

Научная статья

УДК 539.3

DOI: [10.34759/trd-2023-131-06](https://doi.org/10.34759/trd-2023-131-06)

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ЛОКАЛЬНОГО УТОНЕНИЯ НА ЗАКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ ГИПЕРУПРУГОГО МАТЕРИАЛА

Екатерина Анатольевна Коровайцева

НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова,

Москва, Россия

katrell@mail.ru

Аннотация. В работе исследуется процесс локального раздувания цилиндрической оболочки из гиперупругих материалов различных типов под воздействием равномерно распределенного по меридиану давления и растягивающей силы путем задания малого местного утонения стенки. Деформирование оболочки описывается системой уравнений, основанной на соотношениях безмоментной теории и применимой при больших перемещениях и деформациях. Для решения задачи используется алгоритм метода дифференцирования по параметру. При этом исходная система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений дифференцируется по параметру продолжения решения задачи, что приводит к формированию взаимосвязанных квазилинейной краевой и нелинейной начальной задач, решаемых последовательно итерационным способом. Показано, что

закритическое поведение цилиндрической оболочки из неогуковского материала при наличии местного утонения характеризуется выпучиванием меридиана и переменностью распределения компонент напряженно-деформированного состояния. Оболочка из материала Йео в закритическом состоянии удлиняется без выпучивания меридиана, при этом характер распределения компонент напряженно-деформированного состояния по меридиану остается постоянным и практически не отличается от аналогичного распределения для цилиндрической оболочки постоянной толщины.

Ключевые слова: мягкая оболочка, нелинейное деформирование, гиперупругий материал, большие деформации, закритическое поведение, метод дифференцирования по параметру

Для цитирования: Коровайцева Е.А. Исследование влияния локального утонения на закритическое поведение цилиндрической оболочки из гиперупругого материала // Труды МАИ. 2023. № 131. DOI: [10.34759/trd-2023-131-06](https://doi.org/10.34759/trd-2023-131-06)

Original article

POSTCRITICAL BEHAVIOR OF HYPERELASTIC CYLINDRICAL SHELL

Ekaterina A. Korovaytseva

Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University,
Moscow, Russia

katrell@mail.ru

Abstract. The work studies the process of local inflation of cylindrical shell made of hyperelastic materials of different types under the action of uniformly distributed pressure and axial force. Mathematical statement of the problem includes 4 quasilinear differential equations and 9 nonlinear algebraic equations. Geometrical relations of thin shells nonlinear theory are used, and for nonlinear physical relations formulation elastic potentials of different types are involved. The problem is solved using parameter differentiation method algorithm. According to this algorithm, resolving nonlinear equation system is differentiated with respect to solution continuation parameter, which leads to forming interconnected quasilinear boundary and nonlinear initial problems. These problems are solved in steps using iteration method until reaching required proximity of prognosed and corrected solutions at each parameter step. At given loading type and boundary conditions for the shell of constant thickness components of its stress-strain state will be constant along the meridian at any value of internal pressure. However it is known that at uniform inflation of cylindrical shell after reaching load critical value bulging can occur under certain conditions. For obtaining corresponding numerical result an assumption of small local thinning of shell wall was introduced. Two types of shell material were considered – neohookean and Yeoh. The diagram “pressure – relative volume change” for the case of neohookean cylinder inflation has only one maximum. Postcritical deforming of a shell with local thinning in this case differs fundamentally from the one of a shell with constant thickness. Differences are observed both in loading diagrams and character of stress-strain state components distribution along the whole meridian. Meridian of the shell with local thinning buckles at the largest part of its length. The diagram “pressure – relative volume change” for the

problem of inflation of a cylinder made of Yeoh material has a local maximum and a local minimum. Distribution of stress-strain state components along the meridian remains constant both for the shell of constant and variable thickness, in the last case changing insignificantly only along the segment with local thinning. Meridian of the shell with local thinning remains straight. Thus introduction of an assumption of hyperelastic cylindrical shell local thinning for the case of loading by uniform pressure and axial force allows investigating theoretically the character of its postcritical behavior corresponding to experimentally observed one.

Keywords: soft shell, nonlinear deforming, hyperelastic material, large deformations, postcritical behavior, parameter differentiation method

For citation: Korovaytseva E.A. Postcritical behavior of hyperelastic cylindrical shell. *Trudy MAI*, 2023, no. 131. DOI: [10.34759/trd-2023-131-06](https://doi.org/10.34759/trd-2023-131-06)

1. Введение

Задача о раздувании цилиндрической оболочки из гиперупругого материала является предметом исследования многих авторов. Одним из вопросов, представляющих наибольший интерес при решении такой задачи, является вопрос определения критической нагрузки и формирования локального выпучивания меридиана оболочки, называемого в медицинских приложениях аневризмой. Первые работы, в которых были предприняты попытки ответить на такой вопрос, относятся к 50-70 годам прошлого века [1-5]. При этом в связи с тем, что задача деформирования оболочки из высокоэластичного материала является и физически, и геометрически

нелинейной, при ее решении вводился ряд упрощающих предположений, позволяющих получить аналитическое решение либо свести систему уравнений, описывающих поведение оболочки, к форме, численное интегрирование которой не вызывает трудностей. Также проводились исследования функций упругих потенциалов высокоэластичных материалов с точки зрения оценки возможности описания с их помощью поведения оболочки в закритической области деформирования [6-7]. В целом же большинство работ, посвященных решению задачи о раздувании цилиндрической оболочки равномерно распределенным давлением, сводится к определению критической нагрузки [8-14]. В работе [12] предложен аналитический подход к определению типа потери устойчивости оболочки – образование «пузыря» или образование шейки. Однако дальнейшее поведение оболочки и характер изменения ее напряженно-деформированного состояния в глубокой закритической области в доступной литературе не исследуются.

Вместе с этим можно предположить, что анализ закритического деформирования цилиндрической оболочки из гиперупругого материала подобен исследованиям образования шейки в цилиндрических образцах из пластичных материалов при их растяжении [15, 16]. Теоретические исследования такого процесса проводятся либо путем корректного моделирования головки и способа нагружения образца [17], либо, при отсутствии головки, путем введения предположения о наличии в цилиндрическом образце местного утонения [18].

В данной работе с использованием последнего из описанных подходов исследован процесс глубокого закритического деформирования раздуваемой

равномерным давлением цилиндрической оболочки из гиперупругих материалов различных типов.

2. Постановка задачи

Система уравнений статического деформирования мягкой оболочки вращения представлена в [19] и для случая осесимметричного поведения цилиндрической оболочки включает в себя квазилинейные дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dT_{1x}}{dS} &= -p\mathcal{G}_1(1+e_2)R \\ \frac{dT_{1z}}{dS} &= -\frac{R}{R_0}T_{2y} + p(1+\varepsilon_1)(1+e_2)R \\ \frac{du}{dS} &= \varepsilon_1 \\ \frac{dw}{dS} &= -\mathcal{G}_1 \end{aligned} \quad (1)$$

геометрические и проекционные алгебраические соотношения

$$\begin{aligned} e_2 &= \frac{w}{R_0}; \quad e_1 + \frac{1}{2}e_1^2 = \varepsilon_1 + \frac{1}{2}(\varepsilon_1^2 + \mathcal{G}_1^2); \\ T_{1x} &= T_1^*(1+\varepsilon_1)R; \quad T_{2y} = T_2^*(1+e_2); \quad T_{1z} = T_1^*\mathcal{G}_1R; \end{aligned} \quad (2)$$

$$T_1^* = T_1 \cdot \frac{1+e_2}{1+e_1}; \quad T_2^* = T_2 \cdot \frac{1+e_1}{1+e_2}$$

и физические соотношения $T_1 = \Phi_1(e_1, e_2)$; $T_2 = \Phi_2(e_1, e_2)$, где вид функций Φ_1 , Φ_2 определяется видом упругого потенциала материала оболочки, T_{1x} , T_{2y} , T_{1z} – проекции равнодействующих истинных усилий T_1^* , T_2^* на оси системы координат, связанной с недеформированной оболочкой, R_0 – радиус недеформированного

цилиндра, $R = R_0/h_0$, где h_0 – характерная толщина недеформированного цилиндра, а остальные обозначения соответствуют [19].

