

МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 521

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=184049>

EDN: <https://www.elibrary.ru/ZEYOUN>

**МЕДЛЕННАЯ ЭВОЛЮЦИЯ КРУГОВОЙ ОРБИТЫ В ОДНОЙ
МОДЕЛИ ВЯЗКОУПРУГОГО МЕРКУРИЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ
ВЕНЕРЫ**

Михаил Юрьевич Баркин¹, Анастасия Павловна Горбачевская²✉

^{1,2}Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,

Москва, Российская Федерация

¹barkin@yandex.ru

²gorbachevskayaap@student.bmstu.ru ✉

Аннотация. В статье рассматривается эволюция поступательно-вращательного движения планеты Меркурий под воздействием гравитационного притяжения Солнца и Венеры. Основное внимание уделяется анализу динамики Меркурия с использованием переменных Делоне-Андуайе, что позволяет более точно описать его орбитальное движение и вращение. Для решения системы уравнений, описывающих данное движение, применяется метод разделения движений, предложенный В.Г. Вильке. В работе рассматриваются два основных сценария: первый включает влияние возмущений, вызванных гравитационным полем Венеры, на динамику Меркурия, второй — ситуацию, когда притяжение Венеры считается

пренебрежимо малым. Анализ этих случаев позволяет выявить ключевые аспекты, влияющие на эволюцию орбитального движения Меркурия и его вращения, а также оценить степень влияния соседних планет на его динамику. Результаты исследования могут быть полезны для более глубокого понимания механизмов, управляющих движением планет в солнечной системе, а также для разработки более точных моделей, применяемых в небесной механике. Данная работа также имеет практическое значение для планирования космических миссий, связанных с изучением Меркурия и его взаимодействия с другими телами солнечной системы. Таким образом, статья представляет собой значимый вклад в изучение динамики небесных тел и открывает новые перспективы для дальнейших исследований в области небесной механики.

Ключевые слова: Делоне-Андуйе, Меркурий, круговая орбита, планета, Венера, метод разделения движения, Солнце

Для цитирования: Баркин М.Ю., Горбачевская А.П. Медленная эволюция круговой орбиты в одной модели вязкоупругого Меркурия под действием Венеры // Труды МАИ. 2025. № 140. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=184049>

MECHANICS

Original article

THE SLOW EVOLUTION OF THE CIRCULAR ORBIT IN A MODEL OF THE VISCOELASTIC MERCURY UNDER THE INFLUENCE OF VENUS

Mikhail Yu. Barkin¹, Anastasia P. Gorbachevskaya²✉

^{1,2}Bauman Moscow State Technical University,
Moscow, Russian Federation

¹barkin@yandex.ru

²gorbachevskayaap@student.bmstu.ru✉

Abstract. The article discusses the evolution of the translational and rotational motion of the planet Mercury under the influence of the gravitational attraction of the Sun and Venus. The primary focus is on analyzing Mercury's dynamics using DeLeon-Andoyer variables, which allows for a more accurate description of its orbital motion and rotation. To solve the system of equations describing this motion, the method of separation of motions proposed by V.G. Vilke is applied. The study examines two main scenarios: the first includes the influence of perturbations caused by Venus's gravitational field on Mercury's dynamics, while the second considers the situation where the attraction of Venus is deemed negligible. Analyzing these cases helps to identify key aspects affecting the evolution of Mercury's orbital motion and its rotation, as well as to assess the degree of influence that neighboring planets have on its dynamics. It has been shown that the stationary motion of Mercury in the gravitational field of the Sun corresponds to the movement of its center of mass along a circle and rotation around the center of mass with an angular velocity coinciding with the orbital angular velocity. Next, a study was conducted on the slow evolution of Mercury's circular orbit under the influence of disturbances from Venus. It has been shown that the angular momentum of Mercury decreases and with it the radius of the orbit decreases. Modern spacecraft such as the Mercury exploration missions, including MESSENGER and BepiColombo, use sophisticated mathematical models and numerical methods to calculate orbits and

maneuvers that take into account a variety of factors, including gravitational interactions with other planets. Previously known methods, such as Laplace's method or Kepler's method, provided simpler approaches that could not always account for dynamic changes in the system. Thus, the results of our research can be useful for further improvement of models used in space technology, as well as for improving the accuracy of calculations necessary for the successful completion of complex space missions. The results of the research may be useful for a deeper understanding of the mechanisms governing the motion of planets in the solar system, as well as for developing more accurate models used in celestial mechanics. This work also has practical significance for planning space missions related to the study of Mercury and its interactions with other bodies in the solar system. Thus, the article represents a significant contribution to the study of celestial dynamics and opens new perspectives for further research in the field of celestial mechanics.

Keywords: Deleon-Andoyer, Mercury, circular orbit, planet, Venus, method of separation of motions, Sun

For citation: Barkin M.Yu., Gorbachevskaya A.P. The slow evolution of the circular orbit in a model of the viscoelastic Mercury under the influence of Venus. *Trudy MAI*. 2025. No. 140. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng//published.php?ID=184049>

1. Введение.

Изучение движения планет в солнечной системе представляет собой важную задачу как для небесной механике, так и для практических приложений в авиационно-ракетной космической технике. Понимание динамики небесных тел

позволяет не только предсказывать их орбиты, но и разрабатывать эффективные стратегии для космических миссий, включая запуск и маневрирование космических аппаратов. В данной работе мы сосредоточимся на эволюции поступательно-вращательного движения Меркурия под действием гравитационного притяжения Солнца и Венеры. Будем использовать метод разделения движений и усреднения для исследования эволюции механических систем [1-2]. Ранее указанным методом была решена задача о поступательно-вращательном движении спутника в центральном ньютоновском поле сил [3] и изучено вращательное движение динамически симметричного спутника с вязкоупругими стержнями на круговой орбите [4].

