

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

На правах рукописи



Земсков Андрей Владимирович

**Нестационарные механодиффузионные
возмущения в многокомпонентных упругих
средах с плоскими границами**

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант

д. ф.-м. н., профессор

Тарлаковский Дмитрий Валентинович

Москва – 2018

Содержание

Введение	5
Глава 1. Постановка нестационарных задач механодиффузии	16
1.1. Современное состояние исследований	16
1.2. Математическая модель термоэлектромагнитоупругой среды с учётом диффузии	25
1.3. Граничные и начальные условия	35
1.4. Уравнения упругой диффузии в прямоугольной декартовой системе координат	37
1.5. Краевые условия для задач упругой диффузии в прямоугольной декартовой системе координат	43
Глава 2. Одномерные нестационарные задачи упругой диффузии со специальными граничными условиями	48
2.1. Интегральное представление решений	48
2.2. Задача Штурма-Лиувилля для одномерного упругодиффузионного оператора	51
2.3. Механодиффузия слоя под действием кинематических поверхностных механических возмущений	60
2.4. Механодиффузия полупространства под действием кинематических поверхностных механических возмущений	68
2.5. Механодиффузия среды с заданными на границах механическими нагрузками	71
2.6. Распространение объёмных механодиффузионных возмущений	76
2.7. Примеры расчетов	85
Глава 3. Двумерные задачи упругой диффузии со специальны-	

ми граничными условиями	100
3.1. Интегральное представление решений двумерных задач упругой диффузии	100
3.2. Механодиффузия ортотропной среды. Случай касательных нагрузок	109
3.3. Механодиффузия упругой среды под действием нормальной механической нагрузки	124
3.4. Двумерные объёмные механодиффузионные возмущения	129
3.5. Примеры расчетов	136
Глава 4. Нестационарные задачи механодиффузии с произвольными граничными условиями	145
4.1. Общее описание алгоритма	145
4.2. Одномерные задачи упругой диффузии с произвольными граничными условиями	150
4.3. Двумерные задачи упругой диффузии с произвольными граничными условиями	157
Глава 5. Асимптотические решения нестационарных задач механодиффузии	165
5.1. Асимптотика при больших временах. Переход к статическим режимам	165
5.2. Алгоритм асимптотического разделения переменных в многомерных задачах упругой диффузии	175
5.3. Асимптотическое решение двумерной задачи упругой диффузии для ортотропной полосы	179
5.4. Асимптотическое решение трехмерной задачи упругой диффузии для слоя	191

Заключение	202
Список использованных источников	204

Введение

При исследовании нестационарных процессов в сплошных средах зачастую требуется учет различных взаимодействующих между собой полей: механических, тепловых, электрических, магнитных и диффузионных. В том числе, наличие диффузионных потоков приводит к перераспределению компонентов вещества, поэтому в диффузионной зоне возникает напряжённо-деформированное состояние, которое в свою очередь за счет деформации кристаллической решетки влияет на величину диффузионного потока. Использование функциональных элементов машин и приборов, изготовленных из многокомпонентных материалов, например, металлических сплавов, работающих в условиях интенсивных нагрузок различной физической природы (механических, тепловых, электромагнитных) обуславливает необходимость исследования поведения этих элементов при таких внешних воздействиях. Количественное описание и прогнозирования свойств тел из упомянутых материалов основывается на теоретических моделях механики сплошной среды, которые в рамках континуальных представлений учитывают взаимосвязь физико-механических полей в телах сложной внутренней структуры.

Раздел механики, занимающийся изучением взаимодействия механических и диффузионных полей, называется механодиффузией (упругой диффузией, упругостью с учетом диффузии). Эти модели помимо граничных и начальных условий включают в себя уравнения движения и уравнения массопереноса, физические и кинематические соотношения. В более общих случаях эти модели могут включать в себя также уравнения теплопереноса (термомеханодиффузия, термоупругая диффузия, термоупругость с учетом диффузии), уравнения электродинамики Максвелла (электромагнитомеханодиффузия, термоэлектромагнитомеханодиффузия и т.д.), рассмотрение которых вместе, приводит к значительному усложнению даже самых простых на

первый взгляд задач.

Как следует из приведенного в главе 1 обзора публикаций по данной тематике в настоящее время не существует общих методов аналитического исследования нестационарных задач механики связанных полей, в частности задач механодиффузии. Данная работа посвящена разработке аналитических методов исследования одного из классов нестационарных задач механодиффузии, а именно одномерных, двумерных и трехмерных задач для тел с плоскими границами.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы, включающего 345 наименований. Общий объем диссертации 248 страниц, включая 41 рисунок.

В первой главе дан аналитический обзор публикаций, посвящённых задачам механодиффузии. Также рассматриваются модели, дополнительно учитывающие влияние температурных и электромагнитных полей. Из обзора следует, что несмотря на большое разнообразие существующих в настоящее время моделей механодиффузии в основном, рассматривались несвязанные задачи, либо связанные задачи, которые решались в статической или в стационарной постановке. При этом во многих публикациях использовались численные методы исследования. Аналитические решения нестационарных связанных задач встречаются в единичных работах, касающихся в основном проблем электромагнитоупругости.

В то же время обзор свидетельствует, что постановки задач механодиффузии и их обобщения с учетом температурных и электромагнитных полей проработаны достаточно детально и могут быть сформулированы различными способами. Используя метод термодинамических потенциалов, разработанный Дж. Гиббсом, в этой главе построены линеаризованные уравнения термоэлектромагнитоупругости с учетом диффузии для многокомпонентных анизотропных сред в произвольной криволинейной системе координат. Дан

переход от общей анизотропной модели термоэлектромагнитомеханодиффузии к рассматриваемым в работе задачам механодиффузии. Рассмотрены одномерные и многомерные модели механодиффузии для многокомпонентных сред в прямоугольной декартовой системе координат.

Во второй главе рассматриваются одномерные нестационарные задачи упругости с учетом диффузии для пространства, полупространства и слоя в декартовой системе координат. Решение задач здесь, а также в последующих главах 3 – 5 строится в интегральной форме представляющей собой свертку поверхностных функций Грина с правыми частями граничных условий или объемных функций Грина с массовыми силами. При этом сами функции Грина ищутся в виде разложений по собственным функциям упругодиффузионного оператора (кроме главы 4) для нахождения которых решается соответствующая задача Штурма-Лиувилля. Показано, что данная задача допускает возможность построения аналитического решения в виде элементарных функций (синус, косинус) только при определенных видах граничных условий, которые образуют 3 группы начально-краевых задач.

Таким образом, алгоритм решения соответствующих одномерных задач механодиффузии представляется в виде последовательности следующих действий. К исходной задаче применяется преобразование Лапласа по времени, экспоненциальное преобразование Фурье по пространственной координате (в задаче для пространства) или синус-, косинус-преобразование (в задачах для полупространства) или ряды Фурье (в задачах для слоя). В результате начально-краевая задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно трансформант искомых функций. Решения этой системы являются рациональными функциями параметра преобразования Лапласа. Алгоритм нахождения оригиналов по Лапласу в этом случае осуществляется аналитически с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления. В качестве примера приведено решение ряда задач для слоя, полупространства и

пространства.

В третьей главе рассматриваются двумерные задачи механодиффузии для ортотропного пространства, полупространства и слоя. В качестве алгоритма решения используется схема, изложенная в главе 2. При этом, в задачах для слоя и полупространства дополнительно используется экспоненциальное преобразование Фурье по пространственной координате, направленной вдоль границы рассматриваемой области. В задаче для пространства используется двойное преобразование Фурье по пространственным координатам. Структура полученных решений в пространстве изображений аналогична одномерному случаю. Оригиналы по Лапласу также находятся аналитически с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления. Оригиналы Фурье находятся численно с помощью квадратурных формул.

Были найдены явные формулы функций Грина для всех одномерных и двумерных задач в прямоугольной декартовой системе координат, допускающих построение решений в виде разложений по собственным функциям. В расчетных примерах было выполнено сравнение полученных в главах 2 и 3 решений с известными решениями чисто упругих задач позволяющее количественно оценить влияние связанности механического и диффузионного полей на напряженно-деформированное состояние и интенсивность массопереноса в сплошных средах.

Глава 4 посвящена рассмотрению задач механодиффузии не допускающих возможности построения решений в виде разложений по собственным функциям. Идея алгоритма заключается в построении соотношений между правыми частями граничных условий различных типов, позволяющих свести любую задачу к задачам, решенным в главах 2 и 3. В этом смысле задачи рассмотренные в главах 2 и 3 составляют основу общей методики решения начально-краевых задач механодиффузии и в дальнейшем именуется эталонными задачами. В качестве указанных соотношений выступают систе-

мы интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода ядрами которых являются функции Грина задач, рассмотренных в главах 2 и 3. Показано, что размер этой системы зависит от выбора эталонной задачи, что в конечном счете влияет на сложность решения рассматриваемой задачи в целом. Для решения уравнений Вольтера используется численный алгоритм, основанный на использовании квадратурных формул средних прямоугольников. Приводятся примеры расчетов для одномерных и двумерных задач.

Глава 5 посвящена дополнительным вопросам анализа моделей механо-диффузии. В п. 5.1 исследуются статические аналоги динамических задач рассмотренных в главе 2. Здесь же рассматриваются вопросы регуляризации решений статических задач, основанные на переходе от решений задач динамики к решениям задач статики при стремлении времени к бесконечности. Данное исследование, помимо прочего, позволяет верифицировать алгоритмы решения нестационарных задач, предложенные в главе 2. В п.п. 5.2–5.4 излагается подход к решению многомерных задач механо-диффузии, основанный на асимптотическом методе разделения переменных, позволяющий свести многомерную начально-краевую задачу к рекуррентной последовательности одномерных задач, решения которых получены в главе 2. В качестве примеров рассмотрены решения двумерной и трехмерной задачи механо-диффузии для ортотропного слоя.

В заключении приводятся основные результаты диссертации.

Целью диссертационной работы является развитие моделей нестационарного взаимодействия механических и диффузионных полей в упругих средах, включая постановки и исследование новых классов задач, а также совершенствование некоторых известных методов решения нестационарных задач механики связанных полей.

Актуальность работы связана с недостаточной исследованностью проблемы решения нестационарных задач механо-диффузии, хотя этой темати-

ке посвящено достаточно большое число публикаций как в России, так и за рубежом. Подобный интерес с практической точки зрения объясняется тем, что взаимодействие полей различной физической природы может оказывать нежелательное влияние на напряженно-деформированное состояние конструкций и их отдельных элементов, работающих в условиях многофакторных внешних воздействий. Поэтому для более точного описания функционирования вышеназванных систем требуется использование моделей, учитывающих всевозможные эффекты взаимодействия механических и диффузионных полей. Анализ этих эффектов невозможен без разработки методов решения соответствующих начально-краевых задач механодиффузии. Всё это в целом обуславливает актуальность исследований, представленных в данной работе.

Методы исследования. Используется аппарат линейной теории упругости в совокупности с термодинамическими подходами к описанию совместного проявления механодиффузионных эффектов. Для построения решений используется метод разложений по собственным функциям, преобразования Лапласа и Фурье, аппараты функций Грина и обобщённых функций. Также применяется разработанный метод эквивалентных граничных условий описанный в главе 4 и асимптотический метод малого параметра описанный в главе 5. Оригиналы преобразования Лапласа определяются с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления. Оригиналы экспоненциального преобразования Фурье и синус-, косинус-преобразования находятся численно с помощью квадратурных формул.

Научная новизна работы состоит:

- в построении общей модели нестационарной термоэлектромагнитомеханодиффузии для многокомпонентных анизотропных сред в произвольной криволинейной системе координат;
- в построении методов решений и их реализации для новых классов

одномерных, двумерных и трехмерных нестационарных задач механодиффузии в прямоугольной декартовой системе координат для пространства, полупространства и слоя находящихся под действием поверхностных и объемных возмущений.

Впервые предложены и реализованы:

- метод решения начально-краевых задач механодиффузии, основанный на построении интегральных соотношений между правыми частями граничных условий различных типов, для одних и тех же дифференциальных уравнений, позволяющий строить функцию Грина только для одной задачи данного класса. Решения всех остальных задач может быть выражено через указанные функцию Грина, посредством вышеназванных интегральных соотношений;

- асимптотический метод разделения переменных для начально-краевых задач механодиффузии, позволяющий многомерную задачу свести к рекуррентной последовательности одномерных задач.

Практическая значимость состоит в разработке методов исследования напряженно-деформированного состояния упругих сред и элементов конструкций работающих в условиях нестационарных внешних воздействий с учетом протекающих в них явлений массопереноса. Кроме того, предложенные методы могут быть применимы не только для описанного класса моделей, но и для любых задач, постановка которых включает в себя системы уравнений гиперболического или параболического типов.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

- общая математическая постановка задач связанной нестационарной термоэлектромагнитоупругой диффузии с конечной скоростью распространения тепла и массопереноса для анизотропных многокомпонентных тел в произвольной криволинейной системе координат; из нее как частный случай

получены начально-краевые задачи для механодиффузии с бесконечной скоростью распространения тепла и массопереноса в прямоугольной декартовой системе координат для ортотропных сред;

- метод решения класса нестационарных связанных одномерных и двумерных задач механодиффузии в прямоугольной декартовой координат, основанный на представлении искомым полей перемещений и приращений концентраций в виде разложений по собственным функциям;

- метод решения класса нестационарных связанных одномерных и двумерных задач механодиффузии в случае произвольных граничных условий основанный на построении соотношений между правыми частями граничных условий различных типов;

- асимптотический метод решения класса многомерных нестационарных связанных задач механодиффузии позволяющий при определенных условиях свести многомерную задачу к рекуррентной последовательности одномерных задач.

Апробация работы. Все основные результаты работы были предметом докладов, обсуждений и дискуссий на российских и международных конференциях, симпозиумах и съездах:

- Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Московская область, Ярополец, Кременки, 2011 – 2018);

- Международный научный семинар «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы» (Москва, 2014 – 2017)

- XV International conference «Dynamical system modelling and stability investigation MODELLING END STABILITY» (Kyiv, Ukraine, 2011);

- Международная научная конференция «Современные проблемы механики и математики» (Львов, 2013);

- Международная научная конференция «Импульсные процессы в механике сплошных сред» (Николаев, 2011, 2013);
- Международная научно-техническая конференция «Актуальные проблемы прикладной механики и прочности конструкций (Ялта, Запорожье, 2011, 2012);
- Международная научная конференция «Математические проблемы механики неоднородных структур» (Львов, 2014);
- Московская молодежная научно-практическая конференция «Инновации в авиации и космонавтике». (Москва, 2014, 2017);
- Международная научная конференция «Современные проблемы математики, механики, информатики». (Тула, 2014);
- Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 2015);
- V сессия Научного совета РАН по механике деформируемого твердого тела (Астрахань, 2011);
- Украинско-российский научный семинар «Нестационарные процессы деформирования элементов конструкций, обусловленных воздействием полей различной физической природы» (Львов, 2012);
- Научная конференция «Ломоносовские чтения» (Москва, 2012 – 2018 г.);
- Международная научная конференция «Современные проблемы механики деформируемого твердого тела, дифференциальных и интегральных уравнений» (Одесса, 2013);
- Международная научная конференция «Теория оболочек и мембран в механике и биологии: от макро- до наноразмерных структур» (Минск, 2013);
- VII Всероссийская конференция по механике деформируемого твердого тела (Ростов-на-Дону, 2013);
- VIII Всероссийская конференция по механике деформируемого твердо-

го тела (Чебоксары, 2014);

- X Всероссийская конференция по механике деформируемого твердого тела (Самара, 2017);

- IV Международная научно-практическая конференция «Строительство и восстановление искусственных сооружений» (Гомель, 2015);

- VIII Международная научно-практическая конференция «Проблемы безопасности на транспорте» (Гомель, 2017);

- Международный научный симпозиум по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 105-летию со дня рождения А.А. Ильюшина (Москва, 2016);

- XI Всероссийская школа-семинар «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (Краснодарский край, Дивноморское, 2015 – 2017);

- Всероссийская научно-техническая конференция «Механика и математическое моделирование в технике», посвященная 100-летию со дня рождения В.И. Феодосьева (Москва, 2016);

- III Международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования», СКТеММ'16 (Москва, 2016);

- 24-th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, XXIV ICTAM (Montreal, 2016);

- 14th International Conference on Fracture, ICF 14 (Rhodes, Greece, 2017);

- XLIII международная молодежная научно-практическая конференция «Гагаринские чтения». (Москва, 2017, 2018);

- Всероссийская конференция по строительной механике корабля посвященная памяти д.т.н., профессора В.А. Постнова (Санкт-Петербург, 2017);

- Всероссийская конференция молодых ученых механиков (Сочи, 2017).

На различных этапах работа поддерживалась грантами РФФИ (коды проектов 11-08-00064, 14-08-01161, 17-08-00663).

Публикации. Основные материалы диссертации опубликованы в 43 печатных работах, из них 14 статей в рецензируемых журналах, 2 статьи в энциклопедии, 27 в сборниках трудов конференций и тезисов докладов.

Глава 1

Постановка нестационарных задач механо-dиффузии

1.1. Современное состояние исследований

Исследование взаимодействия массопереноса и деформаций имеет довольно длинную историю. Некоторые источники [48, 110] указывают на то, что еще в 1932 году С.Т. Конобеевский обнаружил влияние внутренних напряжений на процессы диффузии в сплавах, создал основы современной теории старения сплавов и распада твёрдых растворов и металлических соединений. Однако первая научная публикация на эту тему была сделана В.С. Горским в 1936 году [61]. Рассматривая вопрос об упорядочении-разупорядочении (обмен положениями двух разноименных соседних атомов) сплавов на примере бинарных соединений Cu-Au, им впервые экспериментально была доказана связь между диффузией и напряжениями. В дальнейшем этот вопрос обсуждался в работах различных авторов [32, 139, 145] в том числе и С.Т. Конобеевским [131–133]. Первые экспериментальные данные о величине напряжений, образующихся при окислении металлов, получены в работе [82]. Более поздние исследования [138] показали, что эти напряжения достигают величины 1 ГПа. Наличие подобных напряжений приводит к вязкопластическим деформациям, которые легко выявляются с помощью металлографического и электронно-микроскопического анализов. В подобных работах [184, 185] рассматривались локальные отклонения структуры и состава веществ от средних в данном объеме, и указанные отклонения связывались с механическими и другими физическими характеристиками изучаемых объектов.

Ряд вопросов, касающихся сугубо практических проблем, таких как тре-

щинообразование, старение и разрушение материалов, потери устойчивости пленочных покрытий вследствие явлений массопереноса, анализ напряженно-деформированного состояния в растущих кристаллах и монокристаллических плёнках рассмотрены в работах [17, 21, 65–68, 116, 140, 141, 149, 154, 155, 159, 176, 179, 190, 225, 226, 254, 261].

Первая попытка теоретически осмыслить взаимосвязанность между напряжённо-деформированным состоянием и дислокационной структурой, возникающей в процессе диффузии, предпринята в работе [299]. Описание взаимодействия полей различной физической природы в твердых телах наиболее строго и последовательно осуществляется методами неравновесной термодинамики. При этом используют два способа термодинамического описания - статистический [71, 115, 117, 118] и феноменологический [2, 3, 16, 17, 59, 69, 70, 72, 73, 85, 86, 118, 144, 160, 161, 164, 165, 167, 168, 170, 180, 186–188]. В дальнейшем, в рамках феноменологического подхода получили развития два способа описания механо-диффузионных явлений.

Первый способ основан на теории гетерогенных смесей для которых характерно наличие макроскопических неоднородностей или включений и поверхностей раздела составляющих - фаз, различающихся физическими свойствами. Основными работами в этом направлении можно считать [157, 213, 218, 219, 228, 245].

Второй подход основан на теории гомогенных смесей, составляющие которых - компоненты перемешаны и взаимодействуют на молекулярном или атомарном уровнях (поверхности раздела частей отсутствуют). К ним относят твердые тела с примесями, сплавы, твердые растворы (однофазные кристаллические или аморфные твердые вещества переменного состава из двух или более компонентов). Такой подход обладает рядом преимуществ основным из которых является то, что физические свойства гомогенных смесей во всех частях одинаковы или меняются непрерывно, без скачков, что позволяет

эффективно применять аппарат дифференциального исчисления. Кроме того, с точки зрения термодинамики такие смеси представляют собой однородные термодинамические системы, каждой точке которых в условиях равновесия соответствуют одинаковые значения давления, температуры и концентрации, что тоже существенно упрощает процесс моделирования термомеханодиффузионных явлений. Ввиду вышеизложенного именно это направление получило наибольшее развитие, что отражено в более поздних публикациях [25–28, 58, 87, 119–121, 123, 125–127, 130, 158, 163, 192, 193, 234, 285–289, 294, 301, 302, 330, 336–338].

Теоретические основы, заложенные в вышеперечисленных работах позволили в дальнейшем перейти к построению замкнутых математических моделей и формулировке начально-краевых задач термомеханодиффузии [30, 87, 88, 108, 109, 114, 122, 124, 128, 129, 134, 144, 147, 148, 150, 165, 168, 169, 174, 175, 178, 187, 189, 191, 195–212, 214–217, 221, 227, 236–242, 244, 246, 248–251, 255, 257–260, 262–266, 270–279, 281, 282, 284, 289, 291–293, 295–298, 300–326, 331, 333, 339–341]. Здесь в основном исследуются линейные модели термомеханодиффузии. Среди них следует особо выделить публикации, в которых рассматриваются задачи с конечной скоростью распространения тепла и массопереноса [142, 191, 214, 216, 221, 237–239, 239, 240, 257, 262–264, 271–274, 276, 277, 292, 304, 306, 307, 311, 313–315, 325, 326, 331, 333, 339], а также модели в которых массоперенос и температура описываются уравнениями с дробными производными по времени [233, 241, 303, 309, 312]. Постановки нелинейных задач рассматриваются в работах [30, 109, 122, 178, 209–211, 224, 244, 246, 251, 293]. Контактные квазистатические задачи механодиффузии исследуются в статьях [227] (для стержня и упругого основания) и в [174, 175] (для оболочек).

В рамках этого же подхода были построены модели термоэлектромагнитомеханодиффузии [22–24, 137, 166, 194, 231, 232, 243, 267–269, 284, 345]. Так, в работах [22, 137, 166] разработана модель многокомпонентного электропро-

водящего твердого раствора с заряженными подсистемами примесей, которая является обобщением деформационной модели электропроводящего неполяризованного неферромагнитного тела [166]. В статьях [231, 232, 267–269] рассматриваются несвязанные задачи термомеханодиффузии и электродинамики с конечной скоростью распространения тепла и массопереноса. В дополнение к изложенному следует также отметить публикации [29, 51, 54, 55, 57], вошедшие в монографии [30, 284] отмеченные выше. Кроме того, достаточно подробный обзор, посвященный различным вопросам моделирования термомеханодиффузионных процессов, имеется в работах [58, 290].

Несмотря на то, что первые формулировки динамических задач механодиффузии появились еще в 60-х – 70-х годах прошлого века, вопросы, связанные с существованием и единственностью решения задач нестационарной связанной механодиффузии за исключением отдельных работ [31, 289], получили своё развитие в основном с середины 90-х годов прошлого века. Из современных работ здесь следует отметить [196–203, 210–212, 217, 227, 241, 244, 279, 313], где были доказаны теоремы существования и единственности решений задач термомеханодиффузии, теоремы о взаимности работ, а также исследованы вопросы связанные с асимптотическими свойствами решений вышеуказанных задач.

Несколько сложнее обстоит дело с решением конкретных задач о которых говорилось выше. Среди перечисленных работ имеется большое количество публикаций посвященных решению статических [174, 175, 265–270, 301], квазистатических [160, 169, 222, 223, 316, 317, 320, 323] и стационарных [142, 214, 231, 232, 263, 264, 271–278, 289, 306, 309, 310, 325, 326, 333] задач термомеханодиффузии (а также несвязанных задач термомеханодиффузии и электродинамики). Решения этих задач в одномерном случае [174, 175, 301, 316, 317, 320, 323] получаются известными методами решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений и особых сложностей не

вызывают. В многомерных случаях [142, 160, 169, 214, 223, 231, 232, 263–278, 289, 306, 309, 310, 325, 326, 333] в зависимости от конфигурации области используются разложения искомым функций в ряды Фурье или интегральные преобразования Фурье или Ганкеля, позволяющие свести исходную систему уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом для обращения интегральных преобразований используются численные алгоритмы. Анализ несвязанных моделей упругости и диффузии даже в нестационарной постановке особых сложностей также не возникает. С результатами решений этих задач можно ознакомиться в работах [248, 249, 251, 281].

Наибольшую трудность вызывают нестационарные связанные одномерные [205, 303, 311, 314, 315] и двумерные задачи термомеханодиффузии [191, 221, 237, 240, 307], в том числе и в цилиндрической системе координат [195, 197, 233, 236, 291, 331], а также несвязанные задачи термомеханодиффузии и электродинамики [194]. Здесь помимо вышеописанных приемов используется преобразование Лапласа по времени обращение которого сопряжено с большими математическими трудностями.

В выше перечисленных работах применяются численные алгоритмы обращения преобразования Лапласа, в частности *метод Дурбина* суть которого заключается в том, что интеграл Меллина по мнимой прямой выражается через обратное преобразование Фурье. Для вычисления последнего интеграла используются специальные численные алгоритмы, с которыми можно ознакомиться в работах [105, 235, 247, 252]. Данный алгоритм подробно анализируется в учебном пособии по численному обращению преобразования Лапласа [105]. Выводы, полученные на основании большого количество рассмотренных примеров, позволяют утверждать, что во-первых, применение вариантов метода Дурбина, не учитывающих специфику интегрирования быстро осциллирующих функций, может привести к более худшим результатам, чем

использование традиционной формулы метода Дурбина. Во-вторых, для получения удовлетворительных результатов необходимо предварительное выделение сингулярных особенностей обязательно имеющих место в функциях Грина. Это означает, что данный алгоритм разумно применять при вычислении сверток функций Грина с правыми частями граничных условий или с функциями, характеризующими заданные объемные возмущения. Для нахождения же самих функций Грина метод Дурбина и его различные модификации типа метод Дурбина с аппроксимацией трансформанты, комбинированный метод Дурбина и т.д. не пригодны. Аналогичные замечания касаются также *метода квадратур сверток* и *шагового метода*, также рассмотренных в работе [105]. Метод *Gaver–Stehfast* использующийся при обращении преобразования Лапласа в [331] был разработан в конце 60-х годов 20-го века. В частности в работе [280] рассматриваются вопросы сходимости и оценка точности данного алгоритма. Этот метод является приближенным аналитическим и его идея основана на использовании аппроксимирующей последовательности для построения которой необходимо знать значение изображений в определенных точках действительной оси. Аналогичные идеи используются при нахождении оригиналов с помощью разложений по ортогональным многочленам [135, 136, 172]. Например, в работе [216] обратное преобразование Лапласа строится с помощью разложений по полиномам Лежандра.

Вообще говоря, вопросу посвященному алгоритмам (численным или аналитическим) обращения преобразования Лапласа уделяется большое внимание. Некоторые из работ по данной тематике представлены здесь [83, 84, 105, 111, 112, 135, 136, 172, 235, 247, 252, 283, 332]. Однако, насколько можно судить по имеющимся в настоящее время публикациям и как справедливо отмечено в статье [172], универсального алгоритма обращения преобразования Лапласа не существует. Каждый конкретный алгоритм подходит под определенный класс функций. Специфика же изображений влияет на выбор под-

ходящих систем функций с помощью которых можно приблизить искомые значения оригиналов. При этом изображения, получающиеся при решении конкретных задач, являются настолько громоздкими, что практически проверить возможность применения того или иного алгоритма для нахождения их оригиналов не всегда представляется возможным.

В некоторых случаях применяются численные алгоритмы решения нестационарных задач основанные на методах *конечных разностей* [147, 148, 181, 224], *квадратурных формулах* [88], *конечных элементов* [150, 305, 339, 345] или же используются готовые пакеты вычислительной математики и механики такие как Mathematica, Mathcad, Matlab, Ansys и т.д., как например в следующих работах [215, 239, 242, 246]. Известны случаи использования *метода Галеркина* [257] и *метода граничных интегральных уравнений* [304] для решения подобных задач. Заметим, что численные методы, при всей своей несомненной эффективности, обладают и рядом недостатков. Например, они склонны к накоплению ошибок, ограниченно пригодны для прогнозирования. Для их проверки обязательно необходимо некоторое эталонное решение, в достоверности которого нет сомнений. Для получения таких решений в нестационарных задачах в различных комбинациях возможно применение следующих аналитических методов: метода характеристик, интегральных преобразований, малого параметра, метода разложения в ряды по системам ортогональных функций, метода граничных интегральных уравнений и его дискретного аналога - метода граничных элементов и некоторых других. При использовании конечно-разностных схем, существенным вопросом является анализ ее на устойчивость, что в свою очередь влияет на сходимость полученного с ее помощью решения к решению исходной задачи. Это достаточно сложная математическая задача. В то же время аналитические и численно-аналитические методы (т.е. методы, использующие в качестве вспомогательных инструментов апробированные численные алгоритмы) позволяют получить точное

решение задачи в явном виде.

Проблема, связанная с обращением преобразования Лапласа охватывает очень широкий класс разнообразных нестационарных задач и выходит за рамки рассматриваемых здесь задач механодиффузии. Однако, подводя итог по обзору научных исследований в рассматриваемой области нельзя не учесть накопленный опыт в решении нестационарных задач из смежных областей механики связанных полей. Не претендуя на полноту, отметим также ряд публикаций касающихся решения нестационарных задач теории упругости [62, 104], термоупругости [106, 256] и электромагнитоупругости [38–47, 334, 335] в которых применяются некоторые практические методы обращения преобразования Лапласа. Например, в работах [38, 39, 41, 46, 47, 62] для обращения преобразования Лапласа использовались аналитические методы, основанные на разложении изображений в ряды по экспонентам, коэффициентами которых являются рациональные функции. Такое представление позволило в дальнейшем для нахождения оригиналов использовать вычеты и таблицы операционного исчисления. В ряде случаев использовался алгоритм совместного обращения преобразования Лапласа-Фурье [40, 62] или асимптотическое представление решения в окрестности начального момента времени [256]. Нестационарные задачи в [104, 106] решались с помощью метода граничных интегральных уравнений.

Обзор опубликованных монографий и статей позволяет сделать вывод о том, что исследования в области связанных нестационарных задач механодиффузии недостаточны. Несмотря на большое разнообразие и сложность постановок задач (вплоть до моделей термоэлектромагнитомеханодиффузии) основные достижения в этой области в основном были получены с использованием численных и численно-аналитических методов. Помимо уже отмеченных недостатков таких подходов отметим, что диффузионные процессы протекают достаточно медленно, поэтому может возникнуть необходимость

в численном вычислении интегралов (например при обращении преобразования Лапласа или вычислении сверток) на очень больших интервалах, что может потребовать использование очень большого количества точек разбиения промежутков интегрирования. Ввиду этого обстоятельства практически все задачи рассматриваются в малой окрестности начального момента времени, что не позволяет в полной мере промоделировать протекающие в средах механодиффузионные процессы.

Что касается точных решений, то в связи с относительно большой размерностью систем дифференциальных уравнений, вытекающих из постановок задач механодиффузии, они присутствуют лишь в единичных работах и, как правило, касаются лишь одномерных несвязанных задач.

1.2. Математическая модель

термоэлектромагнитоупругой среды с учётом диффузии

Все дальнейшие исследования опираются на линеаризованную модель термоэлектромагнитомеханодиффузии для многокомпонентной анизотропной среды [4, 22–25, 49, 52, 102, 166, 327].

Линеаризованные уравнения движения сплошной среды относительно недеформированного состояния и геометрические соотношения имеют вид [64, 107, 177]:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{F}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i), \quad (1.1)$$

где t – время, ρ – плотность среды; $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$ и $\mathbf{F} = F^i \mathbf{e}_i$ – векторы перемещения и массовых сил (здесь и далее по повторяющимся латинским индексам, кроме заключенных в круглые скобки, проводится суммирование от 1 до 3); ε_{ij} – компоненты тензора деформации Коши, $\boldsymbol{\sigma} = \sigma^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ – тензор напряжений Эйлера; $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ – ковариантный базис, ∇_i – оператор ковариантного дифференцирования.

Уравнения термодинамики при отсутствии рассеяния энергии в среде записываются так [64, 107, 119, 120, 177]:

$$T_0 \frac{\partial S}{\partial t} = q^{(Q)} - \rho^{-1} \operatorname{div} \mathbf{q}, \quad d\Psi + S d\theta = \rho^{-1} \sigma^{ij} d\varepsilon_{ij} + \sum_{r=1}^N G^{(r)} d\eta^{(r)} + \tilde{q} dt, \quad (1.2)$$

где T_0 и T – начальная и актуальная температура среды; S – удельная энтропия; \mathbf{q} – вектор плотности теплового потока; $\theta = T - T_0$; $q^{(Q)}$ – массовая плотность тепловых источников; $G^{(q)}$ – удельный потенциал Гиббса q -ой компоненты вещества в составе N -компонентной среды; $\eta^{(q)} = n^{(q)} - n_0^{(q)}$ – изменение концентрации; $n_0^{(q)}, n^{(q)}$ – начальная и актуальная концентрации

(массовые доли) компоненты q -го вещества; $\Psi = U - ST$ – массовая плотность свободной энергии; $\tilde{q}dt$ – массовая плотность притока энергии без учета тепловой и диффузионной составляющей; U – внутренняя энергия.

Соотношения (1.1) и (1.2) дополняются равенствами для теплового и диффузионного потоков с конечной скоростью распространения тепла и переноса массы (обобщенные законы Фурье и Фика)[120]

$$\begin{aligned} \mathbf{q} + \tau_\theta \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} &= -k^{ij} \nabla_j \theta \mathbf{e}_i, \\ \mathbf{J}^{(q)} + \tau_\eta^{(q)} \frac{\partial \mathbf{J}^{(q)}}{\partial t} &= - \sum_{r=1}^N L^{(qr)ij} \nabla_j G^{(r)} \mathbf{e}_i \quad (q = \overline{1, N}), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где k^{ij} – компоненты тензора теплопроводности; $L^{(qr)ij}$ – коэффициенты матрицы Онзагера; $\mathbf{J}^{(q)} = J^{(q)i} \mathbf{e}_i$ – вектор массового потока; τ_θ и $\tau_\eta^{(q)}$ – время релаксации теплового и диффузионных потоков.

Для конкретизации модели сплошной среды в уравнениях (1.1) – (1.3) должны быть заданы внешние силы, массовые плотности притоков тепла и энергии без учета тепловой составляющей, а также привлечены дополнительные физические законы и определяющие соотношения. Полагаем, что массовая сила $\rho \mathbf{F}$, входящая в уравнение движения, содержит силу Лоренца $\rho \mathbf{F}^{(e)}$; приток тепла $\rho q^{(Q)}$ в уравнении теплопереноса содержит джоулево тепло $\rho q^{(e)}$; дополнительный приток энергии $\tilde{q}dt$ в уравнении баланса энергии происходит за счет электромагнитного поля. Соотношения для этих величин имеют вид [64, 107, 177]:

$$\rho \mathbf{F}^{(e)} = \rho^{(e)} \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{H}]; \quad (1.4)$$

$$\rho q^{(e)} = (\mathbf{j}, \mathbf{E}); \quad (1.5)$$

$$\rho \tilde{q}dt = \frac{1}{4\pi} [(\mathbf{D}, d\mathbf{E}) + (\mathbf{B}, d\mathbf{H})], \quad (1.6)$$

где $\mathbf{E} = E^i \mathbf{e}_i$ и $\mathbf{H} = H^i \mathbf{e}_i$ – векторы напряженностей электрического и магнитного полей; $\mathbf{D} = D^i \mathbf{e}_i$ и $\mathbf{B} = B^i \mathbf{e}_i$ – векторы электрической и магнитной индукции; $\mathbf{j} = j^i \mathbf{e}_i$ – плотность тока; $\rho^{(e)}$ – плотность зарядов; $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}$ – тензор удельной электропроводности.

Дополнительными соотношениями являются уравнения электромагнитодинамики и уравнения массового баланса [4, 64, 107, 177, 327]:

$$\begin{aligned} c \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & c \operatorname{rot} \mathbf{H} &= 4\pi \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi \rho^{(e)}, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial t} &= -\operatorname{div} \mathbf{J}^{(q)} + F^{(q)} & (q = \overline{1, N}), & & & & & (1.7) \\ \mathbf{j} &= \left(\boldsymbol{\sigma}^{(e)}, \mathbf{E} + \frac{1}{c} \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{H} \right] \right) + \rho^{(e)} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \end{aligned}$$

где c – скорость света; $F^{(q)}$ – плотность источников вещества (количество вещества, образующегося вследствие химических реакций в единице объёма за единицу времени) для q -ой компоненты.

Следует заметить, что равенство $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ является следствием первого уравнения в (1.7) и поэтому не является независимым [177]. Это соотношение называется законом Гаусса и физически означает отсутствие магнитных зарядов.

С учетом (1.2) и (1.6) дифференциал свободной энергии $\Psi(\varepsilon_{ij}, \theta, \eta^{(q)}, E_i, H_i)$ записывается так:

$$d\Psi = \frac{\sigma^{ij}}{\rho} d\varepsilon_{ij} - S d\theta + \sum_{r=1}^N G^{(r)} d\eta^{(r)} + \frac{1}{4\pi\rho} [(\mathbf{D}, d\mathbf{E}) + (\mathbf{B}, d\mathbf{H})],$$

откуда получаем выражения для физических соотношений:

$$\sigma^{ij} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad S = -\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad D^i = 4\pi\rho \frac{\partial \Psi}{\partial E_i}, \quad B^i = 4\pi\rho \frac{\partial \Psi}{\partial H_i}, \quad G^{(q)} = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta^{(q)}}. \quad (1.8)$$

Далее для построения определяющих соотношений модели термоэлектромагнитоупругости с учетом диффузии принимается, что свободная энер-

гия есть однородный многочлен второй степени от изменения температуры, компонент тензора деформаций, векторов электрической и магнитной индукции, а также концентраций веществ, входящих в состав среды (дополнительно полагается, что в начальном состоянии $\Psi_0 = 0$ и $S_0 = 0$) [4, 18, 52, 327]:

$$\begin{aligned}
\Psi = & \frac{1}{2\rho} C^{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - \frac{c_0}{2T_0} \theta^2 + \frac{1}{8\pi\rho} \varepsilon^{(e)ij} E_i E_j + \frac{1}{8\pi\rho} \mu^{(h)ij} H_i H_j + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{q,r=1}^N M^{(qr)} \eta^{(q)} \eta^{(r)} + \frac{1}{4\pi\rho} f^{ij} E_i H_j - \frac{1}{\rho} b^{ij} \varepsilon_{ij} \theta - \frac{1}{4\pi\rho} \kappa^{ijk} \varepsilon_{ij} E_k - \\
& + \frac{1}{4\pi\rho} \gamma^{ijk} \varepsilon_{ij} H_k + \frac{1}{4\pi\rho} r^{(e)i} \theta E_i + \frac{1}{4\pi\rho} r^{(h)i} \theta H_i - \frac{1}{\rho} \sum_{q=1}^N \alpha^{(q)ij} \eta^{(q)} \varepsilon_{ij} - \\
& - \theta \sum_{q=1}^N v^{(q)} \eta^{(q)} + \frac{1}{4\pi\rho} \sum_{q=1}^N \beta^{(q)i} \eta^{(q)} E_i + \frac{1}{4\pi\rho} \sum_{q=1}^N \chi^{(q)i} \eta^{(q)} H_i.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

где (нижний индекс «0» соответствует значению величин в начальном состоянии)

$$\begin{aligned}
C^{ijkl} &= \rho \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \right)_0, \quad c_0 = - \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} \right)_0, \quad \varepsilon^{(e)ij} = 4\pi\rho \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial E_i \partial E_j} \right)_0, \\
\mu^{(h)ij} &= 4\pi\rho \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial H_i \partial H_j} \right)_0, \quad M^{(qr)} = \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^{(q)} \partial \eta^{(r)}} \right)_0, \quad b^{ij} = -\rho \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \theta} \right)_0, \\
f^{ij} &= 4\pi\rho \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial E_i \partial H_j} \right)_0, \quad \kappa^{ijk} = 4\pi\rho \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial E_k} \right)_0, \quad \gamma^{ijk} = 4\pi\rho \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial H_k} \right)_0, \\
r^{(e)i} &= 4\pi\rho \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta \partial E_i} \right)_0, \quad r^{(h)i} = 4\pi\rho \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta \partial H_i} \right)_0, \quad \alpha^{(q)ij} = -\rho \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \eta^{(q)}} \right)_0, \\
v^{(q)} &= - \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta \partial \eta^{(q)}} \right)_0, \quad \beta^{(q)i} = -4\pi\rho \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial E_i \partial \eta^{(q)}} \right)_0, \quad \chi^{(q)i} = -4\pi\rho \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial H_i \partial \eta^{(q)}} \right)_0.
\end{aligned}$$

Здесь C^{ijkl} и b^{ij} – компоненты тензоров упругих и тепловых постоянных; c_0 – коэффициент теплоемкости в начальном состоянии; $\varepsilon^{(e)kl}$ и $\mu^{(h)kl}$ – компоненты тензоров диэлектрической и магнитной проницаемости; κ^{klm} и γ^{klm} – компоненты тензоров пьезоэлектрических и пьезомагнитных постоянных; f^{ij} – коэффициенты, связывающие электрическое и магнитное поле; $r^{(e)i}$ и $r^{(h)i}$ – коэффициенты, характеризующие термоэлектрические и термомагнитные эффекты. Коэффициенты $M^{(qr)}$, $\alpha^{(q)ij}$, $v^{(q)}$, $\beta^{(q)i}$ и $\chi^{(q)i}$ определяются типом кристаллическое решетки и являются характеристиками, связывающими электрическое, магнитное, механическое и температурное поле с диффузионным полем.

Равенство (1.9) с использованием (1.8) приводит к следующим определяющим соотношениям:

$$\begin{aligned}\sigma^{ij} &= C^{ijkl}\varepsilon_{kl} - b^{ij}\theta - \frac{1}{4\pi}\kappa^{ijk}E_k - \frac{1}{4\pi}\gamma^{ijk}H_k - \sum_{q=1}^N \alpha^{(q)ij}\eta^{(q)}, \\ D^i &= \varepsilon^{(e)ij}E_j + \kappa^{kli}\varepsilon_{kl} + r^{(e)i}\theta + f^{ij}H_j + \sum_{q=1}^N \beta^{(q)i}\eta^{(q)}, \\ B^i &= \mu^{(h)ij}H_j + \gamma^{kli}\varepsilon_{kl} + f^{ji}E_j + r^{(h)i}\theta + \sum_{q=1}^N \chi^{(q)i}\eta^{(q)};\end{aligned}\quad (1.10)$$

$$S = \frac{c_0}{T_0}\theta + \frac{b_{ij}}{\rho}\varepsilon_{ij} - \frac{1}{4\pi\rho}r^{(e)i}E_i - \frac{1}{4\pi\rho}r^{(h)i}H_i + \sum_{q=1}^N v^{(q)}\eta^{(q)};\quad (1.11)$$

$$G^{(q)} = \sum_{r=1}^N M^{(qr)}\eta^{(r)} - \frac{1}{\rho}\alpha^{(q)ij}\varepsilon_{ij} - v^{(q)}\theta + \frac{1}{4\pi\rho}\beta^{(q)i}E_i + \frac{1}{4\pi\rho}\chi^{(q)i}H_i.\quad (1.12)$$

Первое равенство представляет собой обобщенный закон Гука, где, коэффициенты $\alpha^{(q)ij}$ характеризуют объёмное расширение за счет массопереноса.

Из (1.2) и (1.11) может быть исключена энтропия:

$$\begin{aligned}
& c_0 \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{T_0 b^{ij}}{\rho} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} - \frac{T_0 r^{(e)i}}{4\pi\rho} \frac{\partial E_i}{\partial t} - \frac{T_0 r^{(h)i}}{4\pi\rho} \frac{\partial H_i}{\partial t} + \\
& + T_0 \sum_{q=1}^N v^{(q)} \frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial t} = q^{(e)} - \rho^{-1} \operatorname{div} \mathbf{q}.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Продифференцируем далее равенство (1.13) по времени t , результат дифференцирования домножим на τ_θ и прибавим к (1.13), получим *уравнение теплопереноса с конечной скоростью распространения тепла*:

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \tau_\theta \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(c_0 \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{T_0 b^{ij}}{\rho} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} - \frac{T_0 r^{(e)i}}{4\pi\rho} \frac{\partial E_i}{\partial t} - \frac{T_0 r^{(h)i}}{4\pi\rho} \frac{\partial H_i}{\partial t} + \right. \\
& \left. + T_0 \sum_{q=1}^N v^{(q)} \frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial t} - q^{(Q)} + \rho^{-1} \operatorname{div} \mathbf{q} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

В работах [87, 123, 125] показано, что для наиболее простых диффузионных механизмов коэффициенты $M^{(qr)}$, $v^{(q)}$ и $L^{(qr)ij}$ могут быть найдены по формулам

$$\begin{aligned}
M^{(qr)} &= g^{(qr)} \frac{RT_0}{m^{(q)} n_0^{(q)}}, \quad v^{(q)} = \frac{R}{m^{(q)}} \ln \left(n_0^{(q)} \gamma^{(q)} \right), \\
\frac{RT_0}{m^{(q)}} L^{(qr)ij} &= \begin{cases} D^{(q)ij} n_0^{(q)}, & r = q, \\ 0 & , \quad r \neq q. \end{cases}
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Здесь $\gamma^{(q)}$ - коэффициент активности, зависящий только от концентраций $n^{(q)}$; R - универсальная газовая постоянная, $D^{(q)ij}$ - коэффициенты самодиффузии; $m^{(q)}$ - молярная масса компоненты с номером q ; $g^{(qr)}$ - термодинамические множители Даркена:

$$g^{(qr)} = \delta_{qr} + \frac{n^{(q)} d \ln \gamma^{(q)}}{n^{(r)} d \ln n^{(r)}} \Bigg|_{n^{(q)}=n_0^{(q)}, n^{(r)}=n_0^{(r)}},$$

где δ_{qr} - символ Кронекера.

В теории диффузии для твердых тел, обычно, рассматривают два вида приближений.

1. Среда является идеальным (твердым) раствором. В этом случае [87, 123, 125]

$$\gamma^{(q)} = 1, g^{(qr)} = \delta_{qr}. \quad (1.16)$$

2. Среда – неидеальный раствор, но перекрестными коэффициентами $L^{(qr)ij}$ по сравнению с диагональными $L^{(qq)ij}$ можно пренебречь, что отражено в последнем равенстве в (1.15). Последнее предположение обосновывается в статистической физике и термодинамике [16, 73].

С учетом (1.15) выражение для потенциала Гиббса (1.12) записывается так:

$$G^{(q)} = \frac{RT_0}{m^{(q)}n_0^{(q)}} \sum_{r=1}^N g^{(qr)} \eta^{(r)} - \frac{1}{\rho} \alpha^{(q)ij} \varepsilon_{ij} - \frac{R}{m^{(q)}} \ln \left[n_0^{(q)} \gamma^{(q)} \right] \theta + \frac{1}{4\pi\rho} \beta^{(q)i} D_i + \frac{1}{4\pi\rho} \chi^{(q)i} B_i. \quad (1.17)$$

К уравнению массового баланса в (1.7) применим такое же преобразование как и для уравнения теплопереноса. Продифференцируем его по времени t , результат дифференцирования домножим на $\tau_\eta^{(q)}$ и прибавим к исходному уравнению, получим *уравнение массопереноса с конечной скоростью распространения диффузионных процессов*:

$$\frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial t} + \tau_\eta^{(q)} \frac{\partial^2 \eta^{(q)}}{\partial t^2} = \frac{m^{(q)} n_0^{(q)}}{RT_0} \nabla_i \left(D^{(q)ij} \nabla_j G^{(q)} \right) + F^{(q)}. \quad (1.18)$$

Обобщенный закон Фика в (1.3) с учетом (1.17) запишется так:

$$\begin{aligned}
J^{(q)i} + \tau_\eta^{(q)} \frac{\partial J^{(q)i}}{\partial t} = & - \sum_{r=1}^N D^{(q)ij} g^{(qr)} \nabla_j \eta^{(r)} + \\
& + \frac{D^{(q)ij} \alpha^{(q)kl} m^{(q)} n_0^{(q)}}{\rho R T_0} \nabla_j \varepsilon_{kl} + \frac{D^{(q)ij} n_0^{(q)}}{T_0} \ln \left(n_0^{(q)} \gamma^{(q)} \right) \nabla_j \theta - \\
& - \frac{D^{(q)ij} \beta^{(q)k} m^{(q)} n_0^{(q)}}{4\pi \rho R T_0} \nabla_j D_k - \frac{D^{(q)ij} \chi^{(q)k} m^{(q)} n_0^{(q)}}{4\pi \rho R T_0} \nabla_j B_k, \quad q = \overline{1, N}.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Таким образом, замкнутая система уравнений линейной теории термоэлектромагнитоупругости с учётом диффузии с конечной скоростью распространения тепловых и диффузионных потоков образуется соотношениями (1.1), (1.4) - (1.7), (1.10), (1.17), (1.18). Из неё можно исключить деформации ε_{ij} и потенциал Гиббса $G^{(q)}$:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} = & \nabla_j (C^{ijkl} \nabla_k u_l) - \frac{1}{4\pi} [\nabla_j (\kappa^{ijk} E_k) + \nabla_j (\gamma^{ijk} H_k)] - \\
& - \nabla_j (b^{ij} \theta) - \sum_{r=1}^N \nabla_j (\alpha^{(r)ij} \eta^{(r)}) + \rho F^i, \\
\rho c_0 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + \tau_\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) = & \nabla_i (k^{ij} \nabla_j \theta) - T_0 b^{ij} \nabla_i \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} + \tau_\theta \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \right) + \\
& + \frac{T_0 r^{(e)i}}{4\pi} \left(\frac{\partial E_i}{\partial t} + \tau_\theta \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} \right) + \frac{T_0 r^{(h)i}}{4\pi} \left(\frac{\partial H_i}{\partial t} + \tau_\theta \frac{\partial^2 H_i}{\partial t^2} \right) - \\
& - \rho R T_0 \sum_{r=1}^N \frac{\ln \left(n_0^{(r)} \gamma^{(r)} \right)}{m^{(q)}} \left(\frac{\partial \eta^{(r)}}{\partial t} + \tau_\theta \frac{\partial^2 \eta^{(r)}}{\partial t^2} \right) + \rho q^{(Q)}, \\
\frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial t} + \tau_\eta^{(q)} \frac{\partial^2 \eta^{(q)}}{\partial t^2} = & \sum_{r=1}^N \nabla_i \left(D^{(q)ij} g^{(qr)} \nabla_j \eta^{(r)} \right) - \\
& - \frac{m^{(q)} n_0^{(q)}}{\rho R T_0} \nabla_i [D^{(q)ij} \nabla_j (\alpha^{(q)kl} \nabla_k u_l)] - \frac{n_0^{(q)}}{T_0} \ln \left(n_0^{(q)} \gamma^{(q)} \right) \nabla_i (D^{(q)ij} \nabla_j \theta) + \\
& + \frac{\beta^{(q)k} m^{(q)} n_0^{(q)}}{4\pi \rho R T_0} \nabla_i (D^{(q)ij} \nabla_j E_k) + \frac{\chi^{(q)k} m^{(q)} n_0^{(q)}}{4\pi \rho R T_0} \nabla_i (D^{(q)ij} \nabla_j H_k) + F^{(q)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c \varepsilon^{imk} \nabla_m E_k &= -\mu^{(h)ij} \frac{\partial H_j}{\partial t} - \gamma^{kli} \nabla_k \frac{\partial u_l}{\partial t} - \\
&\quad - f^{ji} \frac{\partial E_j}{\partial t} - r^{(h)i} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \sum_{r=1}^N \chi^{(r)i} \frac{\partial \eta^{(r)}}{\partial t}, \\
c \varepsilon^{imk} \nabla_m H_k &= 4\pi j_i + \varepsilon^{(e)ij} \frac{\partial E_j}{\partial t} + \kappa^{kli} \nabla_k \frac{\partial u_l}{\partial t} + r^{(e)i} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \\
&\quad + f^{ij} \frac{\partial H_j}{\partial t} + \sum_{r=1}^N \beta^{(r)i} \frac{\partial \eta^{(r)}}{\partial t}, \\
j_i &= \sigma_{ij}^{(e)} \left(E^j + c^{-1} \varepsilon^{jmn} \frac{\partial u_n}{\partial t} H_m \right) + \rho^{(e)} \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad q = \overline{1, N}.
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Здесь g_{ij} - компоненты метрического тензора, ε_{ijk} - компоненты псевдо-тензора Леви-Чевиты; произведение $D^{(q)ij} g^{(qr)}$ - парциальный коэффициент диффузии.

Кроме того с учетом (1.7) и (1.10) искомые величины в начальном и актуальном состоянии должны удовлетворять следующим соотношениям

$$\begin{aligned}
\nabla_i \left(\varepsilon^{(e)ij} E_j + \kappa^{kli} \nabla_k u_l + r^{(e)i} \theta + f^{ij} H_j + \sum_{r=1}^N \beta^{(r)i} \eta^{(r)} \right) &= 4\pi \rho^{(e)}, \\
\nabla_i \left(\varepsilon^{(e)ij} E_{0j} + \kappa^{kli} \nabla_k u_{0l} + r^{(e)i} \theta_0 + f^{ij} H_{0j} + \sum_{r=1}^N \beta^{(r)i} \eta_0^{(r)} \right) &= 4\pi \rho_0^{(e)}.
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Обычно полагают:

$$u_0^k = 0, \quad \frac{\partial u_0^k}{\partial t} = 0, \quad \theta_0 = 0, \quad \eta_0^{(q)} = 0.$$

Тогда соотношения (1.21) принимают вид:

$$\begin{aligned}
\nabla_i \left(\varepsilon^{(e)ij} E_j + \kappa^{kli} \nabla_k u_l + r^{(e)i} \theta + f^{ij} H_j + \sum_{r=1}^N \beta^{(r)i} \eta^{(r)} \right) &= 4\pi \rho^{(e)}, \\
\nabla_i \left(\varepsilon^{(e)ij} E_{0j} + f^{ij} H_{0j} \right) &= 4\pi \rho_0^{(e)}.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Из этих равенств находится начальная и актуальная плотность электрических зарядов $\rho_0^{(e)}$ и $\rho^{(e)}$.

К полученной системе уравнений (1.20) необходимо добавить выражения для силы Лоренца (1.4) и джоулева тепла (1.5).

Построенная здесь система уравнений (1.20) является обобщением моделей, полученных в работах [22–24, 166, 194, 231, 232, 267–269, 284, 345].

1.3. Граничные и начальные условия

Для выделения частных решений указанных систем уравнений, как правило, необходимы дополнительные условия, то есть формулировка соответствующих начально-краевых задач на пространственно-временном множестве $D \times \{t \geq t_0\}$, где D - геометрическая область с границей ∂D . Далее ограничимся основными типами дополнительных условий.

Начальные условия принимаем такими:

- механическая часть

$$\mathbf{u}|_{t=t_0} = \mathbf{u}_0, \quad \left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|_{t=t_0} = \mathbf{v}_0;$$

- термодинамическая часть (с учетом конечной скорости распространения тепла)

$$\theta|_{t=t_0} = \theta_0, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial t} \right|_{t=t_0} = \tilde{\theta}_0;$$

- электромагнитная часть

$$\mathbf{E}|_{t=t_0} = \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{H}|_{t=t_0} = \mathbf{H}_0;$$

- диффузионная часть (с учетом конечной скорости распространения диффузии)

$$\eta^{(q)}|_{t=t_0} = \eta_0^{(q)}, \quad \left. \frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial t} \right|_{t=t_0} = \tilde{\eta}_0^{(q)}, \quad q = 1, 2, \dots, N.$$

Здесь \mathbf{u}_0 , \mathbf{v}_0 , θ_0 , $\tilde{\theta}_0$, $\eta_0^{(q)}$, $\tilde{\eta}_0^{(q)}$, \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 - заданные функции пространственных координат. Далее в работе будем полагать, что эти величины равны нулю.

Граничные условия (область D ограничена; $\mathbf{n} = n^i \mathbf{e}_i$ - единичный вектор внешней нормали к ∂D):

- механическая часть ($\partial D = \Pi_u \cup \Pi_\sigma$; части границ Π_u и Π_σ могут пересекаться только по множеству меры нуль)

$$\mathbf{u}|_{\Pi_u} = \mathbf{U}, \quad \sigma^{ij} n_j \mathbf{e}_i|_{\Pi_\sigma} = \boldsymbol{\Sigma} \quad (t > t_0);$$

- термодинамическая часть ($\partial D = \Pi_T \cup \Pi_q$; части границ Π_T и Π_q могут пересекаться только по множеству меры нуль)

$$\theta|_{\Pi_T} = \Theta, \quad \left(q^i + \tau_\theta \frac{\partial q^i}{\partial t} \right) n_i \Big|_{\Pi_q} = Q \quad (t > t_0);$$

- электромагнитная часть ($\partial D = \Pi_E \cup \Pi_H$; части границ Π_E , Π_H и могут пересекаться только по множеству меры нуль)

$$\mathbf{E}|_{\Pi_E} = \mathbf{e}, \quad \mathbf{H}|_{\Pi_H} = \mathbf{h} \quad (t > t_0);$$

- диффузионная часть ($\partial D = \Pi_\eta \cup \Pi_J$; части границ Π_η и Π_J могут пересекаться только по множеству меры нуль)

$$\eta^{(q)} \Big|_{\Pi_\eta} = N^{(q)}, \quad q = \overline{1, N}; \quad \left(\mathbf{J}^{(q)} + \tau_\eta^{(q)} \frac{\partial \mathbf{J}^{(q)}}{\partial t} \right) \Big|_{\Pi_J} = \mathbf{I}^{(q)} \quad (t > t_0).$$

Величины, стоящие в правых частях граничных условий – поверхностные кинематические \mathbf{U} , Θ , \mathbf{e} , \mathbf{h} , $N^{(q)}$ и динамические $\boldsymbol{\Sigma}$, Q , $\mathbf{I}^{(q)}$ возмущения.

В том случае, когда граница состоит из одной части, в граничных условиях остается только одно соответствующее равенство.

Если область D не ограничена, то должны быть заданы условия на бесконечности. Таковым, например, является ограниченность искомых функций.

Для исследования установившихся колебательных процессов, вместо начальных условий могут задаваться условия периодичности решений.

1.4. Уравнения упругой диффузии в прямоугольной декартовой системе координат

Так как в прямоугольной декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 ковариантные и контравариантные компоненты тензоров совпадают, то для их физических компонент будем использовать те же обозначения, что и в криволинейной системе координат, но с нижней индексной формой записи.

Полагая, что температурные и электромагнитные эффекты отсутствуют, скорость распространения диффузионных процессов бесконечна, выпишем из (1.20) уравнения, описывающие упругие процессы для однородной среды с учётом диффузии в прямоугольной декартовой системе координат [4, 7, 19, 34, 53, 60, 74, 75, 95–98, 230, 253, 342, 343]:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} - \sum_{q=1}^N \alpha_{ij}^{(q)} \frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial x_j} + \rho F_i \quad (q = \overline{1, N}), \\ \frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial t} &= \sum_{r=1}^N D_{ij}^{(q)} g^{(qr)} \frac{\partial^2 \eta^{(q)}}{\partial x_i \partial x_j} - \Lambda_{ijkl}^{(q)} \frac{\partial^3 u_k}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l} + F^{(q)}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

где коэффициенты $\Lambda_{ijkl}^{(q)}$ характеризуют массоперенос под действием деформаций и в соответствии с (1.20) находятся по формулам:

$$\Lambda_{ijkl}^{(q)} = \frac{m^{(q)}}{\rho R T_0} D_{ij}^{(q)} \alpha_{kl}^{(q)} n_0^{(q)}. \quad (1.24)$$

Для изотропной среды компоненты тензора упругих постоянных имеют вид:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (1.25)$$

Здесь λ и μ - коэффициенты Ламе. Остальные физические константы определяются так (здесь и далее по повторяющимся греческим индексам суммирование отсутствует):

$$\Lambda_{\alpha\alpha\beta\beta}^{(q)} = \Lambda^{(q)}, \quad \alpha_{\alpha\alpha}^{(q)} = \alpha^{(q)}, \quad D_{\alpha\alpha}^{(q)} = D^{(q)}. \quad (1.26)$$

С учетом (1.25) и (1.26) уравнения движения изотропной среды удобно записывать в векторной форме

$$\begin{aligned}
(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{F} &= \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \sum_{r=1}^N \alpha^{(r)} \operatorname{grad} \eta^{(r)}, \\
\sum_{r=1}^N D^{(q)} g^{(qr)} \Delta \eta^{(r)} + F^{(q)} &= \frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial t} + \Lambda^{(q)} \Delta (\operatorname{div} \mathbf{u}),
\end{aligned} \tag{1.27}$$

где Δ - оператор Лапласа.

Полученные замкнутые системы уравнений дополняются начальными и граничными условиями, указанными в п. 1.3. В качестве геометрической области D будут рассматриваться: плоский слой, полупространство или пространство.

Введём следующие безразмерные параметры (при одинаковом начертании они обозначаются штрихом, который в дальнейшем изложении будет опускаться):

$$\begin{aligned}
x'_i &= \frac{x_i}{L}, \quad u'_i = \frac{u_i}{L}, \quad \tau = \frac{ct}{L}, \quad C'_{ijkl} = \frac{C_{ijkl}}{C_{1111}}, \\
C^2 &= \frac{C_{1111}}{\rho}, \quad \alpha_{ij}^q = \frac{\alpha_{ij}^{(q)}}{C_{1111}}, \quad D_{ij}^q = \frac{D_{ij}^{(q)}}{CL}, \\
\Lambda_{ijkl}^q &= \frac{\Lambda_{ijkl}^{(q)}}{CL}, \quad F'_i = \frac{\rho F_i}{C_{1111}}, \quad F'_{q+m} = \frac{F^{(q)} L}{C} \quad (i, j, k, l = \overline{1, m});
\end{aligned} \tag{1.28}$$

$$\begin{aligned}
U'_i(M, \tau) &= \frac{U_i(M, t)}{L}, \\
\Sigma'_{\alpha\beta}(M, \tau) &= \frac{\Sigma_{\alpha\beta}(M, t)}{C_{\alpha\beta\alpha\beta}}, \quad I_i^q(M, \tau) = \frac{I_i^{(q)}(M, t)}{C}.
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Здесь $m = \overline{1, 3}$ – размерность задачи по пространственным переменным.

Уравнения движения анизотропной среды в безразмерных величинах записываются в форме (точки здесь и далее обозначают производную по без-

размерному времени τ):

$$\begin{aligned} \ddot{u}_i &= C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} - \sum_{q=1}^N \alpha_{ij}^q \frac{\partial \eta_q}{\partial x_j} + F_i \quad (i = \overline{1, m}), \\ \dot{\eta}_q &= \sum_{r=1}^N D_{ij}^q g^{(qr)} \frac{\partial^2 \eta_q}{\partial x_i \partial x_j} - \Lambda_{ijkl}^q \frac{\partial^3 u_k}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l} + F_{q+m} \quad (q = \overline{1, N}). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Соотношения (1.30) совместно с граничными и начальными условиями образуют замкнутую постановку задач упругости с учётом диффузии в декартовой системе координат.

Положим далее, что исследуемая среда является твердым N -компонентным раствором, т.е. для термодинамического множителя Даркена имеет место равенство (1.16). Данное предположение с одной стороны упрощает вид уравнений (1.29). С другой стороны, большинство твердых материалов, в частности металлы и их сплавы, могут рассматриваться одновременно и как упругие среды и как твердые растворы.

Выделим здесь несколько частных случаев, которые будут исследоваться далее.

1. *Одномерные процессы:* $u = u_1(x, \tau)$, $F_1 = F_1(x, \tau)$, $\eta_q = \eta_q(x, \tau)$, $F_{q+1} = F_{q+1}(x, \tau)$, $x = x_1$. Уравнения движения имеют вид (штрих означает производную по переменной x):

$$\ddot{u} = u'' - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j' + F_1, \quad \dot{\eta}_q = D_q \eta_q'' - \Lambda_q u''' + F_{q+1} \quad (q = \overline{1, N}). \quad (1.31)$$

Здесь

$$D_q = D_{11}^q, \quad \alpha_q = \alpha_{11}^q, \quad \Lambda_q = \Lambda_{1111}^q.$$

Вектор диффузионного потока, а также тензоры напряжений и деформации имеют по одной ненулевой компоненте:

$$J_q = J_1^q = \Lambda_q u'' - D_q \eta_q' \quad (q = \overline{1, N}),$$

$$\sigma = \sigma_{11} = u' - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j, \quad \varepsilon = \varepsilon_{11} = u'.$$

2. *Двумерная процессы для ортотропной среды.* Полагаем, что:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(x_1, x_2, \tau), & u_2 &= u_2(x_1, x_2, \tau), \\ F_1 &= F_1(x_1, x_2, \tau), & F_2 &= F_2(x_1, x_2, \tau), \\ J_1^q &= J_1^q(x_1, x_2, \tau), & J_2^q &= J_2^q(x_1, x_2, \tau), \\ \eta_q &= \eta_q(x_1, x_2, \tau), & F_{q+2} &= F_{q+2}(x_1, x_2, \tau). \end{aligned}$$

Кроме того, в силу ортотропной симметрии для физических постоянных среды, имеем [63]:

$$\begin{aligned} C_{2221} &= C_{2223} = C_{2111} = C_{2113} = C_{2133} = C_{2311} = \\ &= C_{2313} = C_{2333} = C_{1113} = C_{2213} = C_{1333} = C_{2312} = 0, \\ \alpha_{kl}^q &= 0, \quad D_{ij}^q = 0, \quad \Lambda_{ijkl}^q = 0 \quad (i \neq j, k \neq l). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Введя дополнительные обозначения [34, 253]

$$\begin{aligned} C_{11} &= C_{1111} = 1, \quad C_{22} = C_{2222}, \quad C_{12} = C_{1212} = C_{2121}, \\ C_{21} &= C_{1122} + C_{1221} = C_{2211} + C_{2112}, \quad C_0 = C_{21} - C_{12}, \\ \Lambda_{\alpha\beta}^q &= \Lambda_{\alpha\alpha\beta\beta}^q, \quad \alpha_\alpha^q = \alpha_{\alpha\alpha}^q, \quad D_\alpha^q = D_{\alpha\alpha}^q, \end{aligned} \quad (1.33)$$

получаем двумерные уравнения движения для ортотропной N -компонентной среды:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + C_{12} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + C_{21} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + F_1 &= \ddot{u}_1 + \sum_{j=1}^N \alpha_1^j \frac{\partial \eta_j}{\partial x_1}, \\ C_{21} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_1} + C_{12} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + C_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + F_2 &= \ddot{u}_2 + \sum_{j=1}^N \alpha_2^j \frac{\partial \eta_j}{\partial x_2}, \\ D_1^q \frac{\partial^2 \eta_q}{\partial x_1^2} + D_2^q \frac{\partial^2 \eta_q}{\partial x_2^2} + F_{q+2} &= \dot{\eta}_q + \Lambda_{11}^q \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3} + \Lambda_{21}^q \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_2^2 \partial x_1} + \\ &+ \Lambda_{12}^q \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \Lambda_{22}^q \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_2^3} \quad (q = \overline{1, N}). \end{aligned} \quad (1.34)$$

Ненулевые компоненты вектора диффузионного потока и тензора напряжений определяются так:

$$\begin{aligned} J_1^q &= \Lambda_{11}^q \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \Lambda_{12}^q \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} - D_1^q \frac{\partial \eta_q}{\partial x_1}, \\ J_2^q &= \Lambda_{21}^q \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \Lambda_{22}^q \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} - D_2^q \frac{\partial \eta_q}{\partial x_2}; \end{aligned} \quad (1.35)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + C_0 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \sum_{j=1}^N \alpha_1^j \eta_j, \\ \sigma_{22} &= C_0 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + C_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \sum_{j=1}^N \alpha_2^j \eta_j, \\ \sigma_{12} &= C_{12} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right). \end{aligned} \quad (1.36)$$

3. *Трехмерная процессы для ортотропной среды.* Для описания трехмерных физико-механических процессов в ортотропной среде будем использовать уравнения в форме (1.30), где физические постоянные подчинены соотношениям (1.32). В дополнение к обозначениям (1.33) здесь будем также использовать

$$\begin{aligned} C_{33} &= C_{3333}, \quad C_{13} = C_{1313} = C_{3131}, \quad C_{23} = C_{2323} = C_{3232}, \\ C_{31} &= C_{1133} + C_{1313}, \quad C_{32} = C_{2233} + C_{2332}, \\ C_1 &= C_{31} - C_{13}, \quad C_2 = C_{32} - C_{23}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Компоненты вектора диффузионного потока и тензора напряжений имеют вид:

$$J_i^q = \sum_{j=1}^3 \Lambda_{ij}^q \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} - D_i^q \frac{\partial \eta_q}{\partial x_i}; \quad (1.38)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + C_0 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + C_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \sum_{j=1}^N \alpha_1^j \eta_j, \\
\sigma_{22} &= C_0 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + C_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + C_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \sum_{j=1}^N \alpha_2^j \eta_j, \\
\sigma_{33} &= C_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + C_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + C_{33} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \sum_{j=1}^N \alpha_3^j \eta_j, \\
\sigma_{12} &= C_{12} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \quad \sigma_{13} = C_{13} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \\
\sigma_{32} &= C_{32} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right).
\end{aligned} \tag{1.39}$$

Для описания некоторых алгоритмов глав 4 и 5 понадобится *общая постановка начально-краевых задач в операторной форме*:

$$\mathbf{L}(\mathbf{y}) + \mathbf{F} = 0, \tag{1.40}$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{y})|_{\Pi} = \mathbf{f}(\mathbf{s}, \tau), \quad \mathbf{s} \in \Pi, \tag{1.41}$$

$$\mathbf{N}(\mathbf{y})|_{\tau=0} = 0, \tag{1.42}$$

где \mathbf{L} – линейный матричный дифференциальный оператор соответствующий уравнениям (1.31), (1.34) или (1.30); \mathbf{M} ($i = \overline{1, 2}$) – матричный дифференциальный оператор граничных условий; \mathbf{N} – матричный дифференциальный оператор начальных условий; \mathbf{y} – вектор неизвестных; \mathbf{f} – вектор-функция правых частей краевых условий (1.41), \mathbf{F} – вектор-функция объемных возмущений; $\Pi = \partial D$; D – область решения задачи (1.40) – (1.42).

