Вестник Московского авиационного института. 2024. Т. 31. № 4. С. 123–130.
Aerospace MAI Journal, 2024, vol. 31, no. 4, pp. 123-130. (In Russ.).

Научная статья
УДК 629.7.018
URL: https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=183590
EDN: https://www.elibrary.ru/ERCBNO

Об одном подходе к определению жесткости крыла по заданным деформациям

Владимир Алексеевич Костин[1✉], Наталья Львовна Валитова[2], Вероника Игоревна Филясова[3]
[1, 2, 3] Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева – КАИ (КНИТУ-КАИ),
Казань, Республика Татарстан, Российская Федерация
[1] VAKostin@kai.ru✉
[2] NLValitova@kai.ru
[3] FilyasovaVI@stud.kai.ru

Аннотация. Представлен подход, позволяющий определить реальную жесткость балки, работающей на изгиб и кручение, при неточно заданной из-за погрешностей натурного эксперимента исходной информации. Показано, что сведение задачи о поперечных и крутильных колебаниях отсека крыла, записанной в виде дифференциальных уравнений, к интегральным уравнениям типа Вольтерра первого рода дает возможность создать алгоритм расчета с помощью метода интегрирующих матриц, минимально увеличивающий погрешности расчета изгибной и крутильной жесткости крыла по данным эксперимента, даже при неточных исходных данных.

Ключевые слова: идентификация, численные методы, интегрирующие матрицы, колебания, жесткость крыла

Для цитирования: Костин В.А., Валитова Н.Л., Филясова В.И. Об одном подходе к определению жесткости крыла по заданным деформациям // Вестник Московского авиационного института. 2024. Т. 31. № 4. С. 123–130. URL: https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=183590

Original article

On One Approach to the Wing Rigidity Determining by Specified Deformations

Vladimir A. Kostin[1✉], Natal'ya L. Valitova[2], Veronika I. Filyasova[3]
[1, 2, 3] Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev - KAI,
Kazan, Republic of Tatarstan, Russian Federation
[1] VAKostin@kai.ru✉
[2] NLValitova@kai.ru
[3] FilyasovaVI@stud.kai.ru

Abstract
The main problem in structures diagnostics and quality control is that the overwhelming majority of physical quantities cannot be measured directly. The task emerges herefrom on the physical quantities determining by the

results of their manifestation. The aircraft structures rigidity characteristics determining by the specified deformations and loads relates to this problem as well.

Problems in which coefficients of the equations are unknown, and the initial, boundary and other additional conditions are specified, form a wide class of so-called coefficient inverse problems. Inverse problems are mainly ill-posed. Their solution is often ambiguous, unstable, and errors in numerical methods lead to the resultant error increase. The up-to-date theory of their solution is largely associated with the name of O.M. Alifanov, Professor at Moscow State Technical University (MAI), and the scientific school he created.

The works cited in the review indicate a high level of research and the tools employed. However, according to the opinion of the authors of the article, the integrating matrices method is the most suitable one for the purpose of the listed problems solution in the framework of test laboratories and factory design bureaus, the more so, as as it gained further development through the approximations improving of the obtained relationships and modern software. Thus, the article considers this method, which naturally (due to integration) includes the necessary function of smoothing the experimental results as well.

The method consists of two stages. At the first stage, the initial differential equations are being reduced to a form convenient for the integrating matrices application. Integration of the problem differential equations is being performed herewith. Integration is being accomplished with account for the boundary conditions and continued so many times that the highest derivative in the equation becomes the one that determines the stress state. As the result, we obtain an integral-differential equation, which at the second stage is being reduced to a system of linear algebraic equations by replacing the integrals with their matrix analogs, and then this system is solved.

The article considers in detail the two examples of the proposed approach applying to the rigidity determining of a beam operating in both bending and torsion, with inaccurately specified initial information resulting from the experimental errors.

The results revealed that the integrating matrix method application for solving the inverse problem allows finding rigidities with almost the accuracy of the measurement error. Thus, this approach may be recommended as an effective tool for finding bending and torsional rigidities when the experimental results smoothing is practically not required.

