

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»
(МАИ)

На правах рукописи



Ковалев Николай Владиславович

**КАЧЕСТВЕННЫЙ И АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДИНАМИКИ НЕКОТОРЫХ
КВАЗИКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ**

Специальность 01.02.01 — «Теоретическая механика»

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук
Байков Александр Евгеньевич

Москва, 2019

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1. Квазиконсервативные системы с одной степенью свободы	16
1.1. Прямое разложение неавтономных интегралов.....	16
1.2. Построение прямого разложения неавтономных интегралов в переменных действие-угол.....	18
1.3. Сходимость прямого разложения неавтономных интегралов.....	20
1.4. Критерий существования периодических решений в терминах неавтономных интегралов.....	22
1.5. Периодические решения уравнения Дюффинга	25
1.6. Оценка числа предельных циклов одного класса уравнения Лъенара	28
2. Системы слабо связанных осцилляторов	35
2.1. Прямое разложение неавтономных интегралов системы слабо связанных осцилляторов	35
2.2. Прямое разложение неавтономных интегралов системы слабо связанных осцилляторов в переменных действие-угол	37
2.3. Обобщение критерия существования периодических решений в терминах неавтономных интегралов.....	39
3. Некоторые кусочно-линейные системы	42
3.1. Ящик на конвейерной ленте.....	42
3.2. Ящик с внутренним осциллятором на горизонтальной плоскости	45

3.3. Существование и единственность решения в будущем задачи Коши для систем с разрывными правыми частями.....	48
4. Кусочно-линейный осциллятор с двумя степенями свободы.....	51
1.1. Постановка задачи.....	51
1.2. Исследование усреднённых уравнений система.....	53
1.3. Инвариантные торы	57
1.4. Зоны залипания	58
1.5. Неавтономные интегралы	61
Заключение.....	71
Приложение А.....	73
Зона 2	73
Зона 3	77
Зона 4	80
Зона 5	84
Зона 6	87
Литература.....	88

Введение

Актуальность темы. В настоящее время внимание исследователей всё чаще занимают квазиконсервативные механические системы [1]. Так называется широкий класс голономных систем, в которых наряду с консервативными (потенциальными) силами действуют малые неконсервативные позиционные силы и разной природы малые диссипативные силы, например, силы сухого трения или силы трения вязкого.

Теория квазиконсервативных систем разработана всё ещё недостаточно хорошо, заметно уступая, например, теории гамильтоновых систем, несмотря на большое число приложений. Можно указать целые научно-технические области, где модели реальных систем есть квазиконсервативные системы: проектирование конструкций в машиностроении [2], строительной механике [3], авиации [4,5], ракетной техники [6] и даже теории двуногой ходьбы [7].

Квазиконсервативный характер имеют системы со слабой обратной связью, нелинейные электрические цепи [8,9], ансамбли слабо связанных осцилляторов [10,11]. В настоящей диссертационной работе основной аспект исследования квазиконсервативных систем — существование и построение периодических решений. Рассматриваются автономные квазиконсервативные системы с одной степенью свободы; невозмущённая система при этом имеет вид системы Гамильтона. Также рассматривается класс квазиконсервативных систем с $n \geq 2$ степенями свободы, такой, что невозмущённая система есть прямое произведение систем Гамильтона с одной степенью свободы. Данный класс мы называем квазиконсервативными системами n слабо связанных нелинейных (консервативных) осцилляторов.

В [12] обнаружено, что при решении одной квазиконсервативной задачи с двумя степенями свободы, а именно, при построении периодического решения, исследовании его устойчивости, оценки области притяжения соответствующего предельного цикла, естественно возникает неавтономный интеграл системы усреднённых уравнений движения. В диссертационной работе устанавливается то,

как существование периодических решений квазиконсервативных систем возможно установить, используя неавтономные интегралы. Поскольку построить хотя бы один (нетривиальный) неавтономный интеграл общих квазиконсервативных систем, пусть даже с одной степенью свободы, в явном, пригодном для дальнейшего анализа виде, не представляется возможным, предлагается приближённо-аналитический метод. Это метод малого параметра (или метод прямого разложения), обобщающий классический метод теории возмущений построения решения дифференциальных уравнений.

Задачи о движении механических систем с сухим трением в настоящее время очень популярны среди исследователей. Они находят множество приложений, в частности, в создании новых систем передвижения. В [13–22] рассмотрены задачи о передвижении тел по шероховатой поверхности посредством перемещения в нём внутренних масс. В третьей и четвёртой главах диссертационной работы исследуются движения нескольких механических систем с сухим трением; задача из четвёртой главы (один кусочно-линейный осциллятор с двумя степенями свободы) уже рассматривалась в [23], где были выявлены некоторые классы движений осциллятора. В отличие задач [13–22], энергия системы убывает из-за отрицательной работы сил трения, притока новой энергии кусочно-линейный осциллятор не получает. Это обстоятельство несколько упрощает исследование динамики системы. Другое дело, что уравнения движения кусочно-линейного осциллятора имеют разрывные правые части, что требует дополнительных теоретических оснований.

Диссертационная работа состоит из четырёх глав: 1) Квазиконсервативные системы с одной степенью свободы; 2) Системы слабо связанных осцилляторов; 3) Некоторые кусочно-линейные системы; 4) Кусочно-линейный осциллятор с двумя степенями свободы.

В первой главе рассмотрен класс автономных квазиконсервативных систем с одной степенью свободы. Невозмущённая система, соответствующая нулевому значению малого параметра, есть автономная система Гамильтона с одной степенью свободы. Правые части квазиконсервативной системы представляют

собой ряды по степеням малого параметра. Неавтономным интегралом называется функция от фазовых переменных и времени, постоянная вдоль решений системы.

В первом параграфе первой главы предлагается получить прямое разложение неавтономных интегралов в виде разложения в ряд по малому параметру. Из критерия неавтономного интеграла (полная производная по времени равна нулю) следует, что коэффициенты ряда определяются один за другим как решение некоторых линейных уравнений в частных производных первого порядка: оператор един для всех уравнений и определяется функцией Гамильтона невозмущённой системы, правые части зависят от предыдущих коэффициентов разложения. Хорошо известно, что для интегрирования уравнения в частных производных первого порядка необходимо найти $(n - 1)$ независимых интегралов системы характеристик, где n – число фазовых переменных [24,25]. Поскольку $n = 2$ (число фазовых переменных квазиконсервативной системы с одной степенью свободы), то для интегрирования уравнений и нахождения очередного коэффициента разложения неавтономного интеграла необходимо найти всего один интеграл системы характеристик. В качестве последнего можно взять функцию Гамильтона невозмущённой системы $H = H(x, y)$.

К сожалению, упомянутый метод интегрирования уравнений в частных производных первого порядка подразумевает не только квадратуры, но и обращение функций. Чтобы обойти сложившиеся препятствия в методе прямого разложения, во втором параграфе первой главы предлагается рассмотреть уравнения движения в переменных действие-угол r и φ невозмущённой системы. В переменных r и φ функция Гамильтона невозмущённой системы зависит только от действия r . Последнее обстоятельство освобождает от необходимости обращения функций при нахождении коэффициентов разложения неавтономного интеграла. Итак, в переменных действие-угол невозмущённой системы метод прямого разложения неавтономного интеграла эффективен и его можно применять в практических задачах об исследовании динамики квазиконсервативных систем, где требуется построение неавтономных интегралов.

В третьем параграфе первой главы рассмотрен вопрос о сходимости рядов прямого разложения неавтономных интегралов. Метод, изложенный выше, даёт формальный ряд – для его построения не требуется сходимость рядов правых частей уравнения движения. Однако, для дальнейшего применения неавтономных интегралов метод прямого разложения должен быть обоснован. Мы развиваем классические результаты А. Пуанкаре по обоснованию метода малого параметра [26, 27], где в доказательстве используется метод мажорант. Сформулирована и доказана теорема о сходимости рядов прямого разложения при условии сходимости правых частей уравнений движения и в том предположении, что неавтономным интеграл удовлетворяет при $t = 0$ аналитическому относительно малого параметра ε начальному условию.

В четвёртом параграфе первой главы сформулирован и доказан критерий существования периодических решений квазиконсервативной системы с одной степенью свободы в терминах неавтономных интегралов. Критерий использует два независимых интеграла уравнений движений (т.е. максимально возможное число для квазиконсервативной системы с одной степенью свободы). Полученный выше критерий применён в пятом параграфе первой главы для исследования уравнения Дюффинга, которое, как хорошо известно, имеет континуальное множество периодических решений в окрестности тривиального положения равновесия. Построено прямое разложение неавтономных интегралов и найдено разложение периодов решений с точностью до ε^2 .

Шестой параграф первой главы посвящён оценке числа предельных циклов одного класса уравнений Лъенара [8] (этому классу принадлежит, в частности, знаменитое уравнение Ван-дер-Поля с одним предельным циклом [9]). Получено прямое разложение неавтономных интегралов уравнения Лъенара, критерий существования периодических решений дал оценку числа предельных циклов в терминах параметров уравнения.

Во второй главе рассмотрен класс автономных квазиконсервативных систем с $n \geq 2$ степенями свободы, представляющих собой n нелинейных осцилляторов, слабо связанных неконсервативными возмущениями. Невозмущённая система есть

автономная система Гамильтона с $n \geq 2$ степенями свободы, интегрируемая по Лиувиллю, допускающая разделение переменных, поскольку функция Гамильтона равна сумме функций Гамильтона каждого из n осцилляторов. Правые части квазиконсервативной системы представляют собой сходящиеся ряды по степеням малого параметра.

В первом параграфе второй главы рассматривается задача построения неавтономных интегралов квазиконсервативных систем слабо связанных осцилляторов в виде разложения в ряд по малому параметру. Из критерия неавтономного интеграла следует, что коэффициенты ряда определяются один за другим как решение некоторых линейных уравнений в частных производных первого порядка, аналогичных уравнениям из первого параграфа первой главы. Интегрирование таких уравнений подразумевает обращение функций.

Из устройства функции Гамильтона системы слабо связанных осцилляторов следует интегрируемость по Лиувиллю невозмущённой системы [28]. Более того, возможно разделение переменных и эффективное введение переменных действие-угол. Во втором параграфе второй главы предлагается рассмотреть уравнения движения в переменных действие-угол $r_1, \dots, r_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ невозмущённой системы. В новых переменных функция Гамильтона невозмущённой системы зависит только от действий r_1, \dots, r_n , а точнее каждая функция Гамильтона i -го осциллятора зависит от своего действия r_i . Последнее обстоятельство освобождает от необходимости обращения функций при нахождении коэффициентов разложения неавтономного интеграла. Итак, в переменных действие-угол невозмущённой системы метод прямого разложения неавтономного интеграла эффективен для класса квазиконсервативных систем слабо связанных осцилляторов с $n \geq 2$ степенями свободы.

В третьем параграфе второй главы обобщён критерий существования периодических решений на квазиконсервативные системы слабо связанных осцилляторов с $n \geq 2$ степенями свободы.

В третьей главе рассматривается задача об исследовании движений некоторых кусочно-линейных систем, представляющие собой модели

механических систем, в которых действуют силы сухого трения, подчинённые закону Амонтона–Кулона. В первом параграфе третьей главы на примере простой системы (ящик, закреплённый пружинами к неподвижным стенкам, находящийся на подвижной ленте конвейера) получено и приведено к безразмерному виду уравнение движения, найдена зона залипания ящика на подвижной ленте конвейера и продемонстрирован выход на финальный режим движения, представляющий собой предельный цикл.

Во втором параграфе третьей главы изучается движения ящика на горизонтальной плоскости, внутри которого на закреплённой горизонтальной невесомой спице движется материальная точка, присоединённая к точкам крепления спицы пружинами. Энергия в этой системе убывает из-за отрицательной работы сил трения, притока новой энергии нет. Данное обстоятельство упрощает исследование движений и даёт подсказку о финальных движениях системы. Получены и приведены к безразмерному виду уравнения движения, найдена зона залипания ящика на горизонтальной плоскости. Это подмножество гиперплоскости разрыва состоит из всех положений равновесия ящика на горизонтальной плоскости, когда на него действует сила трения покоя. Наличие внутреннего осциллятора делает возможным выход ящика из зоны залипания. В третьем параграфе третьей главы обоснована математическая корректность исследуемой модели. Решение в смысле А.Ф. Филиппова и теорема о существовании и единственности в будущем времени решения задачи Коши [29,30] даёт такое обоснование и позволяет говорить о финальных движениях системы.

В четвёртой главе исследуется система двух соединённых пружиной ящиков на ленточном конвейере. Кроме того, каждый из ящиков соединён пружиной с ближайшей стеной. Между ящиками и лентой действуют силы сухого трения Амонтона-Кулона с малым коэффициентом трения. В первом параграфе четвёртой главы получены уравнения движения в размерном виде, в безразмерном виде, в главных координатах и в координатах действие-угол невозмущённой системы $r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2$. Невозмущённая система соответствует нулевому значению коэффициента сухого трения.

Уравнения движения кусочно-линейны, поэтому легко локально решаются (даже глобально в областях непрерывности), однако анализ динамики затруднен из-за отсутствия общего решения во всём фазовом пространстве. Во втором параграфе четвёртой главы движения системы исследуются методом усреднения. К сожалению, правые части усреднённых уравнений удалось представить только в квадратурах, но не в явном виде. Однако, тонким анализом неявных правых частей уравнений движения было доказано стремление траекторий к множеству в фазовом пространстве, состоящему из так называемых предельных торов. Последнее есть граница области инвариантных торов — о них речь идёт в следующем параграфе.

В третьем параграфе четвёртой главы аналитически определяется область фазового пространства кусочно-линейного осциллятора, где фазовый поток расслаивается на двумерные инвариантные торы. Поскольку частоты угловых переменных невозмущённой задачи не соизмеримы (независимы над рациональными числами), каждая из траекторий равномерно и всюду плотно обматывает свой инвариантный тор. Существование инвариантных торов также вытекает из усреднённых уравнений движения, но поскольку все они вырожденные, для установления существования торов полной системы потребовались бы дополнительные исследования.

Четвёртый параграф четвёртой главы посвящён исследованию зон залипания ящиков на конвейерной ленте. Отметим, что зоны залипания систем с разрывными правыми частями в принципе не определяются из усреднённых уравнений движения. Зоны залипания ящиков построены в безразмерных переменных и в переменных действие-угол $r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2$ невозмущённой системы. Условия залипания ящиков были рассмотрены на множестве предельных торов (оказалось, что зона залипания одного из ящиков касается ровно в одной точке каждого предельного тора) и вне области инвариантных торов. Для последнего случая построены бифуркационные кривые, определяющие изменения сечений зон залипания.

В пятом параграфе четвёртой главы рассмотрена задача о построении семейства неавтономных интегралов кусочно-линейного осциллятора. Прямое

разложение неавтономных интегралов находится по алгоритму, предложенному во второй главе диссертационной работы. Из-за разрывности правых частей уравнений движения плоскость $0r_1r_2$ пришлось разделить на шесть зон, в каждой из которых коэффициенты неавтономного интеграла определяются по-разному. В пятом параграфе представлен результат расчётов коэффициентов разложения неавтономного интеграла до первого порядка малости включительно только в зоне 1. Расчёт коэффициентов разложения в других зонах приведён в приложении А.

Цель диссертационной работы состоит в применении уже существующих качественных и асимптотических методов исследования квазиконсервативных систем, в том числе систем с сухим трением, и в создании новых методов исследования динамики систем, основанных на неавтономных интегралах. В диссертационной работе поставлены следующие задачи.

1. Создать метод построения семейства интегралов квазиконсервативной системы в виде прямого разложения в ряд по малому параметру, обобщающий классический метод малого параметра решения задачи Коши в теории возмущений.
2. Найти применение семейства неавтономных интегралов для отыскания периодических решений квазиконсервативных систем с одной степенью свободы, получить конструктивный критерий существования периодических решений.
3. Обобщить метод прямого разложения и критерий существования периодических решений для квазиконсервативных систем слабо связанных нелинейных осцилляторов с n степенями свободы.
4. Рассмотреть поступательные движения ящика с внутренним осциллятором по горизонтальной шероховатой плоскости: найти зону залипания, исследовать характер финальных движений ящика.
5. Рассмотреть кусочно-линейный осциллятор, представляющий собой два соединённых между собой и неподвижными стенками ящика. Ящики находятся на конвейерной ленте. Исследовать уравнения движения методом усреднения, выявить зоны залипания ящиков и построить

семейство неавтономных интегралов рассматриваемого кусочно-линейного осциллятора.