1.5. Краевые условия для задач упругой диффузии в прямоугольной декартовой системе координат

Сложность решения нестационарных задач механики, помимо всего прочего, зависит и от граничных условий, которые могут влиять как на выбор метода решения, так и на возможность построения аналитического решения задачи в целом. Вышеуказанные особенности для начально-краевых задач механодиффузии последовательно раскрываются в главах 2 – 4 данной работы. Здесь же в обзорном порядке предложена сложившаяся на основании публикаций [4–9, 18–20, 34, 35, 37, 52, 53, 60, 74–81, 90–101, 101, 230, 253, 328, 342–344] условная классификация задач упругой диффузии, в основе построения которой используется идеология классификации задач математической физики. При этом из всевозможных вариантов граничных условий выбраны такие, которые имеют реальный механический смысл. Ниже приводится *классификация одномерных задач упругой диффузии для слоя*:

- *Первая краевая задача*

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= f_{11}(\tau), & \eta_q|_{x=0} &= f_{q+1,1}(\tau), \\ u|_{x=1} &= f_{12}(\tau), & \eta_q|_{x=1} &= f_{q+1,2}(\tau); \end{aligned} \quad (1.43)$$

- *Вторая краевая задача*

$$\begin{aligned} \sigma|_{x=0} &= f_{11}(\tau), & J_q|_{x=0} &= f_{q+1,1}(\tau), \\ \sigma|_{x=1} &= f_{12}(\tau), & J_q|_{x=1} &= f_{q+1,2}(\tau); \end{aligned} \quad (1.44)$$

- *Смешанная краевая задача. Группа A*

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= f_{11}(\tau), & J_q|_{x=0} &= f_{q+1,1}(\tau), \\ u|_{x=1} &= f_{12}(\tau), & J_q|_{x=1} &= f_{q+1,2}(\tau); \end{aligned} \quad (1.45)$$

$$\begin{aligned} \sigma|_{x=0} &= f_{11}(\tau), & \eta_q|_{x=0} &= f_{q+1,1}(\tau), \\ \sigma|_{x=1} &= f_{12}(\tau), & \eta_q|_{x=1} &= f_{q+1,2}(\tau); \end{aligned} \quad (1.46)$$

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= f_{11}(\tau), & J_q|_{x=0} &= f_{q+1,1}(\tau), \\ \sigma|_{x=1} &= f_{12}(\tau), & \eta_q|_{x=1} &= f_{q+1,2}(\tau); \end{aligned} \quad (1.47)$$

- *Смешанная краевая задача. Группа B*

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= f_{11}(\tau), & J_q|_{x=0} &= f_{q+1,1}(\tau), \\ u|_{x=1} &= f_{12}(\tau), & \eta_q|_{x=1} &= f_{q+1,2}(\tau); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= f_{11}(\tau), & J_q|_{x=0} &= f_{q+1,1}(\tau), \\ \sigma|_{x=1} &= f_{12}(\tau), & J_q|_{x=1} &= f_{q+1,2}(\tau); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= f_{11}(\tau), & \eta_q|_{x=0} &= f_{q+1,1}(\tau), \\ \sigma|_{x=1} &= f_{12}(\tau), & \eta_q|_{x=1} &= f_{q+1,2}(\tau); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma|_{x=0} &= f_{11}(\tau), & J_q|_{x=0} &= f_{q+1,1}(\tau), \\ \sigma|_{x=1} &= f_{12}(\tau), & \eta_q|_{x=1} &= f_{q+1,2}(\tau). \end{aligned}$$

Эта классификация не претендует на полноту, но отражает наиболее типичные граничные условия, сочетающие кинематику и динамику механо-диффузионных процессов на границах рассматриваемых сред.

Принципиально важным моментом здесь является то, что краевые задачи с граничными условиями группы А, как будет показано далее, допускают возможность построения решений в виде неполных рядов Фурье [53, 60, 81, 90, 91], а для полуограниченной среды – с помощью синус-, косинус-преобразования Фурье [5, 74, 75]. Этому вопросу посвящена глава 2. Решения остальных задач можно получить, используя предложенный в работе метод эквивалентных граничных условий (глава 4). Задачи группы А при этом играют роль так называемых «эталонных» задач, через решения которых выражается решения любых других задач [77, 95, 96, 230, 343].

Аналогичная классификация может быть построена и для многомерных задач. Ввиду её громоздкости, приведем здесь только двумерные и трехмерные аналоги смешанных краевых условий группы А.

Двумерные задачи для ортотропной полосы ($x_1 \in \mathfrak{R}$, $x_2 \in [0, 1]$). Группа А состоит из трёх задач

$$\begin{aligned}\sigma_{12}|_{x_2=0} &= f_{11}(x_1, \tau), \quad \sigma_{12}|_{x_2=1} = f_{12}(x_1, \tau), \\ u_2|_{x_2=0} &= f_{21}(x_1, \tau), \quad u_2|_{x_2=1} = f_{22}(x_1, \tau), \\ J_2^q|_{x_2=0} &= f_{q+2,1}(x_1, \tau), \quad J_2^q|_{x_2=1} = f_{q+2,2}(x_1, \tau),\end{aligned}\tag{1.48}$$

или

$$\begin{aligned}u_1|_{x_2=0} &= f_{11}(x_1, \tau), \quad u_1|_{x_2=1} = f_{12}(x_1, \tau), \\ \sigma_{22}|_{x_2=0} &= f_{21}(x_1, \tau), \quad \sigma_{22}|_{x_2=1} = f_{22}(x_1, \tau), \\ \eta_q|_{x_2=0} &= f_{q+2,1}(x_1, \tau), \quad \eta_q|_{x_2=1} = f_{q+2,2}(x_1, \tau),\end{aligned}\tag{1.49}$$

или

$$\begin{aligned}u_1|_{x_2=0} &= f_{11}(x_1, \tau), \quad \sigma_{12}|_{x_2=1} = f_{12}(x_1, \tau), \\ \sigma_{22}|_{x_2=0} &= f_{21}(x_1, \tau), \quad u_2|_{x_2=1} = f_{22}(x_1, \tau), \\ \eta_q|_{x_2=0} &= f_{q+2,1}(x_1, \tau), \quad J_2^q|_{x_2=1} = f_{q+2,2}(x_1, \tau).\end{aligned}\tag{1.50}$$

Решение таких задач, основанное на идее разделения переменных с помощью интегральных преобразований и рядов Фурье [20, 34, 92, 97–100, 253], рассматривается в главе 3.

Трёхмерные задачи для ортотропного слоя ($(x_1, x_2) \in \mathfrak{R}^2$, $x_3 \in [0, 1]$). Здесь Группа А также состоит из трёх условий следующего вида:

$$\begin{aligned}\sigma_{i3}|_{x_3=0} &= f_{i1}(x_1, x_2, \tau), \quad \sigma_{i3}|_{x_3=1} = f_{i2}(x_1, x_2, \tau), \\ u_3|_{x_3=0} &= f_{31}(x_1, x_2, \tau), \quad u_3|_{x_3=1} = f_{32}(x_1, x_2, \tau), \\ J_3^q|_{x_3=0} &= f_{q+3,1}(x_1, x_2, \tau), \quad J_3^q|_{x_3=1} = f_{q+3,2}(x_1, x_2, \tau), \quad i = 1, 2,\end{aligned}\tag{1.51}$$

или

$$\begin{aligned}u_i|_{x_3=0} &= f_{i1}(x_1, x_2, \tau), \quad u_i|_{x_3=1} = f_{i2}(x_1, x_2, \tau), \\ \sigma_{33}|_{x_3=0} &= f_{31}(x_1, x_2, \tau), \quad \sigma_{33}|_{x_3=1} = f_{32}(x_1, x_2, \tau), \\ \eta_q|_{x_3=0} &= f_{q+3,1}(x_1, x_2, \tau), \quad \eta_q|_{x_3=1} = f_{q+3,2}(x_1, x_2, \tau), \quad i = 1, 2,\end{aligned}\tag{1.52}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned}
u_i|_{x_3=0} &= f_{i1}(x_1, x_2, \tau), \quad \sigma_{i3}|_{x_3=1} = f_{i2}(x_1, x_2, \tau), \\
\sigma_{33}|_{x_3=0} &= f_{31}(x_1, x_2, \tau), \quad u_3|_{x_3=1} = f_{32}(x_1, x_2, \tau), \\
\eta_q|_{x_3=0} &= f_{q+3,1}(x_1, x_2, \tau), \quad J_3^q|_{x_3=1} = f_{q+3,2}(x_1, x_2, \tau), \quad i = 1, 2.
\end{aligned} \tag{1.53}$$

При определенных условиях, накладываемых на функции f_{ij} , в правых частях граничных условий, многомерные задачи, с помощью асимптотической процедуры разделения переменных могут быть сведены к рекуррентной последовательности одномерных задач [7, 19, 35, 328, 342]. Этому вопросу посвящена глава 5. В этом случае, группа А может быть расширена за счет граничных условий следующего вида:

$$\begin{aligned}
m_{i1}(u_1, u_2, u_3)|_{x_3=0} &= f_{i1}(x_1, x_2, \tau), \\
m_{i2}(u_1, u_2, u_3)|_{x_3=1} &= f_{i2}(x_1, x_2, \tau), \\
u_3|_{x_3=0} &= f_{31}(x_1, x_2, \tau), \quad J_3^q|_{x_3=0} = f_{q+3,1}(x_1, x_2, \tau) \quad (i = 1, 2), \\
u_3|_{x_3=1} &= f_{32}(x_1, x_2, \tau), \quad J_3^q|_{x_3=1} = f_{q+3,2}(x_1, x_2, \tau),
\end{aligned} \tag{1.54}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned}
m_{i1}(u_1, u_2, u_3)|_{x_3=0} &= f_{i1}(x_1, x_2, \tau), \\
m_{i2}(u_1, u_2, u_3)|_{x_3=1} &= f_{i2}(x_1, x_2, \tau), \\
\sigma_{33}|_{x_3=0} &= f_{31}(x_1, x_2, \tau), \quad \eta_q|_{x_3=0} = f_{q+3,1}(x_1, x_2, \tau) \quad (i = 1, 2), \\
\sigma_{33}|_{x_3=1} &= f_{32}(x_1, x_2, \tau), \quad \eta_q|_{x_3=1} = f_{q+3,2}(x_1, x_2, \tau),
\end{aligned} \tag{1.55}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned}
m_{i1}(u_1, u_2, u_3)|_{x_3=0} &= f_{i1}(x_1, x_2, \tau), \\
m_{i2}(u_1, u_2, u_3)|_{x_3=1} &= f_{i2}(x_1, x_2, \tau), \\
u_3|_{x_3=0} &= f_{31}(x_1, x_2, \tau), \quad J_3^q|_{x_3=0} = f_{q+3,1}(x_1, x_2, \tau) \quad (i = 1, 2), \\
\sigma_{33}|_{x_3=1} &= f_{32}(x_1, x_2, \tau), \quad \eta_q|_{x_3=1} = f_{q+3,2}(x_1, x_2, \tau).
\end{aligned} \tag{1.56}$$

Здесь m_{i1} и m_{i2} – произвольные линейные дифференциальные операторы.

Замечание 1. В работе также рассматриваются задачи в декартовой системе координат для полуограниченных сред: полупрямая, полуплоскость и полупространство. В этом случае искомые функции предполагаются ограниченными в области решения соответствующей задачи:

$$\eta_q = O(1), \quad u_i = O(1) \quad J_q = O(1), \quad \sigma_{ij} = O(1) \quad (x_k \rightarrow \infty). \quad (1.57)$$

В задачах для пространства полагаем, что функции η_q , u_i , J_q и σ_{ij} являются ограниченными в \mathfrak{R}^3 .

Замечание 2. В задачах для однокомпонентных сред, здесь и далее индекс « q », обозначающий номер диффундирующей компоненты будет опускаться.

Глава 2

Одномерные нестационарные задачи упругой диффузии со специальными граничными условиями

2.1. Интегральное представление решений

В рамках данной в главе 1 постановки рассмотрим одномерные задачи упругой диффузии для слоя с граничными условиями, перечисленными в п. 1.5, а также соответствующие задачи для полупространства. Их решения удобно представить в интегральном виде, т.е. в виде сверток функций Грина рассматриваемой задачи с правыми частями граничных условий.

Введем поверхностные функции Грина G_{ikl} ($l = 1, 2$, $i, k = \overline{1, N+1}$) задачи (1.31) и (1.45), которые удовлетворяют уравнениям (1.31), нулевым начальным условиям и следующим граничным условиям ($q = \overline{1, N}$):

$$\begin{aligned} G_{1kl}|_{x=0} &= \delta_{1k}\delta_{1l}\delta(\tau), & (\Lambda_q G''_{1kl} - D_q G'_{q+1,kl})|_{x=0} &= \delta_{q+1,k}\delta_{1l}\delta(\tau), \\ G_{1kl}|_{x=1} &= \delta_{1k}\delta_{2l}\delta(\tau), & (\Lambda_q G''_{1kl} - D_q G'_{q+1,kl})|_{x=1} &= \delta_{q+1,k}\delta_{2l}\delta(\tau). \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\delta(\tau)$ – дельта-функция Дирака, δ_{ij} – символ Кронекера.

Тогда решение указанной задачи представимо в виде (здесь звездочка означает свертку по времени τ):

$$u = \sum_{k=1}^{N+1} \sum_{l=1}^2 G_{1kl} * f_{kl}, \quad \eta_q = \sum_{k=1}^{N+1} \sum_{l=1}^2 G_{q+1,kl} * f_{kl}. \quad (2.2)$$

Замечание 1. Отметим, что с использованием замены пространственной переменной $y = 1 - x$ можно получить следующую связь функций Грина:

$$G_{1k2}(x, \tau) = G_{1k1}(1 - x, \tau), \quad G_{q+1,k2}(x, \tau) = -G_{q+1,k1}(1 - x, \tau). \quad (2.3)$$

В самом деле, продифференцируем равенства (2.3) по x

$$\begin{aligned} G''_{1k2}(x, \tau) &= G''_{1k1}(1-x, \tau), \quad G'_{q+1,k2}(x, \tau) = G'_{q+1,k1}(1-x, \tau), \\ G'''_{1k2}(x, \tau) &= -G'''_{1k1}(1-x, \tau), \quad G''_{q+1,k2}(x, \tau) = -G''_{q+1,k1}(1-x, \tau). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Подставляя теперь (2.3) с учетом соотношений (2.4) в уравнения (1.31) при отсутствии массовых сил, получаем

$$\begin{aligned} \ddot{G}_{1k1}(1-x, \tau) &= G''_{1k1}(1-x, \tau) - \sum_{j=1}^N \alpha_j G'_{q+1,k1}(1-x, \tau), \\ -\dot{G}_{q+1,k1}(1-x, \tau) &= -D_q G''_{q+1,k1}(1-x, \tau) + \Lambda_q G'''_{1k1}(1-x, \tau) \quad (q = \overline{1, N}). \end{aligned}$$

Следовательно функции $G_{1k1}(1-x, \tau)$ и $-G_{q+1,k1}(1-x, \tau)$ удовлетворяют однородным уравнениям, соответствующим (1.31). Таким образом, если функции $G_{mk2}(x, \tau)$ удовлетворяют краевой задаче (1.31), (2.1), то функции $G_{1k1}(1-x, \tau)$ и $-G_{q+1,k1}(1-x, \tau)$ тоже удовлетворяют этой краевой задаче.

Учитывая установленное свойство симметрии (2.3) в дальнейшем, для удобства изложения последний индекс в записи функций Грина будем опускать, полагая

$$G_{ik} = G_{ik1}.$$

Тогда формулы (2.2) можно записать так:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k=1}^{N+1} [G_{1k}(x, \tau) * f_{k1}(\tau) + G_{1k}(1-x, \tau) * f_{k2}(\tau)], \\ \eta_q &= \sum_{k=1}^{N+1} [G_{q+1,k}(x, \tau) * f_{k1}(\tau) - G_{q+1,k}(1-x, \tau) * f_{k2}(\tau)]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Следовательно, вместо $(2N+2)^2$ функций Грина достаточно найти $(N+1)^2$ функцию, удовлетворяющую условиям:

$$\begin{aligned} G_{1k}|_{x=0} &= \delta_{1k} \delta(\tau), \quad (\Lambda_q G''_{1k} - D_q G'_{q+1,k})|_{x=0} = \delta_{q+1,k} \delta(\tau), \\ G_{1k}|_{x=1} &= 0, \quad (\Lambda_q G''_{1k} - D_q G'_{q+1,k})|_{x=1} = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что для краевой задачи (1.31), (1.46) решение представимо в виде

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k=1}^{N+1} [G_{1k}(x, \tau) * f_{k1}(\tau) - G_{1k}(1-x, \tau) * f_{k2}(\tau)], \\ \eta_q &= \sum_{k=1}^{N+1} [G_{q+1,k}(x, \tau) * f_{k1}(\tau) + G_{q+1,k}(1-x, \tau) * f_{k2}(\tau)], \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $G_{ik} = G_{ik1}$ - поверхностные функции Грина, удовлетворяющие уравнению (1.31) и граничным условиям:

$$\begin{aligned} \left(G'_{1k} - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,k} \right) \Big|_{x=0} &= \delta_{1k} \delta(\tau), \quad G_{q+1,k} \Big|_{x=0} = \delta_{q+1,k} \delta(\tau), \\ \left(G'_{1k} - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,k} \right) \Big|_{x=1} &= 0, \quad G_{q+1,k} \Big|_{x=1} = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Замечание 2. При рассмотрении задач для полупространства формулы (2.5) и (2.7) будут иметь вид

$$u = \sum_{k=1}^{N+1} G_{1k} * f_k, \quad \eta_q = \sum_{k=1}^{N+1} G_{q+1,k} * f_k, \quad f_k = f_{k1}. \quad (2.9)$$

Здесь G_{ik} - поверхностные функции Грина задачи (1.31), (1.45) для полупространства. При этом в равенствах (2.6) и (2.8) вместо условия на границе $x = 1$ задается условие ограниченности искомых функций в рассматриваемой области.

Наконец, для задачи (1.31), (1.47) решение ищется в виде (2.2), где функции G_{ikl} ($l = 1, 2, i, k = \overline{1, N+1}$) удовлетворяют уравнениям (1.31), нулевым начальным условиям и следующим граничным условиям ($q = \overline{1, N}$):

$$\begin{aligned} G_{1kl} \Big|_{x=0} &= \delta_{1k} \delta_{1l} \delta(\tau), \quad (\Lambda_q G''_{1kl} - D_q G'_{q+1,kl}) \Big|_{x=0} = \delta_{q+1,k} \delta_{1l} \delta(\tau), \\ \left(G'_{1kl} - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,kl} \right) \Big|_{x=1} &= \delta_{1k} \delta_{2l} \delta(\tau), \quad G_{q+1,kl} \Big|_{x=1} = \delta_{q+1,k} \delta_{2l} \delta(\tau). \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.2. Задача Штурма-Лиувилля для одномерного упругодиффузионного оператора

Одним из эффективных приемов решения нестационарных задач механики является использование интегральных преобразований и разложений в ряды Фурье. Это позволяет свести одномерную начально-краевую задачу к системе линейных алгебраических уравнений. Одним из достоинств такого подхода как будет показано далее, является то, что в пространстве преобразования Лапласа решение является рациональной функцией, что позволяет легко найти оригиналы с помощью вычетов.

Реализация этого подхода приводит к необходимости решать задачу Штурма – Лиувилля. При этом, для одномерных моделей механодиффузии в прямоугольной декартовой системе координат после применения к (1.31) преобразования Лапласа возникает необходимость решения системы уравнений следующего вида (штрих означает производную по переменной x , λ – произвольный параметр):

$$\begin{aligned} u'' - \alpha\eta' + \lambda u &= 0, \\ D\eta'' - \Lambda u''' + \lambda\eta &= 0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Замечание 1. В уравнениях (1.31) для упрощения выкладок положено, что рассматриваемая среда является однокомпонентной. Индекс « q » обозначающий номер диффундирующей компоненты в соответствии с замечанием 2 п. 1.5 опущен.

Решение системы уравнений (2.11) будем искать в виде:

$$u = Ue^{\nu x}, \quad \eta = He^{\nu x}.$$

В результате приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно U и H :

$$\begin{aligned}(\nu^2 + \lambda) U - \alpha\nu H &= 0, \\ -\Lambda\nu^3 U + (D\nu^2 + \lambda) H &= 0.\end{aligned}$$

Она имеет нетривиальное решение в том случае, когда параметр ν удовлетворяет характеристическому уравнению:

$$\begin{vmatrix} \nu^2 + \lambda & -\alpha\nu \\ -\Lambda\nu^3 & D\nu^2 + \lambda \end{vmatrix} = (D - \alpha\Lambda)\nu^4 + (1 + D)\nu^2\lambda + \lambda^2 = 0.$$

Его решение имеет вид:

$$\nu_{1,2}^2 = -\lambda A_{1,2}^2, \quad A_{1,2}^2 = \frac{1 + D \mp \sqrt{(1 - D)^2 + 4\alpha\Lambda}}{2(D - \alpha\Lambda)}. \quad (2.12)$$

Поскольку, в реальных материалах [142, 191, 194, 214, 216, 221, 231, 236, 239, 240, 306, 314, 325, 331, 339, 345]

$$\alpha\Lambda, D \ll 1,$$

то

$$\begin{aligned} A_1^2 &= \frac{1 + D - \sqrt{(1 - D)^2 + 4\alpha\Lambda}}{2(D - \alpha\Lambda)} = \\ &= \frac{2}{(D - \alpha\Lambda) \left(1 + D + \sqrt{(1 - D)^2 + 4\alpha\Lambda}\right)} > 0, \\ A_2^2 &= \frac{1 + D + \sqrt{(1 - D)^2 + 4\alpha\Lambda}}{2(D - \alpha\Lambda)} \begin{cases} > 0, & D > \alpha\Lambda, \\ < 0, & D < \alpha\Lambda. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, если выполнено условие

$$\alpha\Lambda < D \ll 1, \quad (2.13)$$

то имеет место неравенство $A_{1,2}^2 > 0$.

Здесь возможны три ситуации: $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ и $\lambda > 0$. В первом случае все корни характеристического уравнения действительные и решение системы (2.11) представляет собой линейную комбинацию экспонент, которая на концах отрезка $[0, 1]$ обращается в нуль только при условии, что все коэффициенты $U_i = 0$ и следовательно система (2.11) имеет тривиальное решение. При $\lambda = 0$ получаем, что $u = const$. Удовлетворяя нулевым граничным условиям, опять же находим, что $u = 0$.

При $\lambda > 0$, все корни характеристического уравнения являются мнимыми. Заменяя далее для удобства λ на λ^2 , записываем их в виде:

$$\nu_{1,2,3,4} = \pm i\lambda A_{1,2}.$$

Соответствующее решение системы уравнений (2.11) запишется так:

$$u = U_1 \cos A_1 \lambda x + U_2 \sin A_1 \lambda x + U_3 \cos A_2 \lambda x + U_4 \sin A_2 \lambda x. \quad (2.14)$$

Подставляя эту функцию в первое уравнение системы (2.11) находим η :

$$\begin{aligned} \eta = \frac{1}{\alpha} \int (u'' + \lambda^2 u) dx = U_1 \lambda B_1 \sin A_1 \lambda x - U_2 \lambda B_1 \cos A_1 \lambda x + \\ + U_3 \lambda B_2 \sin A_2 \lambda x - U_4 \lambda B_2 \cos A_2 \lambda x, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где

$$B_1 = \frac{(1 - A_1^2)}{\alpha A_1}, \quad B_2 = \frac{(1 - A_2^2)}{\alpha A_2}. \quad (2.16)$$

Удовлетворяя заданным граничным условиям, получаем систему для определения неизвестных величин U_i , $i = \overline{1, 4}$.

Замечание 2. В случае, если условие (2.13) не выполняется, то общее решение системы (2.11) будет иметь вид

$$\begin{aligned} u = U_1 \cos A_1 \lambda x + U_2 \sin A_1 \lambda x + U_3 e^{A_2 \lambda x} + U_4 e^{-A_2 \lambda x}, \\ \eta = \frac{1}{\alpha} \int (u'' + \lambda^2 u) dx = U_1 \lambda B_1 \sin A_1 \lambda x - U_2 \lambda B_1 \cos A_1 \lambda x + \\ + U_3 \lambda B_2 e^{A_2 \lambda x} - U_4 \lambda B_2 e^{-A_2 \lambda x}, \end{aligned}$$

$$B_1 = \frac{(1 - A_1^2)}{\alpha A_1}, \quad B_2 = \frac{(1 + A_2^2)}{\alpha A_2}.$$

Это решение по причине наличия в нём экспонент с действительными показателями тоже не удовлетворяет никаким нулевым граничным условиям соответствующим (1.43)–(1.46). Таким образом, можно утверждать, что неравенство (2.13) является необходимым условием существования решения задачи Штурма-Лиувилля для упругодиффузионного оператора.

Замечание 3. Формально выражение для концентрации (2.15) должно содержать в качестве дополнительного слагаемого произвольную постоянную интегрирования. Однако при подстановке (2.14) и (2.15) в граничные условия (1.45) указанное слагаемое обращается в нуль в результате чего опять получаем систему из 4-х уравнений для определения 4-х величин U_i . Кроме того, упомянутая постоянная интегрирования определяет только некоторый постоянный уровень концентрации вещества и не влияет на интенсивность массопереноса, а, следовательно, и на напряженно-деформированное состояние среды. Поэтому, без ограничения общности, её в дальнейшем можно считать равной нулю.

Рассмотрим для начала первые граничные условия группы А, а именно, условия (1.45). Подставляя в их однородный вариант выражения (2.14) и (2.15), получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных величин U_i :

$$U_1 + U_3 = 0,$$

$$C_1 U_1 + C_2 U_3 = 0,$$

$$U_1 \cos A_1 \lambda + U_2 \sin A_1 \lambda + U_3 \cos A_2 \lambda + U_4 \sin A_2 \lambda = 0,$$

$$C_1 U_1 \cos A_1 \lambda + C_1 U_2 \sin A_1 \lambda + C_2 U_3 \cos A_2 \lambda + C_2 U_4 \sin A_2 \lambda = 0,$$

где

$$C_1 = \Lambda A_1^2 + D A_1 B_1, \quad C_2 = \Lambda A_2^2 + D A_2 B_2.$$

При построении последних двух уравнений учтено, что $\lambda \neq 0$. Далее, из первого и второго уравнений получаем $U_1 = U_3 = 0$. Оставшаяся система уравнений относительно величин U_2, U_4 имеет вид:

$$\begin{aligned} U_2 \sin A_1 \lambda + U_4 \sin A_2 \lambda &= 0, \\ C_1 U_2 \sin A_1 \lambda + C_2 U_4 \sin A_2 \lambda &= 0. \end{aligned}$$

Условие существования нетривиального решения заключается в равенстве нулю определителя данной системы

$$\begin{vmatrix} \sin A_1 \lambda & \sin A_2 \lambda \\ C_1 \sin A_1 \lambda & C_2 \sin A_2 \lambda \end{vmatrix} = (C_2 - C_1) \sin A_1 \lambda \sin A_2 \lambda = 0.$$

Отсюда получаем два набора собственных значений:

$$\lambda_n^{(1)} = \frac{\pi n}{A_2} \Rightarrow U_2 = 0,$$

$$\lambda_n^{(2)} = \frac{\pi n}{A_1} \Rightarrow U_4 = 0.$$

И в том и в другом случае из формул (2.14) и (2.15) получаем два набора собственных функций $u_n(x)$ и $\eta_n(x)$:

$$u_n(x) = \sin \pi n x, \quad \eta_n(x) = \cos \pi n x. \quad (2.17)$$

Рассуждая аналогичным образом, для граничных условий (1.46) получаем следующий набор собственных функций:

$$u_n(x) = \cos \pi n x, \quad \eta_n(x) = \sin \pi n x. \quad (2.18)$$

Для граничных условий (1.47) имеем следующую систему для определения произвольных постоянных U_i :

$$\begin{aligned}
U_1 + U_3 &= 0, \\
C_1 U_1 + C_2 U_3 &= 0, \\
-\frac{U_1}{A_1} \sin A_1 \lambda + \frac{U_2}{A_1} \cos A_1 \lambda - \frac{U_3}{A_2} \sin A_2 \lambda + \frac{U_4}{A_2} \cos A_2 \lambda &= 0, \\
B_1 U_1 \sin A_1 \lambda - B_1 U_2 \cos A_1 \lambda + B_2 U_3 \sin A_2 \lambda - B_2 U_4 \cos A_2 \lambda &= 0,
\end{aligned}$$

По-прежнему, из первого и второго уравнений получаем $U_1 = U_3 = 0$. Система уравнений относительно функций U_2, U_4 принимает вид:

$$\begin{aligned}
\frac{U_2}{A_1} \cos A_1 \lambda + \frac{U_4}{A_2} \cos A_2 \lambda &= 0, \\
-B_1 U_2 \cos A_1 \lambda - B_2 U_4 \cos A_2 \lambda &= 0,
\end{aligned}$$

Приравнивая её определитель нулю, получаем

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{A_1} \cos A_1 \lambda & \frac{1}{A_2} \cos A_2 \lambda \\ -B_1 \cos A_1 \lambda & -B_2 \cos A_2 \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{B_1}{A_2} - \frac{B_2}{A_1} \right) \cos A_1 \lambda \cos A_2 \lambda = 0.$$

Отсюда также находим два набора собственных значений:

$$\lambda_n^{(1)} = \frac{\pi(2n-1)}{2A_2} \Rightarrow U_2 = 0,$$

$$\lambda_n^{(2)} = \frac{\pi(2n-1)}{2A_1} \Rightarrow U_4 = 0.$$

Им соответствуют два набора собственных функций $u_n(x)$ и $\eta_n(x)$:

$$u_n(x) = \sin \frac{\pi(2n-1)x}{2}, \quad \eta_n(x) = \cos \frac{\pi(2n-1)x}{2}. \quad (2.19)$$

Для граничных условий (1.43), (1.44) и условий группы В решение задачи о собственных значениях приводит к трансцендентным уравнениям. Так, например, для первой краевой задачи (1.43) имеем:

$$\begin{aligned}
U_1 + U_3 &= 0, \\
B_1 U_2 + B_2 U_4 &= 0, \\
U_1 \cos A_1 \lambda + U_2 \sin A_1 \lambda + U_3 \cos A_2 \lambda + U_4 \sin A_2 \lambda &= 0, \\
B_1 U_1 \sin A_1 \lambda - B_1 U_2 \cos A_1 \lambda + B_2 U_3 \sin A_2 \lambda - B_2 U_4 \cos A_2 \lambda &= 0.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Выражая U_1 через U_3 и U_2 через U_4 , получаем:

$$\begin{aligned}
U_1 &= -U_3, \quad U_2 = -\frac{B_2}{B_1} U_4, \\
-U_3 \cos A_1 \lambda - \frac{B_2}{B_1} U_4 \sin A_1 \lambda + U_3 \cos A_2 \lambda + U_4 \sin A_2 \lambda &= 0, \\
-B_1 U_3 \sin A_1 \lambda + B_1 U_4 \cos A_1 \lambda + B_2 U_3 \sin A_2 \lambda - B_2 U_4 \cos A_2 \lambda &= 0.
\end{aligned}$$

Используя выражения для U_1 и U_2 , приходим к системе из двух уравнений:

$$\begin{aligned}
B_1 U_3 (\cos A_2 \lambda - \cos A_1 \lambda) + U_4 (B_1 \sin A_2 \lambda - B_2 \sin A_1 \lambda) &= 0, \\
U_3 (B_2 \sin A_2 \lambda - B_1 \sin A_1 \lambda) + B_2 U_4 (\cos A_2 \lambda - \cos A_1 \lambda) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Для того, чтобы система (2.21) имела нетривиальное решение необходимо потребовать, чтобы её определитель равнялся нулю:

$$\begin{vmatrix} B_1 (\cos A_2 \lambda - \cos A_1 \lambda) & B_1 \sin A_2 \lambda - B_2 \sin A_1 \lambda \\ B_2 \sin A_2 \lambda - B_1 \sin A_1 \lambda & B_2 (\cos A_2 \lambda - \cos A_1 \lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрытие этого определителя приводит к уравнению:

$$(\cos A_2 \lambda - \cos A_1 \lambda)^2 - \left(\sin A_2 \lambda - \frac{B_2}{B_1} \sin A_1 \lambda \right) \left(\sin A_2 \lambda - \frac{B_1}{B_2} \sin A_1 \lambda \right) = 0.$$

Его можно привести к более компактному виду:

$$\cos 2A_2 \lambda + \cos 2A_1 \lambda - 2 \cos A_2 \lambda \cos A_1 \lambda + \frac{B_1^2 + B_2^2}{B_1 B_2} \sin A_2 \lambda \sin A_1 \lambda = 0. \tag{2.22}$$

однако, найти точное аналитическое решение не представляется возможным.

С другой стороны, с учетом соотношения (2.13), а также принятых обозначений (2.12) и (2.16), уравнение (2.22) эквивалентно следующему уравнению

$$\cos 2\lambda + \cos 2\frac{\lambda}{D} - 2 \cos \frac{\lambda}{D} \cos \lambda + \frac{1}{\alpha\Lambda\sqrt{D}} \sin \frac{\lambda}{D} \sin \lambda = 0.$$

при этом, в силу того же соотношения (2.13)

$$\frac{1}{D}, \frac{1}{\alpha\Lambda\sqrt{D}} \gg 1.$$

Таким образом, уравнение (2.22) содержит сильно осциллирующие функции, что существенно осложняет и численное нахождение его корней.

Аналогичная ситуация имеет место и для краевых условий (1.44) и всех условий группы В, которые здесь подробно не анализируются. Поэтому, в силу указанного обстоятельства, основным объектом исследования в данной работе будут краевые задачи с граничными условиями (1.45) – (1.47) и их многомерные аналоги. Алгоритм решения краевых задач, не входящих в группу А, будет рассматриваться отдельно. Этому вопросу посвящена глава 4.

Замечание 4. Очевидно, что собственные функции (2.17) удовлетворяют не только краевой задаче с граничными условиями (1.45). Непосредственной проверкой можно убедиться, что вместо равенств (1.45) можно использовать соотношения, содержащие линейные комбинации величин

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}, \quad \frac{\partial^{2k+1} \eta}{\partial x^{2k+1}} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Аналогично, вместо граничных условий (1.46) можно использовать равенства, содержащие линейные комбинации величин

$$\frac{\partial^{2k} \eta}{\partial x^{2k}}, \quad \frac{\partial^{2k+1} u}{\partial x^{2k+1}} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

С учетом того, что граничные условия (1.47) представляют собой смесь условий (1.45) и (1.46), то данное замечание относится и к ним тоже.

Таким образом, множество всевозможных граничных условий можно разбить на некоторые «классы» эквивалентных в смысле замечания 4 граничных условий. Условия (1.45), (1.46) и (1.47) можно считать «представителями» этих классов. Их выбор обусловлен наличием в них вполне определенного механического смысла – кинематики или динамики нагружения (массопереноса).

2.3. Механодиффузия слоя под действием кинематических поверхностных механических возмущений

Дальнейшее решение одномерных задач упругой диффузии для слоя осуществляется с помощью преобразования Лапласа и разложения в ряды Фурье по собственным функциям, найденным в п. 2.2.

Рассмотрим задачу (1.31), (1.45) для N -компонентного слоя с нулевыми начальными условиями при $f_{k2} \equiv 0$, $k = \overline{1, N+1}$, и применим к ней преобразование Лапласа по времени [53, 60] (s – параметр преобразования, индекс « L » обозначает трансформанту):

$$u''^L = s^2 u^L + \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j'^L, \quad D_q \eta_q''^L = s \eta_q^L + \Lambda_q u'''^L, \quad q = \overline{1, N}; \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} u^L|_{x=0} = f_{11}^L, \quad (\Lambda_q u''^L - D_q \eta_q'^L)|_{x=0} = f_{q+1,1}^L, \\ u^L|_{x=1} = 0, \quad (\Lambda_q u''^L - D_q \eta_q'^L)|_{x=1} = 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Редуцируем полученную краевую задачу к однородным краевым условиям. С этой целью полагаем

$$u^L(x, s) = \varphi(x, s) + U(x, s), \quad \eta_q^L(x, s) = \psi_q(x, s) + H_q(x, s). \quad (2.25)$$

Здесь функции φ и ψ_q выбираются так, чтобы они удовлетворяли граничным условиям (2.24):

$$\begin{aligned} \varphi(x, s) = \varphi^*(x) f_{11}^L(s), \quad \psi_q(x, s) = \psi_q^*(x) f_{q+1,1}^L(s), \\ \varphi^*(x) = 1 - x, \quad \psi_q^*(x) = \frac{1}{D_q} \left(\frac{x^2}{2} - x \right). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Тогда для функций U и H_q получаем следующую задачу:

$$s^2 U - U'' + \sum_{j=1}^N \alpha_j H_j' = \Phi_1, \quad s H_q - D_q H_q'' + \Lambda_q U''' = \Phi_{q+1}; \quad (2.27)$$

$$\Phi_1(x, s) = \varphi^*(x) \left[-s^2 f_{11}^L(s) + \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j}{D_j} f_{j+1,1}^L(s) \right], \quad (2.28)$$

$$\Phi_{q+1}(x, s) = [1 - s\psi_q^*(x)] f_{q+1,1}^L(s).$$

Ее решение представляем в виде рядов по собственным функциям:

$$U(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} U^s(\lambda_n, s) \sin \lambda_n x, \quad (2.29)$$

$$H_q(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} H_q^c(\lambda_n, s) \cos \lambda_n x, \quad \lambda_n = \pi n.$$

Аналогичным образом записываем функции φ^* , ψ_q^* , искомые функции u^L , η_q^L и правые части уравнений в (2.28):

$$\varphi^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^s(\lambda_n) \sin \lambda_n x, \quad \psi_q^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_q^c(\lambda_n) \cos \lambda_n x,$$

$$u^L(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} u^{Ls}(\lambda_n, s) \sin \lambda_n x, \quad \eta_q^L(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_q^{Lc}(\lambda_n, s) \cos \lambda_n x, \quad (2.30)$$

$$\Phi_1(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_1^s(\lambda_n, s) \sin \lambda_n x, \quad \Phi_{q+1}(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{q+1}^c(\lambda_n, s) \cos \lambda_n x,$$

где

$$\psi_q^c(0) = \int_0^1 \psi^*(x) dx = \frac{1}{6D_q}, \quad \psi_q^c(\lambda_n) = 2 \int_0^1 \psi_q^*(x) \cos \lambda_n x dx = \frac{2}{D_q \lambda_n^2},$$

$$\varphi^s(\lambda_n) = 2 \int_0^1 \varphi^*(x) \sin \lambda_n x dx = \frac{2}{\lambda_n}, \quad \Phi_{q+1}^c(0, s) = [1 - s\psi_q^c(0)] f_{q+1,1}^L(s), \quad (2.31)$$

$$\Phi_1^s(\lambda_n, s) = \varphi^s(\lambda_n) \left[-s^2 f_{11}^L(s) + \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j}{D_j} f_{j+1,1}^L(s) \right],$$

$$\Phi_{q+1}^c(\lambda_n, s) = -s\psi_q^c(\lambda_n) f_{q+1,1}^L(s), \quad (n \geq 1).$$

Подставляя ряды (2.29) и (2.30) в уравнения (2.27), получаем системы линейных алгебраических уравнений для коэффициентов U^s и H_q^c .

При $n = 0$ имеем одно уравнение:

$$sH_q^c(0, s) = \Phi_{q+1}^c(0, s),$$

из которого сразу находим

$$H_q^c = \frac{\Phi_{q+1}^c(0, s)}{s} = \frac{[1 - s\psi_q^c(0)] f_{q+1,1}^L(s)}{s}.$$

Поэтому, нулевая гармоника η_q^{Lc} соответствующего ряда Фурье для функции η_q^L в (2.30) будет определяться так:

$$\eta_q^{Lc}(0, s) = \frac{f_{q+1,1}^L(s)}{s}. \quad (2.32)$$

При $n \geq 1$ приходим к системе из $N + 1$ - го уравнения и стольких же неизвестных величин U^s и H_q^c :

$$\begin{aligned} (\lambda_n^2 + s^2) U^s - \sum_{j=1}^N \alpha_j \lambda_n H_j^c &= \Phi_1^s, \\ -\Lambda_q \lambda_n^3 U^s + (s + D_q \lambda_n^2) H_q^c &= \Phi_{q+1}^c. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Так как коэффициенты этой системы являются рациональными функциями параметра преобразования Лапласа s , то и её решения также будут такими же функциями. Причем, как показано в работах [53, 60], в решения будут входить неправильные дроби, требующие выделения целой части. В данном случае, ввиду произвольного размера системы (2.33) подход, изложенный в [53, 60] является неприемлемым. Поступим следующим образом. С помощью равенств (2.25) переходим в системе (2.33) к искомым функциям u^{Ls} и η_q^{Lc} , получаем:

$$\begin{aligned} (\lambda_n^2 + s^2) u^{Lc} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \lambda_n \eta_j^{Lc} &= \Phi_1^{s*}, \\ -\Lambda_q \lambda_n^3 u^{Ls} + (s + D_q \lambda_n^2) \eta_q^{Lc} &= \Phi_{q+1}^{c*}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1^{s*}(\lambda_n, s) &= \lambda_n^2 f_{11}^L(s) \varphi^s(\lambda_n), \\ \Phi_{q+1}^{c*}(\lambda_n, s) &= -D_q \lambda_n^2 [\Lambda_q \lambda_n^2 f_{11}^L(s) - f_{q+1,1}^L(s)] \psi_q^c(\lambda_n). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Решение системы (2.34), а также трансформанты функций Грина G_{ik}^L исходной задачи с учетом (2.2) и (2.30) записываются так:

$$u^L = \sum_{k=1}^{N+1} G_{1k}^L f_{k1}^L, \quad \eta_q^L = \sum_{k=1}^{N+1} G_{q+1,k}^L f_{k1}^L,$$

$$G_{1k}^L(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{1k}^{Ls}(\lambda_n, s) \sin \lambda_n x, \quad G_{1k}^{Ls}(\lambda_n, s) = \frac{P_{1k}(\lambda_n, s)}{P(\lambda_n, s)},$$

$$G_{q+1,k}^L(x, s) = \delta_{q+1,k} \left(\frac{1}{s} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_n x}{s + D_q \lambda_n^2} \right) - 2\Lambda_q \delta_{1k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 \cos \lambda_n x}{s + D_q \lambda_n^2} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} G_{q+1,k}^{Lc}(\lambda_n, s) \cos \lambda_n x,$$

$$G_{q+1,k}^{Lc}(\lambda_n, s) = \frac{P_{q+1,k}(\lambda_n, s)}{Q_q(\lambda_n, s)} \quad (k = \overline{1, N+1}).$$

Здесь функции $P_{ik}(\lambda_n, s)$, $Q_q(\lambda_n, s)$ и $P(\lambda_n, s)$ имеют вид:

$$P(\lambda_n, s) = (s^2 + \lambda_n^2) \Pi - \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \lambda_n^4 \Pi_j,$$

$$Q_q(\lambda_n, s) = P(\lambda_n, s) (s + D_q \lambda_n^2);$$

$$P_{11}(\lambda_n, s) = 2\lambda_n \left(\Pi - \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \lambda_n^2 \Pi_j \right), \quad P_{1,q+1}(\lambda_n, s) = 2\lambda_n \alpha_q \Pi_q,$$

$$P_{q+1,k}(\lambda_n, s) = \Lambda_q \lambda_n^3 P_{1k}(\lambda_n, s) \quad (k = \overline{1, N+1}).$$

Величины $\Pi = \Pi(\lambda_n, s)$ и $\Pi_i = \Pi_i(\lambda_n, s)$ определяются следующим образом:

$$\Pi(x, y) = \prod_{j=1}^N (D_j x^2 + y), \quad \Pi_i(x, y) = \prod_{j=1, j \neq i}^N (D_j x^2 + y). \quad (2.39)$$

Замечание. В формулах (2.38), (2.39) следует при $N = 1$ положить $\Pi_1 = 1$.

Многочлен $P(\lambda_n, s)$ имеет степень $N + 2$ по переменной s . Ввиду произвольности значения N выполнить точное исследование его нулей (в том числе

на кратность) весьма затруднительно. Однако известно, что для упругой задачи он имеет два чисто мнимых корня. В этом легко убедиться положив в $P(\lambda_n, s)$ все диффузионные постоянные равными нулю. Далее, используя метод малого параметра, докажем следующее утверждение.

Утверждение. Пусть выполнено условие (2.13). Тогда, многочлен $P(\lambda_n, s)$ имеет два комплексно сопряженных нуля с отрицательными действительными частями и N простых отрицательных действительных нулей.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся асимптотическим представлением корней многочленов. Условие (2.13) применительно к многокомпонентным средам запишется так

$$\alpha_q \Lambda_q < D_q \ll 1.$$

Введем малый параметр

$$\varepsilon = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j.$$

Тогда можно записать

$$\alpha_q \Lambda_q = \mu_q \varepsilon, \quad \mu_q = O(1).$$

Нули $s = s(\lambda_n)$ многочлена $P(\lambda_n, s)$ будем искать в виде рядов по степеням малого параметра ε :

$$s = \sum_{p=0}^{\infty} s_p \varepsilon^p.$$

Подставляя этот ряд в уравнение $P(\lambda_n, s) = 0$, и группируя коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем в нулевом приближении

$$\varepsilon^0 : (s_0^2 + \lambda_n^2) \Pi(s_0, \lambda_n) = 0.$$

Из этого равенства получаем

$$s_0 = \{i\lambda_n, -i\lambda_n, -D_j \lambda_n^2\}.$$

Таким образом, нулевое приближение позволяет установить, что все нули многочлена $P(\lambda_n, s)$ являются простыми. Переходя к первому приближению

$$\varepsilon^1 : \quad 2s_0s_1\Pi(s_0, \lambda_n) + (s_0^2 + \lambda_n^2) s_1 \sum_{j=1}^N \Pi_j(s_0, \lambda_n) - \\ - \sum_{j=1}^N \mu_j \lambda_n^4 \Pi_j(s_0, \lambda_n) = 0.$$

находим

$$s_1 = \frac{\sum_{j=1}^N \mu_j \lambda_n^4 \Pi_j(s_0, \lambda_n)}{2s_0\Pi(s_0, \lambda_n) + (s_0^2 + \lambda_n^2) \sum_{j=1}^N \Pi_j(s_0, \lambda_n)}.$$

Подставляя сюда мнимые корни нулевого приближения, получаем пару комплексно сопряженных величин

$$s_1 = \mp i \frac{\sum_{j=1}^N \mu_j \lambda_n^3 \Pi_j(\lambda_n, \pm i \lambda_n)}{2\Pi(\lambda_n, \pm i \lambda_n)}.$$

Для действительных корней нулевого приближения получаем действительные значения первого приближения

$$s_1 = \frac{\mu_j \lambda_n^2}{(D_j)^2 \lambda_n^2 + 1}.$$

В силу того, что многочлен $P(\lambda_n, s)$ является рациональной функцией с действительными коэффициентами при степенях s , то каждое последующее приближение s_p так же будет являться рациональной функцией с действительными коэффициентами от предыдущего приближения s_{p-1} . Поэтому, все последующие приближения будут наследовать свойства комплексности (действительности) нулевого приближения.

Таким образом, при условии (2.13) многочлен $P(\lambda_n, s)$ имеет $N + 2$ простых нуля $s_k = s_k(\lambda_n)$, $k = \overline{1, N + 2}$ из которых, два комплексно сопряженных, а остальные действительные. ■

Многочлены $Q_q(\lambda_n, s)$ имеет дополнительный корень $-D_q\lambda_n^2$. Введем обозначения: $\gamma(\lambda_n) = \operatorname{Re}[s_1(\lambda_n)]$, $\beta(\lambda_n) = \operatorname{Im}[s_1(\lambda_n)]$, $s_2 = \bar{s}_1$, $s_{q+2}(\lambda_n) \in \mathfrak{R}$, $\gamma, s_{q+2} < 0$. Тогда оригиналы гармоник функций Грина будут иметь вид [84]:

$$G_{1k}^s(\lambda_n, \tau) = \sum_{j=1}^N B_{1k}^{(j)} e^{s_{j+2}\tau} + e^{\gamma\tau} \left(A_{1k}^{(1)} \cos \beta\tau - A_{1k}^{(2)} \sin \beta\tau \right), \quad (2.40)$$

где

$$A_{1k}^{(1)} = 2 \operatorname{Re} \frac{P_{1k}(\lambda_n, s_1)}{P'(\lambda_n, s_1)}, \quad A_{1k}^{(2)} = 2 \operatorname{Im} \frac{P_{1k}(\lambda_n, s_1)}{P'(\lambda_n, s_1)}, \quad B_{1k}^{(j)} = \frac{P_{1k}(\lambda_n, s_{j+2})}{P'(\lambda_n, s_{j+2})}. \quad (2.41)$$

Оригиналы функций $G_{q+1,k}(x, \tau)$ запишутся так [84]:

$$\begin{aligned} G_{q+1,1}(x, \tau) &= \frac{\Lambda_q}{D_q} \frac{\partial}{\partial \tau} \vartheta_3 \left(\frac{x}{2}, e^{-D_q \pi^2 \tau} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} G_{q+1,1}^c(\lambda_n, \tau) \cos \lambda_n x, \\ G_{q+1,p+1}(x, \tau) &= \delta_{qp} \vartheta_3 \left(\frac{x}{2}, e^{-D_q \pi^2 \tau} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} G_{q+1,q+1}^c(\lambda_n, \tau) \cos \lambda_n x, \\ \vartheta_3(x, q) &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos 2\pi n x; \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} G_{q+1,k}^c(\lambda_n, \tau) &= e^{\gamma\tau} \left(A_{q+1,k}^{(1)} \cos \beta\tau - A_{q+1,k}^{(2)} \sin \beta\tau \right) + \\ &+ \sum_{j=1}^N B_{q+1,k}^{(j)} e^{s_{j+2}\tau} + B_{q+1,k}^{(N+1)} e^{-D_q \lambda_n^2 \tau} \quad (k = \overline{1, N + 1}), \end{aligned} \quad (2.43)$$

где $\vartheta_3(x, q)$ - тета-функция Якоби [89], а коэффициенты $A_{q+1,k}^{(r)}$ и $B_{q+1,k}^{(j)}$ находятся по формулам:

$$\begin{aligned} A_{q+1,k}^{(1)} &= 2 \operatorname{Re} \frac{P_{q+1,k}(\lambda_n, s_1)}{Q'_q(\lambda_n, s_1)}, \quad A_{q+1,k}^{(2)} = 2 \operatorname{Im} \frac{P_{q+1,k}(\lambda_n, s_1)}{Q'_q(\lambda_n, s_1)}, \\ B_{q+1,k}^{(j)} &= \frac{P_{q+1,k}(\lambda_n, s_{j+2})}{Q'_q(\lambda_n, s_{j+2})}, \quad B_{q+1,k}^{(N+1)} = \frac{P_{q+1,k}(\lambda_n, -D_q \lambda_n^2)}{Q'_q(\lambda_n, -D_q \lambda_n^2)}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Замечание. Функции $G_{q+1,1}(x, \tau)$ и $G_{q+1,q+1}(x, \tau)$ имеют особенности при $\tau \rightarrow 0$, что может осложнить вычисление свертков в (2.5) особенно при численном интегрировании. В самом деле, рассмотрим функцию $G_{q+1,q+1}(x, \tau)$. Она содержит внутри себя тета-функцию Якоби $\vartheta_3(x, q)$. При $x = 0$

$$\vartheta_3\left(0, e^{-D_q \pi^2 \tau}\right) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-D_q \pi^2 n^2 \tau}. \quad (2.45)$$

Это ряд сходится $\forall \tau > 0$. В самом деле, ему можно поставить в соответствие интеграл

$$\int_1^{\infty} e^{-D_q \pi^2 \xi^2 \tau} d\xi,$$

который в силу интегрального признака Коши ведет себя в смысле сходимости также как и ряд в (2.45). Тогда, имеет место следующая оценка [182]

$$\begin{aligned} \vartheta_3\left(0, e^{-D_q \pi^2 \tau}\right) &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-D_q \pi^2 n^2 \tau} = \int_0^{\infty} e^{-D_q \pi^2 \xi^2 \tau} d\xi + O(1) = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{D_q \pi \tau}} + O(1). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Следовательно, функция $G_{q+1,q+1}(x, \tau)$ при $x = 0$ и $\tau \rightarrow 0$ имеет интегрируемую степенную особенность τ^α , $\alpha = -1/2$.

Особенность у функции $G_{q+1,1}(x, \tau)$ обусловлена наличием производной от тета-функции по времени. С учетом представлений (2.45) и (2.46) имеем

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\vartheta_3\left(0, e^{-D_q \pi^2 \tau}\right) \right] \sim \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{D_q \pi \tau}} \right) = -\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{D_q \pi \tau^{3/2}}}. \quad (2.47)$$

Следовательно, функция $G_{q+1,1}(x, \tau)$ при $x = 0$ и $\tau \rightarrow 0$ имеет неинтегрируемую степенную особенность τ^α , $\alpha = -3/2$.

2.4. Механодиффузия полупространства под действием кинематических поверхностных механических возмущений

При решении задач для полуограниченных сред с помощью разложения по собственным функциям вместо рядов Фурье используются синус-, косинус преобразования. Таким образом, общая схема их решения схожа с методом решения задач для ограниченных сред.

Будем рассматривать нестационарную задачу упругой диффузии для N -компонентного полупространства. Физико-механические процессы описываются уравнениями (1.31). Граничные возмущения заданы равенствами (1.45) с учетом условий ограниченности (1.57). Начальные условия нулевые.

Решение задачи в интегральной форме имеет вид (2.9). По аналогии с методикой, изложенной в п. 2.3, для нахождения функций Грина применяем к задаче (1.31) и (1.45) преобразование Лапласа по времени. Получаем с учетом замечания 2 п. 2.1 задачу (2.23), (2.24).

Далее выполняем редукцию к нулевым граничным условиям. Для этого представляем решение задачи (2.23), (2.24) в форме (2.25) где функции φ и ψ_q выбираем так, чтобы они удовлетворяли граничным условиям (2.24) с учетом ограниченности на бесконечности. Для этого полагаем

$$\varphi(x, s) = f_1^L(s) e^{-x}, \quad \psi_q(x, s) = \frac{1}{D_q} [f_{q+1}^L(s) - \Lambda_q f_1^L(s)] e^{-x}. \quad (2.48)$$

В результате приходим к задаче (2.27) где правые части системы с учетом (2.48) определяются следующими соотношениями

$$\Phi_1(x, s) = (1 - s^2) \varphi + \sum_{j=1}^N \alpha_j \psi_j = \left[(1 - s^2) f_1^L + \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j}{D_j} (f_{j+1}^L - \Lambda_j f_1^L) \right] e^{-x},$$

$$\Phi_{q+1}(x, s) = \Lambda_q \varphi + (D_q - s) \psi_q = \left[\Lambda_q f_1^L + \left(1 - \frac{s}{D_q}\right) (f_{q+1}^L - \Lambda_q f_1^L) \right] e^{-x}.$$

Применяя к (2.27) синус-, косинус преобразование Фурье

$$\begin{Bmatrix} U(x, s) \\ \varphi^*(x) \\ u^L(x, s) \\ \Phi_1(x, s) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \begin{Bmatrix} U^S(\lambda, s) \\ \varphi^S(\lambda) \\ u^{LS}(\lambda, s) \\ \Phi_1^S(\lambda, s) \end{Bmatrix} \sin \lambda x d\lambda; \quad (2.49)$$

$$\begin{Bmatrix} U^S(\lambda, s) \\ \varphi^S(\lambda) \\ u^{LS}(\lambda, s) \\ \Phi_1^S(\lambda, s) \end{Bmatrix} = 2 \int_0^\infty \begin{Bmatrix} U(x, s) \\ \varphi^*(x) \\ u^L(x, s) \\ \Phi_1(x, s) \end{Bmatrix} \sin \lambda x dx; \quad (2.50)$$

$$\begin{Bmatrix} H_q(x, s) \\ \psi_q^*(x) \\ \eta_q^L(x, s) \\ \Phi_{q+1}(x, s) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \begin{Bmatrix} H_q^C(\lambda, s) \\ \psi_q^C(\lambda) \\ \eta_q^{LC}(\lambda, s) \\ \Phi_{q+1}^C(\lambda, s) \end{Bmatrix} \cos \lambda x d\lambda; \quad (2.51)$$

$$\begin{Bmatrix} H^C(\lambda, s) \\ \psi_q^C(\lambda) \\ \eta_q^{LC}(\lambda, s) \\ \Phi_{q+1}^C(\lambda, s) \end{Bmatrix} = 2 \int_0^\infty \begin{Bmatrix} H(x, s) \\ \psi_q^*(x) \\ \eta_q^L(x, s) \\ \Phi_{q+1}(x, s) \end{Bmatrix} \cos \lambda x dx. \quad (2.52)$$

приходим к системе линейных алгебраических уравнений (2.33) (индекс «C» - косинус преобразование, индекс «S» - синус преобразование) где:

$$\Phi_1^S(\lambda, s) = 2 \int_0^\infty \Phi_1(x, s) \sin \lambda x dx = \frac{2\lambda}{(1 + \lambda^2)} \left[(1 - s^2) f_1^L + \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j}{D_j} (f_{j+1}^L - \Lambda_j f_1^L) \right]$$

$$\Phi_{q+1}^C(\lambda, s) = 2 \int_0^\infty \Phi_{q+1}(x, s) \cos \lambda x dx = \frac{2}{(1 + \lambda^2)} \left[\Lambda_q f_1^L + \left(1 - \frac{s}{D_q} \right) (f_{q+1}^L - \Lambda_q f_1^L) \right]$$

Наконец, переходя к искомым функциям по формулам (2.25) с учетом (2.48), приходим к системе (2.34), (2.35) где вместо величин $\{\lambda_n, u^{Ls}, \eta_q^{Lc}\}$ используются $\{\lambda, u^{Ls}, \eta_q^{Lc}\}$. Таким образом, трансформанты функций Грина для полупространства G_{1k}^{LS} и $G_{q+1,k}^{LC}$ выражаются через трансформантами функций Грина для слоя G_{1k}^{Ls} и $G_{q+1,k}^{Lc}$ следующим образом

$$G_{1k}^{LS}(\lambda, s) = G_{1k}^{Ls}(\lambda, s), \quad G_{q+1,k}^{LC}(\lambda, s) = G_{q+1,k}^{Lc}(\lambda, s). \quad (2.53)$$

Переход в пространство оригиналов по Лапласу для функций G_{1k}^{LS} и $G_{q+1,k}^{LC}$ осуществляется по формулам (2.40). Вместо формул (2.42) для функции $G_{q+1,q+1}(x, \tau)$ получаем [84]:

$$G_{q+1,q+1}(x, \tau) = \sqrt{\frac{D_q}{\pi\tau}} e^{-\frac{x^2}{4D_q\tau}} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty G_{q+1,q+1}^C(\lambda, \tau) \cos \lambda x d\lambda, \quad (2.54)$$

где $G_{q+1,q+1}^C(\lambda, \tau)$ находится с помощью (2.43).

Из проделанных рассуждений следует, что формальная схема решения задачи для полупространства мало чем отличается от схемы решения задачи для слоя. Более того, как было показано в этом пункте трансформанты функций Грина для полупространства и слоя связаны между собой с помощью соотношений (2.53). Таким образом, при рассмотрении проблемы механо-диффузии сред под действием нестационарных поверхностных возмущений достаточно ограничиться подробным рассмотрением задач для слоя ввиду их большей сложности из-за наличия отдельных вычислений для нулевых гармоник ряда Фурье.

2.5. Механодиффузия среды с заданными на границах механическими нагрузками

На практике часто приходится решать задачи об определении напряженно-деформированного состояния среды, когда на её границе заданы механические нагрузки. Для этого рассмотрим задачу упругой диффузии для слоя (1.31), (1.46) с нулевыми начальными условиями.

Её решение представляется в виде (2.7). Последовательное применение к системе (1.31) преобразования Лапласа, разложение искомым функций в ряды Фурье и редукция к нулевым граничным условиям приводит к следующим системам линейных алгебраических уравнений:

$$s^2 U^c(0, s) = \Phi_{10}(s); \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} (\lambda_n^2 + s^2) U^c(\lambda_n, s) + \sum_{j=1}^N \alpha_j \lambda_n H_j^s(\lambda_n, s) &= \Phi_1^c(\lambda_n, s) \quad (q = \overline{1, N}), \\ \Lambda_q \lambda_n^3 U^c(\lambda_n, s) + (s + D_q \lambda_n^2) H_q^s(\lambda_n, s) &= \Phi_{q+1, n}^s(\lambda_n, s), \end{aligned} \quad (2.56)$$

где

$$u^L(x, s) = \varphi(x, s) + U(x, s), \quad \eta_q^L(x, s) = \psi_q(x, s) + H_q(x, s); \quad (2.57)$$

$$\varphi(x, s) = \varphi^*(x) \left[f_{11}^L(s) + \sum_{j=1}^N \alpha_j f_{j+1}^L(s) \right], \quad \psi_q(x, s) = \psi^*(x) f_{q+1, 1}^L(s),$$

$$\varphi^*(x) = x - \frac{x^2}{2}, \quad \psi^*(x) = 1 - x,$$

$$\Phi_1(x, s) = -s^2 \varphi^*(x) \left[f_{11}^L(s) + \sum_{j=1}^N \alpha_j f_{j+1, 1}^L(s) \right] - f_{11}^L(s),$$

$$\Phi_{q+1}(x, s) = -s \psi_q^*(x) f_{q+1, 1}^L(s),$$

$$U(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} U^c(\lambda_n, s) \cos \lambda_n x, \quad H_q(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} H_q^s(\lambda_n, s) \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = \pi n,$$

$$\begin{aligned}\varphi^*(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^c(\lambda_n) \cos \lambda_n x, \quad \psi^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi^s(\lambda_n) \sin \lambda_n x, \\ u^L &= \sum_{n=0}^{\infty} u^{Lc}(\lambda_n, s) \cos \lambda_n x, \quad \eta_q^L(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_q^{Ls}(\lambda_n, s) \sin \lambda_n x,\end{aligned}\tag{2.58}$$

$$\Phi_1(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_1^c(\lambda_n, s) \cos \lambda_n x,$$

$$\Phi_{q+1}(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{q+1}^s(\lambda_n, s) \sin \lambda_n x;$$

$$\varphi^c(0) = \int_0^1 \varphi^*(x) dx = \frac{1}{6}, \quad \varphi^c(\lambda_n) = 2 \int_0^1 \varphi^*(x) \cos \lambda_n x dx = -\frac{2}{\lambda_n^2},$$

$$\psi^s(\lambda_n) = 2 \int_0^1 \psi^*(x) \sin \lambda_n x dx = \frac{2}{\lambda_n},$$

$$\Phi_1^c(0, s) = -s^2 \varphi^c(0) \left[f_{11}^L(s) + \sum_{j=1}^N \alpha_j f_{j+1,1}^L(s) \right] - f_{11}^L(s),\tag{2.59}$$

$$\Phi_1^c(\lambda_n, s) = -s^2 \varphi^c(\lambda_n) \left[f_{11}^L(s) + \sum_{j=1}^N \alpha_j f_{j+1,1}^L(s) \right],$$

$$\Phi_{q+1}^s(\lambda_n, s) = -s \psi^s(\lambda_n) f_{q+1,1}^L(s), \quad n \geq 1.$$

Из уравнения (2.55)

$$U^c(0, s) = \frac{\Phi_1^c(0, s)}{s^2} = -\varphi^c(0) \left[f_{11}^L(s) + \sum_{j=1}^N \alpha_j f_{j+1}^L(s) \right] - \frac{f_{11}^L(s)}{s^2}.$$

Тогда, в соответствии с (2.57) и (2.58)

$$u^{Lc}(0, s) = -\frac{f_{11}^L(s)}{s^2}.$$

Возвращаясь с помощью равенств (2.57) в системе (2.56) к искомым функциям u^{Lc} и η_q^{Ls} , получаем при $n \geq 1$

$$(\lambda_n^2 + s^2) u^{Lc} + \sum_{j=1}^N \alpha_j \lambda_n \eta_j^{Ls} = \Phi_1^{c*},\tag{2.60}$$

$$\Lambda_q \lambda_n^3 u^{Lc} + (s + D_q \lambda_n^2) \eta_q^{Ls} = \Phi_{q+1}^{s*},$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_1^{c*}(\lambda_n, s) &= \lambda_n^2 f_{11}^L(s) \varphi^c(\lambda_n), \\ \Phi_{q+1}^{s*}(\lambda_n, s) &= \Lambda_q \lambda_n^3 \varphi^c(\lambda_n) \left[f_{11}^L(s) + \sum_{j=1}^N \alpha_j f_{j+1,1}^L(s) \right] + \\ &+ D_q \lambda_n^2 \psi^s(\lambda_n) f_{q+1,1}^L(s).\end{aligned}\quad (2.61)$$

Решение системы (2.60) и трансформанты G_{ik}^L функций Грина исходной задачи в соответствии с (2.2) и (2.58) имеют вид:

$$\begin{aligned}u^{Lc}(\lambda_n, s) &= \sum_{k=1}^{N+1} G_{1k}^{Lc}(\lambda_n, s) f_{k1}^L(s), \quad \eta_q^{Ls}(\lambda_n, s) = \sum_{k=1}^{N+1} G_{q+1,k}^{Ls}(\lambda_n, s) f_{k1}^L(s), \\ G_{1k}^L(x, s) &= -\frac{\delta_{1k}}{s^2} + \sum_{n=1}^{\infty} G_{1k}^{Lc}(\lambda_n, s) \cos \lambda_n x, \quad G_{1k}^{Lc}(\lambda_n, s) = \frac{P_{1k}(\lambda_n, s)}{P(\lambda_n, s)},\end{aligned}\quad (2.62)$$

$$\begin{aligned}G_{q+1,1}^L(x, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{2\Lambda_q \lambda_n}{s + D_q \lambda_n^2} + G_{q+1,1}^{Ls}(\lambda_n, s) \right] \sin \lambda_n x, \\ G_{q+1,p+1}^L(x, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2\lambda_n (D_q \delta_{pq} - \alpha_p \Lambda_q)}{s + D_q \lambda_n^2} + G_{q+1,p+1}^{Ls}(\lambda_n, s) \right] \sin \lambda_n x, \\ G_{q+1,k}^{Ls}(\lambda_n, s) &= \frac{P_{q+1,k}(\lambda_n, s)}{Q_q(\lambda_n, s)}, \quad p = \overline{1, N}, \quad k = \overline{1, N+1}.\end{aligned}$$

где многочлены $P(\lambda_n, s)$ и $Q_q(\lambda_n, s)$ определяются по формулам (2.37), а функции $P_{ik}(\lambda_n, s)$ имеют вид:

$$\begin{aligned}P_{11}(\lambda_n, s) &= -2 \left(\Pi - \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \lambda_n^2 \Pi_j \right), \\ P_{1,q+1}(\lambda_n, s) &= 2\alpha_q \lambda_n^2 \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \Pi_j - D_q \Pi_q \right);\end{aligned}\quad (2.63)$$

$$P_{q+1,k}(\lambda_n, s) = -\Lambda_q \lambda_n^3 P_{1k}(\lambda_n, s).\quad (2.64)$$

Здесь величины $\Pi = \Pi(\lambda_n, s)$ и $\Pi_j = \Pi_j(\lambda_n, s)$ находятся по формулам (2.39).