Keywords: numerical methods, identification, wing rigidity, oscillations, finite sums method, integrating matrices

For citation: Kostin V.A., Valitova N.L., Filyasova V.I. On One Approach to the Wing Rigidity Determining by Specified Deformations. *Aerospace MAI Journal*, 2024, vol. 31, no. 4, pp. 123–130. (In Russ.). URL: https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=183590

Введение

Основная проблема при диагностике и контроле качества конструкций заключается в том, что подавляющее число физических величин не может быть измерено непосредственно. Непосредственному измерению поддается лишь ограниченный набор физических параметров, на которые остальные (неизмеряемые) параметры оказывают лишь опосредованное влияние. Отсюда возникает задача определения физических величин по результатам их проявления. К этой же проблеме относится и определение свойств материалов (модуля упругости E и модуля сдвига G) элементов конструкции. Гостированные методы определения E и G основаны на испытаниях образцов материала и, как правило, требуют уточнения.

Задачи, в которых коэффициент уравнений неизвестен, а заданы начальные, граничные и другие дополнительные условия, образуют широкий класс так называемых коэффициентных обратных задач. В большинстве своем обратные задачи являются некорректно поставленными. Их решение часто неоднозначно, неустойчиво, а ошибки численных методов приводят к росту результирующей погрешности. Современная теория их решения во многом связана с именем академика РАН О.М. Алифанова и созданной им научной школы [1–3]. Условно в соответствии с темой статьи современные публикации можно разделить на четыре группы.

1. Работы, основанные на использовании сглаживающего функционала А.Н. Тихонова [4, 5].

2. Экстремальная постановка обратных задач. Функционал цели минимизируется с помощью градиентного метода [6–9], а также таких подходов, как оптимизация роя частиц (PSO), генетического алгоритма (GA) и алгоритма Yuki [10].

3. Сочетание метода конечных элементов (МКЭ) и искусственных нейронных сетей [11–13]. В работе Trivailo и др., метод, основанный на анализе МКЭ в MATLAB, используется для генерации обучающих данных для сетей, которые моделируются с использованием набора инструментов Neural Network Toolbox. В работе Shi Feng обратная задача вязкоупругой механики решается с помощью различных структур МКЭ с использованием программы ABAQUS.

4. Сведение краевой задачи к интегральным уравнениям Вольтерра первого и второго рода с теми же краевыми условиями [14–21]. Наиболее известным инициатором перехода от дифференциальных зависимостей к интегральным уравнениям при решении обратных задач является Я.М. Пархомовский. Для получения устойчивого решения им даны рекомендации по сглаживанию полученных из эксперимента прогибов, а также представлению гибкости крыла совокупностью некоторых гладких координатных функций.

Из современных работ, посвященных идентификации на базе интегральных уравнений, можно выделить публикации Ю.Е. Воскобойникова и В.А. Боевой [20, 21], в которых представлено построение решения, использующего «зашумленные данные», на базе сглаживающих сплайнов.

По-прежнему актуально уточнение жесткостных характеристик конструкций и действующих на них нагрузок. Современные методы решения этих задач базируются на мощной вычислительной технике, позволяющей использовать нейронные сети и МКЭ. Остаются востребованными и универсальные методы, основанные на регуляризации по А.Н. Тихонову и оптимизации (экстремальный подход О.М. Алифанова). Можно считать перспективной и интегральную модель «вход-выход», состоящую из нескольких уравнений Вольтерра.

Приведенные в обзоре работы говорят о высоком уровне исследований и применяемого инструментария, но мало годятся для инженерного применения (в том числе и работы Я.М. Пархомовского и Ю.Е. Воскобойникова). На взгляд авторов статьи, для инженерного решения перечисленных задач в рамках испытательных лабораторий и заводских КБ наиболее подходящим является метод интегрирующих матриц, тем более что за последние годы он получил дальнейшее развитие благодаря улучшению аппроксимаций полученных соотношений и современному программному обеспечению. Поэтому рассмотрим подробнее этот пока еще недостаточно широко известный метод, который естественным образом (за счет интегрирования) включает в себя и необходимую функцию сглаживания результатов эксперимента (очевидно, что роль вероятностно-статистических методов в данном случае ничтожна, ввиду эксклюзивности натурных испытаний авиационных конструкций).

Таким образом, целью данной работы является не только рассмотрение конкретных задач авиастроения, но и в конечном итоге популяризация метода интегрирующих матриц (МИМ) как простого и эффективного метода для построения дискретных моделей технических или природных систем. Для этого сначала рассмотрим саму методику применения метода интегрирующих матриц, а затем приведем примеры решения задачи определения жесткостей крыла по заданным деформациям, уделяя особое внимание поведению метода при погрешностях измерений.