Методы исследований. В диссертационной работе применялись следующие классические методы теории дифференциальных уравнений и теоретической механики: метод малого параметра (для построения семейств неавтономных интегралов) и метод усреднения (для исследования движений кусочно-линейного осциллятора). Обоснование сходимости рядов неавтономных интегралов по малому параметру аналогично результатам А. Пуанкаре по сходимости решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений [26,27]. Математическая строгость моделей механических систем с сухим трением основана на понятии решения в смысле А.Ф. Филиппова и доказанной им теоремы о существовании и единственности в будущем решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями [29,30]. Корректность метода усреднения систем дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями обоснована в [31].

Научная новизна. В диссертационной работе получены следующие новые теоретические результаты.

1. Предложен метод прямого разложения семейства неавтономных интегралов квазиконсервативных систем с одной степенью свободы. Обнаружено, что метод эффективен, если уравнения движения рассматривать в переменных действие-угол невозмущённой системы.
2. Обоснована сходимость ряда по степеням малого параметра, дающего прямое разложение неавтономного интеграла, если получать соответствующее разложение как решение задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка.
3. Сформулирован и доказан критерий существования периодических решений квазиконсервативных систем в терминах неавтономных интегралов. Эффект от применения критерия обеспечивается предложенным выше методом построения семейства неавтономных интегралов.

4. Полученный выше критерий применён для оценки числа предельных циклов одного частного случая уравнения Льенара.
5. Метод прямого разложения семейства неавтономных интегралов обоснован для систем слабо связанных нелинейных осцилляторов с n степенями свободы. Эффективность метода, связанная с переменными действие-угол, сохранилась благодаря разделению переменных в имеющей гамильтонов вид невозмущённой системе.
6. Обобщён критерий существования периодических решений для систем слабо связанных нелинейных осцилляторов с n степенями свободы.
7. Исследованы поступательные движения ящика с внутренним осциллятором по горизонтальной плоскости: получена зона залипания, дано полное описание движений ящика до окончательного сваливания его в зону залипания.
8. Рассмотрен кусочно-линейный осциллятор, представляющий собой два ящика на ленте конвейера, соединённые между собой и неподвижными стенками пружинами. Получены и приведены к безразмерному виду уравнения движения. Найдено 1) положение равновесия, 2) инвариантные торы системы, 3) зона залипания; построено множество в фазовом пространстве системы, получившее название «множество предельных торов».
9. Исследованы усреднённые уравнения движения кусочно-линейного осциллятора, имеющие неявный вид. Доказано, что любая траектория системы, не принадлежащая множествам предельных и инвариантных торов, приближается к множеству предельных торов. Дальнейшая динамика системы связана со сваливанием в зону застоя и движением по инвариантным торам.
10. Методом прямого разложения построено семейство неавтономных интегралов системы уравнений движения кусочно-линейно осциллятора.

Научная и практическая значимость полученных в диссертационной работе результатов состоит в следующем.

1. Создание нового метода обнаружения в квазиконсервативных системах периодических движений, критически важных для анализа динамики. Метод основан на построении семейства неавтономных интегралов. Эффективность метода продемонстрирована в задаче об оценке числа предельных циклов одного частного случая уравнения Льенара. Последнее может служить моделью большого числа систем с нелинейной обратной связью, например, нелинейных электрических цепей.
2. Новый метод обнаружения периодических решений обобщён для систем слабо связанных нелинейных осцилляторов с n степенями свободы.
3. Исследована динамика двух кусочно-линейных осцилляторов, представляющих собой модели механических систем с сухим трением Амонтона-Кулона. Результаты представляют интерес для создания новых систем передвижения.

Степень достоверности полученных результатов обеспечивается: 1) строгим использованием классических моделей теоретической механики и адекватного математического аппарата, 2) применением классических аналитических и приближенно-аналитических методов исследования, 3) использованием математического пакета Maple версии 13.0 (Maple build ID 397624).

Личный вклад. Автору принадлежат формулировки и доказательства основных теоретических результатов, представленных в диссертационной работе. Также автором выполнены все аналитические и численные расчёты с использованием упомянутых в диссертационной работе методов.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях и научных семинарах: 1) III Международная школа-конференция молодых учёных "Нелинейная динамика машин" (Москва, 2016), 2) Международная конференция "Ломоносов-2018" (Москва, 2018), 3) Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам DIFF2018 (Суздаль, 2018), 4) Семинар "Динамические системы и механика" кафедр 811 и 802 (Москва,

2019), 5) XLV Международная молодёжная научная конференция "Гагаринские чтения 2019" (Москва, 2019).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 7 печатных и электронных изданиях, среди которых 1 статья опубликованная в журналах, индексируемых в Scopus [32], 2 – в журналах, рекомендованных ВАК РФ для представления результатов диссертационного исследования на соискание ученых степеней кандидата наук [33,34], 1 – в сборнике трудов конференции [35], 3 – в тезисах докладов научных конференций [36–38].

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и приложения с расчётами. Полный объём диссертации составляет 91 страницу с 15 рисунками. Список литературы содержит 39 наименований.

Благодарности. Прежде всего автор хотел бы выразить глубокую благодарность своему научному руководителю Александру Евгеньевичу Байкову за многолетнее внимание к работе и обсуждение кандидатской диссертации на всех этапах ее создания. Автор безгранично признателен родителям Елене Валерьевне и Владиславу Александровичу за неоценимую моральную поддержку, без которой диссертационная работа не была бы завершена.

1. Квазиконсервативные системы с одной степенью свободы

1.1. Прямое разложение неавтономных интегралов

Рассмотрим квазиконсервативную систему с одной степенью свободы. Уравнения движения этой системы имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = H_y(x, y) + \varepsilon f_1(x, y) + \varepsilon^2 f_2(x, y) + \dots, \\ \dot{y} = -H_x(x, y) + \varepsilon g_1(x, y) + \varepsilon^2 g_2(x, y) + \dots, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $H(x, y)$ – функция Гамильтона невозмущённой системы, x – координата, y – импульс, ε – малый параметр, $f_k(x, y)$ и $g_k(x, y)$ – произвольные функции, H_x и H_y – частные производные функции Гамильтона невозмущённой системы по x и y соответственно.

Определение 1. Неавтономным интегралом квазиконсервативной системы (1.1) называется такая функция $I(x, y, t)$, которая сохраняет постоянное значение вдоль любых решений $x(t), y(t)$ системы (1.1).

Отметим, что если $I(x, y, t)$ – неавтономный интеграл системы (1.1), то $I(x, y, t + h)$ для произвольного фиксированного h – тоже неавтономный интеграл системы (1.1).

Определение 2. Два неавтономных интеграла $K = K(x, y, t)$ и $L = L(x, y, t)$ квазиконсервативной системы будем называть независимыми, если матрица Якоби

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial K}{\partial t} & \frac{\partial K}{\partial x} & \frac{\partial K}{\partial y} \\ \frac{\partial L}{\partial t} & \frac{\partial L}{\partial x} & \frac{\partial L}{\partial y} \end{pmatrix}$$

имеет максимальный ранг, равный двум, в окрестности точки (x_0, y_0, t_0) , где (x_0, y_0) – регулярная (не положение равновесия) точка невозмущённой системы, а t_0 – произвольное фиксированное время.

Будем искать неавтономные интегралы $I(x, y, t)$ системы (1.1) в виде прямого разложения по малому параметру ε :

$$I(x, y, t) = I_0(x, y) + \varepsilon I_1(x, y, t) + \varepsilon^2 I_2(x, y, t) + \dots \quad (1.2)$$

Поскольку система (1.1) при $\varepsilon = 0$ допускает автономный интеграл $H(x, y) = \text{const}$, полагаем $I_0(x, y) = H(x, y)$.

Чтобы найти остальные члены разложения, воспользуемся критерием того, что функция $I(x, y, t)$ есть интеграл системы (1.1) (полная производная по времени равна нулю):

$$\frac{dI(x, y, t)}{dt} = \frac{dH(x, y)}{dt} + \varepsilon \frac{dI_1(x, y, t)}{dt} + \varepsilon^2 \frac{dI_2(x, y, t)}{dt} + \dots = 0, \quad (1.3)$$

где

$$\frac{dH(x, y)}{dt} = H_x(x, y)\dot{x} + H_y(x, y)\dot{y}, \quad (1.4)$$

$$\frac{dI_i(x, y, t)}{dt} = \frac{\partial I_i(x, y, t)}{\partial t} + \frac{\partial I_i(x, y, t)}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial I_i(x, y, t)}{\partial y}\dot{y}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (1.5)$$

Для краткости записи введём обозначения:

$$I(x, y, t) = I, \quad H(x, y) = H, \quad f_i(x, y) = f_i, \quad g_i(x, y) = g_i.$$

Подставим правые части системы (1.1) в уравнения (1.4) и (1.5). Перепишем (1.3) со всеми подстановками:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= H_x[H_y + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots] + H_y[-H_x + \varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \dots] + \varepsilon \frac{\partial I_1}{\partial t} + \\ &+ \varepsilon \frac{\partial I_1}{\partial x}[H_y + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots] + \varepsilon \frac{\partial I_1}{\partial y}[-H_x + \varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \dots] + \varepsilon^2 \frac{\partial I_2}{\partial t} + \\ &+ \varepsilon^2 \frac{\partial I_2}{\partial x}[H_y + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots] + \varepsilon^2 \frac{\partial I_2}{\partial y}[-H_x + \varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \dots] + \dots = 0. \end{aligned}$$

Раскроем скобки и сгруппируем слагаемые по степеням параметра ε . Приравняв каждый коэффициент при ε^i к нулю, получим уравнения

$$\begin{aligned} \varepsilon^0: H_x H_y - H_y H_x &= 0, \\ \varepsilon^i: \frac{\partial I_i}{\partial t} + \{I_i, H\} &= F_i, \quad i = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где

$$\frac{\partial I_i}{\partial x} H_y - \frac{\partial I_i}{\partial y} H_x = \{I_i, H\}, \quad -H_x f_i - H_y g_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial I_k}{\partial x} f_{i-k} - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial I_k}{\partial y} g_{i-k} = F_i.$$

Конструкция в фигурных скобках называется скобкой Пуассона. Уравнения (1.6) есть линейные неоднородные уравнения в частных производных первого порядка. Решение уравнений (1.6) есть коэффициенты разложения (1.2).

Уравнения (1.6) можно решить в квадратурах, если известны три независимых интеграла системы характеристик

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{\frac{\partial H}{\partial y}} = \frac{dy}{-\frac{\partial H}{\partial x}} = \frac{dI_i}{F_i}. \quad (1.7)$$

Один из этих интегралов – сама функция Гамильтона $H = H(x, y)$. Если (x_0, y_0) – регулярная точка невозмущенной системы, то система (1.7) допускает два явно зависящих от времени интеграла $K = K(x, y, t)$, $L = L(x, y, t)$. Однако построение этих интегралов связано не только с квадратурами, но и с обращением функций. В таком виде метод нельзя признать эффективным.

Для формулировки эффективного метода построения неавтономных интегралов квазиконсервативных систем вида (1.1) перейдем к другим переменным.

1.2. Построение прямого разложения неавтономных интегралов в переменных действие-угол

Сделаем в системе (1.1) замену переменных вида

$$\begin{cases} x = X(r, \varphi), \\ y = Y(r, \varphi), \end{cases} \quad (1.8)$$

где r – действие невозмущенной системы, φ – угол невозмущенной системы (их в принципе можно эффективно ввести, так как невозмущенная система есть автономная система с одной степенью свободы). В переменных действие-угол функция Гамильтона невозмущенной системы с одной степенью свободы зависит только от переменной действия: $H = H(r)$.

Для краткости записи введём обозначения:

$$I(r, \varphi, t) = I, \quad f_i(r, \varphi) = f_i, \quad g_i(r, \varphi) = g_i, \quad X(r, \varphi) = X, \quad Y(r, \varphi) = Y.$$

Преобразованная система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{r} = X_\varphi(\varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \dots) - Y_\varphi(\varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots), \\ \dot{\varphi} = \omega(r) + Y_r(\varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots) - X_r(\varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \dots), \end{cases} \quad (1.9)$$

где $\omega(r) = H_r$ – частота невозмущённой системы, X_φ , X_r , Y_φ , Y_r – частные производные функций X и Y по соответствующим переменным.

Как и в предыдущем параграфе будем искать неавтономный интеграл в виде прямого разложения по степеням параметра ε :

$$I = H + \varepsilon I_1 + \varepsilon^2 I_2 + \dots \quad (1.10)$$

Критерий неавтономного интеграла даёт уравнение:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dH}{dt} + \varepsilon \frac{dI_1}{dt} + \varepsilon^2 \frac{dI_2}{dt} + \dots = 0, \quad (1.11)$$

где

$$\frac{dH}{dt} = \omega(r)\dot{r}, \quad (1.12)$$

$$\frac{dI_i}{dt} = \frac{\partial I_i}{\partial t} + \frac{\partial I_i}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial I_i}{\partial \varphi} \dot{\varphi}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (1.13)$$

Подставим правые части системы (1.9) в уравнения (1.12) и (1.13).

Перепишем уравнение (1.11) со всеми подстановками:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} = & \omega(r) [X_\varphi(\varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \dots) - Y_\varphi(\varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots)] + \\ & + \varepsilon \frac{\partial I_1}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial I_1}{\partial r} [X_\varphi(\varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \dots) - Y_\varphi(\varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots)] + \\ & + \varepsilon \frac{\partial I_1}{\partial \varphi} [\omega(r) + Y_r(\varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots) - X_r(\varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \dots)] + \varepsilon^2 \frac{\partial I_2}{\partial t} + \\ & + \varepsilon^2 \frac{\partial I_2}{\partial r} [X_\varphi(\varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \dots) - Y_\varphi(\varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots)] + \\ & + \varepsilon^2 \frac{\partial I_2}{\partial \varphi} [\omega(r) + Y_r(\varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots) - X_r(\varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \dots)] = 0. \end{aligned}$$

Раскроем скобки и сгруппируем слагаемые по степеням параметра ε .

Приравняв каждый коэффициент при ε^i к нулю, получаем уравнения

$$\varepsilon^i: \frac{\partial I_i}{\partial t} + \frac{\partial I_i}{\partial \varphi} \omega(r) = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (1.14)$$

где

$$F_i = -\omega(r)[X_\varphi g_i - Y_\varphi f_i] - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial I_k}{\partial r} [X_\varphi g_{i-k} - Y_\varphi f_{i-k}] - \\ - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial I_k}{\partial \varphi} [Y_r f_{i-k} - X_r g_{i-k}].$$

Решения уравнений (1.14) есть коэффициенты разложения (1.10).

Характеристическая система для уравнений (1.14) имеет вид

$$\frac{dt}{1} = \frac{dr}{0} = \frac{d\varphi}{\omega(r)} = \frac{dI_i}{F_i}$$

и допускает три независимых интеграла:

$$r = r_0, \\ \varphi - \omega(r)t = \varphi_0, \\ I_i - \int F_i(r_0, \varphi_0 + \omega(r)t, t) dt = c_i,$$

где r_0, φ_0, c_i — константы. Тогда решения уравнений (1.14) можно представить в виде:

$$I_i = \Phi \left(r, \varphi - \omega(r)t, \int F_i(r_0, \varphi_0 + \omega(r)t, t) dt \right).$$

Обратим внимание, что общие решения однородных уравнений

$$\frac{\partial I_i}{\partial t} + \frac{\partial I_i}{\partial \varphi} \omega(r) = 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

есть функции $I_i = S_i(t\omega(r) - \varphi, r)$, где S_i — произвольная функция. Таким образом, найденное нами разложение (1.10) определяет всё семейство неавтономных интегралов системы (1.1).

1.3. Сходимость прямого разложения неавтономных интегралов

Очевидно, что если произвольно выбирать решение уравнений (1.6), то ряд (1.2) для неавтономного интеграла будет расходиться. В этом случае будем говорить о формальном неавтономном интеграле квазиконсервативной системы

(1.1). Более того, в методе прямого разложения правые части системы (1.1) могут быть формальными рядами по степеням ε .

