормальных напряжений в области контакта относительно продольной оси симметрии корпуса (рисунок 11). При достаточно больших величинах относительного углового ускорения диска в области контакта появляется подобласть, в которой происходит отрыв, что продемонстрировано на рисунке 12. В обоих случаях предполагается, что корпус движется вдоль оси  $O\xi$ , что объясняет возрастание нормальной нагрузки вдоль этой оси.

Приводится численный анализ, показывающий качественную зависимость траекторий движения системы от периода относительных движений внутренних масс. На рисунке 13 представлена зависимость изменения угла поворота корпуса за один период движения для значений  $0.1 \leq T \leq 0.7$ . С ростом коэффициента трения величина угла поворота монотонно падает, однако при  $\mu = 0$  (случай гладкой плоскости) корпус не поворачивается вовсе. Таким образом, величина угла поворота асимптотически стремится к некоторому максимальному значению при стремлении коэффициента трения к нулю (рисунок 14).

Качественный анализ позволил предложить программу управления параметром  $\Omega$  (максимальная величина относительной угловой скорости диска), в результате которой корпус проходит по S-образной траектории.

2. Во втором случае диск располагается таким образом, что ось его вращения вертикальна (рисунок 15). Аналогично находятся соответствующие коэффициенты модели распределения нормальных напряжений:  $\lambda_0 = mg/(ab)$ ,

$$\lambda_\xi = \frac{a_{\eta\eta}a_{\xi 0}\lambda_0 - a_{\xi\eta}(a_{\eta 0}\lambda_0 - m_1g\xi_1)}{a_{\xi\xi}a_{\eta\eta} - a_{\xi\eta}a_{\eta\xi}},$$

$$\lambda_\eta = \frac{a_{\xi\xi}(a_{\eta 0}\lambda_0 - m_1g\xi_1) - a_{\eta\xi}a_{\xi 0}\lambda_0}{a_{\xi\xi}a_{\eta\eta} - a_{\xi\eta}a_{\eta\xi}}.$$

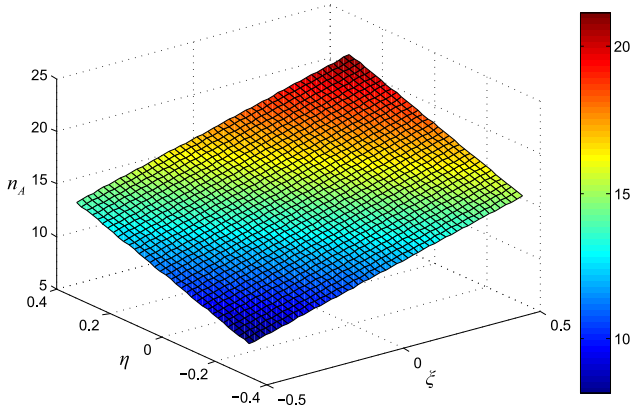


Рисунок 11. График распределения нормальных напряжений в области контакта корпуса и плоскости при  $\varepsilon_d = 30$

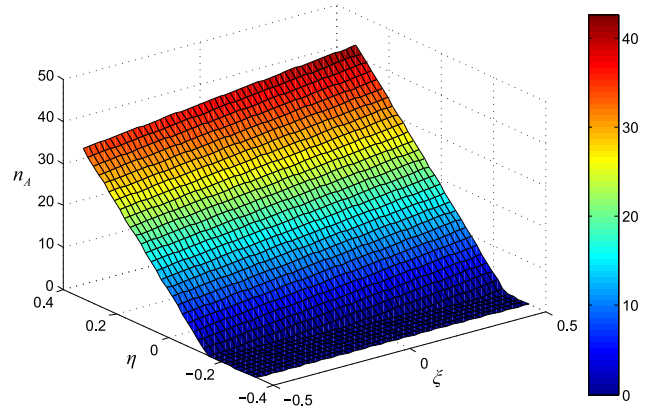


Рисунок 12. График распределения нормальных напряжений в области контакта корпуса и плоскости при  $\varepsilon_d = 250$