Соотношения (1)-(2) вместе с граничными условиями образуют нелинейную краевую задачу. Для ее записи в векторной форме введем вектор разрешающих переменных

$$\mathbf{y} = \{T_{1x}; T_{1z}; u; w\}^T,$$

функцию из l компонент заданных обобщенных распределенных нагрузок $\mathbf{q}(x)$ и вектор характерных геометрических параметров $\boldsymbol{\mu}$.

Тогда соотношения (1)-(2) можно привести к виду

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{q}), \quad (3)$$

Граничные условия задачи запишем в виде

$$\boldsymbol{\Psi}_1(x_1, \mathbf{y}_1, \boldsymbol{\mu}_1, \mathbf{q}_1) = \mathbf{0}, \quad 1 \leftrightarrow 2, \quad (4)$$

где $\boldsymbol{\Psi}_1, \boldsymbol{\Psi}_2$ - вектор-функции заданных краевых соотношений с числом компонент соответственно p и s , где $p + s = n$; индексы 1 и 2 обозначают начало и конец интервала интегрирования соответственно.

3. Алгоритм решения

Для решения задачи (3)-(4) используем алгоритм метода дифференцирования по параметру [20]. При этом введем параметр нагрузки α , считая, что система внешних нагрузок с заданным распределением $\mathbf{q}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ изменяется в процессе расчета пропорционально α . После дифференцирования соотношений (3)-(4) по

некоторому заранее выбранному параметру продолжения решения T получим квазилинейную краевую задачу

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} \dot{\mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{q} \dot{\alpha} \quad (5)$$

с граничными условиями

$$\mathbf{B}_1^*(x_1, \boldsymbol{\mu}_1) \dot{\mathbf{y}}_1 + \mathbf{b}_1^*(x_1, \boldsymbol{\mu}_1) \dot{\alpha} = \mathbf{0}, \quad 1 \leftrightarrow 2 \quad (6)$$

и нелинейную начальную задачу

$$\begin{aligned} \frac{dy_i}{dT} &= \dot{\mathbf{y}}_i(\mathbf{y}_i, x_i, T), \quad i \in [1, N] \\ \frac{d\alpha}{dT} &= \dot{\alpha}(\mathbf{y}_i, T). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $\dot{\mathbf{y}}_i$, $\dot{\alpha}$ - производные по параметру T от соответствующих величин, N – число точек дискретизации меридиана оболочки при решении краевой задачи (5)-(6). Решение взаимосвязанных квазилинейной краевой (5)-(6) и нелинейной начальной (7) задач проводится последовательно итерационным способом до достижения требуемой близости спрогнозированного и скорректированного решений на каждом шаге по параметру T .

4. Результаты

Деформирование цилиндрической оболочки из неогукковского материала. Пусть цилиндрическая оболочка изготовлена из неогукковского материала [21], длина оболочки до деформации $L_0 = 2R_0$, где R_0 – радиус недеформированного цилиндра, толщина центрального участка длиной $L_c = 0.1R_0$ изменяется по закону

$h_0 = 0.995 - 0.005 \cos(\pi x / 0.05)$, толщина остальной части оболочки составляет $h_0 = 0.01R_0$. Пусть C – постоянная неогуковского материала. Оболочка нагружена внутренним давлением, а на торцах приложена растягивающая сила, величина которой соответствует силе давления в меридиональном направлении. Представленные ниже графики построены для безразмерных величин, связь которых с размерными примем в виде $p^*, T_1^*, T_2^* = (p, T_1, T_2) / C$, $u^*, w^* = (u, w) / R_0$. Везде ниже индексы «*» опущены.

На рис. 1 представлена диаграмма деформирования оболочки в координатах «давление – относительное изменение объема внутренней полости оболочки». Относительное изменение объема V определялось соотношением $\Delta = (V - V_0) / V_0$. Кривые 1 и 2 описывают поведение оболочки постоянной и переменной толщины соответственно. Различия в изменении объемов рассматриваемых оболочек начинают проявляться при достижении величины давления $p \approx 0.0125$, а величины относительного изменения объема $\Delta = 36$, после чего для раздувания оболочки с ослабленным сечением до некоторого значения объема требуется давление меньшей величины.

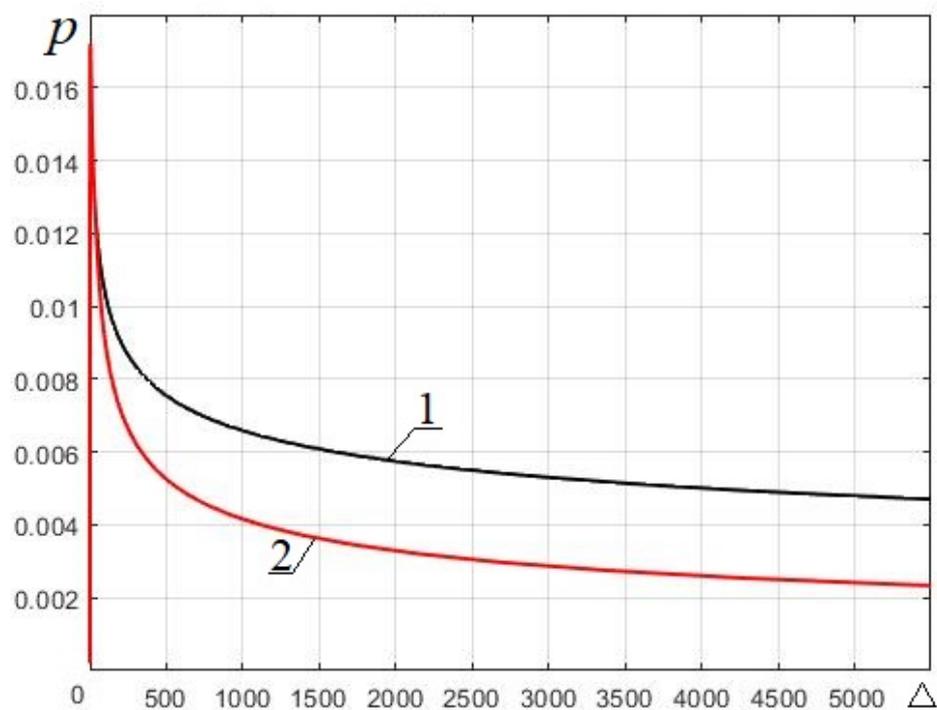


Рис. 1. Диаграмма «давление – относительное изменение объема внутренней полости цилиндра»

В закритической области по мере уменьшения внутреннего давления проявляется влияние локального утонения оболочки на распределение компонент напряженно-деформированного состояния по меридиану. На рис. 2-8 представлено распределение компонент напряженно-деформированного состояния по меридиану оболочки для закритического значения давления $p = 0.009$. Так как условия нагружения и закрепления симметричны относительно центрального сечения цилиндра, графики характеризуют распределение искомых величин лишь по меридиану правой половины цилиндра.

