УДК 531+517.977

Особенности вырождения неголономных связей и управляемость.

И.В. Закалюкин

Аннотация

Рассматривается асимптотическое поведение управляемой механической системы общего положения с линейными неголономными связями в окрестности подмногобразия, на котором ранг системы уравнений связей падает на единицу. Показано, что если управлением системы является ограниченная обобщенная сила, то область достижимости для произвольной фиксированной начальной точки не может содержать окрестности этого подмногообразия. С другой стороны, для управляемой кинематической системы, заданной такими же связями область достижимости для всякой регулярной точки содержит такую окрестность. Рассмотрен пример системы с вырождением связей, состоящей из балки с двумя коньками.

Ключевые слова

Управляемая механическая система; вырождение неголономных связей; система с быстро-медленными переменными.

1. Введение.

1.1. Состояние рассматриваемого вопроса и постановка задачи.

Рассмотрим управляемую механическую систему, динамика которой описывается системой уравнений принципа Даламбера-Лагранжа с неопределенными множителями

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i+\sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i},\ f_j(q,\dot{q},t)=0\,, \tag{1}$$

$i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,k$,

где T – кинетическая энергия системы, являющаяся функцией обобщенных координат $q=(q_1,\dots,q_n)$, обобщенных скоростей $\dot{q}=(\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n)$ и времени, Q_i – обобщенные силы, которые будем считать управлениями $U = (Q_1, \dots, Q_n)$, не превосходящими по норме некоторой фиксированной константы, и λ_j – неопределенные множители (имеющие часто смысл обобщенных сил реакции неголономных связей). Наконец, $f_j(q, \dot{q}, t) = 0$, $j = 1,...,k$, это – уравнения неголономных связей.

Обычно предполагается ([3,6,5]), что накладываемые на систему неголономные связи являются независимыми, то есть векторы градиентов $\frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i}$ являются линейно независимыми. Большинство встречающихся в практике неголономных связей являются линейными по обобщенным скоростям, другими словами, функции f_j имеют вид

$$f_j = \sum_{s=1}^{n} a_{js}(q,t)\dot{q}_s + b_j(q,t)$$

В этом случае условие невырожденности означает, что $k \times n$ матрица $A = (a_{js})$ имеет полный ранг k. Важные в приложениях стандартные классы неголономных связей, как например, качение без проскальзывания одного твердого тела по другому, невырождены везде (см. [7]). Однако, имеются и простые примеры систем с непустым множеством вырождения.

В этой работе мы интересуемся поведением системы, описываемой уравнениями (1) вблизи подмножества Σ фазового пространства $TM = (q, \dot{q})$, в точках которого условия невырожденности нарушается. Предполагается, что вырождения удовлетворяют условиям общности положения и имеют наиболее простой вид. В частности, ранг матрицы A равен $k-1$. Показано, что в этом случае вблизи Σ система может быть описана как система с быстро-медленными переменными. В общем положении для почти каждой (за исключением подмножества относительной меры 0) точки Σ при произвольном заданном непрерывном ограниченном управлении $Q_i(t)$ не существует непрерывно дифференцируемой фазовой траектории системы, проходящей через эту точку. Этот факт представляет интерес для систем с управлением или систем программного движения: для того, чтобы получить, хотя бы приближенно, непрерывно дифференцируемую фазовую траекторию, трансверсально пересекающую множество Σ указанного вида, необходимо приложить к системе очень большие внешние силы (или соответствующие управления). Важнейшей характеристикой управляемой системы является структура множества достижимости системы из каждой начальной точки, то есть множество точек фазового пространства, куда попадает за конечное время из заданной начальной точки фазовая траектория системы, отвечающая всякому кусочно-постоянному управлению.

1.2. Методы решения и основные результаты.

Основным результатом является доказательство следующей теоремы (см. теорему 3 из раздела 2): Для всякого $M \in \mathbf{R}$ существует такое открытое подмножество компактной области фазового пространства, содержащее точки из Σ которое не принадлежит области достижимости для управляемой системы с обобщенными силами, ограниченными по норме константой M, и начальной точкой вне этого подмножества. Другими словами не все точки фазового пространства достижимы из произвольной заданной начальной точки в системе с вырождением неголономных связей управляемой обобщенными силами, не превосходящими по норме некоторой фиксированной константы, то есть система не вполне управляема.

Этот факт интересно сравнить с результатом (Теорема 1), полученным в первом разделе работы, где рассматривается кинематическая структура системы: Множество достижимости из всякой начальной точки управляемой системы $\dot{q} = u$, где u - произвольные кинематически допустимые скорости рассматриваемой механической системы общего положения содержит все точки конфигурационного пространства, в которых уравнения связей вырождены (при условии если выполнено неравенство $(n-k)(n-k+3) > n-2$.

Рассмотрен пример динамики двух коньков на плоскости, соединенных балкой, в окрестности вырождения системы уравнений связей.

Отметим также, что подобные вырождения неголономных динамических систем рассматривались ранее в задачах программного движения робота. Даже в простейшем случае, описанном, например, в работах [8,9], оценки сложности программного движения скачкообразно меняются при пересечении поверхности Мартине, на которой происходит вырождение неголономного распределения.

Имеющие прикладное значение примеры применения полученных в этой работе результатов можно найти в различных задачах управления робото-техническими устройствами (см., например [10,11]).

2. Управляемость в кинематической системе.