После этого оригиналы функций Грина определяются следующим образом [84]:

$$\begin{aligned}
G_{1k}(x, \tau) &= -\delta_{1k}\tau + \sum_{n=1}^{\infty} G_{1k}^c(\lambda_n, \tau) \cos \lambda_n x, \\
G_{q+1,1}(x, \tau) &= \Lambda_q \frac{\partial}{\partial x} \left[\vartheta_3 \left(\frac{x}{2}, e^{-D_q \pi^2 \tau} \right) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} G_{q+1,1}^s(\lambda_n, \tau) \sin \lambda_n x, \\
G_{q+1,p+1}(x, \tau) &= (\Lambda_q \alpha_p - D_q \delta_{pq}) \frac{\partial}{\partial x} \left[\vartheta_3 \left(\frac{x}{2}, e^{-D_q \pi^2 \tau} \right) \right] + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} G_{q+1,p+1}^s(\lambda_n, \tau) \sin \lambda_n x \quad (p = \overline{1, N}, k = \overline{1, N+1}).
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Здесь ($s_j = s_j(\lambda_n)$ – нули многочлена $P(\lambda_n, s)$, $\gamma(\lambda_n) = \operatorname{Re}[s_1(\lambda_n)]$, $\beta(\lambda_n) = \operatorname{Im}[s_1(\lambda_n)]$), см. п. 2.3)

$$G_{1k}^c(\lambda_n, \tau) = e^{\gamma\tau} \left(A_{1k}^{(1)} \cos \beta\tau - A_{1k}^{(2)} \sin \beta\tau \right) + \sum_{j=1}^N B_{1k}^{(j)} e^{s_{j+2}\tau}, \tag{2.66}$$

$$A_{1k}^{(1)} = 2 \operatorname{Re} \frac{P_{1k}(\lambda_n, s_1)}{P'(\lambda_n, s_1)}, \quad A_{1k}^{(2)} = 2 \operatorname{Im} \frac{P_{1k}(\lambda_n, s_1)}{P'(\lambda_n, s_1)},$$

$$B_{1k}^{(j)} = \frac{P_{1k}(\lambda_n, s_{j+2,n})}{P'(\lambda_n, s_{j+2})},$$

$$\begin{aligned}
G_{q+1,k}^s(\lambda_n, \tau) &= e^{\gamma\tau} \left(A_{q+1,k}^{(1)} \cos \beta\tau - A_{q+1,k}^{(2)} \sin \beta\tau \right) + \\
&+ \sum_{j=1}^N B_{q+1,k}^{(j)} e^{s_{j+2}\tau} + B_{q+1,k}^{(N+1)} e^{-D_q \lambda_n^2 \tau},
\end{aligned}$$

$$A_{q+1,k}^{(1)} = 2 \operatorname{Re} \frac{P_{q+1,k}(\lambda_n, s_1)}{Q'_q(\lambda_n, s_1)}, \quad A_{q+1,k}^{(2)} = 2 \operatorname{Im} \frac{P_{q+1,k}(\lambda_n, s_1)}{Q'_q(\lambda_n, s_1)},$$

$$B_{q+1,k}^{(j)} = \frac{P_{q+1,k}(\lambda_n, s_{j+2})}{Q'_q(\lambda_n, s_{j+2})}, \quad B_{q+1,k}^{(N+1)} = \frac{P_{q+1,k}(\lambda_n, -D_q \lambda_n^2)}{Q'_q(\lambda_n, -D_q \lambda_n^2)}.$$

Замечание 1. Переход к решению задач для полуограниченных сред осуществляется по аналогии с алгоритмом, изложенным в п. 2.4.

Замечание 2. По аналогии с методикой изложенной в замечании в конце п. 2.3 можно установить характер особенностей для функций $G_{q+1,k}$, $k = \overline{1, N+1}$. Для этих функции особенность обусловлена наличием производной от тета-функции по пространственной переменной. Порядок этой особенности при $x = 0$, $\tau \rightarrow \infty$ устанавливается с помощью соответствующего несобственного интеграла. Имеем

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial x} \vartheta_3 \left(\frac{x}{2}, e^{-D_q \pi^2 \tau} \right) \right|_{x=0} &= -2\pi n \sum_{n=1}^{\infty} e^{-D_q \pi^2 n^2 \tau} = \\ &= -2\pi \int_1^{\infty} \xi e^{-D_q \pi^2 \xi^2 \tau} d\xi + O(1) = -\frac{1}{D_q \pi \tau} e^{-D_q \pi^2 \tau} + O(1). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Следовательно, функции $G_{q+1,k}(x, \tau)$ при $x = 0$ и $\tau \rightarrow 0$ имеет степенную особенность τ^α , $\alpha = -1$.

2.6. Распространение объёмных механодеффузсионных возмущений

В ряде случаев для расчёта напряженно-деформируемого состояния сред необходимо учитывать действие массовых сил (вес тела, температурное поле и т.д.) или некоторое начальное пространственное распределение физических полей. Решения таких задач можно выразить через объёмные функции Грина. Здесь они будут построены для трех видов одномерных областей: $x \in \mathfrak{R}$, $x \in (0, +\infty)$ и $x \in [0, 1]$.

Объёмные функции Грина для прямой. В этом случае общее решение задачи для уравнений (1.31) имеет вид (звездочки означают свертки по времени и по пространственной координате)

$$u = \sum_{k=1}^{N+1} G_{1k}^s * * F_k, \quad \eta_q = \sum_{k=1}^{N+1} G_{q+1,k}^s * * F_k. \quad (2.68)$$

Здесь G_{km}^s , $q = \overline{1, N}$, $k, m = \overline{1, N+1}$ – объёмные функции Грина для прямой, которые в соответствии с (1.31) удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{G}_{1m}^s &= G'''_{1m} - \sum_{j=1}^N \alpha_j G'_{j+1,m} + \delta_{1m} \Delta, \\ \dot{G}_{q+1,m}^s &= D_q G'''_{q+1,m} - \Lambda_q G'''_{1m} + \delta_{q+1,m} \Delta, \\ \Delta &= \delta(x) \delta(\tau). \end{aligned} \quad (2.69)$$

нулевым начальным условиям и ограничены на всей действительной оси.

Для нахождения функции G_{km}^s применяем к системе (2.69) преобразование Лапласа по времени τ и Фурье по координате x , получим (ω - параметр экспоненциального преобразования Фурье, индекс « F » означает трансформанту Фурье):

$$\begin{aligned} (s^2 + \omega^2) G_{1m}^{sLF} + i\omega \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,m}^{sLF} &= \delta_{1m}, \\ -i\omega^3 \Lambda_q G_{1m}^{sLF} + (s + D_q \omega^2) G_{q+1,m}^{sLF} &= \delta_{q+1,m}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Решение этой системы имеет вид

$$G_{1m}^{sLF}(\omega, s) = \frac{P_{1m}(\omega, s)}{P(\omega, s)}, \quad (q = \overline{1, N}, m = \overline{1, N+1}), \quad (2.71)$$

$$G_{q+1,m}^{sLF}(\omega, s) = \frac{\delta_{q+1,m}}{s + D_q \omega^2} + \frac{P_{q+1,m}(\omega, s)}{Q_q(\omega, s)},$$

где

$$P_{11} = \Pi, \quad P_{q+1,p+1} = \alpha_p \Lambda_q \omega^4 \Pi_p,$$

$$P_{1,q+1} = -i\omega \alpha_q \Pi_q, \quad P_{q+1,1} = i\omega^3 \Lambda_q \Pi \quad (p, q = \overline{1, N}).$$

Здесь величины $\Pi = \Pi(\omega, s)$ и $\Pi_j = \Pi_j(\omega, s)$ находятся по формулам (2.39).

Оригиналы по Лапласу объёмных функций Грина для прямой записываются так:

$$G_{1m}^{sF}(\omega, \tau) = e^{\gamma\tau} \left(A_{1m}^{(1)} \cos \beta\tau - A_{1m}^{(2)} \sin \beta\tau \right) + \sum_{j=1}^N B_{1m}^{(j)} e^{s_{j+2}\tau}; \quad (2.72)$$

$$A_{1m}^{(1)} = 2 \operatorname{Re} \frac{P_{1m}(\omega, s_1)}{P'(\omega, s_1)}, \quad A_{1m}^{(2)} = 2 \operatorname{Im} \frac{P_{1m}(\omega, s_1)}{P'(\omega, s_1)}, \quad B_{1m}^{(j)} = \frac{P_{1k}(\omega, s_{j+2})}{P'(\omega, s_{j+2})}, \quad (2.73)$$

$$G_{q+1,m}^{sF}(\omega, \tau) = e^{\gamma\tau} \left(A_{q+1,m}^{(1)} \cos \beta\tau - A_{q+1,m}^{(2)} \sin \beta\tau \right) + \sum_{j=1}^N B_{q+1,m}^{(j)} e^{s_{j+2}\tau} + \left(B_{q+1,m}^{(N+1)} + \delta_{q+1,m} \right) e^{-D_q \omega^2 \tau}; \quad (2.74)$$

$$A_{q+1,m}^{(1)} = 2 \operatorname{Re} \frac{P_{q+1,m}(\omega, s_1)}{Q'_q(\omega, s_1)}, \quad A_{q+1,m}^{(2)} = 2 \operatorname{Im} \frac{P_{q+1,m}(\omega, s_1)}{Q'_q(\omega, s_1)}, \quad (2.75)$$

$$B_{q+1,m}^{(j)} = \frac{P_{q+1,m}(\omega, s_{j+2,n})}{Q'_q(\omega, s_{j+2,n})}, \quad B_{q+1,m}^{(N+1)} = \frac{P_{q+1,m}(\omega, -D_q \omega^2)}{Q'_q(\omega, -D_q \omega^2)}.$$

где $s_l = s_l(\omega)$, $l = \overline{1, N+2}$ – нули многочлена $P(\omega, s)$, $\gamma(\omega) = \operatorname{Re}[s_1(\omega)]$, $\beta(\omega) = \operatorname{Im}[s_1(\omega)]$. Многочлены P и Q_q находятся по формулам (2.37). Обращение преобразования Фурье может быть выполнено численно по методике изложенной следующем пункте.

Объёмные функции Грина для отрезка и полупрямой. Решение исходной для отрезка в случае объёмных возмущений выражается через обобщенную свертку

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^{N+1} \int_0^{\tau} dt \int_0^1 G_{1m}^l(x, \xi, \tau - t) F_m(\xi, t) d\xi, \\ \eta_q &= \sum_{m=1}^{N+1} \int_0^{\tau} dt \int_0^1 G_{q+1,m}^l(x, \xi, \tau - t) F_m(\xi, t) d\xi. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Полагаем, что объёмные функции Грина G_{km}^l удовлетворяют нулевым начальным условиям, однородным граничным условиям, соответствующим (2.6) или (2.8) и уравнениям (2.69), где объёмные возмущения заданы так:

$$\Delta = \delta(x - \xi) \delta(\tau).$$

Для нахождения функций G_{km}^l к системе (2.69) с однородными граничными условиями, соответствующими (1.45) применяем преобразование Лапласа по времени и разложение в неполные ряды Фурье:

$$\begin{aligned} G_{q+1,q+1}^{lLc}(0, \xi, s) &= \frac{1}{s}, \\ (s^2 + \lambda_n^2) G_{1m}^{lLs} - \lambda_n \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,m}^{lLc} &= \delta_{1m} \sin \lambda_n \xi, \\ -\Lambda_q \lambda_n^3 G_{1m}^{lLs} + (s + D_q \lambda_n^2) G_{q+1,m}^{lLc} &= \delta_{q+1,m} \cos \lambda_n \xi, \end{aligned} \quad (2.77)$$

где

$$\begin{aligned} G_{1m}^{lL}(x, \xi, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{1m}^{lLs}(\lambda_n, \xi, s) \sin \lambda_n x, \\ G_{q+1,m}^{lL}(x, \xi, s) &= \sum_{n=0}^{\infty} G_{q+1,m}^{lLs}(\lambda_n, \xi, s) \cos \lambda_n x, \\ G_{1m}^{lLs}(\lambda_n, \xi, s) &= 2 \int_0^1 G_{1m}^{lL}(x, \xi, s) \sin \lambda_n x dx, \\ G_{q+1,m}^{lLc}(\lambda_n, \xi, s) &= 2 \int_0^1 G_{q+1,m}^{lL}(x, \xi, s) \cos \lambda_n x dx. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Её решениями являются функции

$$\begin{aligned}
G_{1,q+1}^{lLs} &= \frac{P_{1,q+1}(\lambda_n, s)}{P(\lambda_n, s)} \cos \xi \lambda_n, & G_{11}^{lLs} &= \frac{P_{11}(\lambda_n, s)}{P(\lambda_n, s)} \sin \lambda_n \xi, \\
G_{q+1,1}^{lLc} &= \frac{P_{q+1,1}(\lambda_n, s)}{P(\lambda_n, s)} \sin \lambda_n \xi, & & \\
G_{q+1,p+1}^{lLc} &= \left(\frac{2\delta_{pq}}{s + D_q \lambda_n^2} + \frac{P_{q+1,p+1}(\lambda_n, s)}{Q_q(\lambda_n, s)} \right) \cos \lambda_n \xi \quad (p, q = \overline{1, N}),
\end{aligned} \tag{2.79}$$

где многочлены P и Q_q находятся по формулам (2.37), остальные многочлены определяются так:

$$\begin{aligned}
P_{1,q+1} &= 2\alpha_q \lambda_n \Pi_q, & P_{q+1,1} &= 2\lambda_n^3 \Lambda_q \Pi_q, \\
P_{11} &= 2\Pi, & P_{q+1,p+1} &= 2\alpha_p \Lambda_q \lambda_n^4 \Pi_p.
\end{aligned} \tag{2.80}$$

Величины $\Pi = \Pi(\lambda_n, s)$ и $\Pi_j = \Pi_j(\lambda_n, s)$ находятся по формулам (2.39).

В случае системы (2.69) с однородными граничными условиями, соответствующими (1.46) получаем:

$$G_{11}^{lLc}(0, \xi, s) = \frac{1}{s^2},$$

$$(s^2 + \lambda_n^2) G_{1m}^{lLc} + \lambda_n \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,m}^{lLs} = \delta_{1m} \cos \lambda_n \xi, \tag{2.81}$$

$$\Lambda_q \lambda_n^3 G_{1m}^{lLc} + (s + D_q \lambda_n^2) G_{q+1,m}^{lLs} = \delta_{q+1,m} \sin \lambda_n \xi;$$

$$G_{1m}^{lL}(x, \xi, s) = \sum_{n=0}^{\infty} G_{1m}^{lLc}(\lambda_n, \xi, s) \cos \lambda_n x,$$

$$G_{q+1,m}^{lL}(x, \xi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{q+1,m}^{lLs}(\lambda_n, \xi, s) \sin \lambda_n x,$$

$$G_{1m}^{lLc}(\lambda_n, \xi, s) = 2 \int_0^1 G_{1m}^{lL}(x, \xi, s) \cos \lambda_n x dx, \tag{2.82}$$

$$G_{q+1,m}^{lLs}(\lambda_n, \xi, s) = 2 \int_0^1 G_{q+1,m}^{lL}(x, \xi, s) \sin \lambda_n x dx.$$

Решения этой системы уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned}
G_{11}^{LLc} &= \frac{P_{11}(\lambda_n, s)}{P(\lambda_n, s)} \cos \lambda_n \xi, & G_{q+1,1}^{LLs} &= \frac{P_{q+1,1}(\lambda_n, s)}{P(\lambda_n, s)} \cos \lambda_n \xi, \\
G_{1,q+1}^{LLc} &= \frac{P_{1,q+1}(\lambda_n, s)}{P(\lambda_n, s)} \sin \lambda_n \xi, & (p, q = \overline{1, N}), & \\
G_{q+1,p+1}^{LLs} &= \left(\frac{2\delta_{pq}}{s + D_q \lambda_n^2} + \frac{P_{q+1,p+1}(\lambda_n, s)}{Q_q(\lambda_n, s)} \right) \sin \lambda_n \xi,
\end{aligned} \tag{2.83}$$

где

$$\begin{aligned}
P_{1,q+1} &= -2\alpha_q \lambda_n \Pi_q, & P_{q+1,p+1} &= 2\alpha_p \Lambda_q \lambda_n^4 \Pi_p, \\
P_{11} &= 2\Pi, & P_{q+1,1} &= -2\lambda_n^3 \Lambda_q \Pi_q.
\end{aligned} \tag{2.84}$$

Переход в пространство оригиналов по Лапласу в обоих случаях осуществляется по формулам

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{1m}^{ls}(\lambda_n, \tau) \\ G_{1m}^{lc}(\lambda_n, \tau) \end{array} \right\} = e^{\gamma\tau} \left(A_{1m}^{(1)} \cos \beta\tau - A_{1m}^{(2)} \sin \beta\tau \right) + \sum_{j=1}^N B_{1m}^{(j)} e^{s_{j+2}\tau}; \tag{2.85}$$

$$\begin{aligned}
A_{1m}^{(1)} &= 2 \operatorname{Re} \frac{P_{1m}(\lambda_n, s_1)}{P'(\lambda_n, s_1)}, & A_{1m}^{(2)} &= 2 \operatorname{Im} \frac{P_{1m}(\lambda_n, s_1)}{P'(\lambda_n, s_1)}, \\
B_{1m}^{(j)} &= \frac{P_{1k}(\lambda_n, s_{j+2})}{P'(\lambda_n, s_{j+2})};
\end{aligned} \tag{2.86}$$

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{l} G_{q+1,m}^{lc}(\lambda_n, \tau) \\ G_{q+1,m}^{ls}(\lambda_n, \tau) \end{array} \right\} &= e^{\gamma\tau} \left(A_{q+1,m}^{(1)} \cos \beta\tau - A_{q+1,m}^{(2)} \sin \beta\tau \right) + \\
&+ \sum_{j=1}^N B_{q+1,m}^{(j)} e^{s_{j+2}\tau} + \left(B_{q+1,m}^{(N+1)} + 2\delta_{q+1,m} \right) e^{-D_q \lambda_n^2 \tau};
\end{aligned} \tag{2.87}$$

$$\begin{aligned}
A_{q+1,m}^{(1)} &= 2 \operatorname{Re} \frac{P_{q+1,m}(\lambda_n, s_1)}{Q'_q(\lambda_n, s_1)}, & A_{q+1,m}^{(2)} &= 2 \operatorname{Im} \frac{P_{q+1,m}(\lambda_n, s_1)}{Q'_q(\lambda_n, s_1)}, \\
B_{q+1,m}^{(j)} &= \frac{P_{q+1,m}(\lambda_n, s_{j+2})}{Q'_q(\lambda_n, s_{j+2})}, & B_{q+1,m}^{(N+1)} &= \frac{P_{q+1,m}(\lambda_n, -D_q \lambda_n^2)}{Q'_q(\lambda_n, -D_q \lambda_n^2)}.
\end{aligned} \tag{2.88}$$

В задаче для полупрямой решение через объемные функции Грина записывается так

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^{N+1} \int_0^{\tau} dt \int_0^{\infty} G_{1m}^{hs} (x, \xi, \tau - t) F_m (\xi, t) d\xi \\ \eta_q &= \sum_{m=1}^{N+1} \int_0^{\tau} dt \int_0^{\infty} G_{q+1,m}^{hs} (x, \xi, \tau - t) F_m (\xi, t) d\xi. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Здесь G_{km}^{hs} , $q = \overline{1, N}$, $m = \overline{1, N+1}$ – объемные функции Грина для полупрямой, которые удовлетворяют нулевым начальным условиям, однородным граничным условиям, соответствующим (1.45) или (1.46), и уравнениям (2.76). Их трансформанты связаны с функциями Грина для слоя с помощью соотношений (см. п. 2.4)

$$\begin{pmatrix} G_{1m}^{hsLC} (\lambda, s) \\ G_{1m}^{hsLS} (\lambda, s) \\ G_{q+1,m}^{hsLC} (\lambda, s) \\ G_{q+1,m}^{hsLS} (\lambda, s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{1m}^{lLc} (\lambda, s) \\ G_{1m}^{lLs} (\lambda, s) \\ G_{q+1,m}^{lLc} (\lambda, s) \\ G_{q+1,m}^{lLs} (\lambda, s) \end{pmatrix},$$

При этом:

-в случае граничных условий (1.45)

$$\begin{aligned} G_{1m}^{hsL} (x, \xi, s) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_{1m}^{hsLS} (\lambda, \xi, s) \sin \lambda x d\lambda, \\ G_{q+1,m}^{hsL} (x, \xi, s) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_{q+1,m}^{hsLC} (\lambda, \xi, s) \cos \lambda x d\lambda, \end{aligned} \quad (2.90)$$

-в случае граничных условий (1.46)

$$\begin{aligned} G_{1m}^{hsL} (x, \xi, s) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_{1m}^{hsLC} (\lambda, \xi, s) \cos \lambda x d\lambda, \\ G_{q+1,m}^{hsL} (x, \xi, s) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_{q+1,m}^{hsLS} (\lambda, \xi, s) \sin \lambda x d\lambda. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Замечание. При численной реализации данного подхода могут возникнуть сложности связанные с вычислением двойных интегралов (обобщенная свертка по пространственной переменной и обращение синус-, косинус преобразования). Этого можно избежать если рассматривать частный случай задания соответствующих объемных возмущений по координате x . При этом используются функции W_{km}^{hs} , удовлетворяющие нулевым начальным условиям, однородным граничным условиям, соответствующим (1.45) или (1.46), и уравнениям (2.69), где вместо $\delta_{km}\Delta$ будут стоять

$$\delta_{km}\Delta_k = \delta_{km}f_k(x)\delta(\tau) \quad k = \overline{1, N+1}. \quad (2.92)$$

В этом случае решение исходной задачи будет выражаться через введенные функции W_{km}^{hs} с помощью классической свертки по времени τ :

$$u = \sum_{k=1}^{N+1} W_{1k}^{hs} * F_k, \quad \eta_q = \sum_{k=1}^{N+1} W_{q+1,k}^{hs} * F_k. \quad (2.93)$$

где $F_k = F_k(x, \tau)$ – объёмные возмущения в уравнениях (1.31), которые в соответствии с (2.92) имеют вид:

$$F_k(x, \tau) = f_k(x)g_k(\tau).$$

Выполняя аналогичные действия, получаем такие результаты:

- для однородных граничных условий вида (1.45) (многочлены P_{km} находятся по формулам (2.80))

$$\begin{aligned} W_{1,q+1}^{hsLS}(\lambda, s) &= \frac{P_{1,q+1}(\lambda, s)}{P(\lambda, s)} f_{q+1}^C(\lambda) \quad (p, q = \overline{1, N}), \\ \left\{ \begin{array}{l} W_{11}^{hsLS}(\lambda, s) \\ W_{q+1,1}^{hsLC}(\lambda, s) \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} P_{11}(\lambda, s) \\ P_{q+1,1}(\lambda, s) \end{array} \right\} \frac{f_1^S(\lambda)}{P(\lambda, s)}, \\ W_{q+1,p+1}^{hsLC}(\lambda, s) &= \left[\frac{\delta_{pq}}{s + D_q \lambda^2} + \frac{P_{q+1,p+1}(\lambda, s)}{Q_q(\lambda, s)} \right] f_{p+1}^C(\lambda), \end{aligned} \quad (2.94)$$

- для однородных граничных условий вида (1.46) (многочлены P_{km} находятся по формулам (2.84))

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} W_{11}^{hsLC} \\ W_{q+1,1}^{hsLS}(\lambda, s) \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{c} P_{11}(\lambda, s) \\ P_{q+1,1}(\lambda, s) \end{array} \right\} \frac{f_1^C(\lambda)}{P(\lambda, s)}, \\ W_{1,q+1}^{hsLC}(\lambda, s) &= \frac{P_{1,q+1}(\lambda, s)}{P(\lambda, s)} f_{q+1}^S(\lambda), \\ W_{q+1,p+1}^{hsLS}(\lambda, s) &= \left[\frac{\delta_{pq}}{s + D_q \lambda^2} + \frac{P_{q+1,p+1}(\lambda, s)}{Q_q(\lambda, s)} \right] f_{p+1}^S(\lambda). \end{aligned} \quad (2.95)$$

Отметим, что так как

$$f_k^C(\lambda) = 2 \int_0^\infty f_k(x) \cos \lambda x dx, \quad f_k^S(\lambda) = 2 \int_0^\infty f_k(x) \sin \lambda x dx,$$

то имеет место следующая связь между функциями W_{km}^{hs} и G_{km}^{hs} :

$$W_{km}^{hs}(x, \tau) = \int_0^\infty G_{km}^{hs}(x, \xi, \tau) f_k(\xi) d\xi. \quad (2.96)$$

Можно также рассматривать функции W_{km}^{ll} для отрезка, которые удовлетворяют однородным граничным условиям, соответствующим (1.45) или (1.46), и уравнениям (2.69), где объемные возмущения имеют вид (2.92). Решение исходной задачи в этом случае в соответствии с замечанием этого пункта записывается в виде (2.93):

- в случае однородных граничных условий соответствующих (1.45) в пространстве преобразования Лапласа имеем (многочлены P_{km} находятся по формулам (2.80))

$$W_{1k}^{ll} = \sum_{n=1}^{\infty} W_{1k}^{lls}(\lambda_n, s) \sin \lambda_n x, \quad W_{q+1,k}^{ll} = \sum_{n=0}^{\infty} W_{q+1,k}^{llc}(\lambda_n, s) \cos \lambda_n x,$$

$$\begin{aligned}
W_{q+1,q+1}^{LLc}(0, s) &= \frac{f_{q+1}^c(0)}{s}, \quad W_{1,q+1}^{LLs}(\lambda_n, s) = \frac{P_{1,q+1}(\lambda_n, s)}{P(\lambda_n, s)} f_{q+1}^c(\lambda_n), \\
\left\{ \begin{array}{l} W_{11}^{LLs}(\lambda_n, s) \\ W_{q+1,1}^{LLc}(\lambda_n, s) \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} P_{11}(\lambda_n, s) \\ P_{q+1,1}(\lambda_n, s) \end{array} \right\} \frac{f_1^s(\lambda_n)}{P(\lambda_n, s)} \quad (p, q = \overline{1, N}), \quad (2.97) \\
W_{q+1,p+1}^{LLc}(\lambda_n, s) &= \left[\frac{\delta_{pq}}{s + D_q \lambda_n^2} + \frac{P_{q+1,p+1}(\lambda_n, s)}{Q_q(\lambda_n, s)} \right] f_{p+1}^c(\lambda_n).
\end{aligned}$$

- в случае однородных граничных условий соответствующих (1.46) (многочлены P_{km} находятся по формулам (2.84))

$$\begin{aligned}
W_{1k}^{LL} &= \sum_{n=1}^{\infty} W_{1k}^{LLc}(\lambda_n, s) \cos \lambda_n x, \quad W_{q+1,k}^{LL} = \sum_{n=0}^{\infty} W_{q+1,k}^{LLs}(\lambda_n, s) \sin \lambda_n x, \\
W_{11}^{LLc}(0, s) &= \frac{f_1^c(0)}{s^2}, \quad W_{1,q+1}^{LLc}(\lambda_n, s) = \frac{P_{1,q+1}(\lambda_n, s)}{P(\lambda_n, s)} f_{q+1}^s(\lambda_n), \\
\left\{ \begin{array}{l} W_{11}^{LLc}(\lambda_n, s) \\ W_{q+1,1}^{LLs}(\lambda_n, s) \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} P_{11}(\lambda_n, s) \\ P_{q+1,1}(\lambda_n, s) \end{array} \right\} \frac{f_1^c(\lambda_n)}{P(\lambda_n, s)} \quad (p, q = \overline{1, N}), \quad (2.98) \\
W_{q+1,p+1}^{LLs}(\lambda_n, s) &= \left[\frac{\delta_{pq}}{s + D_q \lambda_n^2} + \frac{P_{q+1,p+1}(\lambda_n, s)}{Q_q(\lambda_n, s)} \right] f_{p+1}^s(\lambda_n).
\end{aligned}$$

Здесь f_k^c и f_k^s – коэффициенты разложения функции f_k в соответствующий ряд Фурье по синусам и косинусам.

2.7. Примеры расчетов

Полагаем, что среда - алюминий, имеющий следующие характеристики [183]:

$$\begin{aligned} \lambda &= 6.93 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{М}^2}, & \mu &= 2.56 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{М}^2}, & T_0 &= 800 \text{ К}, \\ \alpha &= 4.2 \cdot 10^5 \frac{\text{Дж}}{\text{Моль}}, & \rho &= 2700 \frac{\text{кг}}{\text{М}^3}, & D &= 7.73 \cdot 10^{-14} \frac{\text{М}^2}{\text{с}}, & L &= 1 \text{ м}. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Поверхностные кинематические возмущения в слое. В качестве первого примера, рассмотрим задачу (1.31), (1.45) для однокомпонентного слоя с граничными условиями вида:

$$f_{21}(\tau) = H(\tau), \quad f_{11} = 0.$$

Свертки по времени (2.5) функций Грина $G_{k1}(x, \tau)$ с правыми частями граничных условий f_{k1} дают следующие выражения для искомых функций u и η :

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{12}^{(1)} I_1(\gamma, \beta, \tau) - A_{12}^{(2)} I_2(\gamma, \beta, \tau) + B_{12}^{(1)} I_3(s_3, \tau) \right] \sin \lambda_n x, \\ \eta &= \tau + \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + B_{22}^{(2)} \right) I_3(-D\lambda_n^2, \tau) \cos \lambda_n x + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{22}^{(1)} I_1(\gamma, \beta, \tau) - A_{22}^{(2)} I_2(\gamma, \beta, \tau) + B_{22}^{(1)} I_3(s_3, \tau) \right] \cos \lambda_n x, \end{aligned} \quad (2.100)$$

где, коэффициенты $A_{km}^{(l)} = A_{km}^{(l)}(\lambda_n)$ и $B_{km}^{(p)} = B_{km}^{(p)}(\lambda_n)$ вычисляются по формулам (2.41) и (2.44). Здесь же определяются величины $\gamma = \gamma(\lambda_n)$, $\beta = \beta(\lambda_n)$

и $s_3 = s_3(\lambda_n)$. Функции I_k находятся следующим образом [173]:

$$I_1(\gamma, \beta, \tau) = \int_0^\tau e^{\gamma t} \cos \beta t dt = \frac{1}{\gamma^2 + \beta^2} [e^{\gamma \tau} (\beta \sin \beta \tau + \gamma \cos \beta \tau) - \gamma],$$

$$I_2(\gamma, \beta, \tau) = \int_0^\tau e^{\gamma t} \sin \beta t dt = \frac{1}{\gamma^2 + \beta^2} [e^{\gamma \tau} (\gamma \sin \beta \tau - \beta \cos \beta \tau) + \beta], \quad (2.101)$$

$$I_3(s, \tau) = \int_0^\tau e^{st} dt = \frac{e^{s\tau} - 1}{s}.$$

Результаты численных вычислений для перемещений и приращения концентрации в различных точках слоя по формулам (2.100), (2.101) при количестве членов рядов Фурье $N_\lambda = 10^4$ показаны на рис. 2.1, 2.2.

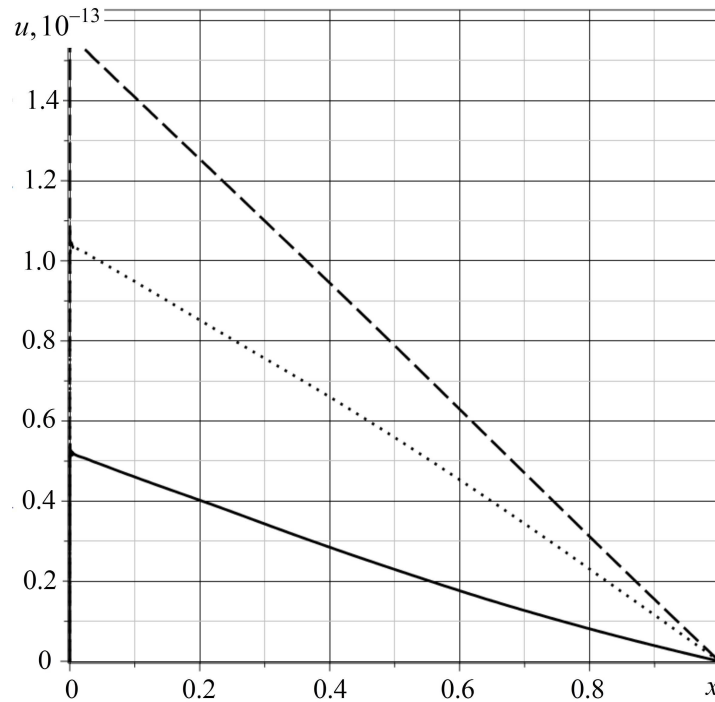


Рис. 2.1. зависимость $u(x, \tau)$ от координаты x . Сплошная линия $\tau = 10^2$, пунктирная $\tau = 2 \cdot 10^2$, штриховая $\tau = 3 \cdot 10^2$.

Замечание. Здесь и далее количество членов рядов Фурье, точек разбиения при численном обращении интегральных преобразований выбирается таким образом, что увеличение их вдвое практически не приводит к изменению результатов.

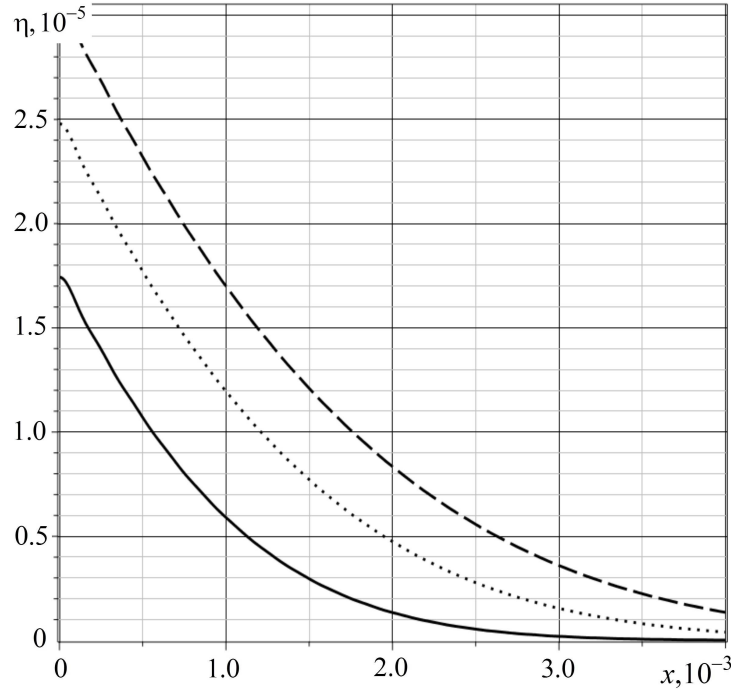


Рис. 2.2. зависимость $\eta(x, \tau)$ от координаты x . Сплошная линия $\tau = 10^{11}$, пунктирная $\tau = 2 \cdot 10^{11}$, штриховая $\tau = 3 \cdot 10^{11}$.

Далее, в качестве второго примера рассмотрим задачу для двухкомпонентного слоя. Для расчета полагаем в (1.31), (1.45):

$$f_{21}(\tau) = H(\tau), \quad f_{11}(\tau) = f_{31}(\tau) = 0.$$

Здесь вычисляя свертки (2.5) получаем для искомым функций u и η_q (коэффициенты $A_{km}^{(l)}$ определяются по формулам (2.41) и (2.44)):

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \tau + \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + B_{22}^{(3)} \right) I_3 \left(-D_1 \lambda_n^2, \tau \right) \cos \lambda_n x + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{22}^{(1)} I_1(\gamma, \beta, \tau) - A_{22}^{(2)} I_2(\gamma, \beta, \tau) + \sum_{j=1}^2 B_{22}^{(j)} I_3(s_{j+2}, \tau) \right] \cos \lambda_n x, \\ \eta_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{32}^{(1)} I_1(\gamma, \beta, \tau) - A_{32}^{(2)} I_2(\gamma, \beta, \tau) + \sum_{j=1}^2 B_{32}^{(j+2)} I_3(s_{j+2}, \tau) \right] \cos \lambda_n x, \\ u &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{12}^{(1)} I_1(\gamma, \beta, \tau) - A_{12}^{(2)} I_2(\gamma, \beta, \tau) + \sum_{j=1}^2 B_{12}^{(j)} I_3(s_{j+2}, \tau) \right] \sin \lambda_n x. \end{aligned}$$

Примером модели двухкомпонентной среды может являться дюралюминий, где в качестве основных диффундирующих веществ выступают алюминий (компонент 1) и медь (компонент 2) [183]:

$$\begin{aligned} \lambda &= 6.93 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{М}^2}, & \mu &= 2.56 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{М}^2}, & T_0 &= 800 \text{ К}, \\ \rho &= 2780 \frac{\text{кг}}{\text{М}^3}, & D_1 &= 7.74 \cdot 10^{-14} \frac{\text{М}^2}{\text{с}}, & D_2 &= 3.11 \cdot 10^{-18} \frac{\text{М}^2}{\text{с}}, \\ \alpha_1 &= 4.2 \cdot 10^4 \frac{\text{Дж}}{\text{Моль}}, & \alpha_2 &= 2.3 \cdot 10^4 \frac{\text{Дж}}{\text{Моль}}, & L &= 1 \text{ м}. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Результаты численных вычислений для перемещений и приращения концентрации в различных точках слоя показаны на рис. 2.3 – 2.5.

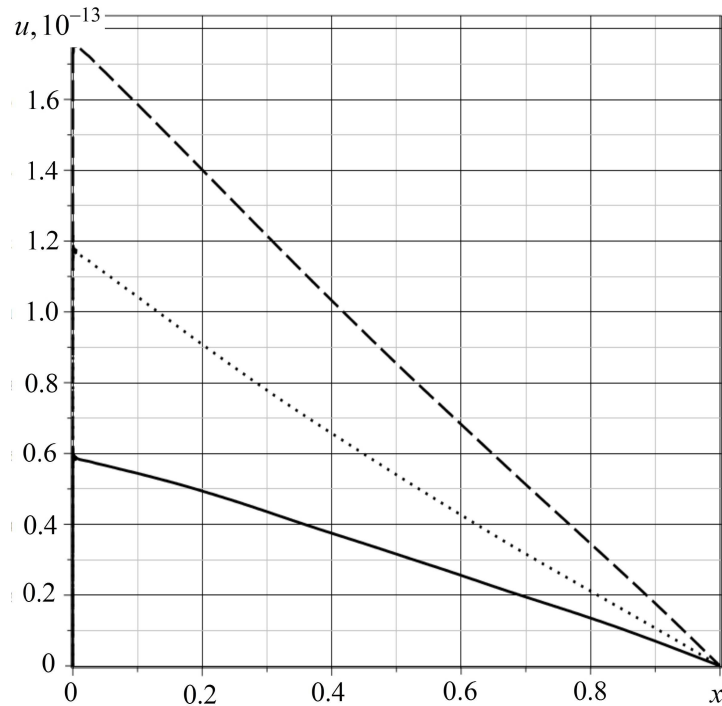


Рис. 2.3. зависимость $u(x, \tau)$ от координаты x . Сплошная линия $\tau = 10^2$, пунктирная $\tau = 2 \cdot 10^2$, штриховая $\tau = 3 \cdot 10^2$.

Как видно, при наличии нескольких диффундирующих компонент, заданное на границе перераспределение концентрации любой из них вовлекает в диффузионный процесс и другие компоненты, а также инициирует механические возмущения.

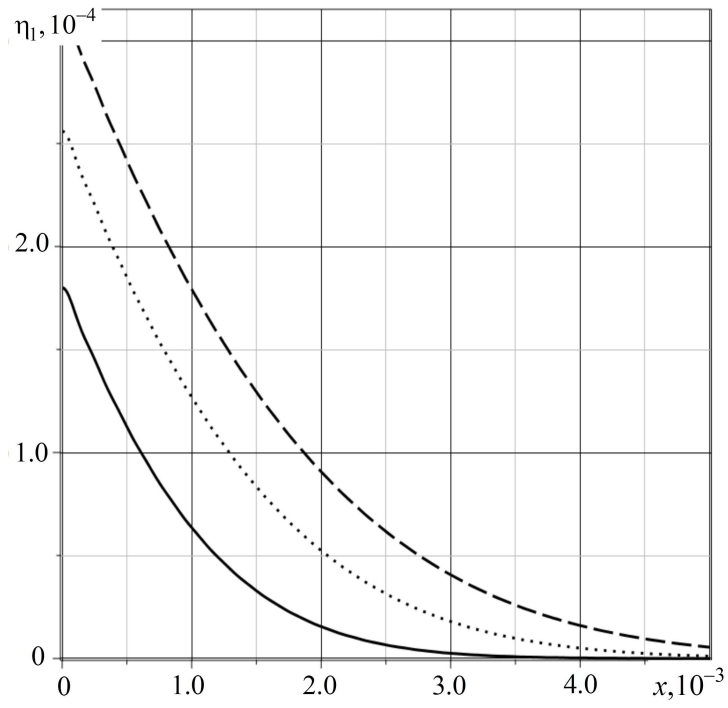


Рис. 2.4. зависимость $\eta_1(x, \tau)$ от координаты x . Сплошная линия $\tau = 10^{11}$, пунктирная $\tau = 2 \cdot 10^{11}$, штриховая $\tau = 3 \cdot 10^{11}$.

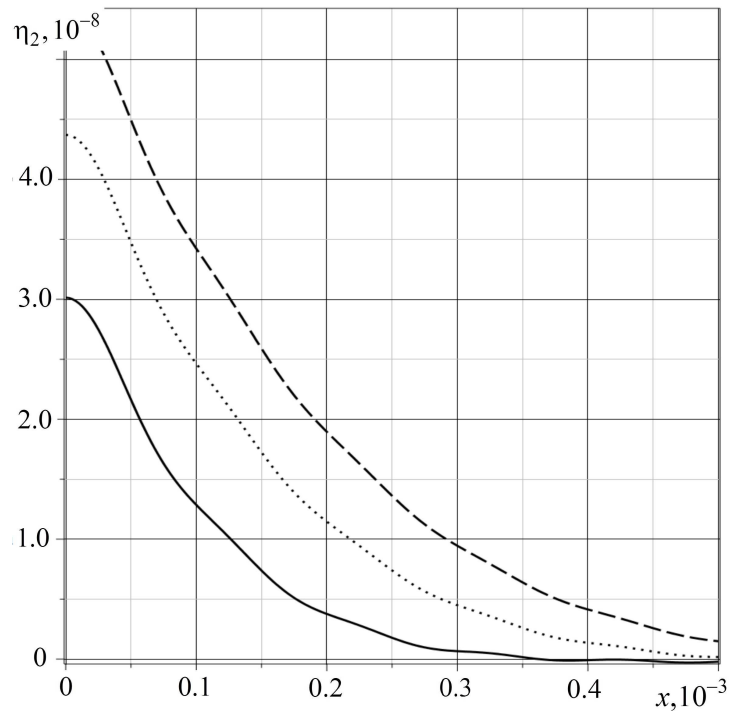


Рис. 2.5. зависимость $\eta_2(x, \tau)$ от координаты x . Сплошная линия $\tau = 10^{14}$, пунктирная $\tau = 2 \cdot 10^{14}$, штриховая $\tau = 3 \cdot 10^{14}$.

Явление самодиффузии, т.е. случайное перемещение частиц среды без изменения её химического состава, рассмотренное здесь в реальности имеет место при достаточно высоких температурах, например, для алюминия $330 - 630 \text{ }^{\circ}\text{C}$, для меди – $530 - 930 \text{ }^{\circ}\text{C}$ [183]. Такое явление может наблюдаться, например, в металлических сплавах.

Поверхностные кинематические возмущения в полупространстве. Для расчетов положим, что правые части граничных условий (1.45) имеют вид:

$$f_2(\tau) = H(\tau), \quad f_1(\tau) = 0.$$

Несобственные интегралы, стоящие в (2.54), находятся численно. Для этого они преобразовываются так:

$$\int_0^{\infty} f(\lambda, \tau) d\lambda = \int_0^a f(\lambda, \tau) d\lambda + \int_a^{\infty} f(\lambda, \tau) d\lambda, \quad (2.103)$$

где a любая промежуточная точка (в расчетах полагается $a = 1$); $f(\lambda, \tau)$ – одна из подынтегральных функций в (2.54).

Вычисление первого интеграла выполняется с помощью любой квадратурной формулы (например, формулы средних прямоугольников). Второй интеграл, с помощью замены переменных $\lambda = a^2 / (a - \nu)$ переводится в интеграл по конечному промежутку $[0, a]$, после чего также находится численно [10, 11].

Замечание. В ряде случаев предпочтительнее вначале вычислить аналитически свертки (2.9) после чего численно выполнить обратное синус-, косинус преобразование с помощью представления (2.103). При этом, имеет место

следующая цепочка равенств

$$\begin{aligned}
 G * f &= \int_0^{\tau} G(x, \tau - t) f(t) dt \quad \Rightarrow \\
 \Rightarrow \begin{Bmatrix} (G * f)^C \\ (G * f)^S \end{Bmatrix} &= \int_0^{\tau} \begin{Bmatrix} G^C(\lambda, \tau - t) \\ G^S(\lambda, \tau - t) \end{Bmatrix} f(t) dt \quad \Rightarrow \\
 \Rightarrow G * f &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\tau} \int_0^{\infty} \begin{Bmatrix} G^C(\lambda, \tau - t) \\ G^S(\lambda, \tau - t) \end{Bmatrix} f(t) \begin{Bmatrix} \cos \lambda x \\ \sin \lambda x \end{Bmatrix} d\lambda dt.
 \end{aligned}$$

где G - любая из поверхностных функций Грина, f - любая из правых частей граничных условий (1.45).

Таким образом, можно записать

$$\begin{aligned}
 G * f &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \begin{Bmatrix} \tilde{G}^C(\lambda, \tau - t) \\ \tilde{G}^S(\lambda, \tau - t) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \lambda x \\ \sin \lambda x \end{Bmatrix} d\lambda, \\
 \begin{Bmatrix} \tilde{G}^C(\lambda, \tau - t) \\ \tilde{G}^S(\lambda, \tau - t) \end{Bmatrix} &= \int_0^{\tau} \begin{Bmatrix} G^C(\lambda, \tau - t) \\ G^S(\lambda, \tau - t) \end{Bmatrix} f(t) dt.
 \end{aligned} \tag{2.104}$$

Здесь функции \tilde{G}^C и \tilde{G}^S в ряде случаев могут быть вычислены аналитически, например, с помощью таблиц интегралов [173]. Результаты вычислений продемонстрированы на рис. 2.6, 2.7.

Для двухкомпонентной среды в качестве материала полупространства возьмем дюралюминий (2.102). Правые части граничных условий:

$$f_2(\tau) = H(\tau), \quad f_1(\tau) = f_3(\tau) = 0.$$

Результаты вычислений продемонстрированы на рис. 2.8 – 2.10.

Задачи для однокомпонентного и двухкомпонентного полупространства были рассмотрены в работах [74, 75]. Так же как и в задачах для слоя, несмотря на то, что моделью среды является твердый раствор, граничные возмущения массопереноса какого-либо одного диффузанта инициируют массопере-

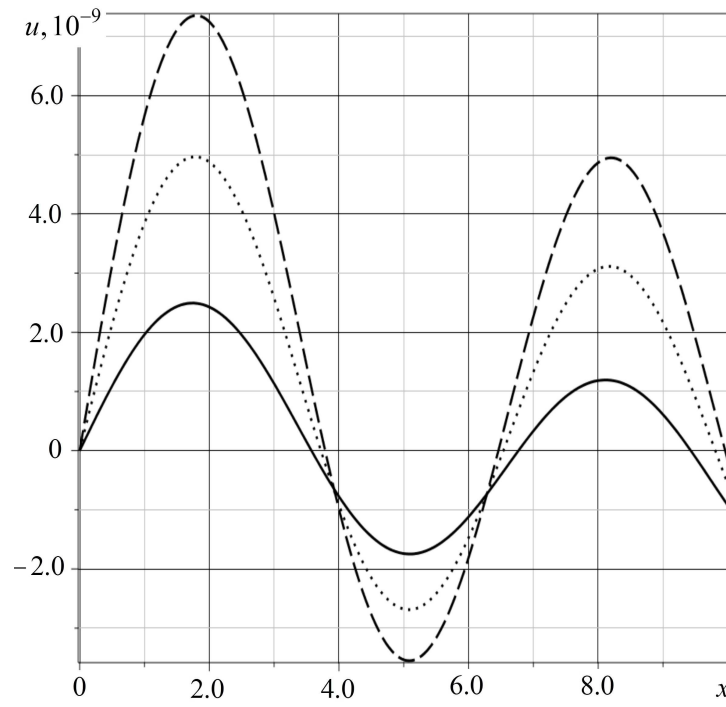


Рис. 2.6. зависимость $u(x, \tau)$ от x . Сплошная линия $\tau = 10^{11}$, пунктирная $\tau = 2 \cdot 10^{11}$, штриховая $\tau = 3 \cdot 10^{11}$.

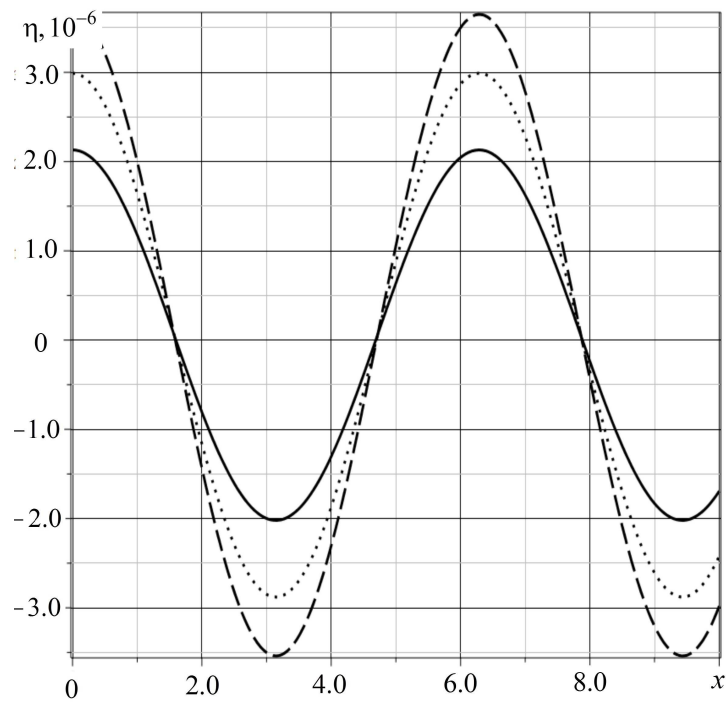


Рис. 2.7. зависимость $\eta(x, \tau)$ от x . Сплошная линия $\tau = 10^{11}$, пунктирная $\tau = 2 \cdot 10^{11}$, штриховая $\tau = 3 \cdot 10^{11}$.

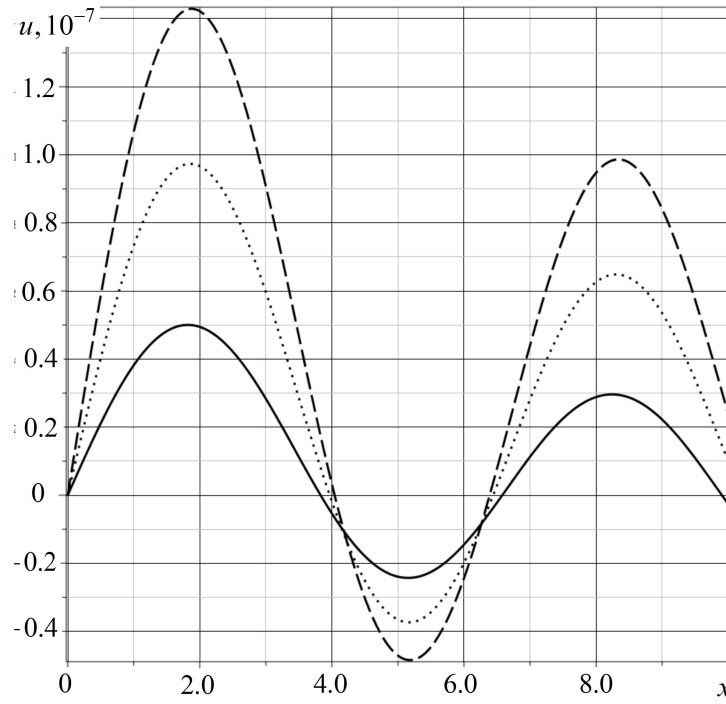


Рис. 2.8. зависимость $u(x, \tau)$ от x . Сплошная линия $\tau = 10^{12}$, пунктирная $\tau = 2 \cdot 10^{12}$, штриховая $\tau = 3 \cdot 10^{12}$.

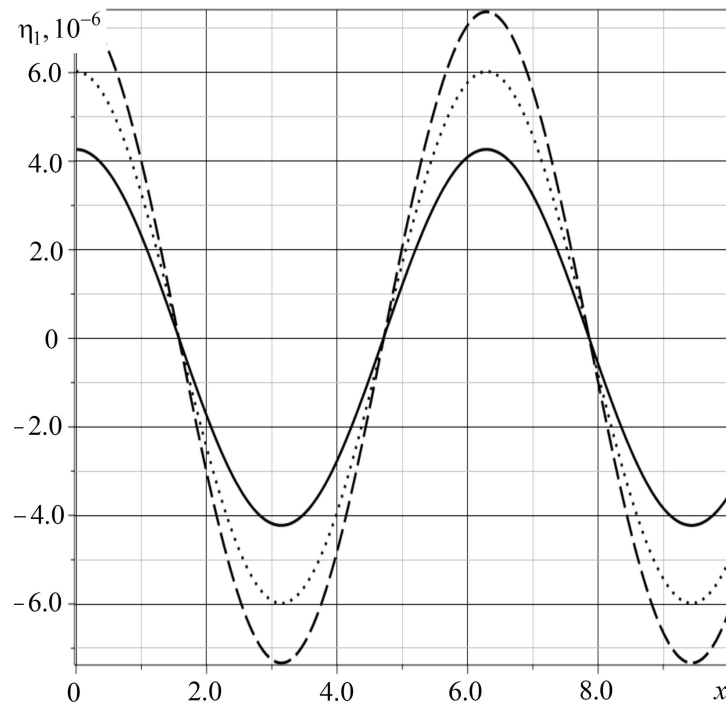


Рис. 2.9. зависимость $\eta_1(x, \tau)$ от x . Сплошная линия $\tau = 10^{11}$, пунктирная $\tau = 2 \cdot 10^{11}$, штриховая $\tau = 3 \cdot 10^{11}$.

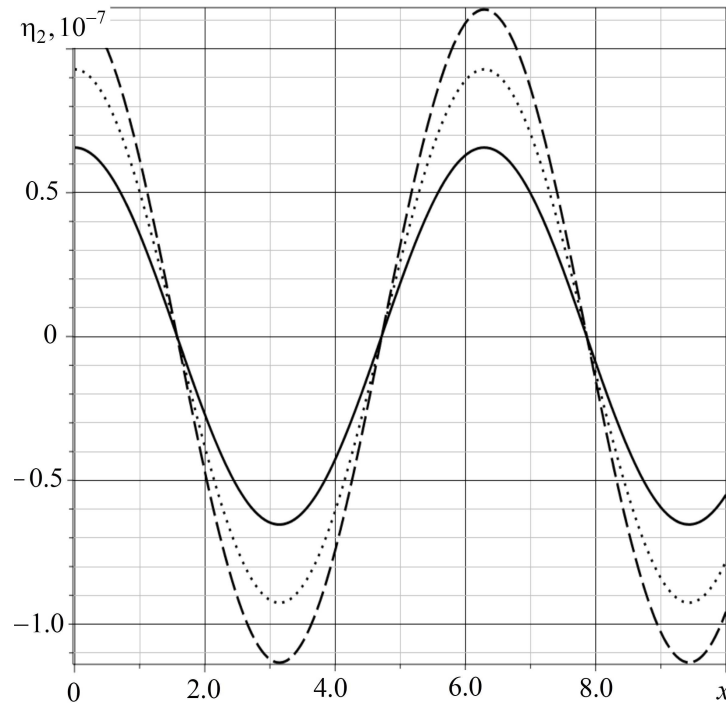


Рис. 2.10. зависимость $\eta_2(x, \tau)$ от x . Сплошная линия $\tau = 10^{14}$, пунктирная $\tau = 2 \cdot 10^{14}$, штриховая $\tau = 3 \cdot 10^{14}$.

нос всех остальных компонент материала и механические перемещения частиц среды.

Поверхностные динамические возмущения в слое. Полагаем, что поверхностные возмущения в однокомпонентном ($N = 1$) слое заданы граничными условиями (1.46) со следующими параметрами:

$$f_{11}(\tau) = f_{12}(\tau) = H(\tau), \quad f_{21}(\tau) = f_{22}(\tau) = 0.$$

Свертки функций Грина в (2.99) с правыми частями заданных граничных условий будут иметь вид

$$\begin{aligned}
u &= \int_0^\tau [G_{11}(x, \tau - t) - G_{11}(1 - x, \tau - t)] H(t) dt = -\frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^2}{2} + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{11}^{(1)} I_1(\gamma, \beta, \tau) - A_{11}^{(2)} I_2(\gamma, \beta, \tau) \right] (\cos \lambda_n x - \cos \lambda_n (1 - x)) + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} B_{11}^{(1)} I_3(s_3, \tau) (\cos \lambda_n x - \cos \lambda_n (1 - x)) = \\
&= 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left[A_{11}^{(1)} I_1(\gamma, \beta, \tau) - A_{11}^{(2)} I_2(\gamma, \beta, \tau) \right] \sin \lambda_{2n-1} \left(\frac{1}{2} - x \right) + \\
&\quad + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} B_{11}^{(1)} I_3(s_3, \tau) \sin \lambda_{2n-1} \left(\frac{1}{2} - x \right), \\
\eta &= \int_0^\tau [G_{21}(x, \tau - t) + G_{21}(1 - x, \tau - t)] H(t) dt = \\
&= -\frac{2\Lambda}{D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-D\lambda_n^2 \tau}}{\lambda_n} (\sin \lambda_n x + \sin \lambda_n (1 - x)) + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{21}^{(1)} I_1(\gamma, \beta, \tau) - A_{21}^{(2)} I_2(\gamma, \beta, \tau) \right] (\sin \lambda_n x + \sin \lambda_n (1 - x)) + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_{21}^{(1)} I_3(s_3, \tau) + B_{21}^{(2)} I_3(-D\lambda_n^2, \tau) \right] (\sin \lambda_n x + \sin \lambda_n (1 - x)) = \\
&= -\frac{4\Lambda}{D} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1 - e^{-D\lambda_{2n-1}^2 \tau}}{\lambda_{2n-1}} \cos \lambda_{2n-1} \left(\frac{1}{2} - x \right) + \\
&\quad + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left[A_{21}^{(1)} I_1(\gamma, \beta, \tau) - A_{21}^{(2)} I_2(\gamma, \beta, \tau) \right] \cos \lambda_{2n-1} \left(\frac{1}{2} - x \right) + \\
&\quad + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left[B_{21}^{(1)} I_3(s_3, \tau) + B_{21}^{(2)} I_3(-D\lambda_{2n-1}^2, \tau) \right] \cos \lambda_{2n-1} \left(\frac{1}{2} - x \right),
\end{aligned} \tag{2.105}$$

где коэффициенты $A_{km}^{(l)} = A_{km}^{(l)}(\lambda_{2n-1})$ и $B_{km}^{(p)} = B_{km}^{(p)}(\lambda_{2n-1})$ определяются по формулам (2.66), $\lambda_{2n-1} = \pi(2n-1)$. Интегралы I_r – по формулам (2.101).

На рис. 2.11 – 2.13 приведены примеры расчетов для однокомпонентного слоя из алюминия (2.99) при количестве членов ряда Фурье $N_\lambda = 10^4$.

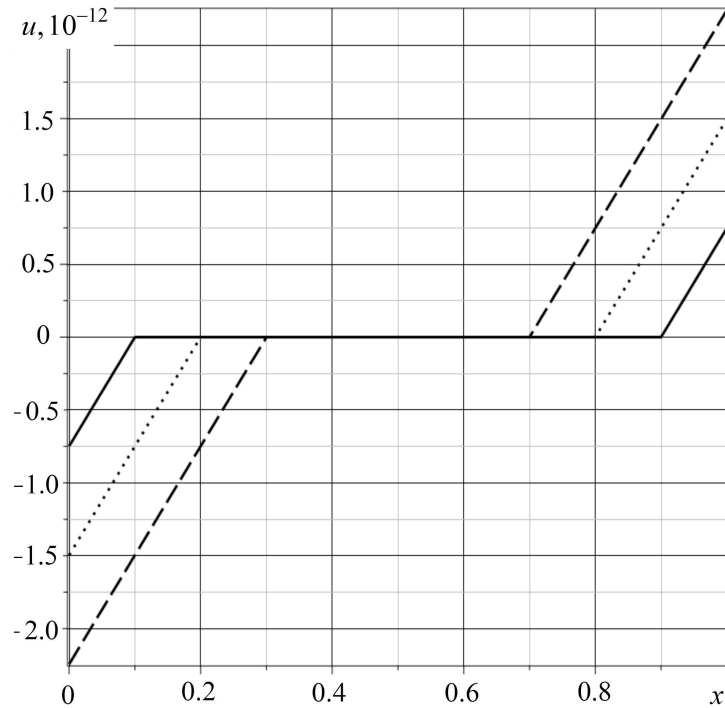


Рис. 2.11. зависимость $u(x, \tau)$ от координаты x . Сплошная линия $\tau = 10^{-1}$, пунктирная $\tau = 2 \cdot 10^{-1}$, штриховая $\tau = 3 \cdot 10^{-1}$.

На рис. 2.14 представлены результаты сравнения полученного здесь решения с решением чисто упругой задачи.

Объемные возмущения в слое. В качестве примера, рассмотрим задачу для однокомпонентного слоя ($N = 1$) с однородными граничными условиями (1.45). Для массовых сил в уравнениях (1.31) полагаем:

$$F_1(x, \tau) = f_1(x) H(\tau), \quad F_2(x, \tau) = 0, \quad f_1(x) = 1 - x.$$

После вычисления сверток (2.93), получаем:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{11}^{(1)} I_1(\gamma, \beta, \tau) - A_{11}^{(2)} I_2(\gamma, \beta, \tau) + B_{11}^{(1)} I_3(s_3, \tau) \right] f_1^s \sin \lambda_n x,$$

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{21}^{(1)} I_1(\gamma, \beta, \tau) - A_{21}^{(2)} I_2(\gamma, \beta, \tau) + B_{21}^{(1)} I_3(s_3, \tau) \right] f_1^s \cos \lambda_n x,$$

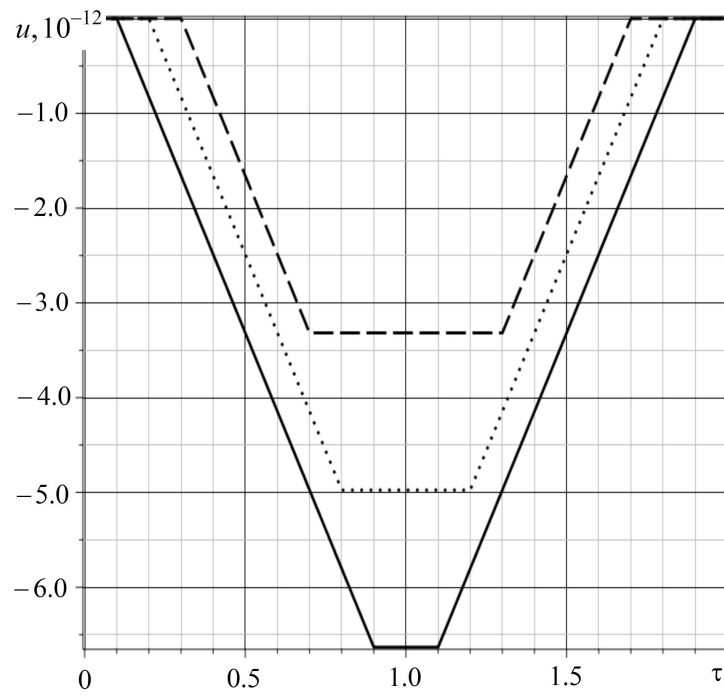


Рис. 2.12. зависимость $u(x, \tau)$ от координаты τ . Сплошная линия $x = 10^{-1}$, пунктирная $x = 2 \cdot 10^{-1}$, штриховая $x = 3 \cdot 10^{-1}$.

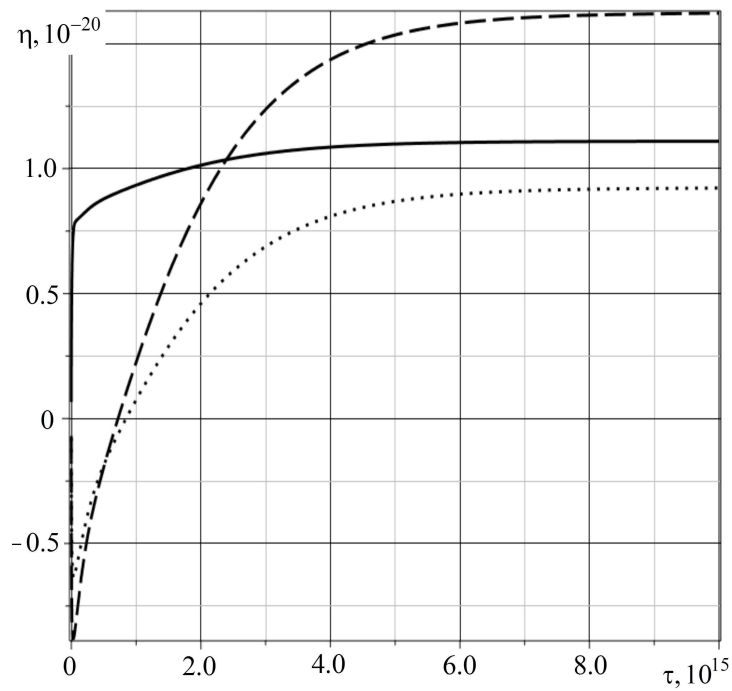


Рис. 2.13. зависимость $\eta(x, \tau)$ от τ . Сплошная линия $x = 0.1$, пунктирная $x = 0.5$, штриховая $x = 0.9$.

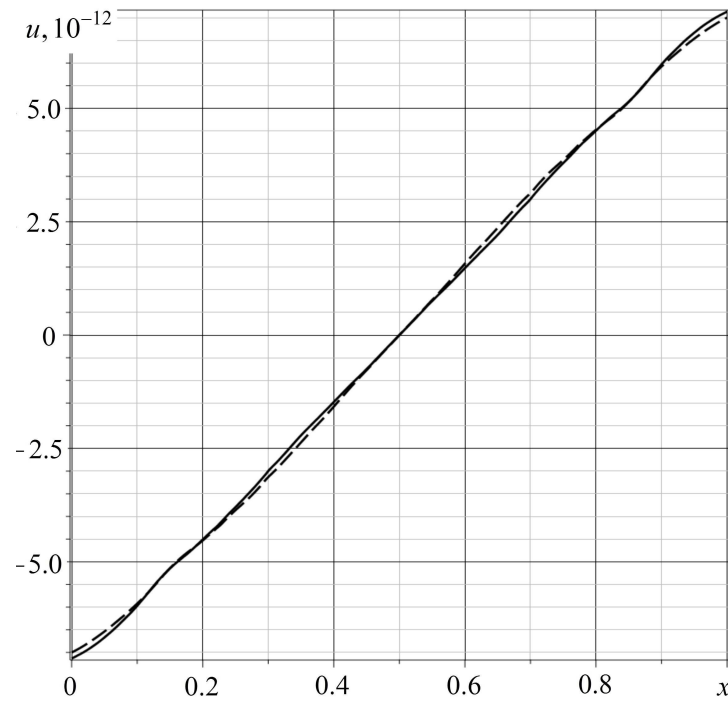


Рис. 2.14. зависимость $u(x, \tau)$ от координаты x при $\tau = 10^{11}$. Сплошная линия – решение задачи (1.31), (1.46), пунктирная – решение чисто упругой задачи.

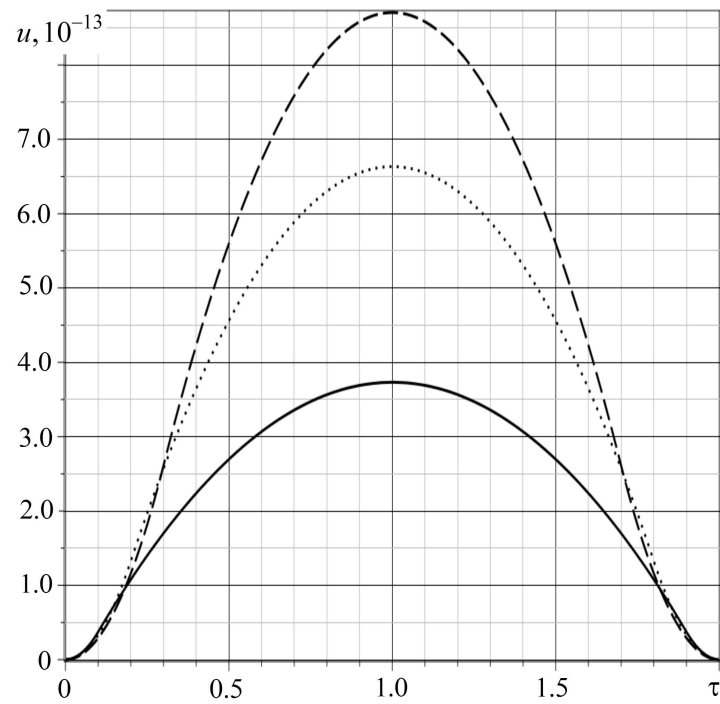


Рис. 2.15. зависимость $u(x, \tau)$ от времени. Сплошная линия $x = 0.1$, пунктирная $x = 0.2$, штриховая $x = 0.3$.