Применение метода интегрирующих матриц

Применение метода состоит из двух этапов. На первом этапе исходные дифференциальные уравнения приводят к удобному для использования интегрирующих матриц виду. При этом интегрируются дифференциальные уравнения задачи. Интегрирование идет с учетом граничных условий и продолжается столько раз, сколько нужно, чтобы в уравнении старшей производной стала та, которая определяет напряженное состояние. Обычно при изгибе это вторая, а при растяжении и сдвиге – первая производная. В результате получаем интегро-дифференциальное уравнение. На втором этапе численно решается интегро-дифференциальное уравнение. С этой целью по длине конструкции намечают расчетные сечения. Их количество и расположение зависят от особенностей конструкции.

В этих n сечениях записывают полученные интегро-дифференциальные уравнения, а затем уравнение представляется в матричном виде. В результате в явном виде выделяется столбец значений основной производной в расчетных сечениях, и задача приводится к матричному уравнению относительно этого столбца.

Следует отметить, что матрицы, характеризующие жесткость конструкции, являются диагональными, что позволяет легко перейти от решения прямой задачи к нахождению вектор-столбца коэффициентов, т. е. к решению обратной задачи. Так как искомые в прямой задаче и известные из эксперимента перемещения и деформации в обратной являются результатом измерений и несут в себе погрешности, то их попадание под знак интеграла (интегралов) позволяет естественным образом провести сглаживание. Важной особенностью МИМ как численного метода является возможность сгущения сетки в местах резкого изменения жесткости конструкции, т.е. для любых функций – дифференцируемых и разрывных – матричная формула для вычисления площадей участков подынтегральной кривой, на которые она разбивается расчетными сечениями, остается прежней, и обусловленность матрицы не страдает.

Более подробно рассмотрим применение МИМ на примерах.

Пример 1

Известно распределение деформации крыла при вынужденных поперечных колебаниях[1].

Будем предполагать, что крыло можно рассмотреть как консольную балку с заделкой по борту фюзеляжа. Центр тяжести сечения крыла будем полагать совпадающим с центром жесткости и находящимся на оси x. В этом случае известное уравнение изгибных колебаний имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EJ\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] + m\,\frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial \tau^2} = T(x,t), \tag{1}$$

где EJ – изгибная жесткость, m – погонная масса.

В процессе испытаний крыло нагружается по гармоническому закону, т. е. $T(x,t)=q(x)\sin wt$, где w – частота колебаний вибратора и движущегося по его закону отсека крыла.

Примем

$$\tilde{y} = y(x)\sin wt. \tag{2}$$

После разделения переменных имеем уравнение

$$\left(EJy''\right)'' - mw^2 y = q \tag{3}$$

с граничными условиями

$$y(0) = 0;\ y'(0) = 0,\ \text{при}\ x = 0; \tag{4}$$

$$\left(EJy\right) = 0;\ y'(0) = 0,\ \text{при}\ x = l\ \text{на свободном конце.} \tag{5}$$

Приведем уравнение (3) к виду, удобному для применения МИМ. Для этого проинтегрируем (3) от x до l дважды с выполнением краевых условий.

В данном случае это предполагает сведение неизвестных ко второй производной, т. е. $y''(x)$. Итог проинтегрируем опять дважды, но уже от 0 до x и также опираясь на граничные условия.

В результате уравнение (3) приобретает вид интегро-дифференциального уравнения:

$$\begin{gathered} EJ_i y_i'' + w^2\int_{x_i}^{l}dx\int_{x_i}^{l} m_{x_i}dx\int_0^{x_i}dx\int_0^{x_i} y_i''dx = \\ = -P\left(l - x_i\right),\left(i = 1,n\right). \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь распределенная нагрузка q отсутствует. Колебания возникают под воздействием силы P на конце балки.

Выражение неизвестных через вторые неизвестные заставило записать y'' также через двойной интеграл, т. е.

$$y_i = \int_0^x dx\int_0^x y''dx. \tag{7}$$

1 Предполагаем, что проведена тензометрия с шагом по длине конструкции. Очевидно, что количества точек в эксперименте и сечений в численном методе не совпадают, но за счет экстраполяции данных измерений полагаем во всех расчетных точках значения соответствующих величин известными.

