

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
«Институт прикладной механики Российской академии наук»

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(Национальный исследовательский университет)»

На правах рукописи



ВОЛКОВ АЛЕКСАНДР ВЛАДИМИРОВИЧ

**ПРИМЕНЕНИЕ МИКРО-ДИЛАТАЦИОННОЙ ТЕОРИИ
УПРУГОСТИ ДЛЯ УТОЧНЁННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ
ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ**

Специальность 01.02.04 - «Механика деформируемого твёрдого тела»

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-
математических наук

Научный руководитель

к.ф.-м.н Соляев Юрий Олегович

Москва, 2019

Оглавление

Введение.....	4
1. Современное состояние проблемы.....	12
2. Микро-дилатационная теория упругости с поверхностными эффектами	22
2.1 Формулировка микро-дилатационной теории с поверхностными эффектами в вариационной постановке.....	22
2.2 Ограничения на физические константы микро-дилатационной теории упругости с поверхностными эффектами. Физический смысл констант микро-дилатационной теории.....	23
2.3 Физические соотношения микро-дилатационной теории упругости с поверхностными дефектами.....	24
2.4 Граничные условия.....	25
3. Задача о чистом изгибе балки с микро-дилатацией в объёме и на поверхности среды.....	28
3.1 Решение задачи чистого изгиба балки	28
3.2 Эффективная жёсткость балки со свободной дилатацией частиц при чистом изгибе	32
3.3 Методика построения численного решения	35
3.4 Результаты вычислений	37
3.4.1 Трёхмерное напряженное состояние дилатирующей балки при чистом изгибе	38
3.4.2 Деформация сечений и внешних поверхностей балки.....	43
3.4.3 Эффективные характеристики жёсткости балки	44
3.4.4 Влияние поверхностных эффектов	47
4. Численное решение различных задач изгиба в теории пористых сред с микро-дилатацией и поверхностными эффектами	50
4.1 Одноосное растяжение. Аналитическое решение.....	50
4.2 Методика построения численных решений в задачах изгиба	51
4.3 Чистый изгиб.....	51
4.4 Четырёхточечный изгиб.....	52
4.5 Трёхточечный изгиб	53

4.6	Консольный изгиб	54
4.7	Определение эффективного изгибного модуля балки на основании конечно-элементного моделирования.....	54
4.8	Результаты вычислений	55
4.9	Результаты численного моделирования эффективного изгибный модуля и напряжённо-деформированного состояния балки в различных задачах изгиба в микро-дилатационной теории.....	57
4.10	Основные результаты и выводы по разделу.....	60
5.	Задачи о деформациях пористого слоя, лежащего на массивном основании, в условиях нагрева в рамках микро-дилатационной термоупругости	62
5.1	Модель термоупругих пористых материалов, учитывающая дефектность поверхности	62
5.2	Постановка задачи термоупругости для слоя, лежащего на массивном основании, в условиях равномерного нагрева	67
5.3	Построение аналитического решения	70
5.4	Постановка задачи в программе COMSOL Multiphysics.....	71
5.5	Реализация численного моделирования для задачи о слое.....	73
5.6	Результаты расчетов.....	75
6.	Деформации пористого полого цилиндра в условиях неравномерного прогрева в микро-дилатационной теории упругости	86
6.1	Постановка аналитического решения задачи в рамках классической теории упругости.....	86
6.2	Постановка численного решения задачи	88
6.3	Результаты численного моделирования.....	94
6.4	Основные результаты и выводы по главе	100
	Заключение	102
	Список литературы	103

Введение.

Актуальность темы. Существует множество различных вариантов моделей упругих сред с различным числом материальных констант необходимых для определения напряжённо-деформированного состояния [86]. Так, например, одна из ранних теорий Навье использует только одну упругую константу [15]. Эта теория основывалась на предположении, что силы действуют по линиям, соединяющим пары атомов и пропорциональны изменениям расстояний между ними. Эксперименты опровергли эту модель. Из теории Навье следовало, что коэффициент Пуассона должен быть равен 0.25 для всех материалов. Но значение коэффициента Пуассона в природе варьируется для разных материалов.

Классическая теория упругости вводит две независимые константы – модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Коэффициент Пуассона в классической теории упругости может принимать значения от -1 до 0.5, что определяется требованием положительной определенности энергии деформаций [3, 14]. В классической теории упругости точки среды могут только перемещаться.

В теории упругости братьев Коссера больше степеней свободы, чем в классической теории упругости. Точки среды могут как перемещаться, так и вращаться. У изотропного материала в теории Коссера шесть упругих констант. Теория упругости Миндлина добавляет новые степени свободы – она позволяет точкам среды перемещаться, вращаться и деформироваться. Число упругих констант вырастает до 18. Микрополярная теория упругости активно развивается, например, в работах [9,10,89].

Необходимость использования обобщённых теорий упругости связана с наличием микроструктуры у материалов [99]. Различные неоднородности, такие как поры, зёрна, включения, трещины в естественных материалах, формируют подобные микроструктуры. В искусственно созданных материалах (метаматериалах) микроструктура может проектироваться и создаваться целенаправленно. В результате, из-за наличия микроструктуры, напряжённо-

деформированное состояние в телах может отличаться от предсказанного в классической теории упругости. В классической теории упругости нет масштабных параметров, но с масштабными параметрами связаны многие методы расчёта длительной прочности, масштабные эффекты могут оказывать сильное влияние на уровень концентрации напряжений. При рассмотрении материалов на микро и нано уровне зачастую нельзя целиком игнорировать наличие микроструктуры, так характерные размеры неоднородностей уже могут быть сравнимы с размерами рассматриваемого тела. Масштабные эффекты могут наблюдаться во многих композитных материалах или биоматериалах.

Одной из обобщённых моделей континуума является теория упругости с микро-дилатацией, рассматриваемая в настоящей диссертации. Эта теория позволяет получить уточненное описание процессов деформирования упругих пористых сред, в которых объемное содержание пористости (или плотность) линейно и обратимо зависит от прикладываемой внешней нагрузки. Подобное поведение сред может быть характерным для задач биомеханики, геомеханики, механики композиционных материалов, ячеистых сред и в задачах с метаматериалами [43, 85].

В третьей и четвертой главах диссертационной работы будет показано, что эффективный коэффициент Пуассона в микро-дилатационной теории упругости может быть отрицательным. Можно предположить, что микро-дилатационная теория упругости может применяться для моделирования материалов с отрицательным коэффициентом Пуассона – ауксетиков. В настоящее время ауксетики активно исследуются, существует множество теоретических и экспериментальных работ [2, 4, 6, 19, 51].

Целью работы является разработка методов уточненного описания пористых материалов, как сред с микро-дилатацией, и разработка теоретической базы для идентификации материальных констант микро-дилатационной теории на основе простых экспериментальных методик.

Задачами работы являются:

1. Построение аналитических и численных решений в рамках микро-дилатационной теории упругости и термоупругости для прикладных задач деформациях балки, слоя, полого цилиндра.
2. Сравнение результатов численных и аналитических решений для проверки точности реализованных численных методов моделирования и для исследования областей возможного применения простых аналитических решений, без привлечения численного моделирования.
4. Исследование неклассических масштабных эффектов, возникающих в задачах микро-дилатационной теории упругости.
5. Оценка влияния масштабных параметров на эффективные («кажущиеся») характеристики упругих тел с микро-дилатацией в различных типах испытаний. Разработка методов идентификации материальных констант теории на основе испытаний образцов пористых материалов.

Результаты, выносимые на защиту

1. Аналитическое решение, полученное на основе полуобратного метода Сен-Венана, для оценки эффективного (кажущегося) модуля упругости балки, в объеме и на поверхности которой, присутствуют эффекты микро-дилатации.
2. Результаты анализа точности построенного аналитического решения задачи чистого изгиба балки, реализованного с использованием численного трехмерного конечно-элементного моделирования в микро-дилатационной теории.
4. Результаты оценки влияния масштабных, связанных и поверхностных эффектов на жесткость и напряженно-деформированное состояние микро-дилатационной балки в различных испытаниях на изгиб (трёхточечный, четырёхточечный, консольный). Показанная возможность прогноза кажущегося модуля упругости в любых испытаниях на изгиб на основе приближенной

аналитическую формулы, следующей из решения задачи чистого изгиба, которая также может применяться для обработки экспериментальных данных и идентификации неклассических материальных констант теории.

5. Результаты численного и аналитического решения для задачи прогрева пористого слоя, лежащего на массивном основании.

6. Результаты численного решения задачи моделирования деформаций полого пористого цилиндра в рамках микродилатационной теории упругости.

Новизна

1. Впервые реализовано численное моделирование балки с микродилатацией в условиях чистого изгиба.

2. Впервые построено обобщение аналитического решения выполненного полу-обратным методом Сен-Венана на микро-дилатационную теорию с учётом наличия дефектов на поверхности.

3. Впервые проведено сравнение численного и аналитического решения для задачи прогрева двухслойной полосы в рамках микро-дилатационной теории упругости.

4. Впервые построено численное решение для задачи прогрева цилиндра в рамках микро-дилатационной теории упругости.

Практическая значимость

Во второй и третьей главе рассмотрены различные задачи изгиба балки. Введено понятие эффективной жёсткости балки в задачи изгиба. На основе численного и аналитического решения можно предсказать поведение балки при заданных значениях неклассических физических модулей. Исходя из сравнений экспериментальных данных и результатов расчётов можно попытаться определить значения неклассических модулей для конкретных материалов.

Показано, что микро-дилатационная теория упругости может применяться для моделирования материалов с отрицательным коэффициентом Пуассона (ауксетиков).

Решение задач термоупругости для диска и двухслойной полосы может быть использовано для уточнённого моделирования напряжённо-деформированного состояния керамических материалов.

Структура диссертации следующая:

В первой главе описано современное состояние проблемы, дан краткий обзор результатов, полученных в рамках микро-дилатационной теории упругости.

Во второй главе приведена вариационная постановка микро-дилатационной теории упругости, в том числе, с поверхностными эффектами.

В третьей главе дано решение задачи чистого изгиба балки в рамках микро-дилатационной теории упругости с поверхностными эффектами. Дается сравнение аналитического и численного решения задачи. Показана точность реализованного численного моделирования, согласующегося с аналитическим решением. Введены эффективные модули упругости, исследованы масштабные эффекты, возникающие в рамках теории. Показана область, в которой аналитическое решение является точным – вблизи центрального продольного сечения балки. Показано, что на большом расстоянии от этой области возникает депланация сечений балки, не учитываемая в аналитическом решении. Представлено сопоставление НДС балки в классической теории упругости и микро-дилатационной теории упругости.

В четвёртой главе рассмотрено численное решение для различных задач изгиба в рамках микро-дилатационной теории упругости. Рассмотрены четырёхточечный, трёхточечный и консольный изгиб. Для разных задач изгиба введены эффективные модули упругости. Показана возможность применения аналитического решения, следующего из задачи о чистом изгибе балки, для

описания зависимости кажущегося модуля упругости балки с микро-дилатацией от ее толщины в различных испытаниях на изгиб.

В пятой главе предложено обобщение линейной микро-дилатационной теории упругости на случай температурных эффектов. Построены аналитическое и численное решения о деформациях пористого слоя на упругом основании. Дано сравнение аналитического и численного решений. Показано, что численное решение достаточно хорошо аппроксимирует аналитическое и может быть использовано для оценки напряжённо-деформируемого состояния в рамках микро-дилатационной теории.

В шестой главе рассмотрена задача о деформациях полого пористого цилиндра в условиях неравномерного прогрева. На основе численного решения исследованы неклассические эффекты, возникающие при изменении толщины стенок цилиндра. Показано, что масштабные эффекты проявляются только в ограниченном диапазоне значений радиуса цилиндра.

Апробация работы. Основные положения и результаты работы докладывались на следующих конференциях:

1) Solyaev Y.O., Lurie S.A., Volkov A.V. Surface effects in the theory of elastic materials with voids. В сборнике: Advanced Problems in Mechanics 2015 XLIII International Conference. 2015. С. 104.

2) Волков А.В., Соляев Ю.О., Лурье С.А. Исследование масштабных эффектов в задаче чистого изгиба теории пористых сред. Математическое моделирование в естественных науках. 2015. Т. 1. С. 86-88.

3) Волков А.В., Соляев Ю.О., Лурье С.А. Численное и аналитическое решение задач чистого изгиба в постановке дилатационной и градиентной теории пористых сред. Математическое моделирование в естественных науках. 2016. Т. 1. С. 64-66.

4) Волков А.В., Соляев Ю.О., Лурье С.А. Сопоставление масштабных эффектов, возникающих в задаче чистого изгиба в постановке дилатационной и градиентной теории пористых сред. В сборнике: Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник трудов 6-й Всероссийской научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского: в 2-х томах. 2016. С. 40-46.

5) Волков А.В., Соляев Ю.О. Численные решения плоских задач теории упругости со свободной дилатацией частиц.

6) Соляев Ю.О., Волков А.В. Моделирование отрицательного масштабного эффекта для изгибного модуля упругости пористых балок в рамках микродилатационной теории упругости. В книге: Тезисы докладов V международного научного семинара "Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы" Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). 2016. С. 163-164.

7) Волков А.В. Численное моделирование масштабных эффектов для температурных напряжений в круглом диске с отверстием в рамках микродилатационной теории упругости. Математическое моделирование в естественных науках. 2018. Т. 1. С. 359-363.

8) Волков А.В. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния слоя, лежащего на массивном основании, в модели термоупругости пористых сред с учетом поверхностной дефектности. В сборнике: Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник трудов 8-й Всероссийской научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского. 2019. С. 230-235.

Основные публикации. По теме диссертационной работы опубликовано 3 работы, в том числе 2 научных работы в журналах из списка Scopus и 1 научная

работа в издание, входящем в перечень ведущих рецензируемых научных журналов, рекомендованных ВАК РФ.

SCOPUS

1. Lurie S. A., Solyaev Y. O., Volkov-Bogorodskiy D, Volkov A.V. Bending problems in the theory of elastic materials with voids and surface effects, *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2017

2. Sergey A. Lurie, Alexander L. Kalamkarov , Yury O. Solyaev , Anastasia D. Ustenko , Alexander V. Volkov Continuum micro-dilatation modeling of auxetic metamaterials, *International Journal of Solids and Structures*, 2017

ВАК

Ю.О. Соляев, С.А. Лурье, А.В. Волков Численное решение задачи чистого изгиба балки в рамках дилатационной теории упругости, *Вычислительная механика сплошных сред.* – 2017. – Т. 10, № 2.

1. Современное состояние проблемы.

Микро-дилатационная теория упругости впервые была сформулирована в работах [43,85]. До этого, более общая модель была дана в статье [52]. Нелинейная формулировка была представлена в работе Нунзиато и Ковина [90], где эта теория была названа теорией упругости для материалов с распределёнными порами. Линейная версия этой теории дана в работе Ковина и Нунзиато [43]. Линейная теория упругости с микро-дилатацией была независимо предложена Марковым в статье [85]. Дальнейшее своё развитие теория получила в работах Ковина и Пури [44], Ковина [40, 41, 42], Маркова [86], Изана и Квинтаниллы [59].

Теория описывает материалы с однородно распределёнными по объёму порами. Когда объём пор падает до нуля, теория сводится к линейной теории упругости. В первых статьях физические и математические соотношения давались без использования вариационного принципа. Следуя этому подходу, в данном разделе будет получена постановка задачи микро-дилатационной теории упругости, которая затем также будет получена на основе вариационного подхода.

Основной новой чертой теории является введение дополнительной независимой кинематической переменной: объёмного содержания пористости ϕ . Объясним физический смысл этой переменной.

Обозначим объёмную плотность материала как:

$$\rho = \gamma \nu \quad (1)$$

Здесь γ - массовая плотность самого материала, ν объёмное содержание материала. Переменная ν описывает то, как материал распределён в объёме. На **Рис. 1** показан пример подобного материала. В начальной конфигурации можно записать: $\rho_R = \gamma_R \nu_R$. Тогда новая независимая кинематическая выразится так:

$$\phi = v - v_R \quad (2)$$

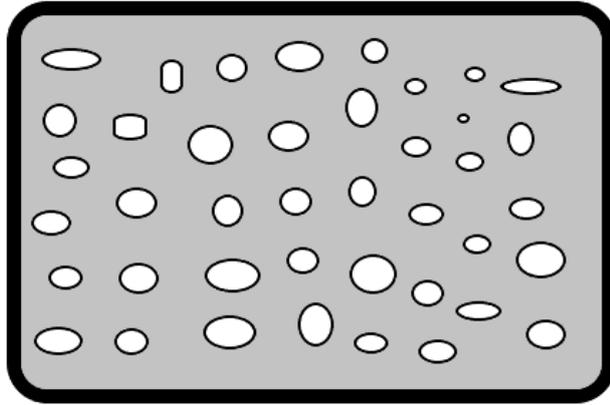


Рис. 1 Упругий материал с распределёнными порами

Физический смысл этих формул может быть не совсем понятен с первого взгляда. В [96] представлено более понятное определение. Обозначим Ω_v - объём пор, Ω_t - полный объём рассматриваемого материала, Ω_{vr} - объём пор в начальной конфигурации. Тогда $P = \frac{\Omega_v}{\Omega_t}$ и $P_R = \frac{\Omega_{vr}}{\Omega_t}$. Получаем:

$$\phi = -(P - P_R) \quad (3)$$

Соотношения Коши остаются такими же, как в классической теории упругости. u_i - вектор перемещения, ε_{ij} - тензор деформаций.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4)$$

В случае отсутствия объёмных сил уравнения равновесия принимают вид:

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (5)$$

Чтобы уравновесить микрообъём материала дополнительно записывается соотношения баланса для неклассических напряжений:

$$h_{i,i} + g = 0 \quad (6)$$

Здесь h_i - это вектор неклассических напряжений (размерность Ньютон/Метр), g - это объёмная сила (размерность Ньютон/Метр²), определяемая функцией, связанной с давлением в порах [96]. В [43] эти напряжения названы «уравновешенными» (equilibrated) внутренними силами. Уравнения равновесия для вектора неклассических напряжений подробно исследовались в [35, 49]

Физические соотношения имеют вид:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} + \beta \phi \delta_{ij} \quad (7)$$

$$h_i = \alpha \phi_{,i} \quad (8)$$

$$g = -\omega \dot{\phi} - \xi \phi - \beta \varepsilon_{kk} \quad (9)$$

Здесь $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \omega$ - материальные константы теории, зависящие от начальной пористости. Из соотношений теории можно найти ограничения для материальных констант теории (подробный вывод этих соотношений представлен ниже в разделе 2). Необходимо отметить, что в дальнейшем в тексте работы мы будем рассматривать только квазистатический случай, то есть $\omega = 0$.

$$\mu \geq 0, \alpha \geq 0, \xi \geq 0, \omega \geq 0, 3\lambda + 2\mu \geq 0, M = \frac{3\lambda + 2\mu}{\beta^2} \geq 0, \quad (10)$$

Уравнения равновесия совпадают с классическими уравнениями равновесия классической теории упругости. Отличие состоит во введении дополнительного условия – самоуравновешенный вектор напряжений обращается в ноль на границе.

$$\phi_{,i} n_i = 0 \quad (11)$$

Можно заметить, что микро-дилатационная теория упругости является наиболее простым частным случаем теории сред с микроструктурой Миндлина [46, 88] в предположении, что тензор микродисторсии имеет сферический вид [32, 33, 40]. Теория предназначена для описания деформаций пористых сред, в которых объемное содержание пористости изменяется в процессе деформирования. В частности, это могут быть пористые керамики, полимеры и пенометаллы, геоматериалы, биологические материалы и т.д. [43, 85, 96]. Единственной дополнительной скалярной полевой переменной в этой теории является микро-дилатация, которая по своему физическому смыслу определяет изменение объемного содержания матрицы среды [43].

К настоящему времени в рамках микро-дилатационной теории упругости известно значительное количество аналитических и численных решений для различных классов задач статической и динамической упругости [28, 40, 42, 44, 47, 62, 92, 94, 96, 100, 103, 104], термоупругости [67, 68, 69, 107], механики разрушения [38, 64, 93], пьезоупругости [63], задач термо/механо- диффузии [102] и т.д. Большинство этих задач рассматривается в тестовом и теоретическом аспекте без приложения к реальным материалам, так как для реальных материалов не известны значения материальных констант этой теории.

В рамках микро-дилатационной теории были решены следующие задачи: задача однородных деформаций [43]; задача Сен-Венана для изотропных [43, 47] и ортотропных [28, 50, 58] балок; задача Кирша [40]; задача Ламе [44]; некоторые контактные задачи [92]; некоторые задачи механики разрушения [38] и т.д. Принцип Сен-Венана для микро-дилатационной теории упругости был доказан в работе Vatra & Yang [20]. Теоремы о существовании и единственности были доказаны в работе Iesan [55]. Теория пластин и оболочек для материалов с порами рассматривалась в [24], [25], [26], [27], [84], [101]. Тонкие пористые балки исследовались в работе [29]. Задача распространения упругих волн

рассматривалась в [48]. Расширенная микро-дилатационная теория с поверхностными эффектами, аналогичная модели Гуртина-Мёрдока была представлена в статье Chandrasekharaiah [34]. Теория упругих материалов с порами и поверхностными микро-дилатационными свойствами исследовалась в работах Белова и Лурье [21], Соляева и Лурье [105] а также в [106]. Следуя этой теории, поверхностная часть энергии деформаций зависит только от микро-дилатации. Как следствие, вместо граничных условий Неймана, на свободных от нагрузок поверхностях используются граничные условия Робина.

Численные решения для статической и динамической двумерной теории упругости с порами впервые были рассмотрены в Iovane and Nasedkin [60, 62]. Численное решение для однородных нелинейных деформаций дано в [95]. Деформации полого цилиндра под давлением рассмотрены в [96]. В работе [66] исследовалось сжатие пористых стержней. В статье [65] основе конечно-элементного расчёта были идентифицированы неклассические материальные константы. В [110] авторы модифицировали метод граничных элементов для микро-дилатационной теории упругости, а также исследовали однородные и неоднородные деформации полого цилиндра. В статьях [18,104] авторы использовали бессеточный локальный метод Бубнова-Галёркина для решения различных задач двумерной микро-дилатационной теории, включая консольный изгиб балки.

В статических задачах с изотропными материалами в микро-дилатационной теории упругости присутствует пять материальных констант (см. (7)-(10)): две классических упругих характеристики (например, модуль Юнга и коэффициент Пуассона) и три неклассических характеристики: β модуль связанности (размерность Ньютон/метр²), параметр ξ «собственной жесткости» пор (размерность Ньютон/м) и параметр «диффузии пор» α (размерность в Ньютонах). Эти названия были предложены в работах [90, 96]. Следует отметить, что физический смысл этих констант до сих пор не до конца понятен, названия

«собственная жесткость» пор и «диффузия пор» следует использовать осторожно. Подробное исследование физического смысла неклассических модулей было проведено в [96].

Параметр α обозначает насколько далеко и сильно распространяется воздействие одной поры вокруг себя в материале матрицы. Таким образом, чем больше значение α , тем сильнее напряжённо-деформируемое состояние материала будет сильно зависеть от наличия пор, а если α будет стремиться к нулю, то неклассических эффектов наблюдаться не будет [96].

ξ - параметр собственной «жесткости» пор, показывает, насколько сильно пора может сопротивляться внешним нагрузкам. Если ξ относительно велико, то микроструктура очень жесткая, поры практически не деформируются и их влиянием на напряжённо-деформируемое состояние можно пренебречь. Например, внутри пор может быть другой твердый материал или жидкость, препятствующие их деформациям или этот параметр ξ может быть связан с геометрией пор и упругими характеристиками материала матрицы [96].

Можно найти связь между микро-дилатационной теорией упругости и теорией пороупругости Био [31]. Теория пороупругости была предложена Био и, независимо, Френкелем [16]. Первоначально модель использовалась для решения задач распространения в пористой среде акустических возмущений [1]. Аналогичные задачи решались в работах [11,12]. В работе [96] было показано, что микро-дилатационная теория является обобщением теории пороупругости Био. Для этого удобно использовать понятие эффективных напряжений Terzaghi [108, 109].

Напряжения в теории Био можно выразить как $\sigma_{ij}^{eff} = \sigma_{ij}^M + P\delta_{ij}$, где σ_{ij}^{eff} - эффективные напряжения, σ_{ij}^M - механические напряжения, P - давление в порах (pore-fluid pressure), $P \in R$, δ_{ij} - дельта Кронекера. P в теории Био может принимать как отрицательные, так и положительные значения. Используя классические модули упругости можно записать $\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{ii} + 2\mu\varepsilon_{ij} + P\delta_{ij}$. Простым сравнением с (7) получаем $\beta\varphi = P$. В частности, отсюда следует, что этот параметр по своему физическому смыслу должен быть отрицательным [96]. Так, например, если $P > 0$, то $\beta\varphi > 0$ и $\varphi = -(P - P_R) < 0$, соответственно $\beta < 0$. Если же $P < 0$, то $\beta\varphi < 0$ и $\varphi = -(P - P_R) > 0$, соответственно $\beta < 0$. Далее будет

показано, что с точки зрения положительной определенности потенциальной энергии это допустимо. Можно также отметить, что в работах Лурье [7] изначально предполагалось, что этот параметр является отрицательным, что является следствием физического смысла поля пористости, как поля дефектов, повреждающих материал и приводящих к снижению его жесткости.

В последнее время все больше внимания уделяется проблеме идентификации дополнительных параметров микро-дилатационной теории [30, 66, 74, 81, 96]. В работе [96] была представлена наглядная трактовка дополнительных материальных констант микро-дилатационной теории и предложены методики идентификации модулей связности и жесткости пор на основе анализа экспериментальных данных и решений задачи о полом цилиндра под внутренним давлением и задачи о сферической поре. В работе [30] проведено сопоставление численных решений различных плоских задач в рамках микро-дилатационной теории для сплошной среды и соответствующих задач в классической теории упругости для среды содержащей круглые поры. Показано, что из сопоставления этих решений можно определить микро-дилатационный модуль связности и параметр собственной жесткости пор. Обсуждение физического смысла дополнительных параметров микро-дилатационной теории, и её сопоставление с другими неклассическими моделями теории упругости проводилось в работе [74]. Методика идентификации параметров теории на основании испытаний пористых балок различной толщины обсуждалась в работе [81]. Здесь на основании 3D FE моделирования была показана возможность применения любого типа экспериментальных испытаний на изгиб (чистый изгиб, трёхточечный и т.д.) для однозначного определения всех неклассических параметров модели. Результаты этой работы [81] включены в главу 3 настоящей диссертации.

Экспериментальных работ, направленных на идентификацию материальных констант микро-дилатационной теории известно не так много. Единственные на сегодняшний день примеры успешной экспериментальной идентификации

параметра связанности микро-дилатационной теории для растворов цемента были представлены в работах [65, 66]. В экспериментальных работах R. Lakes и соавторов [72, 97] было показано, что микро-дилатационная теория не применима для описания изотропных полимерных пен-ауксетиков [73], для которых существенные масштабные эффекты проявляются как при изгибе, так и при кручении. В микро-дилатационной модели масштабных эффектов при кручении изотропных тел не возникает, так как связанность между сдвиговыми деформациями и полем пористости отсутствует. Однако в работе [57] было показано, что возможна связь между микро-дилатацией и касательными напряжениями, как эффект повышенного порядка. Но для описания подобных явлений необходимо использовать либо более общие модели микроструктуры [54, 74, 97] или использовать модели второго порядка [91].

Можно отметить работы [8, 80], где было показано, что микро-дилатационная теория применима для описания деформированного состояния метаматериалов с отрицательным коэффициентом Пуассона (ауксетиков), и в том числе, для описания масштабных эффектов, возникающих в задачах с этими материалами.

Эта модель также является базовой для построения уточнённых моделей накопления повреждений, в том числе необратимых (где пористость не закрывается после возникновения). Микропоры образуются в областях материала, где напряжённое состояние близко к всестороннему растяжению, то есть дилатации, что соответствует рассматриваемой кинематике модели. Таким образом, микро-дилатационная теория может быть использована для оценки возможного зарождения макродефектов. Когда φ стремиться к 1, увеличивается вероятность зарождения макродефектов.

Формулировка модели термоупругости для теории пористых сред была рассмотрена в работе [56] и в дальнейшем развита в [24, 29, 36, 39, 45]. В настоящей работе привлекается обобщенный вариант модели, учитывающей

дефектность на поверхности материала. Эта модель была предложена в работах [21, 75, 77], в некотором смысле, она является обобщением модели Гуртина-Мердока (Gurtin-Murdoch) [53].

Практическое значение рассматриваемой задачи связано, например, с исследованием термопрочности тонких теплозащитных или жаростойких (oxidation protective) покрытий. Так покрытия на основе yttrium stabilized zirconia практически всегда содержат пористость в пределах 5-20 об.%, что обеспечивает снижение теплопроводности и повышение податливости материала покрытия, при сохранении его прочности и долговечности при термоциклировании [23]. Пористость в жаростойких покрытиях на основе MoSi_2 , TiSi_2 , SiO_2 и т.д. также может присутствовать в пределах 2-5%. Учет дефектности границ при моделировании в данном случае может трактоваться, как учет влияния образования микродефектов (трещин или пор) на поверхности покрытия и вблизи его контакта с подложкой вследствие термомеханических нагрузок и окисления. Также решение рассматриваемой задачи может быть использовано при моделировании напряженного состояния теплозащитных элементов конструкций, выполняемых в виде плит из высокопористой керамики или из графита, или из иного теплозащитного материала.

Задачи определения напряжений в пористом полупространстве в условиях стационарного и нестационарного температурного воздействия были исследованы в работах [17, 69, 70, 111]. Решение задачи о температурных деформациях слоя конечной толщины для пористых сред было построено в работе [71]. Учет поверхностных эффектов по модели Gurtin-Murdoch [53] для теории пористых сред рассматривалась в [34].

В настоящей работе мы рассматриваем задачу о деформациях двухслойной структуры, состоящей из тонкого слоя, лежащего на массивном основании. Слоистая система находится в состоянии равномерного прогрева. Мы полагаем, что основание является достаточно массивным и жестким для того чтобы пренебречь изгибом.

Модель поверхностной дефектности вводится с использованием вариационной формулировки для сред с сохраняющимися дислокациями [21, 75, 77]. При этом поверхностная составляющая энергии деформаций определяется в виде квадратичной формы компонент тензора свободной дисторсии (модель "поврежденной" адгезии) в отличие от модели "собственной" или "идеальной" адгезии Gurtin-Murdoch [53], где поверхностная энергия является квадратичной формой компонент тензора стесненных деформаций. Заметим, что в работах [21,76] предлагается модель адгезии, учитывающая одновременно и "идеальную" адгезию, и поврежденную адгезию, связывающую изменение поверхностных свойств с полями дефектов в объеме. Наконец отметим, что в работе [82] представлена наиболее общая вариационная модель адгезии, учитывающая, кроме того и собственную поврежденность поверхности из-за собственных поверхностных полей дефектов на поверхности, не связанных с полями дефектов в объеме тела.