Рассмотрим плоскую задачу о движении деформируемого Меркурия в поле притяжения Солнца и Венеры. Примем Солнце за неподвижный притягивающий центр, а планету Венера будем считать материальной точкой, описывающей не возмущаемую круговую орбиту вокруг Солнца.

2. Постановка задачи. Уравнения движения.

Сформулируем невозмущённую задачу: Меркурий представляется абсолютно твёрдым однородным изотропным шаром, вращающимся по круговой орбите радиуса r вокруг Солнца, а также вращающегося вокруг нормали к орбите вокруг центра масс с постоянной угловой скоростью ω . Венера вращается вокруг Солнца по круговой орбите, которая не возмущается под воздействием притяжения Меркурия [5-7].

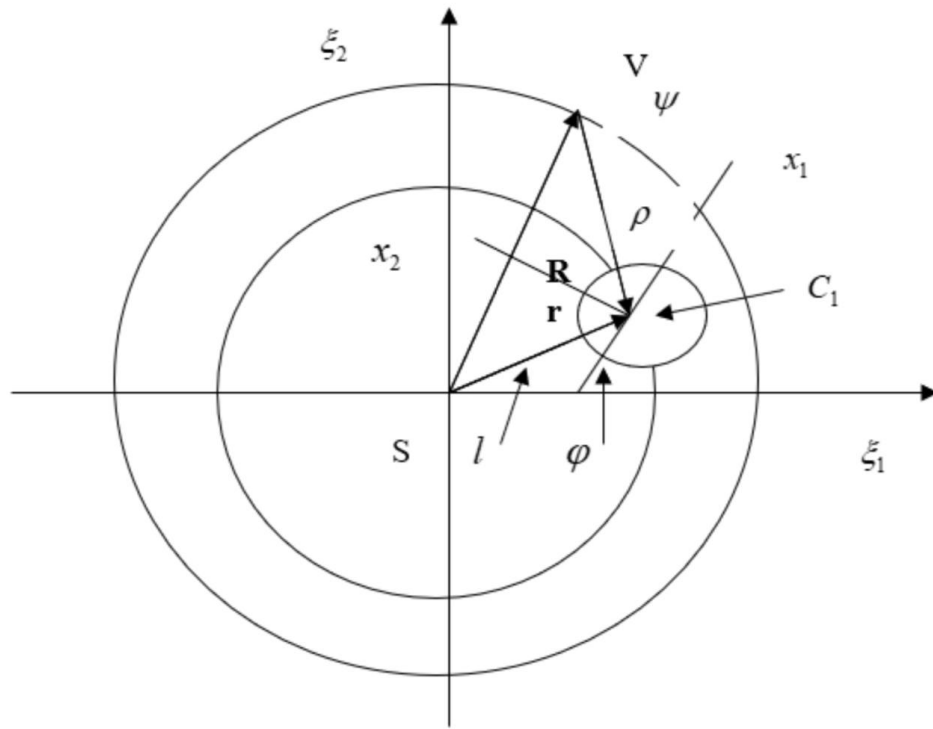


Рис. 1.

Далее, как показано на рисунке 1, R, ψ – радиус круговой орбиты Венеры и её угловое положение на орбите, M_v – масса Венеры. Здесь система координат $S\xi_1\xi_2$ неподвижная, в центре которой находится притягивающий центр – Солнце, а Оси $C_1x_1x_2$ жёстко связаны с Меркурием [8-12].

Для описания движения воспользуемся каноническими переменными Делоне – Андуайе (L, l, I, φ) и каноническими переменными p, u . Гамильтониан невозмущённой задачи в переменных Делоне – Андуайе имеет вид:

$$H_0 = \frac{I^2}{2A} - \frac{\gamma^2 m^3}{2L^2}, \quad \gamma = fM_S, \quad (1)$$

Здесь $(L, l), (I, \varphi)$ – канонические переменные Делоне-Андуайе, m - масса Меркурия, γ, f, M_S – гравитационный параметр Солнца, универсальная гравитационная постоянная и масса Солнца соответственно. Возмущения

гамильтониана (1) возникают в случае отказа от модели Меркурия как абсолютно твёрдого тела из-за его собственного вращения и гравитационного притяжения Венерой [13-15].

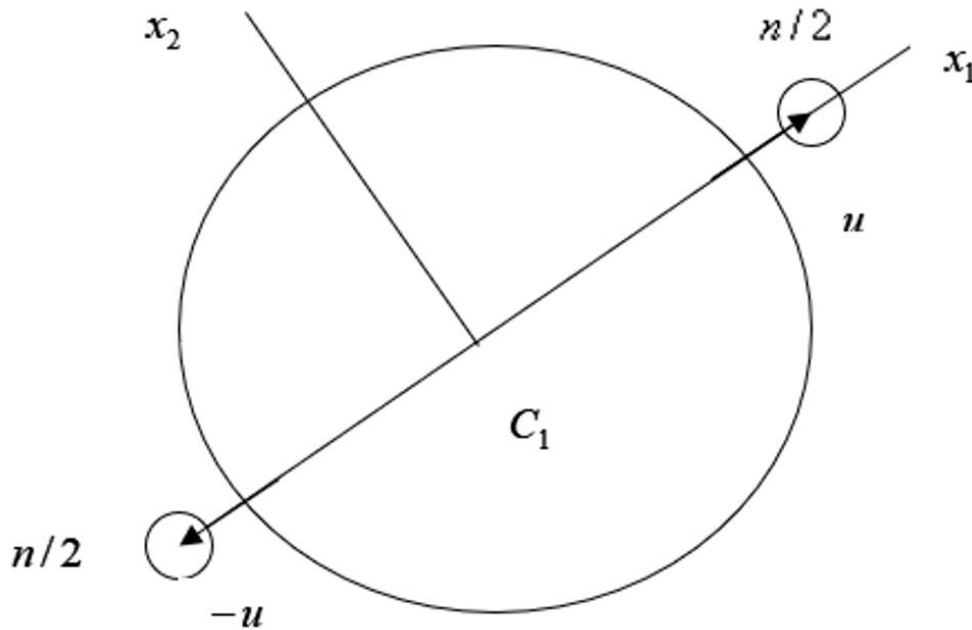


Рис. 2.