Система (6) с помощью интегрирующих матриц первого и второго типа принимает вид

$$\left[A\right]\left\{y''\right\} = \left\{M\right\}, \tag{8}$$

где $[A] = \left(\left[EJ\right] - w^2\left[J_2\right]^2\left[m\right]\left[J_1\right]^2\right)\left\{y''\right\} = M;$

$[EJ]$ – диагональная матрица значений EJ в расчетных сечениях;

$[J_1]$ – интегрирующая матрица первого рода, численный аналог интеграла

$$\int_0^{x_i}\ldots dx \to \left[J_1\right]*\ldots;$$

$[J_2]$ – интегрирующая матрица второго рода, численный аналог

$$\int_{x_i}^{L}\ldots dx \to \left[J_2\right]*\ldots;$$

$[m]$ – диагональная матрица погонной массы;

$\{y''\}$, $\{M\}$ – столбцы искомых и заданных величин в расчетных сечениях.

Решая (8), запишем для прямой задачи:

$$\left\{y''\right\} = \left[EJ\right]^{-1}\left\{M\right\}. \tag{9}$$

Так как по условиям примера требуется определить реальную изгибную жесткость, соответствующую экспериментальным данным, проделаем с представленными ранее зависимостями следующие операции:

а) умножим матрицу $[EJ]$ на столбец $\{y''\}$ и в силу диагональности структуры EJ запишем

$$\left[EJ\right]\left\{y''\right\} = \left[y''\right]\left\{EJ\right\},$$

сделав из EJ столбец неизвестных;

б) оставшуюся часть матрицы $[A]$ превращаем в столбец после умножения на столбец известных из эксперимента кривизн $\{y''_{\text{экс}}\}$, т. е.

$$w^2[J_2]^2[m]\,[J_1]^2\{y''_{\text{экс}}\} = \{A^*\}. \tag{10}$$

Очевидно, что интегрирование даже полученных с достаточно большими погрешностями составляющих вектора $\{y''\}$ не приведет к нарастанию ошибок результата, а наоборот, благодаря выравнивающим свойствам интеграла будет способствовать естественному для этой операции сглаживанию.

Итоговая зависимость для нахождения EJ запишется в виде

$$\left[y''_{\text{экс}}\right]\{EJ\} = \{M^*\}, \tag{11}$$

где $\{M^*\}=\{M\}+\{A^*\}$. Тогда интересующая нас изгибная жесткость будет

$$\{EJ\} = \left[y''_{\text{экс}}\right]^{-1}\{M^*\}. \tag{12}$$

Очевидно, что обращение матрицы $[y'']$ также несет опасность лавинообразного нарастания погрешности эксперимента из-за ошибок округления. Однако на основании исследования матриц, элементы которых подвержены ошибкам наблюдения [22], можно утверждать, что в нашем случае этого не произойдет, так как матрица кривизн диагональная и при обращении каждый ее элемент будет являться результатом деления $1/\{y''_{\text{экс}}\}$. Эта операция практически не увеличивает погрешность.

Совокупный результат от применения МИМ в данном примере приведен в табл. 1. Предполагаем, что измерения произведены с погрешностью 6–8%.

Анализ результатов показывает, что погрешности идентификации в процессе расчетов практически не растут с увеличением погрешностей измерений.

Все вышесказанное без особых сложностей переносится на случай кручений крыла.

Пример 2

Известно распределение угловых деформаций крыла при вынужденных крутильных колебаниях. Требуется определить его жесткость на кручение.

Условие равновесия инерционных сил в некотором сечении и приращения упругого крутящего момента в этом же сечении приводит к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[GJ_p(x)\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial x}\right]- -j(x)\frac{\partial^2\Phi(x,t)}{\partial t^2}=\mu\sin pt. \tag{13}$$

где G – модуль упругости материала на кручение;
J_p – полярный момент инерции сечения балки относительно оси вращения;
$j(x)$ – погонный полярный момент инерции массы относительно продольной оси;
$\Phi(x,t)$ – угол поворота какого-либо сечения крыла в момент t.

После разделения переменных t и x уравнение вынужденных гармонических колебаний балки имеет вид

$$\left(GJ_{\text{кр}}\varphi'\right)-p^2J_m\varphi=\mu. \tag{14}$$

Здесь $'$ – производная по x, т. е. $\varphi' = d\varphi/dx$; φ – угол закручивания; $GJ_{\text{кр}}$ – крутильная жесткость балки; p – частота, J_m – погонная масса момента инерции; μ – погонный крутящий момент.