2. Микро-дилатационная теория упругости с поверхностными эффектами

2.1 Формулировка микро-дилатационной теории с поверхностными эффектами в вариационной постановке

Для формулировки модели и вывода постановки краевой задачи теории упругости пористых сред в стационарном случае с учетом поверхностных эффектов воспользуемся вариационным подходом, как это было сделано в [77]. Будем использовать стандартные обозначения, введенные в работе [43]. Рассматриваем однородное тело, занимающее объем V и ограниченное поверхностью S . Кинематическими переменными модели является вектор перемещений точек среды с компонентами u_i и микро-дилатация ϕ . По своему физическому смыслу ϕ определяет изменение объемного содержания матрицы материала в рассматриваемой точке среды: $\phi = P_R - P$, где P_R, P – пористость в среде до и после деформирования, соответственно [43]. Таким образом, изменение объемного содержания пористости в среде есть $(-\phi)$. Лагранжиан модели линейной изотропной среды, в которой присутствуют микро-дилатация и поверхностные свойства, может быть представлен в следующем виде [77,105]:

$$L = A - U = A - \int_V U_V dV - \oint_S U_S dS \quad (12)$$

$$U_V(\varepsilon_{ij}, \phi, \phi_{,k}) = \frac{1}{2} (\lambda \theta^2 + 2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + 2\beta \phi \theta + \xi \phi^2 + \alpha \phi_{,k} \phi_{,k}) \quad (13)$$

$$U_S(\phi) = \frac{1}{2} \xi_S \phi^2 \quad (14)$$

Здесь $A = \int_V p_i u_i dV + \oint_S P_i u_i dS$ – работа внешних объемных сил p_i и поверхностных сил P_i на перемещениях деформируемого тела u_i , U – полная энергия деформации, U_V – объемная плотность энергии деформации и микро-деформаций, U_S – поверхностная плотность энергии микро-деформаций,

$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ – тензор бесконечно малых деформаций, $\theta = \varepsilon_{ii}$ – деформации изменения объема, λ, μ – параметры Ламе, β, ξ, α – дополнительные материальные константы микро-дилатационной теории, ξ_s – неклассический поверхностных параметр, определяющий дефектность поверхности среды [77, 105]. По повторяющимся индексам предполагается суммирование, запятая перед нижним индексом обозначает производную.

Учет дефектности на поверхности среды через введение поверхностной плотности энергии свободных деформаций $U_s(\phi)$, впервые был предложен в работе [77]. В этой работе модель (12)-(14) была представлена в обозначениях теории сред с сохраняющимися дислокациями, где в качестве кинематических переменных были использованы стесненные и свободные деформации изменения объема (микро-дилатация и свободная дилатация) частиц среды. В случае если модуль $\xi_s = 0$, то поверхностные эффекты не учитываются и модель (12)-(14) сводится к классической модели изотропной среды в теории пористых сред [43, 96]. Модель микро-дилатационной теории упругости в общем случае записывается с учетом динамических эффектов, а работа внешних сил может в общем случае также учитывать влияние нагрузок, действующих на вариациях неклассических кинематических переменных [43]. В настоящей работе такие постановки задач не рассматриваются.

2.2 Ограничения на физические константы микро-дилатационной теории упругости с поверхностными эффектами. Физический смысл констант микро-дилатационной теории

Из положительной определенности квадратичной формы объемной плотности энергии деформаций следуют ограничения на допустимые значения физических параметров модели [96]:

$$\mu > 0, \lambda + 2\mu/3 > 0, \xi > 0, \alpha > 0, \beta^2 < \xi(\lambda + 2\mu/3) \quad (15)$$

Таким образом, на параметры Ламе накладываются такие же ограничения, как и в классической теории упругости. Неклассические материальные константы

ξ и α , которые называют «собственной жесткостью» и параметром «диффузии пор» [96], должны быть положительными. Квадрат модуля β , определяющего связанные эффекты, должен быть меньше произведения классического объемного модуля $K = (\lambda + 2\mu/3)$ и неклассического модуля ξ . На основании этого соотношения для удобства вычислений можно ввести параметр связанности модели: $N = \beta^2 / (K\xi)$, $N \in [0,1)$. Можно показать, что в случае $N=1$, жесткость среды при действии всестороннего растяжения или сжатия (эффективный объемный модуль среды) становится равной нулю, поэтому это значение не может быть включено в область допустимых значений параметра связанности. Впервые введение параметра связанности было предложено в [94] в форме $N = \beta^2 / ((\lambda + 2\mu)\xi)$, однако такое представление является удобным только при решении плоских или одномерных задач, так как оно ограничивает допустимый диапазон значений этого параметра в трехмерных задачах.

В настоящей работе предполагается, что знак поверхностного модуля ξ_s может быть как положительным, так и отрицательным, но при этом должно выполняться условие, что полная энергия деформаций (сумма объемной и поверхностной частей) должна оставаться положительной.

2.3 Физические соотношения микро-дилатационной теории упругости с поверхностными дефектами

Определяющие соотношения для классического тензора напряжений, неклассических скалярной, векторной функций напряжений и поверхностных напряжений следуют из представления для объемной и поверхностной энергии деформаций:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial \varepsilon_{ij}} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \beta \phi \delta_{ij} \quad (16)$$

$$-g = \frac{\partial U_V}{\partial \phi} = \xi \phi + \beta \varepsilon_{kk} \quad (17)$$

$$h_i = \frac{\partial U_V}{\partial \phi_{,i}} = \alpha \phi_{,i} \quad (18)$$

$$g_S = \frac{\partial U_S}{\partial \phi} = \xi_S \phi \quad (19)$$

Здесь δ_{ij} - символ Кронекера.

Физический смысл неклассических напряжений (17) и (18) рассматривался, например, в работах [65, 66, 85, 96]. Введение отрицательного знака в (16) обусловлено обозначениями, предложенными в [43].

2.4 Граничные условия

Использование вариационной формулировки (16)-(19), позволяет установить энергетически согласованные определяющие соотношения и уравнения равновесия модели и записать краевую задачу, включающую полный набор естественных граничных условий. Записанная форма для объемной плотности энергии деформаций изотропной среды с учетом микро-дилатации (16) является общепринятой в рассматриваемой теории [43, 96]. Переходя к перемещениям в (16) и применяя вариационный принцип Лагранжа и интегрирование по частям, получим: $\delta L = 0$:

$$\int_V \left[((\lambda + \mu)u_{k,ki} + \mu u_{ii,kk} + \beta \phi_{,i} + p_i) \delta u_i + (\alpha \phi_{,kk} - \xi \phi - \beta u_{k,k}) \delta \phi \right] dV + \quad (20)$$

$$\oint_S \left[(P_i - (\lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) + \beta \phi \delta_{ij}) n_j) \delta u_i - (\alpha \phi_{,k} n_k + \xi_S \phi) \delta \phi \right] dS = 0$$

Отсюда получаем постановку краевой задачи в кинематических переменных микро-дилатационной теории упругости.

Уравнения равновесия:

$$(\lambda + \mu)u_{k,ki} + \mu u_{i,kk} + \beta \phi_{,i} + p_i = 0, \quad x_i \in V \quad (21)$$

$$\alpha \phi_{,kk} - \xi \phi - \beta u_{k,k} = 0, \quad x_i \in V \quad (22)$$

Граничные условия:

$$(\lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) + \beta \phi \delta_{ij}) n_j = P_i, \quad x_i \in S_\sigma \quad (23)$$

$$\alpha \varphi_{,k} n_k + \xi_S \varphi = 0, \quad x_i \in S_h \quad (24)$$

$$u_i = u_i^0, \quad x_i \in S_u \quad (25)$$

$$\phi = \phi^0, \quad x_i \in S_\phi \quad (26)$$

Здесь $S_\sigma, S_h, S_u, S_\phi$ – части поверхности тела, на которых заданы, соответственно, граничные условия относительно классических и неклассических напряжений и кинематические граничные условия относительно перемещений и микро-дилатации.

Обычно в качестве граничных условий (24) на свободной поверхности тела для функции микро-дилатации используются условия по Нейману:

$$\varphi_{,k} n_k = 0, \quad x_i \in S_h \equiv S \quad (27)$$

Как видно из выражения (24), в постановке с учетом поверхностной дефектности используются граничные условия типа Робина. Постановка задачи микро-дилатационной теории упругости в напряжениях следует из (16) - (19) и (21)-(24). Уравнения равновесия имеют вид:

$$\sigma_{ij,j} + p_i = 0, \quad x_i \in V \quad (28)$$

$$h_{k,k} + g = 0, \quad x_i \in V \quad (29)$$

Граничные условия:

$$\sigma_{ij}n_j = P_i, \quad x_i \in S_\sigma \quad (30)$$

$$h_k n_k + g_S = 0, \quad x_i \in S_h \quad (31)$$

3. Задача о чистом изгибе балки с микро-дилатацией в объёме и на поверхности среды

3.1 Решение задачи чистого изгиба балки

Аналитическое решение задачи чистого изгиба балки в рамках микро-дилатационной теории упругости было построено в работе [43] и обобщено на случай динамической постановки в [41]. Как отмечается в [41, 47] построенное решение является приближенным, так как в нем используется ряд упрощающих гипотез. Далее кратко приведем алгоритм построения решения с использованием полуобратного метода Сен-Венана, обобщенного на случай рассматриваемой теории [41]. Рассматривается балка длиной L , с прямоугольным поперечным сечением шириной $2w$ и толщиной $2h$ (Рис. 2).

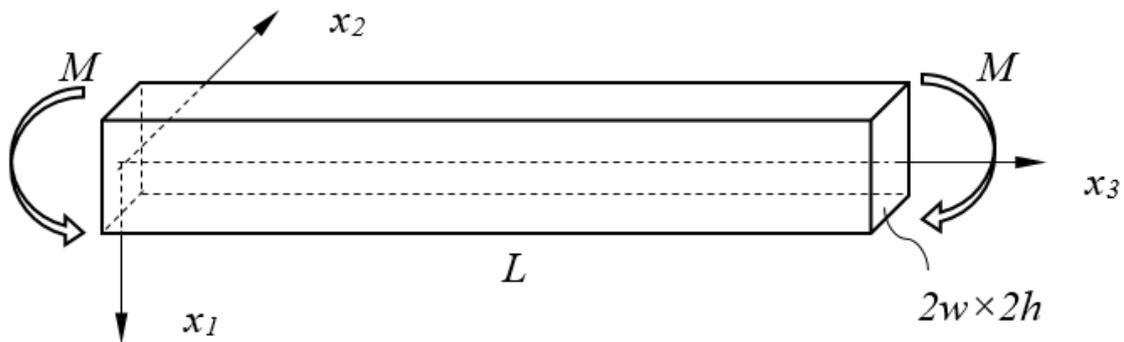


Рис. 2 Чистый изгиб балки

Объемная нагрузка отсутствует. Верхняя и нижняя поверхности балки свободны от нагрузки и на них задаются условия равенства нулю соответствующих компонент тензора напряжений и вектора неклассических напряжений:

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0, \quad x_1 = \pm h: \quad (32)$$

$$h_1 = 0 \Rightarrow \phi_{,1} = 0, \quad x_1 = \pm h: \quad (33)$$

Балка нагружается моментами M , приложенными на её торцах. Все остальные равнодействующие усилия (продольные и поперечные силы) и моменты на боковых и торцевых поверхностях балки равны нулю. Делается предположение, что торцевые и боковые поверхности балки остаются плоскими, и используются следующие граничные условия в интегральной форме относительно моментов (относительно результирующих усилий соответствующие условия выполняются автоматически вследствие вводимых далее гипотез для перемещений):

$$x_3 = 0, L: 2w \int_{-h}^{+h} x_1 \sigma_{33} dx_1 = -M \quad (34)$$

$$x_2 = \pm w: \int_{-w}^w \int_{-h}^{+h} x_1 \sigma_{22} dx_1 = 0 \quad (35)$$

Для построения решения полуобратным методом вводится предположение, что функции напряжений, свободной дилатации и, следовательно, деформаций изменяются только вдоль толщины балки (вдоль координаты x_1). Далее на основе анализа уравнений равновесия (28), (29), с учетом определяющих соотношений (16)-(19), граничных условий (30), (31) и путем интегрирования соотношений Коши дается следующее представление для искомых функций перемещений, напряжений и деформаций [43]:

$$u_1 = -C_1 \frac{x_3^2}{2} - C_2 \frac{x_2^2}{2} + \int \varepsilon_{11}(x_1) dx_1, \quad u_2 = C_2 x_1 x_2, \quad u_3 = C_1 x_1 x_3 \quad (36)$$

$$\sigma_{22}(x_1) = 2\mu(C_2 x_1 - \varepsilon_{11}(x_1)) \quad (37)$$

$$\sigma_{33}(x_1) = 2\mu(C_1 x_1 - \varepsilon_{11}(x_1)) \quad (38)$$

$$\varepsilon_{11}(x_1) = -\frac{\nu}{1-\nu}(C_1 + C_2)x_1 - \frac{\beta}{\lambda + 2\mu}\phi(x_1) \quad (39)$$

$$h_1(x_1) = \alpha\phi_1(x_1) \quad (40)$$

Остальные компоненты тензора и вектора напряжений оказываются равны нулю, а компоненты тензора деформаций определяются через перемещения (36) на основании соотношений Коши.

Таким образом, задача сводится к определению функции свободной дилатации $\phi(x_1)$ и двух констант C_1 и C_2 . Для этого решается неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение, к которому сводится неклассическое уравнение равновесия (8) с учетом (36), (39) и граничных условий (33). Находится распределение свободной дилатации по толщине балки:

$$\phi(x_1) = -RH(C_1 + C_2)\ell \left(\frac{x_1}{\ell} - \frac{\text{sh}(x_1/\ell)}{\text{ch}(h/\ell)} \right) \quad (41)$$

Здесь введены обозначения $R = \frac{2\mu\ell^2}{\alpha}$, $H = \frac{\beta}{\lambda + 2\mu}$, $\ell^2 = \frac{\alpha}{\xi - H\beta}$ [43].

Неизвестные константы C_1, C_2 определяются из граничных условий (34), (35), учитывая (36)-(41). С учетом исправления незначительных опечаток в исходной работе [43], получим:

$$C_1 = -\frac{M}{EI} \frac{1 - J(1 + \nu)}{1 - 2J}, \quad C_2 = \frac{M}{EI} \frac{\nu - J(1 + \nu)}{1 - 2J}, \quad (42)$$

$$J = RH^2 \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \left(1 - 3 \frac{\ell^3}{h^3} \left(\frac{h}{\ell} - \text{th} \left(\frac{h}{\ell} \right) \right) \right) \quad (43)$$

Здесь решение записано через модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν , которые связаны с параметрами Ламе классическими соотношениями, $I = 4bh^3/3$ – момент инерции поперечного сечения балки относительно оси x_2 .

Таким образом, выражения (36)-(43) представляют собой замкнутое приближенное аналитическое решение задачи чистого изгиба балки в дилатационной теории упругости. Независимыми параметрами построенного решения являются размеры балки L , h , w , заданные моменты M , параметры Ламе и два неклассических параметра N и ℓ , через которые могут быть определены материальные константы микро-дилатационной теории упругости. Анализ представленного аналитического решения в сопоставлении с прямым численным решением, полученным методом конечных элементов представлен ниже. Можно отметить, что в аналитическом решении напряжения $\sigma_{22}(x_1)$ и $h_1(x_1)$, которые в классическом решении отсутствуют, оказываются отличны от нуля в объеме и на внешних боковых поверхностях балки. Эти напряжения являются самоуравновешенными, и поэтому они удовлетворяют использованным интегральным граничным условиям. Отсюда, однако, следует, что в реальности, в точном решении задачи поверхности балки не должны оставаться плоскими [40].

Решение (34)-(43) выходит на классическое решение теории упругости, в том случае, если параметр связанности модели равен нулю $N=0$ или если отношение $h/\ell \rightarrow 0$. Параметр ℓ имеет размерность длины и его можно считать характерным размером микроструктуры или масштабным параметром материала. На основании анализа уравнения равновесия (24) можно показать, что с математической точки зрения параметр ℓ определяет расстояние, на котором локальные эффекты в распределении микро-дилатации вблизи границы среды затухают в e раз. Значение этого масштабного параметра может коррелировать с размером пор или со средним расстоянием между порами или с иными характеристиками микроструктуры, например, с размером зерна поликристаллического материала. Поэтому условие $h/\ell \rightarrow 0$ соответствует случаю, когда толщина балки мала. Удлинение балки при этом может быть произвольным.

Аналогичным образом может быть построено решение для задачи дилатационной теории с учетом дефектности на поверхности балки. В этом случае необходимо использовать граничное условие типа (24) вместо условия (33). Представление решения с учетом поверхностных эффектов полностью совпадает с (36)-(40) и (42), но вместо выражений (41) и (43) следует, соответственно, использовать:

$$\phi(x_1) = -RH(C_1 + C_2)\ell \left(\frac{x_1}{\ell} - \frac{\alpha + \xi_s h}{\alpha + \xi_s \ell \operatorname{th}(h/\ell)} \frac{\operatorname{sh}(x_1/\ell)}{\operatorname{ch}(h/\ell)} \right) \quad (44)$$

$$J = RH^2 \frac{1-\nu}{1+\nu} \left(1 - 3 \frac{\ell^3}{h^3} \frac{\alpha + \xi_s h}{\alpha + \xi_s \ell \operatorname{th}(h/\ell)} \left(\frac{h}{\ell} - \operatorname{th}\left(\frac{h}{\ell}\right) \right) \right) \quad (45)$$

В случае если поверхностные эффекты отсутствуют, то модуль $\xi_s = 0$ и выражения (44) и (45) совпадают с (41), (43). Записанное решение с учетом поверхностных эффектов (41)-(45) было впервые представлено в работе [13].

3.2 Эффективная жёсткость балки со свободной дилатацией частиц при чистом изгибе

На основании построенного аналитического решения можно определить эффективные характеристики жесткости балки при чистом изгибе. Для этого сопоставим НДС балки со свободной дилатацией и НДС эквивалентной ей классической балки. Приравняем перемещения центральной оси симметрии балки, найденные в рамках дилатационной и классической теории: $u_1(0,0,x_3) = u_1^{class}(0,0,x_3)$. Используя решение (36) с учетом (42) дилатационной теории и классическое решение теории упругости, получим соотношение:

$$\frac{M}{2EI} \frac{1-J(1+\nu)}{1-2J} x_3^2 = \frac{M}{2E^*I} x_3^2,$$

откуда получаем:

$$E^* = E \frac{1 - 2J}{1 - J(1 + \nu)} \quad (46)$$

Здесь E^* – эффективный модуль упругости при чистом изгибе балки со свободной дилатацией частиц.

Сделаем замечание по поводу эффективной жесткости, определяемой соотношением (46). В последнее время появилось большое количество публикаций, в которых обсуждается вопрос о зависимости эффективной жёсткости от толщины сверхтонких масштабо-зависимых стержней, в которых масштабный параметр структуры соизмерим с толщиной. Для теоретического моделирования этого эффекта привлекается градиентная теория упругости. Нетрудно видеть, что если в представленном аналитическом решении (40) устремить отношение h/ℓ к нулю, то J стремится к нулю и эффективная жесткость имеет в пределе классическое значение. Этот результат получен на основе аналитического, в определенном смысле, точного представления вдали от границ балки. Известные результаты моделирования масштабо-зависимых стержней на основе градиентных теорий и формального использования вариационных подходов, в которых эффективная изгибная жесткость возрастает по гиперболическому закону при $h/\ell \rightarrow 0$, противоречат полученной аналитической оценке. По-видимому, зависимость от масштаба в сверхтонких системах определяется не градиентным эффектом, а влиянием поверхностных эффектов [83].

Соотношение (46) также может быть получено, если приравнять решения дилатационной и классической теории для углов поворота поперечных сечений балки ($u_{1,3} = u_{1,3}^{class}$) или для продольных деформаций на верхней или нижней поверхностях балки ($\varepsilon_{33} = \varepsilon_{33}^{class}$). Указанные величины могут быть напрямую измерены в эксперименте на чистый изгиб. Вертикальные перемещения могут быть измерены только для точек, расположенных на внешней поверхности балки. Поэтому, если в эксперименте жесткость балки определяется по перемещениям

(траверсы или через дефлектометр), то представление (46), является точным только для балок малой толщины, так как предполагает измерение перемещений на упругой оси балки. Однако, уточнение формулы (46), записанное для перемещений точек балки, расположенных на её внешней поверхности, дает незначительные поправки, которыми можно пренебрегать.

Аналогичным образом можно ввести эффективный коэффициент Пуассона, определяющий поперечные деформации балки со свободной дилатацией при чистом изгибе. Для этого приравняем поперечные деформации классической и дилатирующей балки $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}^{class}$. Получим: $C_2 x_1 = x_1 v^* \frac{M}{E^* I}$.

откуда, с учетом (45), следует:

$$v^* = \frac{\nu - J(1 + \nu)}{1 - J(1 + \nu)} \quad (47)$$

Следует заметить, что с учетом ограничений на значения материальных констант дилатационной теории (15) и полученных выражений (46) и (47), значения эффективного модуля упругости могут изменяться в пределах $E^* \in (0, E]$, а эффективный коэффициент Пуассона в пределах $\nu^* \in (-1, \nu]$. Таким образом, в построенном решении сохраняются ограничения на допустимые значения характеристик жесткости среды, существующие в классической теории упругости.

В выражения (46) и (47) в явном виде входит отношение толщины балки к масштабному параметру материала h/ℓ . Таким образом, аналитическое решение прогнозирует возникновение масштабных эффектов: характеристики жесткости балки со свободной дилатацией частиц будут зависеть от соотношения толщины и характерного размера микроструктуры материала балки. Масштабные эффекты при изменении ширины балки или её длины не возникают. Представленные выражения (46) и (47) также справедливы и для аналитического решения, построенного с учетом поверхностных эффектов, если для вычисления параметра J использовать выражение (45). В этом случае в решении возникают масштабные

эффекты, связанные не только со свободной дилатацией в объеме балки, но и с влиянием поверхностных свойств.

3.3 Методика построения численного решения

При построении численного решения задачи чистого изгиба учитывается симметрия и рассматривается одна четвертая часть балки, представленной на рис.

2. Таким образом, размеры рассматриваемой модели составляют $L/2 \times w \times 2h$ (Рис. 3).

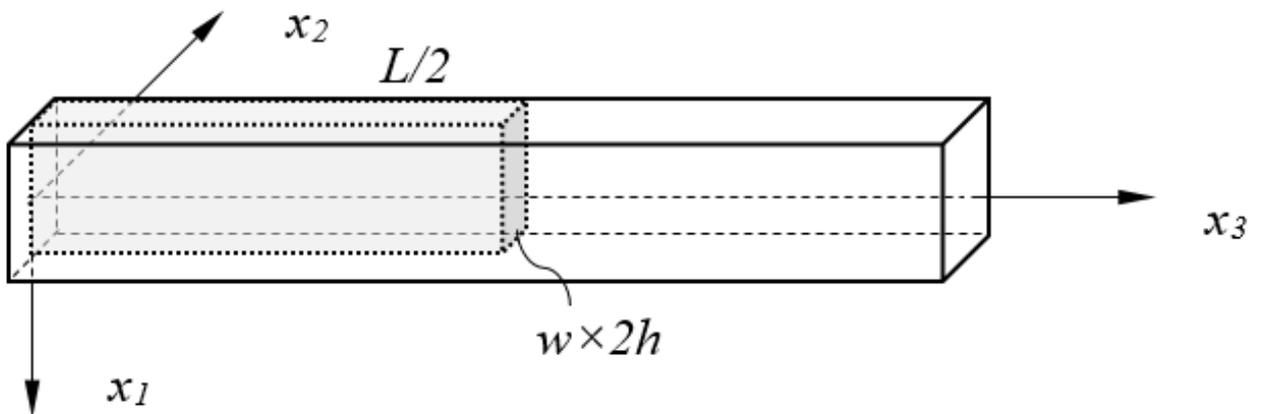


Рис. 3 К численному решению задачи чистого изгиба балки

В качестве нагрузки задается линейное распределение нормальных напряжений на торце балки:

$$x_3 = 0: \sigma_{33} = -\frac{M}{I} x_1 \quad (48)$$

Такое задание нагрузки эквивалентно граничному условию (34). На другом торце балки задается условие симметрии:

$$x_3 = L/2: u_3 = 0, \phi_3 = 0 \quad (49)$$

Второе условие симметрии ставится на поверхности $x_2 = 0$ (центральное вертикальное поперечное сечение балки):

$$x_2 = 0: u_2 = 0, \phi_2 = 0 \quad (50)$$

Условия на остальных свободных поверхностях балки S задаются в явном виде, в отличие от аналитического решения, где граничные условия формулировались относительно интегральных характеристик – усилий и моментов. Для этого соответствующие компоненты тензора классических напряжений и вектора неклассических напряжений на всех поверхностях балки принимаются равными нулю:

$$\sigma_{ij}n_j = 0, \quad x_i \in S_\sigma \quad (ij \neq 33) \quad (51)$$

$$h_j n_j + g_s = 0, \quad x_i \in S_h \quad (52)$$

Здесь n_j – компоненты внешней единичной нормали к поверхностям балки S_σ и S_h , которые включают в себя боковую грань балки $x_2 = w$, верхнюю и нижнюю поверхности $x_1 = \pm h$ и торцевую поверхность $x_3 = 0$. При этом учитывается, что граничное условие для напряжений σ_{33} было определено в (48).

В рассматриваемой постановке для исключения смещений балки, как жесткого целого, достаточно запретить вертикальные перемещения единственной точки балки. В построенном далее решении фиксировалась точка балки, расположенная в начале координат. Повороты, как жесткого целого, исключаются вследствие заданных условий симметрии (49) и (50).

Численное решение задачи строится в трехмерной постановке методом конечных элементов с использованием системы FlexPDE. Используются тетраэдральные элементы второго порядка. Решение строится с использованием метода Ланцоша. Рассматриваемая краевая задача, по сути, полностью соответствует исходному варианту дилатационной модели (21)-(26). Решение строится, в том числе, и для балки с поверхностной дефектностью. На основании численного решения определяются НДС, перемещения точек и эффективные характеристики жесткости балки. Эффективный модуль упругости будем определять по перемещениям центральной точки на нижней поверхности балки,

так как именно это значение может быть измерено экспериментально. Для вычислений будем использовать стандартную формулу балочной теории, пренебрегая деформациями поперечного сечения:

$$E^* = \frac{ML^2}{2ID} \quad (53)$$

Здесь $D = u_1(-h, 0, L/2)$ – перемещения центральной точки на нижней поверхности балки.

Эффективный коэффициент Пуассона балки будем определять через отношение продольных и поперечных деформаций в той же точке:

$$\nu^* = - \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{33}} \Big|_{x_1=-h, x_2=0, x_3=L/2} \quad (54)$$

3.4 Результаты вычислений

В настоящем разделе приведен анализ неклассических эффектов, возникающих в численном решении задачи чистого изгиба балки в рамках дилатационной теории и проводится сопоставление этого решения с аналитическим, представленным в разделах 3.3 и 3.4. Решение строится для гипотетического тестового материала с коэффициентом Пуассона, равным 0,3. Величина модуля Юнга материала оказывается несущественной, так как все представленные результаты нормируются относительно классического решения. В численном решении величина модуля Юнга задавалась равной 1000 МПа. Соотношения размеров сторон балки составляют $w/h = 2$, $L/h = 20$. Параметр связанности модели N варьируется в пределах от 0 до 0.99. Масштабный параметр модели варьируется в пределах $10^{-4}h \leq \ell \leq 10^{-1}h$. Для построения решений в перемещениях задается порядок точности до 10^{-6} . При этом оказывается необходимым строить достаточно мелкую конечно-элементную сетку (см. **Рис. 4**).

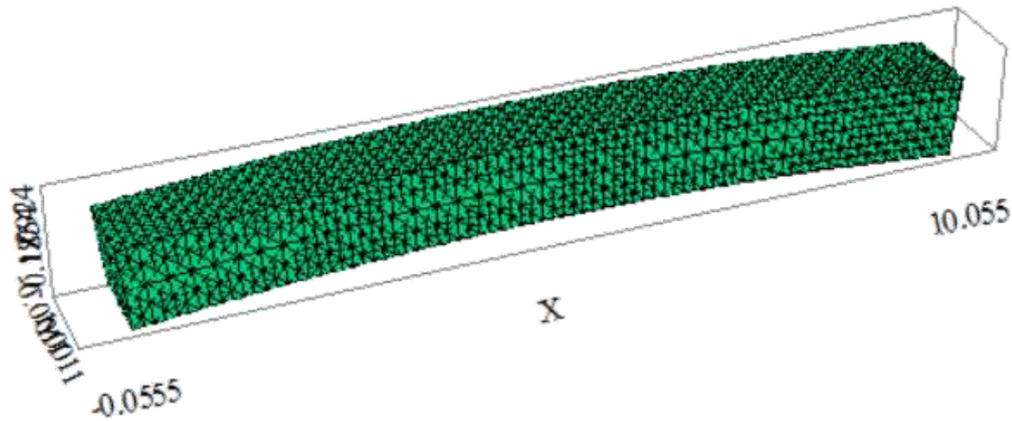


Рис. 4 Пример конечно-элементной сетки, построенной для решения задачи чистого изгиба балки

3.4.1 Трехмерное напряженное состояние дилатирующей балки при чистом изгибе

При чистом изгибе балки со свободной дилатацией частиц в ней реализуется трехмерное напряженное состояние, при котором отличными от нуля оказываются все компоненты тензора классических напряжений и вектора неклассических напряжений. На **Рис. 5** показан характер распределения напряжений по поперечному сечению балки. На рисунках **Рис. 6 - Рис. 8** представлено распределение напряжений по поперечному сечению пористой балки при чистом изгибе. На этих рисунках точки соответствуют численному решению в узлах сетки, а сплошные линии – это построенная аппроксимация. Балка имеет единичную толщину, изгибающий момент составляет $M = \sigma_0 I$, $\sigma_0 = 1 \text{ МПа}$, масштабный параметр $\ell = 10^{-2} h$. Показано, что в численном решении все граничные условия по напряжениям выполняются точно, и соответствующие компоненты напряжений на поверхности балки обнуляются. Все возникающие неклассические напряжения (фактически это все компоненты тензора σ_{ij} , за исключением σ_{33} , и все компоненты h_j) оказываются самоуравновешенными. По амплитуде неклассические напряжения оказываются очень малы для широкого диапазона значений параметров модели. На **Рис. 6 - Рис. 8** представлены

результаты для тестового материала с высоким параметром связанности $N=0.9$, но даже в этом случае оказывается, что по отношению к осевым напряжениям σ_{33} , напряжения в трансверсальных направлениях σ_{11} и σ_{22} имеют порядок 10^{-2} , а все касательные напряжения имеют порядок 10^{-4} , поэтому они вычисляются с большой погрешностью (см. рис. 6). Неклассические напряжения h_2 и h_3 по отношению к напряжениям h_1 , присутствующим в аналитическом решении, имеют порядок 10^{-2} . Из-за такого разброса значений напряжений оказывается достаточно сложным получить хорошее качество рисунков. Представленное рис. 4 и 5 решение получено в результате двухчасового расчета. Заметим, что граничные эффекты в распределении классических напряжений σ_{22} сводятся к тому, что на поверхности балки эти напряжения обращаются в ноль, а вдали от поверхности выходят на аналитическое решение.

Таким образом, на **Рис. 6 - Рис. 8** наглядно продемонстрировано выполнение принципа Сен-Венана в микро-дилатационной теории упругости: граничные условия, сформулированные относительно напряжений в численном решении или в интегральной форме в аналитическом решении, вызывают одинаковое напряженное состояние вдали от границ.