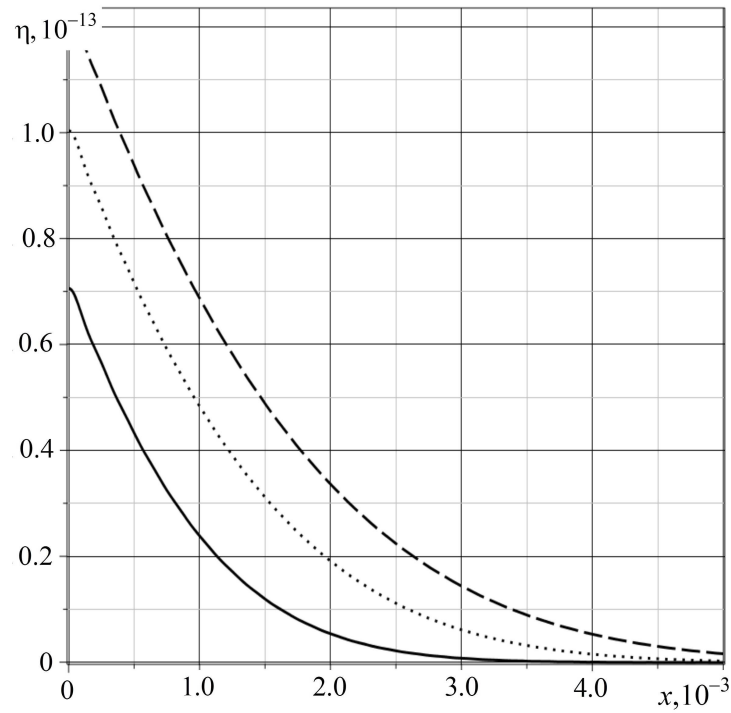


Рис. 2.16. зависимость $\eta(x, \tau)$ от x . Сплошная линия $\tau = 10^{11}$, пунктирная $\tau = 2 \cdot 10^{11}$, штриховая $\tau = 2 \cdot 10^{11}$.

$$f_1^s(\lambda_n) = 2 \int_0^1 f_1(x) \sin \lambda_n x dx = \frac{2}{\lambda_n}, \quad (n \geq 1).$$

Интегралы I_k , ($k = \overline{1, 3}$) определяются по формулам (2.101), коэффициенты $A_{kt}^{(l)}$ находятся по формулам (2.86). Результаты расчётов для алюминия (2.99) представлены на рис. 2.15, 2.16.

Глава 3

Двумерные задачи упругой диффузии со специальными граничными условиями

3.1. Интегральное представление решений двумерных задач упругой диффузии

Постановка двумерных задач механодиффузии дана в пунктах 1.4 и 1.5. Для их решения предполагается использование разложений искомых полей в тригонометрические ряды Фурье. При этом также возникают ограничения на классы граничных условий. В аналогичных задачах для полуограниченных сред вместо рядов используются синус-, косинус-преобразования с теми же ограничениями на классы допустимых граничных условий.

Из дальнейшего изложения будет видно, что в двумерных задачах должны быть ограничения на классы анизотропии среды. В одномерных задачах подобных вопросов не возникало, так как в постановке задачи используется только одна упругая постоянная, один коэффициент самодиффузии и один коэффициент объемного расширения из-за диффузии. Таким образом, среда могла по умолчанию рассматриваться как изотропная. Для двумерных задач имеет место следующее утверждение.

Утверждение. Необходимым условием для представления решений двумерной задачи механодиффузии в виде неполных рядов Фурье (синус-, косинус-преобразования Фурье) является выполнение соотношений (1.32), т.е. рассматриваемая среда должна быть ортотропной.

Доказательство. В самом деле, необходимым условием двумерности задачи упругости является наличие симметрии среды относи-

тельно какой-либо координатной плоскости [63]. Следовательно, это условие будет необходимым условием двумерности и для задачи механо диффузии. В случае, если $\mathbf{u} = \{u_1(x_1, x_2, \tau), u_0(x_1, x_2, \tau), 0\}$ среда должна иметь симметрию относительно плоскости Ox_1x_2 . Это накладывает соответствующие ограничения на компоненты тензоров, характеризующих физические характеристики среды [63, 253], а именно, в (1.30) следует положить:

$$\begin{aligned} C_{3111} = C_{3112} = C_{3122} = C_{3211} = C_{3212} = C_{3222} = C_{3331} = C_{3332} = 0, \\ D_{13}^{(q)} = D_{23}^{(q)} = 0, \quad \alpha_{13}^{(q)} = \alpha_{23}^{(q)} = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Тогда уравнение (1.30) запишется так (третье уравнение движения обращается в тождество и поэтому здесь не выписывается)

$$\begin{aligned} & C_{1111} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + C_{1212} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + (C_{1122} + C_{1221}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \sum_{j=1}^N \alpha_{11}^{(j)} \frac{\partial \eta^{(j)}}{\partial x_1} + \\ & + C_{1112} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + C_{1222} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} - \sum_{j=1}^N \alpha_{12}^{(j)} \frac{\partial \eta^{(j)}}{\partial x_2} = \ddot{u}_1, \\ & (C_{2211} + C_{2112}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_1} + C_{2121} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + C_{2222} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} - \sum_{j=1}^N \alpha_{22}^{(j)} \frac{\partial \eta^{(j)}}{\partial x_2} + \\ & + C_{2221} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + C_{2111} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \sum_{j=1}^N \alpha_{21}^{(j)} \frac{\partial \eta^{(j)}}{\partial x_1} = \ddot{u}_2, \\ & - \Lambda_{1111}^{(q)} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3} - \Lambda_{2211}^{(q)} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_2^2 \partial x_1} - \Lambda_{1122}^{(q)} \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \Lambda_{2222}^{(q)} \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_2^3} + \\ & + D_{11}^{(q)} \frac{\partial^2 \eta^{(q)}}{\partial x_1^2} + D_{22}^{(q)} \frac{\partial^2 \eta^{(q)}}{\partial x_2^2} - \Lambda_{2212}^{(q)} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_2^3} - \Lambda_{1121}^{(q)} \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^3} - \\ & - \left(\Lambda_{1112}^{(q)} + \Lambda_{1211}^{(q)} + \Lambda_{2111}^{(q)} \right) \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^2 \partial x_2} - \left(\Lambda_{2221}^{(q)} + \Lambda_{1222}^{(q)} + \Lambda_{2122}^{(q)} \right) \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \\ & + D_{12}^{(q)} \frac{\partial^2 \eta^{(q)}}{\partial x_1 \partial x_2} = \dot{\eta}^{(q)}, \quad (q = \overline{1, N}). \end{aligned}$$

Здесь, например, первое уравнение содержит одновременно и четные и нечетные производные от функции u_1 по переменной x_2 . Это означает, что

если искать функцию u_1 в виде неполного ряда Фурье (как в главе 2), то часть слагаемых в этом уравнении будет пропорциональна $\cos \lambda_n x_2$, а часть – $\sin \lambda_n x_2$. То же самое справедливо и в отношении остальных функций и остальных уравнений в этой системе. Это обстоятельство не позволяет использовать для построения решения неполные тригонометрические ряды Фурье (синус-, косинус-преобразование Фурье). Исходя из этого, на симметрию среды необходимо наложить дополнительные условия:

- либо

$$\begin{aligned} C_{1111} = C_{2222} = C_{1122} = C_{1212} = 0, \\ \alpha_{11}^{(q)} = \alpha_{22}^{(q)} = 0, D_{11}^{(q)} = D_{22}^{(q)} = 0; \end{aligned} \quad (3.2)$$

- либо

$$C_{2221} = C_{2111} = 0, \alpha_{12}^{(q)} = 0, D_{12}^{(q)} = 0. \quad (3.3)$$

В первом случае не выполняется условие положительной определенности квадратичной формы

$$C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}, \quad (3.4)$$

которая выражает удвоенную потенциальную энергию упругой деформации анизотропного тела. В самом деле, матрица упругих постоянных в рассматриваемом двумерном случае с учетом (3.2) будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & C_{1112} \\ 0 & 0 & C_{2221} \\ C_{1112} & C_{2221} & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что минор, полученный вычеркиванием первой строки и первого столбца отрицателен

$$\begin{vmatrix} 0 & C_{2221} \\ C_{2221} & 0 \end{vmatrix} = -(C_{2221})^2 < 0.$$

Во втором случае матрица упругих постоянных будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & 0 \\ 0 & & C_{1212} \end{pmatrix},$$

и условие положительной определенности квадратичной формы (3.4) выполняется при известных соотношениях, получаемых с помощью критерия Сильвестра

$$C_{1111}C_{2222} - (C_{1122})^2 > 0, \quad C_{\alpha\beta\alpha\beta}, C_{\alpha\alpha\beta\beta} > 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2).$$

Также можно дополнительно положить

$$C_{2313} = C_{2133} = 0, \tag{3.5}$$

так как эти компоненты тензора упругих постоянных не входят в двумерную постановку задачи.

Отметим, что соотношения (3.1), (3.3) и (3.5) в совокупности эквивалентны условиям (1.32). ■

Указанными свойствами обладает ортотропная среда, что объясняет её выбор при постановке двумерных задач упругой диффузии в прямоугольной декартовой системе координат, соответствующей уравнениям (1.34). Двумерными аналогами граничных условий (1.45) здесь являются условия (1.48). Решение этой задачи представляем в виде рядов

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_1(x_1, x_2, \tau) \\ \eta_q(x_1, x_2, \tau) \end{Bmatrix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} u_1^c(x_1, \lambda_n, \tau) \\ \eta_q^c(x_1, \lambda_n, \tau) \end{Bmatrix} \cos \lambda_n x_2, \\ u_2(x_1, x_2, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_2^s(x_1, \lambda_n, \tau) \sin \lambda_n x_2 \quad (\lambda_n = \pi n). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Аналогами граничных условий (1.46) здесь будут условия (1.49). Тогда

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} u_1(x_1, x_2, \tau) \\ \eta_q(x_1, x_2, \tau) \end{array} \right\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} u_1^s(x_1, \lambda_n, \tau) \\ \eta_q^s(x_1, \lambda_n, \tau) \end{array} \right\} \sin \lambda_n x_2, \\ u_2(x_1, x_2, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_2^c(x_1, \lambda_n, \tau) \cos \lambda_n x_2 \quad (\lambda_n = \pi n). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Наконец, граничным условиям (1.47) будут соответствовать условия (1.50). Решения соответствующей краевой задачи будем представлять в виде (3.6) с той однако разницей, что $\lambda_n = \pi(2n - 1)/2$, $n = 1, 2, \dots$

Для решения задач (1.34) с нулевыми начальными условиями и граничными условиями (1.48), (1.49) или (1.50) также будем использовать интегральные представления искомых функций в виде свёрток функций Грина с правыми частями граничных условий (звездочки обозначают свертки по времени τ и координате x_1):

$$u_i = \sum_{k=1}^{N+2} \sum_{l=1}^2 G_{ikl} * * f_{kl}, \quad \eta_q = \sum_{k=1}^{N+2} \sum_{l=1}^2 G_{q+2,kl} * * f_{kl}, \quad q = \overline{1, N}, \quad (3.8)$$

$$f * * g = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{\tau} f(x_1 - \xi, \tau - t) g(\xi, t) dt.$$

Здесь G_{mkl} ($m, k = \overline{1, N+2}$, $l = 1, 2$) - поверхностные функции Грина, которые определяются как решения задач, включающих в себя уравнения (1.34), нулевые начальные условия и следующие граничные условия:

- для краевой задачи (1.34), (1.48)

$$\begin{aligned} \left. \left(\frac{\partial G_{1kl}}{\partial x_2} + \frac{\partial G_{2kl}}{\partial x_1} \right) \right|_{x_2=0} &= \delta_{k1} \delta_{l1} \delta(x_1) \delta(\tau), \\ \left. \left(\frac{\partial G_{1kl}}{\partial x_2} + \frac{\partial G_{2kl}}{\partial x_1} \right) \right|_{x_2=1} &= \delta_{k1} \delta_{l2} \delta(x_1) \delta(\tau), \\ G_{2kl}|_{x_2=0} &= \delta_{k2} \delta_{l1} \delta(x_1) \delta(\tau), \quad G_{2kl}|_{x_2=1} = \delta_{k2} \delta_{l2} \delta(x_1) \delta(\tau), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\Lambda_{21}^q \frac{\partial^2 G_{1kl}}{\partial x_1 \partial x_2} + \Lambda_{22}^q \frac{\partial^2 G_{2kl}}{\partial x_2^2} - D_2^q \frac{\partial G_{q+2,kl}}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_2=0} &= \delta_{k,q+2} \delta_{l1} \delta(x_1) \delta(\tau), \\ \left(\Lambda_{21}^q \frac{\partial^2 G_{1kl}}{\partial x_1 \partial x_2} + \Lambda_{22}^q \frac{\partial^2 G_{2kl}}{\partial x_2^2} - D_2^q \frac{\partial G_{q+2,kl}}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_2=1} &= \delta_{k,q+2} \delta_{l2} \delta(x_1) \delta(\tau); \end{aligned} \quad (3.9)$$

- для краевой задачи (1.34), (1.49)

$$\begin{aligned} G_{1kl}|_{x_2=0} &= \delta_{k1} \delta_{l1} \delta(x_1) \delta(\tau), \quad G_{q+2,kl}|_{x_2=0} = \delta_{k,q+2} \delta_{l1} \delta(x_1) \delta(\tau), \\ \left(C_0 \frac{\partial G_{1kl}}{\partial x_1} + C_{22} \frac{\partial G_{2kl}}{\partial x_2} - \sum_{j=1}^N \alpha_2^j G_{j+2,kl} \right) \Big|_{x_2=0} &= \delta_{k2} \delta_{l1} \delta(x_1) \delta(\tau), \\ G_{1kl}|_{x_2=1} &= \delta_{k1} \delta_{l2} \delta(x_1) \delta(\tau), \quad G_{q+2,kl}|_{x_2=1} = \delta_{k,q+2} \delta_{l2} \delta(x_1) \delta(\tau), \\ \left(C_0 \frac{\partial G_{1kl}}{\partial x_1} + C_{22} \frac{\partial G_{2kl}}{\partial x_2} - \sum_{j=1}^N \alpha_2^j G_{j+2,kl} \right) \Big|_{x_2=1} &= \delta_{k2} \delta_{l2} \delta(x_1) \delta(\tau); \end{aligned} \quad (3.10)$$

- для краевой задачи (1.34), (1.50)

$$\begin{aligned} G_{1kl}|_{x_2=0} &= \delta_{k1} \delta_{l1} \delta(x_1) \delta(\tau), \quad G_{q+2,kl}|_{x_2=0} = \delta_{k,q+2} \delta_{l1} \delta(x_1) \delta(\tau), \\ \left(C_0 \frac{\partial G_{1kl}}{\partial x_1} + C_{22} \frac{\partial G_{2kl}}{\partial x_2} - \sum_{j=1}^N \alpha_2^j G_{j+2,kl} \right) \Big|_{x_2=0} &= \delta_{k2} \delta_{l1} \delta(x_1) \delta(\tau), \\ \left(\frac{\partial G_{1kl}}{\partial x_2} + \frac{\partial G_{2kl}}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_2=1} &= \delta_{k1} \delta_{l2} \delta(x_1) \delta(\tau), \quad G_{2kl}|_{x_2=1} = \delta_{k2} \delta_{l2} \delta(x_1) \delta(\tau), \\ \left(\Lambda_{21}^q \frac{\partial^2 G_{1kl}}{\partial x_1 \partial x_2} + \Lambda_{22}^q \frac{\partial^2 G_{2kl}}{\partial x_2^2} - D_2^q \frac{\partial G_{q+2,kl}}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_2=1} &= \delta_{k,q+2} \delta_{l2} \delta(x_1) \delta(\tau). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Отметим, что из уравнений (1.34) и граничных условий (1.48) так же, как и в одномерном случае, с использованием замены пространственной переменной $y = 1 - x_2$ получаются следующие соотношения между функциями Грина:

$$\begin{aligned} G_{ik2}(x_1, x_2, \tau) &= (-1)^i G_{ik1}(x_1, 1 - x_2, \tau), \\ G_{q+2,k2}(x_1, x_2, \tau) &= -G_{q+2,k1}(x_1, 1 - x_2, \tau). \end{aligned}$$

Таким образом, для определения перемещения и приращения концентраций достаточно найти только функции G_{mk1} ($k, m = \overline{1, N+2}$). При этом, последний индекс в их записи можно опустить, полагая

$$G_{mk} = G_{mk1} \quad (k, m = \overline{1, N+2}). \quad (3.12)$$

Для определения этих функций как ядер представлений (3.8) достаточно ограничиться случаем $f_{k2} \equiv 0$. Таким образом, окончательно решение задачи (1.34), (1.48) записываем так:

$$\begin{aligned} u_i &= \sum_{k=1}^{N+2} \left[G_{ik}(x_1, x_2, \tau) ** f_{k1}(x_1, \tau) + (-1)^i G_{ik}(x_1, 1-x_2, \tau) ** f_{k2}(x_1, \tau) \right], \\ \eta_q &= \sum_{k=1}^{N+2} \left[G_{q+2,k}(x_1, x_2, \tau) ** f_{k1}(x_1, \tau) - G_{q+2,k}(x_1, 1-x_2, \tau) ** f_{k2}(x_1, \tau) \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Аналогичным образом представляем решение задачи (1.34), (1.49):

$$\begin{aligned} u_i &= \sum_{k=1}^{N+2} \left[G_{ik}(x_1, x_2, \tau) ** f_{k1}(x_1, \tau) - (-1)^i G_{ik}(x_1, 1-x_2, \tau) ** f_{k2}(x_1, \tau) \right], \\ \eta_q &= \sum_{k=1}^{N+2} \left[G_{q+2,k}(x_1, x_2, \tau) ** f_{k1}(x_1, \tau) + G_{q+2,k}(x_1, 1-x_2, \tau) ** f_{k2}(x_1, \tau) \right], \end{aligned} \quad (3.14)$$

где

$$\begin{aligned} G_{ik2}(x_1, x_2, \tau) &= -(-1)^i G_{ik1}(x_1, 1-x_2, \tau), \\ G_{q+2,k2}(x_1, x_2, \tau) &= G_{q+2,k1}(x_1, 1-x_2, \tau), \\ G_{mk} &= G_{mk1} \quad (i = 1, 2; k, m = \overline{1, N+2}). \end{aligned}$$

Для полуплоскости аналог соотношений (3.8) имеет вид:

$$\begin{aligned} u_i &= \sum_{k=1}^{N+2} G_{ik}(x_1, x_2, \tau) ** f_k(x_1, \tau), \\ \eta_q &= \sum_{k=1}^{N+2} G_{q+2,k}(x_1, x_2, \tau) ** f_k(x_1, \tau). \end{aligned} \quad (3.15)$$

При этом граничное условие при $x_2 = 1$ заменяется условием ограниченности функций Грина на полуоси $x_2 \in (0, +\infty)$, а вместо разложений в ряды

используются соответствующие синус-, косину-преобразования Фурье, которые будем записывать так (λ – параметр преобразования, верхний индекс S означает синус-трансформанту, C – косинус-трансформанту):

- для краевой задачи (1.34), (1.48)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1(x_1, x_2, \tau) \\ \eta_q(x_1, x_2, \tau) \end{pmatrix} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \begin{pmatrix} u_1^C(x_1, \lambda, \tau) \\ \eta_q^C(x_1, \lambda, \tau) \end{pmatrix} \cos \lambda x_2 d\lambda, \\ u_2(x_1, x_2, \tau) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} u_2^S(x_1, \lambda, \tau) \sin \lambda x_2 d\lambda, \end{aligned} \quad (3.16)$$

- для краевой задачи (1.34), (1.49)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1(x_1, x_2, \tau) \\ \eta_q(x_1, x_2, \tau) \end{pmatrix} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \begin{pmatrix} u_1^S(x_1, \lambda, \tau) \\ \eta_{qn}^S(x_1, \lambda, \tau) \end{pmatrix} \sin \lambda x_2 d\lambda, \\ u_2(x_1, x_2, \tau) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} u_2^C(x_1, \lambda, \tau) \cos \lambda x_2 d\lambda. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Задачи для плоскости рассматриваются без граничных условий. При этом искомые функции должны быть ограничены в \mathfrak{R}^2 . Решение ищется с помощью двойного преобразования Фурье по координатам x_1, x_2 и преобразования Лапласа по времени.

Переход к многомерным моделям расширяет набор канонических областей, на которых можно рассматривать постановки соответствующих начально-краевых задач. Так в двумерном случае, помимо указанных здесь областей плоскость, полуплоскость и полоса, можно рассматривать следующие множества:

- прямоугольник $x_1 \in [0, l], x_2 \in [0, 1]$. Это множество можно рассматривать как пересечение полос $x_1 \in [0, l], x_2 \in \mathfrak{R}$ и $x_2 \in [0, 1], x_1 \in \mathfrak{R}$,

- квадрант $x_1 \in [0, \infty), x_2 \in [0, \infty)$, который является пересечением полуплоскостей $x_1 \in [0, \infty), x_2 \in \mathfrak{R}$ и $x_2 \in [0, \infty), x_1 \in \mathfrak{R}$,

- полуполоса $x_1 \in [0, \infty)$, $x_2 \in [0, 1]$. Образована пересечением полуплоскости $x_1 \in [0, \infty)$, $x_2 \in \mathfrak{R}$ и полосы $x_2 \in [0, 1]$, $x_1 \in \mathfrak{R}$.

Соответствующие граничные условия образуются путем комбинации условий для полос и полуплоскостей. При этом, решения данных задач также строятся путем комбинации решений (3.13), (3.14), (3.16) и (3.17). Например, в задаче для прямоугольника с граничными условиями

$$\begin{aligned}\sigma_{12}|_{x_2=0} &= f_{111}(x_1, \tau), \quad u_2|_{x_2=0} = f_{121}(x_1, \tau), \quad J_2^q|_{x_2=0} = f_{1,q+2,1}(x_1, \tau), \\ \sigma_{12}|_{x_2=1} &= f_{112}(x_1, \tau), \quad u_2|_{x_2=1} = f_{122}(x_1, \tau), \quad J_2^q|_{x_2=1} = f_{1,q+2,2}(x_1, \tau), \\ \sigma_{12}|_{x_1=0} &= f_{211}(x_1, \tau), \quad u_1|_{x_1=0} = f_{221}(x_1, \tau), \quad J_1^q|_{x_1=0} = f_{2,q+2,1}(x_1, \tau), \\ \sigma_{12}|_{x_1=a} &= f_{212}(x_1, \tau), \quad u_1|_{x_1=a} = f_{222}(x_1, \tau), \quad J_1^q|_{x_1=a} = f_{2,q+2,2}(x_1, \tau),\end{aligned}$$

решение запишется так

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} u_1(x_1, x_2, \tau) \\ \eta_q(x_1, x_2, \tau) \end{pmatrix} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} u_1^{cc}(\omega_k, \lambda_n, \tau) \\ \eta_q^{cc}(\omega_k, \lambda_n, \tau) \end{pmatrix} \cos \omega_k x_1 \cos \lambda_n x_2, \\ u_2(x_1, x_2, \tau) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_2^{ss}(\omega_k, \lambda_n, \tau) \sin \omega_k x_1 \sin \lambda_n x_2, \\ \omega_k &= \frac{\pi k}{a}, \quad \lambda_n = \pi n.\end{aligned}$$

В данной работе будут рассматриваться задачи для полосы, полуплоскости и плоскости с граничными условиями (1.48) и (1.49).

3.2. Механодиффузия ортотропной среды. Случай касательных нагрузок

Ортотропный слой. Рассмотрим здесь двумерную задачу для N - компонентного ортотропного слоя. Система уравнений, описывающая физико-механические процессы, имеет вид (1.34). Будем также считать, что поверхностные возмущения заданы условиями (1.48). Начальные условия полагаем нулевыми.

Для нахождения функций Грина применяем к задаче (1.34), (1.48) преобразование Лапласа по времени τ и Фурье по пространственной переменной x_1 (соответственно s и ω - их параметры; индексы « L » и « F » обозначают трансформанты, штрих означает производную по переменной x_2)

$$\begin{aligned} \kappa_1(\omega, s) u_1^{FL} - C_{12} u_1''^{FL} - i\omega C_{21} u_2'^{FL} + i\omega \sum_{j=1}^N \alpha_1^j \eta_j^{FL} &= 0, \\ -i\omega C_{21} u_1'^{FL} + \kappa_2(\omega, s) u_2^{FL} - C_{22} u_2''^{FL} + \sum_{j=1}^N \alpha_2^j \eta_j'^{FL} &= 0, \\ -i\omega^3 \Lambda_{11}^q u_1^{FL} + i\omega \Lambda_{21}^q u_1''^{FL} - \omega^2 \Lambda_{12}^q u_2'^{FL} + \Lambda_{22}^q u_2'''^{FL} + \\ + \kappa_{q+2}(\omega, s) \eta_q^{FL} - D_2^q \eta_q''^{FL} &= 0; \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \left(u_1'^{FL} + i\omega u_2^{FL} \right) \Big|_{x_2=0} &= f_{11}^{FL}(\omega, s), \quad u_2^{FL} \Big|_{x_2=0} = f_{21}^{FL}(\omega, s), \\ \left(i\omega \Lambda_{21}^q u_1'^{FL} + \Lambda_{22}^q u_2''^{FL} - D_2^q \eta_q'^{FL} \right) \Big|_{x_2=0} &= f_{q+2,1}^{FL}(\omega, s), \\ \left(u_1'^{FL} + i\omega u_2^{FL} \right) \Big|_{x_2=1} &= 0, \quad u_2^{FL} \Big|_{x_2=1} = 0, \\ \left(i\omega \Lambda_{21}^q u_1'^{FL} + \Lambda_{22}^q u_2''^{FL} - D_2^q \eta_q'^{FL} \right) \Big|_{x_2=1} &= 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

где

$$\kappa_\alpha(x, y) = C_{1\alpha} x^2 + y^2, \quad \kappa_{q+2}(x, y) = D_1^q x^2 + y. \quad (3.20)$$

Представляем решение задачи (3.18), (3.19) в виде двух слагаемых ($i =$

1, 2, $q = \overline{1, N}$):

$$\begin{aligned} u_i^{FL}(\omega, x_2, s) &= U_i(\omega, x_2, s) + \varphi_i(\omega, x_2, s), \\ \eta_q^{FL}(\omega, x_2, s) &= H_q(\omega, x_2, s) + \psi_q(\omega, x_2, s), \end{aligned} \quad (3.21)$$

где функции φ_i и ψ_q выбираем так, чтобы правые части граничных условий (3.19) были нулевыми. Для этого полагаем:

$$\varphi_2(\omega, x_2, s) = \varphi_2^*(x_2) f_{21}^{FL}(\omega, s), \quad \varphi_2^*(x_2) = 1 - x_2. \quad (3.22)$$

Тогда для функций φ_1 и ψ_q из граничных условий (3.19) с учётом (3.22) получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} (\varphi_1' + i\omega f_{21}^{FL} \varphi_2^*)|_{x_2=0} &= f_{11}^{FL}, \quad (i\omega \gamma_q \varphi_1' - \psi_q')|_{x_2=0} = \frac{f_{q+2,1}^{FL}}{D_2^q}, \\ (\varphi_1' + i\omega f_{21}^{FL} \varphi_2^*)|_{x_2=1} &= 0, \quad (i\omega \gamma_q \varphi_1' - \psi_q')|_{x_2=1} = 0, \quad \gamma_q = \frac{\Lambda_{21}^q}{D_2^q}, \end{aligned}$$

которые записываем так:

$$\varphi_1' + i\omega f_{21}^{FL} \varphi_2^* = \varphi_2^* f_{11}^{FL}, \quad i\omega \gamma_q \varphi_1' - \psi_q' = \varphi_2^* \frac{f_{q+2,1}^{FL}}{D_2^q}.$$

Интегрируя их последовательно, получаем выражение для φ_1 и ψ_q :

$$\begin{aligned} \varphi_1(\omega, x_2, s) &= (f_{11}^{FL} - i\omega f_{21}^{FL}) \varphi_1^*(x_2), \quad \varphi_1^*(x_2) = x_2 \left(1 - \frac{x_2}{2}\right), \\ \psi_q(\omega, x_2, s) &= \left(i\omega \gamma_q f_{11}^{FL} + \omega^2 \gamma_q f_{21}^{FL} - \frac{f_{q+2,1}^{FL}}{D_2^q}\right) \varphi_1^*(x_2). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Подставляя теперь (3.21) в (3.18) и (3.19), с учетом соотношений (3.22) и (3.23) приходим к следующей краевой задаче:

$$\begin{aligned} \kappa_1(\omega, s)U_1 - C_{12}U_1'' - i\omega C_{21}U_2' + i\omega \sum_{j=1}^N \alpha_1^j H_j &= \Phi_1, \\ -i\omega C_{21}U_1' + \kappa_2(\omega, s)U_2 - C_{22}U_2'' + \sum_{j=1}^N \alpha_2^j H_j' &= \Phi_2, \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} -i\omega^3 \Lambda_{11}^q U_1 + i\omega \Lambda_{21}^q U_1'' - \omega^2 \Lambda_{12}^q U_2' + \Lambda_{22}^q U_2''' + \\ + \kappa_{q+2}(\omega, s)H_q - D_2^q H_q'' &= \Phi_{q+2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (U_1' + i\omega U_2)|_{x_2=0,1} = 0, \quad U_2|_{x_2=0,1} = 0, \\ \left(i\omega \frac{\Lambda_{21}^q}{D_2^q} U_1' + \frac{\Lambda_{22}^q}{D_2^q} U_2'' - H_q' \right) \Big|_{x_2=0,1} = 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi_1 = -C_{12}f_{11}^{FL} - i\omega C_0 f_{21}^{FL} + \varphi_1^* \sum_{k=1}^{N+2} B_{1k} f_{k1}^{FL}, \quad \Phi_2 = \varphi_2^* \sum_{k=1}^{N+2} B_{2k} f_{k1}^{FL}, \\ \Phi_{q+2} = \varphi_1^* (B_{q+2,1} f_{11}^{FL} + B_{q+2,2} f_{21}^{FL} + B_{q+2,q+2} f_{q+2,1}^{FL}) - \\ - \omega^2 \Lambda_{12}^q f_{21}^{FL} + f_{q+2,1}^{FL}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} B_{11} = \omega^2 \sum_{j=1}^N \alpha_1^j \gamma_j - \kappa_1, \quad B_{12} = -i\omega \left(\omega^2 \sum_{j=1}^N \alpha_1^j \gamma_j - \kappa_1 \right), \\ B_{21} = i\omega \left(C_{21} - \sum_{j=1}^N \alpha_2^j \gamma_j \right), \quad B_{22} = - \left(\kappa_2 + \omega^2 \sum_{j=1}^N \alpha_2^j \gamma_j - C_{21} \omega^2 \right), \\ B_{q+2,1} = i\omega (\omega^2 \Lambda_{11}^q - \kappa_{q+2} \gamma_q), \quad B_{q+2,2} = \omega^2 (\omega^2 \Lambda_{11}^q - \kappa_{q+2} \gamma_q), \\ B_{1,q+2} = i\omega \frac{\alpha_1^q}{D_2^q}, \quad B_{2,q+2} = \frac{\alpha_2^q}{D_2^q}, \quad B_{q+2,q+2} = \frac{\kappa_{q+2}}{D_2^q}. \end{aligned}$$

Решение системы уравнений (3.24) представляем в виде тригонометрических рядов удовлетворяющих граничным условиям (3.25). В таком же виде записываем правые части этих уравнений:

$$\begin{Bmatrix} U_2(\omega, x_2, s) \\ \Phi_2(\omega, x_2, s) \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_2^s(\omega, \lambda_n, s) \\ \Phi_2^s(\omega, \lambda_n, s) \end{Bmatrix} \sin \lambda_n x_2; \quad (3.27)$$

$$\begin{pmatrix} U_1(\omega, x_2, s) \\ H_q(\omega, x_2, s) \\ \Phi_1(\omega, x_2, s) \\ \Phi_{q+2}(\omega, x_2, s) \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} U_1^c(\omega, \lambda_n, s) \\ H_q^c(\omega, \lambda_n, s) \\ \Phi_1^c(\omega, \lambda_n, s) \\ \Phi_{q+2}^c(\omega, \lambda_n, s) \end{pmatrix} \cos \lambda_n x_2, \quad (3.28)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1^c(\omega, 0, s) &= -C_{12}f_{11}^{FL} - i\omega C_0 f_{21}^{FL} + \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{N+2} B_{1k} f_{k1}^{FL}, \\ \Phi_{q+2}^c(\omega, 0, s) &= -\omega^2 \Lambda_{12}^q f_{21}^{FL} + f_{q+2,1}^{FL} + \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{N+2} B_{q+2,k} f_{k1}^{FL}, \\ \Phi_1^c(\omega, \lambda_n, s) &= -2\lambda_n^{-2} \sum_{k=1}^{N+2} B_{1k} f_{k1}^{FL}, \quad \Phi_2^s(\omega, \lambda_n, s) = 2\lambda_n^{-1} \sum_{k=1}^{N+2} B_{2k} f_{k1}^{FL}, \\ \Phi_{q+2}^c(\omega, \lambda_n, s) &= -2\lambda_n^{-2} [B_{q+2,1} f_{11}^{FL} + B_{q+2,2} f_{21}^{FL} + B_{q+2,q+2} f_{q+2,1}^{FL}]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

В результате получаем следующие системы уравнений относительно коэффициентов рядов (3.28) и (3.27):

$$\begin{aligned} \kappa_1(\omega, s) U_1^c + i\omega \sum_{j=1}^N \alpha_1^j H_j^c &= \Phi_1^c(\omega, 0, s), \\ -i\omega^3 \Lambda_{11}^q U_1^c + \kappa_{q+2}(\omega, s) H_q^c &= \Phi_{q+2}^c(\omega, 0, s) \quad (n=0); \\ k_1(\omega, \lambda_n, s) U_1^c - i\omega \lambda_n C_{21} U_2^s + i\omega \sum_{j=1}^N \alpha_1^j H_j^c &= \Phi_1^c(\omega, \lambda_n, s), \\ i\omega \lambda_n C_{21} U_1^c + k_2(\omega, \lambda_n, s) U_2^s - \lambda_n \sum_{j=1}^N \alpha_2^j H_j^c &= \Phi_2^s(\omega, \lambda_n, s), \\ -i\omega K_q(\omega, \lambda_n) U_1^c - \lambda_n M_q(\omega, \lambda_n) U_2^s + \\ + k_{q+2}(\omega, \lambda_n, s) H_q^c &= \Phi_{q+2}^c(\omega, \lambda_n, s) \quad (n \geq 1), \end{aligned} \quad (3.31)$$

где

$$\begin{aligned} k_1(x, y, z) &= \kappa_1(x, z) + y^2 C_{12}, \quad k_2(x, y, z) = \kappa_2(x, z) + C_{22} y^2, \\ k_{q+2}(x, y, z) &= \kappa_{q+2}(x, z) + D_2^q y^2, \\ K_q(x, y) &= x^2 \Lambda_{11}^q + y^2 \Lambda_{21}^q, \quad M_q(x, y) = y^2 \Lambda_{22}^q + x^2 \Lambda_{12}^q. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Находим решение систем (3.30), (3.31) и, переходя по формулам (3.21) – (3.23) к искомым функциям, получаем в пространстве изображений следующий результат:

$$u_i^{FL} = \sum_{k=1}^{N+2} G_{ik}^{FL} f_{k1}^{FL}, \quad \eta_q^{FL} = \sum_{k=1}^{N+2} G_{q+2,k}^{FL} f_{k1}^{FL} \quad (i = 1, 2); \quad (3.33)$$

$$G_{lk}^{FL}(\omega, x_2, s) = G_{lk}^{FLc}(\omega, 0, s) + \sum_{n=1}^{\infty} G_{lk}^{FLc}(\omega, \lambda_n, s) \cos \lambda_n x_2 \quad (l \neq 2), \quad (3.34)$$

$$G_{2k}^{FL}(\omega, x_2, s) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{2k}^{FLs}(\omega, \lambda_n, s) \sin \lambda_n x_2 \quad (k = \overline{1, N+2});$$

$$G_{1k}^{FLc}(\omega, 0, s) = \frac{P_{1k0}(\omega, s)}{P_0(\omega, s)}, \quad G_{q+2,i}^{FLc}(\omega, 0, s) = \frac{P_{q+2,i0}(\omega, s)}{P_0(\omega, s)},$$

$$G_{q+2,q+2}^{FLc}(\omega, 0, s) = \tilde{G}_{q+2,q+2}^{FLc}(\omega, 0, s) + \frac{Q_{q+2,q+2,0}(\omega, s)}{Q_{q0}(\omega, s)}, \quad (3.35)$$

$$\tilde{G}_{q+2,q+2}^{FLc}(\omega, 0, s) = \frac{D_2^q}{\kappa_{q+2}(\omega, s)};$$

$$G_{1k}^{FLc}(\omega, \lambda_n, s) = \frac{P_{1k}(\omega, \lambda_n, s)}{P(\omega, \lambda_n, s)}, \quad G_{2k}^{FLs}(\omega, \lambda_n, s) = \frac{P_{2k}(\omega, \lambda_n, s)}{P(\omega, \lambda_n, s)},$$

$$G_{q+2,k}^{FLc}(\omega, \lambda_n, s) = \tilde{G}_{q+2,k}^{FLc}(\omega, \lambda_n, s) + \frac{Q_{q+2,k}(\omega, \lambda_n, s)}{Q_q(\omega, \lambda_n, s)}, \quad (3.36)$$

$$\tilde{G}_{q+2,k}^{FLc}(\omega, \lambda_n, s) = \frac{2\delta_{k,q+2}D_2^q}{k_{q+2}(\omega, \lambda_n, s)} \quad (n \geq 1).$$

Здесь числители и знаменатели определяются так:

$$P_0 = \kappa_1 \Pi_0 - \omega^4 \sum_{j=1}^N \alpha_1^j \Lambda_{11}^j \Pi_{0j}, \quad Q_{q0} = \kappa_{q+2} P_0,$$

$$P_{110} = -C_{12} \Pi_0, \quad P_{1,q+2,0} = -i\omega \sum_{j=1}^N \alpha_1^j \Pi_{0j}, \quad Q_{q+2,q+2,0} = \alpha_1^q \Lambda_{11}^q \omega^4 \Pi_{0q},$$

$$P_{120} = i\omega \left(-C_0 \Pi_0 + \omega^2 \sum_{j=1}^N \alpha_1^j \Lambda_{12}^j \Pi_{0j} \right), \quad P_{q+2,10} = -i\omega^3 \Lambda_{11}^q C_{12} \Pi_{0j},$$

$$P_{q+2,20} = \omega^2 (C_0 \Lambda_{11}^q \omega^2 - \Lambda_{12}^q \kappa_1) \Pi_{0q} - \omega^6 \sum_{j=1}^N \alpha_1^j \left(\Lambda_{11}^q \Lambda_{12}^j - \Lambda_{11}^j \Lambda_{12}^q \right) \Pi_{0jq}; \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned}
P &= (k_1 k_2 - \omega^2 \lambda_n^2 C_{21}^2) \Pi + \omega^2 \lambda_n^2 \sum_{i,j=1}^N S_3^{ij} K_i M_j \Pi_{ij} + \\
&+ \sum_{j=1}^N \left(\omega^2 K_j S_2^j + \lambda_n^2 M_j S_1^j \right) \Pi_j,
\end{aligned} \tag{3.38}$$

$$Q_q = k_{q+2} P \quad (n \geq 1);$$

$$P_{11} = 2C_{12} \left(\sum_{j=1}^N \alpha_2^j \lambda_n^2 M_j \Pi_j - k_2 \Pi \right), \quad P_{21} = 2i\omega \lambda_n C_{12} \left(C_{21} \Pi - \sum_{j=1}^N \alpha_2^j K_j \Pi_j \right),$$

$$\begin{aligned}
P_{12} &= 2i\omega (C_{22} C_{21} \lambda_n^2 - C_0 k_2) \Pi - 2i\omega \lambda_n^2 \sum_{i,j=1}^N S_3^{ij} M_i M_j \Pi_{ij} \\
&- 2i\omega \sum_{j=1}^N \left[\lambda_n^2 (C_{22} \alpha_1^j - C_0 \alpha_2^j) + S_2^j \right] M_j \Pi_j,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{22} &= 2\lambda_n (C_{22} k_1 - \omega^2 C_{21} C_0) \Pi + 2\omega^2 \lambda_n \sum_{i,j=1}^N S_3^{ij} K_i M_j \Pi_{ij} - \\
&- 2\lambda_n \sum_{j=1}^N \left[\omega^2 (\alpha_1^j C_{22} - \alpha_2^j C_0) K_j - S_1^j M_j \right] \Pi_j,
\end{aligned}$$

$$P_{1,q+2} = 2i\omega D_2^q \sum_{j=1}^N S_2^j \Pi_j + 2i\omega \lambda_n^2 D_2^q \sum_{j=1}^N S_3^{qj} M_j \Pi_{jq}, \tag{3.39}$$

$$P_{2,q+2} = -2\lambda_n D_2^q \sum_{j=1}^N S_1^j \Pi_j + 2\omega^2 \lambda_n D_2^q \sum_{j=1}^N S_3^{qj} K_j \Pi_{jq},$$

$$Q_{q+2,m} = i\omega K_q P_{1m} + \lambda_n M_q P_{2m} - 2\delta_{2m} M_q P,$$

где, величины $k_m = k_m(\omega, \lambda_n, s)$, $\kappa_m = \kappa_m(\omega, s)$, $m = \overline{1, N+2}$, $K_q = K_q(\omega, \lambda_n)$ и $M_q = M_q(\omega, \lambda_n)$, $q = \overline{1, N}$ находятся по формулам (3.20), (3.32). Остальные функции в (3.37) – (3.39) $S_1^j = S_1^j(\omega, \lambda_n, s)$, $S_2^j = S_2^j(\omega, \lambda_n, s)$, S_3^{ij} , $\Pi_0 = \Pi_0(\omega, s)$, $\Pi_{0j} = \Pi_{0j}(\omega, s)$, $\Pi_{0jq} = \Pi_{0jq}(\omega, s)$, $\Pi = \Pi(\omega, \lambda_n, s)$, $\Pi_j = \Pi_j(\omega, \lambda_n, s)$ и $\Pi_{jq} = \Pi_{jq}(\omega, \lambda_n, s)$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
S_1^j(x, y, z) &= \alpha_1^j C_{21} x^2 - \alpha_2^j k_1(x, y, z), \\
S_2^j(x, y, z) &= \alpha_2^j C_{21} y^2 - \alpha_1^j k_2(x, y, z), \quad S_3^{ij} = \alpha_1^i \alpha_2^j - \alpha_1^j \alpha_2^i,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_0 &= \prod_{j=1}^N \kappa_{j+2}, \quad \Pi_{0j} = \prod_{r=1, r \neq j}^N \kappa_{r+2}, \quad \Pi_{0jq} = \prod_{r=1, r \neq \{j, q\}}^N \kappa_{r+2}, \quad j \neq q, \\
\Pi &= \prod_{j=1}^N k_{j+2}, \quad \Pi_j = \prod_{r=1, r \neq j}^N k_{r+2}, \quad \Pi_{jq} = \prod_{r=1, r \neq \{j, q\}}^N k_{r+2}, \quad j \neq q.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

При этом полагаем, что при $N = 1$:

$$\Pi_{01} = 1, \quad \Pi_1 = 1,$$

а при $N = 2$ ($j, q = 1, 2$):

$$\Pi_{012} = \Pi_{021} = 1, \quad \Pi_{12} = \Pi_{21} = 1.$$

Обращая преобразование Лапласа, из (3.34) получаем следующий результат:

$$\begin{aligned}
G_{lm}^{Fc}(\omega, x_2, \tau) &= G_{lm}^{Fc}(\omega, 0, \tau) + \sum_{n=1}^{\infty} G_{lm}^{Fc}(\omega, \lambda_n, \tau) \cos \lambda_n x_2 \quad (l \neq 2), \\
G_{2m}^{Fs}(\omega, x_2, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{2m}^{Fs}(\omega, \lambda_n, \tau) \sin \lambda_n x_2.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Как и в случае одномерных задач, функции G_{1m}^{FLc} , G_{2m}^{FLs} и $G_{q+2,m}^{FLc}$ являются правильными рациональными дробями аргумента s . Поэтому, переход в пространство оригиналов по Лапласу также осуществляется с помощью вычетов. При этом достаточно найти оригиналы следующих функций присутствующих в (3.35), (3.36):

$$\frac{P_{ik0}(\omega, s)}{P_0(\omega, s)}, \quad \frac{Q_{q+2,k0}(\omega, s)}{Q_{q0}(\omega, s)}, \quad \frac{P_{ik}(\omega, \lambda_n, s)}{P(\omega, \lambda_n, s)}, \quad \frac{Q_{q+2,k}(\omega, \lambda_n, s)}{Q_q(\omega, \lambda_n, s)} \quad (i = 1, 2); \tag{3.42}$$

$$\tilde{G}_{q+2,q+2}^{FL}(\omega, 0, s) = \frac{D_2^q}{\kappa_{q+2}(\omega, s)}, \quad \tilde{G}_{q+2,q+2}^{FL}(\omega, \lambda_n, s) = \frac{2D_2^q}{k_{q+2}(\omega, \lambda_n, s)}. \tag{3.43}$$

Заметим здесь, что функции в (3.43) в соответствии с (3.34) – (3.36) нужно сразу рассматривать в виде комбинаций

$$\tilde{G}_{q+2,q+2}^{FLc}(\omega, 0, s) + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_{q+2,q+2}^{FLc}(\omega, \lambda_n, s) \cos \lambda_n x.$$

Для обращения дробей в (3.42) необходимо выяснить характер нулей многочленов P_0 и P . Имеет место следующее утверждение.

Утверждение. Пусть выполнено условие (2.13). Тогда:

1) многочлен P_0 имеет два комплексно сопряженных нуля с отрицательной действительной частью и N простых отрицательных действительных нуля,

2) многочлен P имеет две пары комплексно сопряженных нулей с отрицательными действительными частями и N простых отрицательных действительных нуля. Причем в случае изотропной среды одна пара комплексных корней чисто мнимая [98, 253].

Доказательство того, что нули многочленов P_0 и P лежат в левой части комплексной полуплоскости комплексного параметра s проведем для однокомпонентной среды ($N = 1$, верхний индекс в записи физических характеристиках среды, обозначающий номер компоненты вещества, для краткости изложения будет опускаться).

Воспользуемся критерием Рауса-Гурвица в формулировке Лъенара-Шипара [50]. Здесь достаточно проверить положительность следующих определителей Гурвица: второго для многочлена P_0 , второго и четвёртого для многочлена P .

Для многочлена

$$P_0(\omega, s) = (D_1\omega^2 + s)(\omega^2 C_{11} + s^2) - \alpha_1\omega^4\Lambda_{11},$$

указанный определитель имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta_{20} &= \begin{vmatrix} D_1\omega^2 & \omega^4(D_1C_{11} - \alpha_1\Lambda_{11}) \\ 1 & C_{11}\omega^2 \end{vmatrix} = \\ &= D_1C_{11}\omega^4 - \omega^4(D_1C_{11} - \alpha_1\Lambda_{11}) = \alpha_1\Lambda_{11}\omega^4 > 0. \end{aligned}$$

Записывая многочлен P в виде

$$P(\omega, \lambda_n, s) = \sum_{i=0}^5 a_i s^{5-i},$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = k_3(\omega, \lambda_n, 0), \quad a_2 = k_1(\omega, \lambda_n, 0) + k_2(\omega, \lambda_n, 0),$$

$$a_3 = a_1 a_2 - \alpha_1 \omega^2 K_1 - \alpha_2 \lambda_n^2 M_1, \quad a_4 = k_1(\omega, \lambda_n, 0) k_2(\omega, \lambda_n, 0) - C_{21}^2 \omega^2 \lambda_n^2,$$

$$a_5 = a_1 a_4 + \omega^2 K_1 S_2^1(\omega, \lambda_n, 0) + \lambda_n^2 M_1 S_1^1(\omega, \lambda_n, 0),$$

приходим к следующему результату для второго определителя

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 = \alpha_1 \omega^2 K_1 + \alpha_2 \lambda_n^2 M_1 > 0.$$

Соответственно, четвёртый определитель после приведения подобных слагаемых записывается так:

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} = \\ &= \alpha_1 \alpha_2 K_1 M_1 \lambda_n^2 \omega^2 \left[C_{21} \left(\omega^2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \lambda_n^2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) + k_2(\omega, \lambda_n, 0) - k_1(\omega, \lambda_n, 0) \right]^2 \geq 0. \end{aligned}$$

В случае ортотропной среды неравенство будет строгим, поэтому все нули многочлена P лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости s . Равенство нулю возможно только в случае изотропной среды, когда

$$\alpha_i = \alpha, \quad D_i = D, \quad \Lambda_{ij} = \Lambda,$$

$$C_{11} = C_{22} = 1, \quad C_{12} = \mu, \quad C_{21} = 1 - \mu$$

$$k_2(\omega, \lambda_n, 0) - k_1(\omega, \lambda_n, 0) = (\mu - 1)(\omega^2 - \lambda_n^2), \quad K_1 = M_1,$$

$$\Delta_4 = \alpha^2 K_1^2 \omega^2 \lambda_n^2 [(1 - \mu)(\omega^2 - \lambda_n^2) + (\mu - 1)(\omega^2 - \lambda_n^2)]^2 = 0,$$

здесь μ - безразмерная по формулам (1.28) упругая постоянная Ламе.

В этом случае многочлен P имеет пару чисто мнимых корней. Они находятся аналитически [98].

При вычислении оригиналов по Лапласу существенным является наличие у многочленов P_0 и P кратных нулей. Покажем, что для любых λ_n эти нули могут совпадать только на множестве значений параметра ω , не содержащем предельные точки. В самом деле, из теоремы о существовании неявной функции комплексной переменной [15] следует, что нули многочленов P_0 и P являются аналитическими функциями параметра ω , поэтому в силу теоремы единственности [15] они могут совпадать либо на всей области определения параметра ω , либо в изолированных точках. Положим $\omega = 0$ и рассмотрим $P(0, \lambda_n, s)$:

$$P(0, \lambda_n, s) = (s^2 + \lambda_n^2 C_{12}) [(s^2 + \lambda_n^2)(s + D_2 \lambda_n^2) - \alpha_2 \Lambda_2 \lambda_n^4].$$

Многочлен, стоящий в квадратных скобках не имеет корней, совпадающих с $\pm i \lambda_n \sqrt{C_{12}}$ так как его коэффициенты не зависят от C_{12} . Для проверки на кратность, возьмем производную этого многочлена и найдем её нули

$$3s^2 + 2D_2 \lambda_n^2 s + \lambda_n^2 = 0.$$

Корни этого уравнения

$$s_{1,2} = \frac{-2D_2 \lambda_n^2 \pm 2\lambda_n^2 \sqrt{(D_2)^2 - 3\lambda_n^2}}{6}.$$

Полученные значения не зависят от $\alpha_2 \Lambda_2$, поэтому не являются нулями многочлена $P(0, \lambda_n, s)$, следовательно, он не имеет кратных корней. Аналогично исследуется многочлен P_0 . Это означает, что многочлены P_0 и P при любых значениях λ_n не имеют кратных корней совпадающих на множестве значений параметра ω , содержащем предельные точки. Таким образом установлено, что многочлены P_0 и P при $N = 1$ имеют простые нули с отрицательной действительной частью.

Асимптотический анализ, изложенный в п. 2.3 показывает, что в рассматриваемой задаче для N - компонентного слоя при условии (2.13), многочлен P_0 имеет 2 комплексных нуля и N действительных нуля. Аналогично можно показать, что при том же условии (2.13) многочлен P имеет две пары комплексных нулей и N действительных нуля. Указанные асимптотики также позволяют установить, что нули многочленов P_0 и P лежат в левой части комплексной полуплоскости комплексного параметра s . ■

Обозначим $s_1(\omega, \lambda_n) = \bar{s}_3(\omega, \lambda_n) = \gamma_1(\omega, \lambda_n) + i\beta_1(\omega, \lambda_n)$, $s_2(\omega, \lambda_n) = \bar{s}_4(\omega, \lambda_n) = \gamma_2(\omega, \lambda_n) + i\beta_2(\omega, \lambda_n)$, $\gamma_r(\omega, \lambda_n) < 0$, $s_{q+4}(\omega, \lambda_n) < 0$ – нули многочлена P , $s_{01}(\omega) = \bar{s}_{02}(\omega) = \gamma_0(\omega) + i\beta_0(\omega)$, $\gamma_0(\omega) < 0$, $s_{0,q+2}(\omega) < 0$ – нули многочлена P_0 . Тогда, оригиналы первой и третьей дроби в (3.42) будут иметь вид [84, 253]:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{-1} \left[\frac{P_{ik0}}{P_0} \right] &= e^{\gamma_0 \tau} \left(A_{ik}^{(01)} \cos \beta_0 \tau - A_{ik}^{(02)} \sin \beta_0 \tau \right) + \sum_{j=1}^N B_{ik}^{(0j)} e^{s_{0,j+20} \tau}, \\ A_{ik}^{(01)} &= 2 \operatorname{Re} \frac{P_{ik0}(\omega, s_{01})}{P_0'(\omega, s_{01})}, \quad A_{ik}^{(02)} = 2 \operatorname{Im} \frac{P_{ik0}(\omega, s_{01})}{P_0'(\omega, s_{01})}, \\ B_{ik}^{(0j)} &= \frac{P_{ik0}(\omega, s_{0,j+2})}{P_0'(\omega, s_{0,j+2})}; \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{-1} \left[\frac{P_{ik}}{P} \right] &= \sum_{r=1}^2 e^{\gamma_r \tau} \left(A_{ik}^{(r1)} \cos \beta_r \tau - A_{ik}^{(r2)} \sin \beta_r \tau \right) + \sum_{j=1}^N B_{ik}^{(1j)} e^{s_{j+4} \tau}, \\ A_{ik}^{(r1)} &= 2 \operatorname{Re} \frac{P_{ik}(\omega, \lambda_n, s_r)}{P'(\omega, \lambda_n, s_r)}, \quad A_{ik}^{(r2)} = 2 \operatorname{Im} \frac{P_{ik}(\omega, \lambda_n, s_r)}{P'(\omega, \lambda_n, s_r)}, \\ B_{ik}^{(1j)} &= \frac{P_{ik}(\omega, \lambda_n, s_{j+4})}{P'(\omega, \lambda_n, s_{j+4})}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

где штрих означает производную по параметру s .

Оригиналы второй и четвёртой дроби в (3.42) находятся аналогичным образом с учетом дополнительных простых полюсов $-D_1^q \omega^2$ и $-D_2^q \lambda_n^2 - D_1^q \omega^2$ соответственно. Таким образом

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{-1} \left[\frac{Q_{q+2,k0}}{Q_{q0}} \right] &= e^{\gamma_0 \tau} \left(A_{q+2,k}^{(01)} \cos \beta_0 \tau - A_{q+2,k}^{(02)} \sin \beta_0 \tau \right) + \\ &+ \sum_{j=1}^N B_{q+2,k}^{(0j)} e^{s_{j+2,0} \tau} + B_{q+2,k}^{(0,N+1)} e^{-D_1^q \omega^2 \tau}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} A_{q+2,k}^{(01)} &= 2 \operatorname{Re} \frac{Q_{q+2,k0}(\omega, s_{01})}{Q'_{q0}(\omega, s_{01})}, \quad A_{q+2,k}^{(02)} = 2 \operatorname{Im} \frac{Q_{q+2,k0}(\omega, s_{01})}{Q'_{q0}(\omega, s_{01})}, \\ B_{q+2,k}^{(0j)} &= \frac{Q_{q+2,k0}(\omega, s_{0,j+2})}{Q'_{q0}(\omega, s_{0,j+2})}, \quad B_{q+2,k}^{(0,N+1)} = \frac{Q_{q+2,k0}(\omega, -D_1^q \omega^2)}{Q'_{q0}(\omega, -D_1^q \omega^2)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{-1} \left[\frac{Q_{q+2,k}}{Q_q} \right] &= \sum_{r=1}^2 e^{\gamma_r \tau} \left(A_{q+2,k}^{(r1)} \cos \beta_r \tau - A_{q+2,k}^{(r2)} \sin \beta_r \tau \right) + \\ &+ \sum_{j=1}^N B_{q+2,k}^{(1j)} e^{s_{j+4} \tau} + B_{q+2,k}^{(1,N+1)} e^{-(D_2^q \lambda_n^2 + D_1^q \omega^2) \tau}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} A_{q+2,k}^{(r1)} &= 2 \operatorname{Re} \frac{Q_{q+2,k}(\omega, \lambda_n, s_r)}{Q'_q(\omega, \lambda_n, s_r)}, \quad A_{q+2,k}^{(r2)} = 2 \operatorname{Im} \frac{Q_{q+2,k}(\omega, \lambda_n, s_r)}{Q'_q(\omega, \lambda_n, s_r)}, \\ B_{q+2,k}^{(1j)} &= \frac{Q_{q+2,k}(\omega, \lambda_n, s_{j+4})}{Q'_q(\omega, \lambda_n, s_{j+4})}, \quad B_{q+2,k}^{(1,N+1)} = \frac{Q_{q+2,k}(\omega, \lambda_n, -D_2^q \lambda_n^2 - D_1^q \omega^2)}{Q'_q(\omega, \lambda_n, -D_2^q \lambda_n^2 - D_1^q \omega^2)}. \end{aligned}$$

Наконец, оригиналы по Лапласу функций в (3.43) находятся с использованием таблиц операционного исчисления и суммирования рядов [1, 173]:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{-1} \left[\tilde{G}_{q+2,q+2}^{FLc}(\omega, 0, s) + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_{q+2,q+2}^{FLc}(\omega, \lambda_n, s) \cos \lambda_n x \right] &= \\ &= \tilde{G}_{q+2,q+2}^F(\omega, x_2, \tau) = D_2^q e^{-D_1^q \omega^2 \tau} \vartheta_3 \left(\frac{x_2}{2}, e^{-D_2^q \pi^2 \tau} \right). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Таким образом, в пространстве изображений Фурье имеем ($i = 1, 2$, $p, q = \overline{1, N}$, $k = \overline{1, N+2}$):

$$\begin{aligned}
G_{1k}^F(\omega, x_2, \tau) &= G_{1k}^{Fc}(\omega, 0, \tau) + \sum_{n=1}^{\infty} G_{1k}^{Fc}(\omega, \lambda_n, \tau) \cos \lambda_n x_2, \\
G_{2k}^F(\omega, x_2, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{2k}^{Fs}(\omega, \lambda_n, \tau) \sin \lambda_n x_2, \\
G_{q+2,i}^F(\omega, x_2, \tau) &= G_{q+2,i}^{Fc}(\omega, 0, \tau) + \sum_{n=1}^{\infty} G_{q+2,i}^{Fc}(\omega, \lambda_n, \tau) \cos \lambda_n x_2, \\
G_{q+2,p+2}^F(\omega, x_2, \tau) &= \delta_{pq} \tilde{G}_{q+2,q+2}^F(\omega, x_2, \tau) + \sum_{n=1}^{\infty} G_{q+2,p+2}^{Fc}(\omega, \lambda_n, \tau) \cos \lambda_n x_2,
\end{aligned} \tag{3.49}$$

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} G_{1k}^{Fc}(\omega, 0, \tau) \\ G_{q+2,i}^{Fc}(\omega, 0, \tau) \end{Bmatrix} &= L^{-1} \left[\begin{Bmatrix} P_{1k0}(\omega, s) \\ P_{q+2,i0}(\omega, s) \end{Bmatrix} \frac{1}{P_0(\omega, s)} \right], \\
\begin{Bmatrix} G_{1k}^{Fc}(\omega, \lambda_n, \tau) \\ G_{2k}^{Fs}(\omega, \lambda_n, \tau) \end{Bmatrix} &= L^{-1} \left[\begin{Bmatrix} P_{1k}(\omega, \lambda_n, s) \\ P_{2k}(\omega, \lambda_n, s) \end{Bmatrix} \frac{1}{P(\omega, \lambda_n, s)} \right], \\
G_{q+2,k}^{Fc}(\omega, \lambda_n, \tau) &= L^{-1} \left[\frac{Q_{q+2,k}(\omega, \lambda_n, s)}{Q_q(\omega, \lambda_n, s)} \right].
\end{aligned}$$

Замечание 1. Для функции $\tilde{G}_{q+2,q+2}^F$ возможно аналитически выполнить обратное преобразование Фурье [14, 173]

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{q+2,q+2}^F(x_1, x_2, \tau) &= \frac{D_2^q}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_{q+2,q+2}^F(\omega, x_2, \tau) e^{i\omega x_1} d\omega = \\
&= \frac{D_2^q}{2\sqrt{\pi} D_1^q \tau} e^{-\frac{x_1^2}{4D_1^q \tau}} \vartheta_3 \left(\frac{x_2}{2}, e^{-D_2^q \pi^2 \tau} \right).
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Замечание 2. Функции G_{11}^F , G_{22}^F , $G_{q+2,p+2}^F$, $G_{2,q+2}^F$, $G_{q+2,2}^F$, ($p, q = \overline{1, N}$) являются чётными, а остальные функции G_{km}^F - нечётные по ω . Тогда, если функции f_{m1}^F также обладают свойством чётности (нечётности), то экспоненциальное преобразование Фурье сводится к синус- или косинус-преобразованию Фурье, что снижает объём вычислений.

Ортотропная полуплоскость. Как было отмечено в п. 3.1 решение задачи для полуплоскости строится аналогичным образом, с той лишь разницей, что вместо неполных рядов Фурье используется синус-, косинус преобразование. Таким образом, применение преобразования Фурье, Лапласа, синус-, косинус-преобразования и редукция к нулевым граничным условиям приводят в данном случае также к системе линейных алгебраических уравнений (3.31), где все обозначения остаются прежними с той лишь разницей, что величина $\lambda_n = \pi n$ заменяется на параметр синус-, косинус-преобразования λ . Соответственно, изображения Функций Грина будут иметь вид (3.36), (3.38) и (3.39). Их оригиналы по Лапласу находятся аналогичным образом.

Вместо формул (3.48) и (3.50) имеем [14]:

$$\begin{aligned} & \mathbf{L}^{-1} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{G}_{q+2,q+2}^{FLC}(\omega, \lambda, s) \cos \lambda_n x \right] = \\ & = \tilde{G}_{q+2,q+2}^F(\omega, x_2, \tau) = \sqrt{\frac{D_2^q}{\pi \tau}} e^{-\left(D_1^q \omega^2 \tau + \frac{x_2^2}{4D_2^q \tau}\right)}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{q+2,q+2}(x_1, x_2, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_{q+2,q+2}^F(\omega, x_2, \tau) e^{i\omega x_1} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi \tau} \sqrt{\frac{D_2^q}{D_1^q}} e^{-\frac{D_2^q x_1^2 + D_1^q x_2^2}{4D_1^q D_2^q \tau}}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Таким образом, трансформанты Фурье функций Грина для полуплоскости имеют вид:

$$\begin{aligned} G_{1k}^F(\omega, x_2, \tau) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{L}^{-1} \left[\frac{P_{1k}(\omega, \lambda, s)}{P(\omega, \lambda, s)} \right] \cos \lambda x_2 d\lambda, \\ G_{2k}^F(\omega, x_2, \tau) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{L}^{-1} \left[\frac{P_{2k}(\omega, \lambda, s)}{P(\omega, \lambda, s)} \right] \sin \lambda x_2 d\lambda, \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$G_{q+2,i}^F(\omega, x_2, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \mathbf{L}^{-1} \left[\frac{Q_{q+2,i}(\omega, \lambda, s)}{Q_q(\omega, \lambda, s)} \right] \cos \lambda x_2 d\lambda \quad (i = 1, 2),$$

$$G_{q+2,p+2}^F(\omega, x_2, \tau) = \delta_{pq} \tilde{G}_{q+2,q+2}^F(\omega, x_2, \tau) +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \mathbf{L}^{-1} \left[\frac{Q_{q+2,q+2}(\omega, \lambda, s)}{Q_q(\omega, \lambda, s)} \right] \cos \lambda x_2 d\lambda, \quad (p = \overline{1, N}).$$

где обратные преобразования \mathbf{L}^{-1} находятся по формулам (3.45) и (3.47).

3.3. Механодиффузия упругой среды под действием нормальной механической нагрузки

Здесь, по аналогии с главой 2, исследуется упругая диффузия для ортотропной среды (слой, полуплоскость) в случае задания на границе нормальных усилий. Материалы этого пункта, так же как и п. 2.5, будут использоваться при рассмотрении вопросов, связанных с построением решений краевых задач упругой диффузии в случае произвольных граничных условий.