В конфигурационном пространстве с координатами $q \in \mathbf{R}^n$ рассмотрим управляемую систему $\dot{q} = u$, управления и $u \in T_q\mathbf{R}^n$ для которой будем считать принадлежащими распределению заданному уравнениями

$$A(q)u = 0\,, \tag{2}$$

где компоненты $a_{il}(q)$ матрицы $A(q)$ размера $k \times n$ гладко зависят от обобщенных координат. Другими словами, все допустимые линейными автономными однородными неголономными связями (2) обобщенные скорости для системы (1) будем считать допустимыми управлениями. Обозначим через множество решений системы (2), являющееся подмножеством фазового пространства q , $\dot{q}$.

Заметим, что в общей точке, где ранг матрицы A максимален, множество C представляет собой гладкое подмногообразие TM , являющееся пространством линейного расслоения $\Pi : C \to M$, слоем которого является линейное подпространство размерности $n-k$, заданное системой (2). В этом случае в каждом таком слое можно выбрать гладко зависящий от q базис допустимых векторных полей $v_j(x)$ и записать рассматриваемую управляемую систему в стандартном виде

$$\dot{q} = \sum_{j=1}^{n-k} v_j(q)\widetilde{u}_j \, , \; (\widetilde{u}_1, \ldots, \widetilde{u}_{n-k1}) \in \mathbf{R}^{n-k}$$

со скалярными управлениями $\widetilde{u}_j$.

По теореме о произведении корангов, в общем положении, для того, чтобы ранг матрицы A упал на 1, необходимо выполнение $n-k+1$ независимых условий. Падение ранга на 2 дает $2(n-k+2)$ независимых условий (см.[2]).

Напомним, что под *свойством общего положения* мы понимаем свойство, выполняющееся для систем из некоторого открытого всюду плотного подмножества пространства всех систем, снабженного подходящей топологией.

Таким образом, подмножество $\Sigma_1 \subset M$ значений обобщенных координат, при которых ранг $A(q)$ равен $k-1$, является гладким подмногообразием в M , заданным $n-k+1$ независимыми условиями.

Обозначим через $\Sigma = \pi^{-1}(\Sigma_1) \bigcap C \setminus \{(q,0)\}$ подмножество TM точек фазового пространства с ненулевыми скоростями, удовлетворяющими уравнениям связей, в которых матрица A вырождена и имеет ранг $k-1$. Будем рассматривать кинематику системы в окрестности слоя Σ над точкой $q_0 = 0$ конфигурационного пространства, которую примем за начало координат.

Лемма. *Подмножество Σ является гладким подмногообразием. Более того, множество C допустимых связями фазовых положений остается неособым подмногообразием в окрестности Σ.*

Доказательство. Заметим, что умножение матрицы A слева на обратимую матрицу означает только другой выбор базисных уравнений связей, и поэтому не меняет решений системы (1).

С другой стороны, локальная замена обобщенных координат $D:\tilde{q}\to q$ действует на матрицу A умножением справа на невырожденную матрицу D_* производной отображения D.

Пусть в точке $q=0$ матрица A имеет ранг $k-1$. С точностью до перенумерации обобщенных координат можно считать, что $(k-1)\times(k-1)$ минор $K=(a_{lm})$ при $l=1,...,k-1$, $m=n-k+2,...,n$, составленный из первых $k-1$ строк и последних $k-1$ столбцов, невырожден. Умножая A слева на подходящую невырожденную матрицу, последнюю k строку приведем к виду, в котором первые $n-k+1$ компоненты $g_1,...,g_{n-k+1}$ – независимые функции координат, а остальные – тождественные нули:

$$A=\begin{pmatrix} B & K \\ g_1...g_{n-k+1} & 0...0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Поскольку функции $g_1,...,g_{n-k+1}$ регулярные, то их можно принять за неполный набор новых локальных обобщенных координат. Условие вырожденности матрицы A принимает вид $g_1=...=g_{n-k+1}=0$, и, тем самым, задает регулярные уравнения множества Σ_1.

Рассмотрим теперь $k\times 2n$ матрицу

$$E=\left(A,\quad \frac{\partial A(q)}{\partial q}\dot{q}\right)$$

производной отображения $(\dot{q},q)\to(f_1,...,f_k)$, прообразом нуля которого является множество C. Последняя строка матрицы E имеет вид

$$g_1,...,g_{n-k+1},0,...,0,\sum_{j=1}^{k+1}\frac{\partial g_j}{\partial q_i}\dot{q}_j,...,\sum_{j=1}^{k+1}\frac{\partial g_j}{\partial q_n}\dot{q}_j\,.$$

Поскольку минор K матрицы A невырожден, то в интересующих нас точках, где все $g_i=0$, вырожденность матрицы E возможна только при равенстве нулю каждой из последних n компонент нижней строки. Поскольку g_i независимые регулярные функции, то для этого необходимо выполнение $n-k+1$ независимых линейных уравнений на $\dot{q}_j$, $j=1,...,n-k+1$. Таким образом, уравнения выполняются только при $\dot{q}_j=0$ для $j=1,...,n-k+1$. Такие векторы скоростей $\overset{€}{q}=(0,...,0,\dot{q}_{n-k+2},...\dot{q}_n)$ должны также удовлетворять исходной системе

$$A\overset{€}{q}=0 \tag{4}$$

Поскольку минор K невырожден, то уравнение (4) влечет $\dot{q}_{n-k+2}=0,\dots,\dot{q}_n=0$. Итак, на допустимых ненулевых скоростях ранг матрицы E равен k, что и требовалось доказать.