Граничные условия:

$$\varphi(0)=0;$$
$$M_{\text{кр}}(l)=\left(GJ_{\text{кр}}\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x=l}=M. \tag{15}$$

Для решения задачи методом интегрирующих матриц предварительно уравнение (16) приводим к первой производной, интегрируя $\int_x^l\ldots dx$:

$$\left(GJ_{\text{кр}}\varphi'\right)_{x=l}-\left(GJ_{\text{кр}}\varphi'\right)-p^2\int_x^l J_m\varphi dx=\int_x^l\mu dx. \tag{16}$$

Здесь $(GJ_{\text{кр}}\varphi')_{x=1} = M_{\text{кр}}$ – это сосредоточенный момент на конце при $x = 1$.

Уравнение (16) принимает вид

$$-\left(GJ_{\text{кр}}\varphi'\right)-p^2\int_x^l J_m\varphi dx=\int_x^l\mu dx-M_{\text{кр}}. \tag{17}$$

Далее запишем очевидное соотношение

$$\int_0^x\varphi' dx={}^\circ\varphi\Big|_0^x={}^\circ\varphi(x)-\varphi(0)=\varphi(x)$$

Таблица 1

Результат восстановления переменной изгибной жесткости крыла *EJ* по кривизнам второго тона поперечных колебаний

№ сечения	y''	$EJ_{\text{исх}}$, Н · м^2	$EJ_{\text{иден}}$, Н · м^2	Погрешность идентификации, %
1	$-8{,}2\cdot10^{-6}$	$4{,}6\cdot10^5$	$5\cdot10\cdot10^5$	8,6
2	$-8{,}0\cdot10^{-6}$	$4{,}25\cdot10^5$	$4{,}6\cdot10^5$	8,2
3	$-4{,}5\cdot10^{-6}$	$4{,}0\cdot10^5$	$4{,}2\cdot10^5$	5
4	$2{,}3\cdot10^{-6}$	$3{,}7\cdot10^5$	$3{,}8\cdot10^5$	2,7
5	$7{,}0\cdot10^{-6}$	$3{,}4\cdot10^5$	$3{,}2\cdot10^5$	5,8
6	$8{,}5\cdot10^{-6}$	$3{,}1\cdot10^5$	$3{,}25\cdot10^5$	4,8
7	$9{,}2\cdot10^{-6}$	$2{,}8\cdot10^5$	$3{,}1\cdot10^5$	10
8	$10\cdot10^{-6}$	$2{,}5\cdot10^5$	$2{,}65\cdot10^5$	6
9	$6{,}0\cdot10^{-6}$	$2{,}2\cdot10^5$	$2{,}3\cdot10^5$	4,5
10	$1{,}0\cdot10^{-6}$	$1{,}9\cdot10^5$	$1{,}9\cdot10^5$	0

или просто φ (так как φ(0) = 0 из граничных условий (15)). Примем, что погонная нагрузка отсутствует, т. е. μ = 0.

Теперь (17) примет вид

$$-\left(GJ_{\text{кр}}\varphi'\right) - p^2\int_x^l J_m\varphi dx\int_0^x \varphi' dx = -M_{\text{кр}}. \qquad (18)$$

Система (18) в матричной форме с использованием интегрирующих матриц примет вид

$$[A]\{\varphi'\} = \{M\}. \qquad (19)$$

Здесь $[A]$ – квадратная матрица $n \times n$, значения которой находятся по формуле

$$[A] = [GJ] + p^2[J_2][J_m][J_1],$$

где $[GJ]$ – диагональная матрица значений жесткостей GJ в расчетных сечениях; $[J_1]$ – интегрирующая матрица первого рода, численный аналог интеграла от 0 до x_i; $[J_2]$ – интегрирующая матрица второго рода, численный аналог интеграла от x_i до l.

Решение уравнения (19) дает {φ′} для балки с переменными по длине параметрами.

Теперь перейдем к рассмотрению обратной задачи, т. е. определим GJ по известным из эксперимента {φ′}. Для этого уравнение (19) запишем немного по-другому:

$$\left([GJ] + p^2[J_2][J_m][J_1]\right)\{\varphi'\} = M\{e\}. \qquad (20)$$

Здесь $\{e\} = \begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$ – столбец единиц.