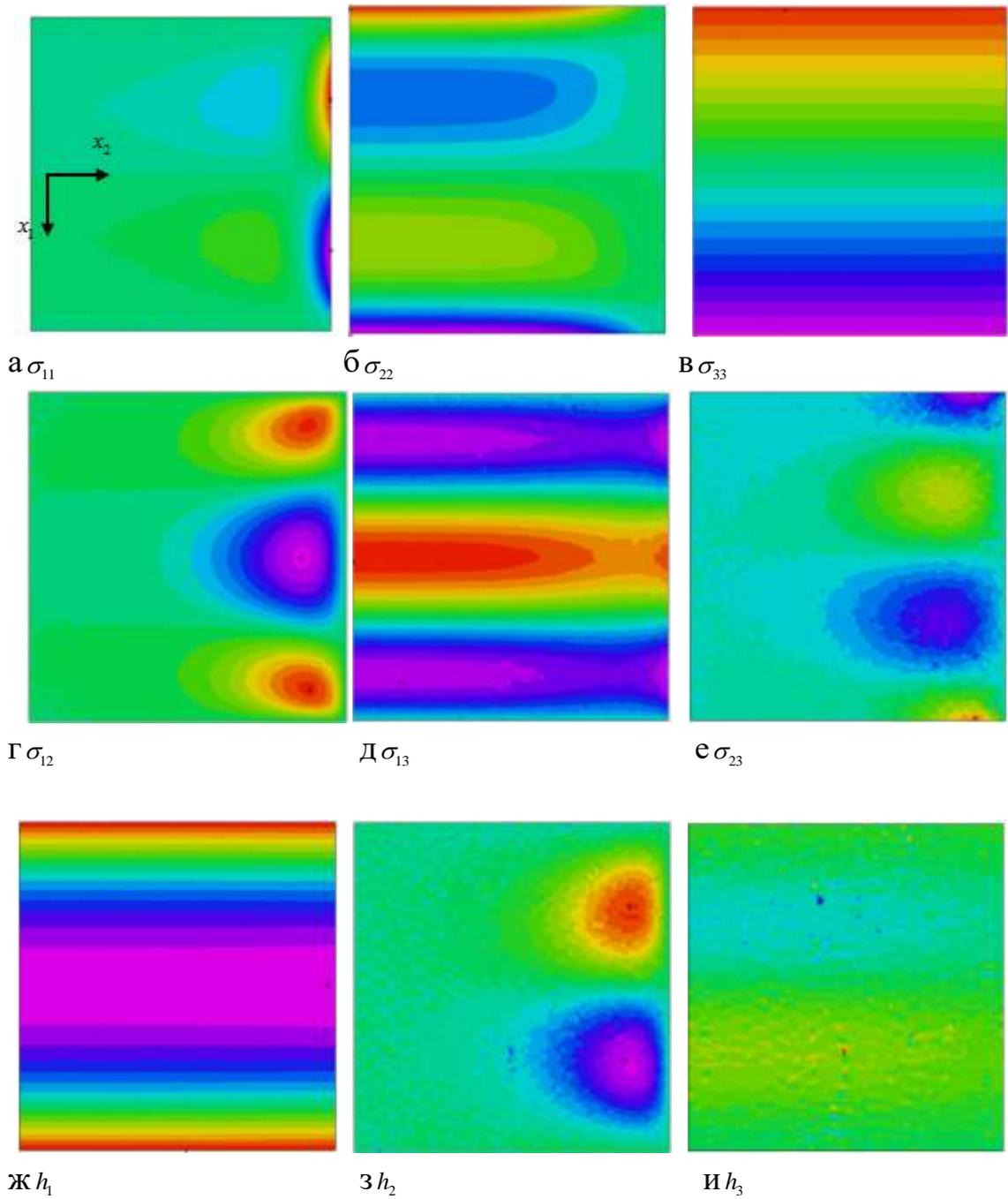


Рис. 5 Характер распределения напряжений по поперечному сечению балки (представлена половина поперечного сечения $0 \leq x_2 \leq w$), $N=0.9$, $\ell/h=0.9$. а - σ_{11} , б - σ_{22} , в - σ_{33} , г - σ_{12} , д - σ_{13} , е - σ_{23} , ж - h_1 , з - h_2 , и - h_3

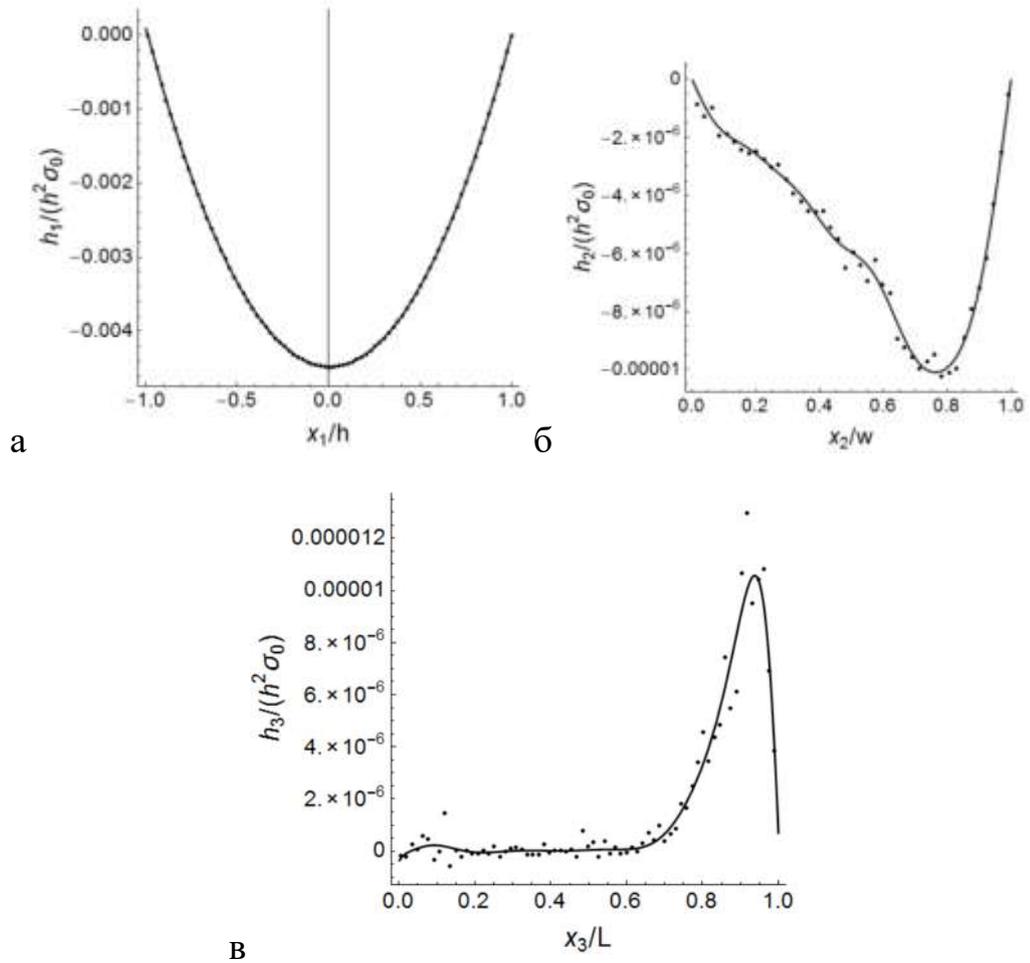


Рис. 8 Распределение неклассических напряжений по сечению балки, $N=0.9$, $\ell/h=0.9$, а - $h_1/(h^2 \sigma_0)$, б - $h_2/(h^2 \sigma_0)$, в - $h_3/(h^2 \sigma_0)$

Для напряжений σ_{33} , действующих вдоль оси балки, на **Рис. 9** представлены результаты аналитического и численного решения в центральном поперечном сечении для различных параметров связанности модели. Решения сходятся с высокой точностью. Продольные напряжения на верхней и нижней поверхностях балки в микро-дилатационной теории растут, однако этот эффект оказывается значительным только для больших параметров связанности модели. В численном решении при приближении к торцам балки продольные напряжения снижаются и выходят на заданное линейное распределение. Таким образом, аналитическое решение позволяет оценить максимальные осевые напряжения, действующие в балке, которые являются наиболее существенными и определяют прочностные характеристики балки.

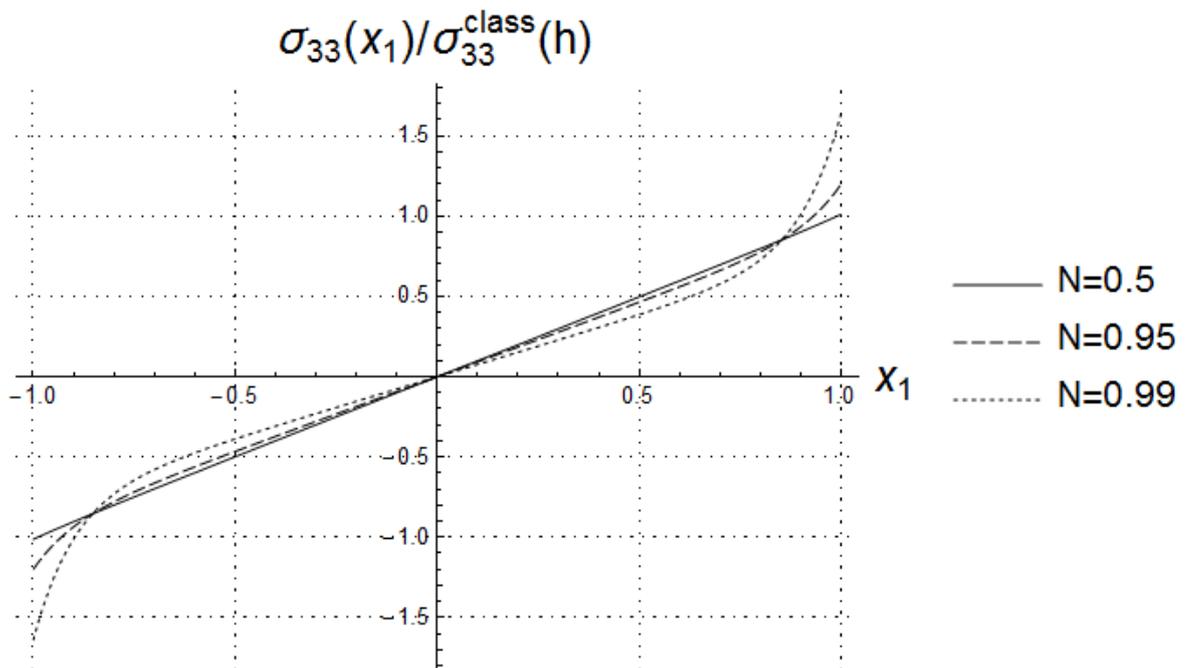


Рис. 9 Распределение продольных напряжений σ_{33} по сечению балки, $\ell = 10^{-2}h$

3.4.2 Деформация сечений и внешних поверхностей балки

В отличие от классической теории упругости и в отличие от аналитического решения (36) в численном решении происходит искривление боковых и торцевых поверхностей балки. Возникает деформация сечений – отклонение от линейного закона распределения перемещений. По сравнению с вертикальными перемещениями балки деформация её сечений оказывается крайне малой величиной даже при высоких значениях параметра связанности. На **Рис. 10** представлен характер искривления центрального поперечного сечения балки для исходных данных, приведенных в предыдущей главе. Деформации увеличены в 50 раз. На **Рис. 10 Б** дополнительно задано 10-кратное увеличение деформации.

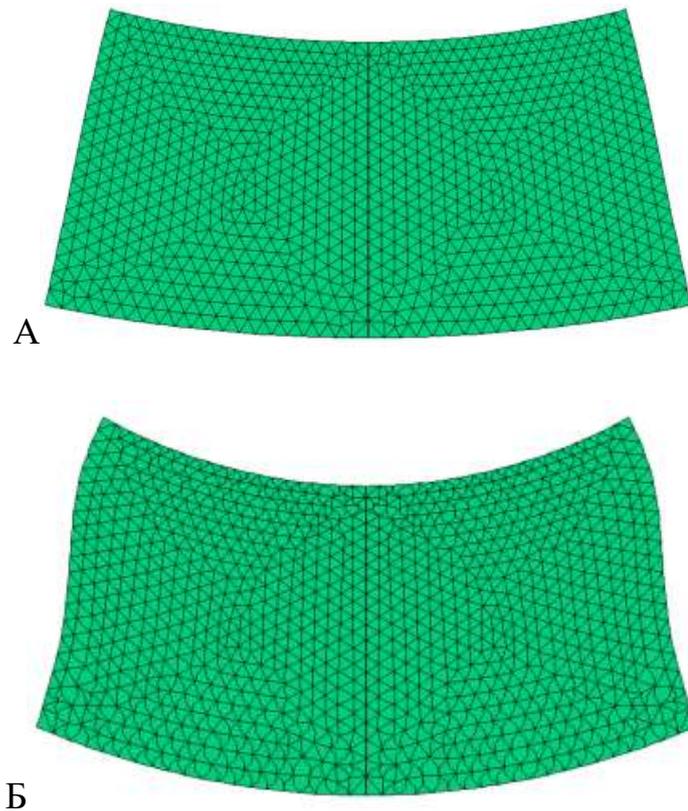


Рис. 10 Деформации поперечного сечения балки со свободной дилатацией с масштабом 50 (А) и с дополнительным увеличением искривления поверхностей в 10 раз (Б), $N=0.9$, $\ell/h=0.9$

3.4.3 Эффективные характеристики жёсткости балки

На **Рис. 11-Рис. 12** представлено сопоставление аналитического решения (46), (47) и численного решения (53), (54) для зависимости эффективного модуля упругости и коэффициента Пуассона балки от параметра связанности и толщины балки. Видно, что приближенные аналитические формулы позволяют получать точные прогнозы модуля упругости для всего диапазона значений неклассических параметров модели. Для коэффициента Пуассона погрешность становится больше, что связано, по всей видимости, с накоплением ошибки при дифференцировании при вычислении деформаций в численном решении. В аналитическом и численном решениях имеет место масштабный эффект: модуль упругости и коэффициент Пуассона более толстых балок оказываются ниже, по сравнению с характеристиками тонких балок. При больших параметрах

связанности модель описывает поведение материалов с отрицательным коэффициентом Пуассона, которые одновременно характеризуются и низкой жесткостью. Таким классом материалов могут являться высокопористые или вспененные материалы-ауксетики [37, 72, 110].

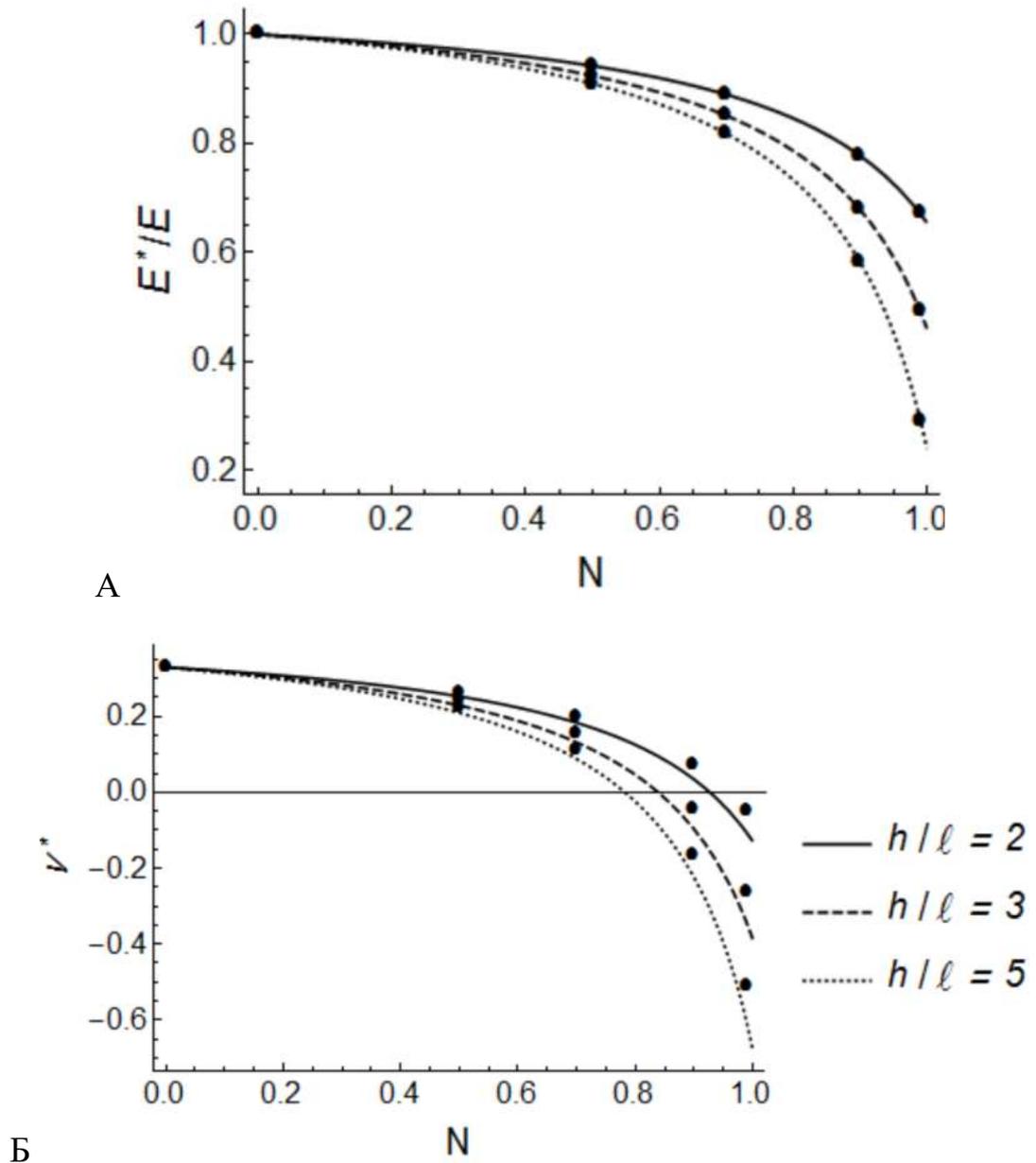


Рис. 11 Влияние параметра связанности на эффективный модуль упругости (А) и коэффициент Пуассона (Б) балки со свободной дилатацией. Сопоставление аналитического (линии) и численного (точки) решений.

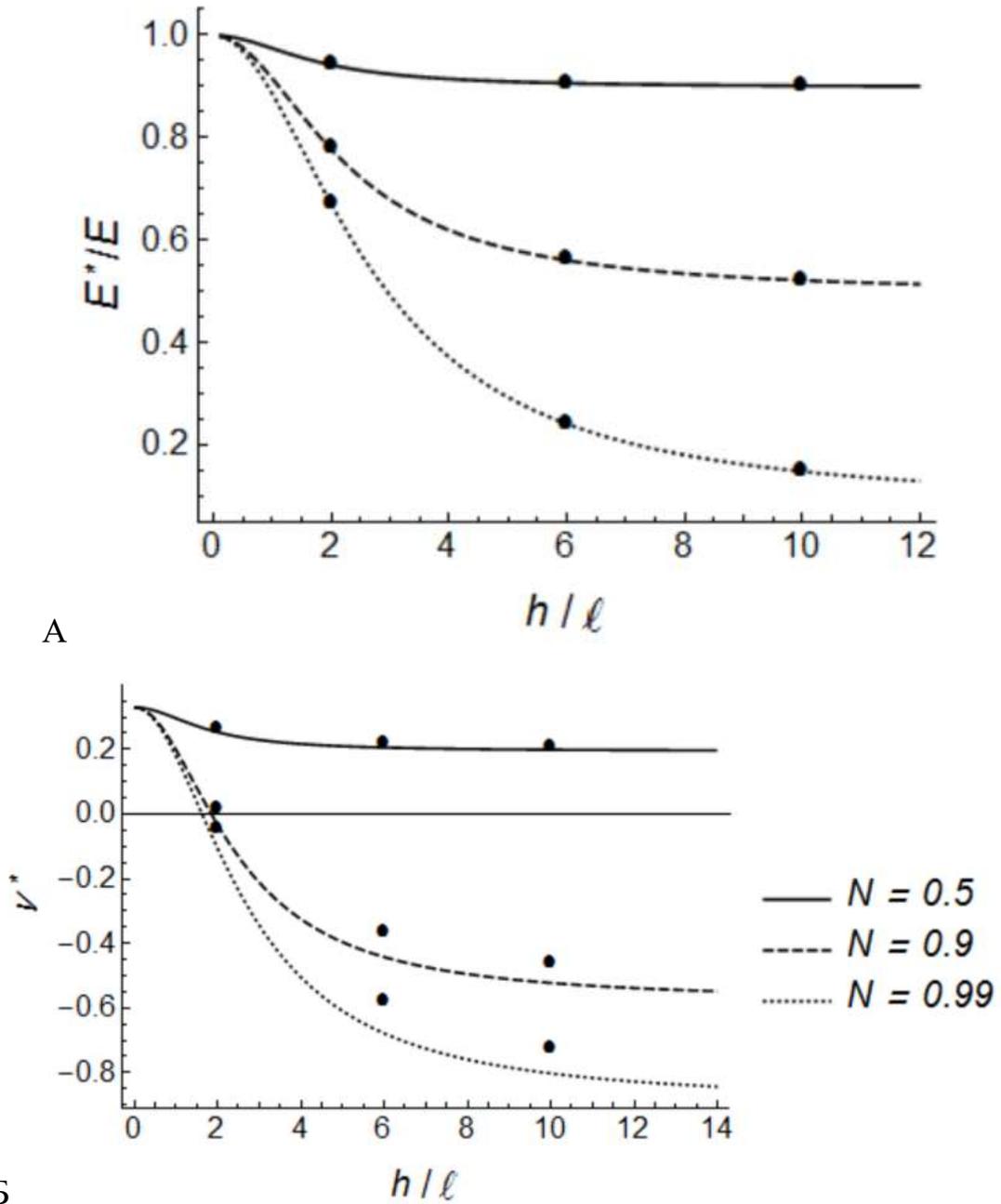


Рис. 12 Влияние толщины балки на её эффективный модуль упругости (А) и коэффициент Пуассона (Б). Сопоставление аналитического (линии) и численного (точки) решений

Можно показать, что аналитическая формула (46) достаточно хорошо прогнозирует влияние неклассических параметров на жесткость балки не только в задаче чистого изгиба, но и в других экспериментах на изгиб (трехточечный, четырехточечный, консольный). Поэтому испытания на изгиб могут применяться для идентификации неклассических параметров модели.

3.4.4 Влияние поверхностных эффектов

Решение с учетом поверхностных эффектов позволяет учесть дополнительное неклассическое изменение напряженно-деформированного состояния и эффективной жесткости балки. На **Рис. 13** представлено распределение продольных и поперечных напряжений по сечению балки при действии на её границах поверхностных напряжений. Здесь же показано, что, в отличие от решения без поверхностных эффектов, микро-дилатация (или пористость) изменяются неравномерно не только по толщине, но и по ширине балки. На **Рис. 14** представлено сопоставление аналитического и численного решений для зависимости эффективного модуля упругости балки от значения поверхностного модуля ξ_s . В случае положительных значений этого модуля эффективная жесткость увеличивается, а при отрицательных значениях – снижается. Зависимость эффективного модуля от толщины балки представлена на **Рис. 15**. Здесь показано, что при отрицательных значениях поверхностного модуля появляется возможность моделировать отрицательный масштабный эффект в изменении жесткости пористой балки. Отличие решений (точки и сплошные линии на **Рис. 15**) связано с тем, что в численном решении учитывается наличие дефектности на всех поверхностях балки, а в аналитическом – только на верхней и нижней.

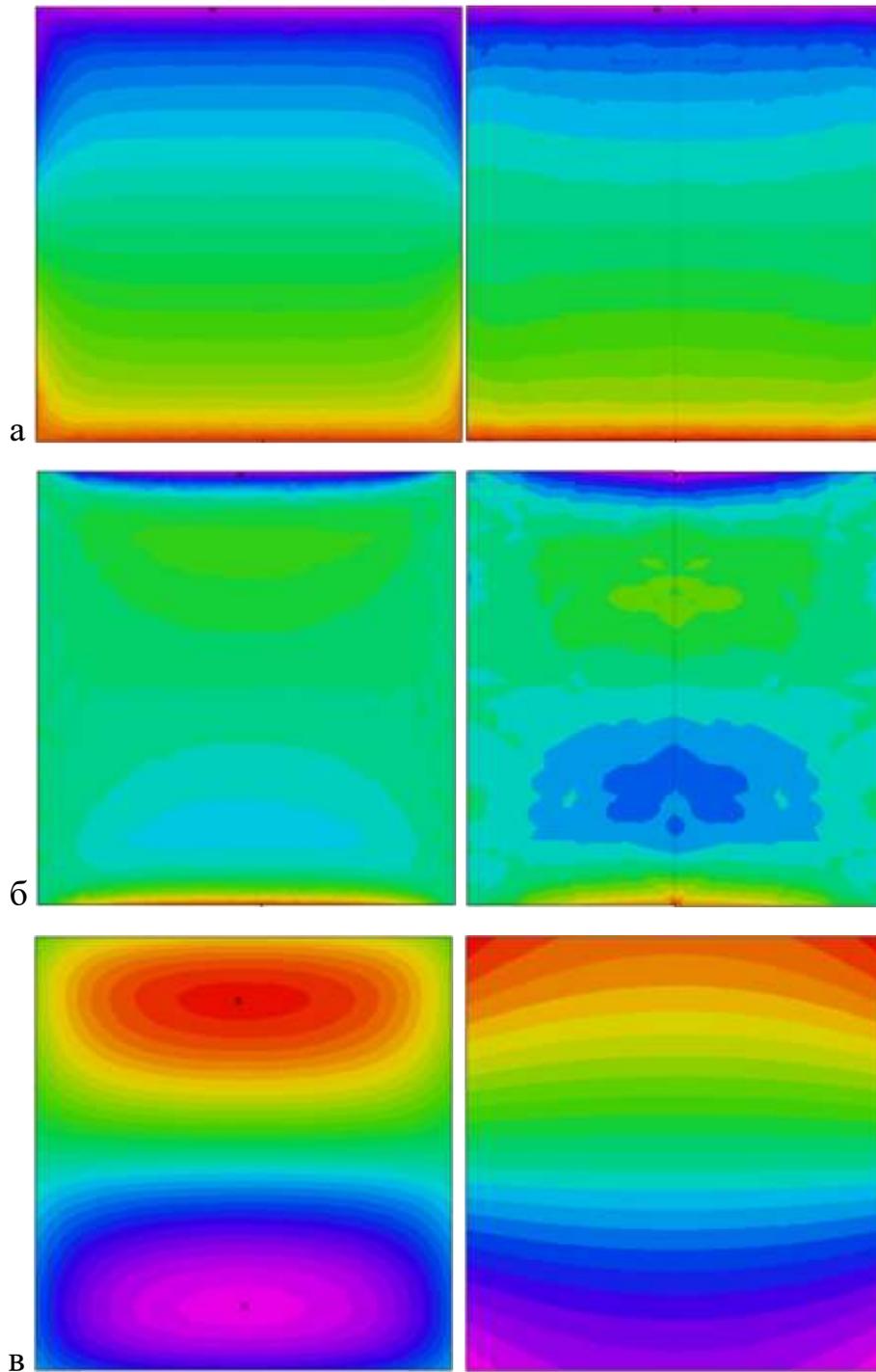


Рис. 13 Распределения осевых (а) и поперечных (б) напряжений и микро-дилатации (в) по поперечному сечению балки при построении численного решения с учетом дефектности поверхности, рисунки слева: $\xi_s > 0$, рисунки справа: $\xi_s < 0$, рисунки справа.

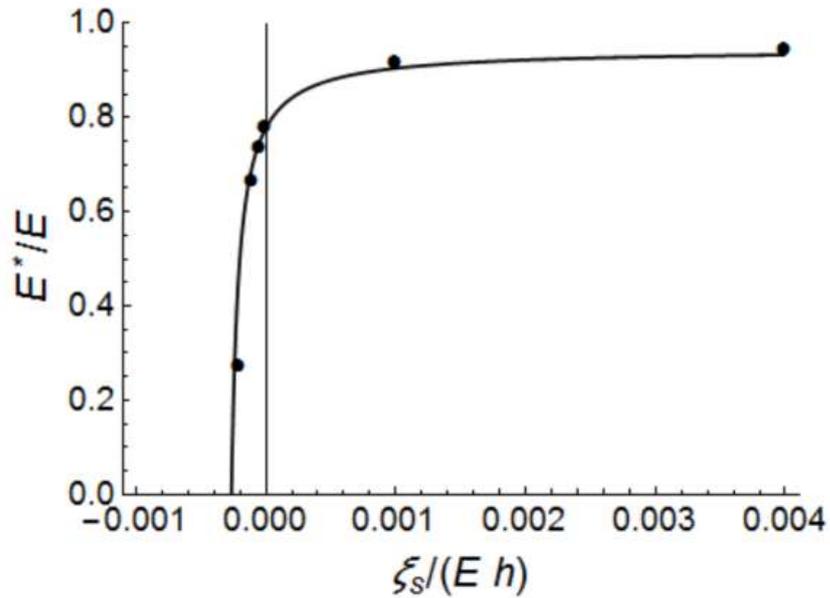


Рис. 14 Влияние поверхностного модуля ξ_s на эффективный модуль упругости балки. Сопоставление аналитического и численного решений. $N=0.9$, $\ell = h/2$

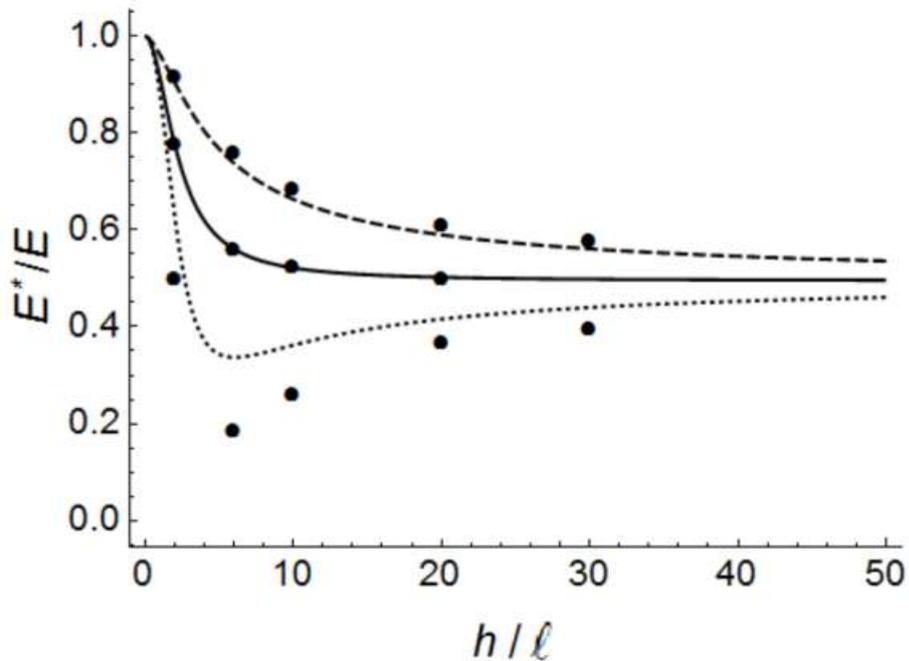


Рис. 15 Влияние толщины на эффективный модуль упругости балки со свободной дилатацией и дефектностью поверхности. Сопоставление аналитического и численного решений. $N=0.9$, сплошная линия $\xi_s = 0$, штриховая $\xi_s = 1$, н/мм
пунктир $\xi_s = -0.15$, н/мм

4. Численное решение различных задач изгиба в теории пористых сред с микро-дилатацией и поверхностными эффектами

4.1 Одноосное растяжение. Аналитическое решение

Известно, что в теории пористых сред в случае однородной деформации, масштабных эффектов не возникает. Поэтому можно ввести эффективные характеристики жесткости материала со свободной дилатацией. Решение задачи однородных деформаций и, в частности, одноосного растяжения изотропной пористой балки рассматривалось в работах [43, 47]. Предположим, что в среде отличными от нуля являются только напряжения $\sigma_{11} = \sigma_0$. Тогда из физических соотношений (16)-(19) компоненты тензора деформаций имеют вид:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_0}{E} - \frac{\beta}{3K} \phi, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} \sigma_0 - \frac{\beta}{3K} \phi \quad (55)$$

Подставляя деформации в неклассические уравнения равновесия (18) и учитывая отсутствие нагрузки и поверхностных эффектов на границах среды, найдем распределение пористости:

$$\phi = -\frac{\beta}{3(K\xi - \beta^2)} \sigma_0 \quad (56)$$

Используя соотношения (56) найдем деформацию ε_{11} :

$$\varepsilon_{11} = \frac{K\xi - 2(1+\nu)\beta^2/3}{E(K\xi - \beta^2)} \sigma_0 \quad (57)$$

Введем эффективный модуль упругости среды при одноосном растяжении E_T , как отношение заданных напряжений $\sigma_{11} = \sigma_0$ к возникающим деформациям ε_{11} . С учетом обозначения для параметра связанности N , получим:

$$E_T = \sigma_{11}/\varepsilon_{11} = \frac{E(K\xi - \beta^2)}{K\xi - 2(1+\nu)\beta^2/3} = E \frac{1-N}{1-2(1+\nu)N/3} \quad (58)$$

Из выражения (58) видно, что жесткость балки со свободной дилатацией частиц при одноосном растяжении не зависит от её размеров, а определяется

только классическими характеристиками упругости и параметром связанности. Исходя из допустимых значений параметра связанности N , значение этого эффективного модуля в зависимости от параметра связанности может изменяться в пределах $E_T \in (0, E]$. Аналогичное решение для случая однородной деформации было использовано в недавней работе [109].