Будем моделировать упругие свойства оболочки Меркурия двумя массами $n/2$, рисунок 2, расположенными на концах диаметра, лежащего в плоскости орбиты и совпадающего с осью C_1x_1 . Массы могут перемещаться вдоль диаметра на одинаковые величины u и $(-u)$ различных знаков. Перемещения масс вызывают деформации пружин, потенциальная энергия которых равна $ku^2/2$, где k - коэффициент жёсткости эквивалентных пружин. Будем считать жёсткости пружин достаточно большими, а перемещения масс малыми, т.е. $|u|/a \ll 1$, где a - радиус Меркурия. Эта модель представляет собой несколько упрощённый вариант более

сложной модели с вязкоупругими стержнями [3], но при этом она вполне подходит для моделирования вязкоупругих свойств планеты. Модель основана на классических принципах небесной механики и механики твердых тел, включая уравнения движения и методы, такие как метод разделения движений и усреднения, предложенный В.Г. Вильке [2]. Эти методы обеспечивают надежную основу для анализа динамики небесных тел. Тензор инерции Меркурия относительно системы координат $C_1 x_1 x_2$ имеет диагональный вид:

$$J = \text{diag}\{A, A + n(2au + u^2)\}.$$

Функция Гамильтона возмущенной задачи равна:

$$H = \frac{I^2}{A} \left(\frac{1}{2} - \frac{nau}{A} \right) - \frac{\gamma^2 m^3}{2L^2} + \frac{p^2}{2n} + \frac{ku^2}{2} - \frac{\gamma nau}{r^3} [2 - 3 \sin^2(\varphi - l)] - \frac{\varepsilon \gamma m}{\rho} - \frac{\varepsilon \gamma nau}{\rho^3} [2 - 3 \sin^2(\psi - \varphi)], \quad (2)$$

$$r = L^2 \gamma^{-1} m^{-2}, \quad \rho = [R^2 + L^4 \gamma^{-2} m^{-4} - 2RL^2 \gamma^{-1} m^{-2} \cos(\psi - l)]^{1/2}, \quad \varepsilon = \frac{M_V}{M_S},$$

где M_V – масса Венеры. В выражении гамильтониана (2) опущены члены второго порядка малости, содержащие u^2 . Вязкие силы, возникающие при деформациях Меркурия, примем равными $-\chi k \dot{u}$, где χ – коэффициент вязкости.

Канонические уравнения движения, порождаемые гамильтонианом (2), имеют вид:

$$\dot{l} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -3\gamma nau \left[\frac{\sin 2(\varphi - l)}{r^3} + \frac{\varepsilon \sin 2(\varphi - \psi)}{\rho^3} \right], \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial I} = \frac{I}{A} \left(1 - \frac{2nau}{A} \right),$$

$$\dot{l} = -\frac{\partial H}{\partial l} = -3\gamma nau \left[\frac{\sin 2(l - \varphi)}{r^3} + \frac{\varepsilon \sin 2(l - \psi)}{\rho^3} \right] - \quad (3)$$

$$-\frac{\varepsilon RL^2}{m\rho^5} \sin 2(l - \psi) - \frac{3\varepsilon RL^2}{m^2\rho^5} \sin(l - \psi)[2 - 3 \sin^2(l - \psi)],$$

$$i = \frac{\partial H}{\partial L} = \frac{\gamma^2 m^3}{L^3} + \frac{6\gamma^4 m^6 n a u}{L^7} [2 - 3 \sin^2(\varphi - l)] +$$

$$+ \frac{2\varepsilon L}{\rho^3 m} \left\{ 1 + \frac{3n a u}{\rho^2} [2 - 3 \sin^2(\psi - \varphi)] \right\} \left[\frac{L^2}{\gamma m^2} - R \cos(\psi - l) \right],$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial u} = -k u - \chi k \dot{u} + \frac{\gamma n a}{r^3} [2 - 3 \sin^2(\varphi - l)] + \frac{\varepsilon \gamma n a}{\rho^3} [2 - 3 \sin^2(\varphi - \psi)],$$

$$\dot{u} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{n}.$$

Ω, ϖ – орбитальные угловые скорости Меркурия и Венеры, а ω – собственная угловая скорость вращения Меркурия вокруг его центра масс.

3. Метод разделения движений и усреднения

Система имеет, вообще говоря, два малых параметра: первый параметр обратно пропорционален жёсткости пружин двух масс, связанных с оболочкой, и второй – параметр ε , связанный с возмущениями от гравитационного поля Венеры.

Эволюция переменных “действие” будет определяться диссипативными силами, возникающими при перемещениях масс, т.е. с \dot{u} .

Полагая $\chi/\min(\omega, \Omega, \varpi) \ll 1, \sqrt{k/n} \gg \min(\omega, \Omega, \varpi)$ и используя метод разделения движений, найдем приближённое решение двух последних уравнений системы (3) в виде:

$$u \approx k^{-1} (1 - \chi D_t) \left\{ \frac{\gamma n a}{r^3} [2 - 3 \sin^2(\varphi - l)] + \frac{\varepsilon \gamma n a}{\rho^3} [2 - 3 \sin^2(\varphi - \psi)] \right\} =$$

$$= \frac{\gamma n a}{k r^3} [2 - 3 \sin^2(\varphi - l) + 3\chi(\omega - \Omega) \sin 2(\varphi - l)] +$$

(4)

$$\begin{aligned}
& + \frac{\varepsilon \gamma n a}{k \rho^3} [2 - 3 \sin^2(\varphi - \psi) + 3 \chi(\omega - \varpi) \sin 2(\varphi - \psi)] - \\
& - \frac{6 \chi \varepsilon n a R L^2}{k m^2 \rho^5} (\varpi - \Omega) [2 - 3 \sin^2(\varphi - \psi)] \sin(\psi - l).
\end{aligned}$$

Здесь D_t – оператор дифференцирования по времени функций, являющихся решениями невозмущённой системы уравнений. Функция (4) описывает вынужденные движения масс под влиянием гравитационных и центробежных сил инерции в неинерциальной системе координат, связанной с Меркурием. Собственные колебания масс считаются затухшими под воздействием диссипативных сил.