Затем, как и в примере 1, проведем некоторые преобразования для того, чтобы из системы (20) выразить искомую величину GJ. Раскрывая скобки и перенося в правую часть известные величины, получим:

$$[GJ]\{\varphi'\} = \{M\} - p^2[J_2][J_m][J_1\{\varphi'\}.$$

Эта же зависимость в более компактной форме при обозначении правой части через {K} примет вид

$$[GJ]\{\varphi'\} = \{K\}.$$

Теперь представим известную величину {φ′} в форме диагональной матрицы, а неизвестную GJ – как обычно, в виде столбца:

$$[\varphi']\begin{Bmatrix}GJ_1\\GJ_2\\\cdots\\GJ_n\end{Bmatrix} = \{K\}; \qquad (21)$$

$$\{GJ\} = [\varphi']^{-1}\{K\}.$$

При помощи записи (21) можно идентифицировать GJ по известным экспериментальным данным. Так как в решении используется интегральный метод, предполагаем, что зависимость решения от погрешностей, неизбежных в ходе реального эксперимента, меньше, чем при численном дифференцировании.

Учитывая погрешности в измерении углов поворота каждого сегмента около 5%, получаем значения GJ (табл. 2).

Таблица 2

Результат восстановления крутильной жесткости крыла GJ на базе вынужденных крутильных колебаний (первый тон)

№ сечения	$GJ_{\text{исход}}$, Н · м²	$GJ_{\text{идент}}$, Н · м²	Погрешность идентификации, %
1	272,112	286,43368844	5,26
2	272,112	272,11200103	0,00000000378
3	272,112	259,15428518	–4,76
4	272,112	265,40586844	–2,49
5	272,112	286,44093895	5,26
6	272,112	272,11199183	–0,00000003

Из табл. 2 следует, что предложенный метод вполне устойчив к погрешностям – максимальные погрешности расчета практически равны погрешностям измерений в эксперименте.

Выводы

Предложен подход к определению жесткости крыла по измеренным в эксперименте деформациям, когда его поведение, в частности при поперечных и крутильных колебаниях, можно моделировать прямой балкой. На примерах показано, что применение для решения обратной задачи метода интегрирующих матриц позволяет определять жесткость практически с точностью погрешности измерений. Данный подход может быть рекомендован в качестве эффективного инструмента нахождения изгибных и крутильных жесткостей, когда практически не требуется сглаживания результатов эксперимента.

Список источников

1. *Алифанов О.М.* Обратные задачи теплообмена. – М.: Машиностроение, 1988. – 280 с.
2. *Алифанов О.М.*, *Иванов Н.А.*, *Колесников В.А.* Методика и алгоритм определения температурных зависимостей теплофизических характеристик анизотропных материалов из решения обратной задачи // Вестник Московского авиационного института. 2012. Т. 19. № 5. С. 14–20. URL: https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=35690