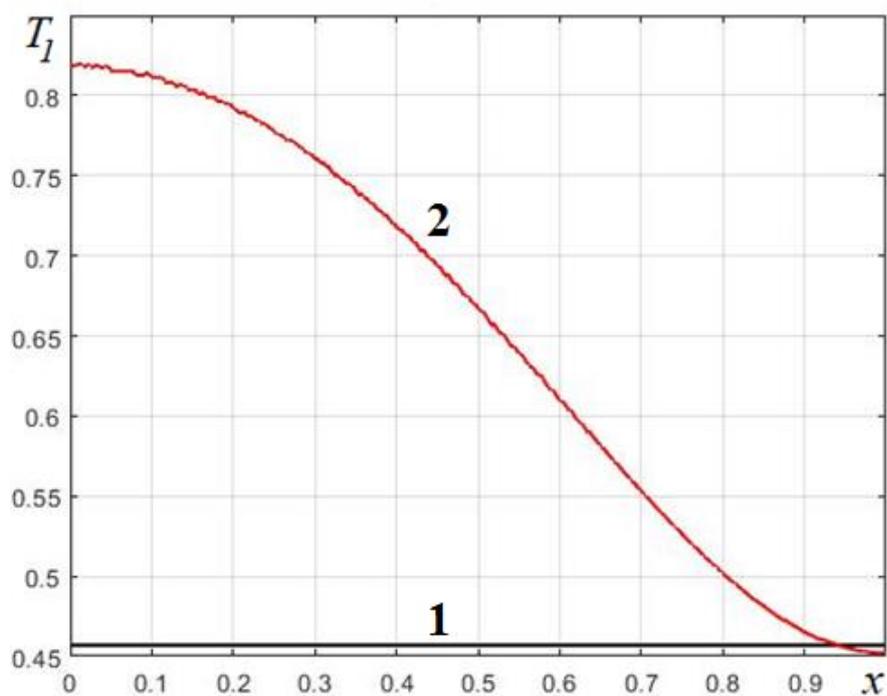


Рис. 2. Распределение истинных меридиональных усилий для цилиндра постоянной (1) и переменной (2) толщины из неогукковского материала

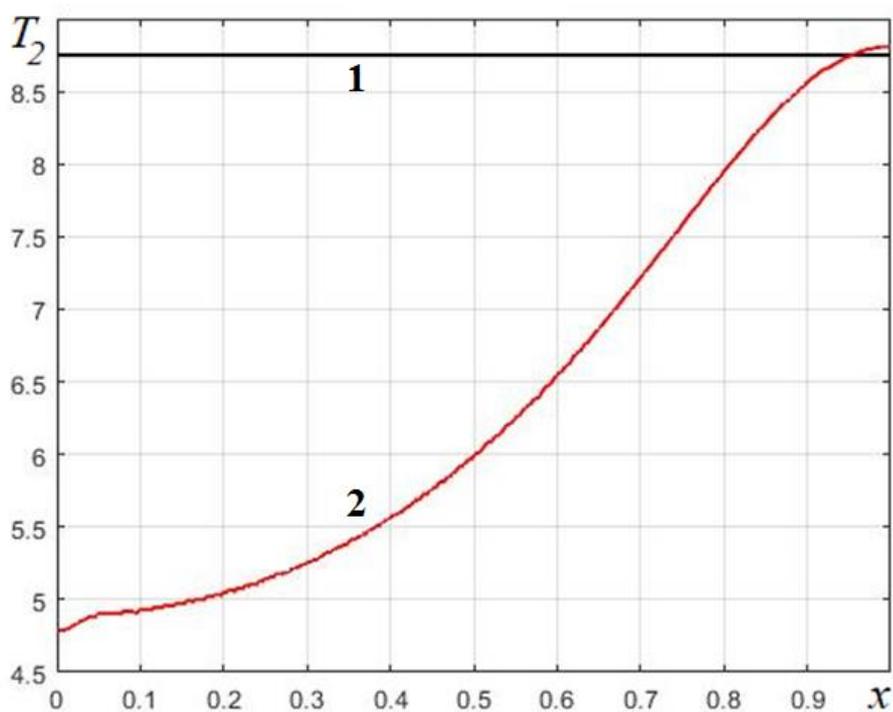


Рис. 3. Распределение истинных окружных усилий для цилиндра постоянной (1) и переменной (2) толщины из неогукковского материала

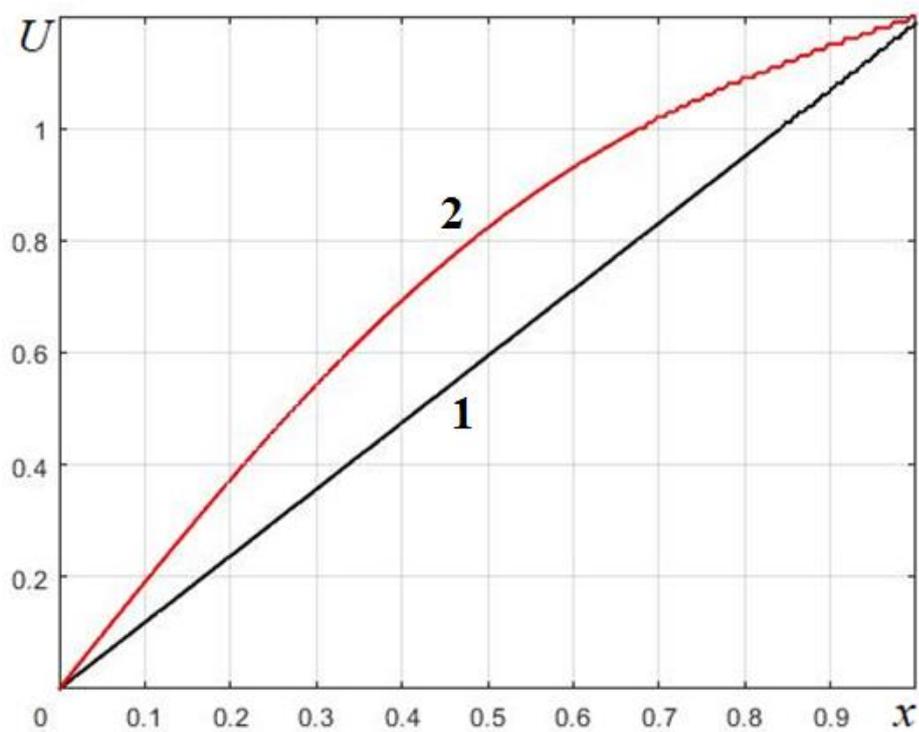


Рис. 4. Распределение осевых перемещений для цилиндра постоянной (1) и переменной (2) толщины из неогукковского материала

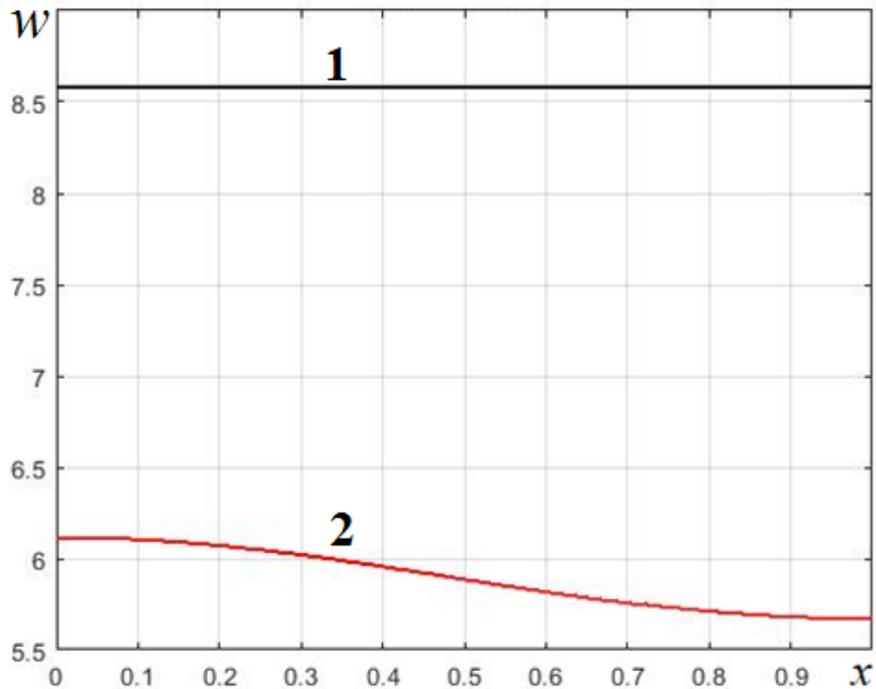


Рис. 5. Распределение нормальных перемещений для цилиндра постоянной (1) и переменной (2) толщины из неогукковского материала