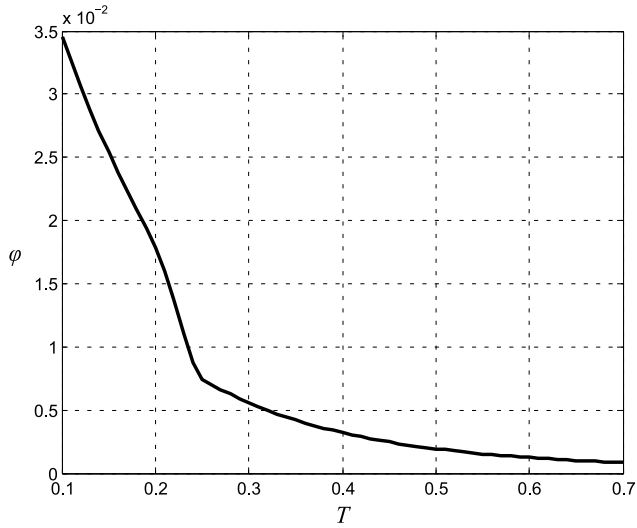


Рисунок 13. Зависимость угла поворота корпуса от периода движения внутренних тел

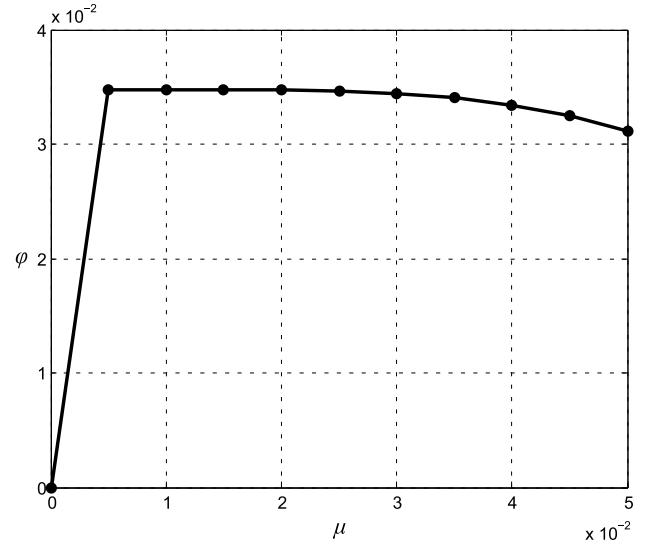


Рисунок 14. Зависимость угла поворота корпуса от коэффициента трения при  $T = 0.5$

и уравнения движения корпуса:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_O &= (R_\xi - fF_\xi) \cos \varphi - (R_\eta - fF_\eta) \sin \varphi, \\ m\ddot{y}_O &= (R_\xi - fF_\xi) \sin \varphi + (R_\eta - fF_\eta) \cos \varphi, \\ J'\ddot{\varphi} &= -J_d\varepsilon_d - 2m_1 \left(1 - \frac{m_1}{m}\right) \dot{\varphi}\dot{\xi}_1\xi_1 - f \left(F_\varphi - \frac{m_1}{m}\xi_1F_\eta\right), \end{aligned}$$

где  $J' = C + m_1(1 - m_1/m)\xi_1^2 + J_d$ , а функции  $R_\xi$  и  $R_\eta$  определяются второй и третьей формулами (12).

Из полученных формул следует, что вращение корпуса в случае вертикально-осевого расположения диска достигается не за счет изменения распределения нормальных напряжений, как это было в случае горизонтально-осевого расположения, а за счет его ускоренного вращения

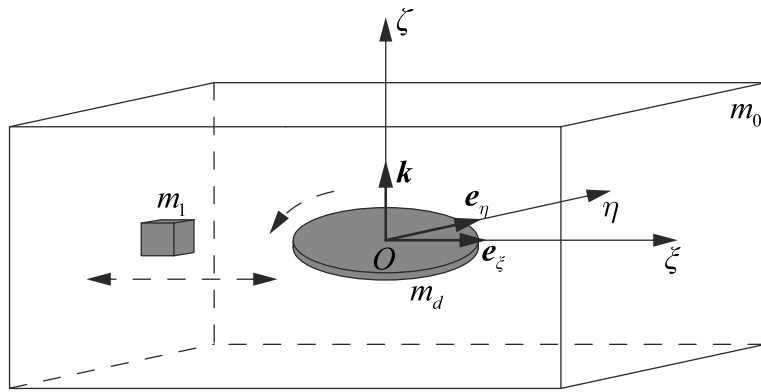


Рисунок 15. Ползун с точечной массой и диском, ось которого направлена по оси  $O\zeta$