3. *Алифанов О.М.*, *Иванов Н.А.*, *Колесников В.А.*, *Меднов А.Г.* Определение температурных зависимостей теплофизических характеристик анизотропных материалов из решения обратной задачи // Вестник Московского авиационного института. 2009. Т. 16. № 5. С. 247–254. URL: https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=12341
4. *Luo S., Jiang J., Zhang F.*, *Mohamed M.S.* Distributed Dynamic Load Identification of Beam Structures Using a Bayesian Method // Applied Sciences. 2023. Vol 13, No. 4, pp. 2537-2555. DOI: 10.3390/app13042537
5. *Itou H.*, *Kovtunenko V.A.*, *Nakamura G.*. Forward and inverse problems for creep models in viscoelasticity // Philosophical Transactions of the Royal Society A. 2024. Vol. 382. No. 2277: 20230295. DOI: 10.1098/rsta.2023.0295
6. *Алифанов О.М.*, *Артюхин Е.А.*, *Румянцев С.В.* Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена. – М.: Наука, 1988. – 285 с.
7. *Костин В.А.* Решение обратных задач прочности тонкостенных конструкций градиентным методом с привлечением сопряженных систем // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2002. № 3. С. 6–9.
8. *Костин В.А.*, *Валитова Н.Л.* Теория и практика прочностной отработки конструкций летательных аппаратов: Монография. – Казань: Изд-во Казанск. гос. техн. ун-та, 2024. – 140 с.
9. *Хуан Ш.*, *Костин В.А.*, *Лаптева Е.Ю.* Применение метода анализа чувствительности для решения обратной задачи ползучести кессона конструкции на основе модели суперэлементов // Вестник Московского авиационного института. 2018. Т. 25. № 3. С. 64–72. URL: https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=9581
10. *Nguyen H.D.*, *Khatir S.*, *Nguyen Q.B.* A Novel Method for the Estimation of the Elastic Modulus of Ultra-High Performance Concrete using Vibration Data // Engineering, Technology & Applied Science Research. 2024. Vol. 14. No. 4, pp. 15447–15453. (In Greek). DOI: 10.48084/etasr.7859
11. *Trivailo P.*, *Dulikravich S.D.*, *Sgarioto D.*, *Gilbert T.* Inverse problem of aircraft structural parameter estimation: Application of neural networks // Inverse Problems in Science and Engineering. 2006. Vol. 14. No. 4, pp. 351–363. DOI: 10.1080/17415970600573411
12. *Shi F.* Combining Finite Element Simulation to Analyse the Viscoelastic Mechanical Inverse Problem of Asphalt Pavement // Archives Des Sciences. 2024. Vol. 74. No. 4, pp. 57–66. DOI: 10.62227/as/74409
13. *Курченко Н.С.*, *Алексейцев А.В.* Идентификация силовых воздействий на несущую систему с использованием нейросетевых технологий // Инженерный вестник Дона. 2023. № 9. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n9y2023/8656
14. *Пархомовский Я.М.* О двух задачах идентификации, встречающихся при расчетах на прочность // Труды ЦАГИ. Выпуск 1999. М.: Издательский отдел ЦАГИ, 1979. – 16 с.
15. *Пархомовский Я.М.* Замечания об определении жесткости балки по заданным деформациям и о решении некоторых интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Ученые записки ЦАГИ. 1987. Т.18. №5. С. 102–105.
16. *Вахитов М.Б.* Интегрирующие матрицы – аппарат численного решения дифференциальных уравнений строительной механики // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 1966. №3. С. 50–61.
17. *Вахитов М.Б.*, *Фирсов В.А.* Численные методы решения одномерных задач строительной механики летательных аппаратов: Учеб. пособие. – Казань: Изд-во КАИ, 1985. – 66 с.
18. *Даутов Р.З.*, *Паймушин В.Н.* О методе интегрирующих матриц решения краевых задач для обыкновенных уравнений четвертого порядка // Известия высших учебных заведений. Математика. 1996. № 10. С. 13–25.
19. *Торопов М.Ю.*, *Костин В.А.* Об уточнении жесткостных характеристик конструкций по результатам прочностного эксперимента // Актуальные проблемы авиационных и аэрокосмических систем: процессы, модели, эксперимент. 1999. № 1(7). С. 71–76.
20. *Воскобойников Ю.Е.*, *Боева В.А.* Дескриптивное сглаживание сигнала в одном алгоритме непараметрической идентификации технических систем // Современные наукоемкие технологии. 2020. № 7. С. 24–28. DOI: 10.17513/snt.38128
21. *Воскобойников Ю.Е.*, *Боева В.А.* Выбор параметров сглаживания бикубического сплайна в задачах непараметрической идентификации // Современные наукоемкие технологии. 2022. № 2. С. 26–32. DOI: 10.17513/snt.39032
22. *Форсайт Дж.*, *Малькольм М.*, *Моулер К.* Машинные методы математических вычислений / Пер. с англ. Х.Д. Икрамова. – М.: Мир, 1980. – 280 с.

References

1. Alifanov OM. *Obratnye zadachi teploobmena* (Inverse problems of heat transfer). Moscow: Mashinostroenie; 1988. 280 p.
2 . Alifanov OM, Ivanov NA, Kolesnikov VA. Methodology and algorithm determining the temperature dependence of thermal and physical characteristics for anisotropic materials basing on an inverse problem solution. *Aerospace MAI Journal*. 2012;19(5):14-20. URL: https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=182553
3. Alifanov OM, Ivanov NA, Kolesnikov VA, Mednov AG. A technique to evaluate temperature dependences of thermal and physical characteristics for anisotropic materials basing on an inverse problem solution. *Aerospace MAI Journal*. 2009;16(5):247-254. URL: https://vestnikmai.ru/eng/publications.php?ID=12341