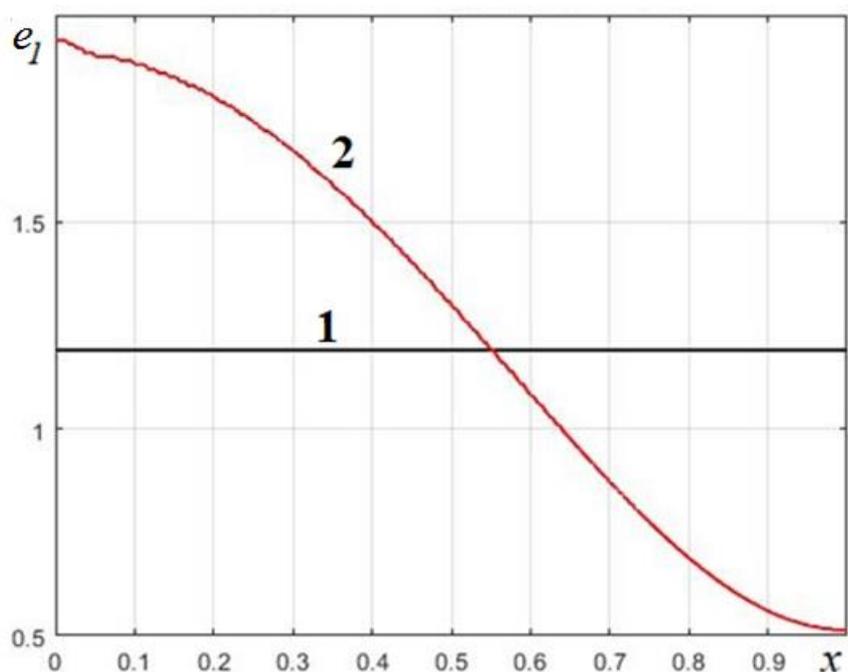


Рис. 6. Распределение меридиональных деформаций для цилиндра постоянной (1) и переменной (2) толщины из неогуковского материала

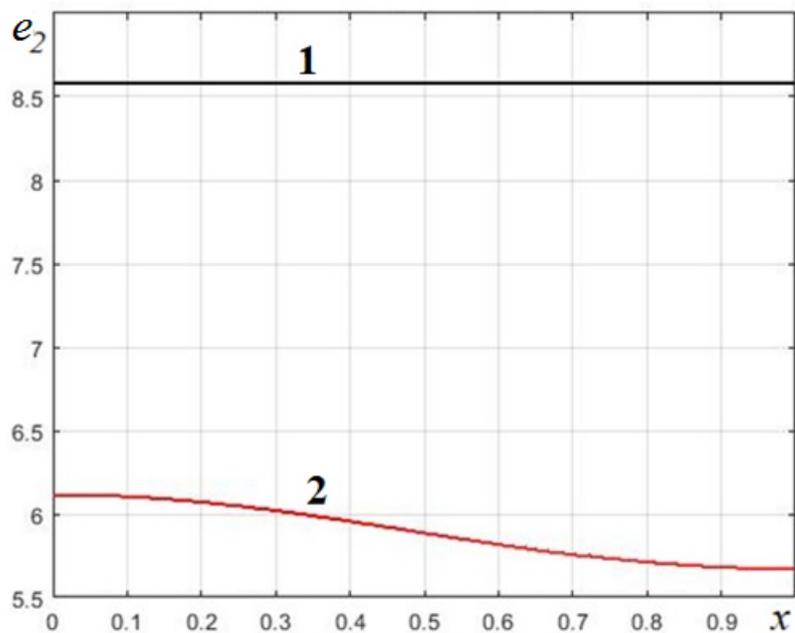


Рис. 7. Распределение окружных деформаций для цилиндра постоянной (1) и переменной (2) толщины из неогуковского материала

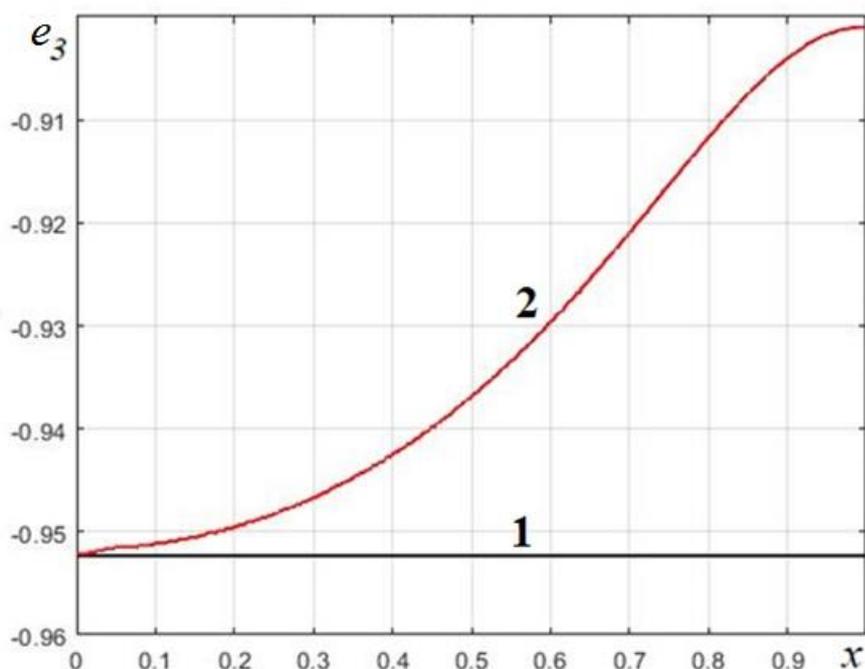


Рис. 8. Распределение поперечных деформаций для цилиндра постоянной (1) и переменной (2) толщины из неогуковского материала

Характерной для закритического деформирования рассматриваемой оболочки является нелинейная зависимость осевых перемещений от координаты, а также увеличение меридиональных деформаций в области, примыкающей к участку с истонченной стенкой, и уменьшение их в области, примыкающей к торцу, по сравнению с деформациями оболочки постоянной толщины. Величина окружных деформаций оболочки с ослабленным сечением при этом по всей длине меридиана остается меньше величины окружных деформаций оболочки постоянной толщины. Также характерно более интенсивное изменение окружных усилий, меридиональных и поперечных деформаций на участке меридиана с истонченной стенкой.

На рис. 9-11 показано распределение перемещений и поперечных деформаций оболочки с местным утонением в закритической области для значений давления

$p = 1.504 \cdot 10^{-2}, 1.235 \cdot 10^{-2}, 1.023 \cdot 10^{-2}, 7.49 \cdot 10^{-3}, 5.823 \cdot 10^{-3}$ (соответствующие кривые на рисунках обозначены цифрами от 1 до 5). Принципиальным отличием от поведения оболочки постоянной толщины в глубокой закритической области является не только переход от линейной к нелинейной зависимости осевого перемещения оболочки от координаты, но и переменность всех компонент напряженно-деформированного состояния оболочки по длине меридиана.

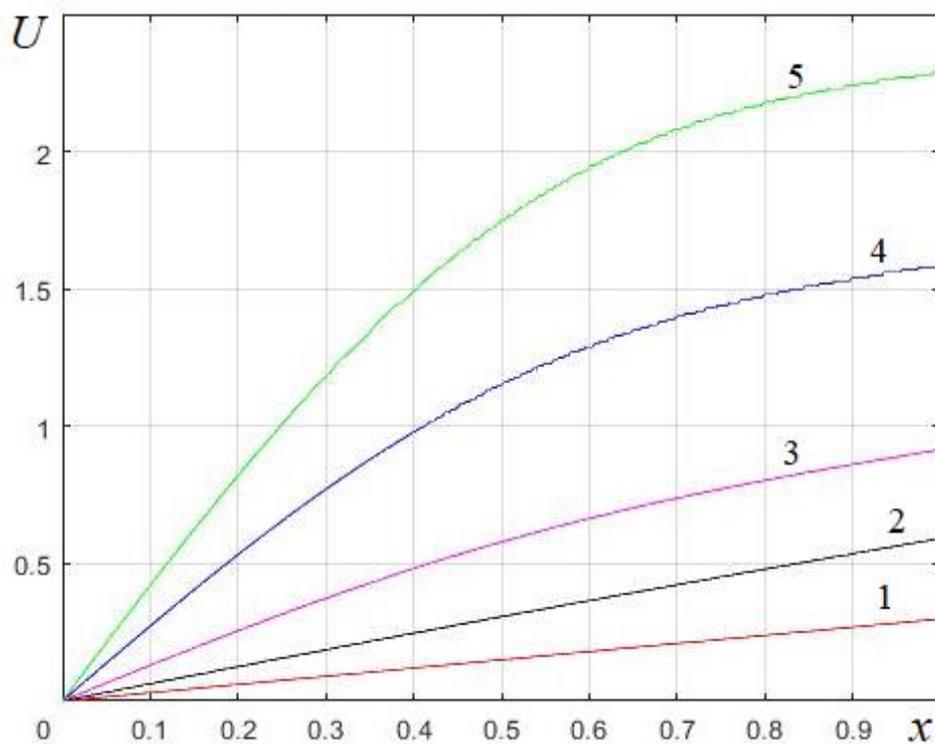


Рис. 9. Распределение осевых перемещений при различных степенях раздувания цилиндра из неогукковского материала