Однако если получить неавтономный интеграл системы (1.1) с аналитическими по малому параметру ε правыми частями как решение некоторой задачи Коши для уравнения (1.3), то он будет аналитическим по ε . Коэффициенты разложения (1.2) аналитического интеграла можно найти, решая соответствующие задачи Коши для уравнений (1.6). Единственное решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \{I, H\} + f(x, y, \varepsilon) \frac{\partial I}{\partial x} + g(x, y, \varepsilon) \frac{\partial I}{\partial y} = 0 \\ I|_{t=0} = \phi(x, y, \varepsilon) \end{aligned} \quad (1.15)$$

есть аналитическая по ε функция, если сходятся ряды $f(x, y, \varepsilon) = \varepsilon f_1(x, y) + \dots$, $g(x, y, \varepsilon) = \varepsilon g_1(x, y) + \dots$ и $\phi(x, y, \varepsilon) = H(x, y) + \varepsilon \phi_1(x, y) + \dots$. Строгая формулировка данного результата приведена в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть ряды для правых частей системы (1.1) $f(x, y, \varepsilon) = \varepsilon f_1(x, y) + \dots$, $g(x, y, \varepsilon) = \varepsilon g_1(x, y) + \dots$ и ряд для начальной функции задачи (1.15) $\phi(x, y, \varepsilon) = H(x, y) + \varepsilon \phi_1(x, y) + \dots$ равномерно сходятся в окрестности точки (x_0, y_0) . Тогда существует окрестность точки $(x_0, y_0, 0)$, в которой прямое разложение решения задачи (1.15) сходится равномерно.

Доказательство. Результат развивает классическую теорию Пуанкаре об аналитическом решении дифференциального уравнения по малому параметру [26, 27]. Она основана на понятии мажорантных рядов (или мажорант): ряд $\sum_{k=0}^{\infty} m_k \varepsilon^k$ есть мажоранта для ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon^k$, если для всех k $|c_k| \leq m_k$. В силу равномерной сходимости каждый из рядов может быть мажорирован в окрестности точки (x_0, y_0) рядом из коэффициентов, не зависящих от x и y . Обозначим соответствующие мажоранты через $F(\varepsilon) = \varepsilon F_1 + \dots$, $G(\varepsilon) = \varepsilon G_1 + \dots$ и $\Phi(\varepsilon) = \Phi_0 + \varepsilon \Phi_1 + \dots$. Задача Коши с мажорантами вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{I}}{\partial t} + \{\bar{I}, H\} + F(\varepsilon) \frac{\partial \bar{I}}{\partial x} + G(\varepsilon) \frac{\partial \bar{I}}{\partial y} = 0 \\ \bar{I}|_{t=0} = \Phi(\varepsilon) \end{aligned}$$

допускает явное решение $\bar{I} = \bar{I}(x, y, t, \varepsilon)$, поскольку невозмущённая система Гамильтона интегрируется в квадратурах. Это решение будет аналитической функцией в окрестности точки $(x_0, y_0, 0)$. Но тогда, согласно лемме Пуанкаре о мажорантах, для решения $I = I(x, y, t, \varepsilon)$ задачи (1.15) $\bar{I} = \bar{I}(x, y, t, \varepsilon)$ есть мажоранта, поэтому прямое разложение $I = I(x, y, t, \varepsilon)$ в ряд по степеням ε сходится равномерно в упомянутой окрестности точки $(x_0, y_0, 0)$. Теорема 1 доказана.

1.4. Критерий существования периодических решений в терминах неавтономных интегралов

Рассмотрим задачу Коши для системы (1.1) с начальными условиями

$$\begin{aligned}x(0) &= x_0, \\y(0) &= y_0\end{aligned}$$

и представим её решение в виде функций

$$x(t) = A(t, x_0), \quad y(t) = B(t, y_0).$$

Периодические решения должны удовлетворять групповому свойству:

$$\begin{aligned}x(t + T) &= A(t + T, x_0) = A(t, A(T, x_0)), \\y(t + T) &= B(t + T, y_0) = B(t, B(T, y_0)),\end{aligned}\tag{1.16}$$

где T — период решения. При этом

$$A(T, x_0) = x(T) = x(0) = x_0, \quad B(T, y_0) = y(T) = y(0) = y_0.$$

Тогда из определения 1 неавтономного интеграла $I(x(t), y(t), t)$ и формул (1.16) вытекает следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть $I(x, y, t)$ — интеграл системы (1.1), а система (1.1) допускает периодическое решение $x = x(t)$, $y = y(t)$ с периодом T . Тогда для любого t выполнено соотношение

$$I(x(t), y(t), t) = I(x(t + T), y(t + T), t + T) = I(x(t), y(t), t + T).\tag{1.17}$$

Рассмотрим теперь систему (1.1) в переменных (1.8). Если $x = x(t)$, $y = y(t)$ — T -периодическое решение системы (1.1), то соответствующая ему $r =$

$r(t)$ – T -периодическая функция, тогда как функция $\varphi = \varphi(t)$ монотонно возрастает. Для последней функции выполнено следующее соотношение

$$\varphi(t + T) = \varphi(t) + 2\pi.$$

Утверждение 2. Пусть $I(r, \varphi, t)$ – интеграл системы (1.9), решение $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ системы (1.9) соответствует T -периодическому решению $x = x(t)$, $y = y(t)$ системы (1.1). Тогда для любого t выполнено соотношение

$$I(r(t), \varphi(t), t) = I(r(t + T), \varphi(t + T), t + T) = I(r(t), \varphi(t) + 2\pi, t + T). \quad (1.18)$$

Поставим задачу о поиске периодических решений системы (1.1) в терминах переменных действие-угол (1.8). Периодическое решение системы (1.9) определяется периодом и начальным условием действия, начальное условие угла можно взять произвольным в силу того, что система (1.9) имеет одну степень свободы. Пусть R, φ_0 – начальные условия для некоего решения системы (1.9). Проверим, периодическое ли решение с такими начальными условиями, и если периодическое, то найдём период T и начальное условие действия R в виде разложения по малому параметру:

$$R = r_0 + \varepsilon r_1 + \varepsilon^2 r_2 + \dots, \quad T = T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2 + \dots. \quad (1.19)$$

Для определения неизвестных коэффициентов разложений (1.19) сформулируем теорему, основываясь на утверждениях (1.17) и (1.18).

Теорема 2. Пусть $I(r, \varphi, t)$, $J(r, \varphi, t)$ – два независимых неавтономных интеграла системы (1.9). Тогда, если для R и T выполнены равенства

$$\begin{cases} I(R, \varphi_0, 0) = I(R, \varphi_0 + 2\pi, T), \\ J(R, \varphi_0, 0) = J(R, \varphi_0 + 2\pi, T), \end{cases} \quad (1.20)$$

то R и φ_0 – начальные условия решения $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ системы (1.9), соответствующие периодическому решению $x = x(t)$, $y = y(t)$ системы (1.1).

В параграфе 1.2 мы предложили метод построения всех неавтономных интегралов, поэтому не составляет большого труда определить два независимых интеграла, необходимых для теоремы 2.

Доказательство. Из независимости интегралов и теоремы о неявной функции система

$$\begin{cases} I(r, \varphi, t) = C_1 = \text{const}, \\ J(r, \varphi, t) = C_2 = \text{const} \end{cases}$$

имеет единственное решение $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ в окрестности точки $(R, \varphi, 0)$.

Преобразование

$$\begin{cases} \varphi \mapsto \varphi + 2\pi, \\ t \mapsto t + T \end{cases}$$

есть симметрия уравнений системы (1.9), так как они автономны и 2π -периодичны по φ . В силу равенств (1.20) это преобразование отображает траекторию решения $r(t)$, $\varphi(t)$, $r(0) = R$, $\varphi(0) = \varphi_0$ в себя. Но тогда

$$\begin{cases} r(t) = r(t + T), \\ \varphi(t + T) = \varphi(t) + 2\pi \end{cases}$$

и соответствующее решение $x(t)$, $y(t)$ системы (1.1) T -периодично. Теорема 2 доказана.

Предложим один способ получения интегралов, необходимых для теоремы 2. Один интеграл $I(r, \varphi, t)$ можно взять автономным, а из уравнения

$$I(R, \varphi_0) = I(R, \varphi_0 + 2\pi)$$

или, с указанием разложения (1.19),

$$I(r_0 + \varepsilon r_1 + \varepsilon^2 r_2 + \dots, \varphi_0) = I(r_0 + \varepsilon r_1 + \varepsilon^2 r_2 + \dots, \varphi_0 + 2\pi)$$

определить R , точнее, коэффициенты разложения R . Другой интеграл $J(r, \varphi, t)$ выбирается строго неавтономным, что гарантирует независимость I и J . Из аналогичного уравнения

$$J(r, \varphi_0, 0) = J(r, \varphi_0 + 2\pi, T)$$

или, с указанием разложения (1.19),

$$\begin{aligned} J(r_0 + \varepsilon r_1 + \varepsilon^2 r_2 + \dots, \varphi_0, 0) &= \\ &= J(r_0 + \varepsilon r_1 + \varepsilon^2 r_2 + \dots, \varphi_0 + 2\pi, T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2 + \dots) \end{aligned}$$

можно определить коэффициенты разложения периода T в ряд по малому параметру.

Заметим, что для определения разложение R и T до порядка ε^i включительно необходимо знать разложение I и J до порядка ε^{i+1} включительно. Это связано с

тем, что первый член разложения (1.10) $I_0 = H(r)$ сокращается в системе (1.20) в силу своей автономности.

Кроме начальных условий и периода периодического решения, с помощью теоремы 2 можно оценить количество периодических решений. Примеры того, как это делается, рассмотрены в следующих параграфах настоящей главы.

1.5. Периодические решения уравнения Дюффинга

Рассмотрим уравнение Дюффинга

$$\ddot{x} + \varepsilon x^3 + x = 0. \quad (1.21)$$

Найдём семейство неавтономных интегралов уравнения (1.21) в виде разложения (1.10) до порядка ε^2 включительно и применим теорему 2 для того, чтобы найти периодические решения уравнения (1.21).

Преобразуем уравнение (1.21) к системе в нормальной форме Коши вида

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - \varepsilon x^3 \end{cases} \quad (1.22)$$

с функцией Гамильтона невозмущённой системы $H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Хорошо известно, что переменные действие-угол для положительно определённой квадратичной функции Гамильтона вводятся посредством формул

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{2r} \sin(\varphi), \\ \dot{y} = \sqrt{2r} \cos(\varphi). \end{cases} \quad (1.23)$$

В переменных r и φ система (1.22) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon 4r^2 \sin^3(\varphi) \cos(\varphi), \\ \dot{\varphi} = 1 + \varepsilon 2r \sin^4(\varphi), \end{cases} \quad (1.24)$$

а функция Гамильтона невозмущённой системы есть $H = r$.

Критерий неавтономного интеграла даёт уравнение

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dH}{dt} + \varepsilon \frac{dI_1}{dt} + \varepsilon^2 \frac{dI_2}{dt} + \dots = 0$$

или в полной записи

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{dt} = & -\varepsilon 4r^2 \sin^3(\varphi) \cos(\varphi) + \varepsilon \left[\frac{\partial I_1}{\partial t} - \frac{\partial I_1}{\partial r} \varepsilon 4r^2 \sin^3(\varphi) \cos(\varphi) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial I_1}{\partial \varphi} (1 + \varepsilon 2r \sin^4(\varphi)) \right] + \varepsilon^2 \left[\frac{\partial I_2}{\partial t} - \frac{\partial I_2}{\partial r} \varepsilon 4r^2 \sin^3(\varphi) \cos(\varphi) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial I_2}{\partial \varphi} (1 + \varepsilon 2r \sin^4(\varphi)) \right] + \varepsilon^3 \left[\frac{\partial I_3}{\partial t} - \frac{\partial I_3}{\partial r} \varepsilon 4r^2 \sin^3(\varphi) \cos(\varphi) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial I_3}{\partial \varphi} (1 + \varepsilon 2r \sin^4(\varphi)) \right] + \dots = 0.
\end{aligned}$$

Раскроем скобки и сгруппируем слагаемые по степеням параметра ε . Приравняв каждый коэффициент при ε^i к нулю, имеем уравнения

$$\begin{aligned}
\varepsilon^1: \quad & \frac{\partial I_1}{\partial t} + \frac{\partial I_1}{\partial \varphi} = 4r^2 \sin^3(\varphi) \cos(\varphi), \\
\varepsilon^2: \quad & \frac{\partial I_2}{\partial t} + \frac{\partial I_2}{\partial \varphi} = \frac{\partial I_1}{\partial r} 4r^2 \sin^3(\varphi) \cos(\varphi) - \frac{\partial I_1}{\partial \varphi} 2r \sin^4(\varphi).
\end{aligned}$$

Решая по очереди эти уравнение, получаем выражения для коэффициентов:

$$\begin{aligned}
I_1 = & r^2 \left(\frac{1}{8} \cos(4\varphi) - \frac{1}{2} \cos(2\varphi) \right) + S_1(t - \varphi, r), \\
I_2 = & r^3 \left(\frac{3}{8} \cos(2\varphi) - \frac{3}{32} \cos(4\varphi) \right) + r^2 \frac{\partial S_1}{\partial r} \left(\frac{1}{8} \cos(4\varphi) - \frac{1}{2} \cos(2\varphi) \right) - \\
& - \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} r \left(\frac{3}{4} t + \frac{1}{16} \sin(4\varphi) - \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \right) + S_2(t - \varphi, r).
\end{aligned}$$

Теперь применим теорему 2 для того, чтобы найти периодические решения уравнения Дюффинга. Особенность данного уравнения в том, что оно имеет континуальное семейство периодических решений (рисунок 1.1). В данном случае начальное условие действия $r(0) = r_0$ определяется как параметр, не зависящий от ε .

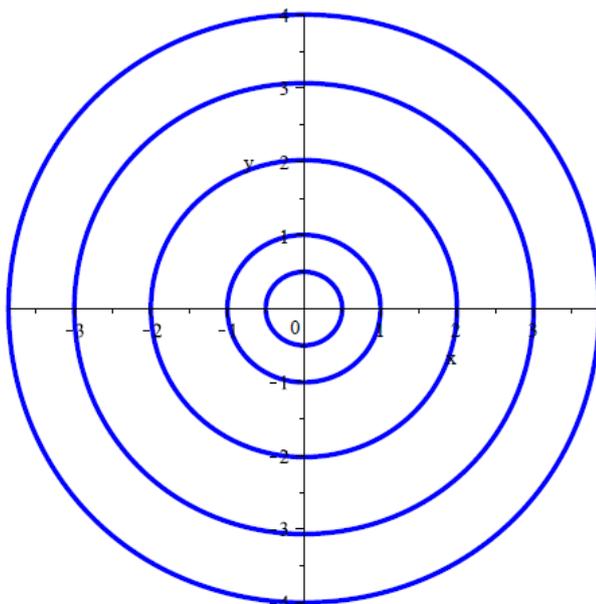


Рисунок 1.1 – Фазовый портрет уравнения (1.21) при $\varepsilon = 0,01$.

Чтобы определить период T в виде разложения (1.19) до порядка ε^2 включительно, нам потребуется только один неавтономный интеграл. Выше мы получили лишь первые два члена разложения (1.10). Для выполнения поставленной задачи необходимо определить третий член, решив уравнение

$$\frac{\partial I_3}{\partial t} + \frac{\partial I_3}{\partial \varphi} = \frac{\partial I_2}{\partial r} 4r^2 \sin^3(\varphi) \cos(\varphi) - \frac{\partial I_2}{\partial \varphi} 2r \sin^4(\varphi).$$

Положив $S_1 = \varphi - t$, $S_2 = S_3 = 0$; имеем

$$I(r, \varphi, t) = r + \varepsilon I_1 + \varepsilon^2 I_2 + \varepsilon^3 I_3 + \dots,$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= r^2 \left(\frac{1}{8} \cos(4\varphi) - \frac{1}{2} \cos(2\varphi) \right) + \varphi - t, \\ I_2 &= r^3 \left(\frac{3}{8} \cos(2\varphi) - \frac{3}{32} \cos(4\varphi) \right) - r \left(\frac{3}{4} t + \frac{1}{16} \sin(4\varphi) - \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \right), \\ I_3 &= \left(\left(\frac{3}{32} \cos(4\varphi) - \frac{3}{8} \cos(2\varphi) - \frac{17}{64} \right) r^2 + \frac{17}{32} r \right) t + \\ &+ \left(\frac{3}{128} \cos(4\varphi) - \frac{3}{128} \cos(6\varphi) - \frac{33}{128} \cos(2\varphi) + \frac{3}{1024} \cos(8\varphi) \right) r^4 + \\ &+ \left(\frac{17}{64} \sin(2\varphi) + \frac{5}{128} \sin(4\varphi) - \frac{5}{192} \sin(6\varphi) + \frac{1}{512} \sin(8\varphi) \right) r^2 + \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{1}{256} \sin(8\varphi) - \frac{1}{24} \sin(6\varphi) + \frac{11}{64} \sin(4\varphi) - \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \right) r.$$

Запишем условие теоремы 2 для системы (1.24), положив $\varphi_0 = 0$:

$$I(r_0, 0, 0) = I(r_0, 2\pi, T)$$

или

$$\begin{aligned} r_0 - \frac{3}{8} \varepsilon r_0^2 + \frac{9}{32} \varepsilon^2 r_0^3 - \frac{261}{1024} \varepsilon^3 r_0^4 + \dots = r_0 - \varepsilon \left(\frac{3}{8} r_0^2 + 2\pi - T \right) + \\ + \varepsilon^2 \left(\frac{9}{32} r_0^3 - \frac{3}{4} T r_0 \right) + \varepsilon^3 \left(-\frac{261}{1024} r_0^4 + T \left(\frac{9}{32} r_0 - \frac{35}{64} r_0^2 \right) \right) + \dots \end{aligned}$$

Раскроем скобки и сгруппируем слагаемые по степеням параметра ε .