4.2 Методика построения численных решений в задачах изгиба

Представленные далее численные решения задач построены в трехмерной постановке с использованием метода конечных элементов и программного пакета FlexPDE. В расчетах используются тетраэдральные элементы второго порядка. Решение строится в кинематических переменных (перемещения и микродилатация) с использованием метода Ланцоша. В объеме балки решалась связанная система уравнений равновесия теории пористых сред (21)-(22), а на поверхности задавались естественные граничные условия относительно компонент тензора классических напряжений и вектора неклассических напряжений типа (23), (27) или модифицированные граничные условия типа (24).

В задачах 4-точечного, 3-точечного и консольного изгиба балка нагружается силой P , действующей в вертикальном направлении и распределенной на соответствующих площадках фиксированной малой ширины 2δ , не зависящей от величины нагрузки. Таким образом, мы заменяем воздействие на балку со стороны опор нагрузками и не рассматриваем контактных задач.

4.3 Чистый изгиб

Задача чистого изгиба балки была подробно рассмотрена в главе 3. Схема задачи чистого изгиба показана на **Рис. 16**.

$$x_3 = L/2: \quad u_3 = 0, \quad \phi_3 = 0 \quad (59)$$

$$x_2 = 0: \quad u_2 = 0, \quad \phi_2 = 0 \quad (60)$$

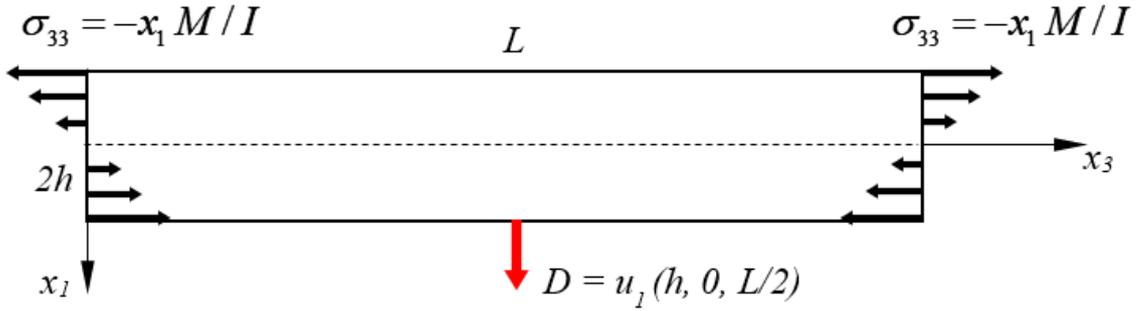


Рис. 16 Схема чистого изгиба балки

4.4 Четырёхточечный изгиб

Схема 4-точечного изгиба представлена на **Рис. 17**. Аналогично задаче чистого изгиба, в расчетах моделируется одна четвертая часть балки (**Рис. 3**). При решении используются условия симметрии (59) и (60). Для исключения смещений балки в вертикальном направлении, как жесткого целого, фиксируется точка в начале координат. В задаче 4-точечного изгиба для рассматриваемой одной четверти балки задается следующая система граничных условий:

$$0 \leq x_3 \leq 2\delta, \quad x_1 = h: \quad \sigma_{11} = -P/(4\delta w) \quad (61)$$

$$L/3 - \delta \leq x_3 \leq L/3 + \delta, \quad x_1 = -h: \quad \sigma_{11} = P/(4\delta w) \quad (62)$$

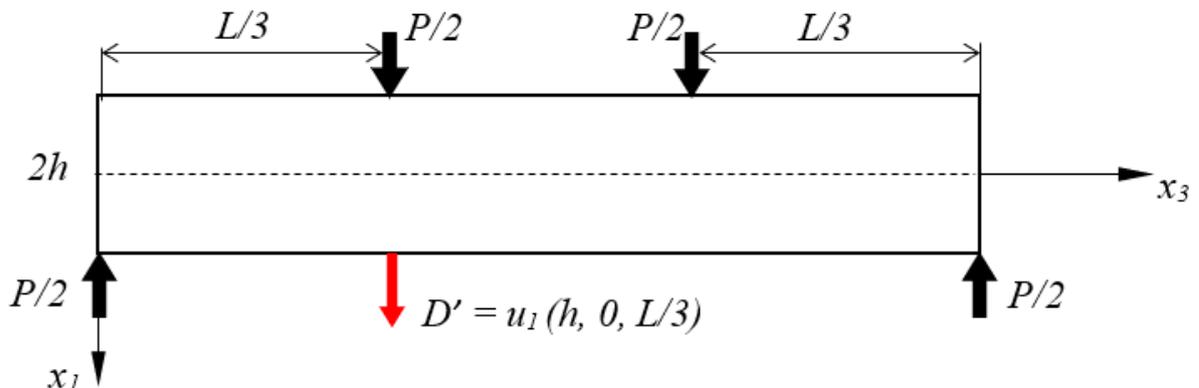


Рис. 17 Схема четырёхточечного изгиба балки

4.5 Трёхточечный изгиб

Схема 3-точечного изгиба представлена на **Рис. 18**. В расчетах также моделируется одна четвертая часть балки (**Рис. 3**), используются условия симметрии (52) и (53) и фиксируется одна точка балки, расположенная в начале координат. Система граничных условий в задаче 3-точечного изгиба с учетом симметрии следующая:

$$0 \leq x_3 \leq 2\delta, x_1 = h: \sigma_{11} = -P / (4\delta w) \quad (63)$$

$$L/2 - \delta \leq x_3 \leq L/2, x_1 = -h: \sigma_{11} = P / (2\delta w) \quad (64)$$

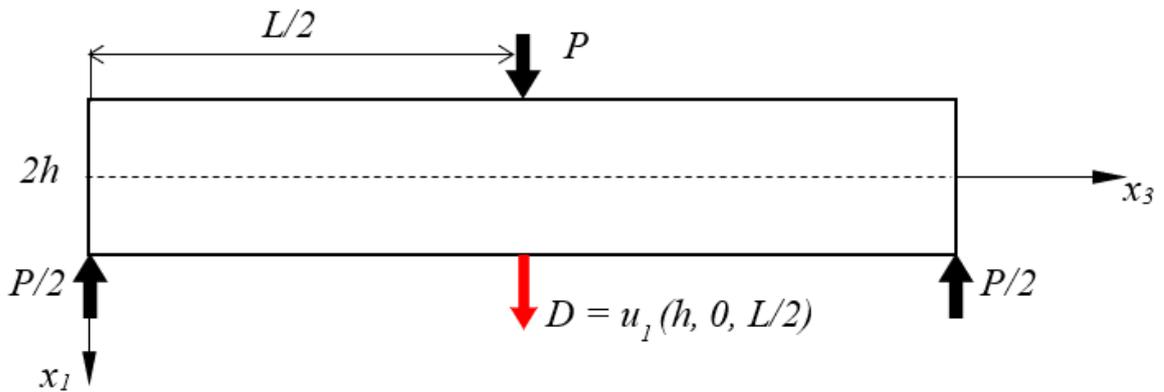


Рис. 18 Схема трёхточечного изгиба балки

4.6 Консольный изгиб

Схема консольного изгиба балки представлена на **Рис. 19** Схема консольного изгиба балки. В расчетах рассматривается половина балки с размерами $L \times w \times 2h$ и используются условия только относительно продольной плоскости (60). Один конец балки фиксируется:

$$x_3 = 0, u_1 = u_2 = u_3 = 0 \quad (65)$$

На другом конце балки задается вертикально действующая нагрузка:

$$L - 2\delta \leq x_3 \leq L, x_1 = -h: \sigma_{11} = -P / (2\delta w) \quad (66)$$

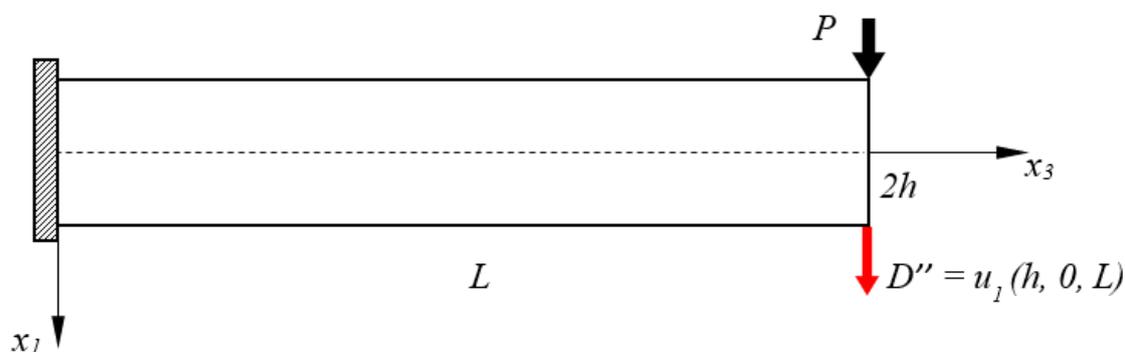


Рис. 19 Схема консольного изгиба балки

4.7 Определение эффективного изгибного модуля балки на основании конечно-элементного моделирования

Решение для задачи чистого изгиба балки было дано ранее в пункте 3.3.

$$E_{PB,num} = \frac{ML^2}{2ID} \quad (67)$$

Для определения эффективного изгибного модуля балки при численном решении задачи трехточечного изгиба будем использовать стандартное выражение, также следующее из классической балочной теории:

$$E_{3P} = \frac{L^3 P}{48 I D} \quad (68)$$

При четырехточечном изгибе:

$$E_{4P} = \frac{5L^3 P}{324 I D'} \quad (69)$$

Здесь $D' = u_1(-h, 0, L/3)$ – перемещения точки на поверхности на балки в области действия нагрузки (**Рис. 17**).

При консольном изгибе:

$$E_{CB} = \frac{PL^3}{3 I D''} \quad (70)$$

Здесь $D'' = u_1(-h, 0, L)$ – перемещения точки на нижней поверхности на конце консольной балки.

Используя формулы балочной теории (67)-(70) мы делаем обычное допущение, которое используется при проведении экспериментов на изгиб. Мы пренебрегаем эффектом поперечной деформации балки, вычисляя перемещения на нижней поверхности, то есть там, где они могут быть измерены с использованием стандартного испытательного оборудования. Как и в классических задачах сопротивления материалов, сделанное допущение не вносит значительных погрешностей в результаты вычислений при рассмотрении балок с достаточно большим соотношением длины к толщине.

4.8 Результаты вычислений

Решение строится для гипотетического тестового материала с модулем Юнга $E=1000$ МПа и коэффициентом Пуассона $\nu=0.3$. Эти константы характеризуют жесткость материала в отсутствие эффектов -дилатации. В расчетах будем определять значения эффективных модулей упругости балки, нормированные относительно её модуля Юнга:

$$\bar{E}_T = E_T / E \quad , \quad \bar{E}_{PB} = E_{PB} / E \quad , \quad \bar{E}_{3P} = E_{3P} / E \quad , \quad \bar{E}_{4P} = E_{4P} / E \quad , \quad (71)$$

$$\bar{E}_{CB} = E_{CB} / E$$

Соотношения размеров балки и масштабного параметра материала принимаются равными $h/\ell=1$, $w/\ell=2$ и $L/\ell=20$, если иное не оговаривается. Первоначально, примем поверхностный параметр модели ξ_s равным нулю. В результате численного моделирования определялось напряженно-деформированное состояние, перемещения и изменение пористости в балках при изгибе. На рисунке 19 представлен характерный вид, применяемых конечно-элементных моделей и деформированное состояние балок в различных типах испытаний. Нагрузки изображены схематично. В некоторых случаях для достижения приемлемой сходимости вычислительных алгоритмов необходимо было использовать более густую конечно-элементную сетку, чем представлена на **Рис. 20**.

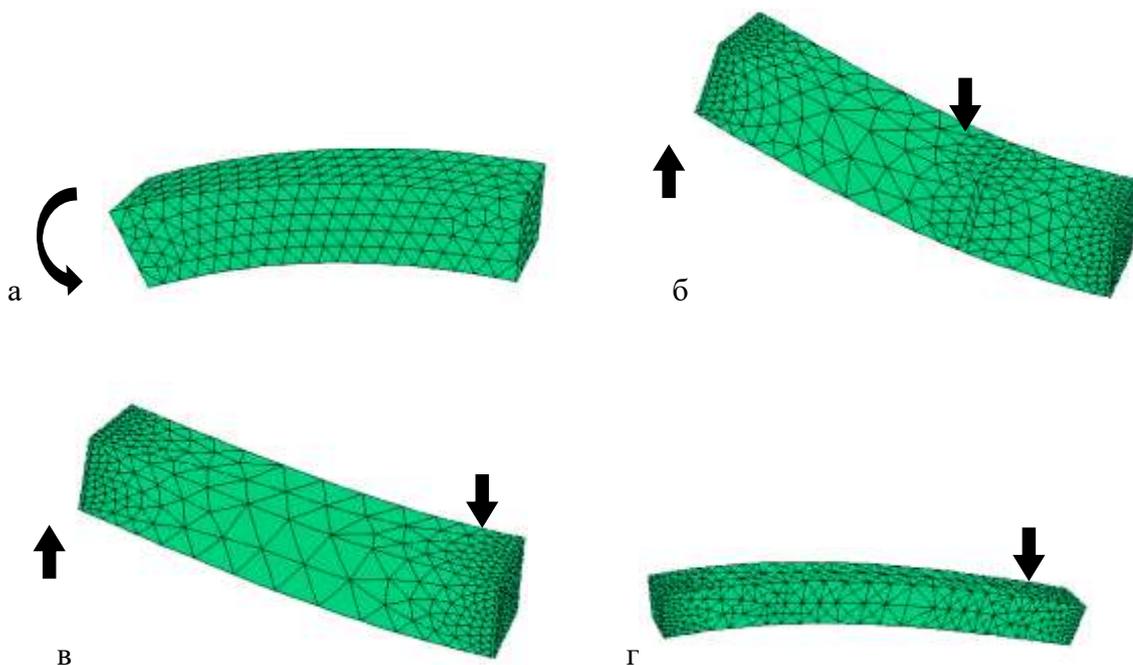


Рис. 20 Деформированное состояние балок в задаче чистого (а), четырехточечного (б), трехточечного (в) и консольного (г) изгиба.

Деформированное состояние показано с увеличенным масштабом. В расчетах учитывались условия симметрии поэтому на рисунках (а)-(в) представлена одна четвертая часть балки, а на рисунке (г) – половина балки. Области балки, на которых задавались нагрузки или закрепление выделены в виде отдельных сегментов с улучшенным разбиением на конечные элементы.

4.9 Результаты численного моделирования эффективного изгибный модуля и напряжённо-деформированного состояния балки в различных задачах изгиба в микро-дилатационной теории

В численных решениях задач о четырех/трехточечном и консольном изгибе балки возникают аналогичные неклассические эффекты в напряженном состоянии, которые прогнозирует аналитическое и численное решение для задачи чистого изгиба и также возникают масштабные эффекты. На основании серии вычислений было проведено сопоставление зависимости эффективного модуля упругости балок от их толщины, в различных типах испытаний на изгиб (**Рис. 21**). Из этого рисунка видно, что аналитическое решение (46) позволяет достаточно

точно прогнозировать эффективный изгибных модуль упругости, который может быть идентифицирован в любых испытаниях на изгиб. Для задачи консольного изгиба балки отдельно исследовано влияние длины балки на значение эффективной жесткости – оно оказывается незначительным (**Рис. 22**). Показано, что в различных испытаниях на изгиб определяются близкие значения изгибного модуля балки. Поэтому для прогноза эффективной жесткости и для идентификации неклассических параметров модели можно использовать аналитическое решение, следующее из решения задачи чистого изгиба (сплошная линия на графиках **Рис. 21**).

Также было исследована зависимость максимальных нормальных напряжений, действующих в направлении оси балки, от толщины балки и от типа испытаний на изгиб (чистый, четырехточечный, трехточечный – см. **Рис. 23**). Найденные напряжения нормировались относительно уровня напряжений, которые реализуются в аналогичных решениях для классических балок при том же уровне внешней нагрузки. Здесь было также получено хорошее согласование между различными типами испытаний. Это означает, что масштабные эффекты могут одинаковым образом проявляться и для предела прочности балок в различных испытаниях. Это верно, в частности, для хрупких материалов, для которых прочность определяется максимальными растягивающими напряжениями.

Решения согласуются достаточно хорошо. Это означает, что в различных задачах реализуется одинаковое относительное повышение осевых напряжений. Значительное повышение максимальных напряжений в балке, которое может влиять на её прочность, реализуется только при очень больших параметрах связанности (**Рис. 23 b**).

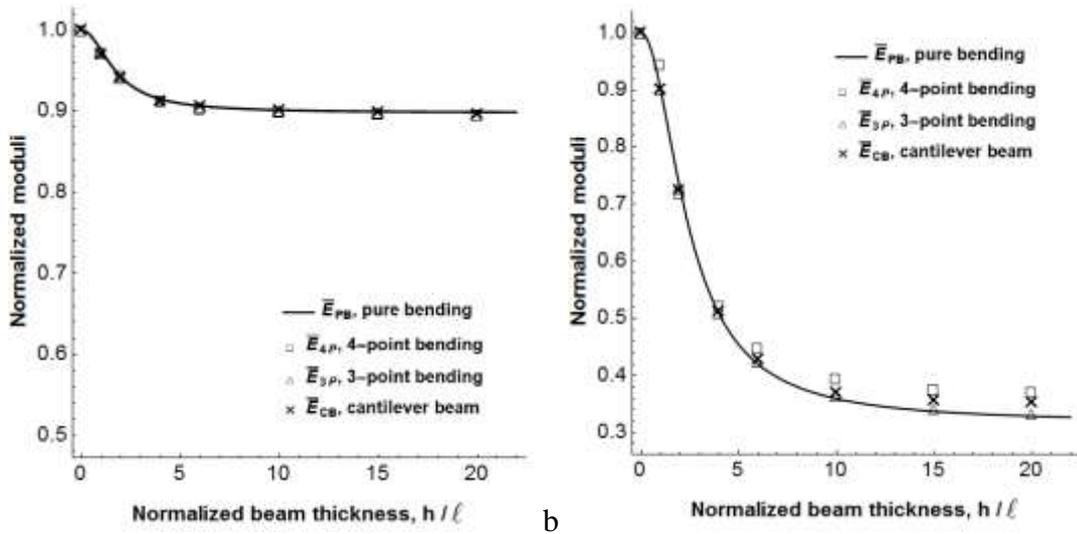


Рис. 21 Влияние толщины балки на её эффективный изгибный модуль упругости в различных испытаниях на изгиб при значении параметра связанности $N=0.5$ (а) и $N=0.95$ (б). Точки соответствуют конечно-элементному моделированию трехмерных моделей балок.

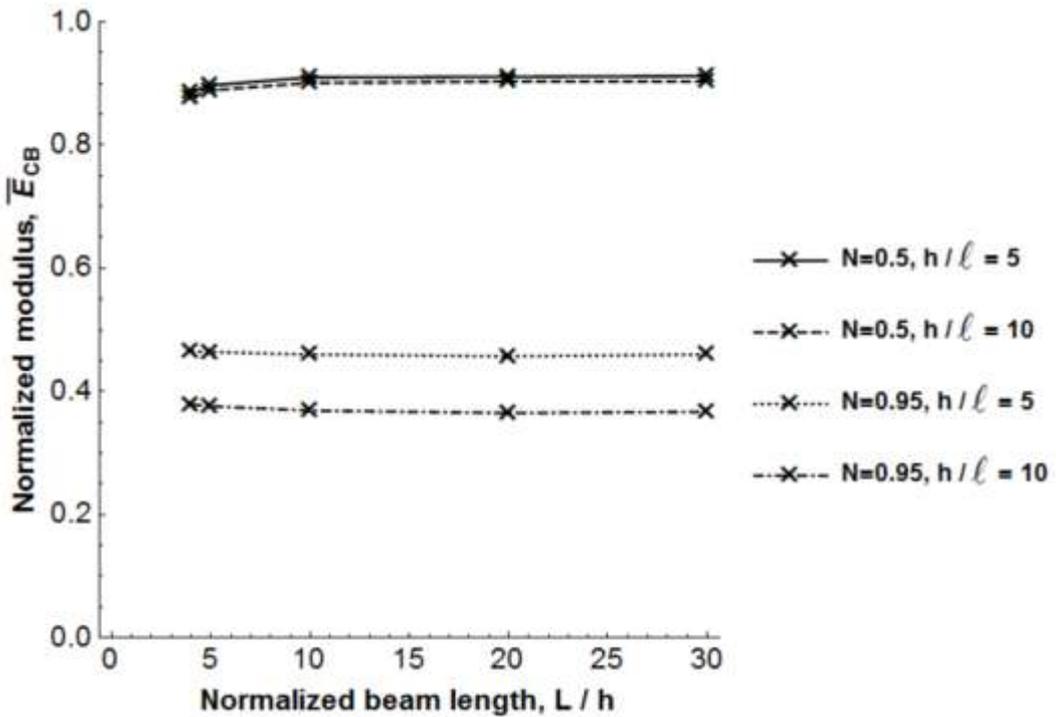


Рис. 22 Влияние длины балки на её эффективный изгибный модуль в испытаниях на консольной изгиб. Для балок с достаточно большим соотношением L/h влияние длины отсутствует, как и в решении для чистого изгиба балки. Все результаты здесь получены на основании численного решения трехмерной задачи.

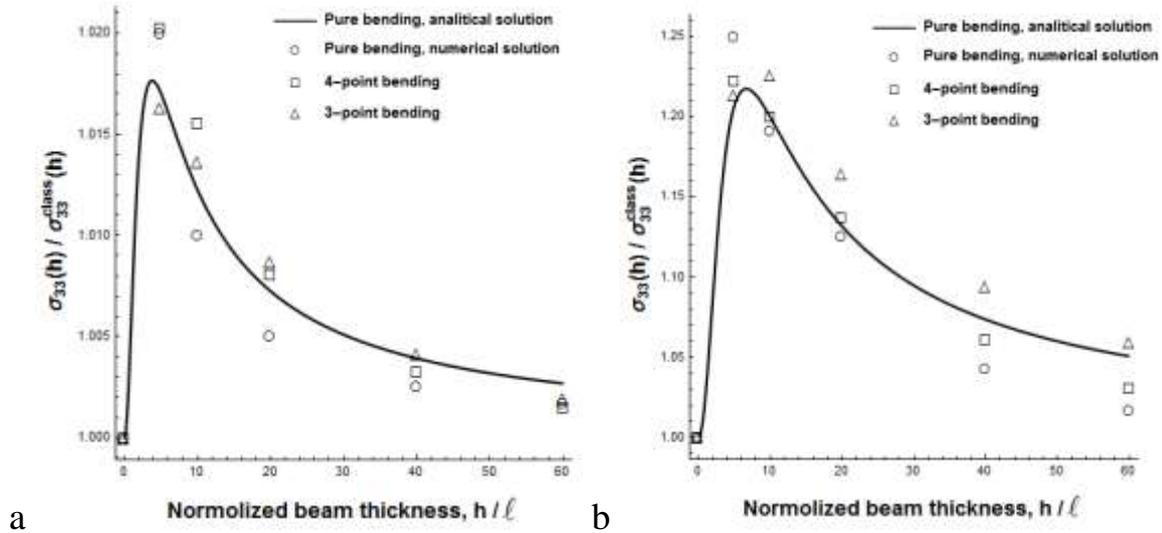


Рис. 23 Влияние толщины на максимальные осевые напряжения в балке при различных испытаниях на изгиб. Представлено значение осевых напряжений, нормированное относительно его величины в решении задачи классической теории упругости. Параметр связанности равен $N=0.5$ (а) и $N=0.99$ (б). Точки соответствуют конечно-элементному моделированию на трехмерных моделях балок, сплошная линия – решение из задачи чистого изгиба.

4.10 Основные результаты и выводы по разделу

1. Представлена вариационная формулировка модели дилатационной теории упругости, учитывающая дефектность на поверхности среды.
2. С использованием метода конечных элементов построено численное решение задачи чистого изгиба в трехмерной постановке дилатационной теории упругости, в том числе с учетом поверхностных эффектов.
3. Показано, что известное аналитическое решение задачи чистого изгиба балки со свободной дилатацией в точности совпадает с численным вдали от внешних поверхностей балки. В численном решении граничные условия задачи по напряжениям выполняются в каждой точке на свободных поверхностях балки, в отличие от аналитического решения, где граничные условия задаются в интегральной форме относительно усилий и моментов. Вследствие этого в

численном решении возникает депланация сечений и НДС балки изменяется не только в направлении её толщины, но и в поперечном направлении.

4. Показано, что аналитическое решение для оценки напряженного состояния и эффективных упругих характеристик балки со свободной дилатацией оказывается достаточно точным по отношению к построенному прямому численному решению в широком диапазоне значений неклассических параметров модели. Поэтому имеющиеся аналитические выражения возможно использовать для прогноза масштабных эффектов в испытаниях на изгиб пористых балок различной толщины. Масштабные эффекты могут быть достаточно существенными как в отношении жесткости, так и в отношении прочности пористых балок, поэтому испытания на изгиб могут быть использованы для идентификации дополнительных параметров дилатационной теории упругости.

5. Представлено аналитическое решение задачи чистого изгиба балки с учетом дефектности на поверхности среды. Проведено сопоставление построенного аналитического и численного решений. Показано, что учет поверхностной дефектности позволяет учесть дополнительное снижение или увеличение жесткости балки.

6. Из аналитического и численного решений следует, что при уменьшении толщины балок со свободной дилатацией, их жесткость возрастает. Однако, с точки зрения физического смысла, рассматриваемая модель не может применяться для балок, толщина которых сопоставима с масштабным параметром микроструктуры материала или с размером пор. Кроме этого, для балок малой толщины определяющую роль будут играть поверхностные эффекты. Поэтому возможно существование некоторой оптимальной толщины, которая обеспечивает наиболее высокую жесткость и прочность балки со свободной дилатацией.

7. Рассмотренная теория может применяться для уточненного описания напряженно-деформированного состояния пористых сред и, в частности, для описания метаматериалов с отрицательным коэффициентом Пуассона.

5. Задачи о деформациях пористого слоя, лежащего на массивном основании, в условиях нагрева в рамках микро-дилатационной термоупругости

В данном разделе рассмотрена задача о деформациях тонкого слоя, лежащего на массивном основании, в условиях равномерного прогрева.

Привлекается модель термоупругости пористых сред с учетом дефектности границ. Показано, что дефектность границ характеризуется в модели пористых сред единственным дополнительным поверхностным модулем. В предположении плоской деформации получена замкнутая постановка рассматриваемой задачи, допускающая аналитическое решение. Представлено численное и аналитическое решение задачи для функции перемещений и для свободной дилатации, которые изменяются в рамках рассматриваемой постановки только по толщине слоев. На примере структуры, состоящей из графитовой подложки и керамического покрытия, проведен анализ влияния неклассических параметров модели на напряжения и деформации в слоях структуры. Показано, что если при идеальном контакте слоев в плоскости покрытия действуют сжимающие напряжения, то при возникновении дефектности на границе контакта слоев могут возникать опасные растягивающие нормальные напряжения, приводящие к разрушению покрытия.

5.1 Модель термоупругих пористых материалов, учитывающая дефектность поверхности

В настоящей работе используется модель пористой среды с модифицированными граничными условиями, учитывающими поверхностную дефектность. Эта модель может быть получена, как частный случай теории сред с сохраняющимися дислокациями, лагранжиан которой в общем случае имеет вид [21, 75, 77]:

$$\begin{aligned}
L &= \bar{A} - U = \bar{A} - \iiint U_V dV - \oint U_F dF, \\
2U_V &= C_{ijnm}^{11} d_{ij}^0 d_{nm}^0 - 2C_{ijnm}^{12} d_{ij}^{\Xi} d_{nm}^0 + C_{ijnm}^{22} d_{ij}^{\Xi} d_{nm}^{\Xi} + C_{ijnm}^{33} \Xi_{ij} \Xi_{nm}, \\
2U_F &= A_{ijnm} d_{ij}^{\Xi} d_{nm}^{\Xi}.
\end{aligned} \tag{72}$$

Здесь \bar{A} – работа внешних объемных и поверхностных сил на перемещениях деформируемого тела, U – потенциальная энергия деформации, U_V – объемная плотность потенциальной энергии деформации, U_F , ($2U_F = A_{ijnm} d_{ij}^{\Xi} d_{nm}^{\Xi}$) – поверхностная плотность потенциальной энергии деформации, d_{ij}^0 – тензор стесненной дисторсии, d_{ij}^{Ξ} – тензор свободной дисторсии, $\Xi_{ij} = d_{in}^{\Xi},{}_m \mathcal{E}_{nmj}$ – псевдотензор плотности дислокаций [21, 75, 77, 78], \mathcal{E}_{nmj} – тензор Леви–Чивиты, $C_{ijnm}^{12}, C_{ijnm}^{22}, C_{ijnm}^{33}$ – тензоры физических модулей упругости, $C_{ijnm}^{pq} = \lambda^{pq} \delta_{ij} \delta_{nm} + \mu^{pq} (\delta_{in} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jn}) + \chi^{pq} (\delta_{in} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jn})$, $\lambda^{pq}, \mu^{pq}, \chi^{pq}$ ($p, q = 1, 2, 3$) – обобщенные параметры Ламе, $C_{ijnm}^{11} = \lambda^{11} \delta_{ij} \delta_{nm} + \mu^{11} (\delta_{in} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jn})$ – классический тензор модулей упругости, $\lambda^{11} = \lambda, \mu^{11} = \mu, \chi^{11} = 0$ – параметры Ламе, A_{ijnm} – тензор модулей упругости адгезионных взаимодействий.

Вариационная модель пористой среды может быть получена из теории сред с сохраняющимися дислокациями (72) полагая, что в среде отличны от нуля только свободные деформации изменения объема. В этом случае тензор свободной дисторсии и псевдотензор плотности дислокаций имеют вид [21, 75, 77]:

$$\begin{aligned}
d_{ij}^{\Xi} &= \frac{1}{3} \theta^{\Xi} \delta_{ij}, \\
\Xi_{ij} &= d_{in}^{\Xi},{}_m \mathcal{E}_{nmj} = \frac{1}{3} \theta^{\Xi},{}_m \delta_{in} \mathcal{E}_{nmj} = \frac{1}{3} \theta^{\Xi},{}_m \mathcal{E}_{mji}.
\end{aligned} \tag{73}$$

Здесь θ^{Ξ} – свободные деформации изменения объема (свободная дилатация). Заметим, что в обозначениях теории пористых сред: $\theta^{\Xi} = \varphi$.