Теорема 1. *Множество достижимости системы (2) общего положения для любой начальной точки содержит подмножество* W *если выполнено неравенство* $(n-k)(n-k+3)>n-2$.

Доказательство. По теореме Рашевского-Чжоу (см., например, [4]) множество достижимости для всякой точки вполне неголономного обратимого семейства векторных полей на связанном гладком многообразии совпадает с этим многообразием. Как уже было сказано, на дополнении к множеству Σ_1 управляемая система задается обратимым семейством векторных полей. В случае матрицы A общего положения система будет вполне неголономна. Таким образом, орбита (множество достижимости) будет совпадать со всем дополнением.

Рассмотрим теперь точку $q_0\in\Sigma_1$. Достаточно показать, что при выполнении указанного неравенства найдется такая допустимая скорость $\dot{q}_0$, что $(q_0,\dot{q}_0)\in\Sigma$ и $\dot{q}_0$ не касается Σ_1. В этом случае допустимая траектория с начальным условием $(q_0,\dot{q}_0)$ выходит из множества Σ_1 попадая в орбиту всякой точки дополнения. Таким образом, и сама точка q_0 попадает в эту орбиту. Условие, что все допустимые при данном q_0 скорости касаются Σ_1 состоит в том, что ранг матрицы, полученной дописыванием к матрице A $n-k+1$ строк градиентов функций g_i равен по-прежнему $k-1$. По теореме о произведении корангов, для этого необходимо выполнение $(n-k+1)^2$ независимых между собой условий, каждое из которых содержало бы с ненулевым коэффициентом одну из частных производных $\dfrac{\partial g_i}{\partial q_j}$, $i,j=1,\dots,n-k+1$. Для системы общего положения такое количество условий может выполняться в некоторой точке только если $(n-k+1)^2+n-k+1\le n$. Отрицанием этого неравенства и является неравенство из условия теоремы.

3. Динамика управляемой системы вблизи множества вырождения.

Нас интересует асимптотика множителей λ и ускорений $\ddot{q}$, вычисляемых по мере приближения к точкам из слоя Σ, лежащим над базовой точкой $q_0\in\Sigma_1$.

Будем предполагать, что матрица A имеет вид (3).

Предположим, что кинетическая энергия системы имеет стандартный вид положительно определенной квадратичной формы $T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j$, тогда уравнение Даламбера-Лагранжа (Ферререса) примут вид

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\ddot{q}_j + \sum_{j,s=1}^{n}\left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_s} - \frac{1}{2}\frac{\partial m_{sj}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_s\dot{q}_j = Q_i + \sum_{l=1}^{k}\lambda_l a_{li}, \tag{5}$$

где $i = 1,\ldots,n$.

Дифференцируя уравнения связей получаем

$$\sum_{j=1}^{n} a_{sj}\ddot{q}_j + \sum_{j,l=1}^{n}\frac{\partial a_{sj}}{\partial q_l}\dot{q}_l\dot{q}_j = 0, \tag{6}$$

$s = 1,\ldots,k$

Пусть $N = (n_{ij})$ - матрица, обратная к матрице (m_{ij}), задающей квадратичную форму кинетической энергии, тогда, разрешая уравнения (5) относительно обобщенных ускорений, получаем

$$\ddot{q}_j = -b_j(q,\dot{q}) + \sum_{s=1,i=1}^{s=k,i=n} n_{ji}a_{si}\lambda_s, \tag{7}$$

где

$$j = 1,\ldots,n,\; b_j = \sum_{i=1}^{n} n_{j,i}\left(Q_j + \sum_{l,s=1}^{n}\left(\frac{\partial m_{il}}{\partial q_s} - \frac{1}{2}\frac{\partial m_{sl}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_s\dot{q}_j\right).$$

Подставляя выражения (7) в формулы (6), получим уравнения для нахождения множителей, которые в матричной форме имеют вид:

$$R\lambda = Ab + h, \tag{8}$$

где $b = (b_1,\ldots,b_n)$, $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$, матрица R размера $k \times k$ равна $R = ANA^*$ (A^* - транспонированная к A матрица) и вектор $h = (h_1,\ldots,h_k)$ имеет компоненты

$$h_s = -\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a_{si}}{\partial q_j}\dot{q}_i\dot{q}_j. \tag{9}$$

Заметим, что в уравнении (8) в точках Σ_1 матрица R вырождена. В самом деле, линейный оператор $A^*: \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$, заданный матрицей A^* имеет одномерное ядро, ненулевой вектор которого будем обозначать через v_0. Вектор $Rv_0 = ANV^*v_0 = 0$, поэтому $k \times k$ матрица R тоже имеет ненулевое ядро v_0.

Предположим, что матрица A имеет вид (3), тогда v_0 совпадает с последним координатным вектором в $\mathbf{R}^k$

Обозначим через G_A вектор в $\mathbf{R}^n$ с компонентами $g_1(q),...,g_{n-k+1}(q),0,...,0$. Обозначим через $\Delta_A(q)$ определитель матрицы $R = ANA^*$, а через $\xi_A(q,\dot{q})$ квадратичную форму обобщенных скоростей

$$\xi_A(q,\dot{q}) = \sum_{i=1,\,j=1}^{n,n-k+1} \frac{\partial g_j}{\partial q_i} \dot{q}_i \dot{q}_j ,$$

представляющую собой последнюю компоненту вектора h из формулы (9).