Приравняв каждый коэффициент при ε^i к нулю, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} T_0 - 2\pi = 0, \\ T_1 + \frac{3}{4} T_0 r_0 = 0, \\ T_2 + \frac{3}{4} T_1 r_0 - \frac{9}{32} T_0 r_0 + \frac{35}{64} T_0 r_0^2 = 0. \end{cases}$$

Решаем эту систему и получаем разложение периода T по малому параметру вида

$$T = 2\pi - \frac{3\pi}{2} \varepsilon r_0 + \varepsilon^2 \pi r_0 \left(\frac{9}{32} + \frac{1}{32} r_0 \right) + \dots$$

1.5. Оценка числа предельных циклов одного класса уравнения Льенара

Рассмотрим один частный случай уравнения Льенара

$$\ddot{x} + \varepsilon P^{(N)}(x) \dot{x} + x = 0, \quad (1.25)$$

где

$$P^{(N)}(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n,$$

a_n — коэффициенты полинома $P^{(N)}(x)$, ε — малый параметр.

Найдём семейство неавтономных интегралов уравнения (1.25) в виде разложения (1.10) до порядка ε^2 включительно, после чего применим теорему 2 для нахождения периодических решений уравнения (1.25).

Преобразуем уравнение (1.25) к системе в нормальной форме Коши:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - \varepsilon y P^{(N)}(x); \end{cases} \quad (1.26)$$

функция Гамильтона невозмущённой системы есть $H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Переменные действие-угол для вышеприведённой функции Гамильтона определяются той же заменой (1.23).

В переменных r и φ система (1.26) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon 2r \cos^2(\varphi) P^{(N)}(\sqrt{2r} \sin(\varphi)), \\ \dot{\varphi} = 1 + \sin(\varphi) \cos(\varphi) P^{(N)}(\sqrt{2r} \sin(\varphi)), \end{cases} \quad (1.27)$$

а функция Гамильтона невозмущённой системы есть $H = r$.

Следуя алгоритму, предложенному в параграфе 1.2, запишем уравнения для определения первых двух коэффициентов разложения неавтономного интеграла (1.10):

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial t} + \frac{\partial I_1}{\partial \varphi} \omega(r) &= 2r \cos^2(\varphi) P^{(N)}(\sqrt{2r} \sin(\varphi)), \\ \frac{\partial I_2}{\partial t} + \frac{\partial I_2}{\partial \varphi} \omega(r) &= P^{(N)}(\sqrt{2r} \sin(\varphi)) \left(\frac{\partial I_1}{\partial r} 2r \cos^2(\varphi) - \frac{\partial I_1}{\partial \varphi} \sin(\varphi) \cos(\varphi) \right). \end{aligned}$$

Решая эти уравнения в порядке очереди, имеем

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{n=0}^N a_n (2r)^{\frac{n+2}{2}} Q_1^{(n)}(\varphi) + S_1(t - \varphi, t), \\ I_2 &= \sum_{n=0}^N \left[a_n^2 (2r)^{n+1} \left((n+2) Q_2^{(n)}(\varphi) + \frac{\sin^{2n+2}(\varphi) \cos^2(\varphi)}{2n+4} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\sin^{2n+2}(\varphi)}{(n+2)(2n+2)} \right) + a_n (2r)^{\frac{n}{2}} \left(2r \frac{\partial S_1}{\partial r} Q_1^{(n)}(\varphi) - \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} \frac{\sin^{n+2}(\varphi)}{n+2} \right) \right] + \\ &\quad + S_2(t - \varphi, t), \end{aligned}$$

где

$$Q_1^{(n)}(\varphi) = \int \sin^n(\varphi) \cos^2(\varphi) d\varphi,$$

$$Q_2^{(n)}(\varphi) = \int Q_1^{(n)}(\varphi) \sin^n(\varphi) \cos^2(\varphi) d\varphi.$$

Функции $Q_1^{(n)}(\varphi)$ и $Q_2^{(n)}(\varphi)$ допускают представление в явном виде

$$Q_1^{(n)}(\varphi) = \cos(\varphi) \sum_{m=0}^{n+1} b_m^{(n)} \sin^m(\varphi) + b^{(n)} \varphi,$$

$$Q_2^{(n)}(\varphi) = \sum_{m=0}^{n+1} \left[\xi_m^{(n)} \sin^{n+m+1}(\varphi) \cos^2(\varphi) + \psi_m^{(n)} \sin^{n+m+1}(\varphi) + d_m^{(n)} \sin^{m+1}(\varphi) + c_m^{(n)} \sin^m(\varphi) \cos(\varphi) \right] + c^{(n)} \varphi^2;$$

коэффициенты в приведённых формулах определяются рекуррентными соотношениями вида

$$\xi_m^{(n)} = \frac{b_m^{(n)}}{n+m+3}, \quad \psi_m^{(n)} = \frac{2b_m^{(n)}}{(n+m+3)(n+m+1)},$$

$$b_{n+1}^{(n)} = \frac{1}{n+2}, \quad b_n^{(n)} = 0, \quad b_{n-1}^{(n)} = -\frac{1}{n} b_{n+1}^{(n)},$$

$$c_{n+1}^{(n)} = \frac{b^{(n)}}{n+2}, \quad c_n^{(n)} = 0, \quad c_{n-1}^{(n)} = -\frac{1}{n} c_{n+1}^{(n)},$$

$$d_{n+1}^{(n)} = -\frac{b^{(n)}}{(n+2)^2}, \quad d_n^{(n)} = 0, \quad d_{n-1}^{(n)} = -\frac{n+2}{n^2} d_{n+1}^{(n)},$$

$$d_{m-1}^{(n)} = \frac{(m+1)(m+2)}{m^2} d_{m+1}^{(n)}, \quad d_m^{(n)} = 0, \left. \begin{array}{l} b_{m-1}^{(n)} = \frac{m+1}{m} b_{m+1}^{(n)}, \quad b_m^{(n)} = 0, \\ c_{m-1}^{(n)} = \frac{m+1}{m} c_{m+1}^{(n)}, \quad c_m^{(n)} = 0, \end{array} \right\} m = n-2, n-4, \dots,$$

$$b^{(n)} = -\frac{1}{2} b_1^{(n)}, \quad c^{(n)} = -\frac{1}{4} c_1^{(n)}.$$

Заметим, что если n чётное, то $b_0^{(n)} = 0, c_0^{(n)} = 0, d_0^{(n)} = 0, \xi_0^{(n)} = 0, \psi_0^{(n)} = 0, b^{(n)} \neq 0, c^{(n)} \neq 0, d^{(n)} \neq 0$, а если n нечётное, то $b_0^{(n)} \neq 0, c_0^{(n)} \neq 0, d_0^{(n)} \neq 0, \xi_0^{(n)} \neq 0, \psi_0^{(n)} \neq 0, b^{(n)} = 0, c^{(n)} = 0, d^{(n)} = 0$.

Для функций $Q_1^{(n)}(\varphi)$ и $Q_2^{(n)}(\varphi)$ выполняются равенства

$$Q_1^{(n)}(2\pi) - Q_1^{(n)}(0) = 2\pi b^{(n)}, \quad Q_2^{(n)}(2\pi) - Q_2^{(n)}(0) = 2\pi \left(2\pi c^{(n)} + c_0^{(n)} \right). \quad (1.28)$$

Мы построили семейство неавтономных интегралов системы (1.27) в виде разложения (1.10) с точностью до ε^2 включительно. Оценим теперь количество периодических решений уравнения (1.25). Для этого построим два независимых интеграла I и J системы (1.27).

Разложение первого из них находим в автономном виде (коэффициенты разложения от времени не зависят):

$$I = H + \varepsilon I_1 + \varepsilon^2 I_2 + \dots,$$

где

$$S_1 = S_2 = 0, \quad I_1 = \sum_{n=0}^N a_n (2r)^{\frac{n+2}{2}} Q_1^{(n)}(\varphi),$$

$$I_2 = \sum_{n=0}^N a_n^2 (2r)^{n+1} \left((n+2) Q_2^{(n)}(\varphi) + \frac{\sin^{2n+2}(\varphi) \cos^2(\varphi)}{2n+4} - \frac{\sin^{2n+2}(\varphi)}{(n+2)(2n+2)} \right).$$

Второй интеграл J должен быть строго неавтономным:

$$J = H + \varepsilon J_1 + \varepsilon^2 J_2 + \dots,$$

где

$$S_1 = t - \varphi, \quad S_2 = 0, \quad J_1 = \sum_{n=0}^N a_n (2r)^{\frac{n+2}{2}} Q_1^{(n)}(\varphi) + t - \varphi,$$

$$J_2 = \sum_{n=0}^N \left[a_n^2 (2r)^{n+1} \left((n+2) Q_2^{(n)}(\varphi) + \frac{\sin^{2n+2}(\varphi) \cos^2(\varphi)}{2n+4} - \frac{\sin^{2n+2}(\varphi)}{(n+2)(2n+2)} \right) \right]$$

$$\left. - \frac{\sin^{2n+2}(\varphi)}{(n+2)(2n+2)} \right) + a_n(2r)^{\frac{n}{2}} \frac{\sin^{n+2}(\varphi)}{n+2} \Big].$$

Учитывая равенства (1.28), приведём условие теоремы 2 для системы (1.27):

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^N a_n(2R)^{\frac{n+2}{2}} b^{(n)} + \varepsilon \sum_{n=0}^N a_n^2(2R)^{n+1}(n+2) (2\pi c^{(n)} + c_0^{(n)}) = 0, \\ \sum_{n=0}^N a_n(2R)^{\frac{n+2}{2}} b^{(n)} + T - 2\pi + \varepsilon \sum_{n=0}^N a_n^2(2R)^{n+1}(n+2) (2\pi c^{(n)} + c_0^{(n)}) = 0. \end{cases}$$

Подставим вместо R и T их разложения (1.19) и рассмотрим отдельно члены при различных степенях параметра ε :

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^N a_n(2R_0)^{\frac{n+2}{2}} b^{(n)} = 0, \\ \sum_{n=0}^N a_n(2R_0)^{\frac{n+2}{2}} b^{(n)} + T_0 - 2\pi = 0, \end{cases} \quad (1.29)$$

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^N a_n(2R_0)^{\frac{n}{2}} (n+2)R_1 b^{(n)} + \sum_{n=0}^N a_n^2(2R_0)^{n+1}(n+2) (2\pi c^{(n)} + c_0^{(n)}) = 0, \\ \sum_{n=0}^N a_n(2R_0)^{\frac{n}{2}} (n+2)R_1 b^{(n)} + T_1 + \sum_{n=0}^N a_n^2(2R_0)^{n+1}(n+2) (2\pi c^{(n)} + c_0^{(n)}) = 0. \end{cases} \quad (1.30)$$

Из системы (1.29) следует, что количество возможных корней R_0 первого уравнения принадлежит отрезку $\left[0; \left[\frac{N+2}{2}\right]\right]$. Так как один из этих возможных корней всегда равен нулю, количество возможных периодических решений уравнения (1.25) принадлежит отрезку $\left[0; \left[\frac{N}{2}\right]\right]$ — они дают предельные циклы уравнения Льенара. Если в полиноме $P^{(N)}(x)$ ненулевыми являются только коэффициенты при нечётных степенях x , то уравнение (1.25) имеет континуальное семейство периодических решений и предельных циклов не существует. Решение систем (1.29) и (1.30) имеют вид

$$\begin{cases} R_0 = R_0, \\ T_0 = 2\pi, \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_1 = \frac{\sum_{n=0}^N a_n^2 (2R_0)^{n+1} (n+2) (2\pi c^{(n)} + c_0^{(n)})}{\sum_{n=0}^N a_n (2R_0)^{\frac{n}{2}} (n+2) R_1 b^{(n)}}, \\ T_1 = 0. \end{cases}$$

Итак мы получили для уравнения (1.25) семейство неавтономных интегралов в виде разложения (1.10) до порядка ε^2 включительно, начальные условия периодических решений R и период T с точностью до порядка ε включительно. Также мы оценили количество возможных предельных циклов уравнения (1.25).

Рассмотрим случай $N = 4$. Тогда уравнение (1.25) имеет простой вид

$$\ddot{x} + \varepsilon(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4)\dot{x} + x = 0. \quad (1.31)$$

Запишем систему (1.29) для нашего случая:

$$\begin{cases} R_0 \left(\frac{1}{2} a_4 R_0^2 + \frac{1}{2} a_2 R_0 + a_0 \right) = 0, \\ R_0 \left(\frac{1}{2} a_4 R_0^2 + \frac{1}{2} a_2 R_0 + a_0 \right) + T_0 - 2\pi = 0. \end{cases} \quad (1.32)$$

Из первого уравнения системы (1.32) следует, что количество предельных циклов уравнения (1.31) определяется количеством положительных вещественных корней квадратного уравнения

$$\frac{1}{2} a_4 R_0^2 + \frac{1}{2} a_2 R_0 + a_0 = 0. \quad (1.33)$$

В зависимости от коэффициентов полинома $P^{(4)}(x)$ уравнение (1.31) может иметь один или два предельных цикла или не иметь их вовсе. Для случая $a_4 \neq 0$ приведём уравнение (1.33) к упрощённому виду

$$R_0^2 + \alpha R_0 + \beta = 0,$$

где $\alpha = \frac{a_2}{a_4}$, $\beta = \frac{2a_0}{a_4}$.

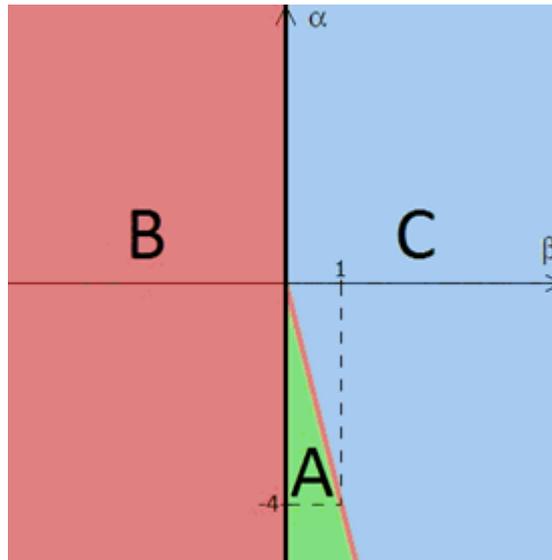


Рисунок 1.2 – плоскость $0\alpha\beta$, где

$$A = \{(\alpha, \beta): \beta > 0, \alpha < -4\beta\},$$

$$B = \{(\alpha, \beta): (\alpha < 0, \alpha = -4\beta) \cup (\alpha \neq 0, \beta \leq 0)\},$$

$$C = \{(\alpha, \beta): (\beta \geq 0, \alpha > -4\beta) \cup (\alpha = 0, \beta = 0)\}.$$

Разделим плоскость $0\alpha\beta$ на три сектора A , B , C (рисунок 1.2). Тогда уравнение (1.31)

- 1) имеет два предельных цикла, если $(\alpha, \beta) \in A$;
- 2) имеет один предельный цикл, если $(\alpha, \beta) \in B$;
- 3) не имеет предельных циклов, если $(\alpha, \beta) \in C$.

Если $a_4 = 0$, то уравнение (1.31) имеет один предельный цикл тогда и только тогда, когда параметры a_0 и a_2 действительные, ненулевые и имеют разные знаки. Для других a_0 и a_2 предельных циклов не существует.