Тензор адгезионных модулей определяет поверхностные свойства среды и имеет, в общем случае, следующий вид [21, 75, 77]:

$$A_{ijnm} = [\lambda^F (\delta_{ij} - n_i n_j) (\delta_{nm} - n_n n_m) + \delta^F n_i n_n (\delta_{jm} - n_j n_m) + (\mu^F + \chi^F) (\delta_{in} - n_i n_n) (\delta_{jm} - n_j n_m) + (\mu^F - \chi^F) (\delta_{im} - n_i n_m) (\delta_{jn} - n_j n_n)]. \quad (74)$$

С учетом (73)-(74) и определения тензора стесненной дисторсии ($d_{ij}^0 = u_{i,j}$) плотность энергии деформаций в объеме и на поверхности среды (6) может быть представлена в следующем виде [79]:

$$2U_V = \lambda \theta^2 + 2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} - 2 \left(\lambda^{12} + \frac{2}{3} \mu^{12} \right) \theta^\Xi \theta + \left(\lambda^{22} + \frac{2}{3} \mu^{22} \right) (\theta^\Xi)^2 + \frac{4}{9} \chi^{33} \theta^\Xi_{,k} \theta^\Xi_{,k} \quad (75)$$

$$2U_F = (\mu^F + \lambda^F) (\theta^\Xi)^2$$

Покажем, что вариационная постановка модели пористых сред с функционалом Лагранжа (73)-(74) полностью описывает обобщенную модель пористых сред с поврежденной адгезией и, в частности, соответствует модели пористых сред приведенной в работе [43]. Действительно, легко установить соответствие между обозначениями в соотношениях (72), (75) и обозначениями, принятыми в работе [43]. Имеем:

$$\varphi = \theta^\Xi, \quad \beta = -\left(\lambda^{12} + 2\mu^{12} / 3 \right), \quad \xi = \lambda^{22} + 2\mu^{22} / 3, \quad \alpha = 4\chi^{33} / 9.$$

Вводя обозначение для поверхностного модуля $\xi^F = \mu^F + \lambda^F$, можем записать лагранжиан модели пористых сред, с учетом поверхностной дефектности в обозначениях в терминах, использующихся в формулах (16)-(19):

$$\begin{aligned}
L &= \bar{A} - \iiint U_V dV - \oint U_F dF & (76) \\
2U_V &= \lambda \theta^2 + 2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + 2\beta \varphi \theta + \xi \varphi^2 + \alpha \varphi_{,k} \varphi_{,k} \\
2U_F &= \xi^F \varphi^2
\end{aligned}$$

Отметим, что вариационная постановка (76) в теории пористых сред является корректной и полной. Использование вариационной формулировки, позволяет установить энергетически согласованные определяющие уравнения и сформулировать математическую модель, записав краевую задачу, включающую систему уравнений равновесия и полный набор естественных граничных условий. Вариационный принцип Лагранжа, дает в этом случае следующее вариационное выражение:

$$\begin{aligned}
\delta L &= \delta \bar{A} - \iiint (\lambda \theta \delta \theta + \mu \varepsilon_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \beta (\theta \delta \varphi + \varphi \delta \theta) + \xi \varphi \delta \varphi + \alpha \varphi_{,k} \delta \varphi_{,k}) dV - \\
&\quad - \oint \xi^F \varphi \delta \varphi dF = 0
\end{aligned}$$

Переходя к перемещениям и проводя интегрирование по частям, получим:

$$\begin{aligned}
\delta L &= \delta \bar{A} + \iiint (((\lambda + \mu) u_{k,ki} + \mu u_{i,jj} + \beta \varphi_{,i}) \delta u_i + (\alpha \varphi_{,kk} - \xi \varphi - \beta u_{k,k}) \delta \varphi) dV - \\
&\quad - \oint ((\lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \beta \varphi \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i})) n_j \delta u_i + (\alpha \varphi_{,k} n_k + \xi^F \varphi) \delta \varphi) dF = 0.
\end{aligned}$$

Легко видеть что полученная вариационная формулировка теории пористых сред определяет краевую задачу, которая полностью соответствует задаче (16)-(20), и дает ее обобщение, связанное с учетом адгезионных взаимодействий в неклассическом граничном условии при вариации $\delta \varphi$. Это граничное условие можно представить в виде:

$$h_i n_i + g^F = \alpha \varphi_{,i} n_i + \xi^F \varphi = 0$$

Здесь g^F - поверхностные (адгезионные) напряжения, связанные с следом дефектов-пор на границах среды: $g^F = \partial U_F / \partial \varphi = \xi^F \varphi$

Таким образом учет адгезионной поврежденности для модели пористой среды приводит к статическому граничному условию третьего рода (задача Робена), вместо статического граничного условия второго рода (задача Неймана).

Рассмотрим задачу термоупругости для линейной теории пористых изотропных материалов. Полагаем что имеет место классическая гипотеза Дюамеля-Неймана для полных стесненных деформаций изменения объема:

$$\theta = \theta_e + \theta_T \quad (77)$$

где θ_e – упругая составляющая объемной деформации, а $\theta_T = a\Delta T = a(T - T_0)$ – температурная объемная деформация, ΔT – изменение температуры относительно исходного значения T_0 , a – коэффициент температурного расширения.

В итоге, подставляя, получаем следующую формулировку модели термоупругости пористых сред с учетом дефектности границ в предположении отсутствия внешних объемных и поверхностных сил:

Уравнения равновесия в перемещениях:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)u_{k,ki} + \mu u_{i,jj} + \beta\varphi_{,i} - 3Ka(\Delta T)_{,i} &= 0 \\ \alpha\varphi_{,kk} - \xi\varphi - \beta(u_{k,k} - a\Delta T) &= 0 \end{aligned} \quad (78)$$

Определяющие соотношения:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{ij} + \beta\varphi\delta_{ij} - 3Ka\Delta T \\ h_i &= \alpha\varphi_{,i} \\ g &= -\xi\varphi - \beta(\theta - a\Delta T) \\ g^F &= \xi^F\varphi \end{aligned} \quad (79)$$

Статические граничные условия:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}n_j &= 0 \\ h_in_i + g^F &= 0 \end{aligned} \quad (80)$$

Кинематические граничные условия могут быть поставлены относительно перемещений: $u_i = u_i^0$.

5.2 Постановка задачи термоупругости для слоя, лежащего на массивном основании, в условиях равномерного нагрева

Рассматриваем двухслойную структуру, состоящую из слоя-покрытия толщиной h , лежащего на слое-основании толщиной H (Рис. 24). Ось Y направлена перпендикулярно к поверхности слоев. Ось Z направлена перпендикулярно к плоскости рисунка (плоскости XOY).

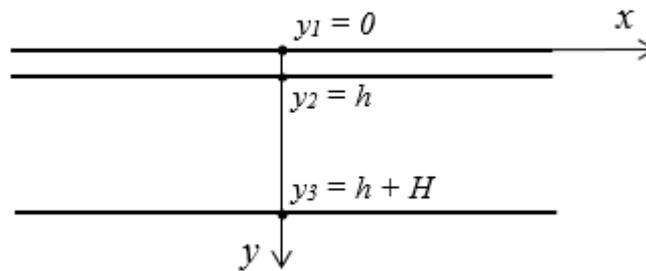


Рис. 24 Слой, лежащий на массивном основании

Материалы слоев могут содержать пористость и рассматриваются в рамках микро-дилатационной теории упругости (elasticity with voids). Слоистая система считается бесконечной в направлении осей ox , oz . В направлении этих осей имеет место однородная деформация. При наличии массивного и достаточно жесткого основания, при равномерном нагреве в рассматриваемой неоднородной структуре можно пренебречь изгибом. Поэтому мы можем рассмотреть постановку задачи термоупругости пористых сред для случая плоской деформации. В этом случае компоненты перемещений в направлении координат ox и oy в плоскости XOY не зависят от координаты z : $u_1 = u(x, y)$, $u_2 = v(x, y)$, и перемещения в направлении оси oz являются линейной функцией $u_3 = e \cdot z$, $\varepsilon_z = e$. Так как нагрев является равномерным, то полагаем, что координаты ox и oz являются равноправными. Поэтому мы можем записать: $u_1 = e \cdot x$ и $u_2 = v(y)$. Сдвиги и касательные напряжения в рассматриваемой постановке не возникают. Дилатация также является функцией только координаты y . Получаем следующие кинематические соотношения:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_z = e, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (81)$$

$$\varphi = \varphi(y) = P_r(y) - P(y)$$

Отличные от нуля напряжения:

$$\sigma_x = \sigma_z = \lambda \varepsilon_y + 2(\mu + \lambda)e + \beta\varphi - 3Ka\Delta T, \quad (82)$$

$$\sigma_y = 2\lambda e + (2\mu + \lambda)\varepsilon_y + \beta\varphi - 3Ka\Delta T,$$

$$h_y = \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$g = -\xi\varphi - \beta(\varepsilon_y + 2e - a\Delta T)$$

$$g^F = \xi^F \varphi$$

Уравнения равновесия при постоянном нагреве слоев (из трех классических уравнений равновесия в дифференциальной форме мы можем рассмотреть только уравнение в направлении оси Y):

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (83)$$

$$\alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \xi\varphi - \beta \left(\frac{\partial v}{\partial y} + 2e - a\Delta T \right) = 0 \quad (84)$$

В направлении оси X и Z должны выполняться интегральные условия равновесия:

$$\int_0^{h+H} \sigma_x dy = \int_0^{h+H} \sigma_z dy = 0 \quad (85)$$

Статические граничные условия относительно классических и неклассических напряжений на свободной поверхности имеют вид:

$$\sigma_y = 2\lambda e + (2\mu + \lambda) \frac{\partial v}{\partial y} + \beta\varphi - 3Ka\Delta T = 0 \quad (86)$$

$$h_y + g^F = \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \xi^F \varphi = 0$$

Кинематические граничные условия могут быть поставлены относительно функции перемещений v и функции свободной дилатации φ

Полученная постановка задачи является замкнутой, и её решение может быть построено в аналитической форме при выбранном наборе граничных условий. Заметим, что внешняя "нагрузка" в виде постоянной температуры входит в постановку задачи через классические статические граничные условия и через неклассическое уравнение равновесия. С точки зрения приложений, сформулированная постановка задачи позволяет определить напряженно-деформированное состояние пористой структуры вдали от краев (торцов, параллельных оси Y).

Для задачи о равномерном прогреве двухслойной структуры, получаем следующую постановку:

$$y_i \leq y \leq y_{i+1} : (\lambda_i + 2\mu_i) \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} + \beta_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} = 0, \quad (87)$$

$$\alpha_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} - \xi_i \varphi_i - \beta_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial y} + 2e - a\Delta T \right) = 0, \quad (88)$$

$$y_1 = 0 : \quad \sigma_{y1} = 0, \quad h_{y1} = 0 \quad (89)$$

$$y_2 = h : \quad v_1 = v_2, \quad \sigma_{y1} = \sigma_{y2}, \quad h_{y2} - h_{y1} = g^F, \quad \varphi_1 = \varphi_2 \quad (90)$$

$$y_3 = h + H : \quad v_2 = 0, \quad h_{y2} = 0. \quad (91)$$

Здесь индекс i принимает значения 1 или 2, величины с индексом 1 относятся к материалу слоя-покрытия, а с индексом 2 – к материалу основания. Контактные условия по неклассическим напряжениям заданы с учетом дефектности: на контактной границе действуют поверхностные напряжения $g^F = \xi^F \varphi_1 = \xi^F \varphi_2$. На внешних поверхностях слоев задано равенство нулю градиента свободной дилатации. На обратной стороне массивного основания задано закрепление – запрещены перемещения в вертикальном направлении.

Краевая задача решается с учетом совместности деформаций в отношении координат «х» и «z». Поэтому, решение строится с точностью до константы e , определяющей однородную деформацию слоев в направлении осей X и Z. Эта константа определяется из рассмотрения одного из интегральных уравнений равновесия (85).

Отметим, что полученная постановка задачи вырождается в классическую постановку термоупругости, если равен нулю параметр связанности: $\beta = 0$.

5.3 Построение аналитического решения

Построим общее решение уравнений равновесия модели (83)-(84). Для этого продифференцируем первое уравнение равновесия (83), выразим из него $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ и подставим во второе уравнение равновесия (84). Получим:

$$-\frac{\alpha(\lambda + 2\mu)}{\beta} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - \xi \varphi - \beta \left(\frac{\partial v}{\partial y} + 2e - a\Delta T \right) = 0. \quad (92)$$

Далее выразим φ :

$$\varphi = -\frac{\alpha(\lambda + 2\mu)}{\beta\xi} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - \frac{\beta}{\xi} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + 2e - a\Delta T \right). \quad (93)$$

Далее подставим полученное выражение (93) в первое уравнение равновесия (83), при этом при дифференцировании уничтожаются константы –

значения деформации в плоскости слоев e и изменение температуры ΔT .
Получаем:

$$\frac{\partial^4 v}{\partial y^4} - \frac{1}{l^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (94)$$

Здесь введено обозначение для масштабного параметра $l^{-2} = \frac{\xi(\lambda + 2\mu) - \beta^2}{\alpha(\lambda + 2\mu)}$, который принимает только положительные значения, так как из условия положительной определенности энергии деформаций следует, что $\beta^2 < \xi(\lambda + 2\mu/3)$.

$$v_i(y) = C_{i1} + C_{i2}y + C_{i3}e^{y/l_i} + C_{i4}e^{-y/l_i}, \quad (i=1,2) \quad (95)$$

Здесь C_{ij} – восемь неизвестных констант, которые находятся из решения системы граничных условий (89)-(91), а l_i – масштабный параметр материала слоя.

После определения функций перемещений, необходимо определить свободную дилатацию в слоях на основании выражения (93). В общем виде получаем:

$$\varphi_i(y) = -\frac{\beta_i}{\xi_i}(C_{i2} + 2e - a\Delta T) - \frac{\xi_i(\lambda_i + 2\mu_i) - 2\beta_i^2}{l_i\beta_i\xi_i}(C_{i3}e^{y/l_i} - C_{i4}e^{-y/l_i}), \quad (96)$$

$(i=1,2)$

После этого в решении остается единственная неизвестная константа e (деформация слоев в плоскости), которая определяется из интегрального уравнения равновесия (85).

5.4 Постановка задачи в программе COMSOL Multiphysics

Решение строиться методом конечных элементов. Используется конечно-элементный комплекс COMSOL Multiphysics.

Физическая модель теории задаётся в модуле General form PDE. Температура и микро-дилатационная теория упругости задаются как два отдельных физических модуля General form PDE. Для формулировки граничной задачи в модуле General form PDE необходимо выписать определяющие соотношения в дивергентной форме. Вместе с граничными условиями для области Ω получаем:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \Gamma &= p \text{ в области } \Omega \\ -n \cdot \Gamma &= P \text{ на } \partial\Omega_p \\ u &= u^0 \text{ на } \partial\Omega_u \end{aligned} \quad (97)$$

Здесь ∇ - оператор набла, Γ - тензор потока (тензор напряжений Коши в классической теории упругости), p - вектор объёмных сил, n - вектор внешней нормали на части границы области $\partial\Omega_p$, P - вектор поверхностных источников на части границы области $\partial\Omega_u$, u - вектор кинематических переменных, u^0 заданные значения кинематических переменных на границе $\partial\Omega_u$.

Comsol автоматически преобразует систему уравнений (97) в слабую формулировку и решает её используя метод конечных элементов.

Переменные удобно записать в матричной форме

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \phi \end{pmatrix}; \Gamma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{pmatrix}; p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}; P = \begin{pmatrix} -P_1 \\ -P_2 \\ -P_3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (98)$$

Или, для двумерного случая:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \phi \end{pmatrix}; \Gamma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \\ h_1 & h_2 \end{pmatrix}; p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}; P = \begin{pmatrix} -P_1 \\ -P_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (99)$$

В интерфейсе Comsol граничные условия задаются как показано ниже:

5.5 Реализация численного моделирования для задачи о слое

Граничные условия для перемещений показаны на **Рис. 25**. На левой границе (**Рис. 25 А**) запрещаются перемещения по x . На нижней границе (**Рис. 25 Б**) запрещаются перемещения по y .

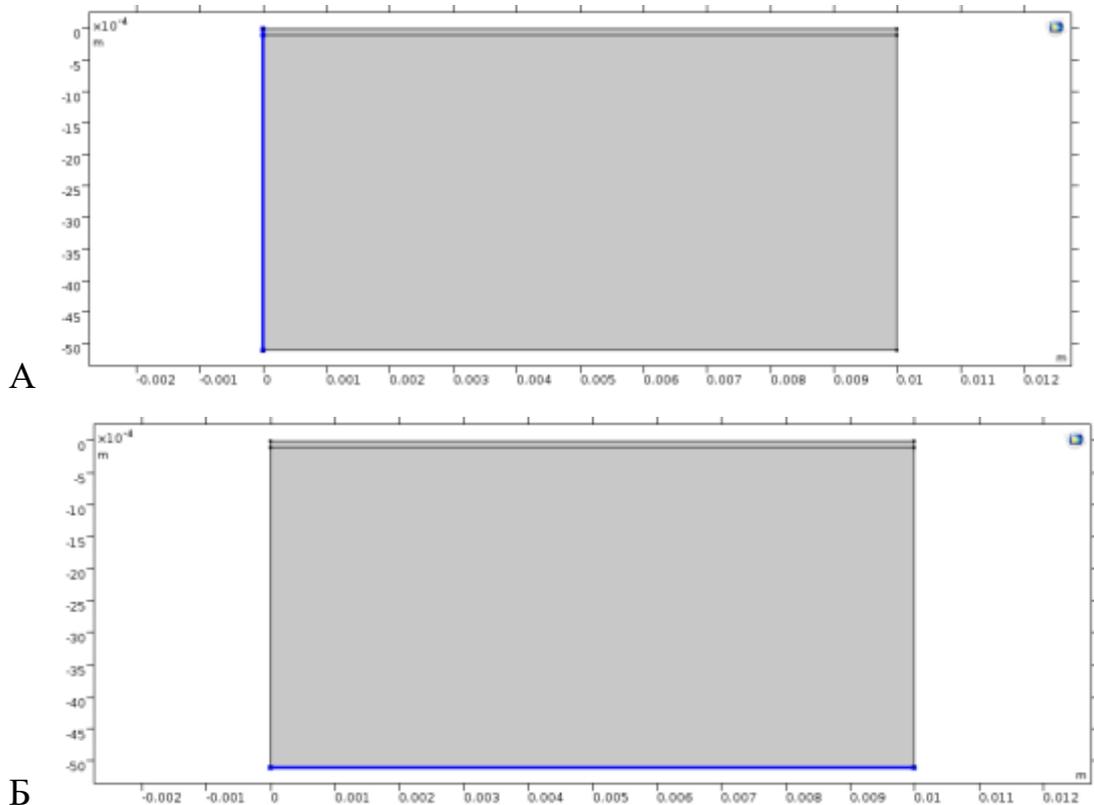


Рис. 25 Граничные условия для перемещений А: $u_x = 0$, Б: $u_y = 0$

На границе между слоями задаётся поток $g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g_f \end{pmatrix}$, **Рис. 26**.

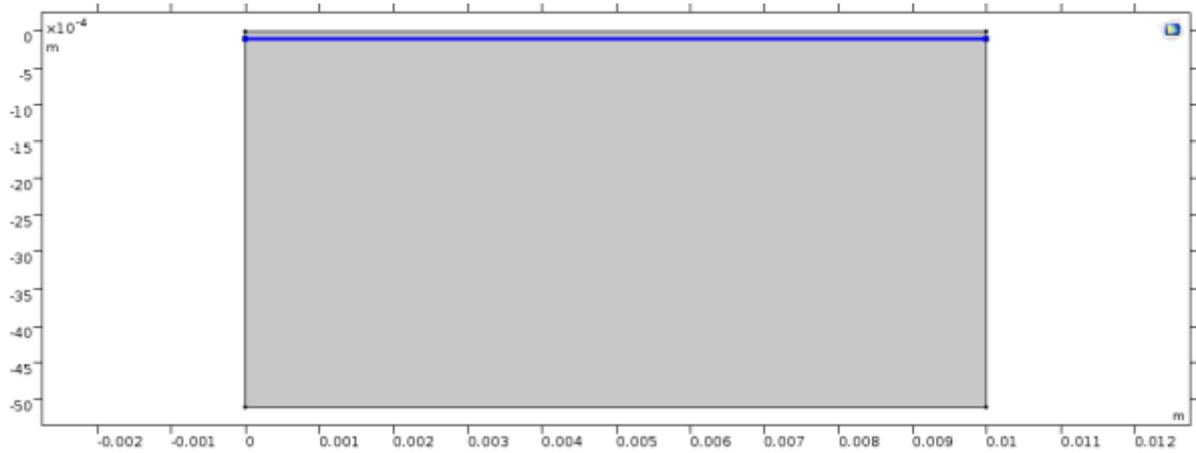


Рис. 26 Источник неклассических напряжений между слоями

Для решения задачи используется сравнительно мелкая сетка (**Рис. 27 А**). На границе между слоями сетка дополнительно уменьшается (**Рис. 27 Б**), чтобы улучшить аппроксимацию поверхностных эффектов.

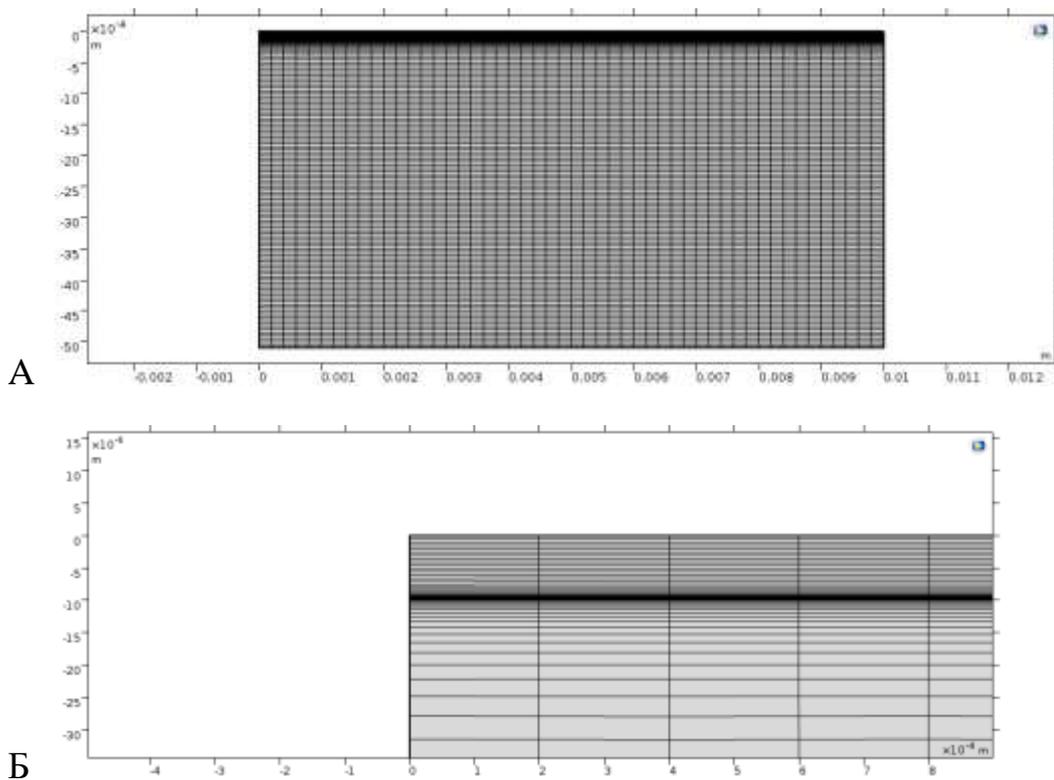


Рис. 27 А - Пример конечно-элементной сетки, **Б** – Конечно-элементная сетка на границе между слоями

5.6 Результаты расчетов

Для моделирования рассмотрим структуру, состоящую из слоя покрытия на основе дисилицида молибдена, содержащего 5% пор, на подложке из графита с пористостью 20%. Толщина покрытия составляет 100 мкм, а толщина подложки – 10 мм. Для расчетов будем использовать типичные значения свойств рассматриваемых материалов. Структура равномерно нагрета относительно исходного недеформированного и ненапряженного состояния на 1000 °С.

Проведем оценку неклассических параметров модели. Будем считать, что параметр ξ , определяющий «собственную жесткость» пор, равен классическому объемному модулю $\xi = K$. Следуя работе [96], будем рассматривать отрицательные значения параметра «связанности» в пределах $-K < \beta \leq 0$. В расчетах будем рассматривать два значения этого параметра: $\beta = 0$ (классическое решение), и $\beta = -0.9K$ (значительное влияние пористости).

Параметр α , определяющий градиентные эффекты, оценим из предположения, что протяженность локальных эффектов (l) не превышает характерного размера структуры материала, в частности – размера зерна. Поэтому для определенности примем $l_1 = l_2 = 10$ мкм. Значение параметра α будем находить из введенного соотношения для масштабного параметра l и с учетом заданных значений остальных физических модулей материала.

Для вычислений примем тестовое значения параметра $\xi^F = 1$ ГПа·мм, определяющего дефектность на границе покрытия и подложки.

Выбранные значения параметров модели приведены в таблице 1. Здесь приведены значения технических упругих характеристик (модуль Юнга и коэффициент Пуассона), по которым параметры Ламе λ, μ и объемный модуль K определяются на основе стандартных формул теории упругости.

Таблица 1. Характеристики материалов слоев.

Материал	E , ГПа	ν	α , 10^{-6}K^{-1}	$\xi = -\beta = K$, ГПа	l , мкм	P_0 , %
MoSi ₂	10	0,2	8,5	8,3	10	5
Graphite	20	0,2	5	16,6	10	20

На **Рис. 29** показано напряжённо-деформированное состояние в COMSOL. На **Рис. 29 А** представлено НДС без эффектов микро-дилатации (решение для классической теории упругости). На **Рис. 29 Б, В** НДС для микро-дилатационной теории упругости без поверхностных эффектов и с поверхностными эффектами соответственно.

Видно, что около границы (справа) появляются краевые эффекты **Рис. 30**. Для того чтобы сравнить аналитическое и численное решение, значения решения в конечно-элементной модели берутся вдали от границы **Рис. 28**.

На **Рис. 31** представлено распределение напряжений σ_x по толщине слоев. Показано сравнение аналитического и численного решения. Можно видеть, что аналитическое и численное решения сходятся с большой точностью. На **Рис. 31А** представлено решение при $\xi^F = 0$. На **Рис. 31Б** представлено решение с учетом дефектности границы контакта при $\xi^F = 1$ ГПа·мм. Важно отметить, что в связи с размерностными соображениями коэффициент ξ^F в аналитическом решении необходимо делить на 0.05. На **Рис. 32** представлено изменение по толщине

объемных стесненных деформаций θ и объемных свободных деформаций φ . Сплошная линия соответствует решению модели термоупругости пористых сред, штриховая линия соответствуют решению с учетом дефектности, пунктирный график соответствует классическому решению термоупругости без учета свободной дилатации. Соответственно, на рисунке **Рис. 32Б** в классическом случае свободная дилатация равна нулю. Вертикальная линия на рисунках обозначает контактную границу с координатой $y=h=100$ мкм.

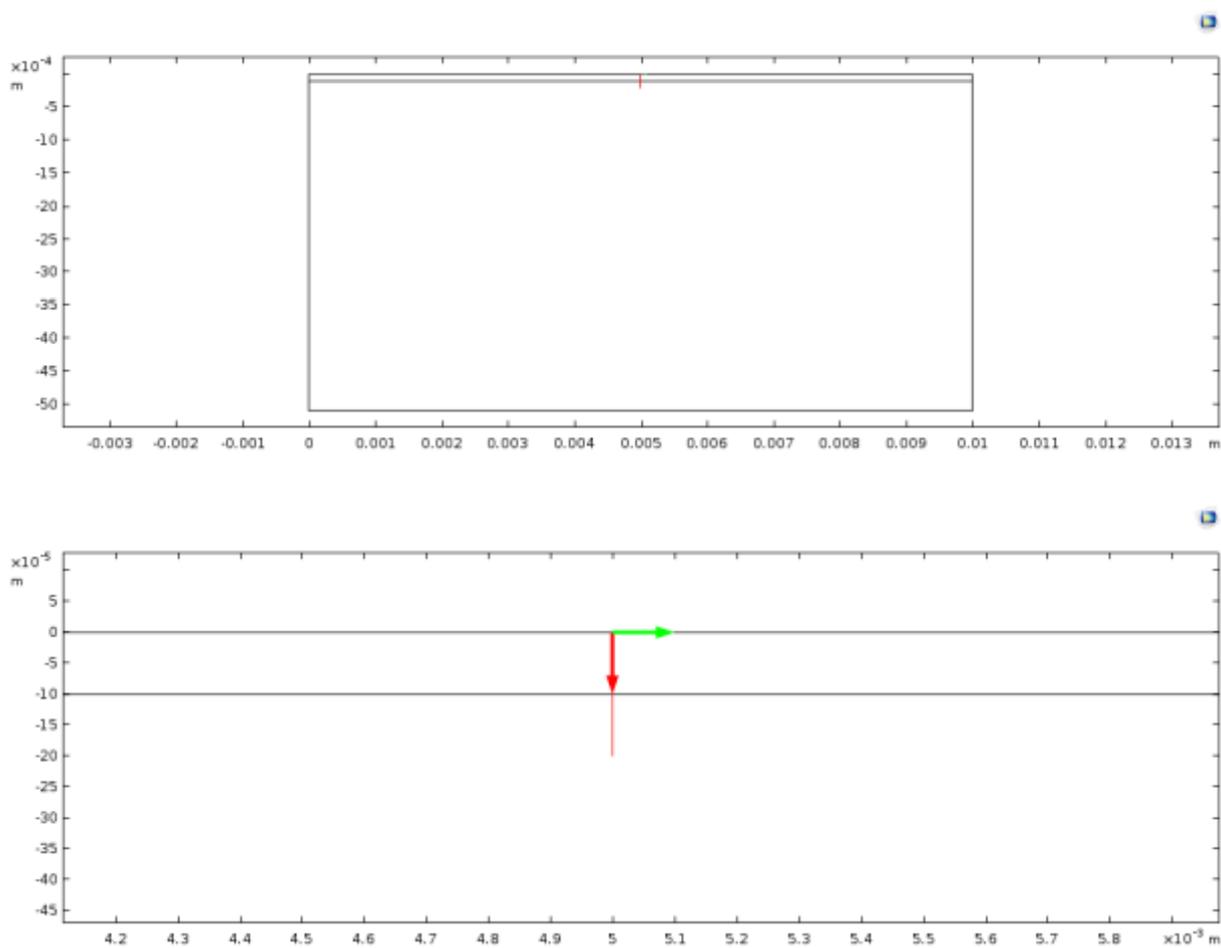


Рис. 28 Линия, для которой берутся данные из конечно-элементного решения

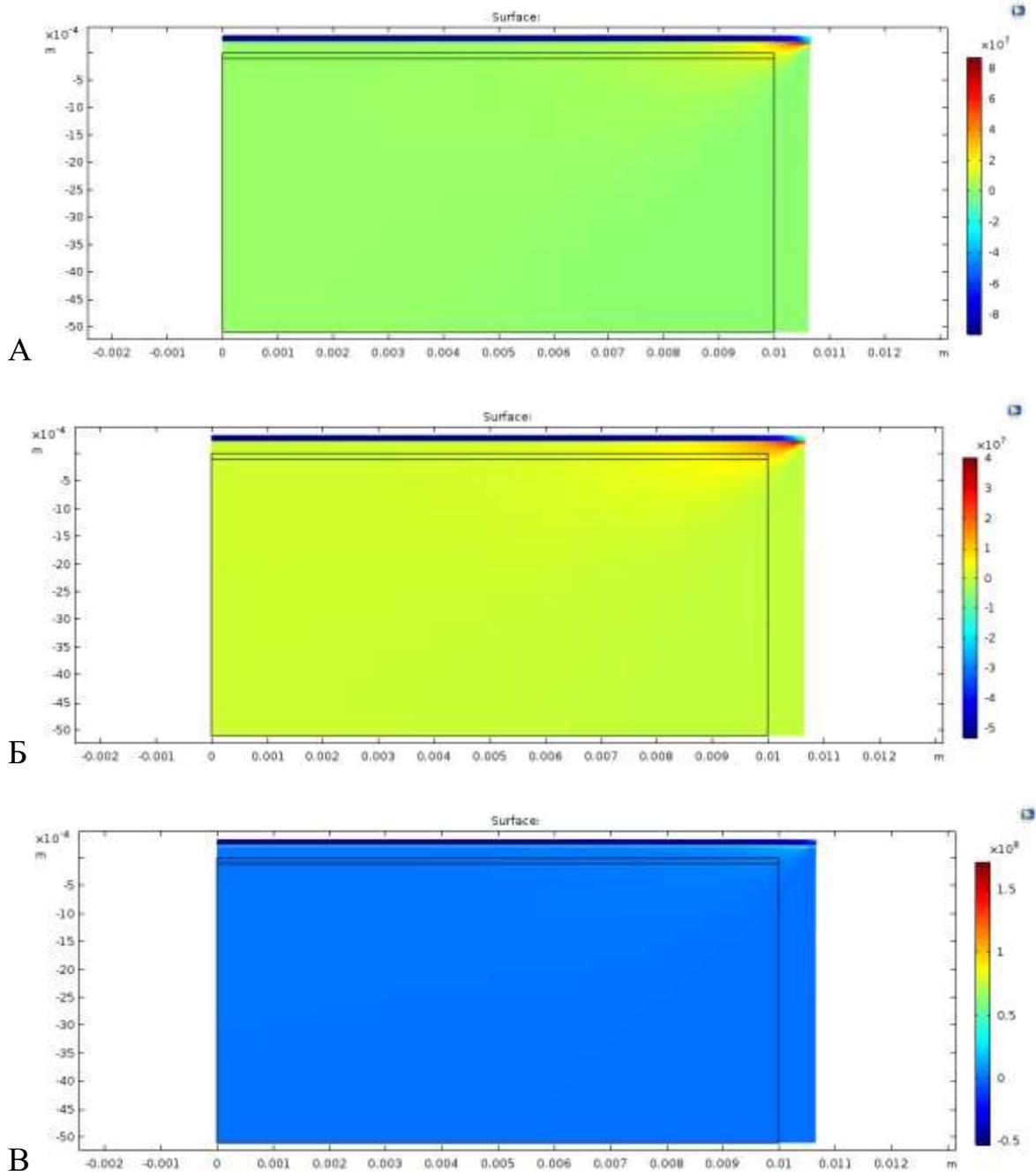


Рис. 29 Напряжённо-деформированное состояние. А $\beta=0$ Б $\xi^f=0$, В $\xi^f=1$
ГПа·мм