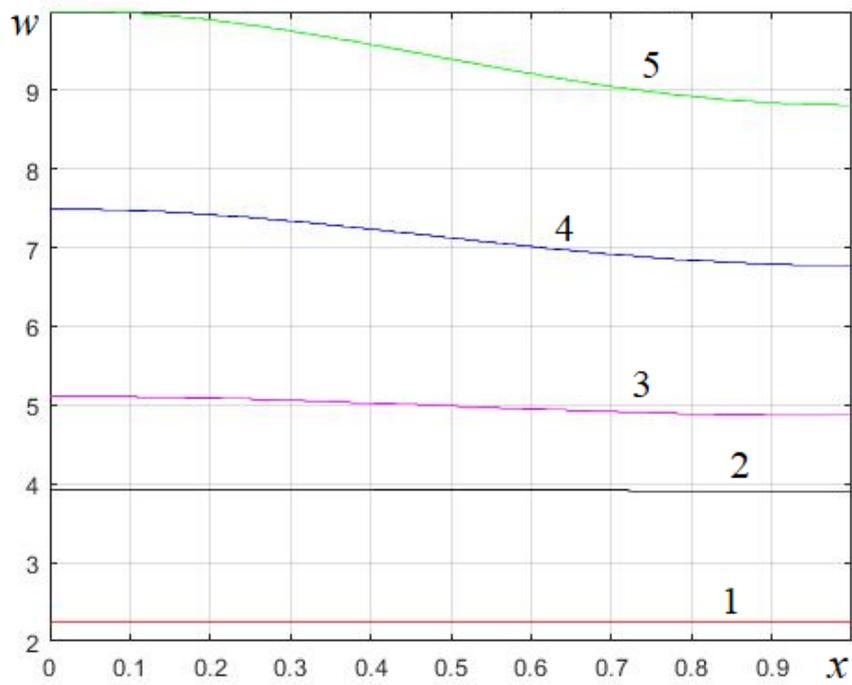


Рис. 10. Распределение нормальных перемещений при различных степенях раздувания цилиндра из неогукковского материала

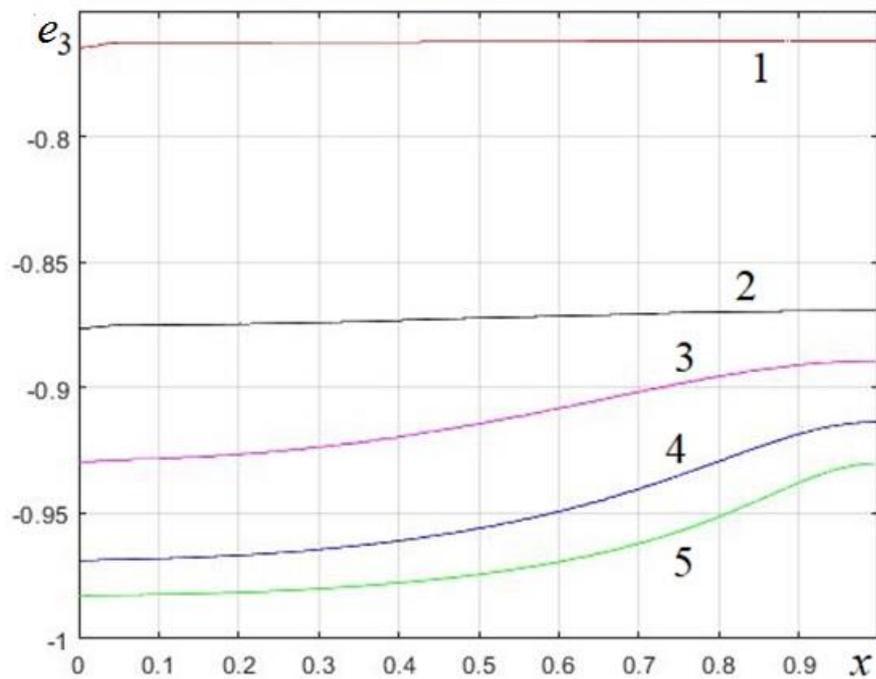


Рис. 11. Распределение поперечных деформаций при различных степенях раздувания цилиндра из неогукковского материала

На рис. 12 показаны формы меридиана цилиндра с местным утонением при рассматриваемых значениях давления. При глубоком закритическом деформировании наблюдается выпучивание меридиана оболочки, при этом значения поперечной деформации в области выпучивания соответствуют 92-98% в зависимости от величины давления.

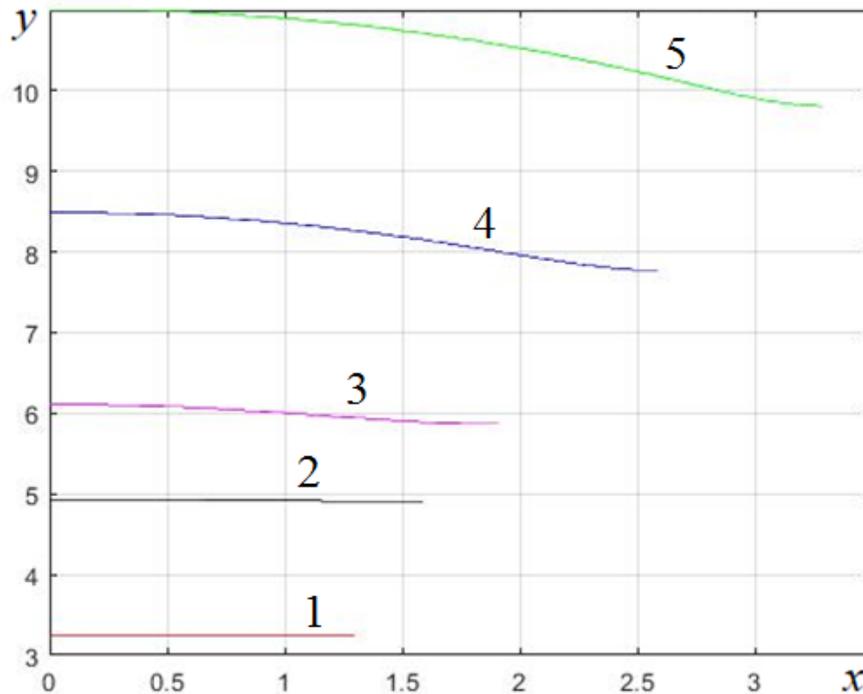


Рис. 12. Формы меридиана цилиндра из неогукковского материала при различных степенях раздувания

Деформирование цилиндрической оболочки из материала Йео. Рассмотрим случай раздувания цилиндра из материала Йео, форма упругого потенциала которого представлена в [21]. Параметры материала Йео, выраженные в долях постоянной C неогукковского материала, примем равными $C_1 = 0.993$, $C_2 = -0.00852$, $C_3 = 0.000214$. На рис. 13 представлена полученная для данной задачи диаграмма «нагрузка – относительное изменение объема». Установлено, что наличие местного утонения

стенки цилиндра не влияет на характер указанной диаграммы (кривые, соответствующие задачам о деформировании цилиндра постоянной и переменной толщины, совпадают). При этом вычисления проводились до значения поперечной деформации 95%.