Рассмотрим задачу упругой диффузии для ортотропного слоя (1.34), (1.49) с нулевыми начальными условиями. Её решение представляется в виде (3.14). Последовательное применение к системе (1.34) преобразования Лапласа по времени τ , Фурье по переменной x_1 , разложений искомых функций в ряды Фурье по переменной x_2 и редукция к нулевым граничным условиям приводит к следующим системам линейных алгебраических уравнений:

$$\kappa_2(\omega, s) U_2^c = \Phi_2^c(\omega, 0, s) \quad (n = 0); \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} k_1(\omega, \lambda_n, s) U_1^s + i\omega \lambda_n C_{21} U_2^c + i\omega \sum_{j=1}^N \alpha_1^j H_j^s &= \Phi_1^s(\omega, \lambda_n, s), \\ -i\omega \lambda_n C_{21} U_1^s + k_2(\omega, \lambda_n, s) U_2^c + \lambda_n \sum_{j=1}^N \alpha_2^j H_j^s &= \Phi_2^c(\omega, \lambda_n, s), \\ -i\omega K_q(\omega, \lambda_n) U_1^s + \lambda_n M_q(\omega, \lambda_n) U_2^c + \\ + k_{q+2}(\omega, \lambda_n, s) H_q^s &= \Phi_{q+2}^s(\omega, \lambda_n, s) \quad (n \geq 1). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Здесь

$$\begin{aligned} u_i^{FL}(\omega, x_2, s) &= U_i(\omega, x_2, s) + \varphi_i(\omega, x_2, s), \\ \eta_q^{FL}(\omega, x_2, s) &= H_q(\omega, x_2, s) + \psi_q(\omega, x_2, s); \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(\omega, x_2, s) &= \varphi_1^*(x_2) f_{11}^{FL}(\omega, s), \quad \psi_q(\omega, x_2, s) = \varphi_1^*(x_2) f_{q+2,1}^{FL}(\omega, s), \\ \varphi_1^*(x_2) &= 1 - x_2 \quad (i = 1, 2, \quad q = \overline{1, N}); \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_2^*(x_2)}{C_{22}} \left(f_{21}^{FL} - i\omega C_0 f_{11}^{FL} + \sum_{j=1}^N \alpha_2^j f_{j+2,1}^{FL} \right),$$

$$\varphi_2^*(x_2) = -\frac{(1-x_2)^2}{2} = x_2 - \frac{x_2^2}{2}, \quad \varphi_1^*(x_2) = \varphi_2^*(x_2),$$

$$\begin{pmatrix} U_1(\omega, x_2, s) \\ H_q(\omega, x_2, s) \\ u_1^{FL}(\omega, x_2, s) \\ \eta_q^{FL}(\omega, x_2, s) \\ \Phi_1(\omega, x_2, s) \\ \Phi_{q+2}(\omega, x_2, s) \\ \varphi_1^*(x_2) \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} U_1^s(\omega, \lambda_n, s) \\ H_q^s(\omega, \lambda_n, s) \\ u_1^{FLs}(\omega, \lambda_n, s) \\ \eta_q^{FLs}(\omega, \lambda_n, s) \\ \Phi_1^s(\omega, \lambda_n, s) \\ \Phi_{q+2}^s(\omega, \lambda_n, s) \\ \varphi_1^s(\lambda_n) \end{pmatrix} \sin \lambda_n x_2,$$

$$\begin{pmatrix} U_2(\omega, x_2, s) \\ u_2^{FL}(\omega, x_2, s) \\ \Phi_2(\omega, x_2, s) \\ \varphi_2^*(x_2) \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} U_2^c(\omega, \lambda_n, s) \\ u_2^{FLc}(\omega, \lambda_n, s) \\ \Phi_2^c(\omega, \lambda_n, s) \\ \varphi_2^c(\lambda_n) \end{pmatrix} \cos \lambda_n x_2,$$

$$\Phi_2^c(\omega, 0, s) = -i\omega C_{12} f_{11}^{FL} - f_{21}^{FL} + \varphi_2^c(0) \sum_{k=1}^{N+2} B_{2k} f_{k1}^{FL},$$

$$\Phi_1^s(\omega, \lambda_n, s) = \varphi_1^s(\lambda_n) \sum_{k=1}^{N+2} B_{1k} f_{k1}^{FL}, \quad \Phi_2^c(\omega, \lambda_n, s) = \varphi_2^c(\lambda_n) \sum_{k=1}^{N+2} B_{2k} f_{k1}^{FL},$$

$$\Phi_{q+2}^s(\omega, \lambda_n, s) = \varphi_1^s(\lambda_n) \sum_{k=1}^{N+2} B_{q+2,k} f_{k1}^{FL},$$

$$\varphi_2^c(0) = \int_0^1 \varphi_2^*(x) dx = \frac{1}{6}, \quad \varphi_2^c(\lambda_n) = 2 \int_0^1 \varphi_2^*(x) \cos \lambda_n x dx = -\frac{2}{\lambda_n^2},$$

$$\varphi_1^s(\lambda_n) = 2 \int_0^1 \varphi_1^*(x) \sin \lambda_n x dx = \frac{2}{\lambda_n}, \quad \varphi_1^s(\lambda_n) = -\lambda_n \varphi_2^c(\lambda_n),$$

$$\begin{aligned}
B_{11} &= \omega^2 \frac{C_{21}}{C_{22}} C_0 - \kappa_1, & B_{12} &= i\omega \frac{C_{21}}{C_{22}}, & B_{1,q+2} &= i\omega \left(\alpha_1^q - \frac{C_{21}}{C_{22}} \alpha_2^q \right), \\
B_{21} &= i\omega C_0 \frac{\kappa_2}{C_{22}}, & B_{22} &= -\frac{\kappa_2}{C_{22}}, & B_{2,q+2} &= -\frac{\kappa_2}{C_{22}} \alpha_2^q, \\
B_{q+2,1} &= i\omega^3 \left(\Lambda_{11}^q - \frac{\Lambda_{12}^q}{C_{22}} C_0 \right), & B_{q+2,2} &= \omega^2 \frac{\Lambda_{12}^q}{C_{22}}, \\
B_{q+2,p+2} &= \omega^2 \frac{\Lambda_{12}^q}{C_{22}} \alpha_2^p - \delta_{pq} \kappa_{q+2}.
\end{aligned}$$

Решение уравнения (3.54) записывается так:

$$U_2^c(\omega, 0, s) = \frac{\Phi_2^c(\omega, 0, s)}{\kappa_2(\omega, s)}.$$

Откуда с учетом равенств (3.56), (3.57) находим:

$$\begin{aligned}
u_2^{FLc}(\omega, 0, s) &= U_2^c(\omega, 0, s) + \\
&+ \frac{\varphi_2^c(0)}{C_{22}} \left(f_{21}^{FL} - i\omega C_0 f_{11}^{FL} + \sum_{j=1}^N \alpha_2^j f_{j+2,1}^{FL} \right) = -\frac{i\omega C_{12} f_{11}^{FL} + f_{21}^{FL}}{\kappa_2(\omega, s)}. \quad (3.58)
\end{aligned}$$

Далее, решая систему (3.55) и переходя к искомым функциям, получаем в пространстве изображений:

$$u_i^{FL} = \sum_{k=1}^{N+2} G_{ik}^{FL} f_{k1}^{FL}, \quad \eta_q^{FL} = \sum_{k=1}^{N+2} G_{q+2,k}^{FL} f_{k1}^{FL} \quad (i = 1, 2); \quad (3.59)$$

$$G_{2k}^{FL}(\omega, x_2, s) = G_{2k}^{FLc}(\omega, 0, s) + \sum_{n=0}^{\infty} G_{2k}^{FLc}(\omega, \lambda_n, s) \cos \lambda_n x_2, \quad (3.60)$$

$$G_{lk}^{FL}(\omega, x_2, s) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{lk}^{FLs}(\omega, \lambda_n, s) \sin \lambda_n x_2, \quad (l \neq 2);$$

$$G_{21}^{FLc}(\omega, 0, s) = -\frac{i\omega C_{12}}{\kappa_2(\omega, s)}, \quad G_{22}^{FLc}(\omega, 0, s) = -\frac{1}{\kappa_2(\omega, s)}; \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned}
G_{ik}^{FLs}(\omega, \lambda_n, s) &= \frac{P_{ik}(\omega, \lambda_n, s)}{P(\omega, \lambda_n, s)} \quad (i = 1, 2), \\
G_{q+2,k}^{FLs}(\omega, \lambda_n, s) &= \tilde{G}_{q+2,k}^{FLs}(\omega, \lambda_n, s) + \frac{Q_{q+2,k}(\omega, \lambda_n, s)}{Q_q(\omega, \lambda_n, s)}, \\
\tilde{G}_{q+2,1}^{FLs}(\omega, \lambda_n, s) &= 2i\omega\lambda_n \frac{\Lambda_{22}^q C_0 - \Lambda_{21}^q C_{22}}{C_{22} k_{q+2}(\omega, \lambda_n, s)}, \\
\tilde{G}_{q+2,2}^{FLs}(\omega, \lambda_n, s) &= -2\lambda_n \frac{\Lambda_{22}^q}{C_{22} k_{q+2}(\omega, \lambda_n, s)}, \\
\tilde{G}_{q+2,p+2}^{FLs}(\omega, \lambda_n, s) &= -2\lambda_n \frac{\Lambda_{22}^q \alpha_2^p - \delta_{pq} C_{22} D_2^q}{C_{22} k_{q+2}(\omega, \lambda_n, s)}, \quad n \geq 1.
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Здесь величины $k_m = k_m(\omega, \lambda_n, s)$ и $\kappa_m = \kappa_m(\omega, s)$, $m = \overline{1, N+2}$ находятся по формулам (3.20), (3.32), многочлены P и Q_q по формулам (3.38), а остальные многочлены определяются так:

$$\begin{aligned}
P_{11} &= 2C_{12}\lambda_n (k_2 - \omega^2 C_{21}) \Pi + 2\omega^2 \lambda_n^3 \sum_{i,j=1}^N \left(\Lambda_{22}^j \frac{C_0}{C_{22}} - \Lambda_{21}^j \right) S_3^{ij} M_i \Pi_{ij} - \\
&\quad - 2\lambda_n \sum_{j=1}^N \left[C_{12} C_{22} \left(\alpha_2^j \lambda_n^2 - \omega^2 \alpha_1^j \right) M_j + \omega^2 \left(\Lambda_{22}^j \frac{C_0}{C_{22}} - \Lambda_{21}^j \right) S_2^j \right] \Pi_j, \\
P_{12} &= 2i\omega\lambda_n \left[C_{21} \Pi - \sum_{j=1}^N \left(\alpha_1^j M_j + S_2^j \frac{\Lambda_{22}^j}{C_{22}} \right) \Pi_j \right] + \frac{2i\omega\lambda_n^3}{C_{22}} \sum_{i,j=1}^N \Lambda_{22}^j S_3^{ij} M_i \Pi_{ij}, \\
P_{1,q+2} &= 2i\omega\lambda_n \sum_{j=1}^N \left(\delta_{jq} D_2^q - \alpha_2^q \frac{\Lambda_{22}^j}{C_{22}} \right) \left(S_2^j \Pi_j + \lambda_n^2 \sum_{k=1}^N S_3^{jk} M_k \Pi_{jk} \right), \\
P_{21} &= 2i\omega C_{12} (\lambda_n^2 C_{21} - k_1) \Pi + 2i\omega^3 \lambda_n^2 \sum_{i,j=1}^N \left(\Lambda_{22}^j \frac{C_0}{C_{22}} - \Lambda_{21}^j \right) S_3^{ij} K_i \Pi_{ij} - \\
&\quad - 2i\omega \sum_{j=1}^N \left[C_{12} C_{22} \left(\lambda_n^2 \alpha_2^j - \omega^2 \alpha_1^j \right) K_j - \lambda_n^2 \left(\Lambda_{22}^j \frac{C_0}{C_{22}} - \Lambda_{21}^j \right) S_1^j \right] \Pi_j,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{22} &= -2k_1\Pi + 2\sum_{j=1}^N \left(\omega^2\alpha_1^j K_j - \lambda_n^2 \frac{\Lambda_{22}^j}{C_{22}} S_1^j \right) \Pi_j - \frac{2\omega^2\lambda_n^2}{C_{22}} \sum_{i,j=1}^N S_3^{ij} K_i \Pi_{ij}, \\
P_{2,q+2} &= 2\lambda_n^2 \sum_{j=1}^N \left(\delta_{jq} D_2^q - \alpha_2^q \frac{\Lambda_{22}^j}{C_{22}} \right) \left(S_1^j \Pi_j + \omega^2 \sum_{k=1}^N S_3^{kj} K_k \Pi_{kj} \right), \\
Q_{q+2,m} &= i\omega K_q P_{1m} - \lambda_n M_q P_{2m},
\end{aligned} \tag{3.63}$$

где $K_i = K_i(\omega, \lambda_n)$ и $M_i = M_i(\omega, \lambda_n)$ находятся по формулам (3.32), а $S_1^j = S_1^j(\omega, \lambda_n, s)$, $S_2^j = S_2^j(\omega, \lambda_n, s)$, S_3^{ij} , $\Pi = \Pi(\omega, \lambda_n, s)$, $\Pi_j = \Pi_j(\omega, \lambda_n, s)$ и $\Pi_{ij} = \Pi_{ij}(\omega, \lambda_n, s)$, $i, j = \overline{1, N}$ по формулам (3.40).

Обращая преобразование Лапласа в (3.60), с учетом (3.61) и (3.62) получаем следующий результат:

$$\begin{aligned}
G_{1k}^F(\omega, x_2, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} L^{-1} \left[\frac{P_{1k}(\omega, \lambda_n, s)}{P(\omega, \lambda_n, s)} \right] \cos \lambda_n x_2, \\
G_{2k}^F(\omega, x_2, \tau) &= G_{2k}^{Fc}(\omega, 0, \tau) + \sum_{n=1}^{\infty} L^{-1} \left[\frac{P_{2k}(\omega, \lambda_n, s)}{P(\omega, \lambda_n, s)} \right] \cos \lambda_n x_2, \\
G_{q+2,k}^F(\omega, x_2, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \tilde{G}_{q+2,k}^{Fs}(\omega, \lambda_n, \tau) + L^{-1} \left[\frac{Q_{q+2,k}(\omega, \lambda_n, s)}{Q_q(\omega, \lambda_n, s)} \right] \right\} \sin \lambda_n x_2,
\end{aligned}$$

где обратное преобразование L^{-1} находится с помощью формул (3.45), (3.47).

Остальные функции имеют вид:

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{c} G_{21}^{Fc}(\omega, 0, \tau) \\ G_{22}^{Fc}(\omega, 0, \tau) \end{array} \right\} &= - \left\{ \begin{array}{c} i\sqrt{C_{12}} \\ 1 \\ \omega\sqrt{C_{12}} \end{array} \right\} \sin(\sqrt{C_{12}}\omega\tau), \\
\left\{ \begin{array}{c} \tilde{G}_{q+2,1}^{Fs}(\omega, \lambda_n, \tau) \\ \tilde{G}_{q+2,2}^{Fs}(\omega, \lambda_n, \tau) \\ \tilde{G}_{q+2,p+2}^{Fs}(\omega, \lambda_n, \tau) \end{array} \right\} &= \frac{1}{C_{22}} \left\{ \begin{array}{c} 2i\omega\lambda_n(\Lambda_{22}^q C_0 - \Lambda_{21}^q C_{22}) \\ -2\lambda_n\Lambda_{22}^q \\ 2\lambda_n(\delta_{qp}C_{22}D_2^q - \Lambda_{22}^q\alpha_2^p) \end{array} \right\} e^{-(D_1^q\omega^2 + D_2^q\lambda_n^2)\tau}.
\end{aligned}$$

Аналогичная задача для полуплоскости решается также, с учетом поправок, изложенных в конце п. 3.2.

3.4. Двумерные объёмные механодиффузионные возмущения

Также как и в одномерных моделях будем рассматривать объёмные механодиффузионные возмущения для двумерных областей.

Плоскость. Решение исходной задачи (1.34) записываем следующим образом (звездочки означают свертки по переменным x_1 , x_2 и τ):

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \eta_q \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{N+2} \begin{pmatrix} G_{1k}^s \\ G_{2k}^s \\ G_{q+1,k}^s \end{pmatrix} * * * F_k. \quad (3.64)$$

Здесь G_{km}^s - объёмные функции Грина для плоскости. Они ограничены в \mathfrak{R}^2 удовлетворяет нулевым начальным условиям и уравнениям:

$$\begin{aligned} \ddot{G}_{1m}^s &= \frac{\partial^2 G_{1m}^s}{\partial x_1^2} + C_{12} \frac{\partial^2 G_{1m}^s}{\partial x_2^2} + C_{21} \frac{\partial^2 G_{2m}^s}{\partial x_1 \partial x_2} - \sum_{j=1}^N \alpha_1^j \frac{\partial G_{j+2,m}^s}{\partial x_1} + \delta_{1m} \Delta, \\ \ddot{G}_{2m}^s &= C_{21} \frac{\partial^2 G_{1m}^s}{\partial x_2 \partial x_1} + C_{12} \frac{\partial^2 G_{2m}^s}{\partial x_1^2} + C_{22} \frac{\partial^2 G_{2m}^s}{\partial x_2^2} - \sum_{j=1}^N \alpha_2^j \frac{\partial G_{j+2,m}^s}{\partial x_2} + \delta_{2m} \Delta, \\ \dot{G}_{q+2,m}^s &= -\Lambda_{11}^q \frac{\partial^3 G_{1m}^s}{\partial x_1^3} - \Lambda_{21}^q \frac{\partial^3 G_{1m}^s}{\partial x_2^2 \partial x_1} - \Lambda_{12}^q \frac{\partial^3 G_{2m}^s}{\partial x_1^2 \partial x_2} - \Lambda_{22}^q \frac{\partial^3 G_{2m}^s}{\partial x_2^3} + \\ &\quad + D_1^q \frac{\partial^2 G_{q+2,m}^s}{\partial x_1^2} + D_2^q \frac{\partial^2 G_{q+2,m}^s}{\partial x_2^2} + \delta_{q+2,m} \Delta, \end{aligned} \quad (3.65)$$

где

$$\Delta = \delta(x_1, x_2) \delta(\tau).$$

Для нахождения функций G_{km}^s применяем к уравнениям (3.65) преобразование Лапласа по времени и двойное преобразование Фурье по координатам x_1 и x_2 :

$$\begin{aligned}
k_1 G_{1m}^{sFL} + C_{21} \omega_1 \omega_2 G_{2m}^{sFL} + i \omega_1 \sum_{j=1}^N \alpha_1^j G_{j+2,m}^{sFL} &= \delta_{1m}, \\
C_{21} \omega_1 \omega_2 G_{1m}^{sFL} + k_2 G_{2m}^{sFL} + i \omega_2 \sum_{j=1}^N \alpha_2^j G_{j+2,m}^{sFL} &= \delta_{2m}, \\
-i \omega_1 K_q G_{1m}^{sFL} - i \omega_2 M_q G_{1m}^{sFL} + k_{q+2} G_{q+2,m}^{sFL} &= \delta_{q+2,m} \quad (q = \overline{1, N}),
\end{aligned} \tag{3.66}$$

где ω_1 и ω_2 - параметры двойного преобразования Фурье, функции $k_m = k_m(\omega_1, \omega_2, s)$, $m = \overline{1, N+2}$, $K_i = K_i(\omega_1, \omega_2)$ и $M_i = M_i(\omega_1, \omega_2)$, $i = \overline{1, N}$ находятся по формулам (3.32).

Решение системы (3.66) имеет вид:

$$\begin{aligned}
G_{im}^{sFL}(\omega_1, \omega_2, s) &= \frac{P_{im}(\omega_1, \omega_2, s)}{P(\omega_1, \omega_2, s)} \quad (i = 1, 2), \\
G_{q+2,m}^{sFL}(\omega_1, \omega_2, s) &= \frac{\delta_{q+2,m}}{k_{q+2}(\omega_1, \omega_2, s)} + \frac{Q_{q+2,m}(\omega_1, \omega_2, s)}{Q_q(\omega_1, \omega_2, s)},
\end{aligned} \tag{3.67}$$

где

$$\begin{aligned}
P_{11} &= k_2 \Pi - \sum_{j=1}^N \alpha_2^j \omega_2^2 M_j \Pi_j, \quad P_{12} = \omega_1 \omega_2 \left(\sum_{j=1}^N \alpha_1^j M_j \Pi_j - C_{21} \Pi \right), \\
P_{1,q+2} &= i \omega_1 S_2^q \Pi_q + i \omega_1 \omega_2^2 \sum_{j=1}^N S_3^{qj} M_j \Pi_{qj}, \\
P_{21} &= \omega_1 \omega_2 \left(\sum_{j=1}^N \alpha_2^j K_j \Pi_j - C_{21} \Pi \right), \\
P_{22} &= k_1 \Pi - \sum_{j=1}^N \omega_1^2 \alpha_1^j K_j \Pi_j, \quad P_{2,q+2} = i \omega_2 S_1^q \Pi_q - i \omega_1^2 \omega_2 \sum_{j=1}^N S_3^{qj} K_j \Pi_{qj}, \\
Q_{q+2,m}^{2s} &= i \omega_1 K_q P_{1m} + i \omega_2 M_q P_{2m}.
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Здесь функции $S_1^j = S_1^j(\omega_1, \omega_2, s)$, $S_2^j = S_2^j(\omega_1, \omega_2, s)$, S_3^{ij} , $\Pi = \Pi(\omega_1, \omega_2, s)$, $\Pi_j = \Pi_j(\omega_1, \omega_2, s)$ и $\Pi_{ij} = \Pi_{ij}(\omega_1, \omega_2, s)$, $i, j = \overline{1, N}$ определяются по формулам (3.40).

Оригиналы по Лапласу функций Грина так же находятся с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления [84] и формул (3.44), (3.45). Обратное двойное преобразование Фурье осуществляется численно с помощью процедуры изложенной в следующем пункте.

Полуплоскость ($x_2 \geq 0$, $x_1 \in \mathfrak{R}$) и *полоса* ($x_2 \in [0, 1]$, $x_1 \in \mathfrak{R}$). Решение исходной задачи записывается в виде (3.64) с той однако разницей, что по переменной x_2 используется обобщенная свертка вида:

$$\int_0^{\infty} f(x_2, \xi) g(\xi) d\xi.$$

Функции Грина для полуплоскости G_{km}^{hs} и для полосы G_{km}^l должны удовлетворять нулевым начальным условиям, однородным краевым условиям соответствующим (1.48) или (1.49) и уравнениям (3.65), где объёмные возмущения имеют вид:

$$\Delta = \delta(x_1, x_2 - \xi) \delta(\tau).$$

Функции G_{km}^{hs} при этом должны быть ограниченными в рассматриваемой области.

Объёмные функции для полуплоскости G_{km}^{hs} в пространстве преобразования Лапласа, экспоненциального преобразования Фурье и синус-, косинус-преобразования находятся из систем:

- для однородных граничных условий соответствующих (1.48)

$$\begin{aligned} k_1 G_{1m}^{hsFLC} - i\omega \lambda C_{21} G_{2m}^{hsFLS} + i\omega \sum_{j=1}^N \alpha_1^j G_{j+2,m}^{hsFLC} &= \delta_{1m} \cos \xi \lambda, \\ i\omega \lambda C_{21} G_{1m}^{hsFLC} + k_2 G_{2m}^{hsFLS} - \lambda \sum_{j=1}^N \alpha_2^j G_{j+2,m}^{hsFLC} &= \delta_{2m} \sin \xi \lambda, \\ -i\omega K_q G_{1m}^{hsFLC} - \lambda M_q G_{2m}^{hsFLS} + k_{q+2} G_{q+2,m}^{hsFLC} &= \delta_{q+2,m} \cos \xi \lambda, \end{aligned} \quad (3.69)$$

- для однородных граничных условий соответствующих (1.49)

$$\begin{aligned}
k_1 G_{1m}^{hsFLS} + i\omega\lambda C_{21} G_{2m}^{hsFLC} + i\omega \sum_{j=1}^N \alpha_1^j G_{j+2,m}^{hsFLS} &= \delta_{1m} \sin \xi \lambda, \\
-i\omega\lambda C_{21} G_{1m}^{hsFLS} + k_2 G_{2m}^{hsFLC} + \lambda \sum_{j=1}^N \alpha_2^j G_{j+2,m}^{hsFLS} &= \delta_{2m} \cos \xi \lambda, \\
-i\omega K_q G_{1m}^{hsFLS} + \lambda M_q G_{2m}^{hsFLC} + k_{q+2} G_{q+2,m}^{hsFLS} &= \delta_{q+2,m} \sin \xi \lambda,
\end{aligned} \tag{3.70}$$

где $k_m = k_m(\omega, \lambda, s)$, $m = \overline{1, N+2}$, $K_q = K_q(\omega, \lambda)$, $M_q = M_q(\omega, \lambda)$, $q = \overline{1, N}$ находятся по формулам (3.32).

Решение системы уравнений (3.69) имеет вид:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} G_{1m}^{hsFLC}(\omega, \lambda, \xi, s) \\ G_{2m}^{hsFLS}(\omega, \lambda, \xi, s) \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} P_{1m}(\omega, \lambda, s) \cos \xi \lambda \\ P_{2m}(\omega, \lambda, s) \sin \xi \lambda \end{Bmatrix} \frac{1}{P(\omega, \lambda, s)}, \\
G_{q+2,m}^{hsFLC}(\omega, \lambda, \xi, s) &= \left(\frac{\delta_{q+2,m}}{k_{q+2}(\omega, \lambda, s)} + \frac{Q_{q+2,m}(\omega, \lambda, s)}{Q_q(\omega, \lambda, s)} \right) \cos \xi \lambda,
\end{aligned} \tag{3.71}$$

где

$$\begin{aligned}
P_{11} &= k_2 \Pi - \sum_{j=1}^N \alpha_2^j \lambda^2 M_j \Pi_j, \quad P_{12} = i\omega\lambda \left(C_{21} \Pi - \sum_{j=1}^N \alpha_1^j \lambda M_j \Pi_j \right), \\
P_{1,q+2} &= i\omega S_2^q \Pi_q + i\omega\lambda^2 \sum_{j=1}^N S_3^{qj} M_j \Pi_{qj}, \\
P_{2,q+2} &= -\lambda S_1^q \Pi_q + \omega^2 \lambda \sum_{j=1}^N S_3^{qj} K_j \Pi_{qj}, \\
P_{21} &= i\omega\lambda \left(\sum_{j=1}^N \alpha_2^j K_j \Pi_j - C_{21} \Pi \right), \quad P_{22} = k_1 \Pi - \sum_{j=1}^N \omega^2 \alpha_1^j K_j \Pi_j, \\
Q_{q+2,m} &= i\omega K_q P_{1m} + \lambda M_q P_{2m}.
\end{aligned} \tag{3.72}$$

Решение системы уравнений (3.70) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} G_{1m}^{hsFLS}(\omega, \lambda, \xi, s) \\ G_{2m}^{hsFLC}(\omega, \lambda, \xi, s) \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} P_{1m}(\omega, \lambda, s) \sin \xi \lambda \\ P_{2m}(\omega, \lambda, s) \cos \xi \lambda \end{array} \right\} \frac{1}{P(\omega, \lambda, s)}, \\ G_{q+2,m}^{hsFLS}(\omega, \lambda, \xi, s) &= \left(\frac{\delta_{q+2,m}}{k_{q+2}(\omega, \lambda, s)} + \frac{Q_{q+2,m}(\omega, \lambda, s)}{Q_q(\omega, \lambda, s)} \right) \sin \xi \lambda, \end{aligned} \quad (3.73)$$

где

$$\begin{aligned} P_{11} &= k_2 \Pi - \sum_{j=1}^N \alpha_2^j \lambda^2 M_j \Pi_j, \quad P_{12} = -i\omega \lambda \left(C_{21} \Pi - \sum_{j=1}^N \alpha_1^j \lambda M_j \Pi_j \right), \\ P_{1,q+2} &= i\omega S_2^q \Pi_q + i\omega \lambda^2 \sum_{j=1}^N S_3^{qj} M_j \Pi_{qj}, \\ P_{2,q+2} &= \lambda S_1^q \Pi_q - \omega^2 \lambda \sum_{j=1}^N S_3^{qj} K_j \Pi_{qj}, \\ P_{21} &= -i\omega \lambda \left(\sum_{j=1}^N \alpha_2^j K_j \Pi_j - C_{21} \Pi \right), \quad P_{22} = k_1 \Pi - \sum_{j=1}^N \omega^2 \alpha_1^j K_j \Pi_j, \\ Q_{q+2,m} &= i\omega K_q P_{1m} - \lambda M_q P_{2m}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

В формулах (3.71) – (3.74) величины $S_1^j = S_1^j(\omega, \lambda, s)$, $S_2^j = S_2^j(\omega, \lambda, s)$, S_3^{ij} , $\Pi = \Pi(\omega, \lambda, s)$, $\Pi_j = \Pi_j(\omega, \lambda, s)$ и $\Pi_{ij} = \Pi_{ij}(\omega, \lambda, s)$, $i, j = \overline{1, N}$ определяются с помощью соотношений (3.40).

Объёмные функции для полосы G_{km}^l представляются в виде рядов Фурье в пространстве преобразований Фурье и Лапласа:

- для однородных граничных условий соответствующих (1.48)

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{1m}^{lFL} \\ G_{q+2,m}^{lFL} \end{array} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} G_{1m}^{lFLc} \\ G_{q+2,m}^{lFLc} \end{array} \right\} \cos \lambda_n x_2, \quad G_{2m}^{lFL} = \sum_{n=1}^{\infty} G_{2m}^{lFLs} \sin \lambda_n x_2,$$

- для однородных граничных условий соответствующих (1.49)

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{1m}^{lFL} \\ G_{q+2,m}^{lFL} \end{array} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} G_{1m}^{lFLs} \\ G_{q+2,m}^{lFLs} \end{array} \right\} \sin \lambda_n x_2, \quad G_{2m}^{lFL} = \sum_{n=0}^{\infty} G_{2m}^{lFLc} \cos \lambda_n x_2.$$

Гармоники G_{km}^{lFLc} и G_{km}^{lFLs} , начиная с первой, находятся из систем вида (3.69) и (3.70) поэтому

$$\begin{aligned} G_{km}^{lFLc}(\omega, \lambda_n, s) &= G_{km}^{hsFLC}(\omega, \lambda_n, s), \\ G_{km}^{lFLs}(\omega, \lambda_n, s) &= G_{km}^{hsFLS}(\omega, \lambda_n, s). \end{aligned}$$

Нулевые гармоники удовлетворяют системам уравнений:

$$\kappa_1(\omega, s) G_{1m}^{lFLc}(\omega, 0, s) + i\omega \sum_{j=1}^N \alpha_1^j G_{j+2,m}^{lFLc}(\omega, 0, s) = \delta_{1m}, \quad (3.75)$$

$$-i\omega^3 \Lambda_{11}^q G_{1m}^{lFLc}(\omega, 0, s) + \kappa_{q+2}(\omega, s) G_{q+2,m}^{lFLc}(\omega, 0, s) = \delta_{q+2,m};$$

$$\kappa_2(\omega, s) G_{2m}^{lFLc}(\omega, 0, s) = \delta_{2m}. \quad (3.76)$$

Их решения имеют вид:

$$\begin{aligned} G_{11}^{lFLc}(\omega, 0, s) &= \frac{P_{110}(\omega, s)}{P_0(\omega, s)}, \quad G_{1,q+2}^{lFLc}(\omega, 0, s) = \frac{P_{1,q+2,0}(\omega, s)}{P_0(\omega, s)}, \\ G_{2m}^{lFLc}(\omega, 0, s) &= \frac{\delta_{2m}}{\kappa_2(\omega, s)}, \quad G_{q+2,1}^{lFLc}(\omega, 0, s) = \frac{P_{q+2,10}(\omega, s)}{P_0(\omega, s)}, \\ G_{q+2,p+2}^{lFLc}(\omega, 0, s) &= \frac{\delta_{qp}}{\kappa_{q+2}(\omega, s)} + \frac{Q_{q+2,p+2,0}(\omega, s)}{Q_{q0}(\omega, s)}, \end{aligned} \quad (3.77)$$

где

$$P_{110}(\omega, s) = \Pi_0, \quad P_{1,q+2,0}(\omega, s) = -i\omega \alpha_1^q \Pi_{0q},$$

$$P_{q+2,10}(\omega, s) = i\omega^3 \Lambda_{11}^q \Pi_{0q}, \quad Q_{q+2,p+2,0}(\omega, s) = \alpha_1^p \Lambda_{11}^q \omega^4 \Pi_{0q}.$$

Функции $\Pi_0 = \Pi_0(\omega, s)$ и $\Pi_{0q} = \Pi_{0q}(\omega, s)$ определяются равенствами (3.40).

Как было показано в п. 2.6 вместо функций G_{km}^{hs} и G_{km}^l удобно использовать функции W_{km}^{hs} и W_{km}^l которые удовлетворяют уравнениям (3.65), где объемные возмущения заданы следующим образом:

$$\delta_{km} \Delta_k = \delta_{km} f_k(x_2) \delta(x_1) \delta(\tau).$$

При этом функции W_{km}^{hs} и W_{km}^l связаны с функциями G_{km}^{hs} и G_{km}^l с помощью соотношений типа (2.96):

$$W_{km}^{hs} = 2 \int_0^{\infty} G_{km}^{hs} f_k(x_2) dx_2; \quad (3.78)$$

$$W_{km}^l = 2 \int_0^1 G_{km}^l f_k(x_2) dx_2. \quad (3.79)$$

Обратное преобразование Лапласа для объёмных функций Грина в (3.71), (3.73) и (3.77) находится по формулам (3.44), (3.45). Обратное преобразование Фурье и синус -, косинус - преобразование могут осуществляться численно в соответствии с методикой, изложенной в следующем пункте.

3.5. Примеры расчетов

В качестве примера рассматривается анизотропный однокомпонентный материал ($N = 1$), имеющий следующие характеристики [183]:

$$\begin{aligned}
 C_{1111} &= 1.40 \cdot 10^{11} \frac{\text{Н}}{\text{М}^2}, & C_{2222} &= 1.36 \cdot 10^{11} \frac{\text{Н}}{\text{М}^2}, \\
 C_{1212} &= 3.14 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{М}^2}, & C_{1122} &= 1.03 \cdot 10^{11} \frac{\text{Н}}{\text{М}^2}, \\
 T_0 &= 800 \text{ К}, & \rho &= 5815 \frac{\text{кг}}{\text{М}^3}, \\
 \alpha_{11} &= 5.34 \cdot 10^4 \frac{\text{Дж}}{\text{моль}}, & \alpha_{22} &= 4.8 \cdot 10^4 \frac{\text{Дж}}{\text{моль}}, \\
 D_{11} &= 3.86 \cdot 10^{-14} \frac{\text{М}^2}{\text{с}}, & D_{22} &= 6.23 \cdot 10^{-18} \frac{\text{М}^2}{\text{с}}, & L &= 1 \text{ м}.
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

Им соответствуют следующие безразмерные параметры, полученные по формулам (1.28):

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= 1, & C_{22} &= 0.980, & C_{12} &= 0.112, & C_{21} &= 0.852, \\
 D_1 &= 7.80 \cdot 10^{-18}, & D_2 &= 1.27 \cdot 10^{-21}, \\
 \alpha_1 &= 3.82 \cdot 10^{-7}, & \alpha_2 &= 3.44 \cdot 10^{-7}, \\
 \Lambda_{11} &= 1.31 \cdot 10^{-16}, & \Lambda_{22} &= 1.37 \cdot 10^{-17}, \\
 \Lambda_{12} &= 8.53 \cdot 10^{-14}, & \Lambda_{21} &= 2.11 \cdot 10^{-20}.
 \end{aligned}$$

Касательная нагрузка. Слой. Полагаем, что правые части граничных условий (1.48) имеют вид:

$$\begin{aligned}
 f_{11}(x_1, \tau) = f_{21}(x_1, \tau) = f_{12}(x_1, \tau) = f_{22}(x_1, \tau) = f_{32}(x_1, \tau) &\equiv 0, \\
 f_{31}(x_1, \tau) &= e^{-\varepsilon^2 x_1^2} H(\tau), \quad \varepsilon = 0.1.
 \end{aligned} \tag{3.81}$$

В этом случае [14]:

$$f_{31}^F(\omega, \tau) = f(\omega) H(\tau), \quad f(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon} e^{-\omega^2/(4\varepsilon^2)}.$$

Тогда, вычисляя свёртки по времени в (3.13), получаем, что образы Фурье для перемещений и приращения концентрации в задаче для слоя определяются равенствами:

$$u_1^F(\omega, x_2, \tau) = f(\omega) \left\{ \sum_{l=1}^2 (-1)^{l+1} A_{13}^{(0l)} I_l(\gamma_0, \beta_0, \tau) + B_{13}^{(01)} I_3(s_{03}, \tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{r=1}^2 \sum_{l=1}^2 (-1)^{l+1} A_{13}^{(rl)} I_l(\gamma_r, \beta_r, \tau) + B_{13}^{(11)} I_3(s_5, \tau) \right] \cos \lambda_n x_2 \right\},$$

$$u_2^F(\omega, x_2, \tau) = f(\omega) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{r=1}^2 \sum_{l=1}^2 (-1)^{l+1} A_{23}^{(rl)} I_l(\gamma_r, \beta_r, \tau) + B_{23}^{(11)} I_3(s_5, \tau) \right] \sin \lambda_n x_2,$$

$$\begin{aligned} \eta^F(\omega, x_2, \tau) &= f(\omega) \left[D_2 \int_0^{\tau} e^{-D_1 \omega^2 t} \vartheta_3 \left(\frac{x_2}{2}, e^{-D_2 \pi^2 t} \right) dt + B_{33}^{(02)} I_3(-D_1^q \omega^2, \tau) \right] + \\ &+ f(\omega) \left[\sum_{l=1}^2 (-1)^{l+1} A_{33}^{(0l)} I_l(\gamma_0, \beta_0, \tau) + B_{33}^{(01)} I_3(s_{03}, \tau) \right] + \\ &+ f(\omega) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^2 \sum_{l=1}^2 (-1)^{l+1} A_{33}^{(rl)} I_l(\gamma_r, \beta_r, \tau) \cos \lambda_n x_2 + \\ &+ f(\omega) \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_{33}^{(11)} I_3(s_{j+4}, \tau) + B_{33}^{(12)} I_3(-D_1 \omega^2 - D_2 \lambda_n^2, \tau) \right] \cos \lambda_n x_2, \end{aligned}$$

где интегралы I_1, I_2, I_3 определяются по формулам (2.101), коэффициенты $A_{km}^{0l} = A_{km}^{0l}(\omega)$ и $B_{km}^{0p} = B_{km}^{0p}(\omega)$ по формулам (3.44) и (3.46), коэффициенты $A_{km}^{rl} = A_{km}^{rl}(\omega, \lambda_n)$ и $B_{km}^{1p} = B_{km}^{1p}(\omega, \lambda_n)$ по формулам (3.45) и (3.47).

После вычисления свёрток по времени находим оригиналы по Фурье. Имеем:

$$\begin{pmatrix} u_i(x_1, x_2, t) \\ \eta(x_1, x_2, t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N+2} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} G_{ik}^F(\omega, x_2, \tau) \\ G_{3k}^F(\omega, x_2, \tau) \end{pmatrix} * f_{k1}^F(\omega, \tau) e^{i\omega x_1} d\omega.$$

Входящие сюда интегралы находятся численно. С этой целью они запи-

СЫВАЮТСЯ ТАК:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_{km}^F * f_{m1}^F e^{i\omega x_1} d\omega = \int_{-\infty}^{-a} G_{km}^F * f_{m1}^F e^{i\omega x_1} d\omega +$$

$$+ \int_{-a}^a G_{km}^F * f_{m1}^F e^{i\omega x_1} d\omega + \int_a^{\infty} G_{km}^F * f_{m1}^F e^{i\omega x_1} d\omega,$$

где a - любая промежуточная точка (в расчётах полагается $a = 1$).

Вычисление второго интеграла (по промежутку от $-a$ до a) осуществляется с помощью формулы средних прямоугольников [98, 253]. Первый и третий интегралы с помощью замен $\omega = -a^2/(a + \nu)$ и $\omega = a^2/(a - \nu)$ переводятся в интегралы по конечному промежутку $[-a, 0]$ и $[0, a]$ соответственно, после чего также вычисляются с помощью формулы средних прямоугольников.

Результаты вычислений продемонстрированы на рис. 3.1 – 3.3.

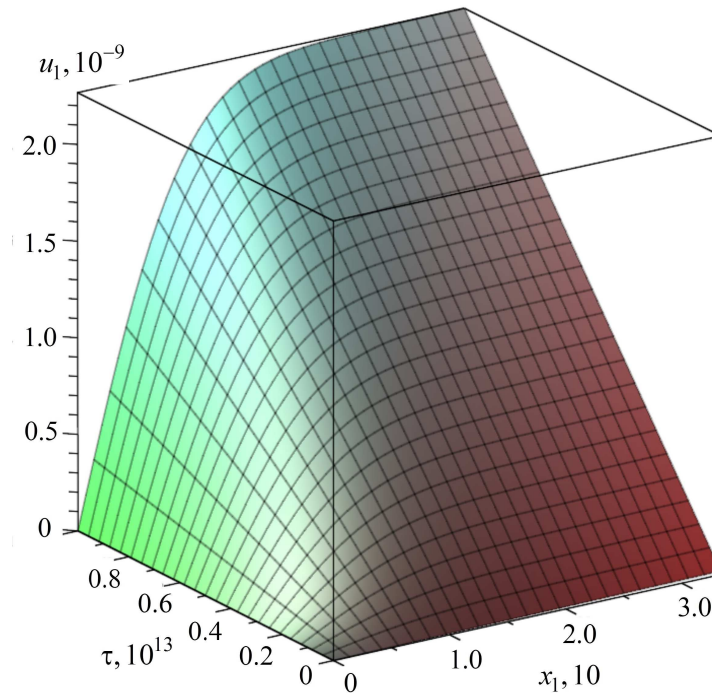


Рис. 3.1. Зависимость перемещения u_1 от x_1 и τ при $x_2 = 0.5$.

Расчёты проводились для $N_\lambda = 1000$ членов ряда Фурье и $N_\omega = 100$ точек разбиения для вычисления обратного преобразования Фурье.

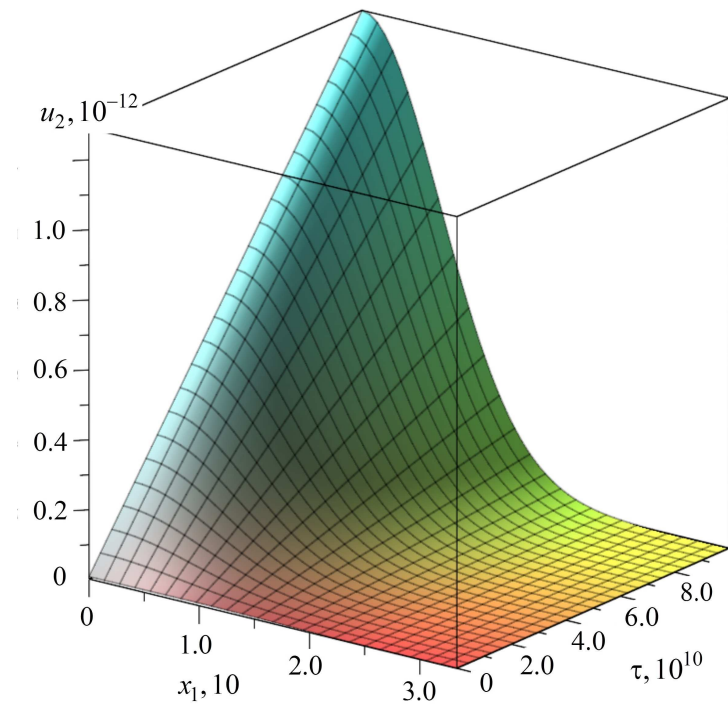


Рис. 3.2. Зависимость перемещения u_2 от x_1 и τ при $x_2 = 0.5$.

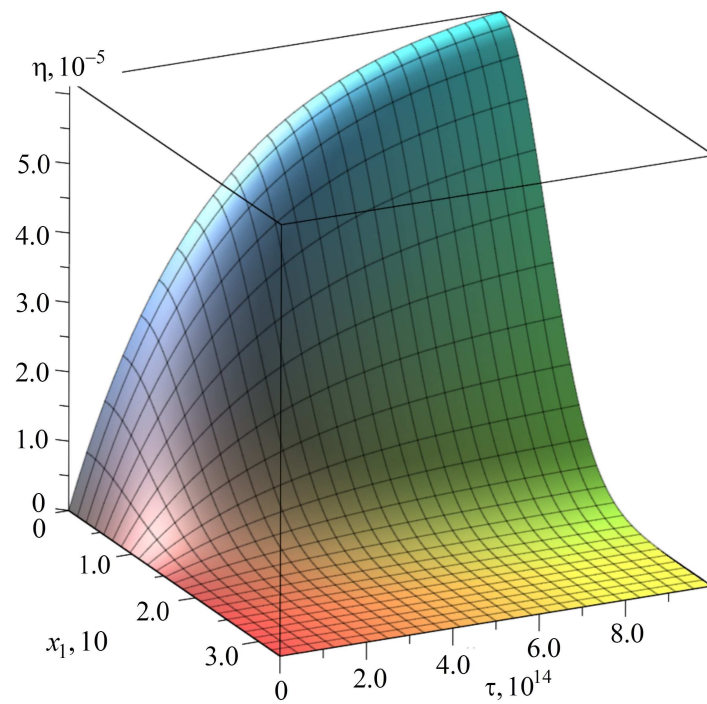


Рис. 3.3. Зависимость приращения концентрации η от x_1 и τ при $x_2 = 0.5$.

Касательная нагрузка. Полуплоскость. Результаты вычислений представлены на рис. 3.4 – 3.6.

Расчёты проводились для $N_\lambda = 1000$ точек разбиения для вычисления

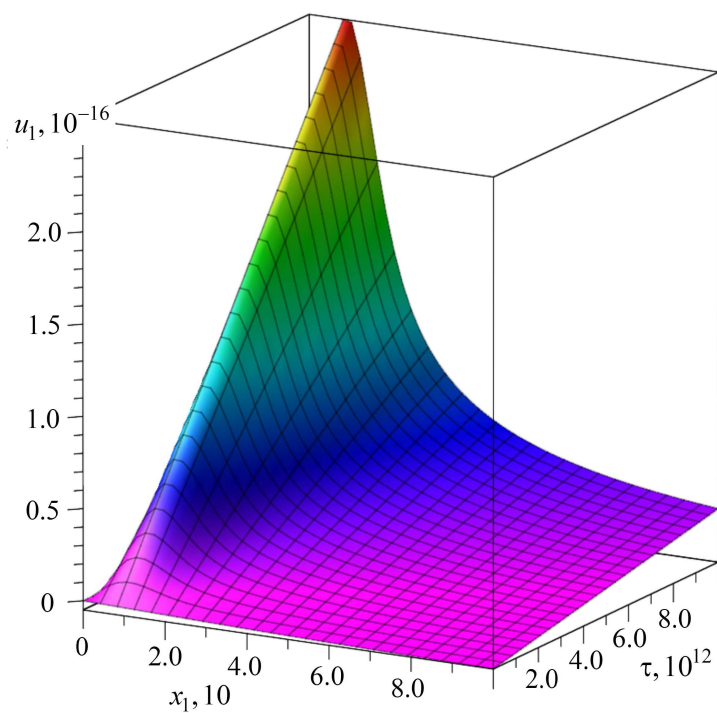


Рис. 3.4. Зависимость перемещения u_1 от x_1 и τ при $x_2 = 0.005$.

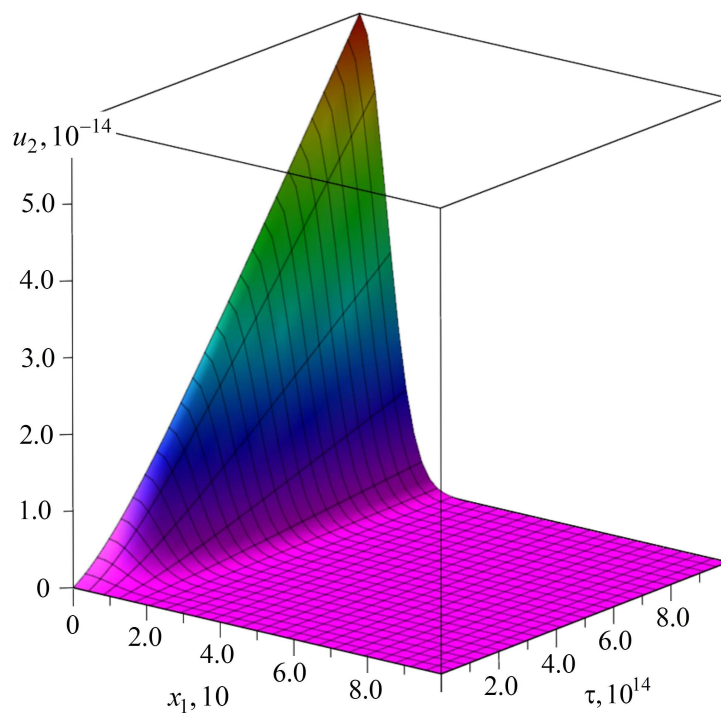


Рис. 3.5. Зависимость перемещения u_2 от x_1 и τ при $x_2 = 0.005$.

обратного синус-, косинус преобразования и $N_\omega = 100$ точек разбиения для вычисления обратного преобразования Фурье.

Замечание. Решение аналогичной задачи для изотропного слоя получено

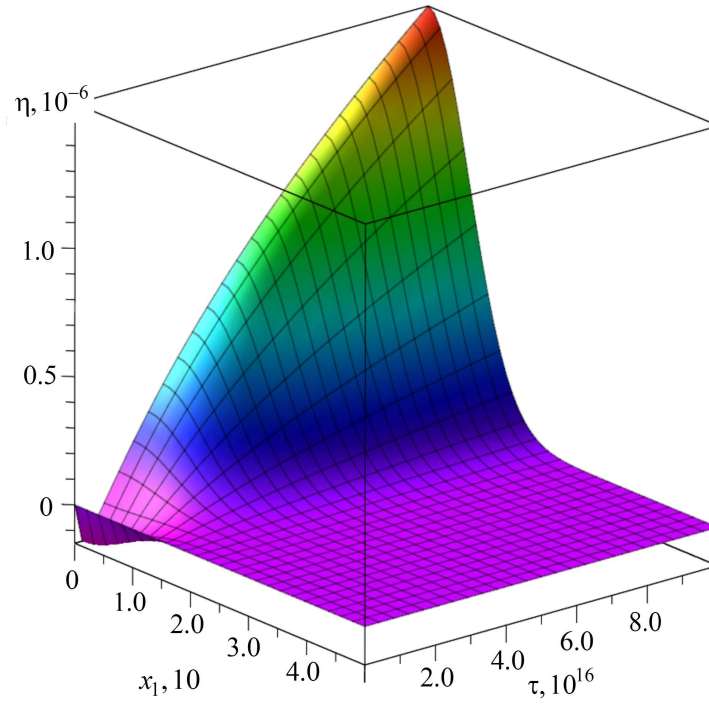


Рис. 3.6. Зависимость приращения концентрации η от x_1 и τ при $x_2 = 0.005$.

в работе [98]. При этом, несмотря на некоторые различия в решениях задач для изотропных и ортотропных сред, связанных различием в характере нулей многочленов P_0 и P явных качественных отличий при численных расчётах обнаружить не удалось.

Нормальная нагрузка. Слой. Полагаем, что правые части граничных условий (1.49) определяются равенствами

$$\begin{aligned} f_{31}(x_1, \tau) = f_{11}(x_1, \tau) = f_{12}(x_1, \tau) = f_{32}(x_1, \tau) &\equiv 0, \\ f_{21}(x_1, \tau) = f_{22}(x_1, \tau) &= e^{-\varepsilon^2 x_1^2} H(\tau), \quad \varepsilon = 0.1. \end{aligned}$$

Результаты вычислений продемонстрированы на рис. 3.7 – 3.9.

Объемные возмущения для ортотропной плоскости. Полагаем, что объемные возмущения заданы следующим образом

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \tau) &= e^{-\varepsilon^2(x_1^2 + x_2^2)} H(\tau), \quad \varepsilon = 0.1, \\ F_2(x_1, x_2, \tau) = F_3(x_1, x_2, \tau) &= 0. \end{aligned}$$

Результаты вычислений представлены на рис. 3.10 – 3.12.

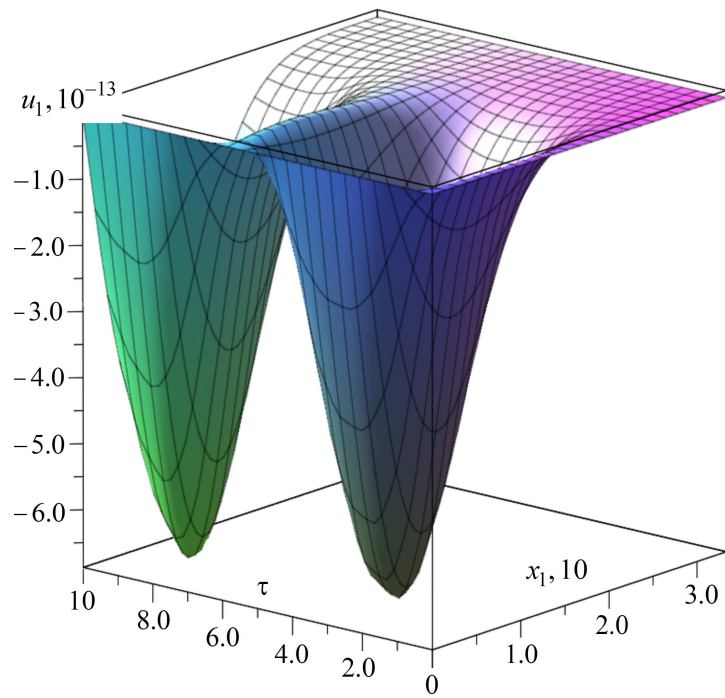


Рис. 3.7. Зависимость перемещения u_1 от x_1 и τ при $x_2 = 0.5$.

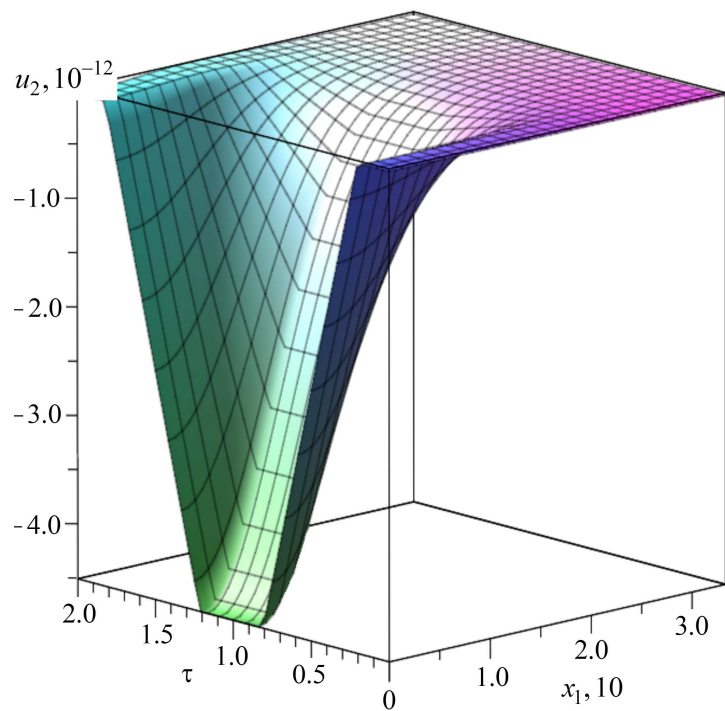


Рис. 3.8. Зависимость перемещения u_2 от x_1 и τ при $x_2 = 0.5$.

Расчёты проводились для $N_{\omega_1} = 100$ и $N_{\omega_2} = 100$ точек разбиения для вычисления обратного преобразования Фурье.

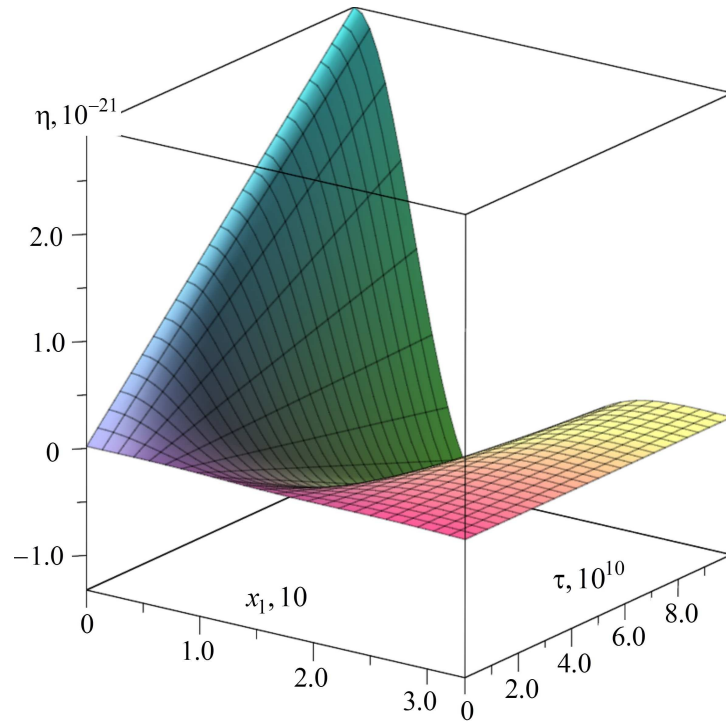


Рис. 3.9. Зависимость приращения концентрации η от x_1 и τ при $x_2 = 0.5$.

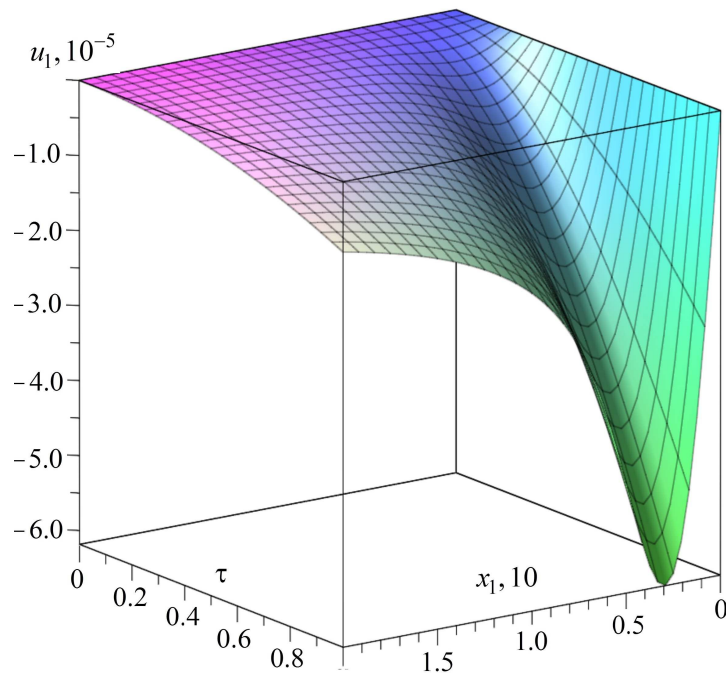


Рис. 3.10. Зависимость перемещения u_1 от x_1 и τ при $x_2 = 0.005$.

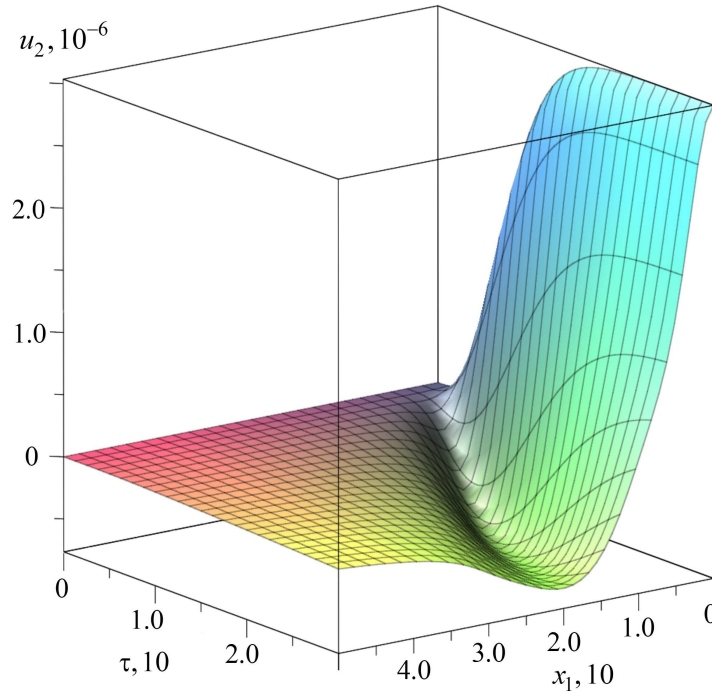


Рис. 3.11. Зависимость перемещения u_2 от x_1 и τ при $x_2 = 0.005$.

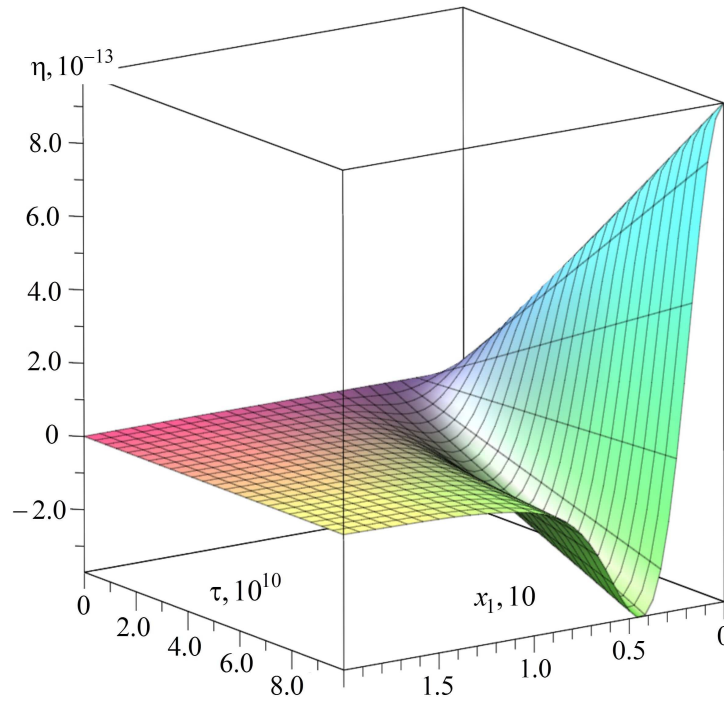


Рис. 3.12. Зависимость приращения концентрации η от x_1 и τ при $x_2 = 0.005$.

Глава 4

Нестационарные задачи механо-диффузии с произвольными граничными условиями

4.1. Общее описание алгоритма

В главах 2 и 3 настоящей работы были построены алгоритмы решения одномерных и двумерных нестационарных задач упругой диффузии со специальными граничными условиями, позволяющие строить решения в виде рядов (синус-, косинус преобразований) Фурье. Существенным достоинством этих алгоритмов является то, что они достаточно эффективно позволяют справиться с проблемой обращения преобразования Лапласа, так как трансформанты искомых величин являются рациональными функциями. В этом случае их оригиналы сравнительно легко находятся с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления.

С другой стороны, для данного алгоритма имеются существенные ограничения на классы допустимых граничных условий. Для одномерных задач это условия (1.45) – (1.47) и их аналоги для полуограниченных сред, для многомерных – условия (1.48) – (1.53). Как показано в п. 2.2, для других классов граничных условий не представляется возможным аналитически решить соответствующую задачу Штурма-Лиувилля. Между тем, изложенные в главах 2 и 3 методики базируются именно на представлении решений в виде разложений по собственным функциям, что можно сделать в исключительных случаях.

Для того чтобы построить решение начально-краевой задачи при произвольных граничных условиях предлагается алгоритм, основанный на построении соотношений между правыми частями граничных условий двух раз-

личных типов [95, 96, 230, 343]. Тогда достаточно решить какую-либо одну (эталонную) задачу, а все другие задачи с помощью построенных ниже соотношений будут сводиться к ней.

Рассмотрим произвольную начально-краевую задачу (1.40) – (1.42). Её решение записывается так

$$\mathbf{y} = \int_0^\tau \int_{\Pi} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \tau, t) \mathbf{f}(\mathbf{z}, t) d\Pi dt. \quad (4.1)$$

где $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \tau, t)$ – поверхностная матрица Грина задачи (1.40) – (1.42); $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$, $\mathbf{z} = (z^1, z^2, z^3)$, x^i, z^i – криволинейные координаты.

Наряду с ней рассмотрим начально-краевую задачу определяемую уравнением (1.40), нулевыми начальными условиями и следующими граничными условиями

$$\widetilde{\mathbf{M}}(\mathbf{y}) \Big|_{\Pi} = \mathbf{g}(\mathbf{s}, \tau), \quad \mathbf{s} = (x^1, x^2, x^3) \in \Pi. \quad (4.2)$$

Покажем, что решение этой задачи тоже можно выразить с помощью матрицы Грина $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \tau, t)$ задачи (1.40) – (1.42). В самом деле, потребуем, чтобы решение (4.1) задачи (1.40) – (1.42) удовлетворяло граничным условиям (4.2). Получаем уравнение относительно функции \mathbf{f} :

$$\int_0^\tau \int_{\Pi} \widetilde{\mathbf{M}}[\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \tau, t)] \mathbf{f}(\mathbf{z}, t) d\Pi dt = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \tau). \quad (4.3)$$

Оно устанавливает взаимосвязь между правыми частями граничных условий (1.41) и (4.2). Найдя отсюда решение \mathbf{f} , далее по формуле (4.1) получаем решение задачи (1.40) – (1.42). С другой стороны, полученное таким образом решение (4.1) в силу равенства (4.3) удовлетворяет граничному условию (4.2). Поэтому, формула (4.1) является решением задачи (1.40), (4.2), (1.42) при условии, что правые части граничных условий (4.2) и (1.41) связаны соотношением (4.3).

Таким образом, найдя матрицу Грина задачи (1.40) – (1.42), которую в дальнейшем будем называть «эталонной» или «вспомогательной», и решив уравнение (4.3), получаем решение задачи (1.40), (4.2), (1.42). В качестве эталонных будут рассматриваться задачи со специальными граничными условиями, решения которых было получено в главах 2 и 3.

Для начально-краевых задач упругой диффузии в прямоугольной декартовой системе координат (1.40) – (1.42) сформулированных в главе 1, уравнение (4.3) будет иметь вид (звёздочки – классические свертки по переменным x_1 и x_2)

$$\begin{aligned} & \int_0^{\tau} \widetilde{\mathbf{M}}_l [\mathbf{G}_1(\mathbf{x}, \tau - t)] * * \mathbf{f}_1(x_1, x_2, t) dt + \\ & + \int_0^{\tau} \widetilde{\mathbf{M}}_l [\mathbf{G}_2(\mathbf{x}, \tau - t)] * * \mathbf{f}_2(x_1, x_2, t) dt = \mathbf{g}_l(x_1, x_2, \tau) \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$(l = 1, x_3 = 0; \quad l = 2, x_3 = 1).$$

Здесь область решения задачи $D = \mathfrak{R}^2 \times [0, 1]$, её граница $\partial D = \Pi$ – плоскости $x_3 = 0$ и $x_3 = 1$, $\widetilde{\mathbf{M}}_l$ – линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами в прямоугольной декартовой системе координат, соответствующие граничным условиям определенным в п. 1.5.

Как следует из результатов полученных в конце п. 2.3, 2.4, 3.2 и 3.3 некоторые функции Грина в рассматриваемых задачах имеют неинтегрируемую особенность, что затрудняет численное решение уравнений (4.4). Это можно преодолеть, если в качестве ядер этих уравнений использовать не матрицы Грина, а матрицы \mathbf{G}_l^H , ($l = 1, 2$) являющиеся решением задачи, включающей в себя уравнения (1.40) нулевые начальные условия (1.42) и следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1 (\mathbf{G}_{kl}^H) \Big|_{x_3=0} &= \delta_{1l} \Delta_k H(\tau), \quad \mathbf{M}_2 (\mathbf{G}_{kl}^H) \Big|_{x_3=1} = \delta_{2l} \Delta_k H(\tau), \\ \Delta_k &= \delta(x_1, x_2) (\delta_{k1}, \delta_{k2}, \dots, \delta_{k, N+M})^T. \end{aligned} \quad (4.5)$$

где \mathbf{G}_{kl}^H – столбцы матрицы \mathbf{G}_l^H , \mathbf{M}_l – линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами в прямоугольной декартовой системе координат соответствующие эталонным граничным условиям (1.45), (1.46) или (1.47) (или их многомерным аналогам).

В этом случае матрицы \mathbf{G}_l^H связаны с матрицами Грина \mathbf{G}_l с помощью соотношений

$$\mathbf{G}_l^H(\mathbf{x}, \tau) = \int_0^\tau \mathbf{G}_l(\mathbf{x}, t) dt. \quad (4.6)$$

При этом, если элемент матрицы \mathbf{G}_l имел неинтегрируемую степенную особенность τ^α , где $\alpha \in (-2, -1)$, то соответствующий элемент матрицы \mathbf{G}_l^H будет иметь интегрируемую особенность $\tau^{\alpha+1}$.

Запишем теперь уравнения (4.4) с использованием ядер \mathbf{G}_l^H . Для этого интегралы в (4.4) проинтегрируем один раз по частям по переменной t :

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \widetilde{\mathbf{M}}_l [\mathbf{G}_1^H(\mathbf{x}, \tau - t)] * * \frac{\partial \mathbf{f}_1(x_1, x_2, t)}{\partial t} dt + \\ & + \int_0^\tau \widetilde{\mathbf{M}}_l [\mathbf{G}_2^H(\mathbf{x}, \tau - t)] * * \frac{\partial \mathbf{f}_2(x_1, x_2, t)}{\partial t} dt = \\ & = \mathbf{g}_l(x_1, x_2, \tau) - \widetilde{\mathbf{M}}_l [\mathbf{G}_1^H(\mathbf{x}, \tau)] * * \mathbf{f}_1(x_1, x_2, 0) - \\ & \quad - \widetilde{\mathbf{M}}_l [\mathbf{G}_2^H(\mathbf{x}, \tau)] * * \mathbf{f}_2(x_1, x_2, 0) \\ & \quad (l = 1, x_3 = 0; \quad l = 2, x_3 = 1). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Получаем систему интегральных уравнений Вольтерра относительно относительно частных производных $\partial \mathbf{f}_1 / \partial \tau$ и $\partial \mathbf{f}_k / \partial \tau$. Если это уравнение имеет особенность τ^α , где $\alpha \in (-1, 0)$, то домножим его на $(\xi - \tau)^{1-\alpha}$ и проинтегрируем в пределах от 0 до ξ [96, 171, 343]:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\xi} \widetilde{\mathbf{M}}_l [\mathbf{K}^1(\mathbf{x}, \xi - t)] * * \frac{\partial \mathbf{f}_1(x_1, x_2, t)}{\partial t} dt + \\
& + \int_0^{\xi} \widetilde{\mathbf{M}}_l [\mathbf{K}^2(\mathbf{x}, \xi - t)] * * \frac{\partial \mathbf{f}_2(x_1, x_2, t)}{\partial t} dt = \\
& = \Phi^l(x_1, x_2, \xi) - \widetilde{\mathbf{M}}_l [\mathbf{K}^1(\mathbf{x}, \xi)] * * \mathbf{f}_1(x_1, x_2, 0) - \\
& \quad - \widetilde{\mathbf{M}}_l [\mathbf{K}^2(\mathbf{x}, \xi)] * * \mathbf{f}_2(x_1, x_2, 0),
\end{aligned} \tag{4.8}$$

где

$$\mathbf{K}^l(\mathbf{x}, \zeta) = \int_0^{\zeta} \frac{\mathbf{G}_l^H(\mathbf{x}, \zeta - x)}{x^{1-\alpha}} dx, \quad \Phi^l(x_1, x_2, \xi) = \int_0^{\xi} \frac{\mathbf{g}_l(x_1, x_2, \tau)}{(\xi - \tau)^{1-\alpha}} d\tau.$$

Полученное уравнение является уравнением с непрерывным ядром. Полагая $\xi = 0$, получаем условия, которым должна удовлетворять функция $\mathbf{f}_k(x_1, x_2, 0)$:

$$\begin{aligned}
& \widetilde{\mathbf{M}}_l [\mathbf{K}^1(\mathbf{x}, 0)] * * \mathbf{f}_1(x_1, x_2, 0) + \\
& + \widetilde{\mathbf{M}}_l [\mathbf{K}^2(\mathbf{x}, 0)] * * \mathbf{f}_2(x_1, x_2, 0) = 0.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Таким образом, в случае наличия у функций Грина особенности τ^α , где $\alpha \in (-2, -1)$, задача (1.40), (1.42), (4.1) сводится к решению системы линейных уравнений Вольтерра (4.8) и системы уравнений (4.9).