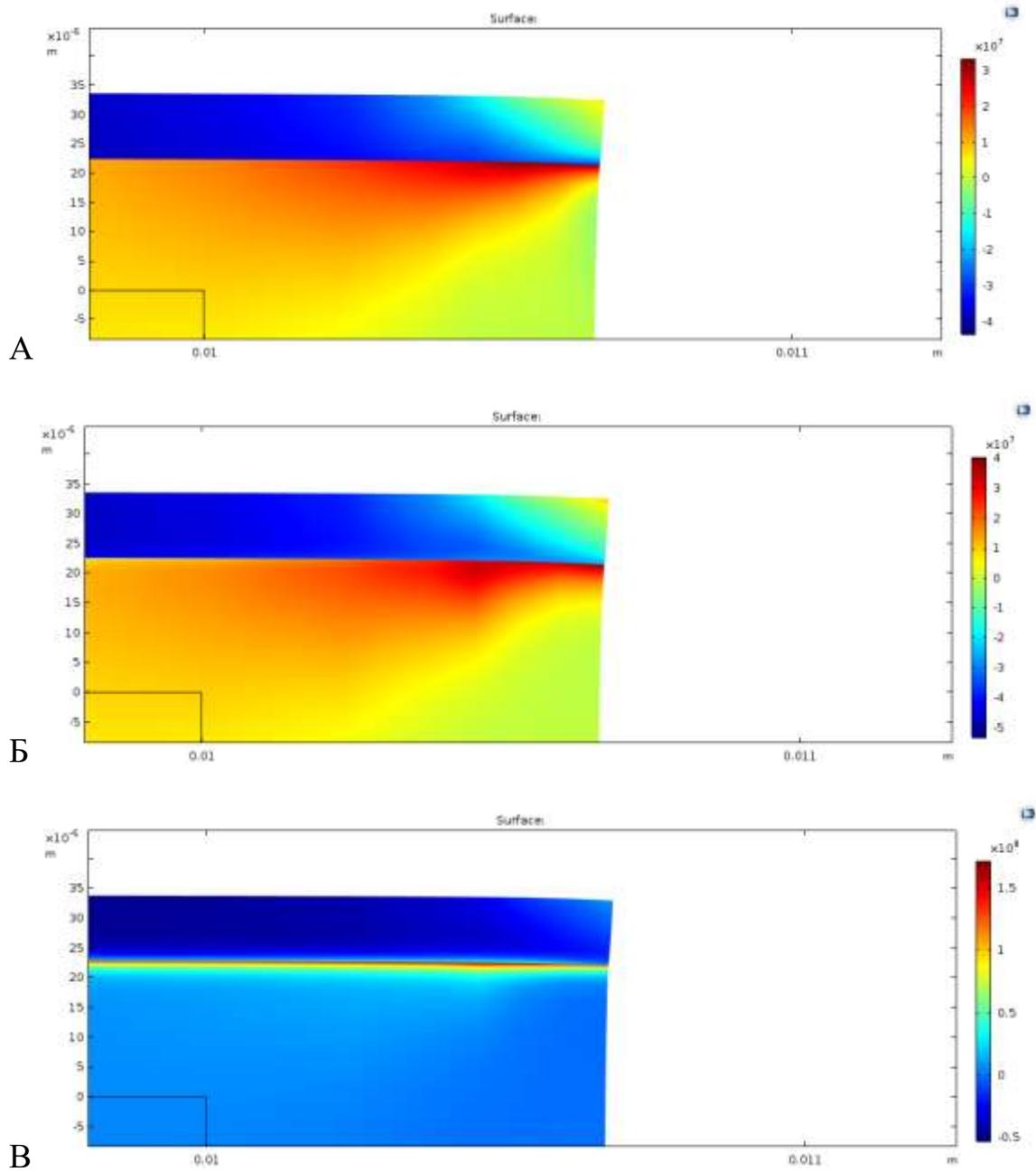


Рис. 30 Краевой эффект возникающий в различных задачах. А $\beta=0$ Б $\xi^f=0$, В $\xi^f=1$ ГПа·мм

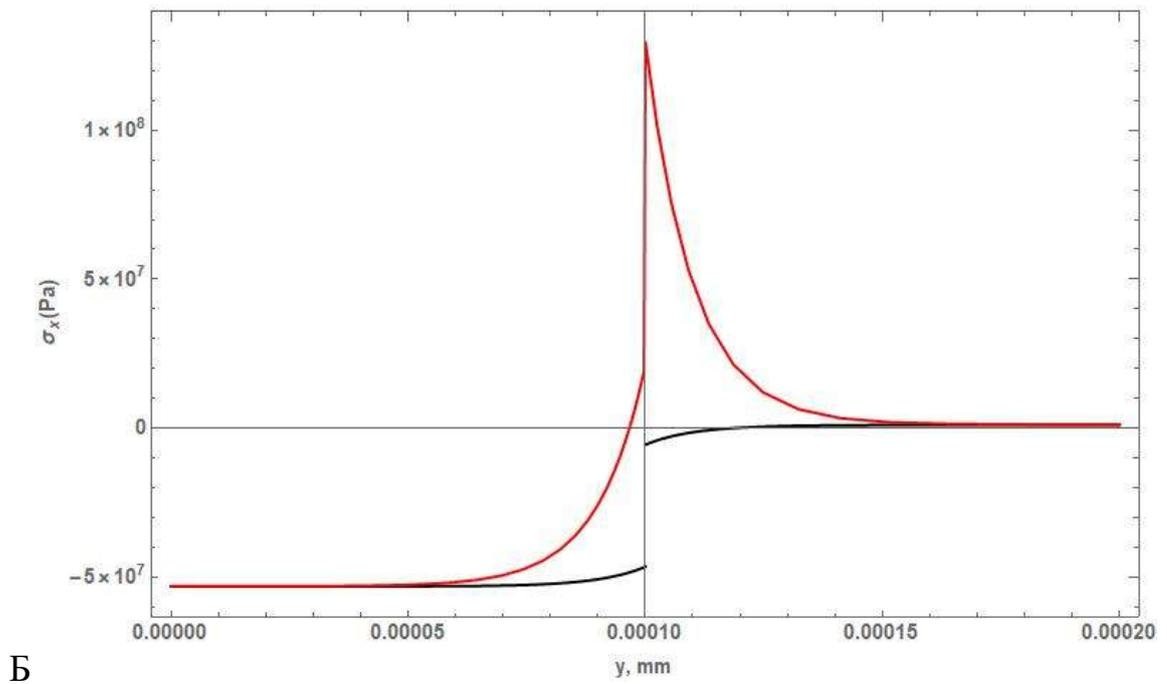
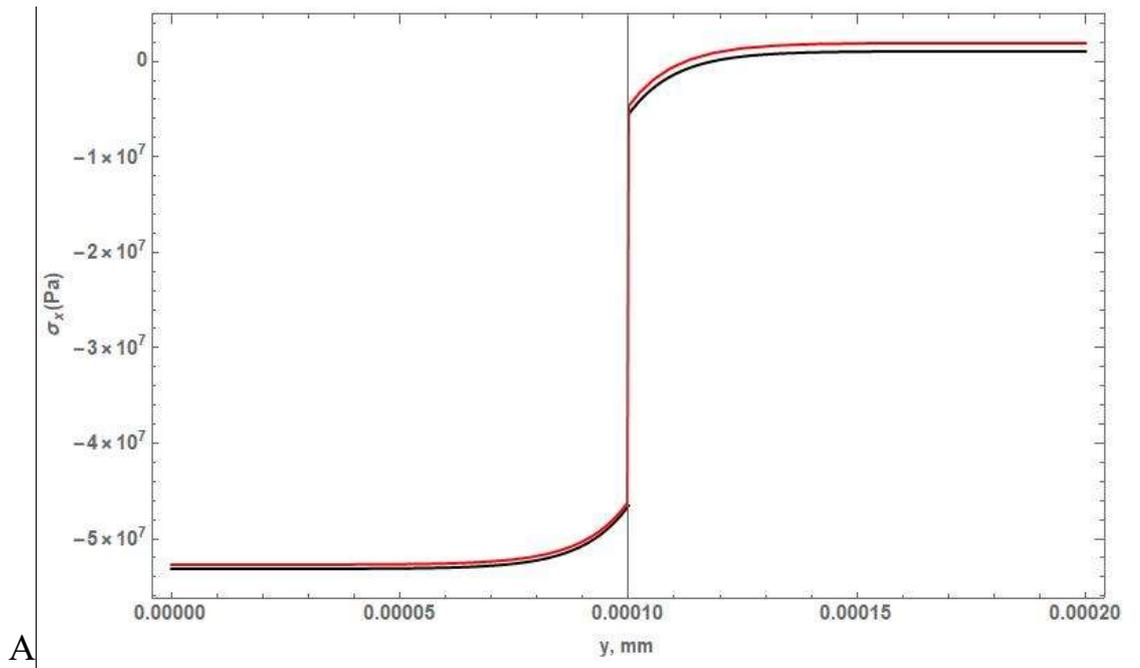
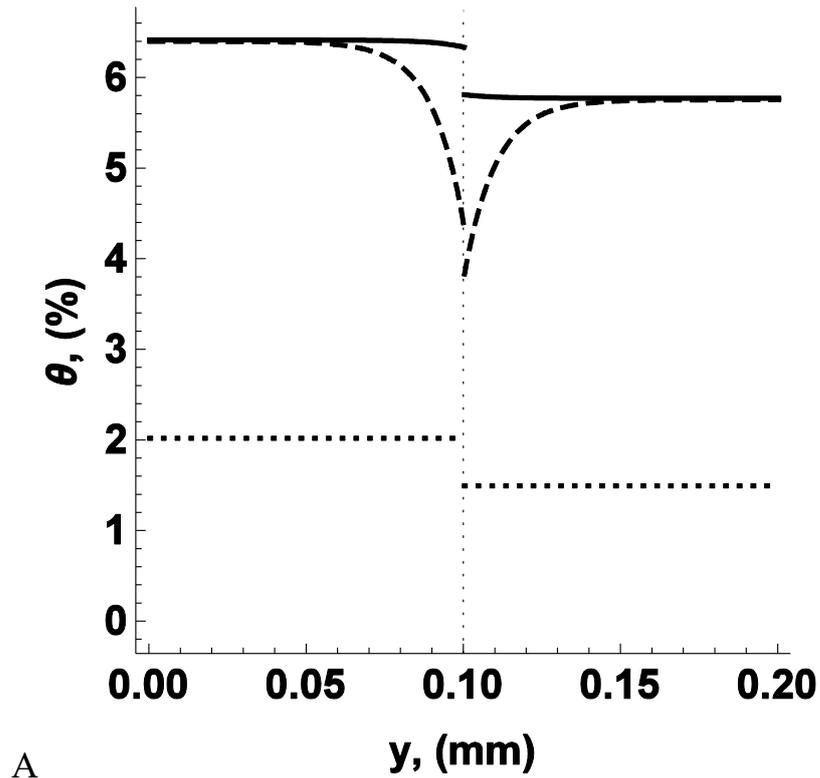
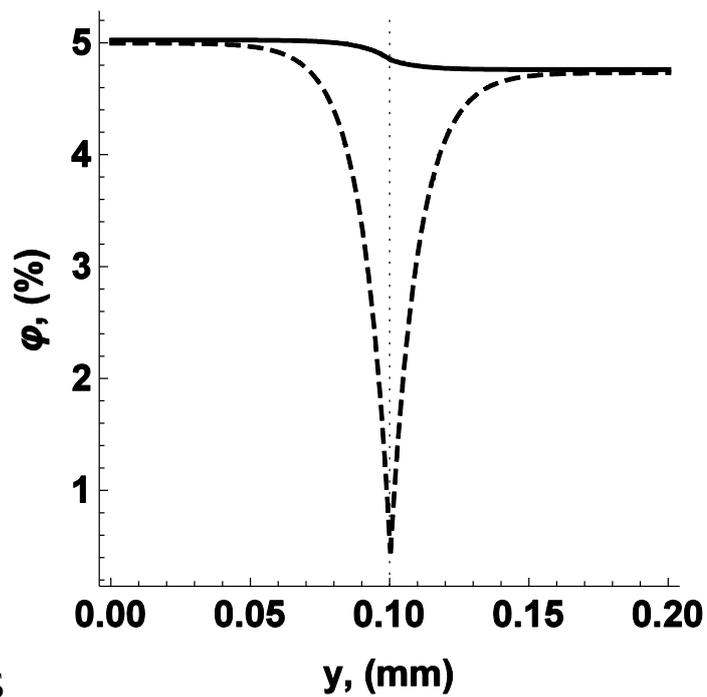


Рис. 31 Распределение напряжений по толщине слоев структуры MoSi_2 -графит в случае идеального (А, $\xi^F = 0$) и поврежденного (Б, $\xi^F = 1 \text{ ГПа} \cdot \text{мм}$) контакта слоев при равномерном нагреве на $1000 \text{ }^\circ\text{C}$. Чёрная линия – аналитическое решение, красная линия – численное решение



А



Б

Рис. 32 Распределение стесненной (а) и свободной (б) дилатации по толщине слоев структуры MoSi₂-графит при равномерном нагреве на 1000°C.

Сплошная линия – модель пористых сред ($\xi^F = 0$), штриховая линия – модель пористых сред с учетом дефектности ($\xi^F = 1$ ГПа·мм), пунктир – классическое решение.

Важно отметить, что получаемое напряжённо-деформированное состояние достаточно сильно отличается в классической линейной теории упругости, теории упругости с микро-дилатацией и в теории упругости с микро-дилатацией и поверхностными эффектами. На **Рис. 33** представлено сравнение трёх различных решений.

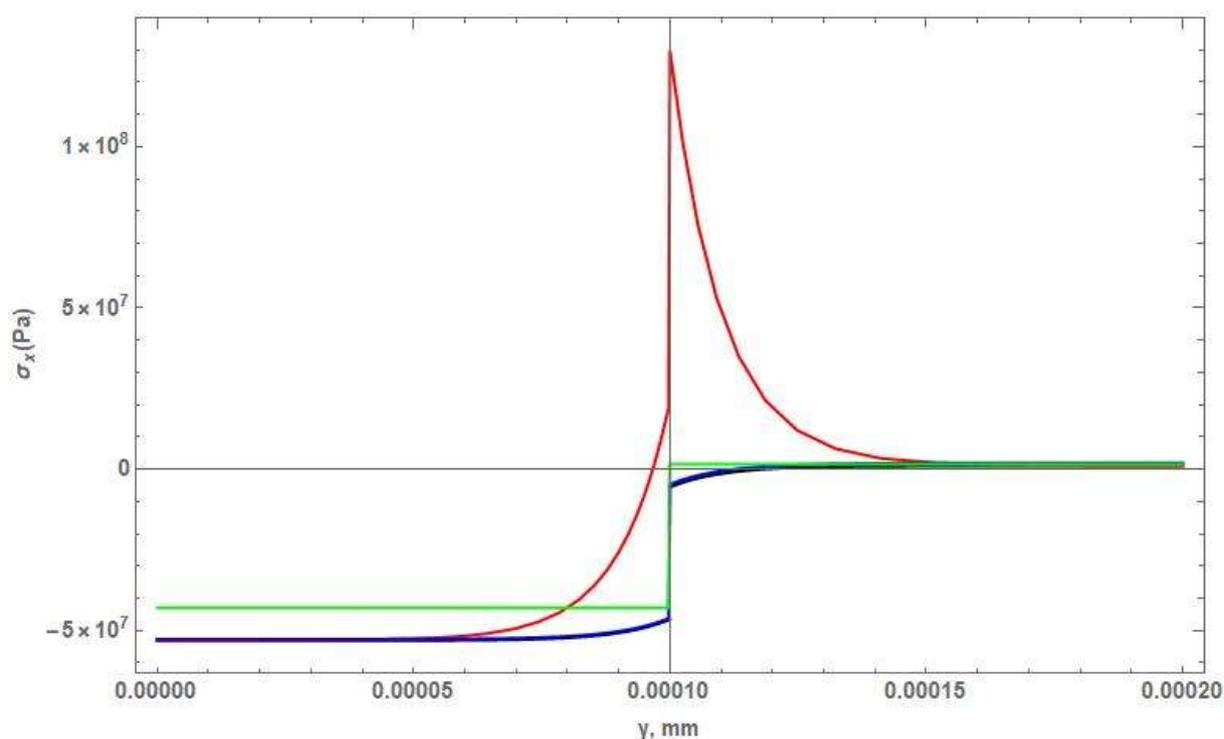


Рис. 33 Распределение напряжений по толщине слоев структуры MoSi₂-графит в случае идеального и поврежденного ($\xi^F = 1 \text{ ГПа} \cdot \text{мм}$) контакта слоев при равномерном нагреве на 1000 °С. Зелёная линия – классическое решение, синяя линия – теория упругости с микро-дилатацией, красная линия – теория упругости с микро-дилатацией и поверхностными эффектами

В результате расчетов можно сделать следующие выводы. Мы рассмотрели покрытие, у которого КТР выше, чем КТР подложки. В такой структуре при нагреве в рамках классической модели термоупругости в покрытии возникают постоянные сжимающие напряжения σ_x , а в подложке – постоянные

растягивающие напряжения. Вследствие малой толщины покрытия, напряжения в подложке оказываются крайне малы ($\sim 1 \text{ КПа}$), . Объемная деформация слоев положительна и постоянна по толщине каждого из слоев. Наибольшее расширение возникает в слое с большим значением КТР, то есть в данном случае – в покрытии.

Решение задачи термоупругости в модели пористых сред приводит к следующим результатам. Напряжения в покрытии вдали от границы сохраняют свой знак и увеличиваются по абсолютному значению. Уровень максимальных напряжений определяется неклассическими физическими модулями ξ и β . При повышении значений этих параметров происходит увеличение напряжений, аналогично, как в классической термоупругости, уровень напряжений зависит от модулей упругости, при заданных постоянных КТР. Вблизи контактной границы происходит локальное изменение напряжений, при этом в подложке напряжения меняют знак и становятся отрицательными (Рис. 29А). Объемные деформации в слоях структуры остаются положительными и увеличиваются, по сравнению с классическим решением (Рис. 31А). Перечисленные эффекты связаны с влиянием поля пористости (свободной дилатации). Из рисунка Рис. 32Б видно, что в случае идеального контакта значение φ увеличивается в покрытии на 5%, а в подложке на 4,8%, при этом вблизи границы слоев существует переходная зона значений φ , а непосредственно на контакте слоев изменение объемного содержания в покрытии и в подложке одинаково, что является следствием контактных условий модели. Ширина указанной переходной зоны, как и ширина протяженности локальных эффектов в напряжениях на Рис. 29, определяется значением масштабных параметров l_1 и l_2 .

При учете дефектности вблизи поврежденной границы возникает локальная концентрация напряжений, как в материале покрытия, так и в материале подложки (Рис. 32Б). При достаточно больших значениях поверхностного параметра ξ^F в покрытии могут возникать опасные растягивающие напряжения,

которые при удалении от поврежденной границы уменьшаются и выходят на уровень, соответствующий решению по модели пористых сред без учета дефектности. Со стороны подложки также возникает значительная концентрация растягивающих напряжений, которые в данном случае даже превышают типичное значение предела прочности для графита.

Также, отметим, что вблизи поврежденной границы происходит локальное уменьшение объемных деформаций (**Рис. 29Б**) и, при выбранных в нашем случае значениях параметров, практически неизменным остается значение параметра φ . Последнее означает, что, в то время как во всем материале происходит обратимое «упругое» уменьшение объемного содержания пор, вызванное нагревом (в модели пористых сред $\varphi = P_r - P$, и если $\varphi > 0$, то значение пористости в текущем состоянии P меньше, чем в исходном P_r), вблизи границы пористость остается неизменной и, таким образом, в рамках выбранной модели, граница оказывается наиболее поврежденной областью структуры.

Интересно отметить ещё одну особенность решения. Когда параметр ξ^F достигает определённого «максимального» значения, то при дальнейшем росте этого параметра напряжённо деформированное состояние практически не изменяется. Смори **Рис. 34**.

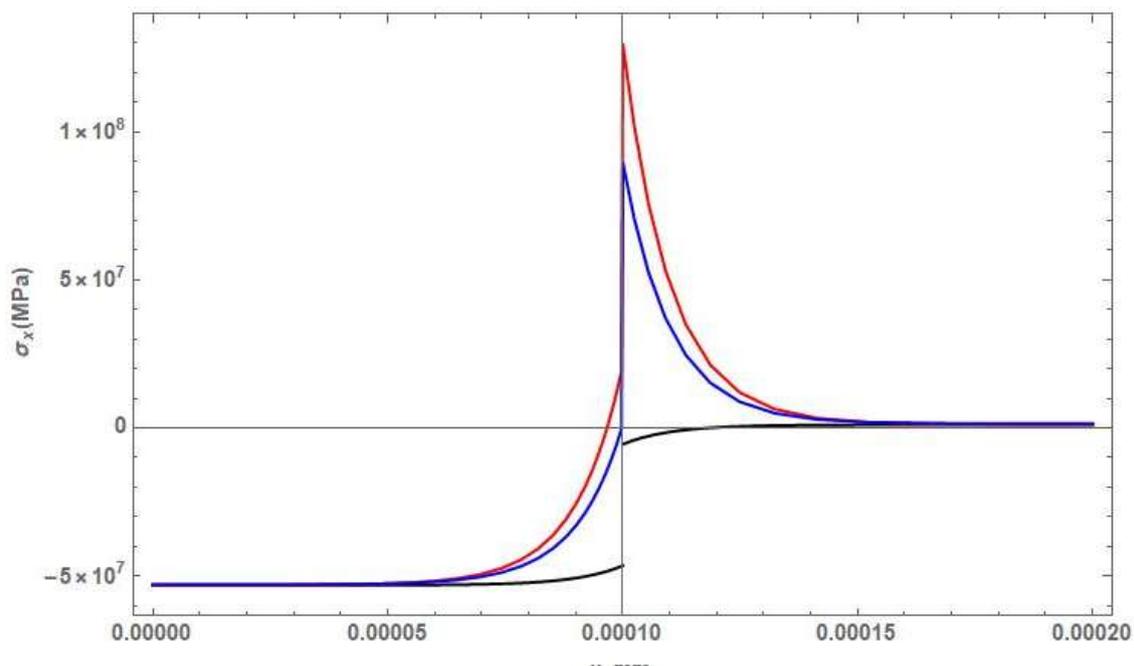


Рис. 34 Распределение напряжений по толщине слоев структуры MoSi₂-графит в случае поврежденного (красная линия $\xi^F = 1$ ГПа·мм, синяя линия $\xi^F = 0.1$ ГПа·мм) контакта слоев при равномерном нагреве на 1000 °С. чёрная линия – решение для микро-дилатационной теории упругости без поверхностных эффектов

6. Деформации пористого полого цилиндра в условиях неравномерного прогрева в микро-дилатационной теории упругости

6.1 Постановка аналитического решения задачи в рамках классической теории упругости

Рассмотрим задачу неравномерного прогрева толстостенного цилиндра с внутренним радиусом r_i и внешним радиусом r_0 . Температура изменяется только в радиальном направлении, и задача является осесимметричной. Необходимо определить напряжения и изменение пористости в нагреваемом цилиндре с учетом эффектов микро-дилатации.

Подробное решение для задачи термоупругости полого цилиндра в рамках классической теории термоупругости можно найти в [98]. В классической теории термоупругости общее решение для температурных напряжений в рассматриваемой задаче даётся формулой:

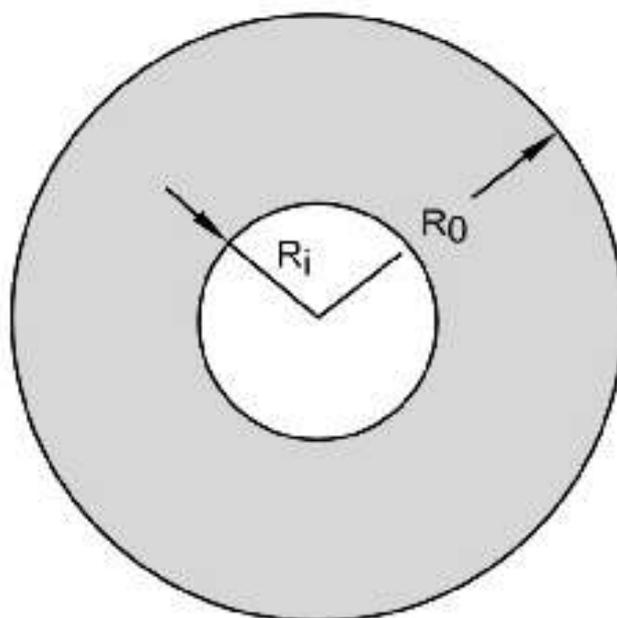


Рис. 35 Геометрия для задачи неравномерного прогрева цилиндра

$$\sigma_r = \frac{C_3}{r^2} + C_2 + \frac{C_1}{4}(2\log r - 1) - \frac{E\alpha_c}{r^2} \int T r dr \quad (100)$$

Где T (температура) – это функция, зависящая только от радиуса.

Для того, чтобы не возникло путаницы для коэффициента линейного расширения введена константа α_c . Напомним, что одна из микро-дилатационных констант обозначена как α . Из-за симметрии уходит константа C_1 .

$$\sigma_r = \frac{C_3}{r^2} + C_2 - \frac{E\alpha_c}{r^2} \int T r dr \quad (101)$$

После использования граничных условий $\sigma_r(r_i) = \sigma_r(r_0) = 0$ определяем константы C_2 и C_3 .

$$\sigma_r = \frac{E\alpha_c}{r^2} \left\{ \frac{r^2 - r_i^2}{r_0^2 - r_i^2} \int_{r_i}^{r_0} T(\xi) d\xi - \int_{r_i}^r T(\xi) d\xi \right\} \quad (102)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E\alpha_c}{r^2} \left\{ \frac{r^2 + r_i^2}{r_0^2 - r_i^2} \int_{r_i}^{r_0} T(\xi) d\xi - \int_{r_i}^r T(\xi) d\xi - T r^2 \right\} \quad (103)$$

Для радиально симметричного случая уравнение теплопроводности принимает вид (104):

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (104)$$

После интегрирования получаем:

$$T = A_1 \log r + A_2 \quad (105)$$

Используя граничные условия $T(r_i) = T_i, T(r_0) = 0$, можно найти константы A_1 и A_2 .

$$T = \frac{T_i}{\log\left(\frac{r_i}{r_0}\right)} \log\left(\frac{r}{r_0}\right) = \frac{T_i}{\log\left(\frac{r_0}{r_i}\right)} \log\left(\frac{r_0}{r}\right) \quad (106)$$

Подставив в уравнения для напряжений (102)-(103), получаем:

$$\sigma_r = \frac{E\alpha_c T_i}{2\log(r_0 / r_i)} \left\{ -\log\left(\frac{r_0}{r}\right) - \frac{r_i^2}{r_0^2 - r_i^2} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \log\left(\frac{r_0}{r_i}\right) \right\} \quad (107)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E\alpha_c T_i}{2\log(r_0 / r_i)} \left\{ 1 - \log\left(\frac{r_0}{r}\right) - \frac{r_i^2}{r_0^2 - r_i^2} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) \log\left(\frac{r_0}{r_i}\right) \right\} \quad (108)$$

Таким образом, если распределение температуры по толщине цилиндра известно, то классическое решение для напряжений записывается в аналитическом виде (107), (108). В микро-дилатационной теории будем искать напряжения численно методом конечных элементов. Получаемые решения будем сопоставлять с классическим (107), (108).

Это решение дано для плоского напряжённого состояния ($\sigma_z = 0$, применимо для тонких объектов, когда характерный размер в направлении z мал). Легко преобразовать решение для плоского деформированного случая ($\varepsilon_z = 0$, применимо объектов, в которых характерный размер в направлении z гораздо больше характерных размеров по x и y). Для этого нужно просто преобразовать модули упругости $E \rightarrow \frac{E}{(1-\nu^2)}$; $\nu \rightarrow \frac{\nu}{1-\nu}$. В дальнейшем решение будет дано для плоского деформируемого случая

6.2 Постановка численного решения задачи

Решение строиться методом конечных элементов. Используется конечно-элементный комплекс COMSOL Multiphysics.

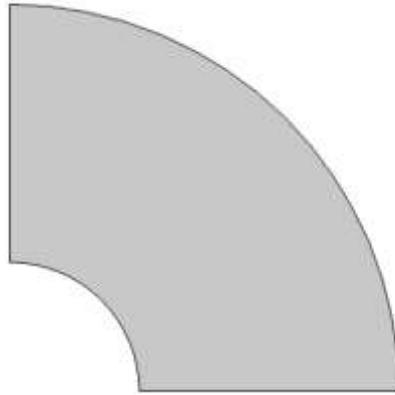


Рис. 36 Пример геометрии модели в программе COMSOL Multiphysics.

Внутренний радиус r_i , внешний радиус r_0

Создаётся двумерная геометрическая модель (**Рис. 36**). Для уменьшения объемов расчетов создаётся одна четверть модели, для которой задаются условия симметрии. На **Рис. 37** показаны граничные условия для перемещений и температуры.