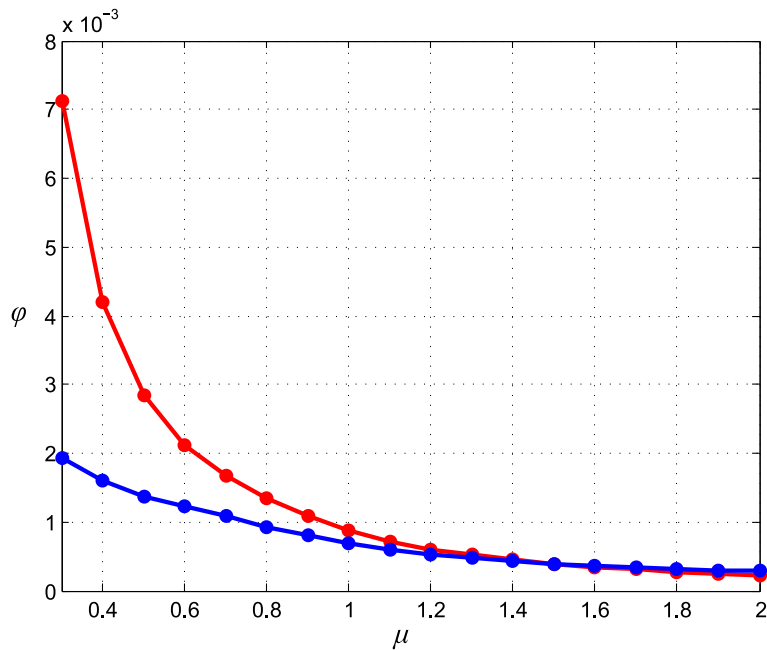


Рисунок 16. Зависимость угла поворота корпуса за один период движения внутренних тел от коэффициента трения; синий и красный графики — горизонтально- и вертикально-осевое расположение диска соответственно

вокруг вертикальной оси. При этом угловое ускорение корпуса направлено в противоположную, относительно углового ускорения диска, сторону.

Приводится численный анализ зависимости траекторий движения системы от параметров  $T$  и  $\Omega$ . Технически реализуемый режим движения, при котором корпус ползуна с вертикально-осевым расположенным диском не совершает попятного поворота, осуществляется при  $T > T_0$  и малых величинах  $\Omega$ . Аналогично случаю горизонтально-осевого расположения диска, приводится алгоритм управления параметром  $\Omega$ , позволяющий провести корпус по S-образной траектории.

В конце главы сравнивается эффективность горизонтально- и вертикально-осевого расположений диска с точки зрения максимизации

угла поворота корпуса за один период движения внутренних тел (рисунок 16). При средних значениях коэффициента трения ( $0.3 \leq \mu \leq 1.5$ ), вертикально-осевое расположение диска выглядит предпочтительным, а при малых ( $\mu < 0.3$ ) и больших ( $\mu > 1.5$ ) — горизонтально-осевое.

В **заключении** приведены основные результаты, полученные в ходе выполнения диссертационной работы.

В **приложении** вычисляется осевой момент инерции корпуса.

### Публикации автора по теме диссертации

1. *Иванов А.П., Сахаров А.В.* Динамика твердого тела с подвижными внутренними массами и ротором на шероховатой плоскости // «Нелинейная динамика». — 2012. — Т. 8, № 4. (Мобильные роботы) — С. 763–772.
2. *Ivanov A.P., Sakharov A.V.* On the Dynamics of a Rigid Body with Moving Masses and a Rotor on a Rough Plane // NONLINEAR DYNAMICS & MOBILE ROBOTICS. — 2013. — Vol. 1. No. 1. — Pp. 23–32.
3. *Сахаров А.В.* Поворот тела без внешних движителей при помощи ротора // Труды МФТИ. — 2014. — Т. 6, № 2. — С. 80–91.
4. *Сахаров А.В.* Поворот тела с двумя подвижными внутренними массами на шероховатой плоскости // ПММ. — 2015. — Т. 79, Вып. 2. — С. 196–209.
5. *Sakharov A.V.* Rotation of the Body with Movable Internal Masses Around the Center of Mass on a Rough Plane // Regul. Chaotic Dyn. — 2015. — Vol. 20, No. 4. — Pp. 428–440. DOI: 10.1134/S1560354715040024.
6. *Sakharov A.V.* Rotation of a body with two movable internal masses on a rough plane // J. Appl. Math. Mech. — 2015. — Vol. 79, No. 2. — Pp. 132–141. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2015.07.003.