2. Системы слабо связанных осцилляторов

2.1. Прямое разложение неавтономных интегралов системы слабо связанных осцилляторов

В настоящей главе рассматриваются квазиконсервативные системы, представляющих собой n слабо связанных нелинейных осцилляторов с одной степенью свободы. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x}_k = \frac{\partial H_k}{\partial y_k} + \varepsilon f_{1k}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) + \varepsilon^2 f_{2k}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) + \dots \\ \dot{y}_k = -\frac{\partial H_k}{\partial x_k} + \varepsilon g_{1k}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) + \varepsilon^2 g_{2k}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) + \dots \\ k = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (2.1)$$

Функция Гамильтона невозмущённой системы есть сумма функций Гамильтона каждого осциллятора:

$$H = H(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = H_1(x_1, y_1) + \dots + H_n(x_n, y_n) = H_1 + \dots + H_n. \quad (2.2)$$

Будем искать неавтономные интегралы системы (2.1) в виде прямого разложения в ряд по малому параметру ε :

$$\begin{aligned} I(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t) = & I_0^{(1)}(x_1, y_1) + \dots + I_0^{(n)}(x_n, y_n) + \\ & + \varepsilon \left[I_1^{(1)}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t) + I_1^{(n)}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t) \right] + \\ & + \varepsilon^2 \left[I_2^{(1)}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t) + \dots + I_2^{(n)}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t) \right] + \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

Слабая связь осцилляторов позволяет искать коэффициенты $I_k^{(1)}, \dots, I_k^{(n)}$ по отдельности. Введём обозначения

$$\begin{aligned} I(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t) = I, \quad f_{ik}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = f_{ik}, \\ g_{ik}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = g_{ik}. \end{aligned}$$

Так как невозмущённая система допускает интеграл $H(x, y) = h = const$, полагаем

$$I_0^{(1)}(x_1, y_1) = H_1, \dots, I_0^{(n)}(x_n, y_n) = H_n.$$

Уравнения для остальных коэффициентов разложения следуют из критерия того, что функция I есть неавтономный интеграл системы (2.1). Имеем

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d(H_1 + \dots + H_n)}{dt} + \varepsilon \left[\frac{dI_1^{(1)}}{dt} + \dots + \frac{dI_1^{(n)}}{dt} \right] + \dots = 0,$$

где

$$\frac{d(H_1 + \dots + H_n)}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial H_1}{\partial y_1} \dot{y}_1 + \dots + \frac{\partial H_n}{\partial x_n} \dot{x}_n + \frac{\partial H_n}{\partial y_n} \dot{y}_n, \quad (2.4)$$

$$\frac{dI_i^{(k)}}{dt} = \frac{\partial I_i^{(k)}}{\partial t} + \frac{\partial I_i^{(k)}}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial I_i^{(k)}}{\partial y_1} \dot{y}_1 + \dots + \frac{\partial I_i^{(k)}}{\partial x_n} \dot{x}_n + \frac{\partial I_i^{(k)}}{\partial y_n} \dot{y}_n, \quad (2.5)$$

$$i = 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Подставим правые части системы (2.1) в уравнения (2.4) и (2.5). Со всеми подстановками будем иметь:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial H_k}{\partial x_k} \left[\frac{\partial H_k}{\partial y_k} + \varepsilon f_{1k} + \varepsilon^2 f_{2k} + \dots \right] + \frac{\partial H_k}{\partial y_k} \left[-\frac{\partial H_k}{\partial x_k} + \varepsilon g_{1k} + \varepsilon^2 g_{2k} + \dots \right] + \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \left[\frac{\partial I_i^{(k)}}{\partial t} + \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial I_i^{(k)}}{\partial x_l} \left[\frac{\partial H_l}{\partial y_l} + \varepsilon f_{1l} + \varepsilon^2 f_{2l} + \dots \right] + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial I_i^{(k)}}{\partial y_l} \left[-\frac{\partial H_l}{\partial x_l} + \varepsilon g_{1l} + \varepsilon^2 g_{2l} + \dots \right] \right) \right]. \end{aligned}$$

Раскроем скобки и сгруппируем слагаемые по степеням параметра ε .

Приравняв каждую скобку к нулю, получаем уравнения

$$\begin{aligned} \varepsilon^0: & \frac{\partial H_k}{\partial x_k} \frac{\partial H_k}{\partial y_k} - \frac{\partial H_k}{\partial y_k} \frac{\partial H_k}{\partial x_k} = 0, \\ \varepsilon^i: & \frac{\partial I_i^{(k)}}{\partial t} + \{I_i^{(k)}, H\} = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} \{I_i^{(k)}, H\} &= \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial I_i^{(k)}}{\partial x_l} \frac{\partial H_l}{\partial y_l} - \frac{\partial I_i^{(k)}}{\partial y_l} \frac{\partial H_l}{\partial x_l} \right), \\ F_i &= -\frac{\partial H_k}{\partial x_k} f_{ik} - \frac{\partial H_1}{\partial y_k} g_{ik} - \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^{i-1} \left(\frac{\partial I_l^{(k)}}{\partial x_m} f_{(i-l)m} + \frac{\partial I_l^{(k)}}{\partial y_m} g_{(i-l)m} \right). \end{aligned}$$

Решив уравнение (2.6), мы определим коэффициенты $I_i^{(k)}$ разложения (2.3).

Уравнение (2.6) такого же типа, как уравнение (1.6) для системы с одной степенью

свободы. Напомним, что интегрирование уравнения (1.6) и, следовательно, уравнения (2.6) требует обращения функций. В следующем параграфе мы предложим эффективный метод построения прямого разложения неавтономных интегралов системы (2.1).

2.2. Прямое разложение неавтономных интегралов системы слабо связанных осцилляторов в переменных действие-угол

Из устройства функции Гамильтона (2.2) следует интегрируемость по Лиувиллю невозмущённой системы. Более того, возможно разделение переменных и эффективное введение переменных действие-угол. Сделаем в системе (2.1) замену переменных

$$\begin{cases} x_k = X_k(r_k, \varphi_k), \\ y_k = Y_k(r_k, \varphi_k), \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.7)$$

Введём для краткой записи обозначения

$$\begin{aligned} I(r_1, \dots, r_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n, t) &= I, & f_{ik}(r_1, \dots, r_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n) &= f_{ik}, \\ g_{ik}(r_1, \dots, r_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n) &= g_{ik}, & X_k(r_k, \varphi_k) &= X_k, & Y_k(r_k, \varphi_k) &= Y_k. \end{aligned}$$

Система уравнений движения в переменных действие-угол невозмущённой системы имеет вид

$$\begin{cases} \dot{r}_k = \frac{\partial X_k}{\partial \varphi_k} (\varepsilon g_{1k} + \varepsilon^2 g_{2k} + \dots) - \frac{\partial Y_k}{\partial \varphi_k} (\varepsilon f_{1k} + \varepsilon^2 f_{2k} + \dots), \\ \dot{\varphi}_k = \omega_k(r_k) + \frac{\partial Y_k}{\partial r_k} (\varepsilon f_{1k} + \varepsilon^2 f_{2k} + \dots) - \frac{\partial X_k}{\partial r_k} (\varepsilon g_{1k} + \varepsilon^2 g_{2k} + \dots), \\ k = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (2.8)$$

где $\omega_k(r_k) = \frac{\partial H_k}{\partial r_k}$ — частота k -го осциллятора. Переменные r_k называются переменными действия, φ_k — углами. Функция Гамильтона невозмущённой системы в новых переменных есть

$$H = H_1(r_1) + \dots + H_n(r_n) = H_1 + \dots + H_n.$$

Как и в предыдущем параграфе настоящей главы, неавтономный интеграл системы (2.8) построим в виде прямого разложения по малому параметру ε :

$$I = H_1 + \dots + H_n + \varepsilon \left(I_1^{(1)} + \dots + I_1^{(n)} \right) + \varepsilon^2 \left(I_2^{(1)} + \dots + I_2^{(n)} \right) + \dots \quad (2.9)$$

Критерий неавтономного интеграла даёт уравнение

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} = \frac{d(H_1 + \dots + H_n)}{dt} + \varepsilon \left(\frac{dI_1^{(1)}}{dt} + \dots + \frac{dI_1^{(n)}}{dt} \right) + \\ + \varepsilon^2 \left(\frac{dI_2^{(1)}}{dt} + \dots + \frac{dI_2^{(n)}}{dt} \right) + \dots = 0, \end{aligned}$$

где

$$\frac{d(H_1 + \dots + H_n)}{dt} = \omega_1(r_1)\dot{r}_1 + \dots + \omega_n(r_n)\dot{r}_n, \quad (2.10)$$

$$\frac{dI_i^{(k)}}{dt} = \frac{\partial I_i^{(k)}}{\partial t} + \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial I_i^{(k)}}{\partial r_l} \dot{r}_l + \frac{\partial I_i^{(k)}}{\partial \varphi_l} \dot{\varphi}_l \right), \quad i = 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.11)$$

Подстановка правых частей системы (2.8) в уравнения (2.10) и (2.11) даёт следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \omega_k(r_k) \left(\frac{\partial X_k}{\partial \varphi_k} (\varepsilon g_{1k} + \varepsilon^2 g_{2k} + \dots) - \frac{\partial Y_k}{\partial \varphi_k} (\varepsilon f_{1k} + \varepsilon^2 f_{2k} + \dots) \right) + \\ \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \left[\frac{\partial I_i^{(k)}}{\partial t} + \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial I_i^{(k)}}{\partial r_l} \left[\frac{\partial X_l}{\partial \varphi_l} (\varepsilon g_{1l} + \varepsilon^2 g_{2l} + \dots) - \frac{\partial Y_l}{\partial \varphi_l} (\varepsilon f_{1l} + \varepsilon^2 f_{2l} + \dots) \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial I_i^{(k)}}{\partial \varphi_l} \left[\omega_l(r_l) + \frac{\partial Y_l}{\partial r_l} (\varepsilon f_{1l} + \varepsilon^2 f_{2l} + \dots) - \frac{\partial X_l}{\partial r_l} (\varepsilon g_{1l} + \varepsilon^2 g_{2l} + \dots) \right] \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Раскроем скобки и сгруппируем слагаемые по равным степеням параметра ε .

Приравняв коэффициент при ε^i к нулю, имеем уравнения

$$\varepsilon^i: \frac{\partial I_i^{(k)}}{\partial t} + \frac{\partial I_i^{(k)}}{\partial \varphi_1} \omega_1(r_1) + \dots + \frac{\partial I_i^{(k)}}{\partial \varphi_n} \omega_n(r_n) = F_i^{(k)}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (2.12)$$

где

$$\begin{aligned} F_i^{(k)} = -\omega_k(r_k) \left[\frac{\partial X_k}{\partial \varphi_k} g_{ik} - \frac{\partial Y_k}{\partial \varphi_k} f_{ik} \right] - \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^{i-1} \left(\frac{\partial I_l}{\partial r_m} \left[\frac{\partial X_m}{\partial \varphi_m} g_{(i-l)m} - \frac{\partial Y_m}{\partial \varphi_m} f_{(i-l)m} \right] - \right. \\ \left. - \frac{\partial I_l}{\partial \varphi_m} \left[\frac{\partial Y_m}{\partial r_m} f_{(i-l)m} - \frac{\partial X_m}{\partial r_m} g_{(i-l)m} \right] \right). \end{aligned}$$

Решив уравнения (2.12) мы получаем коэффициенты $I_i^{(k)}$ разложения (2.9).

Отметим, что решение однородного уравнения

$$\frac{\partial I_i^{(k)}}{\partial t} + \frac{\partial I_i^{(k)}}{\partial \varphi_1} \omega_1(r_1) + \dots + \frac{\partial I_i^{(k)}}{\partial \varphi_n} \omega_n(r_n) = 0$$

есть

$$I_i = S_i(r_1, \dots, r_n, \omega_1(r_1)t - \varphi_1, \dots, \omega_n(r_n)t - \varphi_n).$$

Построенное разложение (2.9) определяет всё семейство неавтономных интегралов системы (2.8).

2.3. Обобщение критерия существования периодических решений в терминах неавтономных интегралов

Для обобщения теоремы 2 из параграфа 1.4 на системы слабо связанных осцилляторов (2.1) необходимо сначала обобщить утверждения 1 и 2 из первой главы.

Утверждение 3 (обобщение утверждения 1). Пусть $I(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t)$ – неавтономный интеграл системы (2.1), допускающей периодическое решение $x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t), y_1 = y_1(t), \dots, y_n = y_n(t)$ с периодом T . Тогда для любого t выполнено соотношение

$$\begin{aligned} & I(x_1(t), \dots, x_n(t), y_1(t), \dots, y_n(t), t) = \\ & = I(x_1(t+T), \dots, x_n(t+T), y_1(t+T), \dots, y_n(t+T), t+T) = \\ & = I(x_1(t), \dots, x_n(t), y_1(t), \dots, y_n(t), t+T). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Рассмотрим систему (2.1) в переменных действие-угол (2.7). Если $x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t), y_1 = y_1(t), \dots, y_n = y_n(t)$ – T -периодическое решение системы (2.1), то соответствующие $r_1 = r_1(t), \dots, r_n = r_n(t)$ – T -периодические функции, а $\varphi_1 = \varphi_1(t), \dots, \varphi_n = \varphi_n(t)$ – монотонно возрастающие. Для последних функций выполнены соотношения вида

$$\varphi_k(t+T) = \varphi_k(t) + 2\pi l_k,$$

где $l_k \in \mathbb{Z}, l_k \neq 0, k = 1, 2, \dots, n$.

то $R_0^{(1)}, \dots, R_0^{(n)}, \Phi_0^{(1)}, \dots, \Phi_0^{(n)}$ — начальные условия решения $r_1 = r_1(t), \dots, r_n = r_n(t), \varphi_1 = \varphi_1(t), \dots, \varphi_n = \varphi_n(t)$ системы (2.8), которое соответствует T -периодическому решению $x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t), y_1 = y_1(t), \dots, y_n = y_n(t)$ системы (2.1).

В силу слабой связи осцилляторов доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2. Для определения разложений (2.16) до порядка ε^i включительно, необходимо знать разложение $2n$ независимых неавтономных интегралов I_1, \dots, I_{2n} до порядка ε^{i+1} включительно.

3. Некоторые кусочно-линейные системы

3.1. Ящик на конвейерной ленте

Рассмотрим ящик, прикрепленный пружинами к неподвижным стенкам, находящийся на подвижной ленте конвейера (рисунок 3.1)

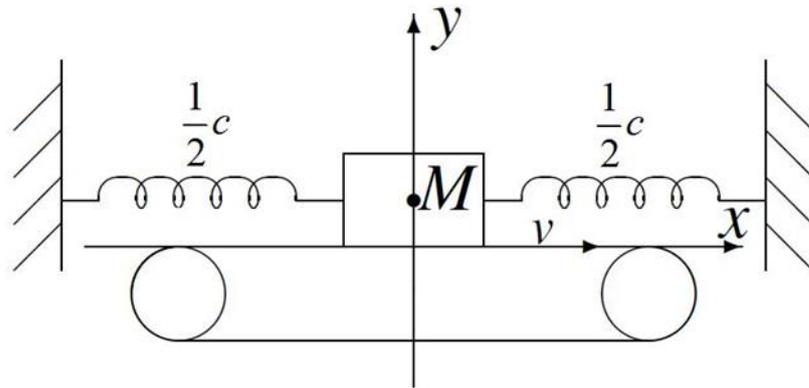


Рисунок 3.1 – Ящик на ленте конвейера.

Пусть M – масса ящика, $\frac{1}{2}c$ – коэффициент жесткости каждой пружины, f – коэффициент сухого трения Амонтона-Кулона, v – скорость движения ленты. Уравнение движения ящика имеет вид

$$M\ddot{X} + cX = -fgM \operatorname{sign}(\dot{X} - v), \quad (3.1)$$

где X – координата ящика на ленте. В безразмерных переменных уравнение движения есть

$$x'' + x = -f \operatorname{sign}(x' - 1). \quad (3.2)$$

Мы получили уравнение движения в предположении, что на ящик действует сила трения скольжения со стороны плоскости. Теперь найдём зону залипания, когда ящик движется вместе с лентой конвейера, исходя из неравенства $|F| \leq f$, где F – (безразмерная) сила трения покоя, действующая на ящик. В фазовом пространстве зона залипания принадлежит линии разрыва $x' = 1$ уравнения (3.2). Так как при залипании ускорение ящика равно нулю, то из второго закона Ньютона следует, что $x = F$. Следовательно, зона залипания определяется соотношениями

$$|x| \leq f, \quad x' = 1. \quad (3.3)$$

Вне линии разрыва уравнение (3.1) легко решается. При $x' > 1$ имеем

$$x'' + x = -f,$$

поэтому траектории системы есть те части окружностей

$$\frac{1}{2}x'^2 + \frac{1}{2}x^2 + fx = C, \quad (3.4)$$

что лежат выше прямой $x' = 1$. Ни одна из них не лежит в полуплоскости целиком.