Теорема 2. *В некоторой окрестности W начала координат q_0 существуют такие ограниченные вектор-функции $F(q,\dot{q})$, что уравнения Феррерса в точках C, проекция которых на конфигурационное многообразие принадлежит $W \setminus \Sigma_1$, разрешенные относительно обобщенных ускорений имеют вид*:

$$\ddot{q} = F(q,\dot{q}) - \frac{\xi_A(q,\dot{q})}{\Delta_A(q)} N G_A . \tag{10}$$

Замечания.

1. Пусть $\| q \|_A$ – расстояние в некоторой метрике (совместимой с гладкой структурой конфигурационного многообразия M) от точки q до особого подмногообразия Σ_1. Заметим, что функции $\Delta_A(q)$ и $D = \sum_{i=1}^{n-k+1} g_i^2$ эквивалентны $\| q \|_A^2$ при $q \to \Sigma_1$. Другими словами, всевозможные их отношения являются непрерывными ограниченными функциями на W. Заметим также, что вектор $\dfrac{G_A}{\| q \|_A}$ вне Σ_1 – ненулевой, имеющий равномерно ограниченную сверху и снизу норму на $W \setminus \Sigma_1$.

Таким образом, вектор $\dfrac{NG_A}{\Delta_A}$, входящий в правую часть (10) имеет порядок $\| q \|_A^{-1}$.

2. Вектор $P = \dfrac{\xi_A(q,\dot{q})NG_A}{\Delta_A}$, который будем называть главной частью обобщенных ускорений в окрестности Σ_1, на самом деле определен инвариантно: с точностью до прибавления ограниченной вектор функции он не зависит от выбора представления матрицы A в виде (3). Этот факт содержится в приведенном ниже доказательстве теоремы.

3. Рассмотрим раздутие (сигма-процесс) вдоль подмногообразия $\Sigma_1 \cap W$, то есть вложение окрестности W в пространство $\mathbf{R}^n \times S^{k-1}$ произведения конфигурационного пространства на сферу трансверсальных направлений из точек подмногообразия Σ_1. Другими словами, к координатам q добавим дополнительные координаты, например $v_i = \dfrac{g_i(g)}{\sqrt{\Delta_A(q)}}$. Замыкание вложения $W \setminus \Sigma_1$ в это расширенное пространство является гладким n-мерным многообразием, называемое раздутием W. Формула (10) показывает, что главная часть обобщенных ускорений $P_n = P\|q\|_A$, нормированная множителем $\|q\|_A$, задает гладкое векторное поле $\widetilde{P}$ на раздутии, проектирующееся в $P\|q\|_A$ при забывании дополнительных координат.

4. Разложение (4.10), по-существу, означает, что в окрестности Σ уравнения Ферререса (Даламбера - Лагранжа) представляют собой приближенно быстро-медленную систему: медленными переменными являются обобщенные координаты, а быстрыми – обобщенные скорости, производные которых задаются выражениями $\ddot{q} = P_n\|q\|_A^{-1}$, в которых компоненты вектор функции $P_n(q,\dot{q})$ ограничены. Важную роль в таких системах играет множество положений равновесия по быстрым переменным. В нашем случае, это множество задано условием Σ, где $\xi(q,\dot{q}) = 0$. В случае не общего положения, когда $\xi(q,\dot{q}) = 0$ во всех точках Σ, никакой быстро-медленной системы, конечно, не возникает.

Итак, в первом приближении, в окрестности точек Σ, где $\xi(q,\dot{q}) \neq 0$, обобщенные скорости быстро меняются и достигают таких значений, что $\xi(q,\dot{q}) = 0$. При этом обобщенные координаты меняются сравнительно медленно. Заметим, что при каждом фиксированном значении q_* обобщенных координат вектор главной части обобщенных ускорений имеет фиксированное направление, то есть "быстрое движение" является одномерным.

5. Главная часть обобщенных ускорений не зависит от обобщенных сил Q, входящих в уравнения Ферререса. Поэтому, для того, чтобы получить регулярную траекторию (с конечным ускорением), проходящую вблизи точки из Σ_1, надо приложить очень большую по норме внешнюю силу.

Это обсуждение завершим вполне строгим утверждением:

Следствие. *Пусть* $m = (q_0, \dot{q}_0) \in \Sigma_1$ *– некоторая точка особого подмногообразия, в которой* $\xi(q,\dot{q}) \neq 0$ *и* $\dot{q}_0 \neq 0$. *Тогда не существует ни одной непрерывно дифференцируемой* *фазовой траектории, трансверсально пересекающей подмногообразие Σ_1 в некоторый момент времени t_0 в точке m, и являющейся решением уравнений Ферререса при $t \neq t_0$.*

Доказательство следствия. Пусть $q = r(t)$ – траектория с указанными свойствами, тогда $\dot{q} = \dot{r}$. Трансверсальность пересечения означает, что при t близком к t_0 некоторые из координат $g_i(r(t)) \approx \left.\frac{d\, g_i(r(t))}{d\, t}\right|_{t_0}(t - t_0) \neq 0$. Тогда, в силу теоремы 1, обобщенное ускорение, определяемое из уравнений Ферререса, имеет неограниченную норму при стремлении $t \to t_0$, то есть траектория $r(t)$ не является непрерывно дифференцируемой функцией t.

Доказательство теоремы 2.