На первом этапе исследования эволюции движения Меркурия пренебрежем воздействием притяжения Венеры, положив в уравнениях (3), (4) $\varepsilon = 0$. В результате получим для почти круговых орбит соотношения:

$$\begin{aligned}
\dot{L} = -\dot{I} &= -3 \gamma n a u \frac{\sin 2(l - \varphi)}{r^3}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial I} = \frac{I}{A} \left(1 - \frac{2 n a u}{A} \right), \\
i &= \frac{\gamma^2 m^3}{L^3} + \frac{6 \gamma^4 m^6 n a u}{L^7} [2 - 3 \sin^2(\varphi - l)], \\
n \ddot{u} &= -k u - \chi k \dot{u} + \frac{\gamma n a}{r^3} [2 - 3 \sin^2(\varphi - l)].
\end{aligned} \tag{5}$$

Решение последнего уравнения представим согласно асимптотическому методу [1,2] в виде:

$$\begin{aligned}
u &\approx k^{-1} (1 - \chi D_t) \left[\frac{\gamma n a}{r^3} 2 - 3 \sin^2(\varphi - l) \right] = \\
&= \frac{\gamma n a}{k r^3} [2 - 3 \sin^2(\varphi - l) + 3 \chi(\omega - \Omega) \sin 2(\varphi - l)].
\end{aligned} \tag{6}$$

Далее необходимо подставить функцию (6) в правые части оставшихся уравнений и найти их решение, тем самым, определив эволюцию медленных переменных L, I и поправки в частоты ω, Ω .

$$\begin{aligned} \dot{L} = -\dot{I} = & -3\gamma na \frac{\sin 2(l - \varphi) \gamma na}{r^3} \frac{\gamma na}{kr^3} [2 - 3 \sin^2(\varphi - l) + \\ & + 3\chi(\omega - \Omega) \sin 2(\varphi - l)] = \frac{-3\gamma^2 n^2 a^2}{kr^6} \times \\ & \times [2 \sin 2(l - \varphi) - 3 \sin 2(l - \varphi) \sin^2(\varphi - l) + 3\chi(\omega - \Omega) \sin^2 2(\varphi - l)] \end{aligned}$$

Уравнения для переменных “действие” после усреднения по разности быстрых переменных $\varphi - l$ представляется в виде:

$$\dot{L} = -\dot{I} = \frac{9\chi\gamma^2 n^2 a^2}{kr^6} \left(\frac{I}{A} - \frac{\gamma^2 m^3}{L^3} \right). \quad (7)$$

Из уравнения (7) следует, что стационарное движение Меркурия в поле тяготения Солнца соответствует движению его центра масс по окружности и вращению вокруг центра масс с угловой скоростью, совпадающей с орбитальной угловой скоростью.

4. Построение возмущенной системы уравнений движения

Допустим, что этот этап движения завершился, и Меркурий движется, как описано выше. Положим в уравнениях (3), (4) $\varphi = l \Rightarrow \omega = \Omega$ и исследуем медленную эволюцию радиуса круговой орбиты Меркурия под действием возмущений со стороны Венеры. Уравнение для переменных L, u в системе (3) примут вид:

$$\dot{L} = -\frac{3\varepsilon\gamma na u \sin 2(l - \psi)}{\rho^3} - \frac{\varepsilon RL^2}{m\rho^5} \sin 2(l - \psi) -$$

$$-\frac{3\varepsilon RL^2}{m^2 \rho^5} \sin(l - \psi)[2 - 3 \sin^2(l - \psi)], \quad (8)$$

$$n\ddot{u} = -ku - \chi k\dot{u} + \frac{\varepsilon \gamma n a}{\rho^3} [2 - 3 \sin^2(l - \psi)].$$

Далее из второго уравнения системы (8) найдем согласно (4) закон вынужденного движения грузов:

$$\begin{aligned} u &\approx k^{-1}(1 - \chi D_t) \left\{ \frac{\varepsilon \gamma n a}{\rho^3} [2 - 3 \sin^2(l - \psi)] \right\} = \\ &= \frac{\varepsilon \gamma n a}{k \rho^3} [2 - 3 \sin^2(l - \psi) + 3\chi(\Omega - \varpi) \sin 2(l - \psi)] - \\ &\quad - \frac{6\chi \varepsilon n a R L^2}{k m^2 \rho^5} (\Omega - \varpi) [2 - 3 \sin^2(l - \psi)] \sin(l - \psi). \end{aligned} \quad (9)$$

Подставим переменную u согласно соотношению (9) в уравнение (8) и усредним его правую часть по переменной $l - \psi$. Два вторых слагаемых в правой части уравнения (8) дадут в среднем нуль, так как они являются нечётными функциями переменной $l - \psi$. Первое слагаемое в правой части уравнения (8) после подстановки в него функции u , определенной в (9), будет содержать два члена с множителем χ , определяющем диссипацию энергии, и один член без этого множителя. Заметим, что этот член является нечётной функцией $l - \psi$ и его среднее равно нулю.