Если же $x' < 1$, уравнение движения имеет вид

$$x'' + x = -f.$$

Траектории системы представляют собой части окружностей

$$\frac{1}{2}x'^2 + \frac{1}{2}x^2 - fx = C, \quad (3.5)$$

лежащие ниже прямой $x' = 1$. Если радиус $R = \sqrt{2C + f^2} < 1$, то есть $-\frac{1}{2}f^2 < C < \frac{1}{2} - \frac{1}{2}f^2$, окружность (3.5) целиком принадлежит полуплоскости $x' < 1$. Говоря точнее, а) при $C = -\frac{1}{2}f^2$ траектория системы есть положение равновесия $x = f$, $x' = 0$; б) при $-\frac{1}{2}f^2 < C < \frac{1}{2} - \frac{1}{2}f^2$ траектории есть окружности с центром в положении равновесия, лежащие в полуплоскости $x' < 1$ целиком; в) при $C = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}f^2$ окружность снизу касается линии разрыва в точке $(f, 1)$. Окружности из пункта б) назовём внутренними, окружность из пункта в) – предельной.

Траектории, отличные от описанных выше, состоят из конечного числа дуг окружностей (3.4) и (3.5), сменяющих друг друга с уменьшением константы C . Траектории непрерывны, гладкие вне линии разрыва; на линии разрыва существуют односторонние производные. Каждая из этих траекторий заканчивается в некоторой точке зоны залипания (3.3). Движение вдоль зоны залипания заканчивается на предельной окружности, где остаётся навечно. На рисунке 3.2 зона залипания выделена красным, внутренние окружности – жёлтыми, предельная окружность – фиолетовым, прочие траектории маркированы синим цветом. Коэффициент трения $f = 0.7$.

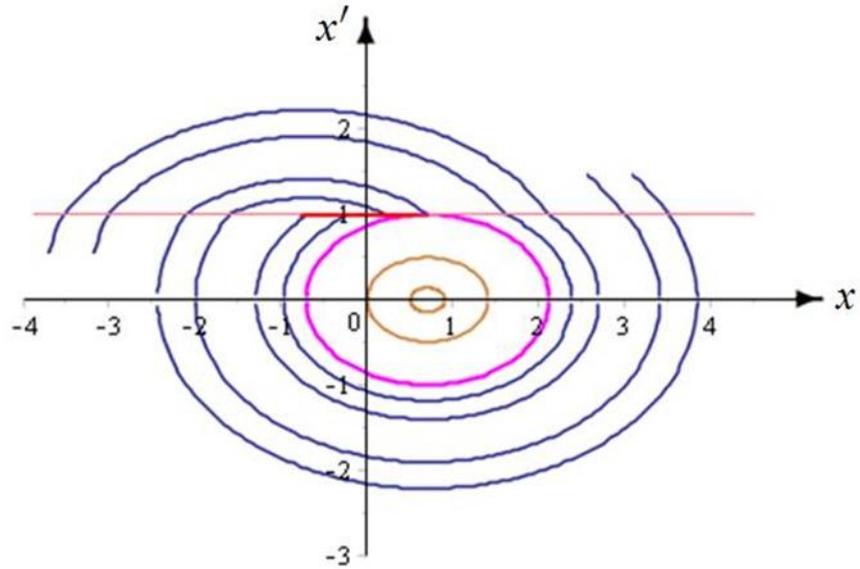


Рисунок 3.2 – Фазовый портрет ящика на конвейерной ленте.

Если склеить все точки зоны залипания в одну, то отображение Пуанкаре, определённое на линии разрыва, будет непрерывным. Можно построить граф разбиения отображения Пуанкаре (рисунок 3.3). Вершины A_n , $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, соответствуют отрезкам на линии разрыва, A_* – склеенной в одну точку зоне залипания. Граф дополнен вершиной A_0 , отвечающей предельной окружности. Таким образом, предельная окружность есть предельный цикл, внешняя для предельной окружности область – область притяжения предельного цикла.

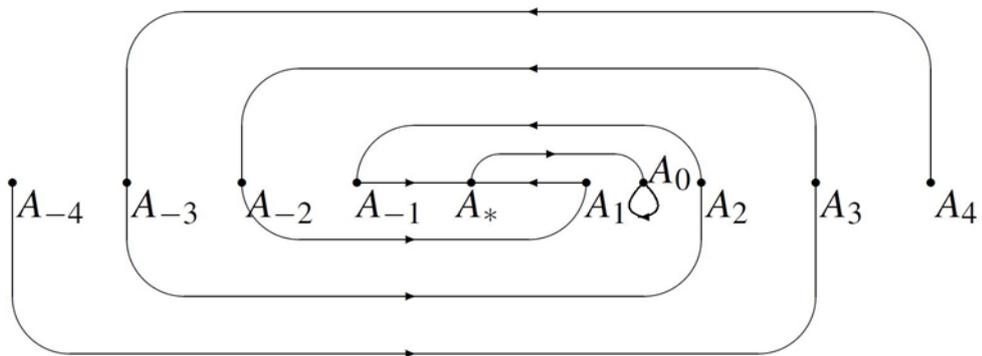


Рисунок 3.3 – Граф разбиения отображения Пуанкаре на линии разрыва.

3.2. Ящик с внутренним осциллятором на горизонтальной плоскости

Тяжёлый ящик массой M находится на горизонтальной плоскости. Внутри ящика на закреплённой горизонтальной невесомой спице длины $2L$ движется материальная точка массы m , присоединённая к точкам крепления спицы пружинами с коэффициентом жёсткости $\frac{k}{2}$ каждая (массами пружин пренебрегаем). Ящик может поступательно перемещаться по плоскости без изменения пятна контакта и силы давления. Между ящиком и плоскостью действует сила сухого трения, подчинённая закону Амонтона–Кулона, с коэффициентом f (рисунок 3.4).

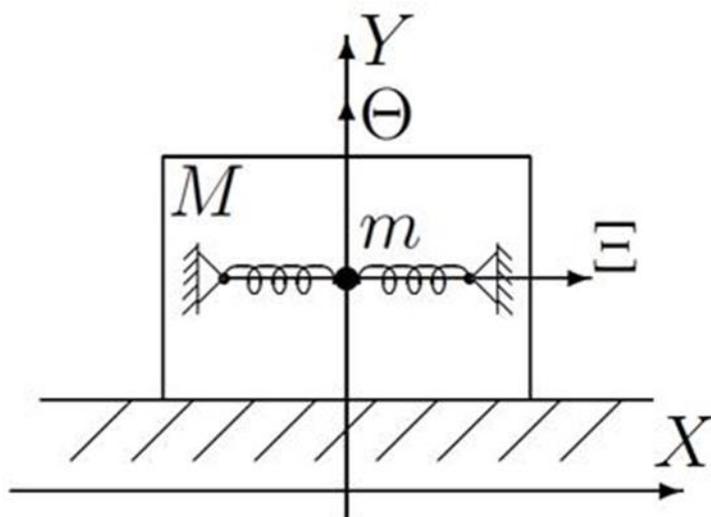


Рисунок 3.4 – Ящик с внутренним осциллятором на горизонтальной плоскости.

Для системы «ящик, материальная точка» с двумя степенями свободы введём обобщённые координаты: X – отклонение центра ящика от оси OY неподвижной системы координат, Ξ – отклонение материальной точки от относительного положения равновесия внутри ящика. Получим уравнения Лагранжа второго рода, описывающие движение системы. Единственная консервативная сила в системе – это сила упругости; её потенциальная энергия есть $P = \frac{k}{2} \Xi^2$. Обобщённые силы, соответствующие силе трения скольжения, имеют вид $Q_{\Xi} = 0$ и $Q_X = -fg(M + m) \text{sign}(\dot{X})$. Кинетическая энергия системы есть

$$T = \frac{M + m}{2} \dot{X}^2 + \frac{m}{2} \dot{\Xi}^2 + m\dot{X}\dot{\Xi}.$$

Система уравнений движения имеет вид

$$\begin{cases} m\ddot{\Xi} + m\ddot{X} = -k\Xi, \\ m\ddot{\Xi} + (M + m)\ddot{X} = -fg(M + m) \operatorname{sign}(\dot{X}). \end{cases} \quad (3.6)$$

После приведения к безразмерному виду и нормальной форме Коши уравнения движения предстают в виде

$$\begin{cases} \xi'' = -\xi + \delta\mu \operatorname{sign}(x'), \\ x'' = \mu\xi - \delta\mu \operatorname{sign}(x'), \end{cases} \quad (3.7)$$

где x , ξ – безразмерные координаты, связанные с размерными координатами соотношениями $X = xL$, $\Xi = \xi L$, штрихом обозначена производная по безразмерному времени τ , связанным с размерным временем соотношением $\tau = wt$, где $w = \frac{k(M+m)}{Mm}$. В системе (3.7) участвуют два безразмерных параметра $\delta = \frac{fg(M+m)}{kL}$ и $\mu = \frac{m}{M+m}$.

Вернёмся к размерным координатам и найдём зону залипания ящика на горизонтальной плоскости. В зоне залипания на ящик действует сила трения покоя, а материальная точка продолжает движение относительно ящика. Условие равновесия ящика имеет вид

$$\vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N} + M\vec{g} + \vec{R} = 0, \quad (3.8)$$

где $\vec{F}_{\text{тр}}$ – сила трения покоя, \vec{N} – сила нормальной реакции со стороны плоскости, $M\vec{g}$ – сила тяжести, \vec{R} – сумма сил реакции, действующих на ящик со стороны спицы. Принцип Д’Аламбера даёт следующие выражения для проекций силы реакции: $R_X = k\Xi$, $R_Y = -mg$. Проектируя уравнение (3.8) на оси неподвижной системы координат OXY , имеем

$$\begin{aligned} OX: F_{\text{тр}x} + R_X &= 0, \\ OY: N + R_Y - Mg &= 0. \end{aligned}$$

Принимая во внимание формулы для R_X и R_Y , получим $F_{\text{тр}x} = -k\Xi$, $N = (M + m)g$. Залипание возможно, если сила трения покоя не превосходит силы трения скольжения. Тогда из неравенства $|\vec{F}_{\text{тр}}| \leq f|\vec{N}|$ следует условие зоны застоя

$$|k\Xi| \leq f(M + m)g. \quad (3.9)$$

В безразмерных переменных условие (3.9) имеет простой вид

$$|\xi| \leq \delta. \quad (3.10)$$

В зоне залипания материальная точка продолжает движение относительно ящика. Уравнение движения материальной точки в безразмерных переменных имеет вид

$$\xi'' + (1 - \mu)\xi = 0, \quad (3.11)$$

поскольку единственная горизонтальная сила, действующая при этом на точку, есть сила упругости (сила инерции равна нулю, потому что ящик покоится). Интеграл энергии материальной точки $\frac{1}{2}\xi'^2 + \frac{1}{2}(1 - \mu)\xi^2 = C$ даёт эллиптические траектории в зоне залипания. Не все траектории полностью принадлежат зоне залипания (3.10). На рисунке 3.5 жирной точкой показано положение равновесия ($C = 0$); красные эллипсы соответствуют вечным колебаниям материальной точки в зоне залипания ящика ($0 < C < \frac{1-\mu}{2}\delta^2$); зелёным цветом показан предельный эллипс с константой $C = \frac{1-\mu}{2}\delta^2$; синим цветом показаны дуги эллипсов с константой $C > \frac{1-\mu}{2}\delta^2$, принадлежащие зоне залипания (3.10).

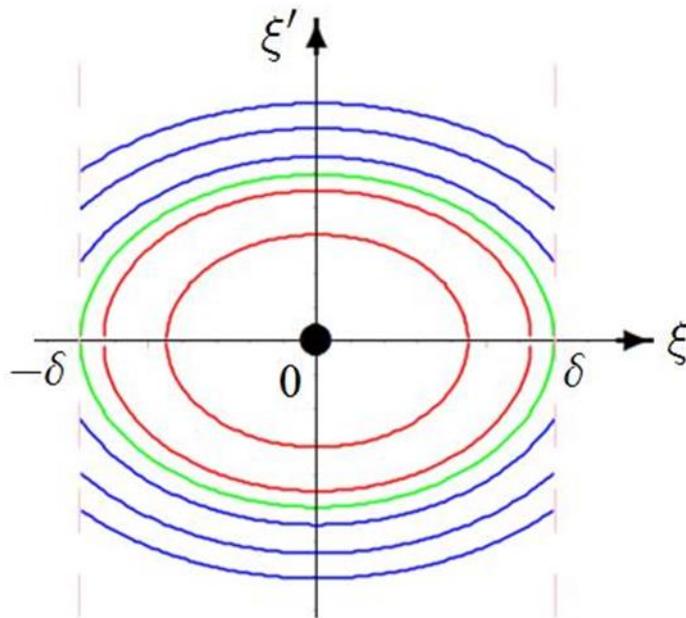


Рисунок 3.5 – Движение материальной точки в зоне залипания ящика.

Найдём общее решение уравнений движения (3.7) в областях непрерывности $x' > 0$ и $x' < 0$. Общее решение первого уравнения системы (3.7) имеет вид

$$\xi = \mu(\xi_0 - \delta\mu \operatorname{sign}(x'))\cos(\tau) + \xi_1\sin(\tau) + \delta\mu \operatorname{sign}(x'), \quad (3.12)$$

где $\xi(0) = \xi_0$, $\xi'(0) = \xi_1$ – начальные условия для материальной точки. Подставим (3.12) во второе уравнение системы (3.7):

$$x'' = \mu(\xi_0 - \delta\mu \operatorname{sign}(x'))\cos(\tau) + \mu\xi_1\sin(\tau) + \delta\mu(\mu - 1) \operatorname{sign}(x'). \quad (3.13)$$

Находим общее решение уравнения (3.13):

$$x = (x_1 + \mu\xi_1)\tau + x_0 + \mu(1 - \cos(\tau))(\xi_0 - \delta\mu \operatorname{sign}(x')) - \mu\xi_1\sin(\tau) + \frac{\tau^2}{2}\delta\mu(\mu - 1) \operatorname{sign}(x'), \quad (3.14)$$

где $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_1$ – начальные условия для ящика. Отметим, что формулы (3.12), (3.14) определяют общее решение в фазовом пространстве системы (3.7) лишь до гиперплоскости разрыва $x' = 0$. При движении через гиперплоскость разрыва следует изменить начальные условия (если только траектория не оказывается в зоне залипания).

На основании численных экспериментов по построению траекторий системы (3.7) для некоторых частных начальных условий можно сделать следующий вывод относительно финальных движений ящика. Вначале ящик поступательно движется по плоскости в одну сторону. Затем, теряя энергию из-за трения, первый раз оказывается в зоне залипания – материальная точка при этом движется по синей дуге эллипса. После выхода из зоны залипания ящик начинает движение в другую сторону и через некоторое время вновь оказывается в зоне залипания. Через конечное число итераций залипания ящик оказывается в зоне залипания, но материальная точка движется уже по внутреннему (или предельному) эллипсу, поэтому ящик остаётся в зоне залипания навечно.

3.3. Существование и единственность решения в будущем задачи Коши для систем с разрывными правыми частями

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f(x), \quad (3.15)$$

где $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, Ω — область в \mathbb{R}^d . Укажем следующие условия на область Ω и функцию f :

- 1) Ω состоит из конечного числа подобластей Ω_k с общей границей M ;
- 2) в каждой подобласти Ω_k отображение непрерывно дифференцируемо;
- 3) для каждой точки $x \in M$ существует конечный предел отображения f по любой из подобластей Ω_k , для которых x есть граничная точка.

Рассмотрим дифференциальное включение вида

$$\dot{x} \in F(x), \quad (3.16)$$

где

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in M, \\ \text{выпуклая оболочка предельных} \\ \text{значений } f(\hat{x}), & \hat{x} \rightarrow x, x \in M. \end{cases}$$

Определение 3. Векторная функция $x: [t_0; t_1] \rightarrow \Omega$ называется решением дифференциального включения (3.16), если она непрерывна по $t \in [t_0; t_1]$, а её производная $\dot{x} \in F(x(t))$ для почти всех (в смысле меры Лебега) $t \in [t_0; t_1]$.

Определение дифференциального включения позволяет определить решение системы (3.15) с разрывными правыми частями.

Определение 4. Векторная функция $x: [t_0; t_1] \rightarrow \Omega$ называется решением по Филиппову системы (3.15), если она есть решение соответствующего дифференциального включения (3.16).

А.Ф. Филипповым доказана следующая теорема [29, 30].

Теорема 4. Пусть отображение $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ удовлетворяет условиям 1)–3), $x_0 \in \Omega$. Тогда существует единственное решение по Филиппову $x \in [t_0; t_0 + \tau] \rightarrow \Omega$ уравнения (3.15), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$. Здесь $\tau > 0$ и зависит от начальной точки x_0 .