4.2. Одномерные задачи упругой диффузии с произвольными граничными условиями

Для демонстрации алгоритма рассмотрим одномерную начально-краевую задачу для уравнения (1.31) с нулевыми начальными условиями и с граничными условиями (1.43), которые запишем в виде:

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= f_{11}^1(\tau), & \eta_q|_{x=0} &= f_{q+1,1}^1(\tau), \\ u|_{x=1} &= f_{12}^1(\tau), & \eta_q|_{x=1} &= f_{q+1,2}^1(\tau). \end{aligned} \quad (4.10)$$

В соответствии с подходом, изложенным в п. 4.1, для её решения используем вспомогательную задачу, определяемую уравнениями (1.31), нулевыми начальными условиями и граничными условиями (1.46):

$$\begin{aligned} \left(u' - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_{j+1} \right) \Big|_{x=0} &= f_{11}^2(\tau), & \eta_q \Big|_{x=0} &= f_{q+1,1}^2(\tau), \\ \left(u' - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_{j+1} \right) \Big|_{x=1} &= f_{12}^2(\tau), & \eta_q \Big|_{x=1} &= f_{q+1,2}^2(\tau), \end{aligned}$$

где с учетом (4.10) имеют место равенства

$$f_{q+1,l}^2(\tau) = f_{q+1,l}^1(\tau) \quad (l = 1, 2). \quad (4.11)$$

Ее решение имеет вид (2.7):

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k=1}^{N+1} [G_{1k}(x, \tau) * f_{k1}^2(\tau) - G_{1k}(1-x, \tau) * f_{k2}^2(\tau)], \\ \eta_q &= \sum_{k=1}^{N+1} [G_{q+1,k}(x, \tau) * f_{k1}^2(\tau) + G_{q+1,k}(1-x, \tau) * f_{k2}^2(\tau)]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Здесь G_{mk} - функции Грина задачи (1.31), (1.46), найденные в п. 2.4.

Полагая теперь, что решение эталонной задачи удовлетворяет соотношениям

$$u(0, \tau) = f_{11}^1(\tau), \quad u(1, \tau) = f_{12}^1(\tau),$$

и учитывая равенства (4.11), приходим к системе уравнений Вольтера типа свёртки относительно функций $f_{11}^2(\tau)$ и $f_{12}^2(\tau)$:

$$\begin{aligned} G_{11}(0, \tau) * f_{11}^2(\tau) - G_{11}(1, \tau) * f_{12}^2(\tau) &= \varphi_1(\tau), \\ G_{11}(1, \tau) * f_{11}^2(\tau) - G_{11}(0, \tau) * f_{12}^2(\tau) &= \varphi_2(\tau), \end{aligned} \quad (4.13)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1(\tau) &= f_{11}^1(\tau) - \sum_{k=2}^{N+1} [G_{1k}(0, \tau) * f_{k1}^1(\tau) - G_{1k}(1, \tau) * f_{k2}^1(\tau)], \\ \varphi_2(\tau) &= f_{12}^1(\tau) - \sum_{k=2}^{N+1} [G_{1k}(1, \tau) * f_{k1}^1(\tau) - G_{1k}(0, \tau) * f_{k2}^1(\tau)]. \end{aligned}$$

Замечание 1. В качестве вспомогательной здесь можно было бы выбрать и задачу (1.31), (1.45). Однако, в этом случае система (4.13) содержала бы $N(N+1)$ уравнение относительно такого же количества неизвестных. Таким образом, правильный выбор эталонной задачи может существенно облегчить реализацию алгоритма, изложенного в п. 4.1. Отметим, что в случае однокомпонентной среды [343] в качестве такой задачи можно с одинаковым успехом использовать как задачу (1.31), (1.45), так и задачу (1.31), (1.46).

Уравнения (4.13) решаются численно с помощью квадратурных формул. Здесь, основной сложностью является то, что ядра интегральных операторов могут иметь особенности, затрудняющие использование квадратурных формул.

В данном конкретном случае, как следует из формул (2.62) трансформанты функций $G_{11}(0, \tau)$ и $G_{11}(1, \tau)$ имеют вид

$$\begin{aligned} G_{11}^L(0, s) &= -\frac{1}{s^2} + \sum_{n=1}^{\infty} G_{11}^{Lc}(\lambda_n, s), \quad G_{11}^{Lc} = \frac{P_{11}(\lambda_n, s)}{P(\lambda_n, s)}, \\ G_{11}^L(1, s) &= -\frac{1}{s^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n G_{11}^{Lc}(\lambda_n, s). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Здесь многочлены $P(\lambda_n, s)$ и $P_{11}(\lambda_n, s)$ определяются по формулам (2.37)

и (2.63). При этом

$$G_{11}^{Lc}(\lambda_n, s) = \frac{P_{11}(\lambda_n, s)}{P(\lambda_n, s)} \sim \frac{1}{n^2} \quad (n \rightarrow \infty). \quad (4.15)$$

Оригиналы $G_{11}(0, \tau)$ и $G_{11}(1, \tau)$ имеют вид

$$G_{11}(0, \tau) = -\tau + \sum_{n=1}^{\infty} G_{11}^c(\lambda_n, \tau), \quad G_{11}(1, \tau) = -\tau + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n G_{11}^c(\lambda_n, \tau),$$

где, функции G_{11}^c определяются по формулам (2.62).

Из (4.15) следует, что ряды, стоящие в правой части (4.14) сходятся абсолютно. Таким образом, функции Грина $G_{11}(0, \tau)$ и $G_{11}(1, \tau)$ задачи (1.31), (1.46) не имеют особенностей и численное решение системы (4.13) в данном случае сложностей не вызывает.

Для решения системы (4.13) разбиваем область $[0, T]$ изменения времени τ на N_τ отрезков точками $\tau_i = ih$ ($i = \overline{0, N_\tau}$) с равномерным шагом $h = T/N_\tau$ и вводим сеточные функции $y_j^k = f_{1k}^2(\tau_j)$, $K_j^1 = G_{11}(0, \tau_j)$, $K_j^2 = G_{11}(1, \tau_j)$, где $j \in \mathfrak{R}$.

Каждый из интегралов в (4.13) при $\tau = \tau_i$ приближенно заменяем суммой, соответствующей формуле средних прямоугольников:

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_i} G_{11}(0, \tau_i - t) f_{1k}^2(t) dt &\approx h S_{i-1/2}^{1k} + h K_{1/2}^1 y_{i-1/2}^k, \\ \int_0^{\tau_i} G_{11}(1, \tau_i - t) f_{1k}^2(t) dt &\approx h S_{i-1/2}^{2k} + h K_{1/2}^2 y_{i-1/2}^k, \\ S_{i-1/2}^{lk} &= \sum_{j=1}^{i-1} K_{i-j+1/2}^k \quad (k, l = 1, 2), \end{aligned}$$

где узлы находятся по формулам

$$\begin{aligned}\tau_{i-1/2} &= \frac{\tau_{i-1} + \tau_i}{2} = h \left(i - \frac{1}{2} \right), \\ \tau_{i-j+1/2} &= \tau_i - \tau_{j-1/2} = h \left(i - j + \frac{1}{2} \right) \quad (i = \overline{1, N_\tau}).\end{aligned}\tag{4.16}$$

В результате приходим к рекуррентной последовательности систем линейных алгебраических уравнений ($i \geq 1$):

$$\mathbf{A} \mathbf{y}_{i-1/2} = \mathbf{b}_{i-1/2},\tag{4.17}$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} K_{1/2}^1 & -K_{1/2}^2 \\ -K_{1/2}^2 & K_{1/2}^1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_{i-1/2} = \begin{pmatrix} y_{i-1/2}^1 \\ y_{i-1/2}^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_{i-1/2} = \begin{pmatrix} b_{i-1/2}^1 \\ b_{i-1/2}^2 \end{pmatrix}, \\ b_{i-1/2}^1 &= \frac{\varphi_1(\tau_{i-1/2})}{h} - S_{i-1/2}^{11} + S_{i-1/2}^{22}, \\ b_{i-1/2}^2 &= -\frac{\varphi_2(\tau_{i-1/2})}{h} + S_{i-1/2}^{21} - S_{i-1/2}^{12} \quad (i \geq 1).\end{aligned}$$

Её решение имеет вид:

$$y_{i-1/2}^1 = \frac{K_{1/2}^1 b_{i-1/2}^1 + K_{1/2}^2 b_{i-1/2}^2}{(K_{1/2}^1)^2 - (K_{1/2}^2)^2}, \quad y_{i-1/2}^2 = \frac{K_{1/2}^2 b_{i-1/2}^1 + K_{1/2}^1 b_{i-1/2}^2}{(K_{1/2}^1)^2 - (K_{1/2}^2)^2}.\tag{4.18}$$

Подставляя его в (4.12), получаем решение исходной задачи (1.31), (4.10). При этом свертки в (4.12) находятся численно по узлам определённым равенствами (4.16).

Для примера рассмотрим однокомпонентную среду из алюминия физические характеристики которой заданы соотношениями (2.99) и положим в граничных условиях (4.10):

$$u|_{x=0} = f_{11}^1(\tau) = H(\tau), \quad \eta|_{x=0} = 0, \quad \eta|_{x=1} = 0, \quad u|_{x=1} = 0.\tag{4.19}$$

Перемещение в различных точках слоя, полученные по формулам (4.12), при количестве точек разбиения $N_\tau = 100$ и количестве членов рядов Фурье $N_\lambda = 400$ показаны на рис. 4.1.

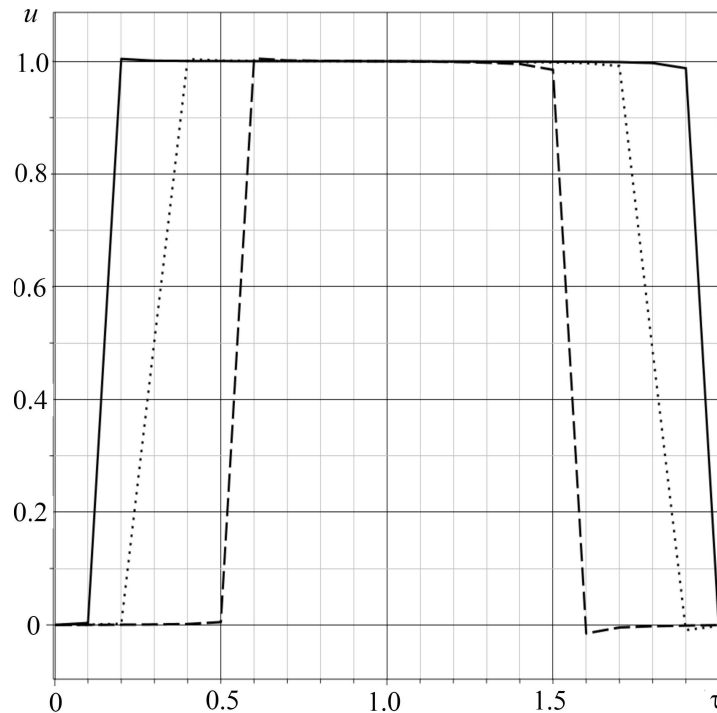


Рис. 4.1. Зависимость $u(x, \tau)$ от времени: $x = 0.1$ - сплошная линия, $x = 0.25$ - точечная линия, $x = 0.5$ - пунктирная линия.

На рис. 4.2 – 4.4 изображены результаты сравнения полученного здесь решения с решением чисто упругой задачи с граничными условиями 1-го рода

$$u|_{x=0} = H(\tau), \quad u|_{x=1} = 0.$$

Хорошо видно, что в начальные моменты времени (рис. 4.2 и 4.3) решение упруго-диффузионной задачи и упругой практически совпадают. При этом фронт упруго-диффузионной волны несколько запаздывает по отношению к фронту упругой волны. Так на рисунке 4.2 показано движение волн от поверхности $x = 0$ к поверхности $x = 1$ в момент времени $\tau = 0.5$ (половина периода), а на рисунке 4.3 движение в обратную сторону при $\tau = 1.5$.

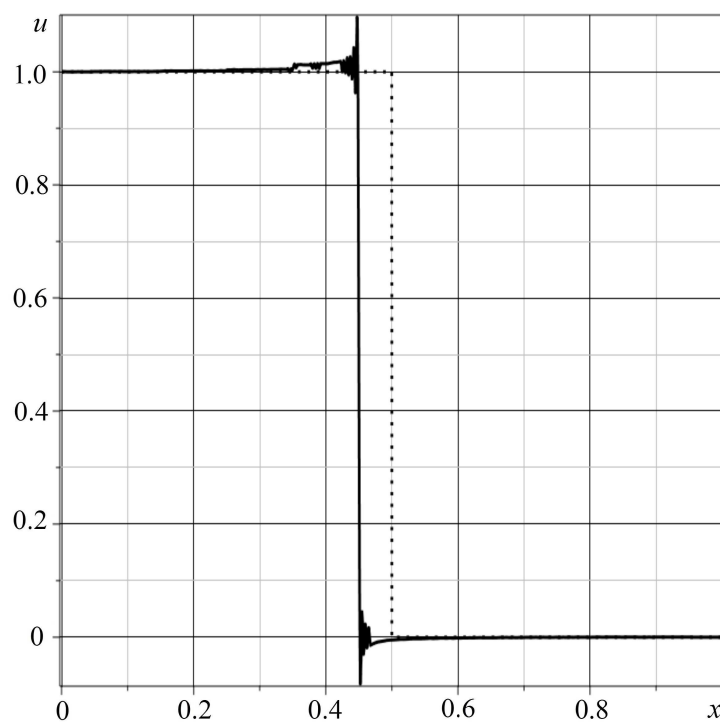


Рис. 4.2. Сплошная линия – решение задачи (1.31), (4.10) при $\tau = 0.5$; точечная линия – решение чисто упругой задачи при $\tau = 0.5$.

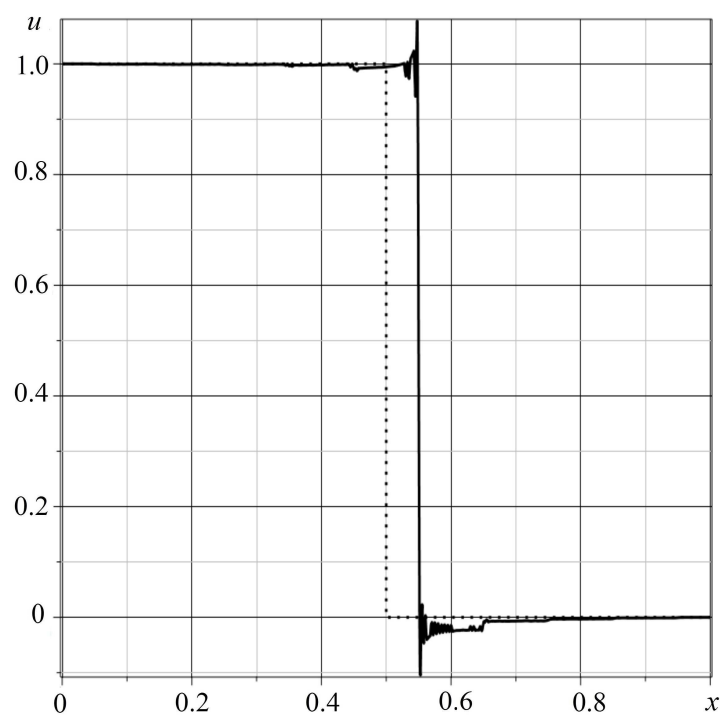


Рис. 4.3. Сплошная линия – решение задачи (1.31), (4.10) при $\tau = 1.5$; точечная линия – решение чисто упругой задачи при $\tau = 1.5$.

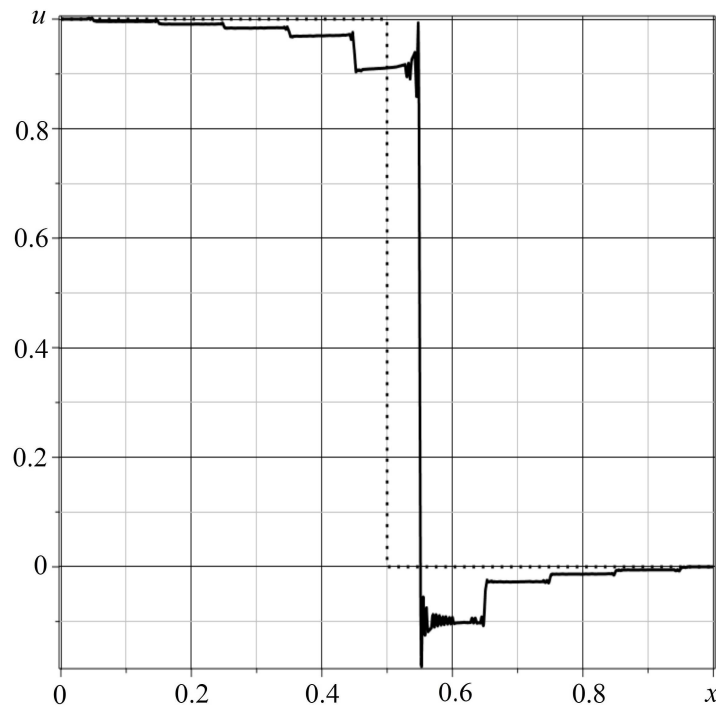


Рис. 4.4. Сплошная линия – решение задачи (1.31), (4.10) при $\tau = 9.5$; точечная линия – решение чисто упругой задачи при $\tau = 9.5$.

Однако при увеличении времени характер решений упругой и упругодиффузионной задачи начинает различаться. На рисунке 4.4 показано движение волн в момент времени $\tau = 9.5$. Здесь различие в решениях наблюдается гораздо сильнее нежели на рисунках 4.2 и 4.3. Наличие осцилляций в угловых точках графиков на всех трёх рисунках можно объяснить эффектом Гиббса, который проявляется при использовании представлений решений начально-краевых задач в виде рядов Фурье.

4.3. Двумерные задачи упругой диффузии с произвольными граничными условиями

Рассмотрим теперь в качестве примера двумерную задачу для однокомпонентной ($N = 1$) ортотропной полосы, ограниченной прямыми $x_2 = 0$ и $x_2 = 1$ (Ox_1x_2 - прямоугольная декартова система координат). Соответствующие физико-механические процессы в среде описываются моделью связанной упругой диффузии, включающей уравнения (1.34), нулевые начальные условия и следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \sigma_{12}|_{x_2=0} &= f_{11}^1(x_1, \tau), & u_2|_{x_2=0} &= f_{21}^1(x_1, \tau), & \eta|_{x_2=0} &= f_{31}^1(x_1, \tau), \\ \sigma_{12}|_{x_2=1} &= f_{12}^1(x_1, \tau), & u_2|_{x_2=1} &= f_{22}^1(x_1, \tau), & \eta|_{x_2=1} &= f_{32}^1(x_1, \tau). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Будем искать её решение с помощью алгоритма изложенного в п. 4.1. Для этого в качестве вспомогательной используем задачу (1.34), (1.48) с нулевыми начальными условиями, решение которой было получено в п. 3.2 (звездочки обозначают свёртку по времени τ и координате x_1):

$$\begin{aligned} u_i &= \sum_{k=1}^3 [G_{ik}(x_1, x_2, \tau) ** f_{k1}^2(x_1, \tau) + \\ &+ (-1)^i G_{ik}(x_1, 1 - x_2, \tau) ** f_{k2}^2(x_1, \tau)], \\ \eta &= \sum_{k=1}^3 [G_{3k}(x_1, x_2, \tau) ** f_{k1}^2(x_1, \tau) - \\ &- G_{3k}(x_1, 1 - x_2, \tau) ** f_{k2}^2(x_1, \tau)]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Здесь G_{mk} и G_{3k} ($m, k = \overline{1, 3}$) - функции Грина задачи (1.34), (1.48), найденные в п. 3.2, f_{km}^2 - правые части граничных условий (1.48).

В соответствии с предложенным в п. 4.1 алгоритмом полагаем, что решение эталонной задачи удовлетворяет равенствам

$$\eta(x_1, 0, \tau) = f_{31}^1(x_1, \tau), \quad \eta(x_1, 1, \tau) = f_{32}^1(x_1, \tau).$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} f_{21}^1(x_1, \tau) &= f_{21}^2(x_1, \tau), & f_{22}^1(x_1, \tau) &= f_{22}^2(x_1, \tau), \\ f_{11}^1(x_1, \tau) &= f_{11}^2(x_1, \tau), & f_{12}^1(x_1, \tau) &= f_{12}^2(x_1, \tau), \end{aligned}$$

приходим к системе уравнений типа свёртки относительно функций $f_{31}^2(x_1, \tau)$ и $f_{32}^2(x_1, \tau)$:

$$\begin{aligned} G_{33}(x_1, 0, \tau) ** f_{31}^2(x_1, \tau) - G_{33}(x_1, 1, \tau) ** f_{32}^2(x_1, \tau) &= \varphi_1(x_1, \tau), \\ G_{33}(x_1, 1, \tau) ** f_{31}^2(x_1, \tau) - G_{33}(x_1, 0, \tau) ** f_{32}^2(x_1, \tau) &= \varphi_2(x_1, \tau), \end{aligned} \quad (4.22)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, \tau) &= f_{31}^1(x_1, \tau) - \\ &- \sum_{k=1}^2 [G_{3k}(x_1, 0, \tau) ** f_{k1}^1(x_1, \tau) - G_{3k}(x_1, 1, \tau) ** f_{k2}^1(x_1, \tau)], \\ \varphi_2(x_1, \tau) &= f_{32}^1(x_1, \tau) - \\ &- \sum_{k=1}^2 [G_{3k}(x_1, 1, \tau) ** f_{k1}^1(x_1, \tau) - G_{3k}(x_1, 0, \tau) ** f_{k2}^1(x_1, \tau)]. \end{aligned}$$

Полученная система является двумерным аналогом уравнений (4.4). Выполняя далее в (4.22) преобразование Фурье по переменной x_1 , получаем систему интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода (здесь «**» - свертка по времени):

$$\begin{aligned} G_{33}^F(\omega, 0, \tau) * f_{31}^{2F}(\omega, \tau) - G_{33}^F(\omega, 1, \tau) * f_{32}^{2F}(\omega, \tau) &= \varphi_1^F(\omega, \tau), \\ G_{33}^F(\omega, 1, \tau) * f_{31}^{2F}(\omega, \tau) - G_{33}^F(\omega, 0, \tau) * f_{32}^{2F}(\omega, \tau) &= \varphi_2^F(\omega, \tau), \end{aligned} \quad (4.23)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1^F(\omega, \tau) &= f_{31}^{1F}(\omega, \tau) - \\ &- \sum_{k=1}^2 [G_{3k}^F(\omega, 0, \tau) * f_{k1}^{1F}(\omega, \tau) - G_{3k}^F(\omega, 1, \tau) * f_{k2}^{1F}(\omega, \tau)], \\ \varphi_2^F(\omega, \tau) &= f_{32}^{1F}(\omega, \tau) - \\ &- \sum_{k=1}^2 [G_{3k}^F(\omega, 1, \tau) * f_{k1}^{1F}(\omega, \tau) - G_{3k}^F(\omega, 0, \tau) * f_{k2}^{1F}(\omega, \tau)]. \end{aligned}$$

Здесь функции $G_{33}^F(\omega, 0, \tau)$, $G_{33}^F(\omega, 1, \tau)$ имеют особенность при $\tau = 0$. Согласно формулам (3.48) и (3.49) имеем:

$$G_{33}^F(\omega, 0, \tau) = e^{-D_1\omega^2\tau} \vartheta_3\left(0, e^{-D_2\pi^2\tau}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} G_{33}^{Fc}(\omega, \lambda_n, \tau),$$

$$G_{33}^F(\omega, 1, \tau) = e^{-D_1\omega^2\tau} \vartheta_3\left(\frac{1}{2}, e^{-D_2\pi^2\tau}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n G_{33}^{Fc}(\omega, \lambda_n, \tau).$$

Тета-функция Якоби $\vartheta_3(x_2/2, e^{-D_2\pi^2\tau})$ имеет при $x_2 = 0$ и $\tau \rightarrow 0$ интегрируемую особенность $\tau^{-1/2}$. Следовательно, такую же особенность имеет и функция $G_{33}^F(\omega, 0, \tau)$.

В соответствии с (4.8) домножаем каждое из уравнений системы (4.23) на $(\xi - \tau)^{1/2}$ и проинтегрируем в пределах от 0 до ξ . В результате получаем систему с непрерывными ядрами [96, 171, 343]:

$$\int_0^{\xi} K^1(\omega, \xi - t) f_{31}^{2F}(\omega, t) dt - \int_0^{\xi} K^2(\omega, \xi - t) f_{32}^{2F}(\omega, t) dt = \Phi^1(\omega, \xi),$$

$$\int_0^{\xi} K^2(\omega, \xi - t) f_{31}^{2F}(\omega, t) dt - \int_0^{\xi} K^1(\omega, \xi - t) f_{32}^{2F}(\omega, t) dt = \Phi^2(\omega, \xi),$$
(4.24)

где

$$K^1(\omega, \zeta) = \int_0^{\zeta} \frac{G_{33}^F(\omega, 0, \zeta - x) dx}{x^{1/2}}, \quad K^2(\omega, \zeta) = \int_0^{\zeta} \frac{G_{33}^F(\omega, 1, \zeta - x) dx}{x^{1/2}},$$

$$\Phi^k(\omega, \xi) = \int_0^{\xi} \frac{\varphi_k^F(\omega, \tau) d\tau}{(\xi - \tau)^{1/2}}.$$

Как и прежде, для решения системы (4.24) используем квадратурные формулы. Разбиваем область $[0, T]$ изменения времени τ на N_τ отрезков точками $\tau_i = ih$ с равномерным шагом $h = T/N_\tau$ и вводим сеточные функции $y_j^k = f_{3k}^{2F}(\omega, t_j)$, $K_j^k = K^k(\omega, \zeta_j)$. Каждый из интегралов в (4.24) при $\tau = \tau_i$

приближенно заменяем суммой, соответствующей формуле средних прямоугольников:

$$\int_0^{\xi_i} K^l(\omega, \xi_i - t) f_{3k}^{2F}(\omega, t) dt \approx h S_{i-1/2}^{lk}(\omega) + h K_{1/2}^l(\omega) y_{i-1/2}^k(\omega),$$

$$S_{i-1/2}^{lk}(\omega) = \sum_{j=1}^{i-1} K_{i-j+1/2}^l(\omega) y_{j-1/2}^k(\omega) \quad (k, l = 1, 2),$$

где узлы находятся по формулам (4.16):

$$\xi_{i-1/2} = \frac{\xi_{i-1} + \xi_i}{2} = h \left(i - \frac{1}{2} \right),$$

$$\xi_{i-j+1/2} = \xi_i - \xi_{j-1/2} = h \left(i - j + \frac{1}{2} \right) \quad (i = \overline{1, N_\tau}).$$

В результате, получаем рекуррентную последовательность систем линейных алгебраических уравнений (4.17), где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} K_{1/2}^1 & -K_{1/2}^2 \\ -K_{1/2}^2 & K_{1/2}^1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_{i-1/2} = \begin{pmatrix} y_{i-1/2}^1 \\ y_{i-1/2}^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_{i-1/2} = \begin{pmatrix} b_{i-1/2}^1 \\ b_{i-1/2}^2 \end{pmatrix},$$

$$b_{i-1/2}^1(\omega) = \frac{\Phi^1(\omega, \xi_{i-1/2})}{h} - S_{i-1/2}^{11}(\omega) + S_{i-1/2}^{22}(\omega),$$

$$b_{i-1/2}^2(\omega) = -\frac{\Phi^2(\omega, \xi_{i-1/2})}{h} + S_{i-1/2}^{21}(\omega) - S_{i-1/2}^{12}(\omega) \quad (i \geq 1).$$

Её решение имеет вид (4.18). Подставляя его в (4.21), получаем решение исходной задачи (1.34), (4.20).

В качестве примера полагаем в (4.20):

$$f_{11}^1(x_1, \tau) = f_{21}^1(x_1, \tau) = f_{12}^1(x_1, \tau) = f_{22}^1(x_1, \tau) = f_{32}^1(x_1, \tau) \equiv 0,$$

$$f_{31}^1(x_1, \tau) = e^{-\varepsilon^2 x_1^2} H(\tau), \quad \varepsilon = 0.1.$$

Тогда правые части системы (4.23) определяются так:

$$\varphi_1^F(\omega, \tau) = f_{31}^{1F}(\omega, \tau) = f(\omega) H(\tau),$$

$$f(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon}, \quad e^{-\omega^2/(4\varepsilon^2)}, \quad \varphi_2^F(\omega, \tau) = 0.$$

Ядра $K^k(\omega, \zeta)$ и правые части $\Phi^k(\omega, \xi)$ системы (4.24), найденные с помощью таблиц интегралов и рядов [173], имеют вид:

$$\begin{aligned}
K^1(\omega, \zeta) &= J_4(-D_1\omega^2, -D_2\pi^2, \zeta) + \\
&+ B_{33}^{(01)} e^{s_{03}\zeta} J_3(s_{03}, \zeta) + B_{33}^{(02)} e^{-D_1\omega^2\zeta} J_3(-D_1\omega^2, \zeta) + \\
&+ e^{\gamma_0\zeta} J_1(\gamma_0, \beta_0, \zeta) \left(A_{33}^{(01)} \cos \beta_0\zeta - A_{33}^{(02)} \sin \beta_0\zeta \right) + \\
&+ e^{\gamma_0\zeta} J_2(\gamma_0, \beta_0, \zeta) \left(A_{33}^{(01)} \sin \beta_0\zeta + A_{33}^{(02)} \cos \beta_0\zeta \right) + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_{33}^{(11)} e^{s_5\zeta} J_3(s_5, \zeta) + B_{33}^{(12)} e^{-(D_2\lambda_n^2 + D_1\omega^2)\zeta} J_3(-(D_2\lambda_n^2 + D_1\omega^2), \zeta) \right] + \\
&+ \sum_{r=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{\gamma_r\zeta} J_1(\gamma_r, \beta_r, \zeta) \left(A_{33}^{(r1)} \cos \beta_r\zeta - A_{33}^{(r2)} \sin \beta_r\zeta \right) + \\
&+ \sum_{r=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{\gamma_r\zeta} J_2(\gamma_r, \beta_r, \zeta) \left(A_{33}^{(r1)} \sin \beta_r\zeta + A_{33}^{(r2)} \cos \beta_r\zeta \right), \\
K^2(\omega, \zeta) &= J_5(-D_1\omega^2, -D_2\pi^2, \zeta) + \\
&+ B_{33}^{(01)} e^{s_{03}\zeta} J_3(s_{03}, \zeta) + B_{33}^{(02)} e^{-D_1\omega^2\zeta} J_3(-D_1\omega^2, \zeta) + \\
&+ e^{\gamma_0\zeta} J_1(\gamma_0, \beta_0, \zeta) \left(A_{33}^{(01)} \cos \beta_0\zeta - A_{33}^{(02)} \sin \beta_0\zeta \right) + \\
&+ e^{\gamma_0\zeta} J_2(\gamma_0, \beta_0, \zeta) \left(A_{33}^{(01)} \sin \beta_0\zeta + A_{33}^{(02)} \cos \beta_0\zeta \right) + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[B_{33}^{(11)} e^{s_5\zeta} J_3(s_5, \zeta) + B_{33}^{(12)} e^{-(D_2\lambda_n^2 + D_1\omega^2)\zeta} J_3(-(D_2\lambda_n^2 + D_1\omega^2), \zeta) \right] + \\
&+ \sum_{r=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{\gamma_r\zeta} J_1(\gamma_r, \beta_r, \zeta) \left(A_{33}^{(r1)} \cos \beta_r\zeta - A_{33}^{(r2)} \sin \beta_r\zeta \right) + \\
&+ \sum_{r=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{\gamma_r\zeta} J_2(\gamma_r, \beta_r, \zeta) \left(A_{33}^{(r1)} \sin \beta_r\zeta + A_{33}^{(r2)} \cos \beta_r\zeta \right), \\
\Phi^1(\xi) &= f(\omega) \int_0^{\xi} \frac{d\tau}{(\xi - \tau)^{1/2}} = 2f(\omega) \sqrt{\xi}, \quad \Phi^2(\xi) = 0.
\end{aligned}$$

где величины $A_{33}^{(0l)} = A_{33}^{(0l)}(\omega)$, $B_{33}^{(0p)} = B_{33}^{(0p)}(\omega)$, $A_{33}^{(rl)} = A_{33}^{(rl)}(\omega, \lambda_n)$ и $B_{33}^{(1p)} = B_{33}^{(1p)}(\omega, \lambda_n)$ находятся по формулам (3.46). Здесь же определяются величины $\gamma_0 = \gamma_0(\omega)$, $\beta_0 = \beta_0(\omega)$, $s_{03} = s_{03}(\omega)$, $\gamma_r = \gamma_r(\omega, \lambda_n)$, $\beta_r = \beta_r(\omega, \lambda_n)$ и

$s_5 = s_5(\omega, \lambda_n)$. Остальные функции вычисляются следующим образом

$$\begin{aligned}
 J_1(x, y, z) &= \int_0^z \frac{e^{-x\zeta} \cos y\zeta}{\zeta^{1/2}} d\zeta = \operatorname{Re} \left[\sqrt{\frac{\pi}{-x + iy} \operatorname{erfi} \sqrt{(-x + iy)z}} \right], \\
 J_2(x, y, z) &= \int_0^z \frac{e^{-x\zeta} \sin y\zeta}{\zeta^{1/2}} d\zeta = \operatorname{Im} \left[\sqrt{\frac{\pi}{-x + iy} \operatorname{erfi} \sqrt{(-x + iy)z}} \right], \\
 J_3(x, z) &= \int_0^z \frac{e^{-x\zeta}}{\zeta^{1/2}} d\zeta = \sqrt{\frac{\pi}{-x} \operatorname{erfi} \sqrt{(-x)z}}, \\
 J_4(x, y, z) &= \int_0^z \frac{e^{x(z-\zeta)} \vartheta_3(0, e^{y(z-\zeta)})}{\sqrt{\zeta}} d\zeta, \\
 J_5(x, y, z) &= \int_0^z \frac{e^{x(z-\zeta)} \vartheta_0(0, e^{y(z-\zeta)})}{\sqrt{\zeta}} d\zeta.
 \end{aligned}$$

Здесь, $\operatorname{erfi}(x) = i \operatorname{erf}(ix)$, $\operatorname{erf}(x)$ – интеграл вероятности (Функция Лапласа) [1, 173]. Интегралы J_4 и J_5 вычисляются с помощью асимптотических представлений тета-функций [89] и таблиц интегралов [173]:

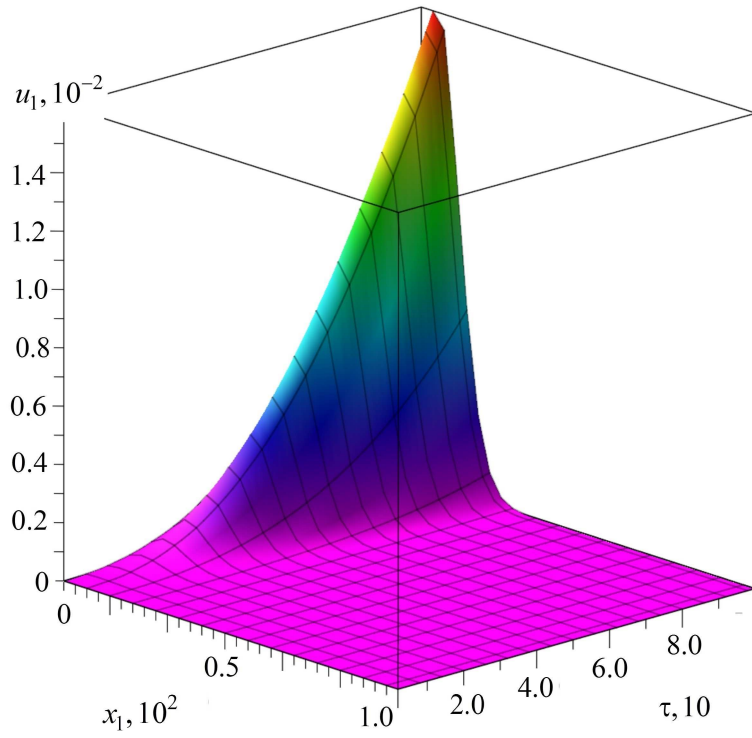
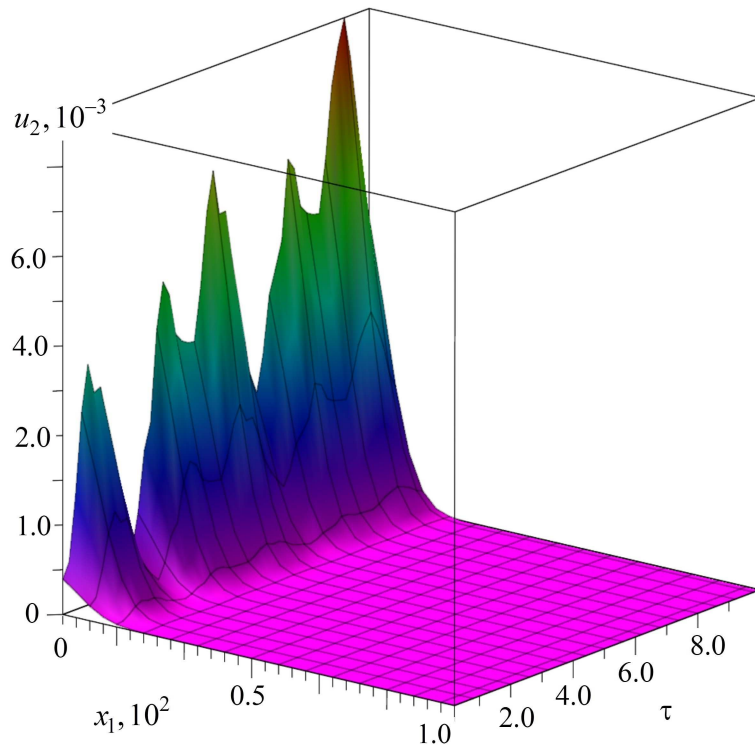
$$\begin{aligned}
 J_4(-D_1\omega^2, -D_2\pi^2, \zeta) &\approx \sqrt{D_2\pi} e^{-D_1\omega^2\zeta/2} + \\
 &+ D_2(2S_0 + 1 - \sqrt{\pi}) e^{-D_1\omega^2\zeta} I^{(3)}(-D_1\omega^2, \zeta).
 \end{aligned}$$

$$J_5(-D_1\omega^2, -D_2\pi^2, \zeta) \approx 0, \quad D_2\pi^2\zeta \ll 1.$$

Полагаем, что материал имеет физические характеристики (3.80). Рис. 4.5 – 4.7 иллюстрируют решение задачи (1.34), (4.20), полученное в результате вычисления свертки (4.21) с найденными функциями $f_{31}^{2F}(\omega, \tau)$ и $f_{32}^{2F}(\omega, \tau)$.

Расчёты проводились для $N_\tau = 50$ точек разбиения по времени τ , $N_\omega = 50$ точек разбиения по параметру ω и $N_\lambda = 200$ членов ряда Фурье.

Замечание 1. Здесь, в качестве эталонной задачи можно было выбрать задачу с краевыми условиями (1.49). Однако в этом случае системы (4.22) и

Рис. 4.5. Перемещения $u_1(x_1, \tau)$ при $x_2 = 0.5$.Рис. 4.6. Перемещения $u_2(x_1, \tau)$ при $x_2 = 0.5$.

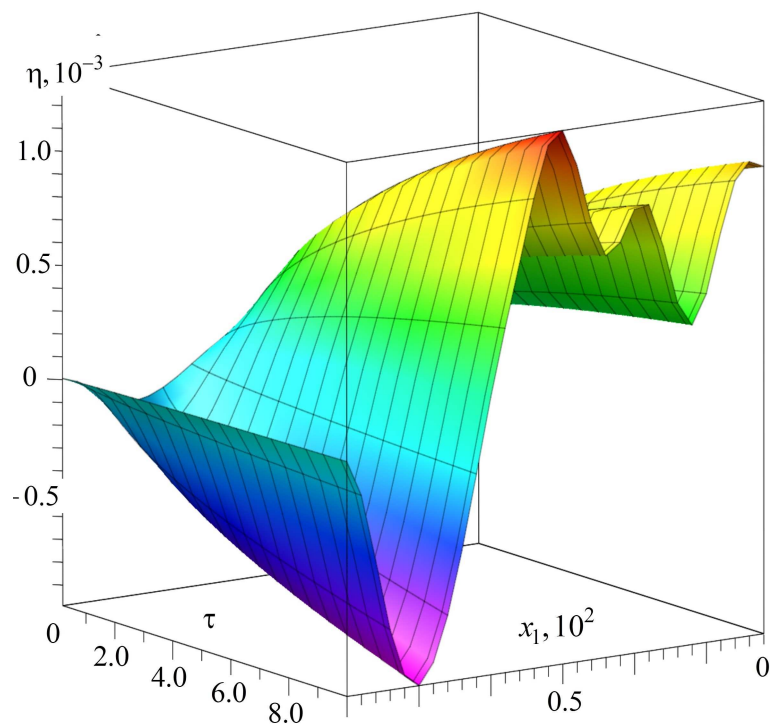


Рис. 4.7. Приращение концентрации $\eta(x_1, \tau)$ при $x_2 = 0.5$.

(4.23) состояли бы из четырех уравнений относительно четырех неизвестных функций. С другой стороны, в случае многокомпонентной среды (начиная с $N = 3$) выгоднее в качестве вспомогательной задачи использовать задачу граничными условиями (1.49).

Таким образом, в каждом из рассмотренных примеров в качестве вспомогательной была использована та из двух решенных в главах 2 и 3 задач, которая даёт наименьшую размерность системе интегральных уравнений Вольтерра (4.2). Этот принцип можно взять за основу при выборе эталонных задач. Единственным ограничением здесь может являться наличие неинтегрируемых особенностей в ядрах интегральных операторов.

Замечание 2. Задачи для полуограниченных сред решаются аналогичным образом. Следует только отметить, что при прочих равных условиях система уравнений (4.2) в задаче для полупространства имеет вдвое меньшую размерность по сравнению с аналогичной системой в задаче для слоя.

Глава 5

Асимптотические решения нестационарных задач механодиффузии

5.1. Асимптотика при больших временах. Переход к статическим режимам

Асимптотика функций Грина при $\tau \rightarrow \infty$ может быть полезной при переходе от нестационарных режимов к статическим, в том числе для проверки решений полученных главах 2 и 3. Рассмотрим статический аналог задачи (1.40) – (1.42) при отсутствии объёмных возмущений

$$\mathbf{L}(\mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{M}(\mathbf{y})|_{\Pi} = \mathbf{f}(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in \Gamma. \quad (5.1)$$

Тогда, чтобы получить решение этой задачи полагаем в (1.41)

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}, \tau) = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) H(\tau),$$

и после вычисления сверток переходим к пределу при $\tau \rightarrow \infty$.

Используя предельное соотношение между оригиналом и его изображением [84]

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} f(\tau) = \lim_{s \rightarrow 0} s f^L(s),$$

получаем, в частности, из формулы (4.1) решение $\mathbf{y}^{(s)}$ статической задачи (5.1) (здесь \mathbf{G} – матрица Грина задачи (1.40) – (1.42), звездочка - свертка по времени)

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(s)} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \tau) * \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) H(\tau) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} \mathbf{G}^L(\mathbf{x}, s) \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) = \mathbf{G}^L(\mathbf{x}, 0) \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z}). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Таким образом, для получения решений задач статики из решений задач динамики необходимо найти предельные значения трансформант Лапласа функций Грина при $s \rightarrow 0$. Рассмотрим эти предельные переходы на примере одномерных нестационарных задач упругой диффузии, решения которых получены в главе 2. Найдем вначале решения соответствующих стационарных задач. Уравнения равновесия для одномерной задачи будут иметь вид (в (1.31) отбрасываем члены, содержащие производные по времени)

$$\begin{aligned} u'' - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j' &= 0, \\ D_q \eta_q'' - \Lambda_q u''' &= 0 \quad (q = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (5.3)$$

С учетом свойств симметрии функций Грина типа (2.3), достаточно рассмотреть следующие статические аналоги граничных условий группы А (см. п. 1.5):

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= 1, \quad (\Lambda_q u'' - D_q \eta_q')|_{x=0} = 0, \\ u|_{x=1} &= 0, \quad (\Lambda_q u'' - D_q \eta_q')|_{x=1} = 0; \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= 0, \quad (\Lambda_q u'' - D_q \eta_q')|_{x=0} = \delta_{q+1, p+1} \quad (p = \overline{1, N}), \\ u|_{x=1} &= 0, \quad (\Lambda_q u'' - D_q \eta_q')|_{x=1} = 0; \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \left(u' - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) \Big|_{x=0} &= 1, \quad \eta_q|_{x=0} = 0, \\ \left(u' - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) \Big|_{x=1} &= 0, \quad \eta_q|_{x=1} = 0; \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \left(u' - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) \Big|_{x=0} &= 0, \quad \eta_q|_{x=0} = \delta_{q+1, p+1} \quad (p = \overline{1, N}), \\ \left(u' - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) \Big|_{x=1} &= 0, \quad \eta_q|_{x=1} = 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Найдём общее решение уравнений равновесия (5.3). Для этого, интегри-

руем второе уравнение (5.3), выражаем η'_q

$$\eta'_j = \frac{1}{D_j} (C_j + \Lambda_j u'') \quad (j = \overline{1, N}), \quad (5.8)$$

и подставляем в первое уравнение. Получаем

$$u'' - \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j}{D_j} (C_j + \Lambda_j u'') = 0. \quad (5.9)$$

Здесь C_j - произвольные постоянные. Приведя подобные члены в (5.9), получаем u''

$$u'' = \sum_{j=1}^N C_j \alpha_j \Phi_j, \quad \Phi_j = \frac{\prod_{r=1, r \neq j}^N D_r}{\prod_{j=1}^N D_j - \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \prod_{r=1, r \neq j}^N D_r}.$$

Интегрируя это уравнение дважды, приходим к следующим результатам

$$u = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \alpha_j C_j \Phi_j x^2 + C_{N+1} x + C_{N+2}. \quad (5.10)$$

Подставляя (5.10) в (5.8) и интегрируя, находим

$$\eta_q = \frac{1}{D_q} \left(C_q + \Lambda_q \sum_{j=1}^N C_j \alpha_j \Phi_j \right) x + C_{N+2+q} \quad (q = \overline{1, N}). \quad (5.11)$$

Постоянные интегрирования определяем из граничных условий. Сначала рассмотрим условия (5.4). Подставляя в них (5.10) и (5.11) получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} C_{N+2} = 1, \quad \Lambda_q \sum_{j=1}^N C_j \alpha_j \Phi_j - \left(C_q + \Lambda_q \sum_{j=1}^N C_j \alpha_j \Phi_j \right) &= 0, \\ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N C_j \alpha_j \Phi_j + C_{N+1} + C_{N+2} &= 0, \\ \Lambda_q \sum_{j=1}^N C_j \alpha_j \Phi_j - \left(C_q + \Lambda_q \sum_{j=1}^N C_j \alpha_j \Phi_j \right) &= 0. \end{aligned}$$

Её решение имеет вид

$$C_{N+2} = 1, \quad C_q = 0, \quad C_{N+1} = -C_{N+2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N C_j \alpha_j \Phi_j = -1.$$

Таким образом

$$u^{(s)} = 1 - x, \quad \eta_q^{(s)} = C_{N+2+q}. \quad (5.12)$$

Т.е. поле концентраций определяется с точностью до произвольной постоянной.

Для граничных условий (5.5) получаем следующую систему

$$\begin{aligned} C_{N+2} = 0, \quad \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N C_j \alpha_j \Phi_j + C_{N+1} + C_{N+2} &= 0, \\ -C_q = \delta_{q+1,p+1}, \quad -C_q &= 0. \end{aligned}$$

Эта система является несовместной. Два последних равенства при $q = p$ взаимно исключают друг друга.

Это объясняется тем, что с точки зрения механики поверхностные возмущения (5.5) не являются уравновешенными, поэтому статическое равновесие системы в данном случае невозможно. Для получения решения необходимо уравновесить поверхностные возмущения, т.е. граничное условие (5.5) заменить следующими

$$\begin{aligned} u|_{x=0} = 0, \quad (\Lambda_q u'' - D_q \eta_q')|_{x=0} &= \delta_{q+1,p+1} \quad (p = \overline{1, N}), \\ u|_{x=1} = 0, \quad (\Lambda_q u'' - D_q \eta_q')|_{x=1} &= \delta_{q+1,p+1}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

Тогда, система для определения констант C_i ($i = \overline{1, 2N+2}$) будет иметь вид

$$\begin{aligned} C_{N+2} = 0, \quad \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N C_j \alpha_j \Phi_j + C_{N+1} + C_{N+2} &= 0, \\ -C_q = \delta_{q+1,p+1}, \quad -C_q &= \delta_{q+1,p+1}, \end{aligned}$$

Из неё получаем

$$C_{N+2} = 0, \quad C_q = -1, \quad C_{N+1} = \frac{1}{2}\alpha_q\Phi_q, \quad C_i = 0, \quad i \neq \{q, N+1\}.$$

Таким образом, решение статической задачи (5.3), (5.13) записывается так

$$\begin{aligned} u^{(s)} &= -\frac{1}{2}\alpha_q\Phi_q(x^2 - x), \\ \eta_q^{(s)} &= -\frac{1}{D_q}(1 + \Lambda_q\alpha_q\Phi_q)x + C_{N+2+q}. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Аналогично для граничных условий (5.6) имеем

$$\begin{aligned} C_{N+1} - \sum_{j=1}^N \alpha_j C_{N+2+j} &= 1, \quad C_{N+2+q} = 0, \\ \sum_{j=1}^N \alpha_j C_j \Phi_j + C_{N+1} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \left[\frac{1}{D_j} \left(C_j + \Lambda_j \sum_{r=1}^N C_r \alpha_r \Phi_r \right) + C_{N+2+j} \right] &= 0, \\ \frac{1}{D_q} \left(C_q + \Lambda_q \sum_{j=1}^N C_j \alpha_j \Phi_j \right) + C_{N+2+q} &= 0. \end{aligned}$$

Эта система преобразуется к виду

$$\begin{aligned} C_{N+1} &= 1, \quad C_{N+2+q} = 0, \\ \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi_j C_j &= -1, \quad C_q + \Lambda_q \sum_{j=1}^N C_j \alpha_j \Phi_j = 0. \end{aligned}$$

Она также несовместна, т.к. из последних двух равенств следует, что

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi_j \Lambda_j = -1, \quad C_q = \Lambda_q.$$

Первое равенство не выполняется, так как $\Phi_j > 0$ и, следовательно $\alpha_j \Phi_j \Lambda_j > 0$. Таким образом, статическая задача с граничными условиями

(5.6) тоже не имеет решения. В соответствии с замечанием сформулированным выше, заменим их следующими условиями

$$\begin{aligned} \left. \left(u' - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) \right|_{x=0} &= 1, & \eta_q|_{x=0} &= 0, \\ \left. \left(u' - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) \right|_{x=1} &= 1, & \eta_q|_{x=1} &= 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Тогда система для определения констант C_i ($i = \overline{1, 2N+2}$) принимает вид

$$\begin{aligned} C_{N+1} - \sum_{j=1}^N \alpha_j C_{N+2+j} &= 1, & C_{N+2+q} &= 0, \\ \sum_{j=1}^N \alpha_j C_j \Phi_j + C_{N+1} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \left[\frac{1}{D_j} \left(C_j + \Lambda_j \sum_{r=1}^N C_r \alpha_r \Phi_r \right) + C_{N+2+j} \right] &= 1, \\ \frac{1}{D_q} \left(C_q + \Lambda_q \sum_{j=1}^N C_j \alpha_j \Phi_j \right) + C_{N+2+q} &= 0. \end{aligned}$$

После преобразования

$$\begin{aligned} C_{N+1} &= 1, & C_{N+2+q} &= 0, \\ \sum_{j=1}^N \alpha_j C_j \Phi_j &= 0, & C_q + \Lambda_q \sum_{j=1}^N C_j \alpha_j \Phi_j &= 0. \end{aligned}$$

получаем решение задачи (5.3), (5.15)

$$u = x + C_{N+2}, \quad \eta_q = 0 \quad (q = \overline{1, N}). \quad (5.16)$$

Наконец для условий (5.7) система уравнений для определения констант C_i ($i = \overline{1, 2N+2}$) записывается так:

$$\begin{aligned}
C_{N+1} - \sum_{j=1}^N \alpha_j C_{N+2+j} &= 0, \quad C_{N+2+q} = 1, \\
\sum_{j=1}^N \alpha_j C_j \Phi_j + C_{N+1} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \left[\frac{1}{D_j} \left(C_j + \Lambda_j \sum_{r=1}^N C_r \alpha_r \Phi_r \right) + C_{N+2+j} \right] &= 0, \\
\frac{1}{D_q} \left(C_q + \Lambda_q \sum_{j=1}^N C_j \alpha_j \Phi_j \right) + C_{N+2+q} &= 0.
\end{aligned}$$

Преобразуя её к виду

$$\begin{aligned}
C_{N+1} &= \alpha_q, \quad C_{N+2+q} = 1, \\
\sum_{j=1}^N \alpha_j C_j \Phi_j &= -\alpha_q, \quad C_q + \Lambda_q \sum_{j=1}^N C_j \alpha_j \Phi_j = -D_q,
\end{aligned}$$

получаем следующее решение

$$u = \alpha_q \left(-\frac{x^2}{2} + x \right) + C_{N+2}, \quad \eta_q = 1 - x \quad (q = \overline{1, N}). \quad (5.17)$$

Теперь проверим предельный переход (5.2). Для рассматриваемых здесь одномерных задач следует положить $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) = 1$. Тогда, статическому решению (5.12) должны соответствовать значения функций Грина $G_{11}^L(x, 0)$ и $G_{q+1,1}^L(x, 0)$ из п. 2.3. Имеем

$$\begin{aligned}
G_{11}^L(x, 0) &= \lim_{s \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} G_{11}^{Ls}(\lambda_n, s) \sin \lambda_n x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{11}(\lambda_n, 0)}{P(\lambda_n, 0)} \sin \lambda_n x = \\
&= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n x}{\lambda_n} = 1 - x;
\end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned}
G_{q+1,1}^L(x, 0) &= \lim_{s \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} G_{q+1,1}^{Lc}(\lambda_n, s) \cos \lambda_n x = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{2\Lambda_q \lambda_n^2}{s + D_q \lambda_n^2} + \frac{P_{q+1,1}(\lambda_n, 0)}{Q_q(\lambda_n, 0)} \right] \cos \lambda_n x = 0.
\end{aligned} \quad (5.19)$$

Здесь и для следующей задачи использованы формулы (2.36) для трансформант функций Грина и формулы (2.37) – (2.39) для многочленов P , Q и P_{km} , $\lambda_n = \pi n$. Отметим, что полученные результаты (5.18) и (5.19) с точностью до постоянного слагаемого C_{N+2+q} совпадают со статическим решением (5.12).

Для задачи (5.3), (5.13) в соответствии с (2.3) и (2.5) и условием уравновешенности поверхностной нагрузки необходимо рассмотреть следующие комбинации функций Грина:

$$\begin{aligned}
G_{1,q+1}^L(x, 0) + G_{1,q+1}^L(1-x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{1,q+1}^{Ls}(\lambda_n, 0) [\sin \lambda_n x + \sin \lambda_n (1-x)] = \\
&= 2\alpha_q \Phi_q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n x + \sin \lambda_n (1-x)}{\lambda_n^3} = \\
&= \alpha_q \Phi_q \left[\frac{x}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right] + \alpha_q \Phi_q \left[\frac{1-x}{3} - \frac{(1-x)^2}{2} + \frac{(1-x)^3}{6} \right] = \\
&= \frac{\alpha_q \Phi_q}{6} (2 - 3 + 6x - 6x^2 + 1 - 3x + 3x^2) = \frac{\alpha_q \Phi_q}{2} (x - x^2);
\end{aligned} \tag{5.20}$$

$$\begin{aligned}
G_{q+1,q+1}^L(x, 0) - G_{q+1,q+1}^L(1-x, 0) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_n x - \cos \lambda_n (1-x)}{D_q \lambda_n^2} + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} G_{q+1,q+1}^{Lc}(\lambda_n, 0) [\cos \lambda_n x - \cos \lambda_n (1-x)] = \\
&= \frac{2}{D_q} (1 + \alpha_q \Phi_q \Lambda_q) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_n x - \cos \lambda_n (1-x)}{\lambda_n^2} = \\
&= \frac{2}{D_q} (1 + \alpha_q \Phi_q \Lambda_q) \left[\frac{1}{6} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1-x}{2} - \frac{(1-x)^2}{4} \right] = \\
&= \frac{1}{D_q} (1 + \alpha_q \Phi_q \Lambda_q) \left(\frac{1}{2} - x \right).
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Решения (5.20), (5.21) также с точностью до произвольного слагаемого совпадают с решением статической задачи (5.14).

Для оставшихся двух задач необходимо воспользоваться функциями Грина, полученными в п. 2.5. В соответствии с формулами (2.62) – (2.64) получаем для задачи с граничными условиями (5.15)

$$\begin{aligned}
G_{11}^L(x, 0) - G_{11}^L(1-x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{11}^{Lc}(\lambda_n, 0) [\cos \lambda_n x - \cos \lambda_n (1-x)] = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{11}(\lambda_n, 0)}{P(\lambda_n, 0)} [\cos \lambda_n x - \cos \lambda_n (1-x)] = \\
&= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_n x - \cos \lambda_n (1-x)}{\lambda_n^2} = \\
&= -2 \left[\frac{1}{6} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1-x}{2} - \frac{(1-x)^2}{4} \right] = x - \frac{1}{2};
\end{aligned} \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned}
&G_{q+1,1}^L(x, 0) + G_{q+1,1}^L(1-x, 0) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{2\Lambda_q}{D_q \lambda_n} + G_{q+1,1}^{Ls}(\lambda_n, 0) \right] [\sin \lambda_n x + \sin \lambda_n (1-x)] = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{2\Lambda_q}{D_q \lambda_n} + \frac{P_{q+1,1}(\lambda_n, 0)}{Q_q(\lambda_n, 0)} \right] [\sin \lambda_n x + \sin \lambda_n (1-x)] = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{2\Lambda_q}{D_q \lambda_n} + \frac{2\Lambda_q}{D_q \lambda_n} \right] [\sin \lambda_n x + \sin \lambda_n (1-x)] = 0.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Наконец, для задачи (5.7) имеем

$$\begin{aligned}
G_{1,q+1}^L(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{1,q+1}^{Lc}(\lambda_n, 0) \cos \lambda_n x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{1,q+1}(\lambda_n, 0)}{P(\lambda_n, 0)} \cos \lambda_n x = \\
&= -2\alpha_q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_n x}{\lambda_n^2} = -2\alpha_q \left(\frac{1}{6} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} \right) = \alpha_q \left(-\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{3} \right);
\end{aligned} \tag{5.24}$$

$$\begin{aligned}
G_{q+1,q+1}^L(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2(D_q - \Lambda_q \alpha_q)}{D_q \lambda_n} + G_{q+1,1}^{Ls}(\lambda_n, 0) \right] \sin \lambda_n x = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2(D_q - \Lambda_q \alpha_q)}{D_q \lambda_n} + \frac{P_{q+1,q+1}(\lambda_n, 0)}{Q_q(\lambda_n, 0)} \right] \sin \lambda_n x = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2(D_q - \Lambda_q \alpha_q)}{D_q \lambda_n} + \frac{2\Lambda_q \alpha_q}{D_q \lambda_n} \right] \sin \lambda_n x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n x}{\lambda_n} = 1 - x.
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Здесь решения (5.21) – (5.25) также с точностью до постоянного слагаемого совпадают с решениями статических задач.

Полученные несоответствия можно объяснить следующим образом. Во-первых, заметим, что произвольные константы в решениях статических задач (5.12), (5.14), (5.16) и (5.17) не влияют на напряженно-деформированное состояние среды и интенсивность массопереноса в ней, а характеризуют лишь движение среды как абсолютно твердого тела. С другой стороны статические задачи в отличие от динамических не содержат в своей математической постановке начальных условий, фиксирующих пространственное распределение физических полей в некоторый начальный момент времени. Поэтому решение в них определяется с точностью до слагаемых являющихся, вообще говоря, функциями начальных состояний системы. Значения этих величин в решениях (5.18) – (5.25), полученных путем предельного перехода из динамики в статику, как раз соответствуют нулевым начальным условиям. В этом смысле предельный переход (5.2) из динамики в статику можно считать *естественной регуляризацией* решений статических задач механодиффузии. Сами же решения (5.18) – (5.25) могут выступать в роли *регуляризованных решений* для (5.12), (5.14), (5.16) и (5.17) соответственно. В известном смысле это согласуется с общим определением регуляризации, данным в [146].

5.2. Алгоритм асимптотического разделения переменных в многомерных задачах упругой диффузии

Одним из подходов к решению связанных нестационарных задач механо-диффузии является асимптотический метод, позволяющий при определённых граничных условиях свести многомерную начально-краевую задачу к рекуррентной последовательности одномерных задач. Применение асимптотических методов, как правило, основано на введении малого безразмерного параметра, после чего решение задачи строится в виде ряда по степеням этого параметра. Малые параметры имеют физическую или геометрическую природу. В качестве первых выступают коэффициенты связанности физических полей (см., например, [11, 12, 38, 39, 152, 153]) или величины, характеризующие физическую нелинейность задачи [151, 156]. Геометрические малые параметры встречаются в механике композитов и зачастую характеризуют неоднородность среды [10, 13, 36, 152, 153, 162, 329].

Идея излагаемого ниже метода основана на использовании асимптотической процедуры двухмасштабного разложения, напоминающая метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [18, 35, 103, 156, 220, 328, 342].

Пусть имеется начально-краевая (1.40) – (1.42) в декартовой системе координат. В случае, когда неоднородность в граничных условиях имеет слабо-выраженный характер, она формально учитывается введением малого параметра ε как множителя перед аргументами функции \mathbf{f} в граничных условиях (1.42), т.е. предполагается, что $\mathbf{f} = \mathbf{g}(\varepsilon x_1, \varepsilon x_2, \tau)$. Далее, вводятся в рассмотрение два масштаба: «тождественный» $\xi_\alpha = x_\alpha$ и «медленный» $\zeta_a = \varepsilon x_\alpha$, ($\alpha = 1, 2$), т.е. $\mathbf{f} = \mathbf{g}(\zeta_1, \zeta_2, \tau)$. Решение задачи (1.40) – (1.42) ищется в виде

ряда (\mathbf{y}_l – l -е приближение)

$$\mathbf{y}(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l \mathbf{y}_l(\xi_1, \xi_2, \zeta_1, \zeta_2, x_3, \tau). \quad (5.26)$$

Производные по переменным x_α , ξ_α и ζ_α , ($\alpha = 1, 2$) связаны между собой следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} &= \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \zeta_\alpha}, \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2), \\ \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} &= \frac{\partial^2}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta} + \varepsilon \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_\alpha \partial \zeta_\beta} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta_\alpha \partial \xi_\beta} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta_\alpha \partial \zeta_\beta}, \\ \frac{\partial^3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} &= \frac{\partial^3}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta \partial \xi_\gamma} + \varepsilon \left(\frac{\partial^3}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta \partial \zeta_\gamma} + \frac{\partial^3}{\partial \xi_\alpha \partial \zeta_\beta \partial \xi_\gamma} + \frac{\partial^3}{\partial \zeta_\alpha \partial \xi_\beta \partial \xi_\gamma} \right) + \\ &+ \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^3}{\partial \xi_\alpha \partial \zeta_\beta \partial \zeta_\gamma} + \frac{\partial^3}{\partial \zeta_\alpha \partial \xi_\beta \partial \zeta_\gamma} + \frac{\partial^3}{\partial \zeta_\alpha \partial \zeta_\beta \partial \xi_\gamma} \right) + \varepsilon^3 \frac{\partial^3}{\partial \zeta_\alpha \partial \zeta_\beta \partial \zeta_\gamma}, \dots \end{aligned} \quad (5.27)$$

Поэтому операторы \mathbf{L} и \mathbf{M} в задаче (1.40) – (1.42) могут быть представлены в виде сумм (дифференциальный оператор в начальных условиях не содержит производных по пространственным переменным, поэтому не участвует в дальнейших преобразованиях)

$$\mathbf{L} = \sum_{l=0}^n \varepsilon^l \mathbf{L}_l, \quad \mathbf{M} = \sum_{l=0}^m \varepsilon^l \mathbf{M}_l. \quad (5.28)$$

Здесь n и m – порядки линейных дифференциальных операторов \mathbf{L} и \mathbf{M} соответственно, \mathbf{L}_l и \mathbf{M}_l – линейные дифференциальные операторы тех же порядков, что и операторы \mathbf{L} и \mathbf{M} . Например, при $n = 1$ и $m = 0$ оператор $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0$, а \mathbf{L} имеет вид:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 + \varepsilon \mathbf{L}_1, \quad \mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_0 \left(\frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \right), \quad \mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_1 \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_\alpha} \right).$$

А при $n = 2$ и $m = 1$ получаем следующие представления:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 + \varepsilon \mathbf{L}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{L}_2, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \varepsilon \mathbf{M}_1,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_0 &= \mathbf{L}_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \frac{\partial^2}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta}, \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial \xi_\beta}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \right), \\ \mathbf{L}_1 &= \mathbf{L}_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_\alpha \partial \zeta_\beta}, \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial \zeta_\beta}, \frac{\partial}{\partial \zeta_\alpha} \right), \quad \mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta_\alpha \partial \zeta_\beta} \right), \\ \mathbf{M}_0 &= \mathbf{M}_0 \left(\frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \right), \quad \mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_1 \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_\alpha} \right). \end{aligned}$$

Здесь в скобках указаны производные, входящие в операторы \mathbf{L} и \mathbf{M} .

В рассматриваемых в данной работе задачах механодиффузии оператор \mathbf{L} имеет 3-й порядок, а оператор \mathbf{M} имеет 2-й порядок по пространственным переменным. Явный вид этих операторов приводится в следующих пунктах.

Подстановка рядов (5.26) и сумм (5.28) в уравнения (1.40) и граничные условия (1.41) приводит к рекуррентной последовательности начально-краевых задач

$$\mathbf{L}_0 \mathbf{y}_0 = 0, \quad \mathbf{M}_0 \mathbf{y}_0|_{\Pi} = \mathbf{g}(\zeta_1, \zeta_2, \tau); \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_0 \mathbf{y}_1 &= -\mathbf{L}_1 \mathbf{y}_0, \\ \mathbf{M}_0 \mathbf{y}_1|_{\Pi} &= -\mathbf{M}^1 \mathbf{y}_0|_{\Pi}; \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_0 \mathbf{y}_2 &= -\mathbf{L}_1 \mathbf{y}_1 - \mathbf{L}^2 \mathbf{y}_0, \\ \mathbf{M}_0 \mathbf{y}_2|_{\Pi} &= -(\mathbf{M}_1 \mathbf{y}_1 + \mathbf{M}_2 \mathbf{y}_0)|_{\Pi}; \end{aligned} \quad (5.31)$$

и т.д.

В частности, для дифференциальных операторов третьего порядка все начально-краевые задачи, начиная с третьего приближения ($l \geq 3$) имеют одинаковый вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_0 \mathbf{y}_l &= -\mathbf{L}_1 \mathbf{y}_{l-1} - \mathbf{L}_2 \mathbf{y}_{l-2} - \mathbf{L}_3 \mathbf{y}_{l-3}, \\ \mathbf{M}_0 \mathbf{y}_l|_{\Pi} &= -(\mathbf{M}_1 \mathbf{y}_{l-1} + \mathbf{M}_2 \mathbf{y}_{l-2} + \mathbf{M}_3 \mathbf{y}_{l-3})|_{\Pi}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Отметим, что в задачу (5.29) переменные ζ_1 и ζ_2 входят как параметры, и, кроме того, как следует из граничных условий, нулевое приближение \mathbf{y}_0 не

зависит от переменных ξ_1 и ξ_2 . Это означает, что задача (5.29) в отличие от исходной задачи (1.40) – (1.42) является одномерной и как следствие более простой. Нетрудно видеть, что и все последующие приближения также не будут зависеть от переменных ξ_1 и ξ_2 , т.е. задачи (5.30), (5.31) и (5.32) также являются одномерными.

Таким образом, изложенная асимптотическая процедура разделения переменных позволяет при определённых граничных условиях свести многомерную начально-краевую задачу к рекуррентной последовательности одномерных начально-краевых задач.