После усреднения оставшихся членов получим уравнение:

$$\langle \dot{L} \rangle = -Q \left\langle L^2 \frac{[2 - 3 \sin^2(l - \psi)] \sin 2(l - \psi)}{\rho^5} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{[2 - 3 \sin^2(l - \psi)]}{\rho^3} \right\} \right\rangle, \quad (10)$$

$$Q = \frac{3\chi\varepsilon^2\gamma n^2 a^2 R}{km^2}$$

Здесь угловые скобки означают операцию усреднения по переменной $l - \psi$. Сохраняя обозначения для среднего медленной переменной L , представим уравнение (10) в виде:

$$\begin{aligned} \dot{L} &= -QL^2(\Omega - \varpi)[F_1(L) + F_2(L)] \\ F_1(L) &= 3 \left\langle \frac{[2 - 3 \sin^2(l - \psi)] \sin^2 2(l - \psi)}{\rho^8} \right\rangle \\ F_2(L) &= \frac{3RL^2}{\gamma m^2} \left\langle \frac{[2 - 3 \sin^2(l - \psi)]^2 \sin 2(l - \psi) \sin(l - \psi)}{\rho^{10}} \right\rangle \end{aligned} \quad (11)$$

$$r = L^2\gamma^{-1}m^{-2}, \rho = [R^2 + L^4\gamma^{-2}m^{-4} - 2RL^2\gamma^{-1}m^{-2} \cos(\psi - l)]^{1/2}.$$

Ввиду сложности полученных функций их усреднить придётся численно.

Далее мы воспользуемся системой компьютерной алгебры Wolfram Mathematica.

Функции $F_1(L), F_2(L)$ не выражаются через элементарные функции. Представим их

в виде:

$$F_1(L) = \frac{3}{(R^2 + r^2)^4} f_1(q), \quad F_2(L) = \frac{3Rr}{(R^2 + r^2)^5} f_2(q),$$

$$q = \frac{2Rr}{R^2 + r^2}, \quad 0 < q < 1,$$

$$f_1(q) = \left\langle \frac{[2 - 3 \sin^2(l - \psi)] \sin^2 2(l - \psi)}{[1 - q \cos(l - \psi)]^4} \right\rangle,$$

$$f_2(q) = \left\langle \frac{[2 - 3 \sin^2(l - \psi)]^2 \sin 2(l - \psi) \sin(l - \psi)}{[1 - q \cos(l - \psi)]^5} \right\rangle$$

$$F_1(L) + F_2(L) = \frac{3}{(R^2 + r^2)^4} \times$$

$$\times \left\{ \frac{[2 - 3 \sin^2(l - \psi)] \sin^2 2(l - \psi)}{[1 - q \cos(l - \psi)]^4} + \frac{q[2 - 3 \sin^2(l - \psi)]^2 \sin 2(l - \psi) \sin(l - \psi)}{2[1 - q \cos(l - \psi)]^5} \right\}.$$

Воспользуемся формулой синуса двойного угла

$$\frac{3}{(R^2 + r^2)^4} \left\{ \frac{[2 - 3 \sin^2(l - \psi)] 4 \sin^2(l - \psi) \cos^2(l - \psi)}{[1 - q \cos(l - \psi)]^4} + \frac{q[2 - 3 \sin^2(l - \psi)]^2 2 \cos(l - \psi) \sin^2(l - \psi)}{2[1 - q \cos(l - \psi)]^5} \right\}.$$

Вынесем общий знаменатель

$$\frac{3}{(R^2 + r^2)^4} \left\{ \frac{[2 - 3 \sin^2(l - \psi)] \sin^2(l - \psi) \cos(l - \psi)}{[1 - q \cos(l - \psi)]^4} (4 \cos(l - \psi) + \frac{q[2 - 3 \sin^2(l - \psi)]}{1 - q \cos(l - \psi)}) \right\}.$$

Приведем к общему знаменателю и упростим

$$\frac{3}{(R^2 + r^2)^4} \left\{ \frac{[2 - 3 \sin^2(l - \psi)] \sin^2(l - \psi) \cos(l - \psi)}{[1 - q \cos(l - \psi)]^4} \times \left(\frac{4 \cos(l - \psi) - q \cos^2(l - \psi) - q}{1 - q \cos(l - \psi)} \right) \right\}$$

Раскроем скобки

$$\frac{3}{(R^2 + r^2)^4} \left\{ \frac{[3 \cos^2(l - \psi) - 1](1 - \cos^2(l - \psi))}{[1 - q \cos(l - \psi)]^5} \times \frac{\cos(l - \psi)(4 \cos(l - \psi) - q \cos^2(l - \psi) - q)}{[1 - q \cos(l - \psi)]^5} \right\}$$

Пусть:

$$F(q) = \left(\frac{[3 \cos^2(l - \psi) - 1](1 - \cos^2(l - \psi))}{[1 - q \cos(l - \psi)]^5} \times \frac{\cos(l - \psi)(4 \cos(l - \psi) - q \cos^2(l - \psi) - q)}{[1 - q \cos(l - \psi)]^5} \right)$$

На графиках представлены значения функций $f_1(q), f_2(q), F(q)$ полученные в результате численного интегрирования с помощью системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica. Для построения графиков, используем чётность данных функций.