В отличие от классических теорем существования и единственности решения задачи Коши (например, теоремы Пикара–Линделёфа [39]), приведённая выше теорема утверждает единственность решения в будущем времени. Легко видеть,

что правые части уравнений движения (3.6) или (3.7) удовлетворяют условиям теоремы 4, откуда следует детерминированность в будущем исследуемой модели механической системы с сухим трением. Оказывается, определение 4 влечёт справедливость закона Амонтона–Кулона для системы (3.6) или (3.7), когда сила трения покоя не превосходит по модулю силу трения скольжения [30]. В частности, можно строго говорить о зоне залипания и финальных движениях ящика в ней.

4. Кусочно-линейный осциллятор с двумя степенями свободы

4.1 Постановка задачи

В настоящей главе исследуется механическая система с двумя степенями свободы, которая состоит из двух соединенных пружиной ящиков на ленточном конвейере. Также каждый из ящиков соединен пружиной с ближайшей неподвижной стеной. Жесткости всех пружин равны (рисунок 4.1).

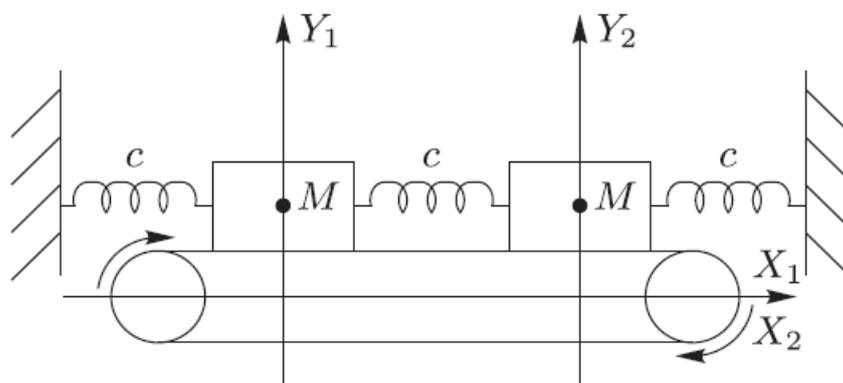


Рисунок 4.1 – Система из двух ящиков на конвейерной ленте.

Между ящиком и лентой конвейера действует сила сухого трения, подчинённая закону Амонтона–Кулона, с коэффициентом f . Среди всех сил, действующих на эту систему, сила сухого трения – единственная неконсервативная. Считая, что она много меньше всех остальных сил, изучаемая система становится квазиконсервативной.

Уравнения движения изучаемой системы имеют вид

$$\begin{cases} M\ddot{X}_1 + cX_1 - c(X_2 - X_1) = -fgM \operatorname{sign}(\dot{X}_1 - v), \\ M\ddot{X}_2 + cX_2 - c(X_1 - X_2) = -fgM \operatorname{sign}(\dot{X}_2 - v), \end{cases} \quad (4.1)$$

где M – масса одного ящика, c – жёсткость одной пружины, g – ускорение свободного падения, f – коэффициент сухого трения, а v – скорость движения ленты конвейера.

Обезразмерим систему (4.1), сделав замену

$$\begin{cases} X_1 = vx_1\sqrt{M/c} \\ X_2 = vx_2\sqrt{M/c} \\ t = \tau\sqrt{M/c} \end{cases}$$

После обезразмеривания система (4.1) примет вид

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2x_1 - x_2 = -\delta \operatorname{sign}(\dot{x}_1 - 1), \\ \ddot{x}_2 + 2x_2 - x_1 = -\delta \operatorname{sign}(\dot{x}_2 - 1), \end{cases} \quad (4.2)$$

где $\delta = \frac{fg}{v}\sqrt{M/c}$. Так как в δ входит коэффициент сухого трения f , а выше мы условились, что сила трения достаточна мала, то далее будем считать и δ малым параметром.

В системе (4.2) сделаем следующее преобразование к главным координатам:

$$\begin{cases} x_1 = z_1 - z_2, \\ x_2 = z_1 + z_2. \end{cases} \quad (4.3)$$

После этого преобразования система примет вид

$$\begin{cases} \ddot{z}_1 = -z_1 - \frac{\delta}{2} (\operatorname{sign}(\dot{z}_1 + \dot{z}_2 - 1) + \operatorname{sign}(\dot{z}_1 - \dot{z}_2 - 1)), \\ \ddot{z}_2 = -3z_2 - \frac{\delta}{2} (\operatorname{sign}(\dot{z}_1 + \dot{z}_2 - 1) - \operatorname{sign}(\dot{z}_1 - \dot{z}_2 - 1)). \end{cases} \quad (4.4)$$

В системе (4.4) перейдем к переменным действие-угол невозмущённой системы с помощью следующего канонического преобразования переменных:

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{2r_1} \sin(\varphi_1) + \delta, \\ \dot{z}_1 = \sqrt{2r_1} \cos(\varphi_1), \\ z_2 = \sqrt{\frac{2r_1}{\sqrt{3}}} \sin(\varphi_2), \\ \dot{z}_2 = \sqrt{2\sqrt{3}r_1} \cos(\varphi_2). \end{cases} \quad (4.5)$$

Мы сделали сдвиг по одной переменной на константу δ . Замена (4.5) каноническая, как композиция канонической замены и сдвига.

Таким образом система (4.1) приведена к виду, похожему на систему (2.8) из второй главы:

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = -\frac{\delta\sqrt{r_1}\cos(\varphi_1)}{\sqrt{2}}P_1, \\ \dot{\varphi}_1 = 1 + \frac{\delta\sin(\varphi_1)}{2\sqrt{2r_1}}P_1, \\ \dot{r}_2 = -\frac{\delta\sqrt{r_2}\cos(\varphi_2)}{\sqrt{2\sqrt{3}}}P_2, \\ \dot{\varphi}_2 = \sqrt{3} + \frac{\delta\sin(\varphi_2)}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2r_2}}P_2, \end{cases} \quad (4.6)$$

где

$$\begin{aligned} P_1 &= \text{sign}\left(\sqrt{2r_1}\cos(\varphi_1) + \sqrt{2\sqrt{3}r_2}\cos(\varphi_2) - 1\right) + \\ &+ \text{sign}\left(\sqrt{2r_1}\cos(\varphi_1) - \sqrt{2\sqrt{3}r_2}\cos(\varphi_2) - 1\right) + 2, \\ P_2 &= \text{sign}\left(\sqrt{2r_1}\cos(\varphi_1) + \sqrt{2\sqrt{3}r_2}\cos(\varphi_2) - 1\right) - \\ &- \text{sign}\left(\sqrt{2r_1}\cos(\varphi_1) - \sqrt{2\sqrt{3}r_2}\cos(\varphi_2) - 1\right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

4.2. Исследование усреднённых уравнений система

Усредним уравнения для r_1 и r_2 системы (4.6):

$$\begin{cases} \dot{\bar{r}}_1 = -\frac{\delta\sqrt{r_1}}{(2\pi)^2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\varphi_1)P_1d\varphi_1d\varphi_2, \\ \dot{\bar{r}}_2 = -\frac{\delta\sqrt{r_2}}{(2\pi)^2\sqrt{2\sqrt{3}}}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\varphi_2)P_2d\varphi_1d\varphi_2. \end{cases} \quad (4.8)$$

К сожалению, представить в явном виде правые части уравнений (4.8) не удалось.

Функции P_1 , P_2 , определяемые формулами (4.7), тождественно равны нулю, если выполнено следующее условие

$$\sqrt{2r_1} + \sqrt{2\sqrt{3}r_2} < 1, \quad r_1 \geq 0, \quad r_2 \geq 0. \quad (4.9)$$

Правые части усреднённой системы (4.8) всегда отрицательны, если

$$\sqrt{2r_1} + \sqrt{2\sqrt{3}r_2} > 1, \quad r_1 \geq 0, \quad r_2 \geq 0. \quad (4.10)$$

Сначала рассмотрим первое уравнение усреднённой системы (4.8):

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= -\frac{\delta\sqrt{r_1}}{(2\pi)^2\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\varphi_1) P_1 d\varphi_1 d\varphi_2, \\ P_1 &= \left(\text{sign} \left(\sqrt{2r_1} \cos(\varphi_1) + \sqrt{2\sqrt{3}r_2} \cos(\varphi_2) - 1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \text{sign} \left(\sqrt{2r_1} \cos(\varphi_1) - \sqrt{2\sqrt{3}r_2} \cos(\varphi_2) - 1 \right) \right). \end{aligned}$$

Всё, что находится под знаком двойного интеграла, должно быть положительно. Чтобы проверить это, разделим множество, которое пробегает угол φ_1 , на несколько подмножеств.

1) При $\varphi_1 \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, $-1 \leq \cos(\varphi_1) \leq 0$,

$$P_1 = \begin{cases} 0, & \text{при } \forall \varphi_2 \in \Omega_1, \forall r_1, r_2 \geq 0: \sqrt{2r_1} + \sqrt{2\sqrt{3}r_2} > 1, \\ 2, & \text{при } \forall \varphi_2 \in [0; 2\pi] \setminus \Omega_1, \forall r_1, r_2 \geq 0: \sqrt{2r_1} + \sqrt{2\sqrt{3}r_2} > 1, \end{cases}$$

где множество Ω_1 определяется следующей формулой

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \left(\arccos \left(\frac{1 - \sqrt{2r_1} \cos(\varphi_1)}{\sqrt{2\sqrt{3}r_2}} \right); \pi - \arccos \left(\frac{1 - \sqrt{2r_1} \cos(\varphi_1)}{\sqrt{2\sqrt{3}r_2}} \right) \right) \cup \\ &\cup \left(\pi + \arccos \left(\frac{1 - \sqrt{2r_1} \cos(\varphi_1)}{\sqrt{2\sqrt{3}r_2}} \right); 2\pi - \arccos \left(\frac{1 - \sqrt{2r_1} \cos(\varphi_1)}{\sqrt{2\sqrt{3}r_2}} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.11)$$

если $\left| \frac{1 - \sqrt{2r_1} \cos(\varphi_1)}{\sqrt{2\sqrt{3}r_2}} \right| < 1$. Если же $\left| \frac{1 - \sqrt{2r_1} \cos(\varphi_1)}{\sqrt{2\sqrt{3}r_2}} \right| > 1$, то $\Omega_1 = [0; 2\pi]$.

2) При $\varphi_1 \in \left(\arccos \left(\frac{1}{\sqrt{2r_1}} \right); \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi - \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{2r_1}} \right) \right)$, $0 < \cos(\varphi_1) < \frac{1}{\sqrt{2r_1}}$,

$$P_1 = \begin{cases} 0, & \text{при } \varphi_2 \in \Omega_2, \sqrt{2r_1} + \sqrt{2\sqrt{3}r_2} > 1, r_1 \geq 0, r_2 \geq 0, \\ 2, & \text{при } \varphi_2 \in [0; 2\pi] \setminus \Omega_2, \sqrt{2r_1} + \sqrt{2\sqrt{3}r_2} > 1, r_1 \geq 0, r_2 \geq 0, \end{cases}$$

где множество Ω_2 определяется формулой (4.11). Если $\frac{1}{\sqrt{2r_1}} > 1$, то случай 2) имеет место для $\varphi_1 \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

3) При $\varphi_1 \in \left[-\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2r_1}}\right); \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2r_1}}\right)\right]$, $\frac{1}{\sqrt{2r_1}} \leq \cos(\varphi_1) \leq 1$,

$$P_1 = \begin{cases} 4, & \text{при } \varphi_2 \in \Omega_3, r_1, r_2 \geq 0: \sqrt{2r_1} + \sqrt{2\sqrt{3}r_2} > 1, \\ 2, & \text{при } \varphi_2 \in [0; 2\pi] \setminus \Omega_3, r_1, r_2 \geq 0: \sqrt{2r_1} + \sqrt{2\sqrt{3}r_2} > 1, \end{cases}$$

где множество Ω_3 определяется формулой (4.11). Если $\frac{1}{\sqrt{2r_1}} > 1$, то случай 3) места не имеет.

Функция $\cos(\varphi_1)P_1$ отрицательна только в случае 1) при $\varphi_2 \in [0; 2\pi] \setminus \Omega_1$. Из формулы (4.11) следует, что $\Omega_1 \supseteq \Omega_2$. Тогда правая часть первого уравнения системы (4.8) всегда отрицательная (или нулевая) при условии (4.10).

Теперь рассмотрим второе уравнение усреднённой системы (4.8):

$$\dot{r}_2 = -\frac{\delta\sqrt{r_2}}{(2\pi)^2\sqrt{2\sqrt{3}}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\varphi_2)P_2 d\varphi_1 d\varphi_2,$$

$$P_2 = \left(\text{sign}\left(\sqrt{2r_1} \cos(\varphi_1) + \sqrt{2\sqrt{3}r_2} \cos(\varphi_2) - 1\right) - \text{sign}\left(\sqrt{2r_1} \cos(\varphi_1) - \sqrt{2\sqrt{3}r_2} \cos(\varphi_2) - 1\right) \right).$$

Определим значения функции P_2 при различных φ_1, φ_2 . Учитывая условие (4.10), имеем:

$$P_2 = \begin{cases} -2, & \text{при } \varphi_2 \in \Lambda^-, \quad r_1 \geq 0, \quad r_2 \geq 0, \quad \sqrt{2r_1} + \sqrt{2\sqrt{3}r_2} > 1, \\ 0, & \text{при } \varphi_2 \in [0; 2\pi] \setminus (\Lambda^+ \cup \Lambda^-), \quad r_1 \geq 0, \quad r_2 \geq 0, \quad \sqrt{2r_1} + \sqrt{2\sqrt{3}r_2} > 1, \\ 2, & \text{при } \varphi_2 \in \Lambda^+, \quad r_1 \geq 0, \quad r_2 \geq 0, \quad \sqrt{2r_1} + \sqrt{2\sqrt{3}r_2} > 1. \end{cases}$$

Значение переменной φ_1 может быть любым, однако от него зависят области Λ^- и Λ^+ , которые определяются по формулам:

$$\Lambda^- = \left(\pi - \arccos \left(\frac{1 - \sqrt{2r_1} \cos(\varphi_1)}{\sqrt{2\sqrt{3}r_2}} \right); \pi + \arccos \left(\frac{1 - \sqrt{2r_1} \cos(\varphi_1)}{\sqrt{2\sqrt{3}r_2}} \right) \right),$$

$$\Lambda^+ = \left(-\arccos \left(\frac{1 - \sqrt{2r_1} \cos(\varphi_1)}{\sqrt{2\sqrt{3}r_2}} \right); \arccos \left(\frac{1 - \sqrt{2r_1} \cos(\varphi_1)}{\sqrt{2\sqrt{3}r_2}} \right) \right),$$

если $\left| \frac{1 - \sqrt{2r_1} \cos(\varphi_1)}{\sqrt{2\sqrt{3}r_2}} \right| < 1$. Если же $\left| \frac{1 - \sqrt{2r_1} \cos(\varphi_1)}{\sqrt{2\sqrt{3}r_2}} \right| > 1$, то $\Lambda^- = \Lambda^+ = \emptyset$.

Из формул, определяющих множества Λ^- и Λ^+ , следует, что правая часть второго уравнения усреднённой системы (4.8) отрицательная (или нулевая) при любых φ_1, φ_2 .

Таким образом, все траектории усредненной системы с начальными условиями, удовлетворяющие условию (4.10), стремятся к множеству в фазовом пространстве усреднённой системы, определяемым уравнением

$$\sqrt{2r_1} + \sqrt{2\sqrt{3}r_2} = 1, \quad r_1 \geq 0, \quad r_2 \geq 0. \quad (4.12)$$

В следующем параграфе мы покажем, что множество (4.12) есть граница области инвариантных торов системы (4.6).