4. Luo S, Jiang J, Zhang F, Mohamed MS. Distributed Dynamic Load Identification of Beam Structures Using a Bayesian Method. *Applied Sciences*. 2023;13(4):2537. DOI: 10.3390/app13042537
5. Itou H, Kovtunenko VA, Nakamura G. Forward and inverse problems for creep models in viscoelasticity. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. 2024;382(2277): 20230295. DOI: 10.1098/rsta.2023.0295
6. Alifanov OM, Artyukhin EA, Rumyantsev SV. *Ekstremal'nye metody resheniya nekorrektnykh zadach i ikh prilozheniya k obratnym zadacham teploobmena* (Extreme methods for solving ill-posed problems and their applications to inverse problems of heat transfer). Moscow: Nauka; 1988. 285 p.
7. Kostin VA. Solution of Inverse Problems of Thin-Walled Structure Strength by the Gradient Method with the Aid of Conjugate Systems. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Aviatsionnaya tekhnika*. 2002;(3):6-9.
8. Kostin VA, Valitova NL. *Teoriya i praktika prochnostnoi otrabotki konstruktsii letatel'nykh apparatov* (Theory and practice of strength development of aircraft structures). Kazan: KGTU; 2024. 140 p.
9. Huang S, Kostin VA, Lapteva EY. Application of the sensitivity analysis method for the solution of the inverse creep problem of a wingbox structure on the basis of super-element model. *Aerospace MAI Journal*. 2018;25(3):64-72. URL: https://vestnikmai.ru/eng/publications.php?ID=95811
10. Nguyen HD, Khatir S, Nguyen QB. A Novel Method for the Estimation of the Elastic Modulus of Ultra-High Performance Concrete using Vibration Data. *Engineering, Technology & Applied Science Research*. 2024;14(4):15447–15453. (In Greek). DOI: 10.48084/etasr.7859
11. Trivailo P, Dulikravich SD, Sgarioto D, Gilbert T. Inverse problem of aircraft structural parameter estimation: Application of neural networks. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2006;14(4):351-363. DOI: 10.1080/17415970600573411
12. Shi F. Combining Finite Element Simulation to Analyse the Viscoelastic Mechanical Inverse Problem of Asphalt Pavement. *Archives Des Sciences*. 2024;74(4):57-66. DOI: 10.62227/as/74409
13. Kurchenko NS, Alekseitsev AV. Identification of force impacts on the carrier system using neural network technologies. *Inzhenernyi vestnik Dona*. 2023;(9). URL: ivdon.ru/magazine/archive/n9y2023/8656
14. Parkhomovskii YM. On two identification problems encountered in strength calculations. In: *Trudy TsAGI*. Issue 1999. Moscow: Izdatel'skii otdel TsAGI; 1979. 16 p.
15. Parkhomovskii YM. Remarks on determining the rigidity of a beam from given deformations and on solving some integral Volterra equations of the first kind. *Uchenye zapiski TsAGI*. 1987;18(5):102-105.
16. Vakhitov MB. Integrating matrices is a technique for numerically solving differential equations of structural mechanics. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Aviatsionnaya tekhnika*. 1966;(3):50-61.
17. Vakhitov MB, Firsov VA. *Chislennye metody resheniya odnomernykh zadach stroitel'noi mekhaniki letatel'nykh apparatov* (Numerical methods for solving one-dimensional problems of structural mechanics of aircraft). Kazan: KAI; 1985. 66 p.
18. Dautov RZ, Paimushin VN. On the method of integrating matrices for solving boundary value problems for ordinary fourth-order equations. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 1996;(10):13-25.
19. Toropov MY, Kostin VA. On the refinement of the stiffness characteristics of structures based on the results of a strength experiment. *Aktual'nye problemy aviatsionnykh i aerokosmicheskikh sistem: protsessy, modeli, eksperiment*. 1999;(1):71-76.
20. Voskoboinikov YE, Boeva VA. Descriptive signal smoothing in a single algorithm nonparametric identification of technical systems. *Sovremennye naukoemkie tekhnologii*. 2020;(7):24-28. DOI: 10.17513/snt.38128
21. Voskoboinikov YE, Boeva VA. Choice of bicubic spline smoothing parameters in problems of nonparametric identification. *Sovremennye naukoemkie tekhnologii*. 2022;(2):26-32. DOI: 10.17513/snt.39032
22. Forsythe GE, Malcolm MA, Moler CB. *Computer methods for mathematical computations*. Prentice Hall; 1977. 270 p.

Статья поступила в редакцию 14.10.2024; одобрена после рецензирования 07.11.2024; принята к публикации 11.11.2024.
The article was submitted on 14.10.2024; approved after reviewing on 07.11.2024; accepted for publication on 11.11.2024.