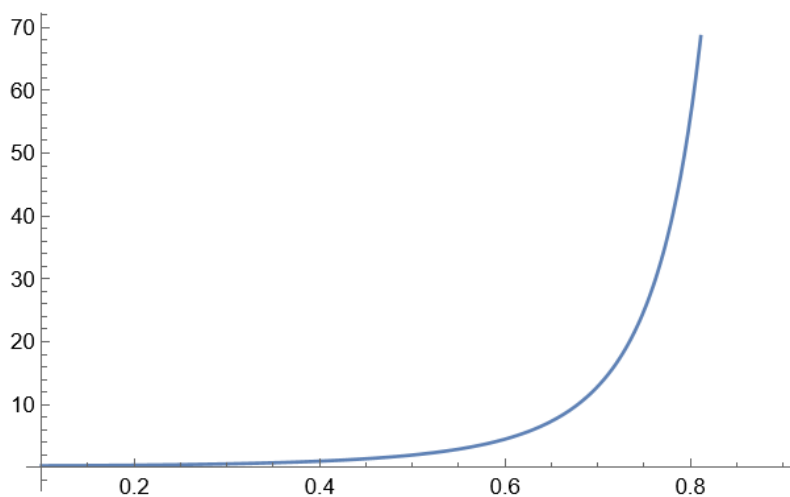


Рис. 3. График $f_1(q)$

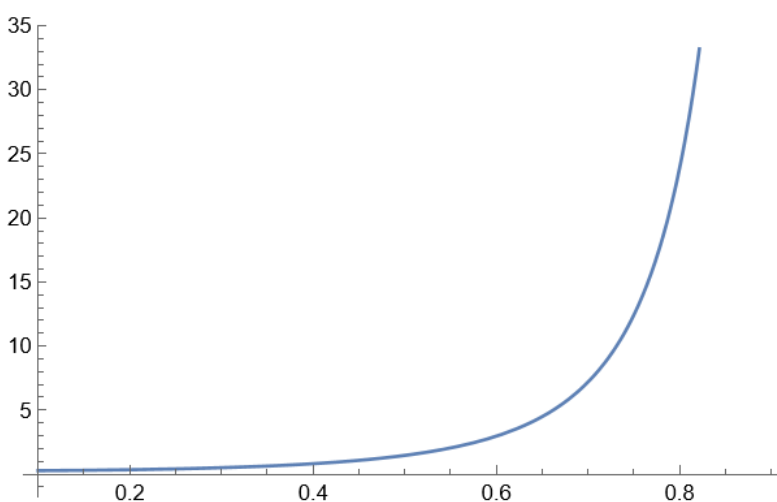


Рис. 4. График $f_2(q)$

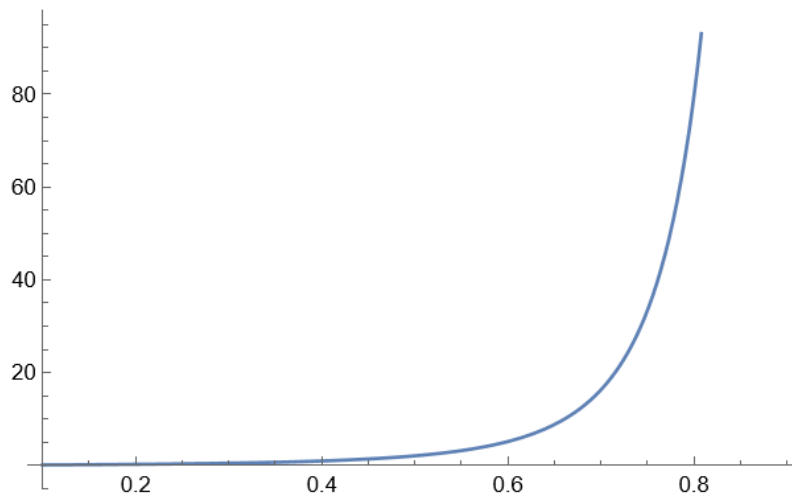


Рис. 5. График $F(q)$

5. Результаты

По графикам отчётливо видно, что сумма функций $F_1(L) + F_2(L)$ положительна. Это означает, что знак производной в уравнении (10) определяется знаком разности $\Omega - \omega$. Для Меркурия $\Omega > \omega$. Следовательно, момент количества движения Меркурия L убывает и вместе с ним уменьшается радиус орбиты $r = L^2 \gamma^{-1} m^{-2}$. Если бы Меркурий находился дальше от Солнца, нежели Венера, то его радиус орбиты под воздействием Венеры увеличивался.

Аналогичные утверждения справедливы в модельной задаче, когда вместо Венеры за не возмущаемую планету принимается Юпитер, который «расталкивает» от себя внутренние и внешние по отношению к нему планеты Солнечной системы.

Заключение

В данной работе исследована эволюция поступательно-вращательного движения Меркурия под действием гравитационного притяжения Солнца и Венеры. Модель Меркурия представляет собой, абсолютно твёрдый однородный изотропный

шар с двумя подвижными, упруго-взаимодействующими массами, расположенными на концах диаметра. Данная модель моделирует вязкоупругие свойства планеты. Солнце и Венера рассматривались как материальные точки. В работе использовался известный метод разделения движений и усреднения [16].

На первом этапе гравитационное притяжение Венеры не учитывалось. Было показано, что стационарное движение Меркурия в поле тяготения Солнца соответствует движению его центра масс по окружности и вращению вокруг центра масс с угловой скоростью, совпадающей с орбитальной угловой скоростью.

Далее было проведено исследование медленной эволюции круговой орбиты Меркурия под действием возмущений со стороны Венеры. Было показано, что момент количества движения Меркурия убывает и вместе с ним уменьшается радиус орбиты.

Современные космические аппараты, такие как миссии по исследованию Меркурия, включая «MESSENGER» и «BepiColombo», используют сложные математические модели и численные методы для расчета орбит и маневров, учитывающих множество факторов, включая гравитационные взаимодействия с другими планетами. Ранее известные методы, такие как метод Лапласа или метод Кеплера, предоставляли более простые подходы, которые не всегда могли учитывать динамические изменения в системе [17-21].

Таким образом, результаты нашего исследования могут быть полезны для дальнейшего совершенствования моделей, используемых в космической технике, а также для повышения точности расчетов, необходимых для успешного выполнения сложных космических миссий [22, 23]. Применение более современных методов и

моделей, основанных на полученных данных, может способствовать более глубокому пониманию динамики планет и улучшению проектирования космических аппаратов для изучения солнечной системы.