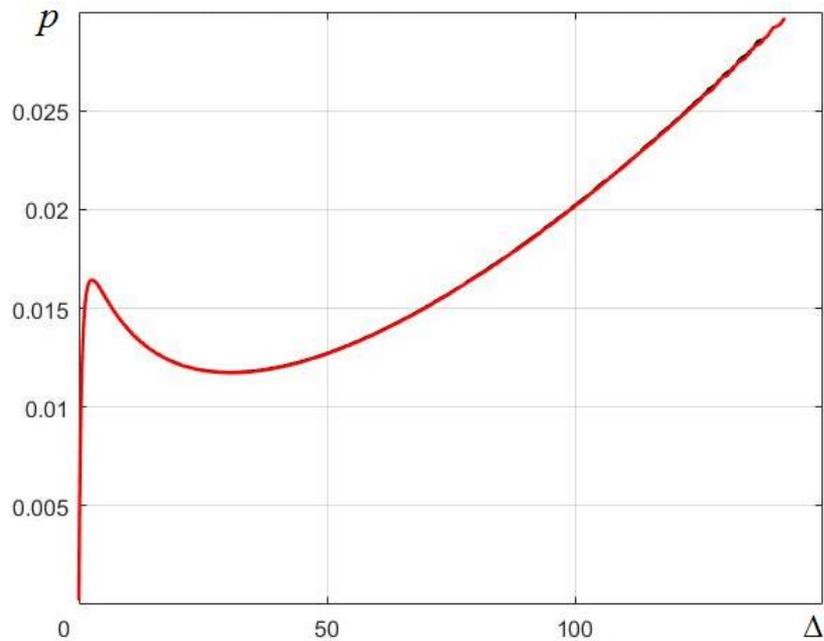


Рис. 13. Диаграмма «давление – относительное изменение объема внутренней полости цилиндра»

Для случая деформирования цилиндра из материала Йео местное утонение стенки оболочки практически не влияет на характер напряженно-деформированного состояния. Распределение всех его компонент по меридиану остается постоянным во всей закритической области деформирования, несущественно изменяясь лишь на участке утонения для функций усилий, а также меридиональных и поперечных деформаций. На рис. 14-17 представлены соответствующие графики для значений давления $p = 1.4 \cdot 10^{-2}, 1.175 \cdot 10^{-2}, 1.4 \cdot 10^{-2}, 2.01 \cdot 10^{-3}, 2.6 \cdot 10^{-2}$ (кривые обозначены

цифрами соответственно от 1 до 5). Вторая из величин давления в рассматриваемом диапазоне соответствует нижней критической нагрузке.

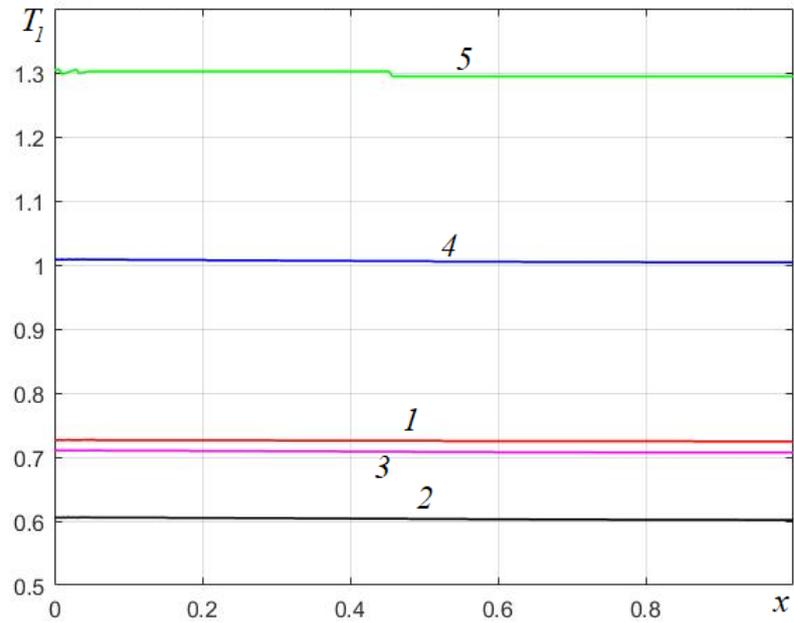


Рис. 14. Распределение истинных меридиональных усилий при различных степенях раздувания цилиндра из материала Йео с местным утонением

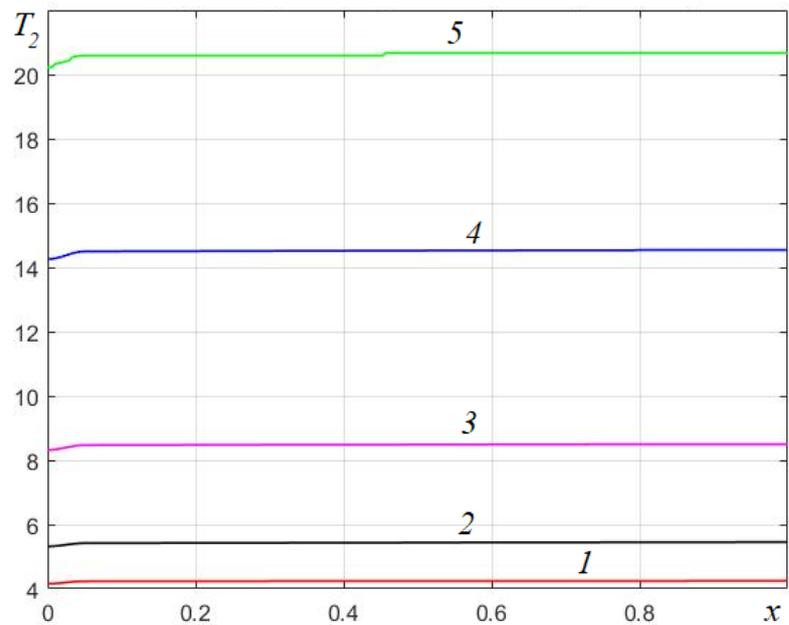


Рис. 15. Распределение истинных окружных усилий при различных степенях раздувания цилиндра из материала Йео с местным утонением

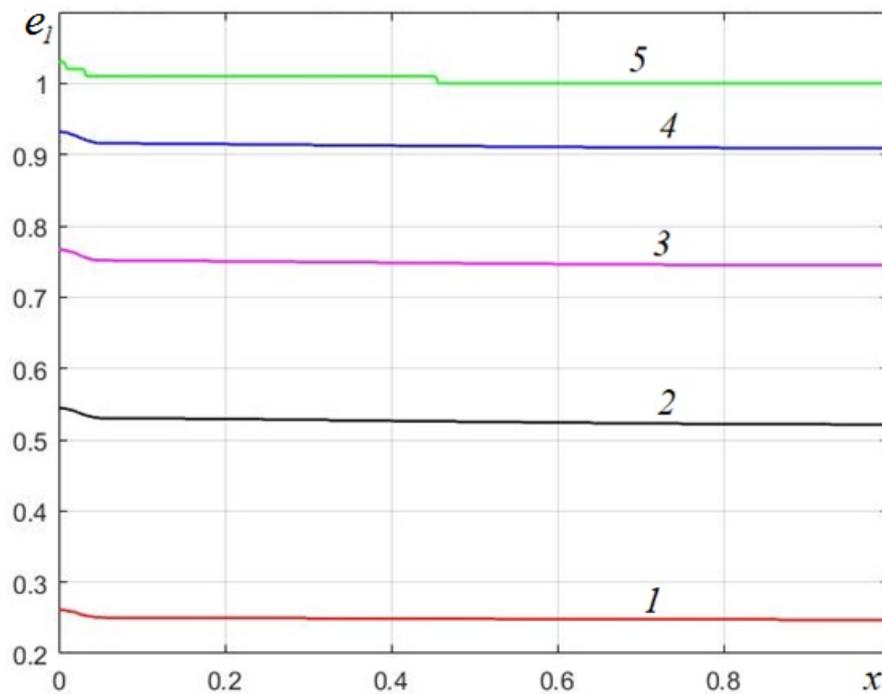


Рис. 16. Распределение меридиональных деформаций при различных степенях раздувания цилиндра из материала Йео с местным утонением