5.3. Асимптотическое решение двумерной задачи упругой диффузии для ортотропной полосы

В качестве примера применения вышеизложенного алгоритма рассмотрим двумерную задачу упругой диффузии (1.34), (1.49) для N -компонентной ортотропной полосы, ограниченной прямыми $x_2 = 0$ и $x_2 = 1$ рассмотренную в п. 3.3. В соответствии с предложенным алгоритмом полагаем, что неравномерность поверхностных возмущений имеет слабовыраженный характер, что учитывается введением малого параметра ε как множителя перед аргументами правых частей в (1.54): $f_{km} = g_{km}(\varepsilon x_1, \tau)$, ($k = \overline{1, N+2}$, $m = 1, 2$). Вводим «медленную» переменную $\zeta = \varepsilon x_1$ и решение задачи (1.34), (1.49) представляем в виде рядов по степеням малого параметра:

$$\begin{aligned} u_i(x_1, x_2, \tau) &= \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l u_{il}(\zeta, x_2, \tau), \\ \eta_q(x_1, x_2, \tau) &= \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l \eta_{ql}(\zeta, x_2, \tau). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Подстановка этих рядов в уравнения (1.34) и граничные условия (1.49) с учетом (1.35) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях ε даёт следующую рекуррентную последовательность одномерных задач:

- при ε^0

$$C_{12} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial x_2^2} = \ddot{u}_{10}, \quad C_{22} \frac{\partial^2 u_{20}}{\partial x_2^2} - \sum_{j=1}^N \alpha_2^j \frac{\partial \eta_{j0}}{\partial x_2} = \ddot{u}_{20}, \quad (5.34)$$

$$D_2^q \frac{\partial^2 \eta_{q0}}{\partial x_2^2} - \Lambda_{22}^q \frac{\partial^3 u_{20}}{\partial x_2^3} = \dot{\eta}_{q0};$$

$$\begin{aligned} u_{10}|_{x_2=0} &= g_{11}(\zeta, \tau), \quad u_{10}|_{x_2=1} = g_{12}(\zeta, \tau), \\ \left(C_{22} \frac{\partial u_{20}}{\partial x_2} - \sum_{j=1}^N \alpha_2^j \eta_{j0} \right) \Big|_{x_2=0} &= g_{21}(\zeta, \tau), \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\left(C_{22} \frac{\partial u_{20}}{\partial x_2} - \sum_{j=1}^N \alpha_2^j \eta_{j0} \right) \Big|_{x_2=1} = g_{22}(\zeta, \tau),$$

$$\eta_{q0}|_{x_2=0} = g_{q+2,1}(\zeta, \tau), \quad \eta_{q0}|_{x_2=1} = g_{q+2,2}(\zeta, \tau);$$

- при ε^1

$$C_{12} \frac{\partial^2 u_{11}}{\partial x_2^2} = \ddot{u}_{11} - C_{21} \frac{\partial^2 u_{20}}{\partial \zeta \partial x_2} + \sum_{j=1}^N \alpha_1^j \frac{\partial \eta_{j0}}{\partial \zeta},$$

$$C_{22} \frac{\partial^2 u_{21}}{\partial x_2^2} - \sum_{j=1}^N \alpha_2^j \frac{\partial \eta_{j1}}{\partial x_2} = \ddot{u}_{21} - C_{21} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial x_2 \partial \zeta}, \quad (5.36)$$

$$D_2^q \frac{\partial^2 \eta_{q1}}{\partial x_2^2} - \Lambda_{22}^q \frac{\partial^3 u_{21}}{\partial x_2^3} = \dot{\eta}_{q1} + \Lambda_{21}^q \frac{\partial^3 u_{10}}{\partial x_2^2 \partial \zeta};$$

$$u_{11}|_{x_2=0} = 0, \quad u_{11}|_{x_2=1} = 0,$$

$$\left(C_{22} \frac{\partial u_{21}}{\partial x_2} - \sum_{j=1}^N \alpha_2^j \eta_{j1} \right) \Big|_{x_2=0} = - C_0 \frac{\partial u_{10}}{\partial \zeta} \Big|_{x_2=0},$$

$$\left(C_{22} \frac{\partial u_{21}}{\partial x_2} - \sum_{j=1}^N \alpha_2^j \eta_{j1} \right) \Big|_{x_2=1} = - C_0 \frac{\partial u_{10}}{\partial \zeta} \Big|_{x_2=1}, \quad (5.37)$$

$$\eta_{q1}|_{x_2=0} = 0, \quad \eta_{q1}|_{x_2=1} = 0;$$

- при ε^2

$$C_{12} \frac{\partial^2 u_{12}}{\partial x_2^2} = \ddot{u}_{12} - C_{21} \frac{\partial^2 u_{21}}{\partial \zeta \partial x_2} - C_{11} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \zeta^2} + \sum_{j=1}^N \alpha_1^j \frac{\partial \eta_{j1}}{\partial \zeta},$$

$$C_{22} \frac{\partial^2 u_{22}}{\partial x_2^2} - \sum_{j=1}^N \alpha_2^j \frac{\partial \eta_{j2}}{\partial x_2} = \ddot{u}_{22} - C_{21} \frac{\partial^2 u_{11}}{\partial x_2 \partial \zeta} - C_{12} \frac{\partial^2 u_{20}}{\partial \zeta^2}, \quad (5.38)$$

$$D_2^q \frac{\partial^2 \eta_{q2}}{\partial x_2^2} - \Lambda_{22}^q \frac{\partial^3 u_{22}}{\partial x_2^3} = \dot{\eta}_{q2} + \Lambda_{21}^q \frac{\partial^3 u_{11}}{\partial x_2^2 \partial \zeta} + \Lambda_{12}^q \frac{\partial^3 u_{20}}{\partial x_2 \partial \zeta^2} - D_1^q \frac{\partial^2 \eta_{q0}}{\partial \zeta^2};$$

$$u_{12}|_{x_2=0} = 0, \quad u_{12}|_{x_2=1} = 0,$$

$$\left(C_{22} \frac{\partial u_{22}}{\partial x_2} - \sum_{j=1}^N \alpha_2^j \eta_{j2} \right) \Big|_{x_2=0} = - C_0 \frac{\partial u_{11}}{\partial \zeta} \Big|_{x_2=0}, \quad (5.39)$$

$$\left(C_{22} \frac{\partial u_{22}}{\partial x_2} - \sum_{j=1}^N \alpha_2^j \eta_{j2} \right) \Big|_{x_2=1} = - C_0 \frac{\partial u_{11}}{\partial \zeta} \Big|_{x_2=1},$$

$$\eta_{q2}|_{x_2=0} = 0, \quad \eta_{q2}|_{x_2=1} = 0;$$

- при ε^k ($k \geq 3$)

$$C_{12} \frac{\partial^2 u_{1k}}{\partial x_2^2} = \ddot{u}_{1k} - C_{21} \frac{\partial^2 u_{2,k-1}}{\partial \zeta \partial x_2} - C_{11} \frac{\partial^2 u_{1,k-2}}{\partial \zeta^2} + \sum_{j=1}^N \alpha_1^j \frac{\partial \eta_{j,k-1}}{\partial \zeta},$$

$$C_{22} \frac{\partial^2 u_{2k}}{\partial x_2^2} - \sum_{j=1}^N \alpha_2^j \frac{\partial \eta_{jk}}{\partial x_2} = \ddot{u}_{2k} - C_{21} \frac{\partial^2 u_{1,k-1}}{\partial x_2 \partial \zeta} - C_{12} \frac{\partial^2 u_{2,k-2}}{\partial \zeta^2},$$

$$D_2^q \frac{\partial^2 \eta_{qk}}{\partial x_2^2} - \Lambda_{22}^q \frac{\partial^3 u_{2k}}{\partial x_2^3} = \dot{\eta}_{qk} + \Lambda_{12}^q \frac{\partial^3 u_{2,k-2}}{\partial x_2 \partial \zeta^2} + \Lambda_{21}^q \frac{\partial^3 u_{1,k-1}}{\partial x_2^2 \partial \zeta} +$$

$$+ \Lambda_{11}^q \frac{\partial^3 u_{1,k-3}}{\partial x_2^2 \partial \zeta} - D_1^q \frac{\partial^2 \eta_{q,k-2}}{\partial \zeta^2};$$

(5.40)

$$u_{1k}|_{x_2=0} = 0, \quad u_{1k}|_{x_2=1} = 0,$$

$$\left(C_{22} \frac{\partial u_{2k}}{\partial x_2} - \sum_{j=1}^N \alpha_2^j \eta_{jk} \right) \Big|_{x_2=0} = - C_0 \frac{\partial u_{1,k-1}}{\partial \zeta} \Big|_{x_2=0},$$

$$\left(C_{22} \frac{\partial u_{2k}}{\partial x_2} - \sum_{j=1}^N \alpha_2^j \eta_{jk} \right) \Big|_{x_2=1} = - C_0 \frac{\partial u_{1,k-1}}{\partial \zeta} \Big|_{x_2=1},$$

$$\eta_{qk}|_{x_2=0} = 0, \quad \eta_{qk}|_{x_2=1} = 0.$$

(5.41)

Как уже было отмечено переменная ζ_α входит в задачи (1.54) – (5.41) как параметр.

Задача (5.34), (5.35) распадается на две независимые задачи:

$$C_{12} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial x_2^2} = \ddot{u}_{10};$$

(5.42)

$$u_{10}|_{x_2=0} = g_{11}(\zeta, \tau), \quad u_{10}|_{x_2=1} = g_{12}(\zeta, \tau);$$

(5.43)

$$C_{22} \frac{\partial^2 u_{20}}{\partial x_2^2} - \sum_{j=1}^N \alpha_2^j \frac{\partial \eta_{j0}}{\partial x_2} = \ddot{u}_{20}, \quad D_2^q \frac{\partial^2 \eta_{q0}}{\partial x_2^2} - \Lambda_{22}^q \frac{\partial^3 u_{20}}{\partial x_2^3} = \dot{\eta}_{q0};$$

(5.44)

$$\left. \begin{aligned} & \left(C_{22} \frac{\partial u_{20}}{\partial x_2} - \sum_{j=1}^N \alpha_2^j \eta_{j0} \right) \Big|_{x_2=0} = g_{21}(\zeta, \tau), \\ & \left(C_{22} \frac{\partial u_{20}}{\partial x_2} - \sum_{j=1}^N \alpha_2^j \eta_{j0} \right) \Big|_{x_2=1} = g_{22}(\zeta, \tau), \end{aligned} \right\} \quad (5.45)$$

$$\eta_{q0}|_{x_2=0} = g_{q+2,1}(\zeta, \tau), \quad \eta_{q0}|_{x_2=1} = g_{q+2,2}(\zeta, \tau).$$

Решение задачи (5.42), (5.43) записывается в следующей форме («*» - свертка по времени)

$$u_{10}(\zeta, x_2, \tau) = g_{11}(\zeta, \tau) * G^0(x_2, \tau) + g_{12}(\zeta, \tau) * G^0(1 - x_2, \tau). \quad (5.46)$$

где $G^0(x_2, \tau)$ – функция Грина, являющаяся решением задачи

$$C_{12} \frac{\partial^2 G^0}{\partial x_2^2} = \ddot{G}^0, \quad G^0|_{x_2=0} = \delta(\tau), \quad G^0|_{x_2=1} = 0.$$

Для её построения, применяем к равенствам (5.42) и (5.43) преобразование Лапласа (верхний индекс «L» – обозначает трансформанту Лапласа)

$$C_{12} \frac{\partial^2 G^{0L}}{\partial x_2^2} = s^2 G^{0L}, \quad G^{0L}|_{x_2=0} = 1, \quad G^{0L}|_{x_2=1} = 0.$$

Находя общее решение и удовлетворяя граничным условиям, получаем

$$G^{0L} = \frac{\sinh(s(1-x_2)/\sqrt{C_{12}})}{\sinh(s/\sqrt{C_{12}})}.$$

Оригинал этого выражения находим с помощью разложения в ряды по экспонентам

$$\begin{aligned} G^{0L} &= \frac{\sinh(s(1-x_2)/\sqrt{C_{12}})}{\sinh(s/\sqrt{C_{12}})} = \\ &= \frac{e^{s(1-x_2)/\sqrt{C_{12}}} - e^{-s(1-x_2)/\sqrt{C_{12}}}}{e^{s/\sqrt{C_{12}}} - e^{-s/\sqrt{C_{12}}}} = \frac{e^{-sx_2/\sqrt{C_{12}}} - e^{-s(2-x_2)/\sqrt{C_{12}}}}{1 - e^{-2s/\sqrt{C_{12}}}} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[e^{-s(2n+x_2)/\sqrt{C_{12}}} - e^{-s(2+n-x_2)/\sqrt{C_{12}}} \right]. \end{aligned}$$

Тогда, по таблицам операционного исчисления [14, 84], получаем

$$G^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\delta \left(\tau - \frac{2n + x_2}{\sqrt{C_{12}}} \right) - \delta \left(\tau - \frac{2 + 2n - x_2}{\sqrt{C_{12}}} \right) \right]. \quad (5.47)$$

Решение задачи (5.44) имеет вид (2.7), где функции Грина находятся по формулам (2.65), (2.66) п. 2.5.

Замечание. Чтобы воспользоваться результатами п. 2.5 целесообразно в формулы (1.28) внести следующие изменения

$$C'_{ijkl} = \frac{C_{ijkl}}{C_{2222}}, \quad C^2 = \frac{C_{2222}}{\rho}, \quad \alpha'^q_{ij} = \frac{n_0^{(q)} \alpha_{ij}^{(q)}}{C_{2222}}, \quad F'_i = \frac{F_i}{C_{2222}}.$$

В этом случае безразмерный коэффициент C_{22} в уравнениях (5.46) будет равен 1. Между остальными коэффициентами в рассматриваемой задаче и задаче п. 2.5 будет иметь место следующее соответствие

$$\alpha_2^q \leftrightarrow \alpha_q, \quad D_2^q \leftrightarrow D_q.$$

Переходя к задачам первого приближения имеем

$$C_{12} \frac{\partial^2 u_{11}}{\partial x_2^2} = \ddot{u}_{11} - C_{21} \frac{\partial^2 u_{20}}{\partial \zeta \partial x_2} + \sum_{j=1}^N \alpha_1^j \frac{\partial \eta_{j0}}{\partial \zeta}; \quad (5.48)$$

$$u_{11}|_{x_2=0} = 0, \quad u_{11}|_{x_2=1} = 0; \quad (5.49)$$

$$\frac{\partial^2 u_{21}}{\partial x_2^2} - \sum_{j=1}^N \alpha_2^j \frac{\partial \eta_{j1}}{\partial x_2} = \ddot{u}_{21} - C_{21} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial x_2 \partial \zeta}, \quad (5.50)$$

$$D_2^q \frac{\partial^2 \eta_{q1}}{\partial x_2^2} - \Lambda_{22}^q \frac{\partial^3 u_{21}}{\partial x_2^3} = \eta_1^q + \Lambda_{21}^q \frac{\partial^3 u_{10}}{\partial x_2^2 \partial \zeta};$$

$$\left(C_{22} \frac{\partial u_{21}}{\partial x_2} - \sum_{j=1}^N \alpha_2^j \eta_{j1} \right) \Big|_{x_2=0} = - C_0 \frac{\partial u_{10}}{\partial \zeta} \Big|_{x_2=0},$$

$$\left(C_{22} \frac{\partial u_{21}}{\partial x_2} - \sum_{j=1}^N \alpha_2^j \eta_{j1} \right) \Big|_{x_2=1} = - C_0 \frac{\partial u_{10}}{\partial \zeta} \Big|_{x_2=1}, \quad (5.51)$$

$$\eta_{q1}|_{x_2=0} = 0, \quad \eta_{q1}|_{x_2=1} = 0.$$

Здесь в соответствии с замечанием учтено, что $C_{22} = 1$.

Решение задачи (5.48), (5.49) имеет вид (двойные звездочки означают свертку по времени и пространственной координате ξ):

$$u_{11}(\zeta, x_2, \tau) = \left(C_{21} \frac{\partial^2 u_{20}}{\partial \zeta \partial x_2} - \sum_{j=1}^N \alpha_1^j \frac{\partial \eta_0^j}{\partial \zeta} \right) ** G^1(x_2, \xi, \tau), \quad (5.52)$$

где $G^1(x_2, \xi, \tau)$ - функция Грина задачи

$$C_{12} \frac{\partial^2 G^1}{\partial x_2^2} = \ddot{G}^1 - \delta(x_2 - \xi, \tau), \quad (5.53)$$

$$G^1|_{x_2=0} = 0, \quad G^1|_{x_2=1} = 0. \quad (5.54)$$

Применяя к (5.53) преобразование Лапласа по переменной τ и разложение в ряды Фурье по $\sin \lambda_n x_2$, $\lambda_n = \pi n$ получаем (верхний индекс «s» обозначает синус-гармонику ряда Фурье):

$$(C_{12} \lambda_n^2 + s^2) G^{1Ls}(\lambda_n, \xi, s) = 2 \sin \lambda_n \xi,$$

$$G^{1L}(x_2, \xi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} G^{1Ls}(\lambda_n, \xi, s) \sin \lambda_n x_2.$$

Отсюда

$$G^{1Ls}(\lambda_n, \xi, s) = \frac{2 \sin \lambda_n \xi}{C_{12} \lambda_n^2 + s^2}.$$

По таблицам операционного исчисления [14, 84] находим:

$$G^{1s}(\lambda_n, \xi, \tau) = \frac{2}{\sqrt{C_{12}} \lambda_n} \sin \lambda_n \xi \sin(\sqrt{C_{12}} \lambda_n \tau).$$

Тогда решение (5.52) запишется так (звездочка здесь означает свертку по времени)

$$u_{11}(x_2, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} F^s(\zeta, \lambda_n, \tau) * W^{1s}(\lambda_n, \tau) \sin \lambda_n x_2, \quad (5.55)$$

где

$$W^1(x_2, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} W^{1s}(\lambda_n, \tau) \sin \lambda_n x_2, \quad W^{1s}(\lambda_n, \tau) = \frac{\sin(\sqrt{C_{12}} \lambda_n \tau)}{\sqrt{C_{12}} \lambda_n}, \quad (5.56)$$

$$F^s(\zeta, \lambda_n, \tau) = 2 \int_0^1 \left(C_{21} \frac{\partial^2 u_{20}(\zeta, \xi, \tau)}{\partial \zeta \partial \xi} - \sum_{j=1}^N \alpha_1^j \frac{\partial \eta_{j0}(\zeta, \xi, \tau)}{\partial \zeta} \right) \sin \lambda_n \xi d\xi.$$

Введенные здесь функции $F^s(\zeta, \lambda_n, \tau)$ являются коэффициентами разложения правой части уравнения (5.48) в ряд Фурье по $\sin \lambda_n x_2$. Заметим, что в соответствии с результатами п. 2.5 (формулы (2.58) и (2.59)) функция $u_{20}(\zeta, x_2, \tau)$ представляет из себя ряд по косинусам, а функция $\eta_{j0}(\zeta, x_2, \tau)$ – ряд по синусам. Таким образом, правая часть уравнения (5.48) изначально представляет из себя ряд по синусам, что позволяет избежать необходимости вычисления функций $F^s(\zeta, \lambda_n, \tau)$ по формуле (5.56).

Решение задачи (5.50), (5.51) находим с использованием объемных W_{km}^l и поверхностных G_{1k} функций Грина задачи упругой диффузии предварительно разложив правые части уравнений (5.50) в ряды по синусам и косинусам (формулы (2.7), (2.65) и (2.93), звездочка означает свертку по времени)

$$\begin{aligned} u_{21}(\zeta, x_2, \tau) = & W_{11}^l(x_2, \tau) * C_{12} \frac{\partial^2 u_{10}(\zeta, x_2, \tau)}{\partial \zeta \partial x_2} \\ & - \sum_{k=1}^N \Lambda_{21}^k W_{1,k+1}^l(x_2, \tau) * \frac{\partial^3 u_{10}(\zeta, x_2, \tau)}{\partial \zeta \partial x_2^2} \\ & - C_0 \left[G_{11}(x_2, \tau) * \frac{\partial u_{10}(\zeta, 0, \tau)}{\partial \zeta} - G_{11}(1 - x_2, \tau) * \frac{\partial u_{10}(\zeta, 1, \tau)}{\partial \zeta} \right], \end{aligned} \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned} \eta_{q1}(\zeta, x_2, \tau) = & W_{q+1,1}^l(x_2, \tau) * C_{12} \frac{\partial^2 u_{10}(\zeta, x_2, \tau)}{\partial \zeta \partial x_2} - \\ & - \sum_{k=1}^N \Lambda_{21}^k W_{q+1,k+1}^l(x_2, \tau) * \frac{\partial^3 u_{10}(\zeta, x_2, \tau)}{\partial \zeta \partial x_2^2} - \\ - C_0 & \left[G_{q+1,1}(x_2, \tau) * \frac{\partial u_{10}(\zeta, 0, \tau)}{\partial \zeta} + G_{q+1,1}(1-x_2, \tau) * \frac{\partial u_{10}(\zeta, 1, \tau)}{\partial \zeta} \right], \end{aligned}$$

Задачи второго и более высоких приближений могут быть решены аналогичным образом. Здесь они не рассматриваются.

Для расчета рассмотрим однокомпонентную ортотропную среду (3.80) с параметрами граничных условий (3.81). В этом случае

$$\begin{aligned} g_{11}(\zeta, \tau) = g_{12}(\zeta, \tau) = g_{31}(\zeta, \tau) = g_{13}(\zeta, \tau) = 0, \\ g_{21}(\zeta, \tau) = g_{22}(\zeta, \tau) = g(\zeta) H(\tau), \quad g(\zeta) = e^{-\zeta^2}. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Тогда из формул (5.46) получаем:

$$u_{10}(\zeta, x_2, \tau) = 0.$$

Откуда

$$\frac{\partial u_{10}(\zeta, 0, \tau)}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial u_{10}(\zeta, 1, \tau)}{\partial \zeta} = 0.$$

Подставляя эти равенства в (5.57) находим:

$$u_{21}(\zeta, x_2, \tau) = 0, \quad \eta_1(\zeta, x_2, \tau) = 0.$$

Функции $u_{20}(\zeta, x_2, \tau)$ и $\eta_0(\zeta, x_2, \tau)$ находятся по формулам (2.105). Далее, в формуле (5.52) с учетом (2.105) имеем:

$$\begin{aligned} C_{21} \frac{\partial^2 u_{20}}{\partial \zeta \partial x_2} - \alpha_1 \frac{\partial \eta_0}{\partial \zeta} = 2 \frac{\partial g(\zeta)}{\partial \zeta} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \tilde{F}^s(\lambda_n, \tau) \cos \lambda_{2n-1} x_2, \\ \tilde{F}^s(\lambda_n, \tau) = \sum_{l=1}^2 (-1)^{l+1} R_{nl} I_l(\gamma, \beta, \tau) + \\ + R_{n3} I_3(s_3, \tau) - \alpha_1 \left(2\Lambda_{22} \lambda_{2n-1} + B_{22}^{(2)} \right) I_3(-D_2 \lambda_{2n-1}^2, \tau), \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$\begin{aligned}
R_{nl} &= C_{21}\lambda_{2n-1}A_{12}^{(l)}(\lambda_{2n-1}) - \alpha_1A_{22}^{(l)}(\lambda_{2n-1}), \\
R_{n3} &= C_{21}\lambda_{2n-1}B_{12}^{(1)}(\lambda_{2n-1}) - \alpha_1B_{22}^{(1)}(\lambda_{2n-1}) \quad (l = 1, 2), \\
F^s(\zeta, \lambda_n, \tau) &= \frac{\partial g(\zeta)}{\partial \zeta} \tilde{F}^s(\lambda_n, \tau).
\end{aligned}$$

Здесь коэффициенты A_{km}^l и B_{km}^r определяются по формулам (2.41) и (2.44), интегралы I_1 , I_2 и I_3 определяются по формулам (2.101), параметры $\gamma = \gamma(\lambda_{2n-1})$, $\beta = \beta(\lambda_{2n-1})$ и $s_3 = s_3(\lambda_{2n-1})$ – нули многочлена $P(\lambda_{2n-1}, s)$ (формула (2.37) п. 2.3).

Тогда, подставляя (5.59) в (5.55) с учетом (5.58) находим

$$\begin{aligned}
u_{11}(\zeta, x_2, \tau) &= \left(C_{21} \frac{\partial^2 u_{20}}{\partial \zeta \partial x_2} - \alpha_1 \frac{\partial \eta_0}{\partial \zeta} \right) * W^1(x_2, \tau) = \\
&- 2 \frac{\partial g(\zeta)}{\partial \zeta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^2 \frac{(-1)^{l+n}}{\sqrt{C_{12}}} R_{nl} \tilde{I}_l(\gamma, \beta, \sqrt{C_{12}}\lambda_{2n-1}, \tau) \cos \lambda_{2n-1}x_2 + \\
&- \frac{2}{\sqrt{C_{12}}} \frac{\partial g(\zeta)}{\partial \zeta} \sum_{n=1}^{\infty} R_{n3} \tilde{I}_3(s_3, \sqrt{C_{12}}\lambda_{2n-1}, \tau) \cos \lambda_{2n-1}x_2 + \\
&+ \frac{2\alpha_1}{\sqrt{C_{12}}} \frac{\partial g(\zeta)}{\partial \zeta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\Lambda_{22}\lambda_{2n-1} + B_{22}^{(2)}}{\lambda_{2n-1}} \tilde{I}_3(-D_2\lambda_{2n-1}^2, \sqrt{C_{12}}\lambda_{2n-1}, \tau) \cos \lambda_{2n-1}x_2,
\end{aligned} \tag{5.60}$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_1(\gamma, \beta, \omega, \tau) &= I_1(\gamma, \beta, \tau) * \sin \omega \tau = \frac{\gamma \cos \omega \tau - \gamma}{\omega(\gamma^2 + \beta^2)} + \\
&= \sum_{l=1}^2 \frac{\beta \sin \omega \tau + (-1)^l \gamma \cos \omega \tau}{2(\gamma^2 + \beta^2)} I_2(\gamma, \beta - (-1)^l \omega, \tau) + \\
&+ \sum_{l=1}^2 \frac{\gamma \sin \omega \tau - (-1)^l \beta \cos \omega \tau}{2(\gamma^2 + \beta^2)} I_1(\gamma, \beta - (-1)^l \omega, \tau),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_2(\gamma, \beta, \omega, \tau) &= I_2(\gamma, \beta, \tau) * \sin \omega \tau = \frac{\beta - \beta \cos \omega \tau}{\omega(\gamma^2 + \beta^2)} + \\
&= \sum_{l=1}^2 \frac{\gamma \sin \omega \tau - (-1)^l \beta \cos \omega \tau}{2(\gamma^2 + \beta^2)} I_2(\gamma, \beta - (-1)^l \omega, \tau) - \\
&\quad - \sum_{l=1}^2 \frac{\beta \sin \omega \tau + (-1)^l \gamma \cos \omega \tau}{2(\gamma^2 + \beta^2)} I_1(\gamma, \beta - (-1)^l \omega, \tau),
\end{aligned} \tag{5.61}$$

$$\tilde{I}_3(\beta, \omega, \tau) = I_3(\beta, \tau) * \sin \omega \tau = \frac{e^{\beta \tau}}{\beta} I_2(-\beta, \omega, \tau) - \frac{1}{\beta \omega} (1 - \cos \omega \tau).$$

Окончательно с учетом первых двух приближений решение задачи (1.30), (1.54) при $\varepsilon \rightarrow 0$ запишется так:

$$u_1 = \varepsilon u_{11} + o(\varepsilon^2) \quad u_2 = u_{20} + o(\varepsilon), \quad \eta = \eta_0 + o(\varepsilon).$$

Результаты вычислений для алюминия представлены на рис. 5.1 – 5.3.

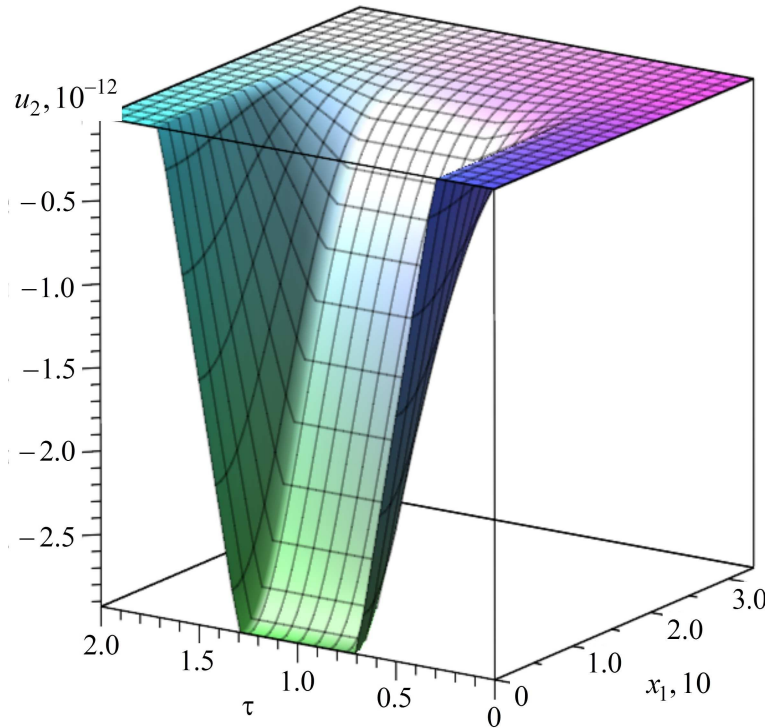


Рис. 5.1. зависимость $u_2(x_1, x_2, \tau)$ от x_2 и τ при $x_1 = 0.1$.

Сравнение полученных здесь результатов с расчетами полученными для аналогичной задачи в п. 3.5 (рис. 3.7 – 3.9), позволяет утверждать, что метод

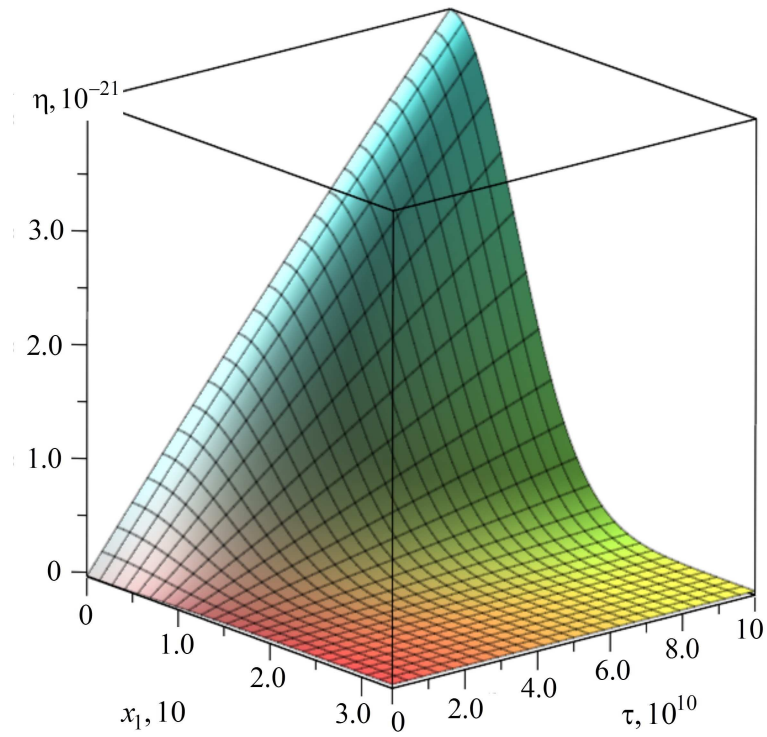


Рис. 5.2. зависимость $\eta(x_1, x_2, \tau)$ от x_2 и τ при $x_1 = 0.1$.

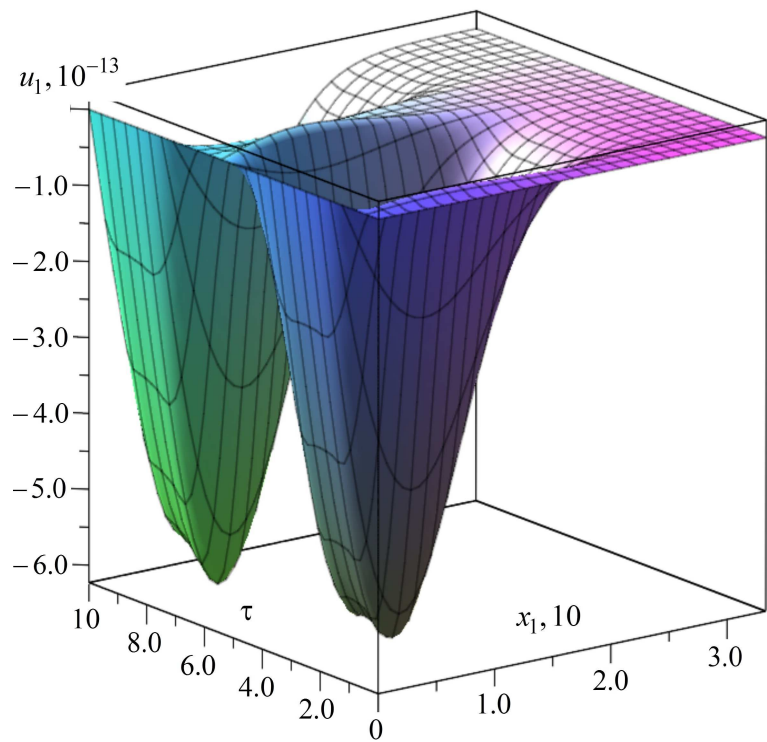


Рис. 5.3. зависимость $u_1(x_1, x_2, \tau)$ от x_2 и τ при $x_1 = 0.1$.

асимптотического разделения переменных даёт хорошую точность вычислений в случае когда неравномерность поверхностных возмущений носит слабо выраженный характер.

5.4. Асимптотическое решение трехмерной задачи упругой диффузии для слоя

В качестве следующего примера применения алгоритма асимптотического разделения переменных рассмотрим трехмерную задачу упругой диффузии для N - компонентного ортотропного слоя, ограниченного плоскостями $x_3 = 0$ и $x_3 = 1$. Математическая модель описывается уравнениями (1.30), граничными условиями (1.54). Начальные условия нулевые. Полагаем, что правые части в граничных условиях (1.54) имеют вид:

$$f_{km} = g_{km}(\varepsilon x_1, \varepsilon x_2, \tau) \quad (k = \overline{1, N+3}, m = 1, 2).$$

где дифференциальные операторы m_{i1} и m_{i2} определяются так:

$$m_{i1}(u_1, u_2, u_3) = u_i, \quad m_{i2}(u_1, u_2, u_3) = u_i.$$

Вводим «медленные» переменные $\zeta_\alpha = \varepsilon x_\alpha$ ($\alpha = 1, 2$) и решение задачи (1.30), (1.54) представляем в виде рядов по степеням малого параметра:

$$\begin{aligned} u_i(x_1, x_2, x_3, \tau) &= \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l u_{il}(\zeta_1, \zeta_2, x_3, \tau), \\ \eta_q(x_1, x_2, x_3, \tau) &= \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l \eta_{ql}(\zeta_1, \zeta_2, x_3, \tau). \end{aligned} \quad (5.62)$$

Подстановка рядов (5.62) в уравнения (1.30), граничные условия (1.54) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях ε даёт следующую рекуррентную последовательность одномерных задач:

- при ε^0

$$C_{i3m3} \frac{\partial^2 u_{m0}}{\partial x_3^2} - \sum_{j=1}^N \alpha_{i3}^j \frac{\partial \eta_{j0}}{\partial x_3} = \ddot{u}_{i0}, \quad D_{33}^q \frac{\partial^2 \eta_{q0}}{\partial x_3^2} - \Lambda_{33i3}^q \frac{\partial^3 u_{i0}}{\partial x_3^3} = \dot{\eta}_0^q; \quad (5.63)$$

$$\begin{aligned}
u_{i0}|_{x_3=0} &= g_{i1}(\zeta_1, \zeta_2, \tau), \quad u_{i0}|_{x_3=1} = g_{i2}(\zeta_1, \zeta_2, \tau) \quad (i = \overline{1, 3}), \\
\left(\Lambda_{33m3}^q \frac{\partial^2 u_{m0}}{\partial x_3^2} - D_{33}^q \frac{\partial \eta_{q0}}{\partial x_3} \right) \Big|_{x_3=0} &= g_{q+3,1}(\zeta_1, \zeta_2, \tau), \\
\left(\Lambda_{33m3}^q \frac{\partial^2 u_{m0}}{\partial x_3^2} - D_{33}^q \frac{\partial \eta_{q0}}{\partial x_3} \right) \Big|_{x_3=1} &= g_{q+3,2}(\zeta_1, \zeta_2, \tau);
\end{aligned} \tag{5.64}$$

- при ε^1

$$\begin{aligned}
C_{i3m3} \frac{\partial^2 u_{m1}}{\partial x_3^2} - \sum_{j=1}^N \alpha_{i3}^j \frac{\partial \eta_{j1}}{\partial x_3} &= \ddot{u}_{i1} - \\
- (C_{ipm3} + C_{i3mp}) \frac{\partial^2 u_{m0}}{\partial \zeta_p \partial x_3} + \sum_{j=1}^N \alpha_{ip}^j \frac{\partial \eta_{j0}}{\partial \zeta_p}, \\
D_{33}^q \frac{\partial^2 \eta_{q1}}{\partial x_3^2} - \Lambda_{33i3}^q \frac{\partial^3 u_{i1}}{\partial x_3^3} &= \dot{\eta}_{q1} - (D_{3p}^q + D_{p3}^q) \frac{\partial^2 \eta_{q0}}{\partial x_3 \partial \zeta_p} + \\
+ (\Lambda_{33ip}^q + \Lambda_{3pi3}^q + \Lambda_{p3i3}^q) \frac{\partial^3 u_{i0}}{\partial x_3^2 \partial \zeta_p};
\end{aligned} \tag{5.65}$$

$$\begin{aligned}
u_{i1}|_{x_3=0,1} &= 0, \\
\left(\Lambda_{33m3}^q \frac{\partial^2 u_{m1}}{\partial x_3^2} - D_{33}^q \frac{\partial \eta_{q1}}{\partial x_3} \right) \Big|_{x_3=0,1} &= \\
= \left(D_{3p}^q \frac{\partial \eta_{q0}}{\partial \zeta_p} - (\Lambda_{33mp}^q + \Lambda_{3pm3}^q) \frac{\partial^2 u_{m0}}{\partial \zeta_p \partial x_3} \right) \Big|_{x_3=0,1};
\end{aligned} \tag{5.66}$$

- при ε^2

$$\begin{aligned}
C_{i3m3} \frac{\partial^2 u_{m2}}{\partial x_3^2} - \sum_{j=1}^N \alpha_{i3}^j \frac{\partial \eta_{j2}}{\partial x_3} &= \ddot{u}_{i2} + \sum_{j=1}^N \alpha_{ip}^j \frac{\partial \eta_{j1}}{\partial \zeta_p} - \\
- (C_{ipm3} + C_{i3mp}) \frac{\partial^2 u_{m1}}{\partial \zeta_p \partial x_3} - (C_{ipms} + C_{ismp}) \frac{\partial^2 u_{m0}}{\partial \zeta_p \partial \zeta_s},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& D_{33}^q \frac{\partial^2 \eta_{q2}}{\partial x_3^2} - \Lambda_{33i3}^q \frac{\partial^3 u_{i2}}{\partial x_3^3} = \dot{\eta}_{q2} - (D_{3p}^q + D_{p3}^q) \frac{\partial^2 \eta_{q1}}{\partial x_3 \partial \zeta_p} - \\
& - (D_{ps}^q + D_{sp}^q) \frac{\partial^2 \eta_{q0}}{\partial \zeta_p \partial \zeta_s} + (\Lambda_{33ip}^q + \Lambda_{3pi3}^q + \Lambda_{p3i3}^q) \frac{\partial^3 u_{i1}}{\partial x_3^2 \partial \zeta_p} + \\
& + (\Lambda_{3sip}^q + \Lambda_{s3ip}^q + \Lambda_{3pis}^q + \Lambda_{p3is}^q + \Lambda_{psi3}^q + \Lambda_{spi3}^q) \frac{\partial^3 u_{i0}}{\partial x_3 \partial \zeta_p \partial \zeta_s};
\end{aligned} \tag{5.67}$$

$$\begin{aligned}
& u_{i2}|_{x_3=0,1} = 0 \quad (p, s = 1, 2), \\
& \left(\Lambda_{33m3}^q \frac{\partial^2 u_{m1}}{\partial x_3^2} - D_{33}^q \frac{\partial \eta_{q1}}{\partial x_3} \right) \Big|_{x_3=0,1} = D_{3p}^q \frac{\partial \eta_{q1}}{\partial \zeta_p} \Big|_{x_3=0,1} - \\
& - \left((\Lambda_{33mp}^q + \Lambda_{3pm3}^q) \frac{\partial^2 u_{m1}}{\partial \zeta_p \partial x_3} + (\Lambda_{3pms}^q + \Lambda_{3smp}^q) \frac{\partial^2 u_{m0}}{\partial \zeta_p \partial \zeta_s} \right) \Big|_{x_3=0,1};
\end{aligned} \tag{5.68}$$

- при ε^k ($k \geq 3$)

$$\begin{aligned}
& C_{i3m3} \frac{\partial^2 u_{mk}}{\partial x_3^2} - \sum_{j=1}^N \alpha_{i3}^j \frac{\partial \eta_{jk}}{\partial x_3} = \ddot{u}_{ik} + \sum_{j=1}^N \alpha_{ip}^j \frac{\partial \eta_{j,k-1}}{\partial \zeta_p} - \\
& - (C_{ipm3} + C_{i3mp}) \frac{\partial^2 u_{m,k-1}}{\partial \zeta_p \partial x_3} - (C_{ipms} + C_{ismp}) \frac{\partial^2 u_{m,k-2}}{\partial \zeta_p \partial \zeta_s}, \\
& D_{33}^q \frac{\partial^2 \eta_{qk}}{\partial x_3^2} - \Lambda_{33i3}^q \frac{\partial^3 u_{ik}}{\partial x_3^3} = \dot{\eta}_{qk} - (D_{3p}^q + D_{p3}^q) \frac{\partial^2 \eta_{q,k-1}}{\partial x_3 \partial \zeta_p} - \\
& - (D_{ps}^q + D_{sp}^q) \frac{\partial^2 \eta_{q,k-2}}{\partial \zeta_p \partial \zeta_s} + (\Lambda_{p3i3}^q + \Lambda_{3pi3}^q + \Lambda_{33ip}^q) \frac{\partial^3 u_{i,k-1}}{\partial x_3^2 \partial \zeta_p} + \\
& + (\Lambda_{3pis}^q + \Lambda_{p3is}^q + \Lambda_{3sip}^q + \Lambda_{s3ip}^q + \Lambda_{spi3}^q + \Lambda_{psi3}^q) \frac{\partial^3 u_{i,k-2}}{\partial x_3 \partial \zeta_p \partial \zeta_s} + \\
& + (\Lambda_{ipsr}^q + \Lambda_{iprs}^q + \Lambda_{ispr}^q + \Lambda_{isrp}^q + \Lambda_{irsp}^q + \Lambda_{irps}^q) \frac{\partial^3 u_{i,k-3}}{\partial \zeta_r \partial \zeta_p \partial \zeta_s};
\end{aligned} \tag{5.69}$$

$$\begin{aligned}
& u_{ik}|_{x_3=0,1} = 0 \quad (p, r, s = 1, 2), \\
& \left(\Lambda_{33m3}^q \frac{\partial^2 u_{mk}}{\partial x_3^2} - D_{33}^q \frac{\partial \eta_{qk}}{\partial x_3} \right) \Big|_{x_3=0,1} = D_{3p}^q \frac{\partial \eta_{q,k-1}}{\partial \zeta_p} \Big|_{x_3=0,1} - \\
& - \left((\Lambda_{3pm3}^q + \Lambda_{33mp}^q) \frac{\partial^2 u_{m,k-1}}{\partial \zeta_p \partial x_3} + (\Lambda_{3pms}^q + \Lambda_{3smp}^q) \frac{\partial^2 u_{m,k-2}}{\partial \zeta_p \partial \zeta_s} \right) \Big|_{x_3=0,1}.
\end{aligned} \tag{5.70}$$

В случае ортотропной среды задача (5.63), (5.64) распадается на три независимые задачи (здесь и далее суммирование по греческим индексам не производится; для физических постоянных используются обозначения (1.33) и (1.37)):

$$C_{\alpha 3} \frac{\partial^2 u_{\alpha 0}}{\partial x_3^2} = \ddot{u}_{\alpha 0}, \tag{5.71}$$

$$u_{\alpha 0}|_{x_3=0} = g_{\alpha 1}(\zeta_1, \zeta_2, \tau), \quad u_{\alpha 0}|_{x_3=1} = g_{\alpha 2}(\zeta_1, \zeta_2, \tau);$$

$$C_{33} \frac{\partial^2 u_{30}}{\partial x_3^2} - \sum_{j=1}^N \alpha_3^j \frac{\partial \eta_{j0}}{\partial x_3} = \ddot{u}_{30}, \quad D_{33}^q \frac{\partial^2 \eta_{q0}}{\partial x_3^2} - \Lambda_{33}^q \frac{\partial^3 u_{30}}{\partial x_3^3} = \dot{\eta}_{q0}; \tag{5.72}$$

$$\begin{aligned}
& u_{30}|_{x_3=0} = g_{31}(\zeta_1, \zeta_2, \tau), \quad u_{30}|_{x_3=1} = g_{32}(\zeta_1, \zeta_2, \tau), \\
& \left(\Lambda_{33}^q \frac{\partial^2 u_{30}}{\partial x_3^2} - D_3^q \frac{\partial \eta_{q0}}{\partial x_3} \right) \Big|_{x_3=0} = g_{q+3,1}(\zeta_1, \zeta_2, \tau), \\
& \left(\Lambda_{33}^q \frac{\partial^2 u_{30}}{\partial x_3^2} - D_3^q \frac{\partial \eta_{q0}}{\partial x_3} \right) \Big|_{x_3=1} = g_{q+3,2}(\zeta_1, \zeta_2, \tau).
\end{aligned} \tag{5.73}$$

Задача (5.71) аналогична задаче (5.42), (5.43) из предыдущего пункта.

Её решение записывается так:

$$\begin{aligned}
u_{\alpha 0}(\zeta_1, \zeta_2, x_3, \tau) &= g_{\alpha 1}(\zeta_1, \zeta_2, \tau) * G^0(x_3, \tau) + \\
&+ g_{\alpha 2}(\zeta_1, \zeta_2, \tau) * G^0(1 - x_3, \tau).
\end{aligned} \tag{5.74}$$

где функции $G^0(x_3, \tau)$ находятся по формулам (5.47) с заменой C_{12} на $C_{\alpha 3}$.

Решение задачи (5.72) имеет вид (2.5), где функции Грина находятся по формулам (2.37) – (2.44) п. 2.3.

Замечание. По аналогии с замечанием из предыдущего пункта отметим, что, для того чтобы воспользоваться результатами п. 2.3 необходимо внести в формулы (1.28) следующие изменения

$$C'_{ijkl} = \frac{C_{ijkl}}{C_{3333}}, \quad C^2 = \frac{C_{3333}}{\rho}, \quad \alpha'^q_{ij} = \frac{n_0^{(q)} \alpha_{ij}^{(q)}}{C_{3333}}, \quad F'_i = \frac{F_i}{C_{3333}}.$$

Тогда в уравнениях (5.72) постоянная $C_{33} = 1$. Между остальными физическими постоянными в задаче (5.72), (5.73) и задаче п. 2.3 получаем следующие соответствия

$$\alpha_3^q \leftrightarrow \alpha_q, \quad D_3^q \leftrightarrow D_q.$$

Переходя к задачам первого приближения с учетом сформулированного замечания имеем

$$C_{\alpha 3} \frac{\partial^2 u_{\alpha 1}}{\partial x_3^2} = \ddot{u}_{\alpha 1} - C_{3\alpha} \frac{\partial^2 u_{30}}{\partial \zeta_\alpha \partial x_3} + \sum_{j=1}^N \alpha_\alpha^j \frac{\partial \eta_{j0}}{\partial \zeta_\alpha}, \quad (5.75)$$

$$u_{\alpha 1}|_{x_3=0} = 0, \quad u_{\alpha 1}|_{x_3=1} = 0, \quad (\alpha = 1, 2); \quad (5.76)$$

$$\frac{\partial^2 u_{31}}{\partial x_3^2} - \sum_{j=1}^N \alpha_3^j \frac{\partial \eta_{j1}}{\partial x_3} = \ddot{u}_{31} - C_{13} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \zeta_1 \partial x_3} - C_{23} \frac{\partial^2 u_{20}}{\partial \zeta_2 \partial x_3}, \quad (5.77)$$

$$D_3^q \frac{\partial^2 \eta_{q1}}{\partial x_3^2} - \Lambda_{33}^q \frac{\partial^3 u_{31}}{\partial x_3^3} = \dot{\eta}_{q1} - \Lambda_{31}^q \frac{\partial^3 u_{10}}{\partial x_3^2 \partial \zeta_1} - \Lambda_{32}^q \frac{\partial^3 u_{20}}{\partial x_3^2 \partial \zeta_2},$$

$$u_{31}|_{x_3=0} = 0, \quad u_{31}|_{x_3=1} = 0,$$

$$\begin{aligned} \left(\Lambda_{33}^q \frac{\partial^2 u_{31}}{\partial x_3^2} - D_3^q \frac{\partial \eta_{q1}}{\partial x_3} \right) \Big|_{x_3=0} &= - \left(\Lambda_{31}^q \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \zeta_1 \partial x_3} + \Lambda_{32}^q \frac{\partial^2 u_{20}}{\partial \zeta_2 \partial x_3} \right) \Big|_{x_3=0}, \\ \left(\Lambda_{33}^q \frac{\partial^2 u_{31}}{\partial x_3^2} - D_3^q \frac{\partial \eta_{q1}}{\partial x_3} \right) \Big|_{x_3=1} &= - \left(\Lambda_{31}^q \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \zeta_1 \partial x_3} + \Lambda_{32}^q \frac{\partial^2 u_{20}}{\partial \zeta_2 \partial x_3} \right) \Big|_{x_3=1} \end{aligned} \quad (5.78)$$

Решение задачи (5.75), (5.76) имеет вид аналогичный (5.55), (5.56)

$$u_{\alpha 1}(x_3, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{\alpha}^s(\zeta, \lambda_n, \tau) * W_{\alpha}^{1s}(\lambda_n, \tau) \sin \lambda_n x_3,$$

где

$$\begin{aligned} F_{\alpha}(\zeta_1, \zeta_2, x_3, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_{\alpha}^s(\zeta_1, \zeta_2, \lambda_n, \tau) \sin \lambda_n x_3, \\ W_{\alpha}^{1s}(\lambda_n, \tau) &= \frac{\sin(\sqrt{C_{\alpha 3}} \lambda_n \tau)}{\sqrt{C_{\alpha 3}} \lambda_n}, \\ F_{\alpha}^s(\zeta_1, \zeta_2, \lambda_n, \tau) &= [1 - (-1)^n] \frac{F_{\alpha}^c(\zeta_1, \zeta_2, 0, \tau)}{\lambda_n} + \\ &+ 2\lambda_n \sum_{k=1, k \neq n}^{\infty} [1 - (-1)^{n+k}] \frac{F_{\alpha}^c(\zeta_1, \zeta_2, \lambda_k, \tau)}{\lambda_n^2 - \lambda_k^2}. \end{aligned} \quad (5.79)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F_{\alpha}^c(\zeta_1, \zeta_2, 0, \tau) &= \int_0^1 \left(C_{3\alpha} \frac{\partial^2 u_{30}}{\partial \zeta_{\alpha} \partial \xi} - \sum_{j=1}^N \alpha_{\alpha}^j \frac{\partial \eta_{j0}}{\partial \zeta_{\alpha}} \right) d\xi, \\ F_{\alpha}^c(\zeta_1, \zeta_2, \lambda_n, \tau) &= 2 \int_0^1 \left(C_{3\alpha} \frac{\partial^2 u_{30}}{\partial \zeta_{\alpha} \partial \xi} - \sum_{j=1}^N \alpha_{\alpha}^j \frac{\partial \eta_{j0}}{\partial \zeta_{\alpha}} \right) \cos \lambda_n \xi d\xi, \end{aligned} \quad (5.80)$$

коэффициенты разложения правой части уравнения (5.75) в ряд по $\cos \lambda_n x_3$.

Решение задачи (5.77), (5.78) находим по формулам (2.5) и (2.93)

$$\begin{aligned}
u_{31} = & W_{11}^l * \left(C_{13} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \zeta_1 \partial x_3} + C_{23} \frac{\partial^2 u_{20}}{\partial \zeta_2 \partial x_3} \right) - \\
& - \sum_{k=1}^N \Lambda_{31}^k W_{1,k+1}^l * \frac{\partial^3 u_{10}}{\partial \zeta_1 \partial x_3^2} - \sum_{k=1}^N \Lambda_{32}^k W_{1,k+1}^l * \frac{\partial^3 u_{20}}{\partial \zeta_2 \partial x_3^2} - \\
& - \sum_{k=1}^N \Lambda_{31}^k \left[G_{1,k+1}(x_3, \tau) * \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \zeta_1 \partial x_3} \Big|_{x_3=0} + G_{1,k+1}(1-x_3, \tau) * \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \zeta_1 \partial x_3} \Big|_{x_3=1} \right] - \\
& - \sum_{k=1}^N \Lambda_{32}^k \left[G_{1,k+1}(x_3, \tau) * \frac{\partial^2 u_{20}}{\partial \zeta_2 \partial x_3} \Big|_{x_3=0} + G_{1,k+1}(1-x_3, \tau) * \frac{\partial^2 u_{20}}{\partial \zeta_2 \partial x_3} \Big|_{x_3=1} \right], \tag{5.81}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{q1} = & W_{q+1,1}^l * \left(C_{13} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \zeta_1 \partial x_3} + C_{23} \frac{\partial^2 u_{20}}{\partial \zeta_2 \partial x_3} \right) - \\
& - \sum_{k=1}^N \Lambda_{31}^k W_{q+1,k+1}^l * \frac{\partial^3 u_{10}}{\partial \zeta_1 \partial x_3^2} - \sum_{k=1}^N \Lambda_{32}^k W_{q+1,k+1}^l * \frac{\partial^3 u_{20}}{\partial \zeta_2 \partial x_3^2} - \\
& - \sum_{k=1}^N \Lambda_{31}^k \left[G_{q+1,k+1}(x_3, \tau) * \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \zeta_1 \partial x_3} \Big|_{x_3=0} - G_{q+1,k+1}(1-x_3, \tau) * \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \zeta_1 \partial x_3} \Big|_{x_3=1} \right] - \\
& - \sum_{k=1}^N \Lambda_{32}^k \left[G_{q+1,k+1}(x_3, \tau) * \frac{\partial^2 u_{20}}{\partial \zeta_2 \partial x_3} \Big|_{x_3=0} - G_{q+1,k+1}(1-x_3, \tau) * \frac{\partial^2 u_{20}}{\partial \zeta_2 \partial x_3} \Big|_{x_3=1} \right].
\end{aligned}$$

Задачи второго и более высоких приближений могут быть решены аналогичным образом. Здесь они не рассматриваются.

Для расчета рассмотрим однокомпонентную ортотропную среду (3.80).

Правые части граничных условий в (1.54) зададим так:

$$g_{41}(\zeta_1, \zeta_2, \tau) = g(\zeta_1, \zeta_2) H(\tau), \quad g(\zeta_1, \zeta_2) = e^{-(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)}. \tag{5.82}$$

Остальные функции $g_{km}(\zeta_1, \zeta_2, \tau) \equiv 0$.

Тогда из формул (2.37) – (2.44), (5.74) получаем следующий результат

для нулевого приближения:

$$u_{\alpha 0}(\zeta_1, \zeta_2, x_3, \tau) = 0 \quad (\alpha = 1, 2). \quad (5.83)$$

Функции u_{30} и η_0 определяются по формулам (2.100).

Для первого приближения с учётом (5.81), (5.83) и в соответствии с граничными условиями (5.78) получаем:

$$u_{31}(\zeta_1, \zeta_2, x_3, \tau) = 0, \quad \eta_1(\zeta_1, \zeta_2, x_3, \tau) = 0.$$

Вычисляя правые части в (5.77) по аналогии с (5.59) имеем:

$$\begin{aligned} C_{3\alpha} \frac{\partial^2 u_{30}}{\partial \zeta_\alpha \partial x_3} - \alpha_\alpha \frac{\partial \eta_0}{\partial \zeta_\alpha} &= \frac{\partial g}{\partial \zeta_\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{F}^c(\zeta_1, \zeta_2, \lambda_n, \tau) \cos \lambda_n x_3, \\ \tilde{F}^c(\zeta_1, \zeta_2, \lambda_n, \tau) &= \sum_{l=1}^2 (-1)^{l+1} \left(C_{3\alpha} \lambda_n A_{12}^{(l)} - \alpha_\alpha A_{22}^{(l)} \right) I_l(\gamma, \beta, \tau) - \\ &+ \left(C_{3\alpha} \lambda_n A_{12}^{(3)} - \alpha_\alpha A_{22}^{(3)} \right) I_3(s_3, \tau) - 2\alpha_\alpha I_3(-D_3 \lambda_n^2, \tau), \\ \tilde{F}^c(\zeta_1, \zeta_2, 0, \tau) &= -\alpha_\alpha \tau. \end{aligned}$$

Здесь интегралы I_1 , I_2 и I_3 определяются по формулам (2.101), параметры $\gamma = \gamma(\lambda_n)$, $\beta = \beta(\lambda_n)$ и $s_3 = s_3(\lambda_n)$ являются нулями многочлена $P(\lambda_n, s)$ (формула (2.37) п. 2.3).

От функций $\tilde{F}^c(\zeta_1, \zeta_2, \lambda_n, \tau)$ по формулам (5.79) переходим к функциям $\tilde{F}^s(\zeta_1, \zeta_2, \lambda_n, \tau)$. Подставляя полученный результат в (5.55), (5.56), получаем

$$\begin{aligned} u_{\alpha 1}(\zeta_1, \zeta_2, x_3, \tau) &= \frac{\partial g}{\partial \zeta_\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{F}^s(\zeta_1, \zeta_2, \lambda_n, \tau) * W_\alpha^{1s}(\lambda_n, \tau) \sin \lambda_n x_3 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{C_{\alpha 3}}} \frac{\partial g}{\partial \zeta_\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - (-1)^n}{\lambda_n^2} B_{n0}^\alpha + \sum_{k=1, k \neq n}^{\infty} \frac{1 - (-1)^{k+n}}{\lambda_n^2 - \lambda_k^2} B_{nk}^\alpha \right) \sin \lambda_n x_3 \end{aligned} \quad (5.84)$$

где

$$B_{n0}^\alpha = -\alpha_\alpha \tilde{I}_0(\sqrt{C_{\alpha 3}} \lambda_n, \tau),$$

$$\begin{aligned}
B_{nk}^\alpha = & \sum_{l=1}^2 (-1)^{l+1} \left[C_{3\alpha} \lambda_k A_{12}^{(l)}(\lambda_k) - \alpha_\alpha A_{22}^{(l)}(\lambda_k) \right] \times \\
& \times \tilde{I}_l(\gamma(\lambda_k), \beta(\lambda_k), \sqrt{C_{\alpha 3}} \lambda_n, \tau) + \\
& + \left[C_{3\alpha} \lambda_k A_{12}^{(3)}(\lambda_k) - \alpha_\alpha A_{22}^{(3)}(\lambda_k) \right] \tilde{I}_3(s_3(\lambda_k), \sqrt{C_{\alpha 3}} \lambda_n, \tau) - \\
& - 2\alpha_\alpha \tilde{I}_3(-D_3 \lambda_k^2, \sqrt{C_{\alpha 3}} \lambda_n, \tau),
\end{aligned}$$

Здесь интегралы \tilde{I}_j ($j = \overline{1, 3}$) находятся по формулам (5.60) и (5.61).

Интеграл \tilde{I}_0 равен

$$\tilde{I}_0(\omega, \tau) = \sin \omega \tau * \tau = \frac{\tau}{\omega} - \frac{1}{\omega^2} \sin \omega \tau,$$

Окончательно с учетом первых двух приближений решение задачи (1.30), (1.54) при $\varepsilon \rightarrow 0$ может быть записано так:

$$u_\alpha = \varepsilon u_{\alpha 1} + o(\varepsilon^2) \quad (\alpha = 1, 2), \quad u_3 = u_{30} + o(\varepsilon), \quad \eta = \eta_0 + o(\varepsilon).$$

где функции u_{30} , η_0 и $u_{\alpha 1}$ определяются по формулам (2.100) и (5.84).

Результаты вычислений для алюминия представлены на рис. 5.4 – 5.6.

Таким образом, предложенная методика путем сведения многомерной задачи к рекуррентной последовательности одномерных задач, позволяет упростить процедуру решения многомерных задач с неоднородными краевыми условиями, при условии, что правые части граничных условий являются медленно меняющимися функциями своих аргументов. При этом погрешность полученного приближенного решения определяется количеством членов в разложении (5.62).

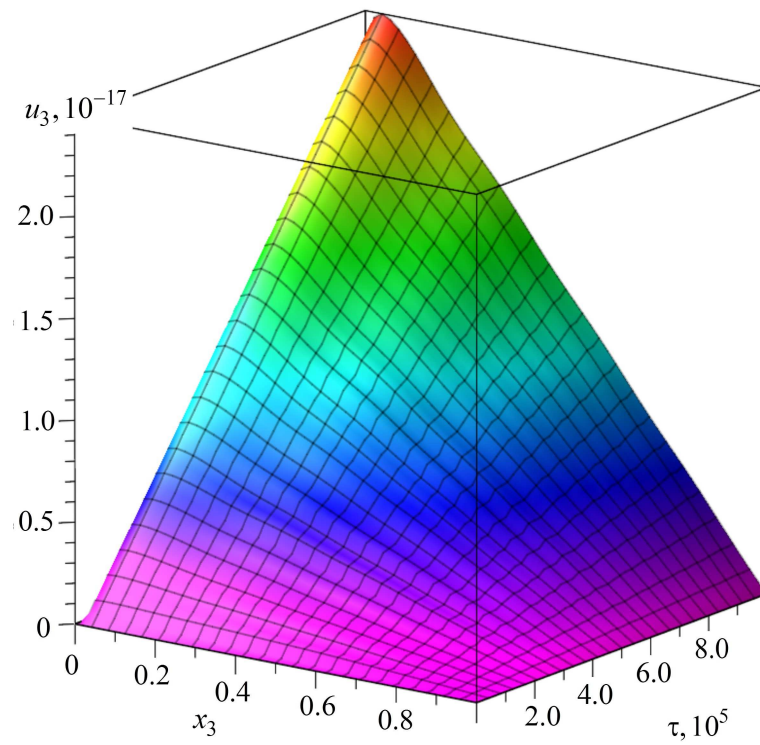


Рис. 5.4. зависимость $u_3(x_1, x_2, x_3, \tau)$ от x_3 и τ при $x_1 = 0.1, x_2 = 0.1$.

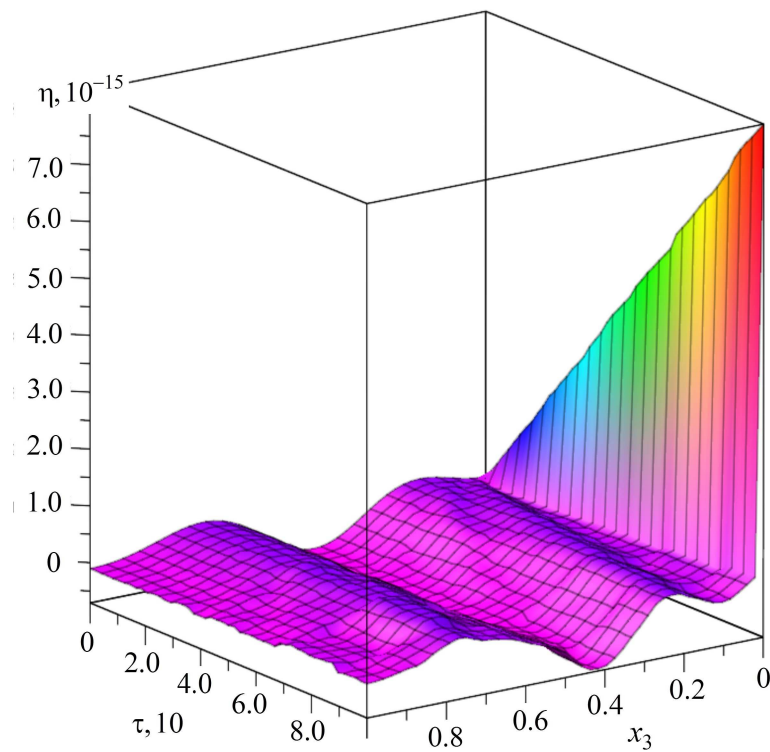


Рис. 5.5. зависимость $\eta(x_1, x_2, x_3, \tau)$ от x_3 и τ при $x_1 = 0.1, x_2 = 0.1$.

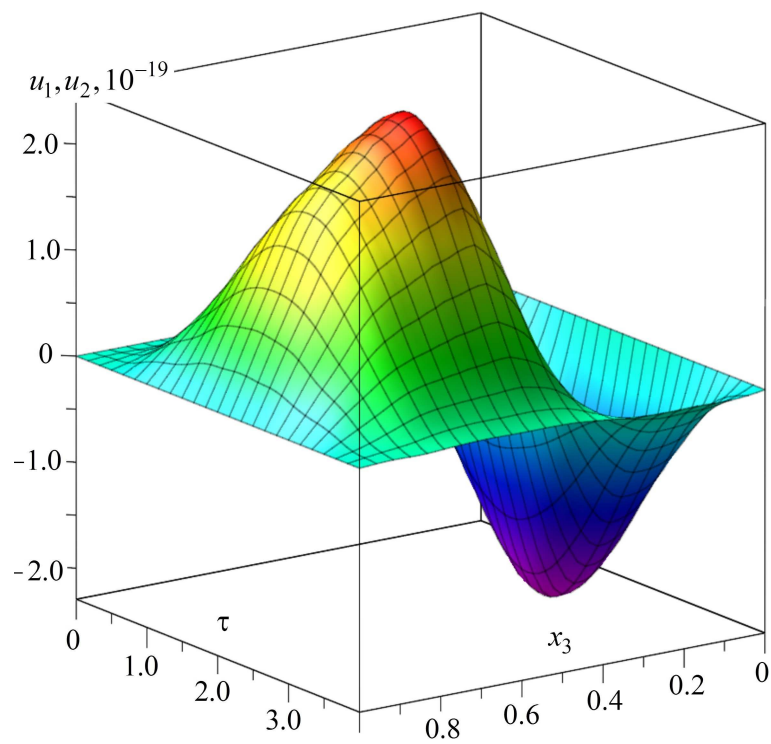


Рис. 5.6. зависимость $u_1(x_1, x_2, x_3, \tau)$ и $u_2(x_1, x_2, x_3, \tau)$ от x_3 и τ при $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.1$.

Заключение

1. Дана общая математическая постановка задач нестационарной связанной термоэлектромагнитоупругой диффузии с конечной скоростью распространения тепла и массопереноса для анизотропных многокомпонентных тел в произвольной криволинейной системе координат. Из нее как частный случай получены начально-краевые задачи для механодиффузии с бесконечной скоростью распространения тепла и массопереноса в прямоугольной декартовой системе координат для ортотропных сред.
2. На основании найденных частных решений задачи Штурма-Лиувилля для упругодиффузионного оператора предложен и реализован метод решения класса нестационарных связанных одномерных и двумерных задач механодиффузии в прямоугольной декартовой координат основанный на представлении искомым полей перемещений и приращений концентраций в виде разложений по собственным функциям. Сформулированы условия, накладываемые на начально-краевые задачи, допускающие представление решений в виде разложений по собственным функциям.
3. Предложен и реализован метод решения класса нестационарных связанных одномерных и двумерных задач механодиффузии в случае произвольных граничных условий основанный на построении соотношений между правыми частями граничных условий различных типов. Указанные соотношения позволяют выразить решение произвольной задачи через известное решение какой-либо задачи, найденное с помощью разложений по собственным функциям.
4. Предложен и реализован асимптотический метод решения класса многомерных нестационарных связанных задач механодиффузии позволяющий

ющий при определенных условиях свести многомерную задачу к рекуррентной последовательности одномерных задач.