Список источников

1. Вильке В.Г. Аналитическая механика систем с бесконечным числом степеней свободы. Ч. 1,2. - М.: Изд-во МГУ, 1997. Ч. 1. – 216 с.; Ч. 2. – 160 с.
2. Вильке В.Г. Разделение движений и метод усреднения в механике систем с бесконечным числом степеней свободы // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 1983. № 5. С. 54–59.
3. Вильке В.Г., Шатина А.В. Эволюция движения симметричного спутника с гибкими вязкоупругими стержнями в центральном ньютоновском поле сил // Космические исследования. 1999. Т. 37. № 3. С. 289–295.
4. Шатина А.В. Эволюция вращательного движения симметричного спутника с гибкими вязкоупругими стержнями // Космические исследования. 2002. Т. 40. № 2. С. 178–192.
5. Попов И.П. О скорости сближения объектов при космических перелетах // Труды МАИ. 2023. № 128. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=171382>. DOI: [10.34759/trd-2023-128-01](https://doi.org/10.34759/trd-2023-128-01)
6. Бардин Б.С., Панёв А.С. О периодических движениях тела с подвижной внутренней массой по горизонтальной поверхности // Труды МАИ. 2015. № 84. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=62995>

7. Бардин Б.С., Савин А.А. Исследование орбитальной устойчивости плоских колебаний симметричного намагниченного спутника на круговой орбите // Труды МАИ. 2016. № 85. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=65212>
8. Barkin M.Yu., Shkapov P.M., Hanada H. The physical librations of the Moon caused by its tidal deformations // Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences. 2019. No. 2 (83). P. 4-16. DOI: [10.18698/1812-3368-2019-2-4-16](https://doi.org/10.18698/1812-3368-2019-2-4-16)
9. Баркин М.Ю. Приближенное решение задачи Лиувилля в переменных действие-угол для задачи Эйлера-Пуансо // Труды МАИ. 2014. № 72. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=47336>
10. Federico Lavorenti, Pierre Henri, Francesco Califano, et al. Solar-wind electron precipitation on weakly magnetized bodies: The planet Mercury // Astronomy and Astrophysics 674. 2023. DOI: [10.1051/0004-6361/202245711](https://doi.org/10.1051/0004-6361/202245711)
11. Морозов А.Ю. Алгоритм адаптивной интерполяции для решения задач небесной механики с интервальными неопределенностями // Труды МАИ. 2022. № 123. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=165501>. DOI: [10.34759/trd-2022-123-14](https://doi.org/10.34759/trd-2022-123-14)
12. Bardin B.S., Avdyushkin A.N. Stability of the collinear point L1 in the planar restricted photogravitational three-body problem in the case of equal masses of primaries // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. Vol. 927. DOI: [10.1088/1757-899x/927/1/012015](https://doi.org/10.1088/1757-899x/927/1/012015)
13. Холостова О.В., Сафонов А.И. О бифуркациях положений равновесия гамильтоновой системы в случаях двойного комбинационного резонанса третьего порядка // Труды МАИ. 2018. № 100. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=93292>

14. Сафонов А.И. О периодических движениях гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности кратного резонанса третьего порядка // Труды МАИ. 2022. № 126. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=168988>. DOI: [10.34759/trd-2022-126-02](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-02)
15. Авдюшкин А.Н. О параметрическом резонансе в окрестности точки либрации L1 плоской ограниченной фотогравитационной задачи трех тел // Труды МАИ. 2022. № 126. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=168989>. DOI: [10.34759/trd-2022-126-03](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-03)
16. Асланов В.С., Нерядовская Д.В. Тросовая система в коллинеарных точках либрации L1, L2 системы Марс-Фобос // Труды МАИ. 2022. № 122. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=163923>. DOI: [34759/trd-2022-122-02](https://doi.org/10.34759/trd-2022-122-02)
17. Аксенов Е.П. Теория движения искусственных спутников земли. - М.: Наука, 1977. - 360 с.
18. Попов И.П. К расчетам параметров пассивных гравитационных маневров межпланетных космических аппаратов // Труды МАИ. 2021. № 118. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=158210>. DOI: [10.34759/trd-2021-118-01](https://doi.org/10.34759/trd-2021-118-01)
19. Берников А.С., Петров Ю.А., Сергеев Д.В., Штокал А.О. Амортизация автоматических космических аппаратов при посадке на планеты и их спутники с учетом упругости конструкции посадочного устройства // Труды МАИ. 2021. № 121. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=162657>. DOI: [10.34759/trd-2021-121-10](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-10)
20. Воронов К.Е., Григорьев Д.П., Телегин А.М. Применение нейронной сети прямого распространения для локализации места удара микрочастиц о поверхность космического аппарата // Труды МАИ. 2021. № 118. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=158245>. DOI: [10.34759/trd-2021-118-10](https://doi.org/10.34759/trd-2021-118-10)

21. Зарецкий Б.Ф., Курмазенко Э.А., Прошкин В.Ю. Управление жизнеобеспечением экипажей космических объектов: системный подход // Труды МАИ. 2020. № 113. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=118179>. DOI: [10.34759/trd-2020-113-13](https://doi.org/10.34759/trd-2020-113-13)
22. Кондратьева Л.А. Аналитическое приближение инерциального многообразия для модели движения спутника // Труды МАИ. 2022. № 123. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=165503>. DOI: [10.34759/trd-2022-123-15](https://doi.org/10.34759/trd-2022-123-15)
23. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. - М.: Наука, 1965. – 416 с.