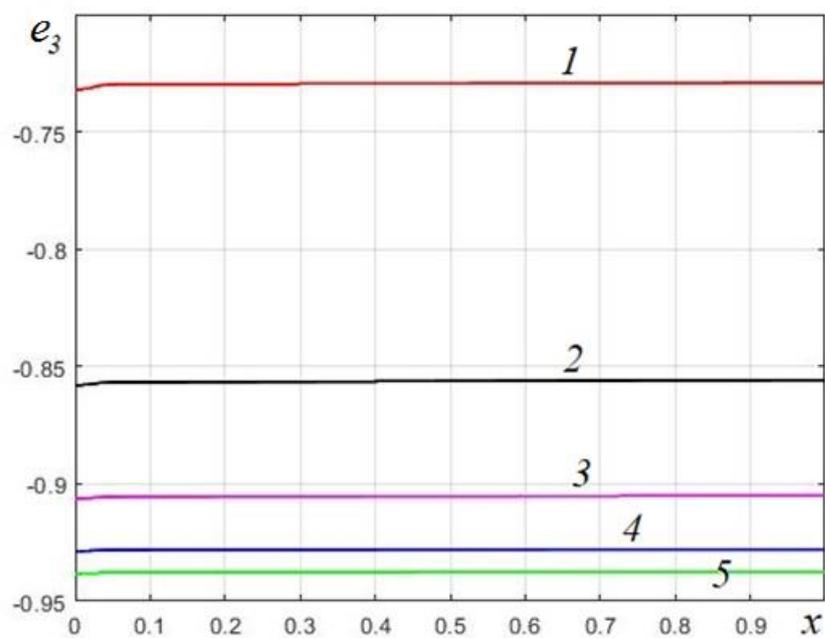


Рис. 17. Распределение поперечных деформаций при различных степенях раздувания цилиндра из материала Йео с местным утонением

На рис. 18 показана форма меридиана деформированного цилиндра при рассматриваемых значениях давления. В отличие от характера деформирования оболочки из неогуковского материала, меридиан остается прямым в закритической области, а величина его удлинения меньше величины удлинения цилиндра из неогуковского материала при одинаковых значениях поперечных деформаций.

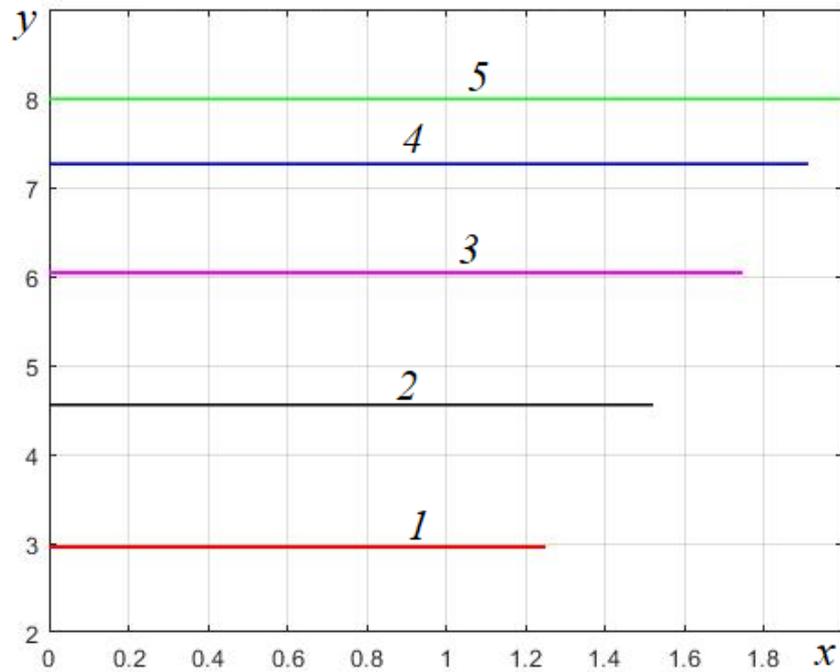


Рис. 18. Формы меридиана цилиндра из материала Йео при различных степенях раздувания

5. Заключение

Исследование показало, что локальное малое изменение толщины цилиндрической оболочки из гиперупругого материала приводит к существенному изменению ее закритического поведения. При этом характер изменения компонент напряженно-деформированного состояния оболочки по меридиану, а также характер деформирования меридиана зависят от функции упругого потенциала материала.

При отсутствии на диаграмме «нагрузка – относительное изменение объема» нижней критической нагрузки в процессе закритического деформирования меридиан оболочки выпучивается, а распределение обобщенных усилий, перемещений и деформаций по меридиану становится переменным. При наличии нижней критической нагрузки закритическое деформирование оболочки сопровождается удлинением меридиана без его выпучивания, а распределение большинства компонент напряженно-деформированного состояния по меридиану является постоянным либо несущественно изменяющимся. Таким образом, введение предположения о наличии локального утонения стенки цилиндрической оболочки позволяет исследовать характер ее закритического деформирования при равномерном раздувании и растяжении.

Список источников

1. Green A.E., Shield R.T. Finite Elastic Deformation of Incompressible Isotropic Bodies // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 1950, vol. 202, no. 1070, pp. 407-419. DOI:[10.1098/rspa.1950.0109](https://doi.org/10.1098/rspa.1950.0109)
2. Kydoniefs A.D., Spencer A.J.M. Finite axisymmetric deformations of initially cylindrical elastic membrane // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 1969, vol. 22, pp. 87-95. DOI:[10.1093/QJMAM/22.1.87](https://doi.org/10.1093/QJMAM/22.1.87)
3. Alexander H. The tensile instability of an inflated cylindrical membrane as affected by an axial load // International Journal of Mechanical Sciences, 1971, vol. 13, pp. 87-95. DOI: [10.1016/0020-7403\(71\)90013-0](https://doi.org/10.1016/0020-7403(71)90013-0)

4. Benedict R., Wineman A., Yang W.H. The determination of limiting pressure in simultaneous elongation and inflation of nonlinear elastic tubes // *International Journal of Solids and Structures*, 1979, vol. 15, pp. 241-249.
5. Yin W.-L. Non-uniform inflation of a cylindrical elastic membrane and direct determination of the strain energy function // *Journal of Elasticity*, 1977, vol. 7, pp. 265-282.
6. Kyriakides S., Babcock C.D. Experimental determination of the propagation pressure of circular pipes // *ASME Journal of Pressure Vessel Technology*, 1981, vol. 103, pp. 328-336.
7. Gent A.N. Elastic instabilities in rubber // *International Journal of Non-linear Mechanics*, 2005, vol. 40, pp. 165-175. DOI: [10.1016/j.ijnonlinmec.2004.05.006](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2004.05.006)
8. Chater E., Hutchinson J.W. On the propagation of bulges and buckles // *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1984, vol. 51, pp. 269-277.
9. Kyriakides S., Chang Y.-C. On the inflation of a long elastic tube in the presence of axial load // *International Journal of Solids and Structures*, 1990, vol. 26, pp. 975-991. DOI: [10.1016/0020-7683\(90\)90012-K](https://doi.org/10.1016/0020-7683(90)90012-K)
10. Kyriakides S., Chang Y.-C. The initiation and propagation of a localized instability in an inflated elastic tube // *International Journal of Solids and Structures*, 1991, vol. 27, pp. 1085-1111. DOI: [10.1016/0020-7683\(91\)90113-T](https://doi.org/10.1016/0020-7683(91)90113-T)
11. Kyriakides S. Propagating buckles in long confined cylindrical shells // *International Journal of Solids and Structures*, 1986, vol. 22, pp. 1579-1597. DOI: [10.1016/0020-7683\(86\)90064-8](https://doi.org/10.1016/0020-7683(86)90064-8)