Утверждение 1. *Умножая матрицу $A(q)$ слева на подходящую, гладко зависящую от обобщенных координат, невырожденную матрицу $U(q)$ вида*

$$U = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,k-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k-1,1} & \cdots & b_{k-1,k-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

симметрическую матрицу R можно привести к симметрическому виду

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & r_{1,k} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & r_{2,k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & r_{k-1,k} \\ r_{1,k} & r_{2,k} & \cdots & r_{k-1,k} & r_{k,k} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

в котором левый верхний угол – это $(k-1)\times(k-1)$ единичная матрица, компонента

$$r_{k,k} = \sum_{i=j=1}^{i=j=n-k+1} n_{ij} g_i g_j$$

и компоненты $r_{i,k}$ представляют собой линейные комбинации вида

$$r_{i,k} = \alpha_{i,1} g_1 + \ldots + \alpha_{i,n-k+1} g_{n-k+1},$$

в которых $\alpha_{i,j}$ – гладкие функции q, причем ранг матрицы $(\alpha_{i,j})$ максимален, то есть равен $n-k+1$, в окрестности начала координат.

Доказательство. Столбцы матрицы A^* (то есть строки матрицы A), как видно из формулы (3) представляют собой n-мерные векторы $e_1, \ldots, e_{k-1}, e_k$, причем первые $k-1$ из них линейно не зависимые при всех q, а вне Σ_1 они независимы с последним вектором

$e_k = (g_1,...,g_{n-k+1},0,...,0)$. Обозначим через $\langle\, , \rangle$ скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$, заданное симметрической положительно определенной матрицей N. Тогда компоненты матрицы R представляют собой скалярные произведения $R = \left(\langle e_i, e_j \rangle\right)$.

Выбирая гладко зависящие от q независимые линейные комбинации векторов e_i, $i = 1,...,k-1$, можно получить $\langle\, , \rangle$ – ортонормальные векторы $\tilde e_1,...,\tilde e_{k-1}$. Заметим, что переход от e_i, $i = 1,...,k$, к $\tilde e_i$, $i = 1,...,k-1$, $\tilde e_k = e_k$ осуществляется как раз умножением слева матрицы A на матрицу вида (11).

Перечислим некоторые свойства указанных матриц.

1. Определители матриц $\det(R)$, $\Delta = \det(\tilde R) = \det(R)\det(B)^2$ строго положительны вне Σ_1. Сами матрицы представляют собой, как было сказано, матрицы метрического тензора, состоящие из скалярных произведений $\langle e_i, e_j \rangle$ линейно независимых между собой векторов. В частности, существует некоторый ортонормальный базис $\mathbf{R}^n$, гладко зависящий от q, в которых матрица R равна произведению S^*S для невырожденной матрицы S перехода от первых k векторов этого базиса к векторам e_i. Во всех точках Σ_1 ранг матрицы R равен $k-1$. Тем самым, образ линейного оператора с матрицей R совпадает с $k-1$ мерным образом оператора, заданного матрицей A. чевидно, такие же утверждения верны и для матрицы $\widetilde{R}$.

Первый из упомянутых определителей представляет собой выражение вида

$$\det(R) = \sum_{i,j}^{i,j=n-k+1} \delta_{ij} g_i g_j \, ,$$

где коэффициенты δ_{ij} являются гладкими в окрестности нуля функциями от q, причем квадратичная форма $\det(R) = \sum_{i,j}^{i,j=n-k+1} \delta_{ij}(0) X_i X_j$ положительно определена. То же верно и для

$$\Delta = \det(\tilde R) = \sum_{i,j}^{n-k+1} n_{ij} g_i g_j - \sum_{i}^{n-k+1} g_i^2 \, .$$

Заметим, что последняя формула получается с помощью приведения к верхне-треугольному виду матрицы $\tilde R$ (12).

2. В некоторой окрестности W нуля найдутся такие гладкие положительные функции $\gamma_1(q)$ и $\gamma_2(q)$, что

$$\gamma_1(q)\sum_{i}^{n-k+1} g_i^2 \le \Delta \le \gamma_2(q)\sum_{i}^{n-k+1} g_i^2 .$$

Кроме того, отношения $\dfrac{r_{i,k}r_{j,k}}{\Delta}$ для любых i, j остаются ограниченными на W.

3. Вычисляя алгебраические дополнения элементов матрицы $\tilde{R}$, находим, что обратная матрица $\tilde{R}^{-1}$, определенная вне Σ_1 имеет вид

$$\tilde{R}^{-1} = \begin{pmatrix} 1+\frac{r_{1,k}^2}{\Delta} & -\frac{r_{1,k}r_{2,k}}{\Delta} & \cdots & \frac{(-1)^{k-1}r_{1,k}r_{k-1,k}}{\Delta} & \frac{(-1)^k r_{1,k}}{\Delta} \\ -\frac{r_{1,k}r_{2,k}}{\Delta} & 1+\frac{r_{2,k}^2}{\Delta} & \cdots & \frac{(-1)^{k-1}r_{2,k}r_{k-1,k}}{\Delta} & \frac{(-1)^{k+1}r_{2,k}}{\Delta} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{(-1)^{k-1}r_{1,k}r_{k-1,k}}{\Delta} & \frac{(-1)^{k-1}r_{2,k}r_{k-1,k}}{\Delta} & \cdots & 1+\frac{r_{k-1,k}^2}{\Delta} & -\frac{r_{k-1,k}}{\Delta} \\ \frac{(-1)^k r_{1,k}}{\Delta} & \frac{(-1)^{k+1}r_{2,k}}{\Delta} & \cdots & -\frac{r_{k-1,k}}{\Delta} & \frac{1}{\Delta} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

4. Обозначим через $G(q) = (\tilde{g}_1,...,\tilde{g}_n)$ n-мерный вектор, гладко зависящий от q, все компоненты которого обращаются в нуль на Σ_1, причем ранг матрицы производных $\left(\dfrac{\partial \tilde{g}_i}{\partial q_j}\right)$ максимален, то есть равен $n-k+1$. Примером такого вектора служит вектор последней строки матрицы вида (3).