5. Получены решения новых нестационарных связанных одномерных, двумерных и трехмерных задач механодиффузии в прямоугольной декартовой системе координат для ортотропных многокомпонентных сред.
6. Построены нестационарные поверхностные и объемные функции Грина для упругодиффузионного пространства, полупространства и слоя в одномерном и двумерном случаях.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Абрамовиц М. и Стиган И.* 163. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
2. *Асташкин В.И., Бурак Я.И.* Основы теории физико-механических процессов в бинарной системе при фазовом превращении 1-го рода // Физико-химическая механика материалов. – 1976. – № 7. – С. 96–102.
3. *Асташкин В.И., Бурак Я.И.* Термодинамические основы теории деформации n-компонентного раствора при аллотропическом превращении // Математические методы и физико-механические поля. – 1978. – Т. 7. – С. 60–64.
4. *Афанасьева О.А., Вестяк А.В., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Модель связанных динамических процессов в термоэлектромагнитоупругих средах с учётом диффузии // Импульсные процессы в механике сплошных сред: Материалы X Международной научной конференции (19-22 августа 2011). – Николаев: КП «Миколаївська обласна друкарня», 2013. – С. 27–32.
5. *Афанасьева О.А., Вестяк А.В., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Упругое полупространство под действием нестационарных диффузионных потоков // Современные проблемы механики деформированного твёрдого тела. Тезисы докладов международной научной конференции. – Одесса: «Астропринт», 2013. – С. 17–19
6. *Афанасьева О.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Приближённое решение одномерной задачи упругой диффузии для полупространства //

- Импульсные процессы в механике сплошных сред: Материалы IX Международной научной конференции. – Николаев: КП «Миколаївська обласна друкарня», 2011. – С. 47–51.
7. *Афанасьева О.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Приближённое решение трёхмерной задачи об упругой диффузии для ортотропного слоя // Нестационарные процессы деформирования элементов конструкций, обусловленные воздействием полей различной природы. – Львов: Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С.Подстригача НАН Украины, 2012. – С. 12–16.
 8. *Афанасьева О.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Одномерная нестационарная задача упругой диффузии для двухкомпонентного слоя // Современные проблемы математики и механики: В 3-х томах. – Львов: Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С.Подстригача НАН Украины, 2013. –Т. 1. – С. 70–72.
 9. *Ахметова Е.Р., Давыдов С.А., Земсков А.В.* Применение линейной нестационарной модели механодиффузии в расчёте технологических процессов на примере ионной имплантации // Тезисы докладов V Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». – М.: ООО «ТР-принт», 2016. – С. 25–27.
 10. *Бардзокас Д.И., Зобнин А.И.* Математическое моделирование физических процессов в композитных материалах периодической структуры. – М.: УРСС, 2003. – 376 с.
 11. *Бардзокас Д.И., Зобнин А.И., Сеник Н.А., Фильштинский М.Л.* Математическое моделирование в задачах механики связанных полей. Т.1: Введение в теорию пьезоэлектричества. – М.: КомКнига, 2005. – 312 с.

12. *Бардзокас Д.И., Зобнин А.И., Сеник Н.А., Фильштинский М.Л.* Математическое моделирование в задачах механики связанных полей. Т.2: Статические и динамические задачи электроупругости для составных многосвязных тел. – М.: КомКнига, 2005. – 376 с.
13. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
14. *Бертмен Г., Эрдейи.* Таблицы интегральных преобразований. Том 1: Преобразование Фурье, Лапласа, Меллина. – М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. литературы, 1969. – 344 с.
15. *Бицадзе А.В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного: Учебник для вузов. – 3-е изд., доп. – М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. литературы, 1984. – 320 с.
16. *Бокштейн Б.С.* Диффузия в металлах. – М.: Металлургия, 1978. – 248 с.
17. *Бокштейн Б.С., Бокштейн В.С., Жуховицкий А.А.* Термодинамика и кинетика диффузии в твердых телах. – М.: Металлургия, 1974. – 280 с.
18. *Бугаев Н.М., Гачкевич А.Р., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Приближённое решение одномерной задачи связанной термоупругой диффузии для полупространства // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: збірник наукових праць. – Дніпропетровськ: Ліра, 2011. – Вып. 16.– С. 60–68.
19. *Бугаев Н.М., Гачкевич А.Р., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Асимптотическое разделение переменных в задаче упругой диффузии для полупространства // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: збірник наукових праць. – Дніпропетровськ: Ліра, 2012. – Вып. 20.– С. 74–82.

20. *Бугаев Н.М., Земсков А.В.* Двумерная модель нестационарной механо-диффузии для упругого полупространства // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов. – Казань: Издательство Казанского (Приволжского) федерального университета, 2015. – С. 602–604.
21. *Букрина Н.В., Князева А.Г.* Об оценке механических напряжений в композиционном материале при обработке импульсным источником нагрева // Математическое моделирование систем и процессов. – 2008. – № 16. – С. 17–27.
22. *Бурак Я. Й., Галапац Б. П., Гнідець Б. М.* Фізико-механічні процеси в електропровідних тілах. – Киев: Наукова Думка, 1978. – 232 с.
23. *Бурак Я.И., Галапац Б.П., Чапля Е.Я.* Деформация электропроводных тел с учетом гетеродиффузии заряженных примесных частиц // Физико-химическая механика материалов. – 1980. – № 5. – С. 8–14.
24. *Бурак Я.И., Галапац Б.П., Чапля Е.Я.* Исходные уравнения процесса деформации электропроводных твердых растворов с учетом различных путей диффузии примесных частиц // Математические методы и физико-механические поля. – 1980. – Т. 11. – С. 60–66.
25. *Бурак Я.Й., Грицина О.Р., Нагірний Т.С.* Основополагающие соотношения обобщенной электротермомеханики N-компонентного твердого тела // Физ.-хим. мех. матер. – 1991. – Т. 25, № 1. – С. 9–13.
26. *Бурак Я., Луковський Я., Пелех П., Чапля Є.* Механічні та теплові процеси в бінарних системах // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2007. – Вып. 5. – С. 7–18.

27. *Бурак Я.И., Нагирный Т.С.* Термодинамические основы локально-градиентной термомеханики // Термодинамика необратимых процессов: Сборник научных трудов. – М.: Наука, 1992. – С. 16–20.
28. *Бурак Я.И., Нагирный Т.С., Чапля Є.Я.* Про термодинамічні основи теорії локально-градієнтних механотермодифузійних систем // Математические методы и физико-механические поля. – 1998. – Т.41, №1. – С. 16–20.
29. *Бурак Я.И., Чапля Є.Я.* Континуальні моделі нелінійної термомеханіки бінарних систем // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 1995. – Т.31, №4. – С. 7–15.
30. *Бурак Я.И., Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю.* Континуально-термодинамічні моделі механіки твердих розчинів. – Київ: Наукова думка, 2006. – 272 с.
31. *Бурчуладзе Т.В. Бежуашвили Ю.А.* О трехмерных динамических задачах сопряженной теории эластотермодиффузии // Дифференциальные уравнения. – 1981. – Т. 17, № 8. – Р. 1446–1455.
32. *Ван Бюрен Х.Г.* Дефекты в кристаллах. – М.: Издательство иностранной литературы, 1962. – 584 с.
33. *Вестяк А.В., Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В.* Алгебра и аналитическая геометрия. Ч. 1. – М.: Изд-во МАИ, 2002. – 460 с.
34. *Вестяк А.В., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Двумерная нестационарная задача упругой диффузии для ортотропной однокомпонентной полуплоскости // Проблемы прочности и пластичности. – 2016. – Т. 78, № 1. – С. 5–13.
35. *Вестяк В.А., Земсков А.В., Фёдоров И.А.* Асимптотическое разделение переменных в задаче термоупругости для анизотропного слоя с неод-

- народными краевыми условиями // Известия Саратовского университета. Новая серия, Серия Математика. Механика. Информатика. – 2012. – Т. 12, Вып. 3. – С. 50–56.
36. *Вестяк В.А., Земсков А.В., Федотенков Г.В.* Слабо неравномерный нагрев неограниченной слоистой пластины // Вестник МАИ. – 2010. – Т. 17, № 6. – С. 152–158.
37. *Волкова Л.В., Давыдов С.А., Земсков А.В., Фёдорова А.Д.* Исследование распространения связанных термоупругодиффузионных возмущений с конечной скоростью в средах с плоскими границами // Конференция по строительной механике корабля, посвященная памяти профессора В.А. Постнова и 90-летию со дня его рождения. – С.-Пб, 2017. – Т. 2. – С. 135–137.
38. *Вестяк В.А., Лемешев В.А., Тарлаковский Д.В.* Одномерные нестационарные волны в электромагнитоупругом полупространстве и слое // Доклады РАН. – 2009. – Т. 426, № 6. – С. 747–749.
39. *Вестяк В.А., Лемешев В.А., Тарлаковский Д.В.* Распространение нестационарных радиальных возмущений от сферической полости в электромагнитоупругом пространстве // Доклады РАН. – 2010. – Т. 434, № 2. – С. 186–188.
40. *Вестяк В.А., Садков А.С., Тарлаковский Д.В.* Распространение нестационарных объемных возмущений в упругой полуплоскости // Известия РАН МТТ. – 2011. – № 2. – С. 130–140.
41. *Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В.* Одномерные нестационарные волны в толстостенной электромагнитоупругой сфере // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2011. – № 4. – С. 16–21.

42. *Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В.* Исследование нестационарных радиальных колебаний электромагнитоупругой толстостенной сферы с помощью численного обращения преобразования Лапласа // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. – 2014. – Вып. 9, № 1. – С. 51–64.
43. *Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В.* Интегральное представление характеристик нестационарного электромагнитного поля в движущейся полуплоскости // Доклады РАН. – 2015. – Т. 460, № 3. – С. 279–282.
44. *Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В.* Нестационарное осесимметричное электромагнитное поле в движущемся шаре // Доклады РАН. – 2015. – Т. 464, № 5. – С. 544–547.
45. *Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В.* Нестационарное осесимметричное электромагнитное поле в деформирующейся сферической оболочке // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. – 2015. – Т. 157, Кн. 4. – С. 90–95.
46. *Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В.* Нестационарное осесимметричное деформирование упругой толстостенной сферы под действием объемных сил // Прикладная механика и техническая физика. – 2015. – Т. 56, № 6. – С. 59–69.
47. *Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В.* Нестационарное осесимметричное деформирование упругого пространства со сферической полостью под действием объёмных сил // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. – 2016. – № 4. – С. 48–54.

48. *Википедия* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Конобеевский_Сергей_Тихонович (дата обращения: 21.02.2017).
49. *Галапац Б.П.* Математическое моделирование физико-механического состояния электропроводных тел в агрессивных средах // Вестник Математические методы и физико-механические поля. – 1982. – Т. 16. – С. 24–30.
50. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.
51. *Гачкевич А.Р., Голубец В.М., Чорный Б.И., Макаренко О.Н.* Механотермодиффузионные процессы в приповерхностном слое пластины при нанесении эвтектического покрытия // Физико-химическая механика материалов. – 1988. – № 2. – С. 12–17.
52. *Гачкевич А.Р., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Линейная модель связанной термоупругости с учётом диффузии для неоднородных анизотропных сред // Материалы XVII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г.Горшкова. – М.: ООО ТР-принт, 2011. – Т. 2. – С. 96–106.
53. *Гачкевич А.Р., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Одномерная задача о нестационарной связанной упругой диффузии для слоя // Известия Саратовского университета. Новая серия, Серия Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Т. 2, Вып. 4, Ч. 1. – С. 52–59.
54. *Гачкевич О., Касперська А., Курницький Т., Терлецький Р.* Математичне моделювання і дослідження механотермодифузійних явищ у твердих тілах при дії теплового інфрачервоного випромінювання // Машинознавство. – 1999. – Т. 27, № 9. – С. 3–9.

55. *Гачкевич О.Р., Курницький Т.Л., Терлецький Р.Ф.* Механотермодифузійні процеси в напівпрозорому твердому шарі при дії теплового інфрачервоного випромінювання // Математические методы и физико-механические поля. – 1998. – Т. 41, № 3. – С. 121–131.
56. *Гачкевич О.Р., Терлецький Р.Ф.* Математичне моделювання механо-термодифузійних процесів у частково-прозорих деформівних твердих тілах з газовими домішками за умов дії електромагнітного випромінювання світлового діапазону частот // Математические методы и физико-механические поля. – 2003. – Т. 46, № 1. – С. 151–164.
57. *Гачкевич О.Р., Терлецький Р.Ф.* Механотермодифузійні процеси в частково прозорих деформівних твердих тілах з домішками при електромагнітному опроміненні за світлового діапазону частот // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2006. – Вип. 3. – С. 42–45.
58. *Гачкевич О.Р., Терлецький Р.Ф.* Моделі термомеханіки багатокomпонентних деформівних твердих тіл // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2008. – Вип. 8. – С. 26–36.
59. *Гегузин Я.Е.* Диффузионная зона. – М.: Наука, 1979. – 343 с.
60. *Гойхбург Д.М., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Двухкомпонентный упруго диффузионный слой под действием одномерных нестационарных возмущений // Вестник Московского авиационного института. – 2013. – Т. 20, № 2. – С. 226–237.
61. *Горский В. С.* Исследование упругого последействия в сплаве Си-Аи с упорядоченной решеткой // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1936. – Т. 6, № 3. – С. 272–276.

62. *Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В* Волны в сплошных средах: Учебное пособие: Для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.
63. *Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В* Динамические контактные задачи с подвижными границами. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1995. – 352 с.
64. *Горшков А.Г., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В* Основы тензорного анализа и механика сплошной среды: Учебник для Вузов. – М.: Наука, 2000. – 214 с.
65. *Греков М.А., Костырко С.А.* ПФормирование рельефа поверхности пленочного покрытия при поверхностной и объемной диффузии // Вестник СПбГУ. Сер. 1. – 2008. – Вып. 3. – С. 106–113.
66. *Греков М.А., Костырко С.А.* Потеря устойчивости плоской формы пленочного покрытия при поверхностной диффузии // Вестник СПбГУ. Сер. 10. – 2007. – Вып. 1. – С. 46–54.
67. *Гридасова Е.А.* Влияние диффузионной сварки стекла С49-1 с металлом СТЗСП на прочностные характеристики стекла // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4(4). – С. 1459–1460.
68. *Гришкина А.В., Проскура А.В.* Диффузионное образование трещин // Вестник ТГУ. – 1998. – Т. 3, Вып. 3. – С. 256–258.
69. *Де Гроот С.Р.* Термодинамика необратимых процессов. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. – 281 с.

70. *Де Гроот С.Р., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. – М.: Издательство «Мир», 1964. – 456 с.
71. *Де Гроот С., Сатторн Л.* Электродинамика. – М.: Наука, 1982. – 560 с.
72. *Гуров К.П.* Феноменологическая термодинамика необратимых процессов. – М.: Наука, 1978. – 128 с.
73. *Гуров К.П., Карташкин Б.А., Угасте Ю.Э.* Взаимная диффузия в многофазных металлических системах. – М.: Наука, 1981. – 350 с.
74. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Двухкомпонентное упруго диффузионное полупространство под действием нестационарных возмущений // Экологический вестник научных центров Черноморского Экономического сотрудничества. – 2014. – № 2. – С. 31–38.
75. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Упругое полупространство под действием одномерных нестационарных диффузионных возмущений // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. – 2014. – Т. 2, Кн. 4. – С. 70–79 = *Davydov S.A., Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V.* An Elastic Half-Space under the Action of One-Dimensional Time-Dependent Diffusion Perturbations // *Lobachevskii Journal of Mathematics.* – 2015. – V. 36, No 4. – P. 503–509.
76. *Давыдов С.А., Земсков А.В.* Релаксационные одномерные нестационарные упругодиффузионные процессы в сплошных средах. // Материалы XXIV Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.2. – М.: ООО «ТРП», 2018. – С. 39–41
77. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Метод эквивалентных граничных условий в одномерной задаче механодиффузии для полупро-

- странства // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики». – Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. – С. 168–174
78. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Модель термомехано-диффузии с конечной скоростью распространения тепловых и диффузионных возмущений // Проблемы безопасности на транспорте: материалы VIII Международная научно-практическая конференция, посвященная году науки: в 2 ч. Ч. 2 – Гомель: БелГУТ, 2017. – С. 183–185
79. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Фёдорова А.Д.* Связанная нестационарная задача термоупругой диффузии для многокомпонентного полупространства // Тезисы докладов VI Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». – М.: ООО «ТР-принт», 2017. – С. 38–40.
80. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Фёдорова А.Д.* Моделирование связанных термоупругодиффузионных процессов при разработке новых материалов // Сборник трудов секции Механика и моделирование материалов и технологий Международной молодёжной научной конференции «XLIV Гагаринские чтения». – М.: ИПМех РАН, 2018. – С. 46–48.
81. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Поверхностные функции Грина в нестационарных задачах термомехано-диффузии // Проблемы прочности и пластичности. – 2017. – Т. 79, № 1. – С. 38–47
82. *Данков П.Д., Чураев П.В.* Эффект деформации поверхностного слоя металла при окислении // Доклады АН СССР. – 1950. – Т. 73, № 6. – С. 1221–1225

83. *Дёч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразование. С приложением таблиц, составленных Р. Герше-лем. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1971. – 288 с.
84. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Справочник по операционному исчислению. – М.: Высшая школа, 1965. – 568 с.
85. *Дьярмати И.* Неравновесная термодинамика. – М.: Мир, 1974. – 304 с.
86. *Еремеев В. С.* Феноменологический анализ диффузии в металлических сплавах // Физика металлов и металловедение. – 1976. – Т. 42, Вып. 2. – С. 231–239
87. *Еремеев В.С.* Диффузия и напряжения. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 182 с.
88. *Еремеев В.С., Михайлов В.Н., Бойко Е.Б.* Анализ уровня концентрационных напряжений и их влияние на процесс массопереноса при диффузионном насыщении // Математические методы и физико-механические поля. – 1983. – Т. 17. – С. 43–48
89. *Журавский А.М.* Справочник по эллиптическим функциям. – М.: Академия наук СССР, 1941. – 236 с.
90. *Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Модель нестационарной механодиффузии для двухкомпонентного слоя // Труды VII Всероссийской (с международным участием) конференции по механике деформируемого твёрдого тела: в 2 т. Т. 1. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2013. – С. 223–228.
91. *Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Термоупругая диффузионная пластина под действием одномерных нестационарных возмущений // Теории

- оболочек и мембран в механике и биологии: от макро- до наноразмерных структур. Материалы международной научной конференции. – Минск: Издательский центр БГУ, 2013. – С. 72–74.
92. *Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Двумерная нестационарная задача упругой диффузии для слоя // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур / Під заг. ред. І.О. Луковського, Г.С. Кіта, Р.М. Кушніра. – Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2014. – С. 48–51.
93. *Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Первая краевая задача упругой диффузии для слоя // Материалы VIII всероссийской конференции по механике деформируемого твёрдого тела: в 2 ч. Ч.1 / под ред. Н.Ф.Морозова, Б.Г.Миронова, А.В.Манжирова. – Чебоксары: Чувашский государственный педагогический университет, 2014. – С. 165–168.
94. *Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Учёт симметрии граничных условий в краевых задачах упругой диффузии // Материалы IV Международной научно-практической конференции «Строительство и восстановление искусственных сооружений»: В 2 ч. Ч. 1 / под общ. ред. А.А. Поддубного; М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель: БелГУТ, 2015. – С. 385–388.
95. *Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Метод решения нестационарных задач упругой диффузии с произвольными граничными условиями // Вестник Запорожского национального университета. – 2015. – № 1. – С. 51–59.
96. *Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Решение двумерных задач механо-диффузии с помощью интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2016. – № 1. – С. 49–56.

97. Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. Двумерная нестационарная задача упругой диффузии для изотропной однокомпонентной полуплоскости // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. – 2015. – Т.157, Кн. 4. – С. 103–111.
98. Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. Двумерная нестационарная задача упругой диффузии для изотропного однокомпонентного слоя // Прикладная механика и техническая физика. – 2015. – Т.56, № 6. – С. 102–111 = *Zemskov A.V., Tarlakovskiy D.V. Two-dimensional nonstationary problem elastic for diffusion an isotropic one-component layer // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2015. – V.56, No 6. – С. 1023–1030.*
99. Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. Обобщение метода решения нестационарной двумерной задачи упругой диффузии для случая произвольных граничных условий // Всероссийская научно-техническая конференция «Механика и математическое моделирование в технике»: сборник тезисов. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. – с. 43–47.
100. Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. Двумерная нестационарная задача упругой диффузии для ортотропного однокомпонентного полупространства // Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 105-летию со дня рождения А.А. Ильюшина. – М.: Изд-во Московского университета, 2016. – С. 162–165.
101. Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. Объемные функции Грина в двумерных нестационарных задачах механодиффузии // Материалы X Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела: в 2-х томах. Т.1. – Самара: СамГТУ, 2017. – С. 247–251

102. *Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Постановка одномерной задачи термоэлектромагнитоупругой диффузии // Материалы XXIV Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.2. – М.: ООО «ТР-принт», 2018 – С.
103. *Земсков А.В., Эрихман Н.Н.* Приближённое решение нестационарной задачи о нагреве ортотропной пластины // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: збірник наукових праць. – Дніпропетровськ: ІМА-прес, 2009. – Вип. 13. – С. 94–99.
104. *Игумнов Л.А., Белов А.А., Ануфриев А.А., Литвинчук С.Ю., Аменицкий А.В., Ермолаев М.Д.* Гранично-элементная методика решения трехмерных нестационарных динамических задач теории упругости и вязкоупругости // Проблемы прочности и пластичности. – 2005. – Вып. 67 – С. 91–101
105. *Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Белов А.А.* Численное обращение преобразования Лапласа: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский университет, 2010. – 34 с.
106. *Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Пазин В.П.* Применение метода граничных интегральных уравнений для анализа задач трехмерной динамической теории термоупругости // Проблемы прочности и пластичности. – 2010. – Вып. 72 – С. 146–153
107. *Ильюшин А. А.* Механика сплошной среды. – М.: МГУ, 1978. – 287 с.
108. *Индейцев Д.А., Мочалова Ю.А., Меркушев Е.С.* Диффузионные процессы в средах при динамических нагружениях // XI Всероссийский

- съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. – Казань: КФУ, 2015. – С. 1614–1615.
109. *Индейцев Д.А., Стерлин М.Д.* Динамика перестройки твердого тела при физико-химических воздействиях // Доклады Российской академии наук. – 2011. – Т. 436, №3 – С. 328–331.
110. *Информационная система «Архивы РАН»* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://isaran.ru/?q=ru/fund&ida=1&guid=A83B24B6-6A50-6BF3-64A5-02B91104E531> (дата обращения: 21.02.2017).
111. *Кабардов М.М.* О суммировании рядов Лагерра методом Эйлера-Кнопша в задаче обращения преобразования Лапласа // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. – 2008. – Вып. 4. – С. 84–89.
112. *Кабардов М.М.* Геометрическая интерпретация метода суммирования Эйлера-Кнопша в задаче обращения преобразования Лапласа // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. – 2009. – Вып. 2. – С. 31–36.
113. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, 4-е издание. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
114. *Картошкина А.Е.* Влияние динамики на термодиффузию в плоском слое со свободными границами // Вычислительные технологии. – 2006. – Т. 11, № 4. – С. 44–53.
115. *Квасников И. А.* Термодинамика и статистическая физика. Теория неравновесных систем. – М.: МГУ, 1987. – 559 с.

116. *Кесарев А.Г., Кондратьев В.В.* О влиянии внутренних напряжений на диффузию в наноструктурных сплавах // Физика металлов и металловедение. – 2007. – Т. 6, № 1. – С. 5–11.
117. *Киттель Ч.* Статистическая термодинамика. – М.: Наука, 1977. – 336 с.
118. *Климонтович Ю. Л.* Статистическая физика. – М.: Наука, 1982. – 608 с.
119. *Князева А.Г.* Введение в локально-равновесную термодинамику физико-химических превращений в деформируемых средах. – Томск: Томский государственный университет, 1996. – 146 с.
120. *Князева А.Г.* Введение в термодинамику необратимых процессов. Лекции о моделях. – Томск: Иван Федоров, 2014. – 172 с.
121. *Князева А.Г.* Диффузия и реология в локально-равновесной термодинамике // Сборник «Математическое моделирование систем и процессов» под ред. П.В.Трусова. – Пермь: Пермский ГТУ, 2005. – С. 45–60.
122. *Князева А.Г.* Нелинейные модели деформируемых сред с диффузией // Физическая мезомеханика. – 2011. – Т. 14, № 6. – С. 35–51.
123. *Князева А.Г.* Перекрестные эффекты в ходе твердофазных превращений // Химия в интересах устойчивого развития. – 2002. – № 1-2. – С. 103–109.
124. *Князева А.Г.* Перекрестные эффекты в твердых средах с диффузией // Прикладная механика и техническая физика. – 2003. – Т. 44, № 3. – С. 85–99.
125. *Князева А.Г.* О моделировании необратимых процессов в материалах с большим числом внутренних поверхностей // Физическая мезомеханика. – 2003. – Т. 6, № 5. – С. 11–27.

126. *Князева А.Г.* Диффузия по вакансионному механизму в материалах с большим числом внутренних поверхностей // *Химия в интересах устойчивого развития.* – 2005. – № 2. – С. 233–242.
127. *Князева А.Г., Демидов В.Н.* Коэффициенты переноса для трехкомпонентного деформируемого сплава // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика.* – 2011. – № 3. – С. 84–89.
128. *Князева А.Г., Ильина Е.С., Демидов В.Н.* Задачи теории термоупругой диффузии в процессах поверхностной обработки материалов // *XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики.* – Казань: КФУ, 2015. – С. 1818–1820.
129. *Князева А.Г., Поболь И.Л., Романова В.А.* Поле напряжений в диффузионной зоне соединения, получаемого электронно-лучевой пайкой // *Физическая мезомеханика.* – 2001. – Т. 4, № 5. – С. 41–53.
130. *Князева А.Г., Псахье С.Г.* Моделирование неравновесной диффузии, сопровождаемой внутренними напряжениями // *Физическая мезомеханика.* – 2005. – Спец. выпуск. – С. 41–44.
131. *Конобеевский С.Т.* К теории фазовых превращений. I. Термодинамическая теория явлений возврата при старении // *Журнал экспериментальной и теоретической физики.* – 1943. – Т. 13. – С. 185–200.
132. *Конобеевский С.Т.* К теории фазовых превращений. II. Диффузия в твердых растворах под влиянием распределенных напряжений // *Журнал экспериментальной и теоретической физики.* – 1943. – Т. 13. – С. 200–213.

133. *Конобеевский С.Т.* К теории фазовых превращений. III. Напряжения, возникающие при выделении фазы из твердого раствора // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1943. – Т. 13. – С. 419–.
134. *Кондрат В. Ф., Грицина О. Р.* Співвідношення градієнтної термомеханіки за врахування необоротності та інерційності локального зміщення маси // Математические методы и физико-механические поля. – 2011. – Т. 54, № 1. – С. 91–100
135. *Крылов В.И., Скобля Н.С.* Методы приближённого преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. – М.: Наука, 1974. – 224 с.
136. *Крылов В.И., Скобля Н.С.* Справочная книга по численному обращению преобразования Лапласа. – М.: Наука и Техника, 1968. – 298 с.
137. *Кубік Я.Є.* В'язкопружність і термодифузія в електричному полі // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2006. – Вип. 3. – С. 84–90
138. *Кубашевский О., Гопкинс Б.* Окисление металлов и сплавов. Пер. с англ. В.А. Алексеева. – М.: Metallurgia, 1965. – 482 с.
139. *Кукушкин С.А., Осипов А.В.* Эффект Горского при синтезе пленок карбида кремния из кремния методом топохимического замещения атомов // Письма в ЖТФ. – 2017. – Т. 43, вып. 5. – С. 81–88.
140. *Кукушкин С.А., Осипов А.В.* Анизотропия твердофазной эпитаксии карбида кремния на кремнии // Физика и техника полупроводников. – 2013. – Т. 47, вып. 12. – С. 1575–1579.

141. *Кукушкин С.А., Осипов А.В.* Гетероэпитаксия тонких пленок за счет формирования ансамбля дилатационных диполей // Доклады академии наук. – 2012. – Т. 444, № 3. – С. 266–269.
142. *Кумар Р., Кансал Т.* Исследование влияния вращения на волны Релея – Лэмба в изотропной пластине с использованием теории обобщенной термоупругости при наличии диффузии // Прикладная механика и техническая физика. – 2010. – Т. 51, № 5. – С. 155–167
143. *Лебедева А.В., Рябов В.М.* Об обращении преобразования Лапласа с помощью рядов Лагерра и квадратурных формул // Методы вычислений: Санкт-Петербургский университет. – 2001. – Вып. 19. – С. 123–139
144. *Любов Б.Я.* Диффузионные процессы в неоднородных твёрдых средах. – М.: Наука, 1981. – 296 с.
145. *Любов Б. Я., Фастов Н. С.* Влияние концентрационных напряжений на процессы диффузии в твердых растворах // Доклады АН СССР. – 1952. – Т. 54, № 5. – С. 939–941
146. Математическая энциклопедия. В 5-ти томах. Главный редактор *Виноградов И.М.* Серия «Энциклопедии, словари, справочники». – М.: Советская энциклопедия, 1977.
147. *Миколайчук М. А., Князева А. Г.* Диффузия в кристаллическом теле в условиях нагружения // Известия вузов. Физика. – 2010. – № 11/3. – С. 54–57.
148. *Миколайчук М. А., Князева А. Г.* Влияние напряжений и деформаций на перераспределение примеси в пластине в условиях одноосного нагружения // Прикладная механика и техническая физика. – 2010. – Т. 51, № 3. – С. 147–157.

149. *Миколайчук М. А., Князева А. Г., Грабовецкая Г.П., Мишин И.П.* Изучение влияния механических напряжений на диффузию в пластине с покрытием // Вестник ПНИПУ. – 2012. – № 3. – С. 120–134.
150. *Минов А.В.* Исследование напряженно-деформированного состояния полого цилиндра, подверженного термодиффузионному воздействию углерода в осесимметричном тепловом поле, переменном по длине // Известия вузов. Машиностроение. – 2008. – № 10. – С. 21–26.
151. *Моргунов Б.И.* Методы расчёта нелинейных систем. – М.: МИЭМ, 1988. – 88 с.
152. *Моргунов Б.И.* Математический анализ физико – механических процессов. – М.: МИЭМ, 1995. – 151 с.
153. *Моргунов Б.И.* Математическое моделирование связанных физических процессов. – М.: МИЭМ, 1997. – 224 с.
154. *Морозов Н.Ф., Паукшто М.В., Товстик П.Е.* О депланации грани кристалла в условиях поверхностной диффузии // Известия РАН. МТТ. – 1999. – № 1. – С. 53–57.
155. *Морозов Н.Ф., Паукшто М.В., Товстик П.Е.* Влияние объемной диффузии на потерю устойчивости поверхностного слоя при термонагрузке // Известия РАН. МТТ. – 1999. – № 4. – С. 96–101.
156. *Найфе А.* Введение в методы возмущений. – М.: Мир, 1984. – 535 с.
157. *Нигматулин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред. – М.: Наука, 1978. – 336 с.
158. *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред: в 2-х т. – М.: Наука, 1987. – Т. 1. – 464 с; Т. 2. – 360 с.

159. *Никольская Н.А., Проскура А.В.* Зависимость коэффициента диффузии от напряжения // Вестник ТГУ. – 1998. – Т. 3, Вып. 3. – С. 258–260.
160. *Павлина В.С.* О влиянии диффузии на температурные напряжения в окрестности цилиндрической полости // Физико-химическая механика материалов. – 1965. – № 3. – С. 390–394.
161. *Петров Н., Бранков Й.* Современные проблемы термодинамики. – М.: Мир, 1991. – 288 с.
162. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. – М.: МГУ, 1984. – 336 с.
163. *Победря Б.Е., Гузей И.Л.* Математическое моделирование деформирования композитов с учетом термодиффузии // Математическое моделирование систем и процессов. – 1998. – № 6. – С. 82–91.
164. *Подстригач Я.С.* Диффузионная теория деформации изотропной сплошной среды // Вопросы механики реального твердого тела. – 1964. – Вып. 2. – С. 71–99.
165. *Подстригач Я.С.* Диффузионная теория неупругости металлов // Прикладная механика и техническая физика. – 1965. – № 2. – С. 67–72.
166. *Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Галапац Б. П., Гнидец Б. М.* Исходные уравнения теории деформации электропроводных твердых растворов // Математические методы и физико-механические поля. – 1975. – Вып. 1. – С. 22–29.
167. *Подстригач Я.С., Павлина В.С.* Диффузионные процессы в упруго-вязком деформируемом теле // Прикладная механика. – 1974. – Т. 10, № 5. – С. 47–53.

168. *Подстригач Я.С., Павлина В.С.* Дифференциальные уравнения термодинамических процессов в N - компонентном твёрдом растворе // Физико-химическая механика материалов. – 1965. – № 4. – С. 383–389.
169. *Подстригач Я.С., Повстенко Ю.З.* Введение в механику поверхностных явлений в деформируемых твердых телах. – Киев: Наукова думка, 1985. – 198 с.
170. *Подстригач Я.С., Шевчук П.Р.* Вариационная форма уравнений теории термодиффузионных процессов в деформируемом твердом теле // Прикладная математика и механика. – 1969. – Т. 33, № 4. – С. 774–777.
171. *Полянин А.Д., Манжиров А.В.* Справочник по интегральным уравнениям: Точные решения. – М.: Факториал, 1998. – 432 с.
172. *Порошина Н.И., Рябов В.М.* О методах обращения преобразования Лапласа // Вестник СПбГУ. Сер. 1. – 2011. – Вып. 3. – С. 55–64.
173. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Том 1. Элементарные функции. – М.: Наука, 1981. – 797 с.
174. *Раврик М. С.* Об одной вариационной формуле смешанного типа для контактных задач термодиффузионной теории деформации слоистых оболочек // Математические методы и физико-механические поля. – 1985. – Вып. 22. – С. 40–44.
175. *Раврик М. С., Бичуя А. Л.* Осесимметричное напряженное состояние нагретой трансверсально-изотропной сферической оболочки с круговым отверстием при диффузионном насыщении // Математические методы и физико-механические поля. – 1983. – Вып. 17. – С. 51–54.

176. *Ребяков Ю.Н., Чернявский А.О., Чернявский О.Ф.* Деформирование и разрушение материалов и конструкций в условиях диффузии // Вестник ЮУрГУ. – 2010. – № 17. – С. 4–16.
177. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды: в 2-х т. – М.: Наука, 1976. – Т. 1. – 536 с.
178. *Стерлин М.Д.* Динамика локализации напряжений и особенности перестройки структуры неоднородного материала // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – №4(5) – С. 2513–2515.
179. *Телятник Р.С., Кукушкин С.А., Осипов А.В.* Релаксация деформаций несоответствия за счет пор и отслоений и условия образования дислокаций, трещин и гофров в эпитаксиальной гетероструктуре AlN(0001)/SiC/Si(111) // Физика твердого тела. – 2015. – Т. 57, вып. 1. – С. 153–162.
180. *Труделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – М.: Мир, 1975. – 592 с.
181. *Тян А.В., Князева А.Г.* Формирование градиентных диффузионных зон в системе «подложка – двухслойное покрытие» в процессе изотермического отжига // Физическая мезомеханика. – 2005. – Спец. выпуск. – С. 49–52.
182. *Федорюк М.В.* Асимптотика: интегралы и ряды. Изд. 2-е. – М.: Книжный дом «Либриком», 2009. – 544 с.
183. Физические величины: Справочник / *Бабичев А.П., Бабушкина Н.А., Братковский А.М., и др.*; Под общей редакцией Григорьева И.С., Мейлихова И.З. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с.

184. Физическое материаловедение: в 3-х т.; Под редакцией Кана Р. – М.: Мир, 1967. – Т. 1. – 649 с. – Т. 21. – 623 с. – Т. 3. – 663 с.
185. *Флек Ван Л.* Теоретическое и прикладное материаловедение. – М.: Атомиздат, 1975. – 472 с.
186. *Хаазе Р.* Термодинамика необратимых процессов. – М.: Мир, 1967. – 544 с.
187. *Швец Р.Н., Дасюк Я.И.* Основные уравнения вязкоупругой среды, учитывающие термодиффузионные процессы // Математические методы и физико-механические поля. – 1978. – Вып. 7. – С. 55–60.
188. *Швец Р.Н., Дасюк Я.И.* К теории деформирования вязкоупругих сред с учетом термодиффузионных процессов // Доклады АН УССР. Сер. А. – 1978. – № 2. – С. 150–154.
189. *Швец Р.Н., Флячок В.М.* Вариационный подход к решению динамических задач механотермодиффузии анизотропных оболочек // Мат. физ. и нелинейн. мех. – 1991. – № 16. – С. 39–43.
190. *Шевчук П.Р., Шевчук В.А., Пирогов В.Д., Самсонова А.И.* Математическая модель диффузионного насыщения и напряженного состояния покрытий на судовых трубопроводах // Лакокрасочные материалы и их применение. – 1989. – № 6. – С. 52–57.
191. *Afram A. Y., Khader S. E.* 2D Problem for a Half-Space under the Theory of Fractional Thermoelastic Diffusion // American journal of scientific and industrial research. – 1990. – Vol. 6, No 3. – P. 47–57.
192. *Aifantis E.C.* On the problem of diffusion in solids // Acta Mechanica. – 1980. – Vol. 37, No 3-4. – P. 265–296.

193. *Aifantis E.C., Gerberich W.W.* Diffusion of a gas in a linear elastic solids // *Acta Mechanica*. – 1978. – No 29. – P. 169–184.
194. *Aouadi M.* Variable electrical and thermal conductivity in the theory of generalized thermoelastic diffusion // *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik*. – 2005. – Vol. 57, No. 2. – P. 350–366.
195. *Aouadi M.* A generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long solid cylinder // *Intern. J. Mathem. and Mathem. Sci.* – 2006. – Vol. 2006. – P. 1–15.
196. *Aouadi M.* Uniqueness and reciprocity theorems in the theory of generalized thermoelastic diffusion // *Journal of Thermal Stresses*. – 2007. – Vol. 30. – P. 665–678.
197. *Aouadi M.* A problem for an infinite elastic body with a spherical cavity in the theory of generalized thermoelastic diffusion // *International Journal of Solids and Structures*. – 2007. – Vol. 44. – P. 5711–5722.
198. *Aouadi M.* Generalized theory of thermoelastic diffusion for anisotropic media // *Journal of Thermal Stresses*. – 2008. – Vol. 31, No. 3. – P. 270–285.
199. *Aouadi M.* Theory of generalized micropolar thermoelastic diffusion under Lord-Shulman model // *Journal of Thermal Stresses*. – 2009. – Vol. 32, No. 9. – P. 923–942.
200. *Aouadi M.* The coupled theory of micropolar thermoelastic diffusion // *Acta Mechanica*. – 2009. – Vol. 208, No. 3-4. – P. 181–203.
201. *Aouadi M.* Spatial Stability for the Quasi-Static Problem in Thermoelastic Diffusion Theory // *Acta Appl. Math.* – 2009. – Vol. 106. – P. 307–323.

202. *Aouadi M.* A theory of thermoelastic diffusion materials with voids // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik. – 2010. – Vol. 61, No. 2. – P. 357–379.
203. *Aouadi M.* Qualitative results in the theory of thermoelastic diffusion mixtures // Journal of Thermal Stresses. – 2010. – Vol. 33, No. 6. – P. 595–615.
204. *Aouadi M.* A contact problem of a thermoelastic diffusion rod // ZAMM, Z. Angew. Math. Mech. – 2010. – Vol. 90, No. 4. – P. 278–286.
205. *Aouadi M.* Exponential Stability in Hyperbolic Thermoelastic Diffusion Problem with Second Sound // Hindawi Publishing Corporation, International Journal of Differential Equations. – 2011. – Vol. 2011. – P. 1–21.
206. *Aouadi M.* On thermoelastic diffusion thin plate theory // Appl. Math. Mech. -Engl. Ed. – 2015. – Vol. 36, No. 5. – P. 619–632.
207. *Aouadi M., Boulehmi K.* Partial exact controllability for inhomogeneous multidimensional thermoelastic diffusion problem // Evolution equations and control theory. – 2016. – Vol. 5, No. 2. – P. 201–224.
208. *Aouadi M., Copetti M. I. M.* Analytical and numerical results for a dynamic contact problem with two stops in thermoelastic diffusion theory // ZAMM · Z. Angew. Math. Mech. – 2015. – P. 1–24.
209. *Aouadi M., Lazzari B., Nibbi R.* A theory of thermoelasticity with diffusion under Green-Naghdi models // ZAMM · Z. Angew. Math. Mech. – 2013. – P. 1–16.
210. *Aouadi M., Miranville A.* Smooth attractor for a nonlinear thermoelastic diffusion thin plate based on Gurtin–Pipkin’s model // Asymptotic Analysis. – 2015. – Vol. 95. – P. 129–160.

211. *Aouadi M., Miranville A.* Quasi-stability and global attractor in nonlinear thermoelastic diffusion plate with memory // Evolution equations and control theory. – 2015. – Vol. 4, No. 3. – P. 241–263.
212. *Aouadi M., Soufyane A.* Polynomial and exponential stability for one-dimensional problem in thermoelastic diffusion theory // Applicable Analysis. – 2010. – Vol. 89, No. 6. – P. 935–948.
213. *Atkin R. J., Craine R. E.* Continuum theories of mixtures. Basic theory and historical development // J. Mech. and Appl. Math. – 1976. – Vol. 29. – P. 209–214.
214. *Atwa S. Y., Egypt Z.* Generalized Thermoelastic Diffusion With Effect of Fractional Parameter on Plane Waves Temperature-Dependent Elastic Medium // Journal of Materials and Chemical Engineering. – 2013. – Vol. 1, Is. 2. – P. 55–74.
215. *Belova I.V. and Murch G.E.* Thermal and diffusion-induced stresses in crystalline solids // Journal of Applied Physics. – 1975. – Vol. 77, No. 1. – P. 127–134.
216. *Bhattacharya D., Kanoria M.* The influence of two temperature generalized thermoelastic diffusion inside a spherical shell // International Journal of Engineering and Technical Research (IJETR). – 2014. – Vol. 2, Is. 5. – P. 151–159.
217. *Boulehmi K., Aouadi M.* Decay of solutions in nonhomogeneous thermoelastic diffusion bars // Applicable Analysis. – 2014. – Vol. 93, No. 2. – P. 281–304.
218. *Bowen R. M., Garcia P. J.* On the thermodynamics of mixtures with several temperatures // Int. J. Eng. Sci. – 1980. – Vol. 18. – P. 63–83.

219. *Bowen R. M., Wiese J. C.* Diffusion in mixtures of elastic materials // Int. J. Eng. Sci. – 1969. – Vol. 7. – P. 689–722.
220. *Cesari L.* Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations. – Berlin Gottingen Heidelberg: Springer-verlag, 1959. – 477 c.
221. *Choudhary S., Deswal S.* Mechanical loads on a generalized thermoelastic medium with diffusion // Meccanica. – 2010. – Vol. 45. – P. 401–413.
222. *Chu J.L., Lee S.* Diffusion-induced stresses in two-phase elastic media // Int. J. Eng. Sci. – 1990. – Vol. 28, No 3. – P. 1085–1109.
223. *Chu J.L., Lee S.* Diffusion-induced stresses in a long bar of square cross section // J. Appl. Phys. – 1993. – Vol. 73. – P. 3211–3219.
224. *Chu J.L., Lee S.* The effect of chemical stresses on diffusion // J. Appl. Phys. – 1994. – Vol. 75. – P. 2823–2829.
225. *Cohen D.S., White A.B.* Sharp fronts due to diffusion and stress at the glass transition in polymers // J. Polymer Sci., Part B: Polym. Phys. – 1989. – Vol. 27. – P. 1731–1747.
226. *Cohen D.S., White A.B.* Sharp fronts due to diffusion and viscoelastic relaxation in polymers // Siam J. Appl. Math. – 1991. – Vol. 51, No. 2. – P. 472–483.
227. *Copetti M.I.M., Aouadi M.* A quasi-static contact problem in thermoviscoelastic diffusion theory // Applied Numerical Mathematics. – 2016. – Vol. 109. – P. 157–183.
228. *Costa Mattos H.S, Martins-Costa M.L, Saldanha da Gamma R.M.* On the

- modelling of momentum and energy transfer in incompressible mixtures // Int. J. Non-Linear Mechanics. – 1995. – Vol. 30. – P. 419–431.
229. *Crump K.* Numerical Inversion of Laplace Transforms Using a Fourier Series Approximation // Journal of the Association for Computing Machinery. – 1976. – Vol. 23, No. 1. – P. 89–96.
230. *Davydov S.A., Zemskov A.V., Igumnov L.A., Tarlakovskiy D.V.* Non-stationary model of mechanical diffusion for half-space with arbitrary boundary conditions // Materials Physics and Mechanics. – 2016. – Vol. 28, No. 1/2. – P. 72–76.
231. *Deswal S., Kalkal K.K.* A two-dimensional generalized electro-magneto-thermoviscoelastic problem for a half-space with diffusion // International Journal of Thermal Sciences. – 2011. – Vol. 50, No. 5. – P. 749–759.
232. *Deswal S., Kalkal K.K.* Electromagneto-thermodiffusive problem for short times without energy dissipation // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2013. – Vol. 86, No. 3. – P. 705–715.
233. *Deswal S., Kalkal K.K., Sheoran S.S.* Axi-symmetric generalized thermoelastic diffusion problem with two-temperature and initial stress under fractional order heat conduction // Physica B: Condensed Matter. – 2016. – Vol. 496. – P. 57–68.
234. *Dudziak W., Kowalski S.J.* Theory of thermodiffusion for solids // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1989. – Vol. 32. – P. 2005–2013.
235. *Durbin F.* Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method // The Computer Journal. – 1974. – Vol. 17. – P. 371–376.

236. *Elhagary M.A.* Generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long hollow cylinder for short times // *Acta Mech.* – 2011. – Vol. 218. – P. 205–215.
237. *Elhagary M.A.* Generalized thermoelastic diffusion problem for an infinite Medium with a Spherical Cavity // *Int. J. Thermophy.* – 2012. – Vol. 33. – P. 172–183.
238. *Elhagary M.A.* A two-dimensional generalized thermoelastic diffusion problem for a half-space subjected to harmonically varying heating // *Acta Mech.* – 2013. – Vol. 224. – P. 3057–3069.
239. *Elmaklizi Y.D., Othman M.I.A.* The Effect of Rotation on Thermoelastic Diffusion with Temperature-Dependent Elastic Moduli Comparison of Different Theories // *Journal of thermoelasticity.* – 2013. – Vol. 1, No 3. – P. 6–15.
240. *El-Sayed A.M.* A two-dimensional generalized thermoelastic diffusion problem for a half-space // *Mathematics and Mechanics of Solids.* – 2016. – Vol. 21, No 9. – P. 307–323.
241. *Ezzat M.A., Fayik M.A.* Fractional order theory of thermoelastic diffusion // *J. Thermal Stresses.* – 2011. – Vol. 34. – P. 851–872.
242. *Fan X., Zhao J.H.* Moisture Diffusion and Integrated Stress Analysis in Encapsulated Microelectronics Devices // 12th. Int. Conf. on Thermal, Mechanical and Multiphysics Simulation and Experiments in Microelectronics and Microsystems. – EuroSimE, 2011. – P. 1–8.
243. *Galapats B.P., Yuzevich V.N.* The influence of contact phenomena on mechanical diffusion processes in semiinfinite, electrically conducting media

- // Fiziko-Khimicheskaya Mekhanika Materialov. – 1981. – Vol. 17, No. 2. – P. 82–87.
244. *Gawinecki J. A., Szymaniec A.* Global Solution of the Cauchy Problem in Nonlinear Thermoelastic Diffusion in Solid Body // PAMM. Proc. Appl. Math. Mech. – 2002. – Vol. 1. – P. 446–447.
245. *Green A. E., Naghdi P. M.* A theory of mixtures // Arch. Rat. Mech. and Anal. – 1967. – Vol. 24. – P. 243–263.
246. *Haghighi-Yazdi M., Lee-Sullivan P* Modeling of structural mechanics, moisture diffusion and heat conduction coupled with physical aging in thin plastic plates // Acta Mech. – 2014. – Vol. 225. – P. 929–950.
247. *Honig G., Hirdes U.* A method for the numerical inversion of Laplace transforms // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 1984. – Vol. 10, No 1. – P. 113–132.
248. *Hwang C.C., Chen K.M., Hsieh J.Y.* Diffusion-induced stresses in a long bar under an electric field // J. Phys. D: Appl. Phys. – 1994. – Vol. 27. – P. 2155–2162.
249. *Hwang C.C., Huang I.B.* Diffusion-induced stresses in hollow cylinders for transient state // IOSR Journal of Engineering (IOSRJEN). – 2012. – Vol. 2, Is. 8. – P. 166–182.
250. *Hwang C.C., Huang I.B.* Diffusion in hollow cylinders with mathematical treatment // International Journal of Engineering Research and Development. – 2012. – Vol. 3, Is. 8. – P. 57–75.
251. *Hwang C.C., Lin S., Chu H.S., Lee W.S.* Nonlinear diffusion-induced

- stresses in a long bar of square cross section // International Journal of Solids and Structures. – 1999. – Vol. 36, Is. 2. – P. 269–284.
252. *Hwang C.C., Lu M.J., Shieh L.S.* Improved FFT-based numerical inversion of Laplace transforms via fast Hartley transform algorithm // Computere Meth. Applic. – 1991. – Vol. 22, Is. 1. – P. 13–24.
253. *Igumnov L.A., Tarlakovskii D.V., Zemskov A.V.* A two-dimensional nonstationary problem of elastic diffusion for an orthotropic one-component layer // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – Vol. 38, No 5. – P. 808–817.
254. *Indeitsev D. A., Semenov B. N., Sterlin M. D.* The Phenomenon of Localization of Diffusion Process in a Dynamically Deformed Solid // Doklady Physics. – 2012. – Vol. 57, No 4. – P. 171–173.
255. *Knyazeva A.G.* Model of medium with diffusion and internal surfaces and some applied problems // Materials Physics and Mechanics. – 2004. – Vol. 7, No 1. – P. 29–36.
256. *Kothari S., Kumar R., Mukhopadhyay S.* On the fundamental solutions of generalized thermoelasticity with three-phase-lags // Journal of Thermal Stresses. – 2010. – Vol. 33. – P. 1035–1048.
257. *Kothari S., Mukhopadhyay S.* On the representations of solutions in the theory of generalized thermoelastic diffusion // Math. Solids. – 2011. – Vol. 17. – P. 120–130.
258. *Kubic J.* The reciprocity theorem in coupled problems of viscoelastic thermodiffusion // Acta Mech. – 1984. – Vol. 50. – P. 285–290.

259. *Kubic J., Wirwal J.* Variational principle for linear coupled dynamic theory of viscoelastic thermodiffusion // *Int. J. Eng. Sci.* – 1989. – Vol. 27, No 5. – P. 605–607.
260. *Kuiken G.D.C.* Thermodynamics of Irreversible Processes. Applications to Diffusion and Rheology. – N.Y. etc.: Wiley, 1994. – 458 p.
261. *Kukushkin S. A., Osipov A. V.* A new method for the synthesis of epitaxial layers of silicon carbide on silicon owing to formation of dilatation dipoles // *Journal of applied physics.* – 2013. – V. 113, 024909.
262. *Kumar R.* Propagation of stoneley waves at the boundary surface of thermoelastic diffusion solid and microstretch thermoelastic diffusion solid. – *Materials Physics and Mechanics.*– 2018. – Vol. 35. – P. 87–100.
263. *Kumar R., Ahuja S., Garg S. K.* Surface Wave Propagation in a Microstretch Thermoelastic Diffusion Material under an Inviscid Liquid Layer // *Advances in Acoustics and Vibration.* – Hindawi Publishing Corporation, 2014. – Vol. 2014, Article ID 518384 – P. 1–11.
264. *Kumar R., Ahuja S., Garg S. K.* Rayleigh waves in isotropic microstretch thermoelastic diffusion solid half space // *Latin American Journal of Solids and Structures.* – 2014. – Vol. 11. – P. 299–319.
265. *Kumar R., Chawla V.* A Study of Fundamental Solution in Orthotropic Thermodiffusive Elastic Media // *International Communication in Heat and Mass Transfer.* – 2011. – Vol. 38. – P. 456–462.
266. *Kumar R., Chawla V.* Green's Functions in Orthotropic Thermoelastic Diffusion Media // *Engineering Analysis with Boundary Elements.* – 2012. – Vol. 36. – P. 1272–1277.

267. *Kumar R., Chawla V.* A study of Green's functions for two-dimensional problem in orthotropic magnetothermoelastic media with mass diffusion // Materials Physics and Mechanics. – 2012. – Vol. 15. – P. 78–95.
268. *Kumar R., Chawla V.* Fundamental Solution for the Plane Problem in Magnetothermoelastic Diffusion Media // CMST. – 2013. – Vol. 19, No 4. – P. 195–207.
269. *Kumar R., Chawla V.* Fundamental solution for two-dimensional problem in orthotropic piezothermoelastic diffusion media // Materials Physics and Mechanics. – 2013. – Vol. 6. – P. 159–174.
270. *Kumar R., Chawla V.* A study of Green's functions for three-dimensional problem in thermoelastic diffusion media // African journal of mathematics and computer science research. – 2014. – Vol. 7, No 7. – P. 68–78.
271. *Kumar R., Devi S., Sharma V.* Plane waves and fundamental solution in a modified couple stress generalized thermoelastic with mass diffusion // Materials Physics and Mechanics. – 2015. – Vol. 24. – P. 72–85.
272. *Kumar R., Kansal T.* Propagation of Rayleigh waves on free surface of transversely isotropic generalized thermoelastic diffusion // Appl. Math. Mech. – 2008. – Vol. 29, No 11. – P. 1451–1462.
273. *Kumar R., Kansal T.* Fundamental Solution in the Theory of Thermomicrostretch Elastic Diffusive Solids // Applied Mathematics. – International Scholarly Research Network ISRN, 2011. – Vol. 2011. – P. 1451–1462.
274. *Kumar R., Kansal T.* Propagation of Lamb waves in transversely isotropic thermoelastic diffusive plate // Int. J. Solid Struct. – 2008. – Vol. 45. – P. 5890–5913.

275. *Kumar R., Kansal T.* Rayleigh-Lamb Waves in Transversely Isotropic Thermoelastic Diffusive Layer // *Int J Thermophys.* – 2009. – Vol. 30. – P. 710–733.
276. *Kumar R., Kansal T.* Dynamic problem of generalized thermoelastic diffusive medium // *Journal of Mechanical Science and Technology.* – 2010. – Vol. 24. – P. 337–342.
277. *Kumar R., Kansal T.* Effect of relaxation times on circular crested waves in thermoelastic diffusive plate // *Appl. Math. Mech.* – 2010. – Vol. 31, No 4. – P. 493–500.
278. *Kumar R., Kansal T.* Propagation of cylindrical Rayleigh waves in a transversely isotropic thermoelastic diffusive solid half-space // *Appl. Math. Mech.* – 2013. – Vol. 43, No 3. – P. 3–20.
279. *Kumar R., Kothari S., Mukhopadhyay S.* Some theorems on generalized thermoelastic diffusion // *Acta Mech.* – 2011. – Vol. 217. – P. 287–296.
280. *Kuznetsov A.* On the convergence of the Gaver–Stehfast Algorithm // *SIAM J. Numer. Anal.* – 2013. – Vol. 51. – P. 2984–2998.
281. *Lee S., Wang W. L., Chen J. R.* Diffusion-induced stresses in a hollow cylinder: Constant surface stresses // *Materials Chemistry and Physics.* – 2000. – Vol. 64, No 2. – P. 123–130.
282. *Lee S., Ouyang H.* General solution of diffusion-induced stresses // *J. Thermal Stresses.* – 1987. – Vol. 10. – P. 269–282.
283. *Milovanović G.V., Cvetković A.S.* Numerical Inversion of the Laplace Transform // *Facta universitatis (NIS), Ser.: Elec. Energ.* – 2005. – Vol. 18, No 3. – P. 515–530.

284. Modelling and optimization in thermomechanics of electroconductive heterogeneous splids / Editor-in-Chief Burak Ya. J. and Kushnir R. M. V.1: Thermomechanics of multicomponent solids of low electrical conductivity *Ya. J. Burak, O. R. Hachkevych, R. F. Terletskii* – Lviv: SPOLOM, 2006. – 300 P.
285. *Nowacki W.* Certain problems of the thermodiffusion in solids // *Arch. Mech.* – 1971. – Vol. 23, No 6. – P. 731–755.
286. *Nowacki W.* Dynamical Problem of Thermodiffusion in Solid – I // *Bulletin of polish Academy of Sciences Series, Science and Technology.* – 1974. – Vol. 22. – P. 55–64.
287. *Nowacki W.* Dynamical Problem of Thermodiffusion in Solid – II // *Bulletin of polish Academy of Sciences Series, Science and Technology.* – 1974. – Vol. 22. – P. 129–135.
288. *Nowacki W.* Dynamical Problem of Thermodiffusion in Solid – III // *Bulletin of polish Academy of Sciences Series, Science and Technology.* – 1974. – Vol. 22. – P. 275–276.
289. *Nowacki W.* Dynamical Problems of Thermodiffusion in Solids // *Proc. Vib. Prob.* – 1974. – Vol. 15. – P. 105–128.
290. *Olesiak Z.S.* Problems of thermodiffusion of deformable solids // *Materials Science.* – 1998. – Vol. 34, No 3. – P. 297–303.
291. *Olesiak Z.S., Pyryev Yu. A.* A coupled quasi-stationary problem of thermodiffusion for an elastic cylinder // *International Journal of Engineering Science.* – 1995. – Vol. 33, Is. 6. – P. 773–780.

292. *Othman M.I.A., Elmaklizi Y.D.* 2-D Problem of Generalized Magneto-Thermoelastic Diffusion, with Temperature-Dependent Elastic Moduli // Journal of physics. – 2013. – Vol. 2, No 3. – P. 4–11.
293. *Paukshto M.V.* Diffusion-induced stresses in solids // International Journal of Fracture. – 1999. – Vol. 97. – P. 227–236.
294. *Povstenko Y.Z.* Fundamental Solution to three-dimensional diffusion-wave equation and associated diffusive stresses // Chaos solution. Fract. – 2008. – Vol. 36. – P. 961–972.
295. *Pidstryhach Ya. S.* Differential equations of the problem of thermodiffusion in a solid deformable isotropic body // Dop. Akad. Nauk USSR. – 1961. – No 2. – P. 169–172.
296. *Pidstryhach Ya. S., Pavlina V. S.* Diffusion processes in a viscoelastic deformable layer // Fiz.-Khim. Mekh. Mater. – 1977. – Vol. 13, No 1. – P. 76–81.
297. *Pidstryhach Ya. S., Shevchuk P. R.* The variational form of the equations of the theory of thermodiffusion processes in a deformable solid body // Prikl. Mat. Mekh. – 1969. – Vol. 33, No 4. – P. 774–777.
298. *Pidstryhach Ya. S., Shvets R. N., Pavlina V. S., Dasyuk Ya. I.* On the scattering of mechanical energy in a deformable solid body during thermodiffusion processes // Probl. Prochn. – 1973. – Vol. 1. – P. 3–8.
299. *Prussin S.* Generation and Distribution of Dislocations by Solute Diffusion // J. Appl. Phys. – 1961. – Vol. 32. – P. 1876–1881.
300. *Pyr'ev Yu. A., Mokrik R. I.* The coupled quasistatic problem of mechanical

- thermodiffusion for a cylinder // *Matematichni Metodi ta Fiziko-Mekhanichni Polya.* – 1997. – Vol. 40, No 2. – P. 117–121.
301. *Rambert G., Grandidier J. C., Aifantis E. C.* On the direct interactions between heat transfer, mass transport and chemical processes within gradient elasticity // *European Journal of Mechanics A/Solids.* – 2007. – Vol. 26. – P. 68–87.
302. *Rambert G., Grandidier J. C., Cangemi L., Meimon Y.* A modelling of the coupled thermodiffuso-elastic linear behaviour. Application to explosive decompression of polymers // *Oil and Gas Sci. Technol.* – 2003. – Vol. 58. – P. 571–591.
303. *Salama M.M., Kozae A.M., Elsafty M. A., Abelaziz S.S.* A half-space problem in the theory of fractional order thermoelasticity with diffusion // *International Journal of Scientific and Engineering Research.* – 2015. – Vol. 6, Is. 1. – P. 358–371.
304. *Semwal S., Mukhopadhyay S.* Boundary integral equation formulation for generalized thermoelastic diffusion – Analytical aspects // *Applied Mathematical Modelling.* – 2014. – Vol. 38, Is. 14. – P. 3523–3537.
305. *Shandly S., Ellis N.S., Randal T.J., Marshall J. M.* Coupled diffusion and stress by the finite element method // *Appl. Math. Model.* – 1995. – Vol. 19, No 2. – P. 87–94.
306. *Sharma J. N.* Generalized thermoelastic diffusive waves in heat conducting materials // *J. Sound Vib.* – 2007. – Vol. 301. – P. 979–993.
307. *Sharma N., Kumar R., Ram P.* Plane strain deformation in generalized thermoelastic diffusion // *Int. J. Thermophys.* – 2008. – Vol. 29. – P. 1503–1522.

308. *Sharma N., Kumar R., Kumar P.* Dynamic behaviour of generalized thermoelastic diffusion with two relaxation times in frequency domain // *Struct. Eng. Mech.* – 2008. – Vol. 28. – P. 19–38.
309. *Sharma J. N., Sharma I., Chand S.* Elasto-thermodiffusive surface waves in a semiconductor half space underlying with varying temperature // *J. Therm Stresses.* – 2008. – Vol. 31. – P. 956–975.
310. *Sharma J. N., Sharma Y. D., Sharma P. K.* On the propagation of elastothermodiffusive surface waves in heat conducting materials // *J. Sound Vib.* – 2008. – Vol. 315. – P. 927–938.
311. *Sharma J. N., Sharma N. K., Sharma K. K.* Transient Waves Due to Mechanical Loads in Elasto-Thermo-Diffusive Solids // *Advances in Applied Mathematics and Mechanics.* – 2011. – Vol. 3, No 1. – P. 87–108.
312. *Sharma J. N., Thakur N., Singh S.* Propagation characteristics of elasto-thermodiffusive surface waves in semiconductor material half-space // *Therm Stresses.* – 2007. – Vol. 30. – P. 357–380.
313. *Sherief H.H., Hamza F. A., Saleh H.* The theory of generalized thermoelastic diffusion // *International Journal of Engineering Science.* – 2004. – Vol. 42. – P. 591–608.
314. *Sherief H.H., El-Maghraby N.M.* A Thick Plate Problem in the Theory of Generalized Thermoelastic Diffusion // *Int. J. Thermophys.* – 2009. – Vol. 30. – P. 2044–2057.
315. *Sherief H.H., Saleh H.* A Half Space Problem in the Theory of Generalized Thermoelastic Diffusion // *International Journal of Solids and Structures.* – 2005. – Vol. 42. – P. 4484–4493.

316. *Shvets R. M.* On the deformability of anisotropic viscoelastic bodies in the presence of thermodiffusion // Journal of mathematical science. – 1999. – Vol. 97, No 1. – P. 3830–3839.
317. *Shvets R. N., Buryak V. V.* On the influence of viscoelastic properties of a material on the stressed state of a cylinder under diffusion saturation // Matematichni Metodi ta Fiziko-Mekhanichni Polya. – 1990. – No 31. – P. 41–44.
318. *Shvets R. N., Dasyuk Ya. I.* On variational theorems of thermodiffusion of deformable solid bodies // Mat. Fiz. – 1977. – No 22. – P. 102–108.
319. *Shvets R. N., Dasyuk Ya. I.* Optimal control of the process of diffusion saturation of a viscoelastic cylinder using admissible concentration stresses // Probl. Prochn. – 1978. – No 10. – P. 81–85.
320. *Shvets R. N., Dasyuk Ya. I.* The stressed state of a cylinder arising under diffusion saturation // Matematichni Metodi ta Fiziko-Mekhanichni Polya. – 1975. – No 1. – P. 64–69.
321. *Shvets R. N., Flyachok V. M.* The equations of mechanothermodiffusion of anisotropic shells taking account of transverse strains // Matematichni Metodi ta Fiziko-Mekhanichni Polya. – 1984. – No 20. – P. 54–61.
322. *Shvets R. N., Ravrik M. S.* On the theory of thermodiffusion of deformable thin shells and plates // Tepl. Napr. Elem. Konstr. – 1972. – No 12. – P. 141–147.
323. *Shvets R. N., Yatskiy A. I.* Construction of the solution of the mixed boundary-value problem of mechanothermodiffusion for layered bodies of canonical shape // Matematichni Metodi ta Fiziko-Mekhanichni Polya. – 1992. – No 35. – P. 70–75.

324. *Shvets R. N., Yatskiv A. I.* The coupled problem of mechanothermodiffusion for layered bodies of canonical shape with thin layers // *Dop. Akad. Nauk Ukr.* – 1993. – No 11. – P. 65–69.
325. *Singh B.* Reflection of SV waves from free surface of an elastic solid in generalized thermodiffusion // *J. Sound Vib.* – 2006. – Vol. 291. – P. 764–778.
326. *Singh B.* Reflection of P and SV waves from free surface of an elastic solid with generalized thermodiffusion // *Journal of Earth System Science.* – 2005. – Vol. 114, No 2. – P. 159–168.
327. *Tarlovskii D.V., Vestyak V.A., Zemskov A.V.* Dynamic Processes in Thermoelectromagnetoelastic and Thermoelastodiffusive Media // *Encyclopedia of thermal stress, volume 2.* – Springer Dordrecht Heidelberg New York London, Springer reference, 2014. – P. 1064–1071.
328. *Tarlovskii D.V., Vestyak V.A., Zemskov A.V.* Method of Asymptotic Separation of Variables in Problems of Thermoelasticity // *Encyclopedia of thermal stress, volume 6.* – Springer Dordrecht Heidelberg New York London, Springer reference, 2014. – P. 2977–2982.
329. *Tarlovskii D.V., Vestyak V.A., Zemskov A.V.* Method of Averaging in Problems of Thermoelasticity of Composite Materials // *Encyclopedia of thermal stress, volume 6.* – Springer Dordrecht Heidelberg New York London, Springer reference, 2014. – P. 2982–2990.
330. *Taylor P.A., Aifantis A.C.* On the theory of diffusion in linear viscoelastic media // *Acta Mech.* – 1982. – Vol. 4. – P. 259–284.
331. *Tripathi J. J., Kedar G. D., Deshmukh K. C.* Two-dimensional generalized thermoelastic diffusion in a half-space under axisymmetric distributions // *Acta Mech.* – 2015. – Vol. 226. – P. 3263–3274.

332. *Valko P. P., Abate J.* Comparison of Sequence Accelerators for the Gaver Method of Numerical Laplace Transform Inversion // Computers and Mathematics with Applications. – 2004. – Vol. 48. – P. 629–636.
333. *Verma K. L.* On the diffusive waves in heat conducting solids // Annals of faculty engineering Hunedoara – international journal of engineering. – 2013. – Vol. 11, Fascicule 4. – P. 99–102.
334. *Vestyak V.A., Hachkevych A.R., Tarlakovskii D.V., Terletskii R.F.* Elastic Half Plane Under the Action of Nonstationary Surface Kinematic Perturbations // Journal of Mathematical Sciences. – 2014. – Vol. 203, Is 2. – P. 202–214.
335. *Vestyak V.A., Igumnov L.A., Tarlakovsky D.V.* Electromagnetic fields in movings space with spherical enclosure // Materials physics and mechanics. – 2015. – Vol. 23, No 1. – P. 31–35.
336. *Weitsman I.* Stress assisted diffusion in elastic and viscoelastic materials // J. Mech. and Physics of Solids. – 1987. – Vol. 35, No 1. – P. 73–93.
337. *Wilson R.K., Aifantis E.G.* On the theory of stressed-assisted diffusion - 1 // Acta Mechanica. – 1982. – Vol. 45, No 3. – P. 273–296.
338. *Wu C.H.* The chemical potential for stress-driven surface diffusion // J. Mech. Phys. Solids. – 1996. – Vol. 44. – P. 2059–2077.
339. *Xia R.H., Tian X.G., Shen Y.P.* The influence of diffusion on generalized thermoelastic problems of infinite body with a cylindrical cavity // International Journal of Engineering Science. – 2009. – Vol. 47. – P. 669–679.
340. *Xuan F.S., Shao S.S., Wang Z., Tu S.T.* Coupling effects of chemical stresses

- and external mechanical stresses on diffusion // J. Phys. D: Appl. Physics. – 2009. – Vol. 42. – P. 1–8.
341. *Yang F.* Interaction between diffusion and chemical stress // Mater. Sci. Eng. A. – 2005. – Vol. 409. – P. 153–159.
342. *Zemskov A.V., Tarlakovskiy D.V.* Approximate solution of three-dimensional problem for elastic diffusion in orthotropic layer // Journal of Mathematical Sciences. – 2014. – Vol. 203, Is 1. – P. 221–238.
343. *Zemskov A.V., Tarlakovskiy D.V.* Method of the equivalent boundary conditions in the unsteady problem for elastic diffusion layer // Materials Physics and Mechanics. – 2015. – Vol. 23, No 1. – P. 36–41.
344. *Zemskov A.V., Tarlakovskiy D.V.* General algorithm of solution of 2-dimension problems of mechanodiffusion // 24th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics. Book of papers. – Montreal, Canada, 2016. – P. 2454–2455.
345. *Zhang J., Li Y.* A Two-Dimensional Generalized Electromagnetothermoelastic Diffusion Problem for a Rotating Half-Space // Mathematical Problems in Engineering. – Hindawi Publishing Corporation, 2014. – Vol. 2014. – P. 1–12.