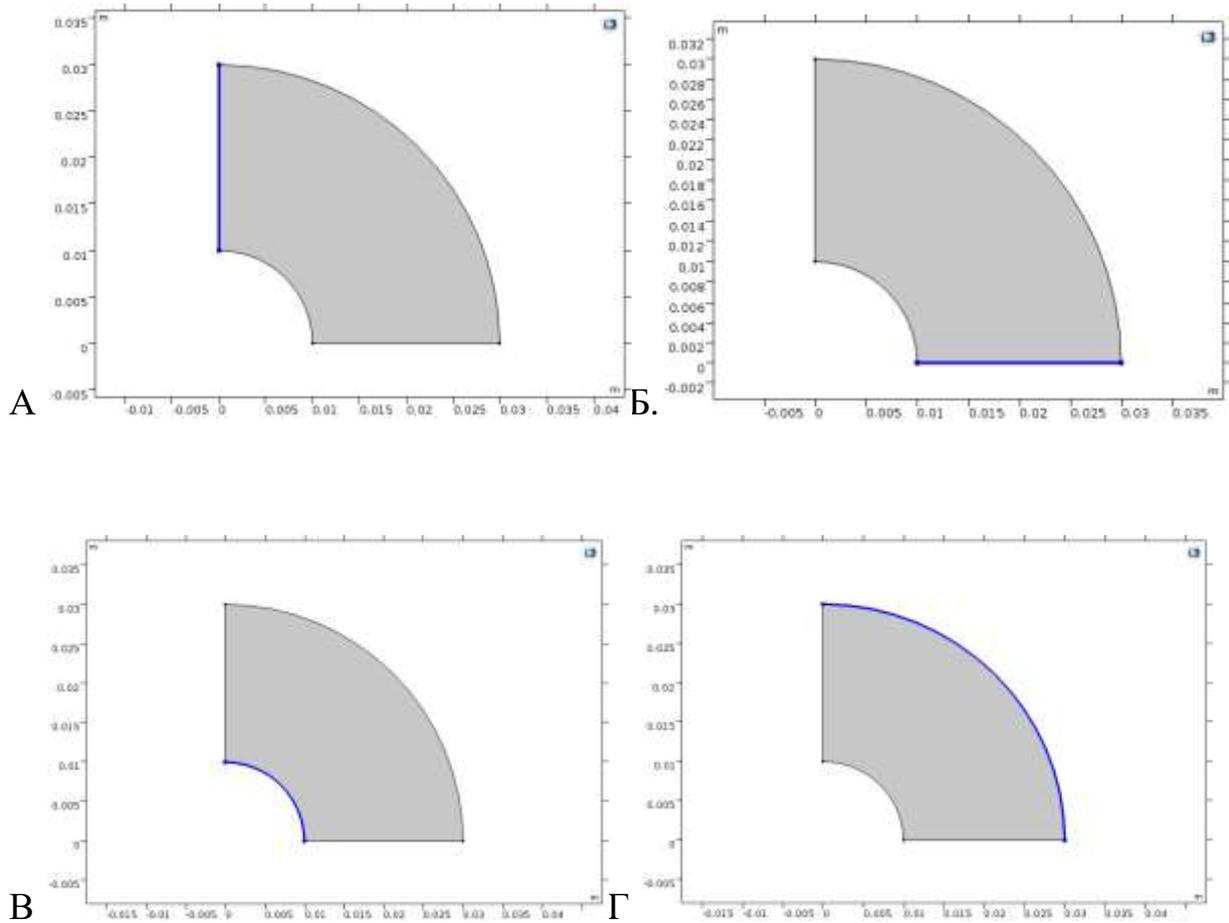


Рис. 37 Граничные условия для перемещений (условия симметрии) и температуры

$$A \ u_x = 0, \ B \ u_y = 0, \ V. \ T_{r=r_i} = 100, \ G. \ T_{r=r_0} = 0$$

На **Рис. 38** показан пример конечно-элементной сетки. На **Рис. 39** показано распределение температуры в конечно-элементной модели.

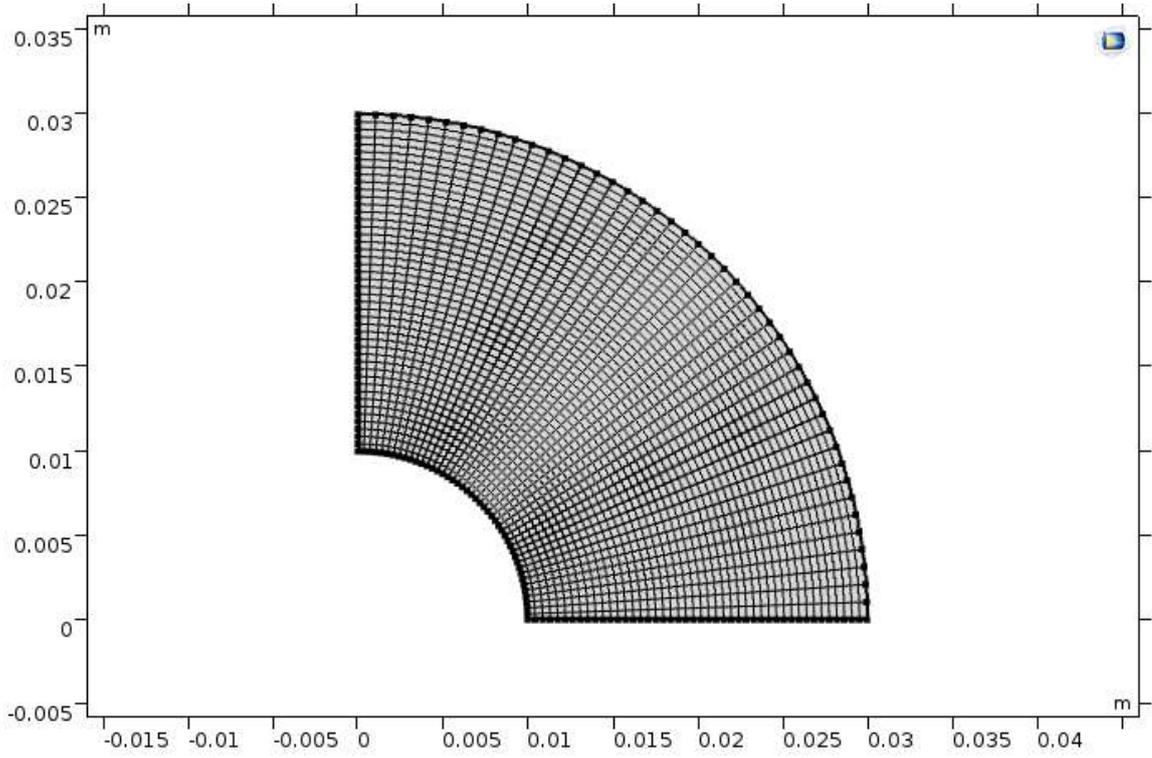


Рис. 38 Пример конечно-элементной сетки

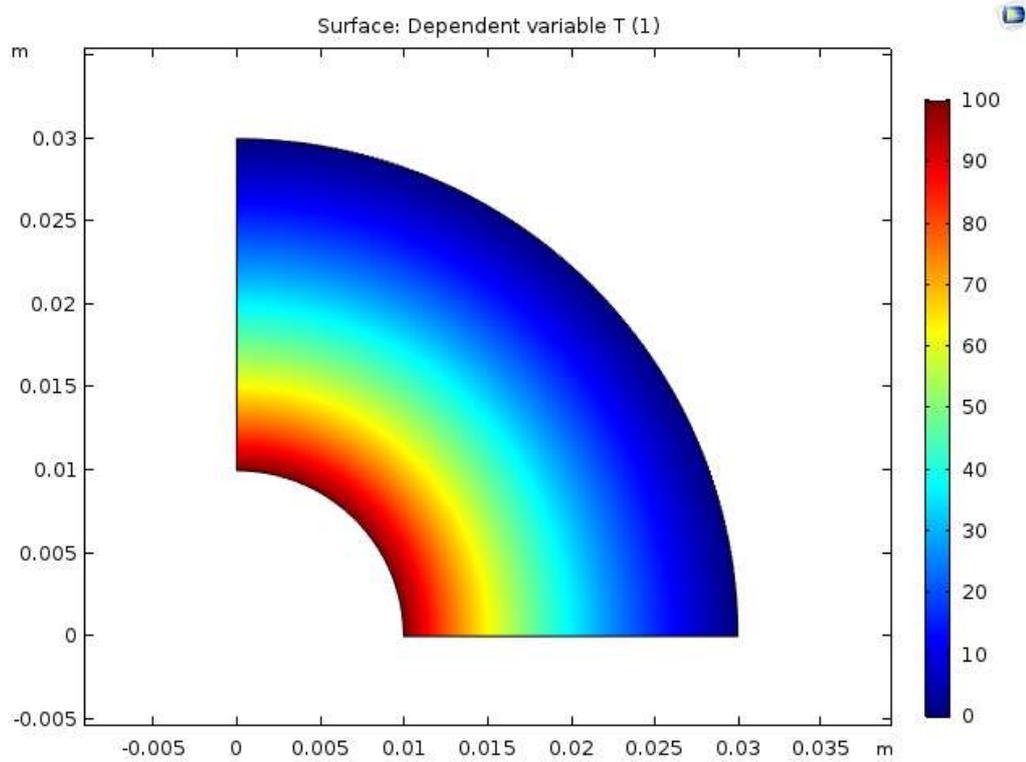


Рис. 39 Распределение температуры

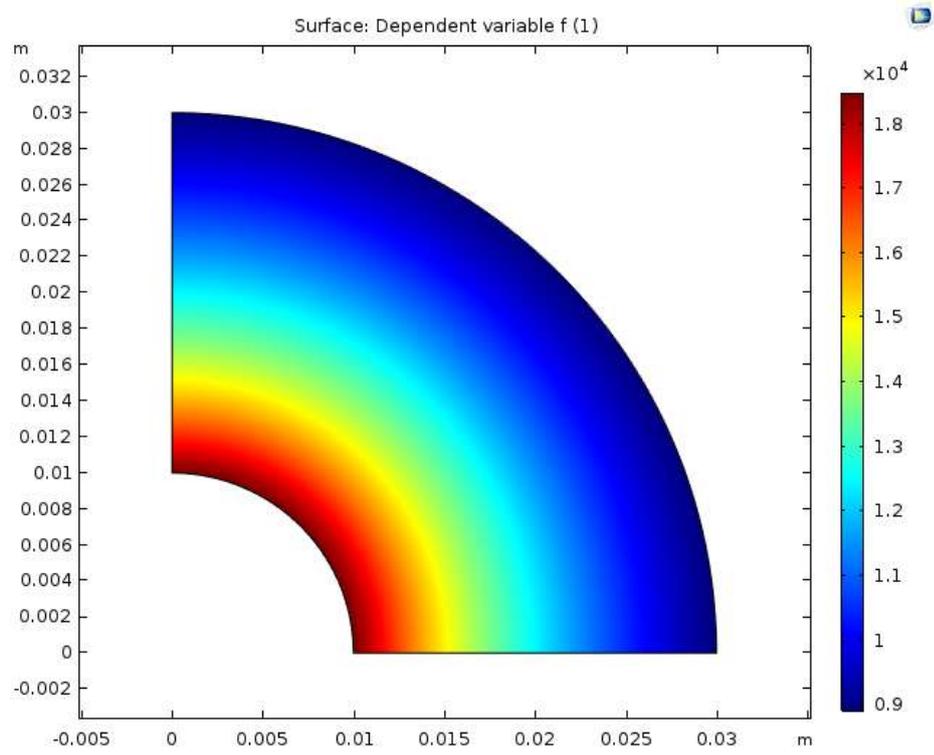


Рис. 40 Распределение микро-дилатации ϕ при $r_i = 0.01$, $r_0 = 0.03$, $N = 0.9$

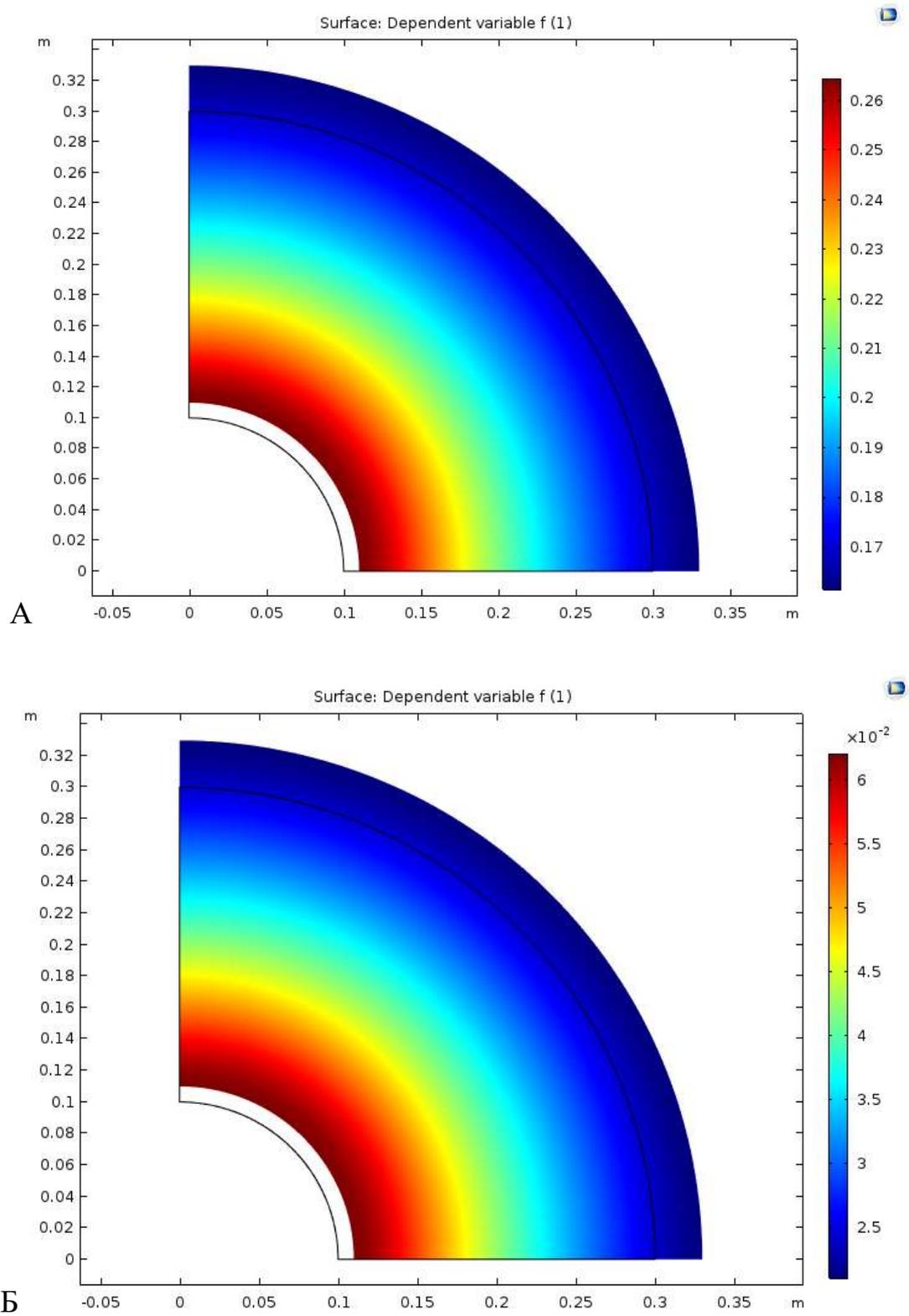


Рис. 41 Деформированное состояние. Распределение изменения пористости ϕ при

$$r_i = 0.1, r_0 = 0.3, \text{ A } N = 0.9, \text{ B } N = 0.5$$

6.3 Результаты численного моделирования

Сравним результаты численного и аналитического решения для двумерного случая.

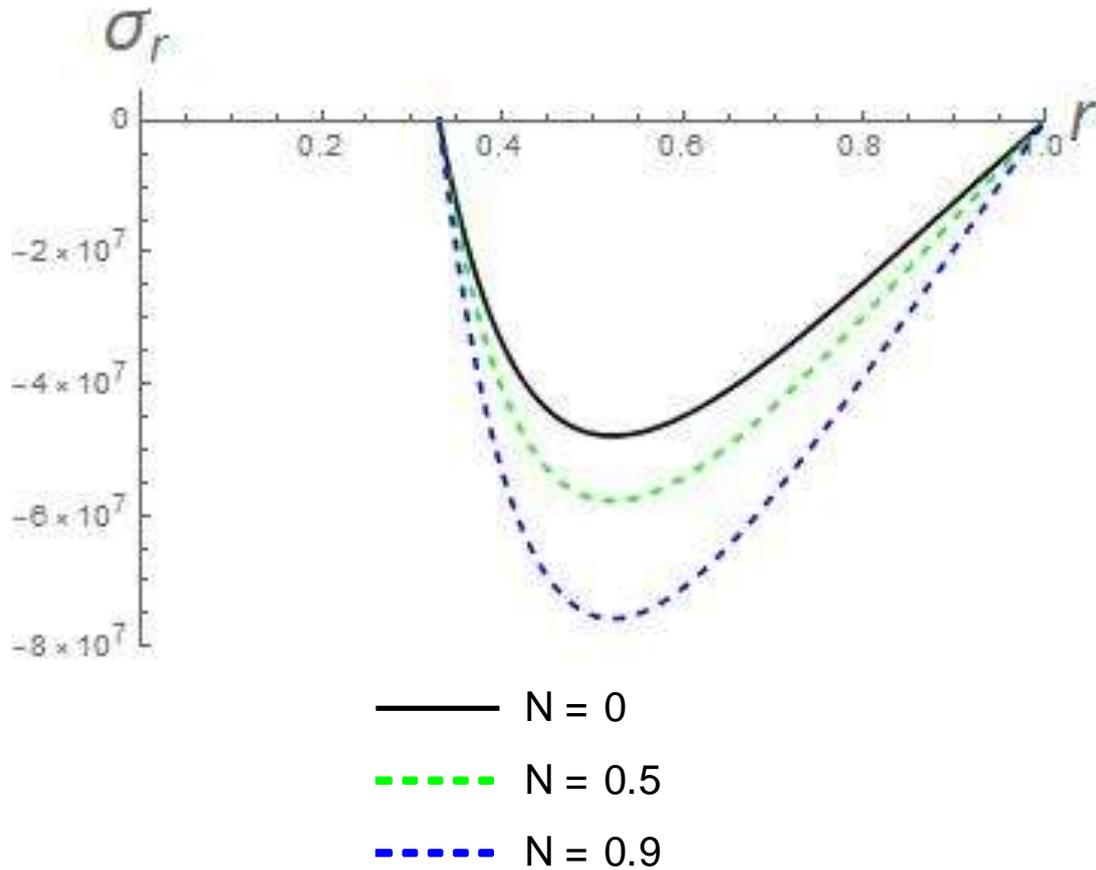


Рис. 42 Распределение напряжений σ_r по радиусу. Чёрным цветом показано классическое решение, зелёным – решение микро-дилатационной теории при $N=0.5$, синим при $N=0.9$. Внешний радиус $r_0 = 0.03$, внутренний радиус $r_i = 0.01$.

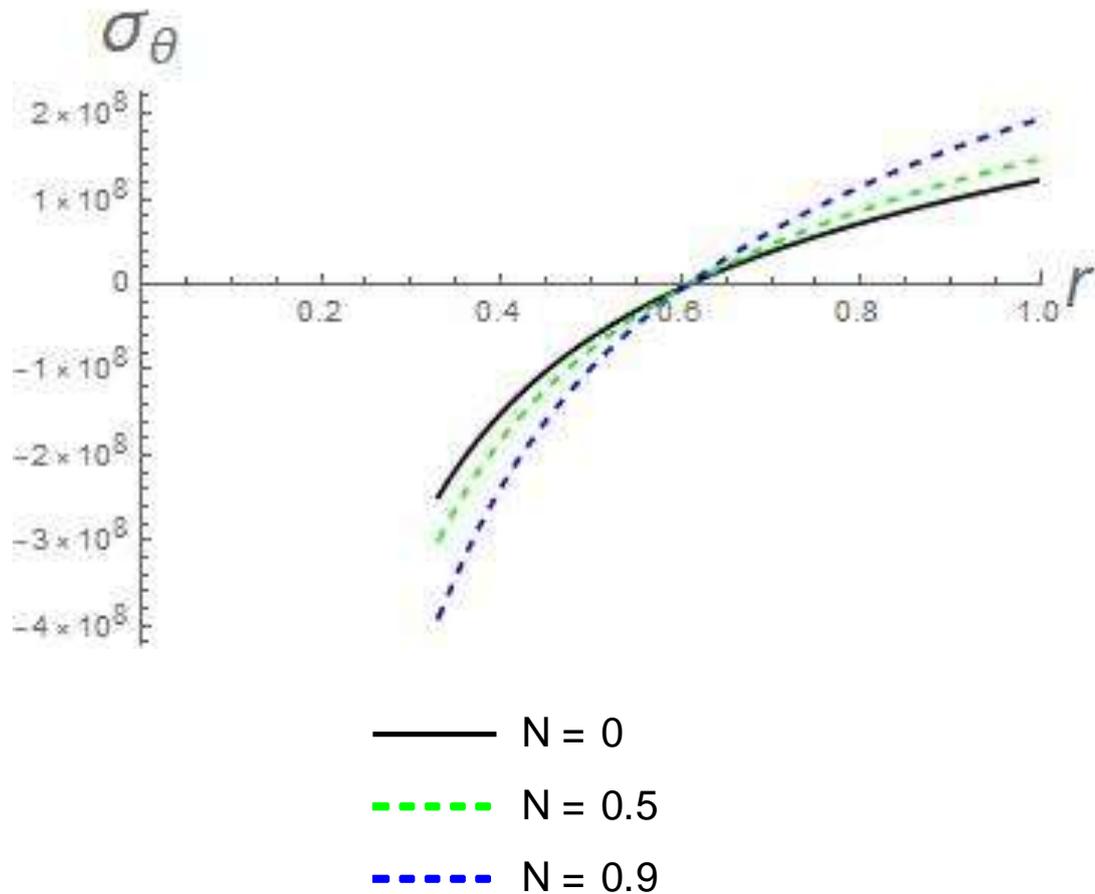


Рис. 43 Распределение напряжений σ_θ по радиусу. Чёрным цветом показано классическое решение, зелёным – решение микро-дилатационной теории при $N=0.5$, синим при $N=0.9$. Внешний радиус $r_0 = 0.03$, внутренний радиус $r_i = 0.01$.

В рамках классической теории термоупругости при одинаковых значениях отношения внешнего радиуса диска r_0 к внутреннему радиусу r_i , будут получаться одинаковые напряжённо-деформируемые состояния.

Сравним распределение напряжений для разных значений N при одинаковых значениях $r_0 / r_i = 3$. Варьировать будем внешний радиус r_0 .

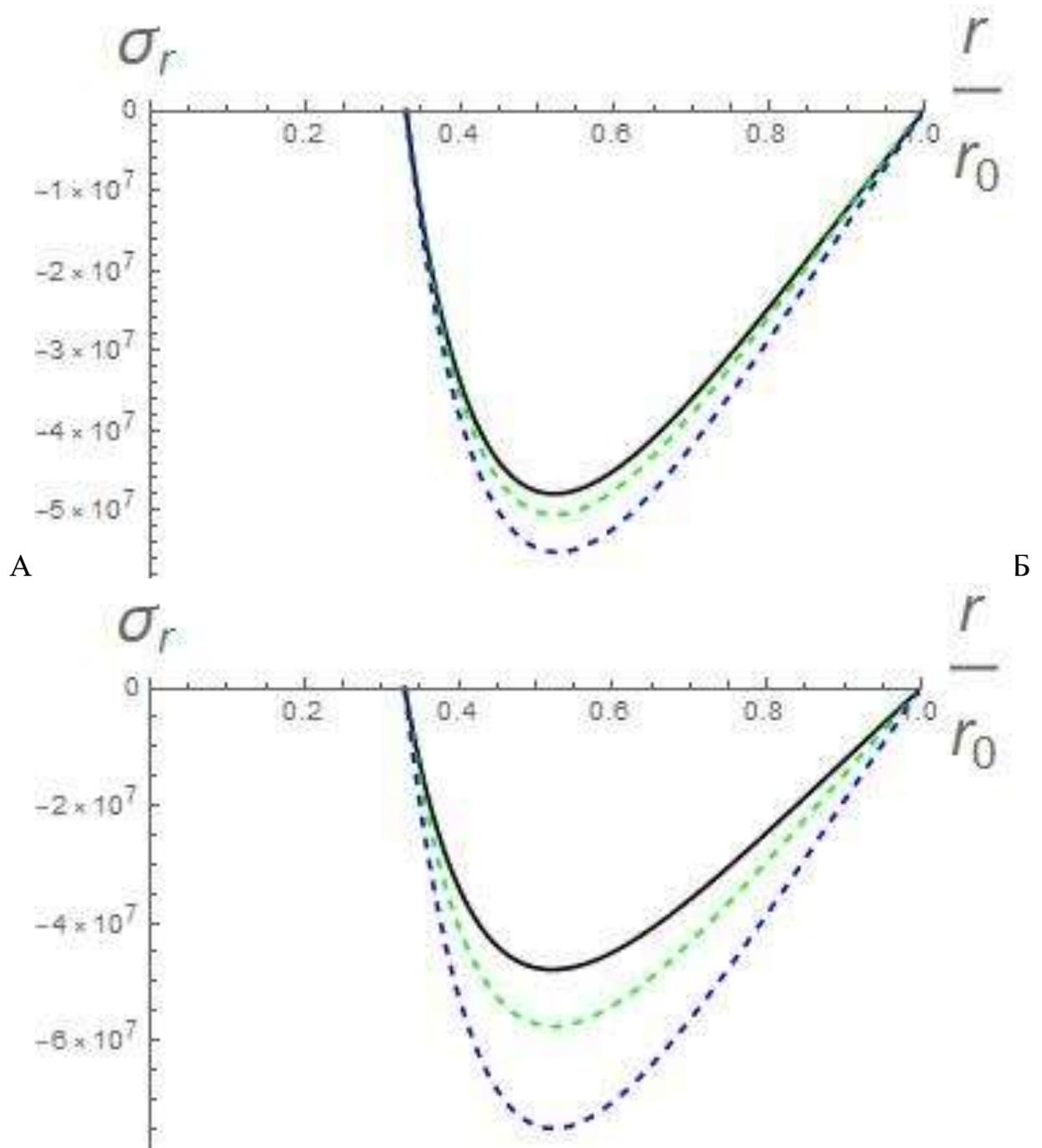


Рис. 44 Распределение напряжений σ_r по радиусу. Чёрным цветом показано классическое решение, зелёным – решение микро-дилатационной теории при $N=0.5$, синим при $N=0.9$. А. Внешний радиус $r_0 = 0.03$ м, внутренний радиус $r_i = 0.01$. Б. Внешний радиус $r_0 = 0.3$, внутренний радиус $r_i = 0.1$.

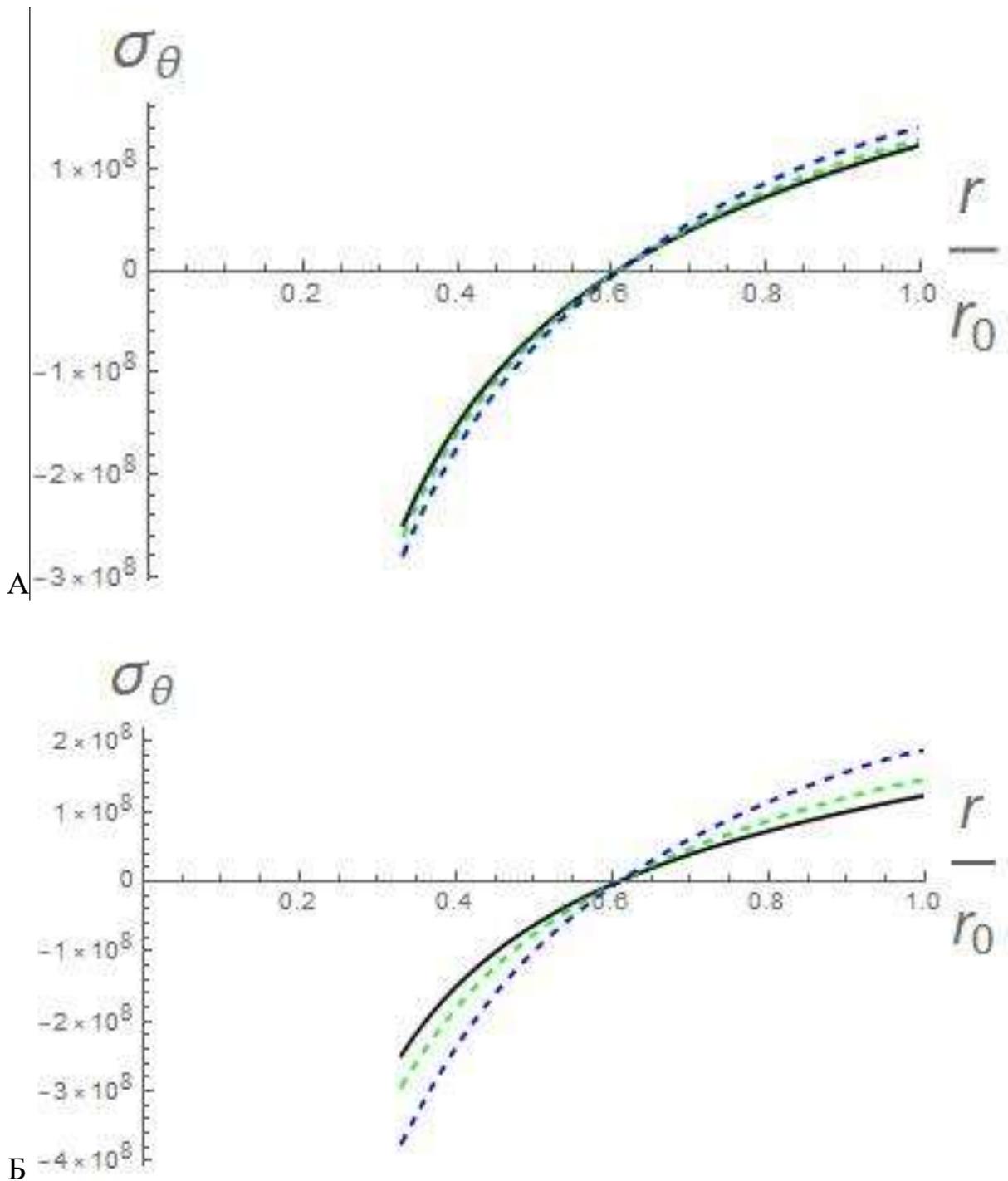


Рис. 45 Распределение напряжений σ_θ по радиусу. Чёрным цветом показано классическое решение, зелёным – решение микро-дилатационной теории при $N=0.5$, синим при $N=0.9$. А. Внешний радиус $r_0 = 0.03$ м, внутренний радиус $r_i = 0.01$. Б. Внешний радиус $r_0 = 0.3$, внутренний радиус $r_i = 0.1$.

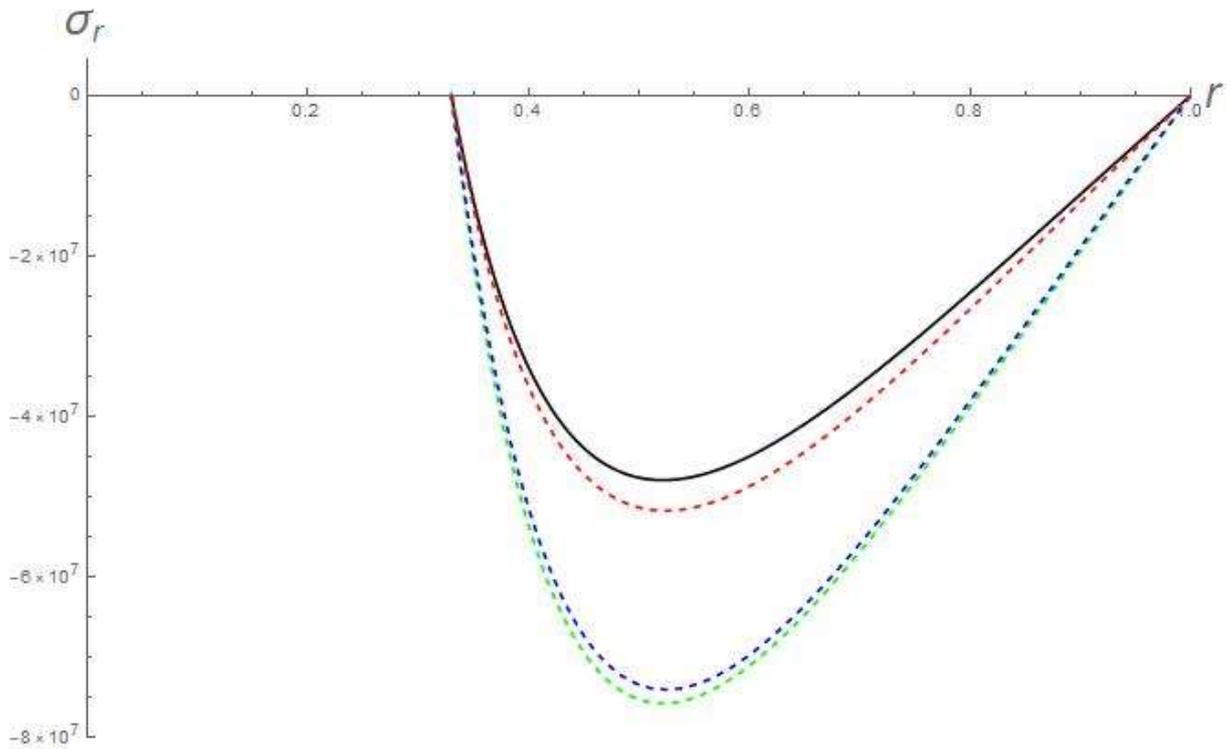


Рис. 46 Распределение напряжений σ_r по радиусу. Во всех случаях $r_0 / r_i = 3$. Чёрным цветом показано классическое решение, Пунктиром показаны решения в рамках микро-дилатационной теории при $N=0.9$. зелёным – решение микро-дилатационной теории при $r_0 = 0.03$, синим при $r_0 = 0.003$, красным при $r_0 = 0.0003$.