Выбор вектора G определен с точностью до умножения на ненулевой множитель и добавления линейной комбинации других векторов-строк матрицы A с коэффициентами, обращающимися в нуль на подмножестве Σ_1, то есть принадлежащими идеалу I в кольце ростков гладких функций в точке q_0, порожденному образующими $g_i(q)$, $i = 1,...,n-k+1$. В самом деле, добавляя, например, к последней строке матрицы вида (3) какую-либо другую ее строку $\tilde{G}$, умноженную на некоторый коэффициент $\mu(q)$ и рассмотрев результат в точках Σ_1, где $g_1 = ... = g_{n-k+1} = 0$, получим, что этот коэффициент $\mu(q)$ обращается в нуль (так как сама $\tilde{G}$ в нуль не обращается).

5. Подмножество $F \subset \Sigma$, состоящее из нулей квадратичной формы

$$\xi = \sum_{i=1, j=1}^{i=n, j=n-k+1} \frac{\partial g_j}{\partial q_i}\dot{q}_i\,\dot{q}_j$$

обобщенных скоростей, совпадающей с компонентой h_k вектора h из формулы (8), суженной на подпространство Σ, назовем множеством *уплощения* матрицы A.

Утверждение 2. *Множество уплощения* $\xi(q,\dot q)$ *не зависит от выбора обобщенных координат и от выбора преобразования, приводящего матрицу связей* A *к виду* (3).

Доказательство вытекает из предыдущего замечания 4, поскольку множество уплощения определяется по компонентам вектора G. При каждой из указанных в замечании 3 операций перехода от одного вектора G к другому к функции ξ либо добавляется линейная комбинация уравнений связей, либо функция из идеала I.

Вернемся к доказательству теоремы 2.

Находя множители λ из уравнений (8), получаем, что поскольку вектор-функция Ab принадлежит образу оператора A, то $R^{-1}Ab$ – ограниченная вектор-функция в окрестности всякой точки слоя Σ над q_0. Теперь из уравнений (7) следует, что с точностью до ограниченной вектор функции

$$\ddot q \approx NA^{*}R^{-1}h\,. \tag{14}$$

Обращаясь к выражениям (13) для коэффициентов матрицы C^{-1} или, что эквивалентно матрицы R^{-1}, получаем, что единственные неограниченные в окрестности q_0 вектор-функции, входящие в правую часть (14) – это произведение матрицы N на последний столбец матрицы A^{*}, равный в точности вектору G_A, и на скалярную величину, равную произведению $\frac{1}{\Delta}$ и соответственно последней компоненты вектора h. Именно это выражение и входит в формулу теоремы 2.

Теорема 3. *Для всякого* $M \in \mathbf{R}$ *существует такое открытое подмножество компактной области фазового пространства, содержащее точки из* Σ *которое не принадлежит области достижимости для управляемой системы с обобщенными силами, ограниченными по норме константой* M*, и начальной точкой вне которой окрестности этого подмножества.*

Доказательство. Внутри достаточно малой окрестности E, заданной неравенством $\Delta_A(q) \le \varepsilon(M)$ множества Σ_1 рассмотрим замену времени (быстрое время) $\tau = \dfrac{t}{\Delta_A(q)}$ для переменных $\dot q$. Уравнение теоремы 2 можно записать в виде

$$\frac{dt}{d\tau}\dot q = \Delta_A(q)F(q,\dot q) - \xi_A(q,\dot q)NG_A$$

Видно, что в E медленное движение происходит в окрестности множества H обобщенных скоростей, заданных уравнением $\xi_A(q,\dot q)=0$. В самом деле, быстрая производная этой функция делится на нее же. Таким образом, в общем положении имеется устойчивая окрестность $W(M)$ множества $H \cap E$. Всякая траектория, попадающая на границу E, попадает затем в W и может покинуть ее, только пересекая границу E. Таким образом, множество $E_* \setminus W$, где E_* - подходящая меньшая окрестность $\Delta_A(q) \le \varepsilon_*$ недостижимо ни для какой траектории системы, отвечающей константе M.

4 Пример.

Рассмотрим механическую систему, совершающую движение в плоскости Oxy, и состоящую из твердого стержня длиной $2l$ и массой M, к концам K_1 и K_2 которого шарнирно прикреплены два одинаковых конька, представляющие собой малые прямолинейные отрезки с центрами в точках K_1 и K_2 соответственно, масса каждого из которых равна m. Момент инерции стержня относительно центра масс C, находящегося в середине стержня, равен J. Момент инерции конька относительно его центра равен J_1. Предположим, что движение конька подчиняется стандартному "неголономному" условию: скорость в центре конька направлена вдоль его оси. Составим уравнения Даламбера-Лагранжа системы при отсутствии действия на нее каких-либо активных сил.