References

1. Vil'ke V.G. *Analiticheskaya mekhanika sistem s beskonechnym chislom stepenei svobody* (Analytical mechanics of systems with an infinite number of degrees of freedom). Moscow: MGU Publ., 1997. V. 1. – 216 p.; V. 2. – 160 p.
2. Vil'ke V.G. Separation of motions and the averaging method in the mechanics of systems with an infinite number of degrees of freedom. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. I. Matematika. Mekhanika*. 1983. No. 5. P. 54–59. (In Russ.)
3. Vil'ke V.G., Shatina A.V. Evolution of the rotational motion of a viscoelastic planet with a core on an elliptical orbit Evolution of a rotational symmetrical satellite with flexible viscoelastic rods in a central Newtonian force field. *Kosmicheskie issledovaniya*. 1999. V. 37, no. 3. P. 289–295. (In Russ.)
4. Shatina A.V. Evolution of the rotational motion of a symmetrical satellite with flexible viscoelastic rods. *Kosmicheskie issledovaniya*. 2002. V. 40, no. 2. P. 178–192. (In Russ.)

5. Popov I.P. On the speed of approach of objects during space flights. *Trudy MAI*. 2023. no. 128. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=171382>. DOI: [10.34759/trd-2023-128-01](https://doi.org/10.34759/trd-2023-128-01)
6. Bardin B.S., Panev A.S. On periodic motions of the body with movable internal mass over a horizontal surface. *Trudy MAI*. 2015. no. 84. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=62995>
7. Bardin B.S., Savin A.A. Study of orbital stability for planar oscillations of a magnetized symmetric satellite in a circular orbit. *Trudy MAI*. 2016. no. 85. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=65212>
8. Barkin M.Yu., Shkapov P.M., Hanada H. The physical librations of the Moon caused by its tidal deformations. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*. 2019. No. 2 (83). P. 4-16. DOI: [10.18698/1812-3368-2019-2-4-16](https://doi.org/10.18698/1812-3368-2019-2-4-16)
9. Barkin M.Yu. Approximate solution of the Liouville equations in action-angle variables for the Euler-Poinsot problem. *Trudy MAI*. 2014. No. 72. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=47336>
10. Federico Lavorenti, Pierre Henri, Francesco Califano, et al. Solar-wind electron precipitation on weakly magnetized bodies: The planet Mercury. *Astronomy and Astrophysics* 674. 2023. DOI: [10.1051/0004-6361/202245711](https://doi.org/10.1051/0004-6361/202245711)
11. Morozov A.Yu. Adaptive interpolation algorithm for solving problems of celestial mechanics with interval uncertainties. *Trudy MAI*. 2022. No. 123. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=165501>. DOI: [10.34759/trd-2022-123-14](https://doi.org/10.34759/trd-2022-123-14)
12. Bardin B.S., Avdyushkin A.N. Stability of the collinear point L1 in the planar restricted photogravitational three-body problem in the case of equal masses of primaries.

IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. V. 927. DOI: [1088/1757-899x/927/1/012015](https://doi.org/10.1088/1757-899x/927/1/012015)

13. Kholostova O.V., Safonov A.I. On equilibrium positions bifurcations of Hamiltonian system in cases of double combined third order resonance. *Trudy MAI*. 2018. No. 100. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=93292>
14. Safonov A.I. On periodic motions of a hamiltonian system with two degrees of freedom in the vicinity of a multiple resonance of the third order. *Trudy MAI*. 2022. No. 126. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=168988>. DOI: [10.34759/trd-2022-126-02](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-02)
15. Avdyushkin A.N. On parametric resonance near the libration point L1 of a planar restricted photogravitational three-body problem. *Trudy MAI*. 2022. No. 126. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=168989>. DOI: [10.34759/trd-2022-126-03](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-03)
16. Aslanov V.S., Neryadovskaya D.V. A tether system at the L1, L2 collinear libration points of the mars-phobos system. *Trudy MAI*. 2022. No. 122. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=163923>. DOI: [34759/trd-2022-122-02](https://doi.org/10.34759/trd-2022-122-02)
17. Aksenov E.P. Teoriya dvizheniya iskusstvennykh sputnikov zemli (*Theory of motion of artificial Earth satellites*). Moscow: Nauka Publ., 1977. 360 p.
18. Popov I.P. On parameters calculation of passive gravity-assisted maneuvers of interplanetary spacecraft. *Trudy MAI*. 2021. No. 118. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=158210>. DOI: [10.34759/trd-2021-118-01](https://doi.org/10.34759/trd-2021-118-01)
19. Bernikov A.S., Petrov YU.A., Sergeev D.V., Shtokal A.O. Depreciation of automatic spacecraft when landing on planets and their satellites, taking into account the elasticity of

- the landing device design. *Trudy MAI*. 2021. No. 121. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=162657>. DOI: [10.34759/trd-2021-121-10](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-10)
20. Voronov K.E., Grigor'ev D.P., Telegin A.M. Application of the direct propagation neural network for localization of the impact site of microparticles on the surface of the spacecraft. *Trudy MAI*. 2021. No. 118. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=158245>. DOI: [10.34759/trd-2021-118-10](https://doi.org/10.34759/trd-2021-118-10)
21. Zaretskii B.F., Kurmazenko E.A., Proshkin V.Yu. Spacecraft crew life support control: systems approach. *Trudy MAI*. 2020. No. 113. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=118179>. DOI: [10.34759/trd-2020-113-13](https://doi.org/10.34759/trd-2020-113-13)
22. Kondrat'eva L.A. Analytical approximation of inertial manifolds for the satellite motion model. *Trudy MAI*. 2022. No. 123. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=165503>. DOI: [10.34759/trd-2022-123-15](https://doi.org/10.34759/trd-2022-123-15)
23. Beletskii V.V. *Dvizhenie iskusstvennogo sputnika otnositel'no tsentra mass* (Theory of motion of artificial Earth satellites). Moscow: Nauka Publ., 1965. 416 p.

Статья поступила в редакцию 10.10.2024

Одобрена после рецензирования 06.11.2024

Принята к публикации 25.02.2025

The article was submitted on 10.10.2024; approved after reviewing on 06.11.2024; accepted for publication on 25.02.2025