12. Fu Y.B., Pearce S.P., Liu K.K. Post-bifurcation analysis of a thinwalled hyperelastic tube under inflation // International Journal of Non-Linear Mechanics, 2008, vol. 43, no. 8, pp. 697-706. DOI:[10.1016/j.ijnonlinmec.2008.03.003](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2008.03.003)
13. Bucchi A., Hearn G.E. Predictions of aneurysm formation in distensible tubes: Part A - Theoretical background to alternative approaches // International Journal of Mechanical Sciences, 2013, vol. 71, pp. 1-20. DOI: [10.1016/j.ijmecsci.2013.02.005](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2013.02.005)
14. Bucchi A., Hearn G.E. Predictions of aneurysm formation in distensible tubes: Part B - Application and comparison of alternative approaches // International Journal of Mechanical Sciences, 2013, vol. 70, pp. 155-170. DOI:[10.1016/j.ijmecsci.2013.02.008](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2013.02.008)
15. Канашин И.В., Григорьева А.Л., Хромов А.И., Григорьев Я.Ю. Растяжение полосы сжимаемого материала с непрерывным полем скоростей перемещений в условиях плоской деформации // Труды МАИ. 2022. № 124. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=167002>. DOI: [10.34759/trd-2022-124-07](https://doi.org/10.34759/trd-2022-124-07)
16. Кузнецов Е.А., Сысоев О.Е., Колыхалов Д.Г. Прогнозирование предельных состояний трубопроводов высокого давления гидрогазовых систем на этапе ввода в эксплуатацию // Труды МАИ. 2016. № 88. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=70409>
17. Бережной Д.В., Паймушин В.Н. О двух постановках упругопластических задач и теоретическое определение места образования шейки в образцах при растяжении // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. Вып. 4. С. 635-659.

18. Баженов В.Г., Ломунов В.К. Экспериментально-теоретическое исследование процесса образования шейки при растяжении стального трубчатого образца до разрыва // Проблемы прочности и пластичности. 2001. Вып. 63. С. 35–41.
19. Коровайцева Е.А. Смешанные уравнения теории мягких оболочек // Труды МАИ. 2019. № 108. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=109235>. DOI: [10.34759/trd-2019-108-1](https://doi.org/10.34759/trd-2019-108-1)
20. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования. – М.: Наука, 1988. – 231 с.
21. Rodriguez–Martínez J.A., Fernandez–Saez J., Zaera R. The role of constitutive relation in the stability of hyper-elastic spherical membranes subjected to dynamic inflation // International Journal of Engineering Science, 2015, vol. 93, pp. 31–45. DOI: [10.1016/j.ijengsci.2015.04.004](https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2015.04.004)

References

1. Green A.E., Shield R.T. Finite Elastic Deformation of Incompressible Isotropic Bodies, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 1950, vol. 202, no. 1070, pp. 407-419. DOI: [10.1098/rspa.1950.0109](https://doi.org/10.1098/rspa.1950.0109)
2. Kydoniefs A.D., Spencer A.J.M. Finite axisymmetric deformations of initially cylindrical elastic membrane, *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1969, vol. 22, pp. 87-95. DOI: [10.1093/QJMAM/22.1.87](https://doi.org/10.1093/QJMAM/22.1.87)

3. Alexander H. The tensile instability of an inflated cylindrical membrane as affected by an axial load, *International Journal of Mechanical Sciences*, 1971, vol. 13, pp. 87-95. DOI: [10.1016/0020-7403\(71\)90013-0](https://doi.org/10.1016/0020-7403(71)90013-0)
4. Benedict R., Wineman A., Yang W.H. The determination of limiting pressure in simultaneous elongation and inflation of nonlinear elastic tubes, *International Journal of Solids and Structures*, 1979, vol. 15, pp. 241-249.
5. Yin W.-L. Non-uniform inflation of a cylindrical elastic membrane and direct determination of the strain energy function, *Journal of Elasticity*, 1977, vol. 7, pp. 265-282.
6. Kyriakides S., Babcock C.D. Experimental determination of the propagation pressure of circular pipes, *ASME Journal of Pressure Vessel Technology*, 1981, vol. 103, pp. 328-336.
7. Gent A.N. Elastic instabilities in rubber, *International Journal of Non-linear Mechanics*, 2005, vol. 40, pp. 165-175. DOI: [10.1016/j.ijnonlinmec.2004.05.006](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2004.05.006)
8. Chater E., Hutchinson J.W. On the propagation of bulges and buckles, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1984, vol. 51, pp. 269-277.
9. Kyriakides S., Chang Y.-C. On the inflation of a long elastic tube in the presence of axial load, *International Journal of Solids and Structures*, 1990, vol. 26, pp. 975-991. DOI: [10.1016/0020-7683\(90\)90012-K](https://doi.org/10.1016/0020-7683(90)90012-K)
10. Kyriakides S., Chang Y.-C. The initiation and propagation of a localized instability in an inflated elastic tube, *International Journal of Solids and Structures*, 1991, vol. 27, pp. 1085-1111. DOI: [10.1016/0020-7683\(91\)90113-T](https://doi.org/10.1016/0020-7683(91)90113-T)

11. Kyriakides S. Propagating buckles in long confined cylindrical shells, *International Journal of Solids and Structures*, 1986, vol. 22, pp. 1579-1597. DOI: [10.1016/0020-7683\(86\)90064-8](https://doi.org/10.1016/0020-7683(86)90064-8)
12. Fu Y.B., Pearce S.P., Liu K.K. Post-bifurcation analysis of a thinwalled hyperelastic tube under inflation, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2008, vol. 43, no. 8, pp. 697-706. DOI:[10.1016/j.ijnonlinmec.2008.03.003](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2008.03.003)
13. Bucchi A., Hearn G.E. Predictions of aneurysm formation in distensible tubes: Part A - Theoretical background to alternative approaches, *International Journal of Mechanical Sciences*, 2013, vol. 71, pp. 1-20. DOI: [10.1016/j.ijmecsci.2013.02.005](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2013.02.005)
14. Bucchi A., Hearn G.E. Predictions of aneurysm formation in distensible tubes: Part B - Application and comparison of alternative approaches, *International Journal of Mechanical Sciences*, 2013, vol. 70, pp. 155-170. DOI:[10.1016/j.ijmecsci.2013.02.008](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2013.02.008)
15. Kanashin I.V., Grigor'eva A.L., Khromov A.I., Grigor'ev Ya.Yu. *Trudy MAI*, 2022, no. 124. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=167002>. DOI: [10.34759/trd-2022-124-07](https://doi.org/10.34759/trd-2022-124-07)
16. Kuznetsov E.A., Sysoev O.E., Kolykhalov D.G. *Trudy MAI*, 2016, no. 88. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=70409>
17. Berezhnoi D.V., Paimushin V.N. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2011, vol. 75, no. 4, pp. 635-659.
18. Bazhenov V.G., Lomunov V.K. *Problemy prochnosti i plastichnosti*, 2001, no. 63, pp. 35-41.

19. Korovaitseva E.A. *Trudy MAI*, 2019, no. 108. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=109235>. DOI: [10.34759/trd-2019-108-1](https://doi.org/10.34759/trd-2019-108-1)
20. Grigolyuk E.I., Shalashilin V.I. *Problemy nelineinogo deformirovaniya* (Problems of Nonlinear Deforming: Parameter Continuation Method in Nonlinear Problems of Mechanics of Deformed Solid), Moscow, Nauka, 1988, 232 p.
21. Rodriguez–Martínez J.A., Fernandez–Saez J., Zaera R. The role of constitutive relation in the stability of hyper-elastic spherical membranes subjected to dynamic inflation, *International Journal of Engineering Science*, 2015, vol. 93, pp. 31–45. DOI: [10.1016/j.ijengsci.2015.04.004](https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2015.04.004)

Статья поступила в редакцию 16.06.2023

Одобрена после рецензирования 20.06.2023

Принята к публикации 28.08.2023

The article was submitted on 16.06.2023; approved after reviewing on 20.06.2023; accepted for publication on 28.08.2023