Введем обобщенные координаты: x, y – декартовы координаты центра стержня, φ – угол поворота оси K_1K_2 стержня относительно неподвижной оси Ox, и углы α, β – поворотов осей коньков относительно той же оси Ox. Кинетическая энергия системы, как функция обобщенных координат и скоростей, в текущем положении системы имеет следующий вид:

$$T = \frac{1}{2}(M+2m)(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}J_1(\dot{\alpha}^2+\dot{\beta}^2). \tag{15}$$

Уравнения неголономных связей получаются приравниванием нулю векторного произведения вектора скорости центра каждого конька и вектора его оси:

$$\dot{x}\sin\alpha - \dot{y}\cos\alpha - l\dot{\varphi}\cos(\alpha-\varphi) = 0, \tag{16}$$

$$\dot{x}\sin\beta - \dot{y}\cos\beta + l\dot{\varphi}\cos(\beta-\varphi) = 0.$$

Заметим, что эти уравнения становятся зависимыми, если:

$$\alpha = \beta = \varphi \pm \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = \beta + \pi, \quad \alpha = \varphi \pm \frac{\pi}{2}.$$

Уравнения Феррерса (Даламбера-Лагранжа) с неопределенными множителями λ_1, λ_2, отвечающими указанным связям принимают вид:

$$
\begin{cases}
\ddot{x} = \lambda_1 \sin\alpha + \lambda_2 \sin\beta; \\
\ddot{y} = \lambda_1(-\cos\alpha) + \lambda_2(-\cos\beta); \\
J\ddot{\varphi} = -\lambda_1 l\cos(\alpha-\varphi) + \lambda_2 l\cos(\beta-\varphi); \\
\ddot{\alpha} = 0; \\
\ddot{\beta} = 0.
\end{cases} \tag{17}
$$

Здесь, с помощью выбора подходящих единиц линейных размеров и массы, можно добиться равенства $M+2m=1$. Дифференцируя уравнения связей по времени, получаем

$$
\ddot{x}\sin\alpha - \ddot{y}\cos\alpha - l\ddot{\varphi}\cos(\alpha-\varphi) = \mathrm{A}, \tag{18}
$$

$$
\ddot{x}\sin\beta - \ddot{y}\cos\beta - l\ddot{\varphi}\cos(\beta-\varphi) = \mathrm{B},
$$

где

$$
\mathrm{A} = -\dot{x}\dot{\alpha}\cos\alpha - \dot{y}\dot{\alpha}\sin\alpha - l\dot{\varphi}(\dot{\alpha}-\dot{\varphi})\sin(\alpha-\varphi), \tag{19}
$$

$$
\mathrm{B} = -\dot{x}\dot{\beta}\cos\beta - \dot{y}\dot{\beta}\sin\beta + l\dot{\varphi}(\dot{\beta}-\dot{\varphi})\sin(\beta-\varphi).
$$

Подставляя в них выражения для ускорений из системы (17), получаем линейную систему для нахождения множителей:

$$
\lambda_1[1+b\cos^2(\alpha-\varphi)] + \lambda_2[\cos(\alpha-\beta) - b\cos(\alpha-\varphi)\cos(\beta-\varphi)] = \mathrm{A}; \tag{20}
$$

$$
\lambda_1[\cos(\alpha-\beta) - b\cos(\alpha-\varphi)\cos(\beta-\varphi)] + \lambda_2[1+b\cos^2(\beta-\varphi)] = \mathrm{B}.
$$

Здесь $b=\frac{1}{J}$. Отсюда

$$
\lambda_1 = \tfrac{1}{\Delta}\{\mathrm{A}[1+b\cos^2(\beta-\varphi)] - \mathrm{B}[\cos(\alpha-\beta) - b\cos(\alpha-\varphi)\cos(\beta-\varphi)]\};
$$

$$
\lambda_2 = \tfrac{1}{\Delta}\{\mathrm{B}[1+b\cos^2(\alpha-\varphi)] - \mathrm{A}[\cos(\alpha-\beta) - b\cos(\alpha-\varphi)\cos(\beta-\varphi)]\},
$$

где через Δ обозначен определитель

$$
\Delta = (1-b)\sin^2(\alpha-\beta) + 2b[\cos^2(\alpha-\varphi) + \cos^2(\beta-\varphi)]
$$

системы (20), обращающийся в нуль на множестве Σ_1.

Подставляя найденные выражения для множителей в уравнения (17), получаем явные уравнения движения, имеющие особенности на множестве Σ_1

$$
\begin{cases}
\ddot{x} = \frac{1}{\Delta}\{-\sin\alpha\cdot \mathrm{A}[1+b\cos^2(\beta-\varphi)] + \sin\alpha\cdot \mathrm{B}[\cos(\alpha-\beta) - b\cos(\alpha-\varphi)\cos(\beta-\varphi)] - \\
-\sin\beta\cdot \mathrm{B}[1+b\cos^2(\alpha-\varphi)] + \sin\beta\cdot \mathrm{A}[\cos(\alpha-\beta) - b\cos(\alpha-\varphi)\cos(\beta-\varphi)]\}; \\
\ddot{y} = \frac{1}{\Delta}\{\cos\alpha\cdot \mathrm{A}[1+b\cos^2(\beta-\varphi)] - \cos\alpha\cdot \mathrm{B}[\cos(\alpha-\beta) - b\cos(\alpha-\varphi)\cos(\beta-\varphi)] + \\
+\cos\beta\cdot \mathrm{B}[1+b\cos^2(\alpha-\varphi)] - \cos\beta\cdot \mathrm{A}[\cos(\alpha-\beta) - b\cos(\alpha-\varphi)\cos(\beta-\varphi)]\}; \\
\ddot{\varphi} = \frac{b}{\Delta}\{\mathrm{B}[\cos(\beta-\varphi) + \cos(\alpha-\varphi)\cos(\alpha-\beta)] - \mathrm{A}[\cos(\alpha-\varphi) + \cos(\beta-\varphi)\cos(\alpha-\beta)]\}; \\
\dot{\alpha} = \mathrm{const}_1; \\
\dot{\beta} = \mathrm{const}_2.
\end{cases}
$$

в которых функции A и B имеют указанный выше вид (19). Заметим, что аналитическое и даже численное исследование этой системы вблизи особого множества $\Delta = 0$ затруднительно. Однако, из теоремы 1 вытекает следующее свойство этих уравнений.