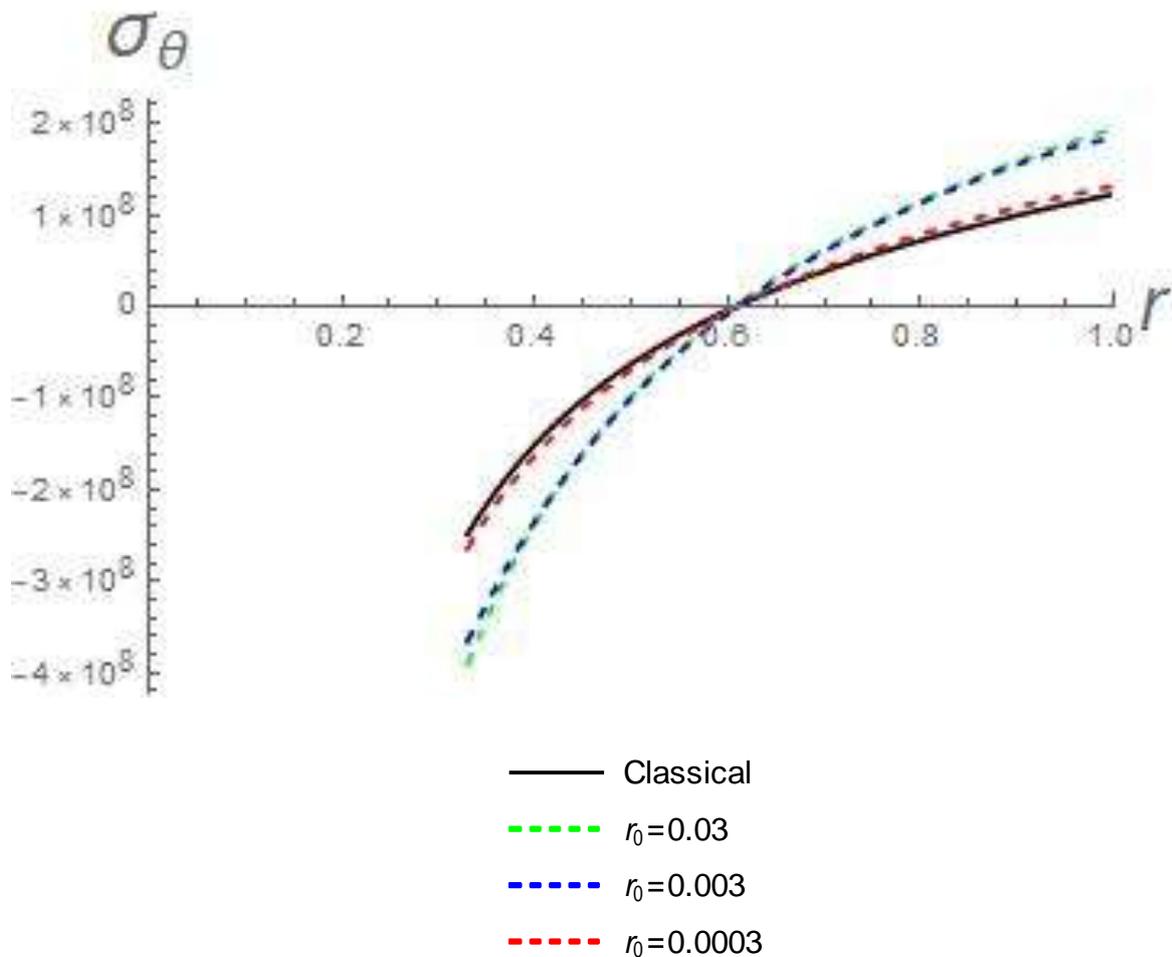


Рис. 47 Распределение напряжений σ_θ по радиусу. Во всех случаях $r_0 / r_i = 3$. Чёрным цветом показано классическое решение, Пунктиром показаны решения в рамках микро-дилатационной теории при $N=0.9$. зелёным – решение микро-дилатационной теории при $r_0 = 0.03$, синим при $r_0 = 0.003$, красным при $r_0 = 0.0003$.

Из графиков видно, что в рамках микро-дилатационной теории упругости даже при одинаковых значениях r_0 / r_i наблюдается разное напряжённо-деформированное состояние. Максимальные напряжения растут при увеличении внешнего радиуса r_0 .

Рассмотрим функцию пористости для различных значений r_0 при одинаковом соотношении $r_0 / r_i = 3$. Можно предположить, что рост вклада микро-дилатации зависит от того, что чем больше радиус цилиндра, тем сильнее изменяется в направлении радиуса функция изменения пористости ϕ (Рис. 48).

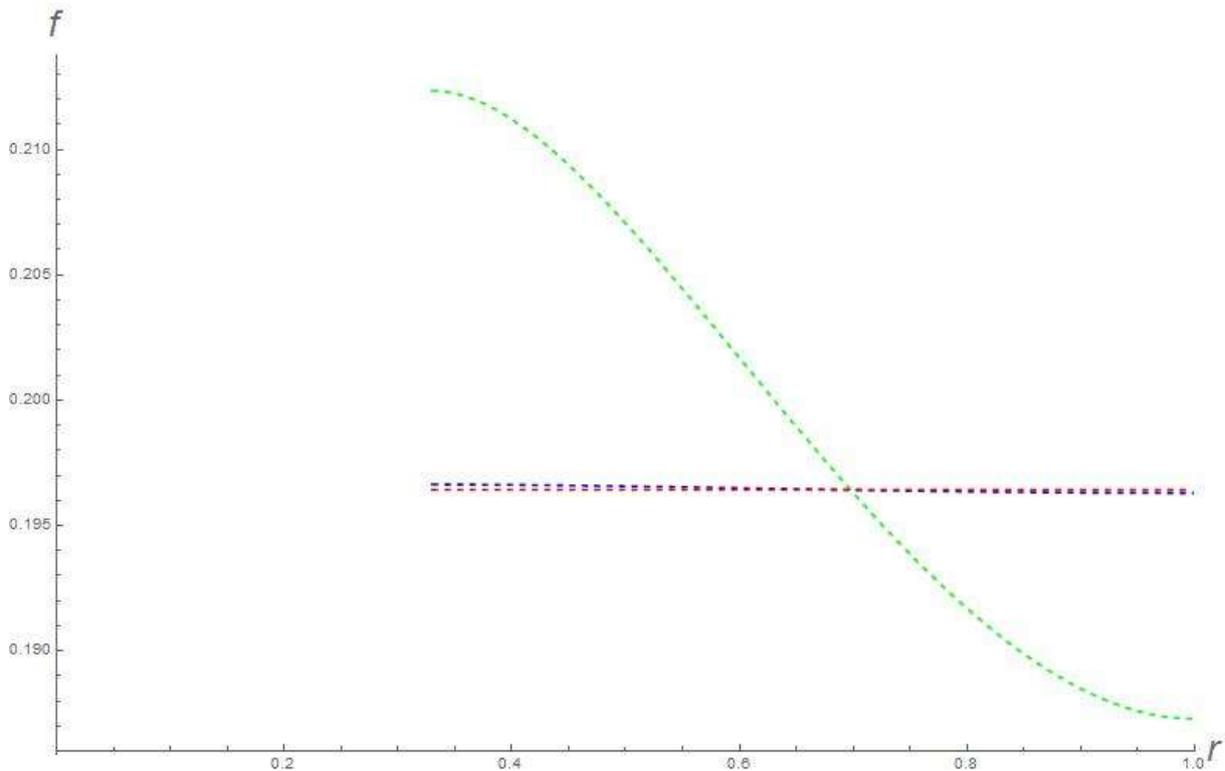


Рис. 48 Распределение изменения пористости ϕ по радиусу. Во всех случаях $r_0 / r_i = 3$. Пунктиром показаны решения в рамках микро-дилатационной теории при $N=0.9$. зелёным – решение микро-дилатационной теории при $r_0 = 0.03$, синим при $r_0 = 0.003$, красным при $r_0 = 0.0003$.

6.4 Основные результаты и выводы по главе

1. Построено конечно-элементное решение задачи прогрева цилиндра в рамках микро-дилатационной теории термоупругости.
2. Проанализированы масштабные эффекты, возникающие в рамках теории.

3. Показано, что в микро-дилатационной теории упругости при одинаковых значениях $r_0 / r_i = 3$ при увеличении размеров напряжённо-деформируемое состояние изменяется в отличие от классической теории упругости.

4. Масштабные эффекты проявляются только в ограниченном диапазоне значений, при очень больших или очень маленьких размерах радиуса напряжения будут стремиться к постоянным значениям.

Заключение

Основные результаты диссертационной работы:

1. Впервые построено полуобратное аналитическое решение для задачи чистого изгиба балки в рамках микро-дилатационной теории упругости с поверхностными эффектами. Показано, что построенное решение может быть использовано для обработки экспериментальных данных, необходимых для идентификации параметров рассматриваемой неклассической теории.

2. Впервые реализовано трехмерное численное моделирование в рамках микродилатационной теории упругости. Показано, что для задачи о чистом изгибе балки в отличие от аналитического решения, в численном решении удастся точно выполнить все граничные условия, при этом напряженное состояние балки оказывается трехмерным и возникает деформация сечений.

3. На основе сопоставления результатов численного и аналитического моделирования, показано, что аналитическое решение задачи чистого изгиба позволяет получать достаточно точные оценки для прогноза влияния неклассических масштабных и поверхностных эффектов на эффективную жесткость и напряженное состояние пористых балок.

4. Впервые построено численное и аналитическое решение для задачи о температурных деформациях пористого слоя, лежащего на массивном основании при равномерном прогреве. Впервые построено численное решение задачи о полом цилиндра в условиях неравномерного нагрева. Показано наличие масштабных эффектов, возникающих в решениях этих задач, связанных с эффектами микро-дилатации в объеме и на поверхности среды. Показано, что вследствие эффектов микро-дилатации (то есть неравномерного изменения пористости, связанное с деформированием материала) в слоях пористых покрытий может изменяться знак напряжений, что может быть существенным при оценке их прочности.

Список литературы

1. **Бочаров О. Б., Рудяк В. Я., Серяков А. В.** Простейшие модели деформирования пороупругой среды, насыщенной флюидами. Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2014, №2, стр. 54-68.
2. **Голдштейн Р.В., Городцов В.А., Лисовенко Д.С.** Об отрицательности коэффициента Пуассона для анизотропных материалов. Доклады академии наук, 2009, номер 5, стр. 614-616.
3. **Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Тарлаковский Д.В.** Теория упругости и пластичности. Учебник для вузов. М: Физматлит, 2002 г. 416 с.
4. **Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П.** Нелинейные продольные волны в стержне, материал которого обладает отрицательным коэффициентом Пуассона. Проблемы прочности и пластичности. 2017, т. 79, с. 398-412.
5. **Золотарев П. П.** Распространение звуковых волн в насыщенной газом пористой среде с жестким скелетом // Инж. журн. — 1964. — Т. 4.
6. **Кажаяев В.В., Семерикова Н.П.** Продольные волны в стержне из материала с отрицательным коэффициентом Пуассона. Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011, №4, с. 1509-1510.
7. **Лурье С.А., Белов П.А.** Вариационная формулировка математических моделей сред с микроструктурами. Математическое моделирование систем и процессов. 2006, № 14. Стр. 114-132.
8. **Лурье С.А., Соляев Ю.В., Устенко А.Д.** Исследование возможности применения микродилатационной теории упругости для моделирования метаматериалов с отрицательным коэффициентом пуассона. Материалы конференции математическое моделирование в естественных науках 2017, т. 1 страницы: 109-111.
9. **Никабадзе М.У.** К построению собственных тензорных столбцов в микрополярной линейной теории упругости. Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2014.

10. **Никабадзе М.У.** Некоторые варианты уравнений микрополярных теорий оболочек. Прикладная математика и математическая физика. 2015, DOI: 10.0000/ammp1511xx.
11. **Николаевский В. Н.** О распространении продольных волн в насыщенных жидкостью упругих пористых средах // Инж. журн. — 1963. — Т. 3. — Вып. 2.
12. **Николаевский В. Н.** Механика пористых и трещиноватых сред. — Москва : Недра, 1984.
13. **Соляев Ю. О., Лурье С. А., Волков А. В.** Численное решение задачи чистого изгиба балки в рамках дилатационной теории упругости.: Вычислительная механика сплошных сред, 2017.
14. **Тимошенко С.П. Гудьер Дж.** Теория упругости, М: Физматлит, 1975 г.
15. **Тимошенко С. П.** История науки о сопротивлении материалов, Государственное издательство технико-технической литературы, 1957.
16. **Френкель Я. И.** К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. — 1944. — Т. 8. — №. 4.
17. **Abbas, I. A., & Kumar, R.** Response of Thermal Source in Initially Stressed Generalized Thermoelastic Half-Space with Voids. Journal Of Computational And Theoretical Nanoscience, 2014, 11(6), 1472–1479.
18. **Andreus, U, Batra, R, and Porfiri, M.** Vibrations of cracked Euler-Bernoulli beams using Meshless Local Petrov- Galerkin (MLPG) method, Comput Model Eng Sci (CMES) 2005; 9(2): 111–131.
19. **Baimova J.A., Rysaeva L.KH., Dmitriev S.V., Lisovenko D.S., Gorodtsov V.A., Indeitsev D.A.** Auxetic behaviour of carbon nanostructures, MATERIALS PHYSICS AND MECHANICS 2017 DOI: 10.18720/MPM.3312017_1
20. **Batra, RC, and Yang, JS.** Saint-Venant's principle for linear elastic porous materials. J Elast 1995; 39(3): 265–271.
21. **Belov, P. A., & Lurie, S. A.** A continuum model of microheterogeneous media. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2009, 73(5), 599–608.

22. **Belov, P. A., & Lurie, S. A.** Continual theory of adhesion interactions of damaged media. *Mechanics of composite materials and structures*, 2009, 15 (4), 311-330.
23. **Benini E.** *Progress in Gas Turbine Performance*, Publisher: InTech, 2013, 268 p.
24. **Bîrsan, M.** Bending Theory of Porous Thermoelastic Plates. *Journal of Thermal Stresses*, 2003, 26, 67–90.
25. **Birsan, M.**, Saint-venant’s problem for Cosserat shells with voids. *International Journal of Solids and Structures*. 2005. 42 (7), 2033e2057.
26. **Birsan, M.**, On the theory of elastic shells made from a material with voids. *International Journal of Solids and Structures*. 2006a. 43 (10), 3106e3123.
27. **Birsan, M.**, On the theory of elastic shells made from a material with voids. *International Journal of Solids and Structures* 2006a. 43 (10), 3106e3123.
28. **Bîrsan M, Altenbach H.** On the theory of porous elastic rods. *International Journal of Solids and Structures* 2011; 48(6): 910–924.
29. **Birsan, M., & Altenbach, H.** Theory of thin thermoelastic rods made of porous materials. *Archive Of Applied Mechanics*, 2011 81(10), 1365–1391.
30. **Bishay P. L., Repka M, Sladek V., and Sladek J.** “On the characterization of porosity-related parameters in micro-dilatation theory”.:*Acta Mech.*, pp. 1–14, 2017.
31. **Biot M.A.** General theory of three dimensional consolidation. *Journal of Applied Physics*, 1941. V. 12, pp. 155–164.
32. **Capriz, G.**, *Continua with Microstructure*. In: *Springer Tracts in Natural Philosophy* 1989., vol. 35. Springer-Verlag, New York.
33. **Capriz G, Podio-Guidugli P.** Materials with Spherical Structure. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 1981; 75: 269.
34. **Chandrasekharaiah, D. S.** Effects Of Surface Stresses And Voids On Rayleigh-Waves In An Elastic Solid. *International Journal Of Engineering Science*, 1987, 25(2), 205–211.
35. **Chen, K.C., Lan, J.Y.**, Microcontinuum derivation of Goodman-Cowin theory for granular materials. *Con. Mech. Thermodyn.* 2008. 20, 331–345.

36. **Chirita, S., & Scalia, A.** On the spatial and temporal behavior in linear thermoelasticity of materials with voids. *Journal Of Thermal Stresses*, 2001, 24(5), 433–455.
37. **Ciarletta, M., Chiriță, S., Passarella, F.** Some results on the spatial behaviour in linear porous elasticity. *Archives of Mechanics*, 57(1), 43–65. 2005 .
38. **Ciarletta M, Iovane G, Sumbatyan MA.** On stress analysis for cracks in elastic materials with voids. *б.м. : International Journal of Engineering Science* 2003; 41(20): 2447–2461.
39. **Ciarletta, M., & Scalia, A.** On Uniqueness And Reciprocity In Linear Thermoelasticity Of Materials With Voids. *Journal Of Elasticity*, 1993 32(1), 1–17.
40. **Cowin S.C.** *The stresses around a hole in a linear elastic material with voids.* б.м. : *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 1984; 37: 441–465.
41. **Cowin, S.C.,** A note on the problem of pure bending for a linear elastic material with voids. *J. Elasticity* 1984 14, 227.
42. **Cowin, S.C.,** The viscoelastic behavior of linear elastic materials with voids. *J. Elasticity* 1985 15, 185–191.
43. **Cowin, S.C. & Nunziato, J.W.** Linear elastic materials with voids. *J Elasticity* (1983) 13: 125. <https://doi.org/10.1007/BF00041230>
44. **Cowin SC, Puri P.** The classical pressure vessel problems for linear elastic materials with voids. б.м. : *Journal of Elasticity* 1983.
45. **De Cicco, S., & Diaco, M.** A theory of thermoelastic materials with voids without energy dissipation. *Journal Of Thermal Stresses*, 2002, 25(5), 493–503.
46. **Dell’Isola, F, Andreaus, U, and Placidi, L.** At the origins and in the vanguard of peridynamics, non-local and higher gradient continuum mechanics. An underestimated and still topical contribution of Gabrio Piola. *Math Mech Sol* 2015; 20: 887–928. DOI: 10.1177/1081286513509811.
47. **Dell’Isola F, Batra RC.** Saint-Venant’s Problem for Porous Linear Elastic Materials. б.м. : *Journal of Elasticity* 1997; 47(1): 73–81.

48. **Dey, S., Gupta, S., Gupta, A.**, Propagation of love waves in an elastic layer with void pores. *Sadhana* 2004. 29, 355e363. doi:10.1007/BF02703687.
49. **Fang, C., Wang, Y., Hutter, K.**, A thermo-mechanical continuum theory with internal length for cohesionless granular materials. *Con. Mech. Thermodyn.* 2006. 17, 545–576.
50. **Ghiba, I.** Semi-inverse solution for Saint-Venant's problem in the theory of porous elastic materials. *J Mech* 2008; 27: 1060–1074.
51. **Goldstein R.V., Gorodtsov V.A., Lisovenko D.S., Volkov M** Auxetics among 6-constant tetragonal crystals. *Письма о материалах.* 2015.
52. **Goodman, M.A., Cowin, S.C.**, A continuum theory for granular materials. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1972. 44, 249–266.
53. **Gurtin, M., & Ian Murdoch, A.** A continuum theory of elastic material surfaces. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1975, 57(4), 291-323.
54. **Hutter, G.** Application of a microstrain continuum to size effects in bending and torsion of foams. *Int J Eng Sci* 2016; 101:81–91.
55. **Iesan, D.** Some Theorems in the theory of elastic materials with voids. *J Elast* 1985; 15(2): 215–224.
56. **Iesan, D.** A Theory Of Thermoelastic Materials With Voids. *Acta Mechanica* 1986, 60(1-2), 67–89.
57. **Iesan, D.** Second-order effects in the torsion of elastic materials with voids. *Z Angew Math Mech* 2005, 85(5), 351–365.
58. **Iesan, D.** Deformation of orthotropic porous elastic bars under lateral loading. *Arch Mech* 2010; 62(1): 3–20.
59. **Iesan D. Quintanilla R.** Decay estimates and energy bounds for porous elastic cylinders. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* March 1995, Volume 46, Issue 2, pp 268–28.
60. **Iovane, G, and Nasedkin, A.V.** Finite element analysis of static problems for elastic media with voids. *Comput Struct* 2005; 84(1-2): 19–24.

61. **Iovane G. and Nasedkin A.V.**, Some theorems about spectrum and finite element approach for eigenvalue problems for elastic bodies with voids, *Computers and Mathematics with Applications* 53(5), 789 – 802 (2007)
62. **Iovane G, Nasedkin AV.** Finite element dynamic analysis of anisotropic elastic solids with voids. *б.м. : Computers & Structures* 2009; 87(15-16): 981–989.
63. **Iovane, G., and A. V. Nasedkin.** "Modal analysis of piezoelectric bodies with voids. II. Finite element simulation." . *б.м. : Applied Mathematical Modelling* 34.1 (2010): 47-59.
64. **Iovane G. and Sumbatyan M.A.** “On dynamic stress analysis for cracks in elastic materials with voids,”. *б.м. : Int. J. Solids Struct.*, vol. 42, no. 16–17, pp. 4880–4889, 2005
65. **Jeong J, Ramézani H, Sardini P, et al.** Porous media modeling and micro-structurally motivated material moduli determination via the micro-dilatation theory. *б.м. : European Physical Journal: Special Topics* 2015; 224(9): 1805–1816. .
66. **Jeong J, Sardini P, Ramézani H, et al.** Modeling of the induced chemo-mechanical stress through porous cement mortar subjected to CO₂: Enhanced micro-dilatation theory and 14C-PMMA method.: *Computational Materials Science* 2013; 69: 466–480.
67. **Kumar R. and Devi S.** Deformation in Porous Thermoelastic Material with Temperature Dependent Properties *Applied Mathematics & Information Sciences* 5(1) (2011), 132-147.
68. **Kumar R., Gupta V, and Abbas I,** Plane deformation due to thermal source in fractional order thermoelastic media, *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience* 10, 2520–2525 (2011).
69. **Kumar R. and Rani L.** “Deformation due to mechanical and thermal sources in generalized thermoelastic half-space with voids,” . *б.м. : J. Therm. Stress.*, vol. 28, no. 2, pp. 123–145, Jan. 2005a.

70. **Kumar, R., & Rani, L.** Interaction due to mechanical and thermal sources in thermoelastic half-space with voids. *Journal Of Vibration And Control*, 2005b, 11(4), 499–517.
71. **Liu, G., Bu, Z., & Liu, X.** The temperature distribution of a two-dimensional thermoelastic material with voids. *Heat Transfer-Asian Research*, 2010, 39(40902089).
72. **Lakes R. S.** “Experimental microelasticity of two porous solids,”. *б.м. : International Journal of Solids and Structures*, vol. 22, no. 1. pp. 55–63, 1986.
73. **Lakes R. S.** “Foam Structures with a Negative Poisson ’ s Ratio,” *Science (80-)*, vol. 235, no. 4792, pp. 1038–1040, 1987.
74. **Lakes R.S.** Physical meaning of elastic constants in Cosserat, void, and microstretch elasticity,. *J. Mech. Mater. Struct.*, vol. 11, no. 3, 2016.
75. **Lurie S.A., Belov P.A.** Theory of the media with kept dislocations. Particular cases: Cosserats media, Aero-Kuvshinskii's media, porous media, media with "twinning"// *Modern problems of mechanics of heterogeneous media: Issue of Institute of Applied Mechanics of Russian Acad. of Scs.*, 2006, Moscow, 1, 235–267.
76. **Lurie, S., Belov, P.:** Cohesion field: Barenblatt’s hypothesis as formal corollary of theory of continuous media with conserved dislocations. *Int. J. Fract.* 150(1–2), 181–194 (2008)
77. **Lurie, S. A., Kalamkarov, A. L.** General theory of continuous media with conserved dislocations. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, 44, 7468–7485.
78. **Lurie, S. A., & Kalamkarov, A. L.** General theory of defects in continuous media. *International Journal of Solids and Structures*, (2006) 43(1), 91–111.
79. **Lurie S. A., Solyaev Yu. O.** Simulation of the Mechanical Properties of Nanostructured Porous Ceramics // *Russian Metallurgy (Metally)*, Vol. 2013, No. 4, pp. 272–281.
80. **Lurie S.A., Kalamkarov A.L., Solyaev Y.O., Ustenko A.D. Volkov A.V.** Continuum micro-dilatation modeling of auxetic metamaterials. *International Journal of Solids and Structures* 132–133 (2018) pp 188–200

81. **Lurie S.A., Solyaev Y.O., Volkov A.V.** Bending problems in the theory of elastic materials with voids and surface effects. *Mathematic and Mechanics of Solids*, 2017 .
82. **Lurie, S. & Tuchkova, N** Continual adhesion models for deformable bodies and media with nanostructures. *Composites and Nanostructures*, 2009, 2(2), 25-43
83. **Lurie, S.A, Volkov-Bogorodsky D. B., Belov P.A., Lykosova E. D.** Do nanosized rods have abnormal mechanical properties? On some fallacious ideas and direct errors related to the use of the gradient theories for simulation of scale-dependent rods. *Nanoscience and Technology: An International Journal*, 2016, Vol.7 Issue 4 pp. 261-295 DOI:10.1615/NanomechanicsSciTechnolIntJ.v7.i4.10
84. **Lyapin A.A. and Vatulyan A.O.** On deformation of porous plates. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*, 27 September 2017
85. **Markov K.Z.** On the dilatational theory of elasticity. *Zeitschrift Fur Angewandte Mathematik Und Mechanik*. 1981; 61: 349–358.
86. **Markov K.Z.** On a microstructural model of damage in solids *International Journal of Engineering Science* 1995; vol 33 pp 139-155. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(94\)E0027-G](https://doi.org/10.1016/0020-7225(94)E0027-G)
87. **Maugin, Gérard A.** *Non-Classical Continuum Mechanics, a dictionary*, Springer, 2018
88. **Mindlin, R.D.** Microstructure in linear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.* (1964) 16: 51. <https://doi.org/10.1007/BF00248490>
89. **Nikabadze M., Ulukhanyan A., Sakhvadze G.** To mathematical modeling of deformation of micropolar thin bodies with two small sizes. *Journal of Physics: Conference Series*, 2019 DOI: 10.1088/1742-6596/1205/1/012040
90. **Nunziato, J.W. & Cowin, S.C.** A nonlinear theory of elastic materials with voids *Arch. Rational Mech. Anal.* (1979) 72: 175. <https://doi.org/10.1007/BF00249363>
91. **Placidi, L, Andreaus, U, Della Corte, A, and Lekszycki, T.** Gedanken experiments for the determination of two dimensional linear second gradient elasticity

- coefficients. *Z Angew Math Phys* 2015; 66: 3699–3725. DOI: 10.1007/s00033-015-0588-9.
92. **Pompei A, Rigano A, Sumbatyan MA.** Contact Problem for a Rectangular Punch on the Porous Elastic Half-Space. *б.м. : Journal of Elasticity* 2005; 76(1): 1–19.
93. **Popuzin V. and Pennisi M.** “Fast numerical method for crack problem in the porous elastic material,”. *б.м. : Meccanica*, vol. 49, no. 9, SI, pp. 2169–2179, 2014.
94. **Puri P, Cowin SC.** Plane waves in linear elastic materials with voids. *б.м. : Journal of Elasticity* 1985; 15: 167–183.
95. **Ramerzani, H, and Jeong, J.** Non-linear elastic micro-dilatation theory: Matrix exponential function paradigm. *Int J Solids Struct* 2015; 67-68(March 2006): 1–26.
96. **Ramezani H, Steeb H, Jeong J,** Analytical and numerical studies on Penalized Micro-Dilatation (PMD) theory: Macro-micro link concept, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Volume 34, July–August 2012, Pages 130-148
97. **Rueger Z. and Lakes R. S., R.** “Cosserat elasticity of negative Poisson’s ratio foam: experiment,” *Philos Mag* 2016; 96(2): 93–111.
98. **Sadd H. Martin,** *Elasticity: Theory, Applications and Numerics*, Elsevier, 2005
99. **Sadd H. Martin,** *Continuum Mechanics Modeling of Material Behaviors*, Elsevier, 2018
100. **Santos M. and Junior D. A.,** On the porous-elastic system with kelvinvoigt damping, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 445(1), 498 – 512 (2017).
101. **Scarpetta E,** Minimum principles for the bending problem of elastic plates with voids. *International Journal of Engineering Science* 2002. 40(12),1317e1327.
102. **Singh B.** “On theory of generalized thermoelastic solids with voids and diffusion,”: *Eur. J. Mech. A/Solids*, 2011.
103. **Singh J. and Tomar S.,** Plane waves in a rotating generalized thermo-elastic solid with voids, *International Journal of Engineering, Science and Technology* 3, 34–41 (2011).

104. **Sladek J., Sladek V., Repka M., and Bishay P. L.,** Static and dynamic behavior of porous elastic materials based on micro-dilatation theory: A numerical study using the MLPG method., *б.м. : Int. J. Solids Struct.*, vol. 0, pp. 1–10, 2016.
105. **Solyaev Y.O., Lurie S. A.** Deformation of a thin layer that is bonded to a massive substrate in the theory of thermoelastic materials with voids. *International Journal of Nanomechanics Science and Technology*, 5(1), 33–49. 29. 2014.
106. **Solyaev, Y, Volkov, A, and Lurie, S.** Surface effects in the pure bending problem in the theory of elastic materials with voids. In: *Proceedings of 24th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (ICTAM 2016)*, Montreal, Canada, 21-26 August 2016.
107. **Taylor P., Sharma K., and Kumar P** “Propagation of Plane Waves and Fundamental Solution in Thermoviscoelastic Medium with Voids,”... *б.м. : vol. 8, no. 1967*, pp. 37–41, 2013.
108. **Terzaghi, K.**, The shearing resistance of saturated soils and the angle between the planes of shear. In: *International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. 1936. Harvard University Press, Cambridge, MA.
109. **Terzaghi, K., Peck, R.B., Mesri, G.**, *Soil Mechanics in Engineering Practice*, third ed., vol. 54e56. 1996. Wiley-Interscience, ISBN 0-471-08658-4.
110. **Thurieau, N., Kouitat Njiwa, R., Taghite, M.** The local point interpolation-boundary element method (LPI-BEM) applied to the solution of mechanical 3D problem of a microdilatation medium. . *б.м. : European Journal of Mechanics, A/Solids*, 47, 391–399. 2014 <http://dx.doi.org/10.1016/j.euromechsol.2014.06.002>.
111. **Zhu, Y. Y., Li, Y., & Cheng, C. J.** Steady-state response of thermoelastic half-plane with voids subjected to a surface harmonic force and a thermal source. *International Journal Of Mechanical Sciences*, 2014, 87, 36–51.