Утверждение 4. *Если вращающиеся с постоянными угловыми скоростями* $\dot{\alpha}$ *и* $\dot{\beta}$ *коньки в некоторый момент* t_0 *становятся одновременно перпендикулярными стержню, то происходит очень быстрое (как при ударе) изменение скорости центра масс* $(\dot{x}, \dot{y})$ *и угловой скорости* $\dot{\varphi}$ *стержня, от первичных значений* $\dot{x}(t_0-\varepsilon)$, $\dot{y}(t_0-\varepsilon)$, $\dot{\varphi}(t_0-\varepsilon)$ *до конечных* $\dot{x}(t_0)$, $\dot{y}(t_0)$, $\dot{\varphi}(t_0)$, *удовлетворяющих условию*

$$(\dot{\alpha}-\dot{\beta})[\dot{x}(t_0)\cos\alpha + \dot{y}(t_0)\sin\alpha] + l\varphi(t_0)(\dot{\alpha}+\dot{\beta}-2\dot{\varphi}) = O(\varepsilon)$$

и связанных с начальными значениями условием:

$$\dot{x}(t_0) - \dot{x}(t_0-\varepsilon) = \mu\cos\alpha\,(\dot{\alpha}-\dot{\beta});$$

$$\dot{y}(t_0) - \dot{y}(t_0-\varepsilon) = \mu\sin\alpha\,(\dot{\alpha}-\dot{\beta});$$

$$\dot{\varphi}(t_0) - \dot{\varphi}(t_0-\varepsilon) = b\mu(\dot{\alpha}+\dot{\beta}-2\dot{\varphi})$$

для некоторой константы μ.

Доказательство. Заметим, что вырождающейся линейной комбинацией уравнений связей является разность уравнений(16). Следовательно,

$$\tilde{g}_1 = \sin\alpha - \sin\beta, \quad \tilde{g}_2 = \cos\beta - \cos\alpha, \quad \tilde{g}_3 = l[\cos(\alpha-\varphi) - \cos(\beta-\varphi)].$$

Далее по формулам теоремы 2, принимая во внимание, что вблизи точки вырождения стремящиеся к нулю величины $\tilde{g}_i$ пропорциональны своим производным по времени, получаем искомые выражения.

Применяя теорему 3 к нашему примеру, получаем следующее

Утверждение 5. *Если к рассматриваемой балке прикладывать произвольные управляющие воздействия в виде активных обобщенных сил, ограниченных сколь угодно большой константой, и начинать движение из произвольной точки фазового пространства вне* Σ, *то система никогда не придет в положение с* $\alpha = \beta = \varphi + \frac{\pi}{2}$ *и отличной от нуля левой частью соотношения (23).*

5 Обсуждение полученных результатов, выводы и рекомендации.

В работе показано, что асимптотическое поведение механической системы общего положения, подчиняющейся уравнениям Фererса, с линейными неголономными связями в окрестности подмногобразия, на котором ранг системы уравнений связей падает на единицу, задается системой с быстрыми и медленными переменными.

В общем положении для почти каждой (за исключением подмножества относительной меры 0) точки из множества вырождения не существует непрерывно дифференцируемой фазовой траектории системы, проходящей через эту точку, и не касающейся этого множества. Этот факт представляет интерес для систем с управлением или систем программного движения: для того, чтобы получить, хотя бы приближенно, непрерывно дифференцируемую фазовую траекторию, трансверсально пересекающую множество вырождения связей, необходимо приложить к системе очень большие внешние силы (или соответствующие управления). Другими словами, система не является вполне управляемой в окрестности множества вырождения.

Библиографический список

[1]. Ferrers N.M. Extension of Lagrange Equations // Quart. J. of pure and applied math., 1872, n. 12,(45) 1-5.

[2]. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. Изд.2. М.:МЦНМО, 2004, 672 с.

[3]. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. Динамические системы -3. Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ,1985, 320 с.

[4]. Аграчев А.А., Сачков Ю.Л., Геометрическая теория управления, М., Физматлит, 2005, 392с.

[5]. Неголономные динамические системы. Интегрируемость. Хаос. Странные аттракторы. Сборник статей под ред. А.В. Борисова, И.С.Мамаева. Москва-Ижевск, 2002, 324 с.

[6]. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967, 519 с.

[7]. Маркеев А.П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.Наука, 1992, 336 с.

[8]. F.Jean. Complexity of non-holonomic motion planning // International Journal of Control, v.74, 2001, n.8, c.776-782.

[9]. J.P.Gauthier, F.Monroy-Perez, C.Romero-Melindez. On complexity and motion planning for corank one SR metrics // COCV, v.10, 2004, c.634-655.

Информация об авторах

Закалюкин Иван Владимирович; аспирант Московского авиационного института (государственного технического университета); 119334, Москва, Ленинский проспект, д.37, кв. 223, Телефоны: (495) 958-0414, +7 (906)789-5405, e-mail: zakalyukin@mail.ru.