4.3. Инвариантные торы

Рассмотрим область в фазовом пространстве системы (4.1), где

$$\begin{cases} \dot{X}_1 < v, \\ \dot{X}_2 < v. \end{cases} \quad (4.13)$$

В этой области система (4.1) имеет вид

$$\begin{cases} M\ddot{X}_1 + cX_1 - c(X_2 - X_1) = fgM, \\ M\ddot{X}_2 + cX_2 - c(X_1 - X_2) = fgM, \end{cases}$$

а после обезразмеривания и перехода к главным координатам (4.3) имеем

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -z_1 + \delta, \\ \dot{z}_2 = -3z_2. \end{cases} \quad (4.14)$$

В переменных действие-угол (4.5) система (4.14) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = 0, \\ \dot{\varphi}_1 = 1, \\ \dot{r}_2 = 0, \\ \dot{\varphi}_2 = \sqrt{3}. \end{cases} \quad (4.15)$$

Неравенства (4.13) в переменных (4.5) имеют вид

$$\begin{cases} \sqrt{2r_1} \cos(\varphi_1) + \sqrt{2\sqrt{3}r_2} \cos(\varphi_2) < 1, \\ \sqrt{2r_1} \cos(\varphi_1) - \sqrt{2\sqrt{3}r_2} \cos(\varphi_2) < 1. \end{cases} \quad (4.16)$$

Так как значения $\cos(\varphi_1)$ и $\cos(\varphi_2)$ принадлежат отрезку $[-1; 1]$, неравенства (4.16) при условиях (4.9) остаются верными при любых значений φ_1, φ_2 . Получается, что фазовый поток системы (4.15) расслаивается на инвариантные торы. Поскольку частоты $\omega_1 = 1$ и $\omega_2 = \sqrt{3}$ не соизмеримые, каждая из траекторий системы (4.15) равномерно и всюду плотно обматывает свой инвариантный тор.

Сравним эти результаты с исследованием усреднённой системы. Область фазового пространства, где выполнены условия (4.16) также расслаивается на инвариантные торы с аналогичным свойством траекторий на них. Как было показано выше, любая траектория вне этой области фазового пространства стремится к множеству, задаваемым уравнением (4.12). Это означает, что

множество (4.12) есть граница области инвариантных торов системы (4.1). Множество фазового пространства, где выполнено равенство (4.12), также состоит из торов, которые будем называть предельными торами системы (4.1).

4.4. Зоны залипания

Рассмотрим зону залипания первого ящика, то есть частные движения вида

$$X_1 = vt + X_0,$$

где v – скорость ленты конвейера, X_0 – начальная координата первого ящика.

При залипании на первый ящик действует сила трения покоя F_1 . В модели Амантона-Кулона сила трения покоя не превосходит по модулю силы трения скольжения, а последняя постоянна по модулю, так как нормальные реакции не изменяются. Перепишем уравнения движения (4.1) с учётом вышесказанного:

$$\begin{cases} -2cX_1 + cX_2 = F_1, \\ M\ddot{X}_2 + cX_2 - c(X_1 - X_2) = -fgM \operatorname{sign}(\dot{X}_2 - v), \\ |F_1| \leq fgM. \end{cases} \quad (4.17)$$

Из системы (4.17) следуют условия залипания первого ящика

$$\dot{X}_1 = v, \quad |2cX_1 - cX_2| \leq fgM;$$

или, в безразмерных переменных,

$$\dot{x}_1 = 1, \quad |2x_1 - x_2| \leq \delta. \quad (4.18)$$

Безразмерные условия залипания второго ящика имеют вид

$$\dot{x}_2 = 1, \quad |2x_2 - x_1| \leq \delta. \quad (4.19)$$

После обезразмеривания и замен (4.3), (4.5) условия (4.18) и (4.19) предстанут в виде

$$\begin{cases} \sqrt{2r_1} \cos(\varphi_1) - \sqrt{2\sqrt{3}r_2} \cos(\varphi_2) = 1, \\ \left| \sqrt{2r_1} \sin(\varphi_1) - \sqrt{3} \sqrt{2\sqrt{3}r_2} \sin(\varphi_2) + \delta \right| \leq \delta, \end{cases} \quad (4.20)$$

$$\begin{cases} \sqrt{2r_1} \cos(\varphi_1) + \sqrt{2\sqrt{3}r_2} \cos(\varphi_2) = 1, \\ \left| \sqrt{2r_1} \sin(\varphi_1) + \sqrt{3}\sqrt{2\sqrt{3}r_2} \sin(\varphi_2) + \delta \right| \leq \delta. \end{cases} \quad (4.21)$$

Рассмотрим условия (4.20) на множестве предельных торов (4.12). Решая систему

$$\begin{cases} \sqrt{2r_1} \cos(\varphi_1) - \sqrt{2\sqrt{3}r_2} \cos(\varphi_2) = 1 \\ \left| \sqrt{2r_1} \sin(\varphi_1) - \sqrt{3}\sqrt{2\sqrt{3}r_2} \sin(\varphi_2) + \delta \right| \leq \delta \\ \sqrt{2r_1} + \sqrt{2\sqrt{3}r_2} = 1 \end{cases}$$

имеем

$$\begin{cases} \varphi_1 = 0, \\ \varphi_2 = \pi, \\ \sqrt{2r_1} + \sqrt{2\sqrt{3}r_2} = 1. \end{cases} \quad (4.21)$$

Решение (4.21) описывает точку касания предельного тора зоны залипания первого ящика. Аналогично точка касания предельного тора зоны залипания второго ящика есть

$$\begin{cases} \varphi_1 = \pi, \\ \varphi_2 = \pi, \\ \sqrt{2r_1} + \sqrt{2\sqrt{3}r_2} = 1. \end{cases} \quad (4.22)$$

Из решений (4.21), (4.22) можно заключить, что каждый предельный тор касается зон залипания в двух точках.

Далее найдём зоны залипания первого ящика вне инвариантных и предельных торов. Для этого рассмотрим систему неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{2r_1} \cos(\varphi_1) - \sqrt{2\sqrt{3}r_2} \cos(\varphi_2) = 1 \\ \left| \sqrt{2r_1} \sin(\varphi_1) - \sqrt{3}\sqrt{2\sqrt{3}r_2} \sin(\varphi_2) + \delta \right| \leq \delta \\ \sqrt{2r_1} + \sqrt{2\sqrt{3}r_2} > 1 \end{cases}$$

Эти неравенства задают некоторую область в четырёхмерном фазовом пространстве системы (4.17). Чтобы выяснить, как изменяется геометрия зоны залипания, построим бифуркационные кривые на плоскости $0r_1r_2$, основываясь на решениях следующих систем:

$$\begin{cases} \sqrt{2r_1} \cos(\varphi_1) - \sqrt{2\sqrt{3}r_2} \cos(\varphi_2) = 1, \\ \sqrt{2r_1} \sin(\varphi_1) - \sqrt{3}\sqrt{2\sqrt{3}r_2} \sin(\varphi_2) = 0, \\ \operatorname{tg}(\varphi_1) = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}(\varphi_2), \end{cases} \quad (4.23)$$

$$\begin{cases} \sqrt{2r_1} \cos(\varphi_1) - \sqrt{2\sqrt{3}r_2} \cos(\varphi_2) = 1, \\ \sqrt{2r_1} \sin(\varphi_1) - \sqrt{3}\sqrt{2\sqrt{3}r_2} \sin(\varphi_2) = -2\delta, \\ \operatorname{tg}(\varphi_1) = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}(\varphi_2). \end{cases} \quad (4.24)$$

Решение системы (4.23) относительно φ_1, φ_2 есть

$$\begin{cases} \varphi_1 = \arccos\left(\frac{3}{2\sqrt{2r_1}}\right), \\ \varphi_2 = \arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{2\sqrt{3}r_2}}\right). \end{cases}$$

Подставляя это решение во второе или третье уравнения системы (4.23), имеем уравнение для первой бифуркационной кривой вида

$$\sqrt{8r_1 - 9} = \sqrt{3}\sqrt{8\sqrt{3}r_2 - 1}. \quad (4.25)$$

Решая систему (4.24) относительно r_1, r_2 , получаем уравнение для второй бифуркационной кривой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} r_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{\sin(\varphi_1)} + \frac{3}{2\cos(\varphi_1)} \right)^2, \\ r_2 = \frac{1 + 3\operatorname{tg}^2(\varphi_1)}{2\sqrt{3}} \left(\frac{\delta}{\operatorname{tg}(\varphi_1)} + \frac{1}{2} \right)^2, \\ \varphi_1 \in [0; 2\pi]. \end{cases} \quad (4.26)$$

Изобразим полученные кривые (4.25) и (4.26) на плоскости $0r_1r_2$ (рисунок 4.2).

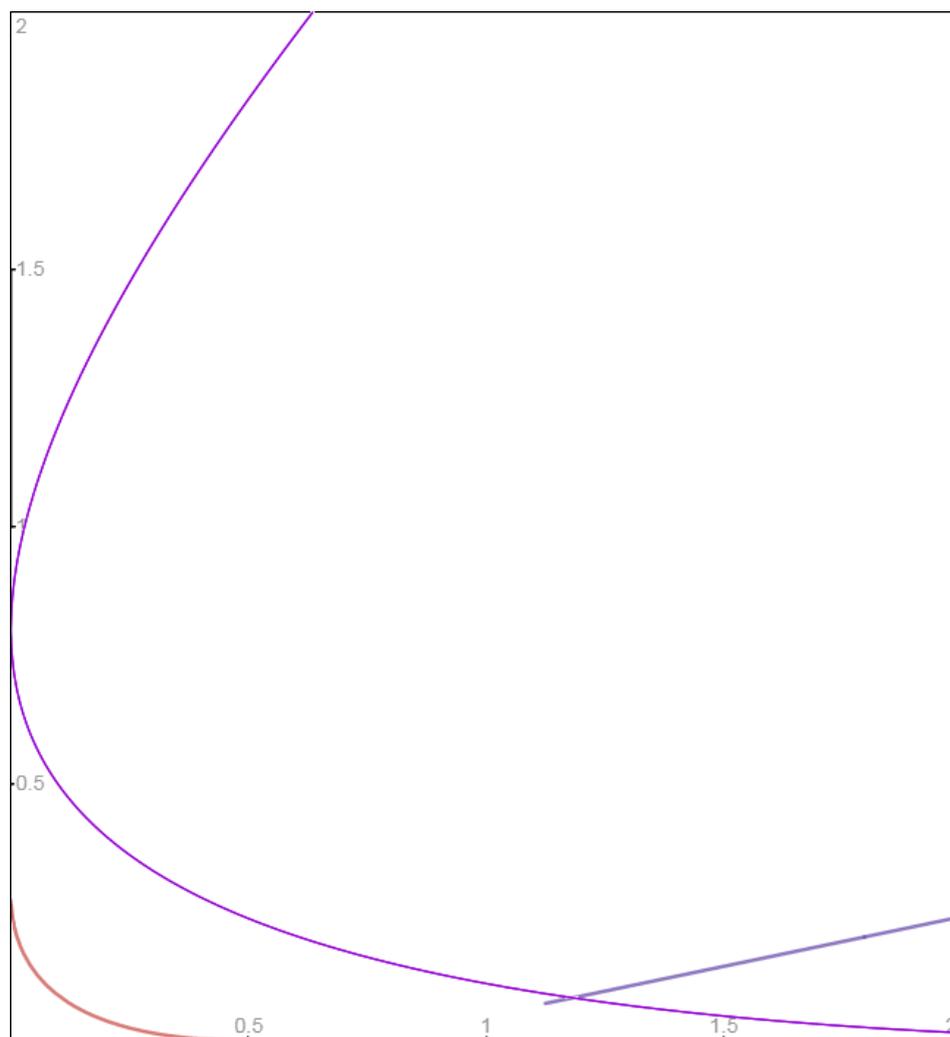


Рисунок 4.2 – Бифуркационные кривые и кривая предельных торов.

4.5. Неавтономные интегралы

Применим к системе (4.6) алгоритм поиска неавтономных интегралов, предложенный во второй главе. Будем искать неавтономный интеграл I в виде разложения по малому параметру δ :

$$I = H_1 + H_2 + \delta \left(I_1^{(1)} + \dots + I_1^{(n)} \right) + \dots,$$

где, $H_1 = r_1$, $H_2 = \sqrt{3}r_2$, что следует из вида системы (4.6).

Составим уравнения вида (2.12) для системы (4.6):

$$\delta^i: \quad \frac{\partial I_i^{(k)}}{\partial t} + \frac{\partial I_i^{(k)}}{\partial \varphi_1} + \sqrt{3} \frac{\partial I_i^{(k)}}{\partial \varphi_2} = F_i^{(k)}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \quad (4.27)$$

где

$$F_i^{(k)} = P_1 \left(\frac{\partial I_{i-1}^{(k)}}{\partial r_1} \frac{\sqrt{r_1} \cos(\varphi_1)}{\sqrt{2}} - \frac{\partial I_{i-1}^{(k)}}{\partial \varphi_1} \frac{\sin(\varphi_1)}{2\sqrt{2r_1}} \right) + \\ + P_2 \left(\frac{\partial I_{i-1}^{(k)}}{\partial r_2} \frac{\sqrt{r_2} \cos(\varphi_2)}{\sqrt{2\sqrt{3}}} - \frac{\partial I_{i-1}^{(k)}}{\partial \varphi_2} \frac{\sin(\varphi_2)}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2r_2}} \right).$$

Определим первые коэффициенты разложения неавтономного интеграла $I_1^{(1)}$ и $I_1^{(2)}$. Для этого запишем частный случай уравнений (4.27) при $i = 1$:

$$\begin{cases} \frac{\partial I_1^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial I_1^{(1)}}{\partial \varphi_1} + \sqrt{3} \frac{\partial I_1^{(1)}}{\partial \varphi_2} = \frac{\sqrt{r_1} \cos(\varphi_1)}{\sqrt{2}} P_1, \\ \frac{\partial I_1^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial I_1^{(2)}}{\partial \varphi_1} + \sqrt{3} \frac{\partial I_1^{(2)}}{\partial \varphi_2} = \frac{\sqrt{r_2} \cos(\varphi_2)}{\sqrt{2\sqrt{3}}} P_2. \end{cases} \quad (4.28)$$

Система (4.28) есть система уравнений в частных производных с разрывными правыми частями. Рассмотрим кривые разрыва функций P_1 и P_2 :

$$\begin{aligned} A: \quad & \sqrt{2r_1} \cos(\varphi_1) + \sqrt{2\sqrt{3}r_2} \cos(\varphi_2) = 1, \\ B: \quad & \sqrt{2r_1} \cos(\varphi_1) - \sqrt{2\sqrt{3}r_2} \cos(\varphi_2) = 1. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Значения правых частей уравнений (4.28) зависят от того, где относительно кривых (4.29) мы находимся на двумерном торе T^2 . Положение самих кривых на торе определяется переменными r_1 и r_2 . Исследуем взаимное положение кривых (4.29).

Утверждение 5. Кривые соприкасаются в двух точках на торе T^2 , если $r_1 = \frac{1}{2}$.

Уравнения (4.29) могут иметь общие точки, только если

$$\varphi_2 = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_1 = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2r_1}}\right).$$

Причём, если $\sqrt{2r_1} < 1$, то общих точек нет и кривые A и B не пересекаются.

Если $\sqrt{2r_1} > 1$, то кривые пересекаются в четырёх точках:

$$\varphi_2 = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_1 = \pm \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2r_1}}\right).$$

Если $\sqrt{2r_1} = 1$, то $r_1 = \frac{1}{2}$ и общих точек две с разных сторон относительно оси $O\varphi_2$:

$$\varphi_2 = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_1 = \arccos(1) = 0.$$

Утверждение 6. Кривые замкнуты (одно уравнение соответствует одной кривой линии на торе T^2), если $\frac{(\sqrt{2r_1}+1)^2}{2\sqrt{3}} \geq r_2 \geq \frac{(\sqrt{2r_1}-1)^2}{2\sqrt{3}}$. В противном случае кривые разрываются (одно уравнение соответствует двум кривым линиям на торе T^2).

Рассмотрим поведение кривой A при $\varphi_1 = \pm\pi$:

$$-\sqrt{2r_1} + \sqrt{2\sqrt{3}r_2} \cos(\varphi_2) = 1,$$

$$\cos(\varphi_2) = \frac{1 + \sqrt{2r_1}}{\sqrt{2\sqrt{3}r_2}}. \quad (4.30)$$

Чтобы кривые были замкнуты на торе T^2 необходимо и достаточно, чтобы уравнение (4.30) имело только одно решение φ_2 или не имело их вовсе:

$$1 \leq \frac{1 + \sqrt{2r_1}}{\sqrt{2\sqrt{3}r_2}},$$

$$r_2 \leq \frac{(\sqrt{2r_1} + 1)^2}{2\sqrt{3}}.$$

Аналогичные рассуждения справедливы для кривой A при $\varphi_1 = \pm\pi$. В этом случае имеем неравенство

$$r_2 \geq \frac{(\sqrt{2r_1} - 1)^2}{2\sqrt{3}}.$$

Если кривую B сдвинуть по оси $0\varphi_2$ на π , то она совпадёт с кривой A . Поэтому вышеуказанные рассуждения легко распространяются для кривой B .

С учётом утверждений 5 и 6, на плоскости $0r_1r_2$ (рисунок 4.3) можно выделить шесть зон и определить положение кривых (4.29) на торе T^2 .

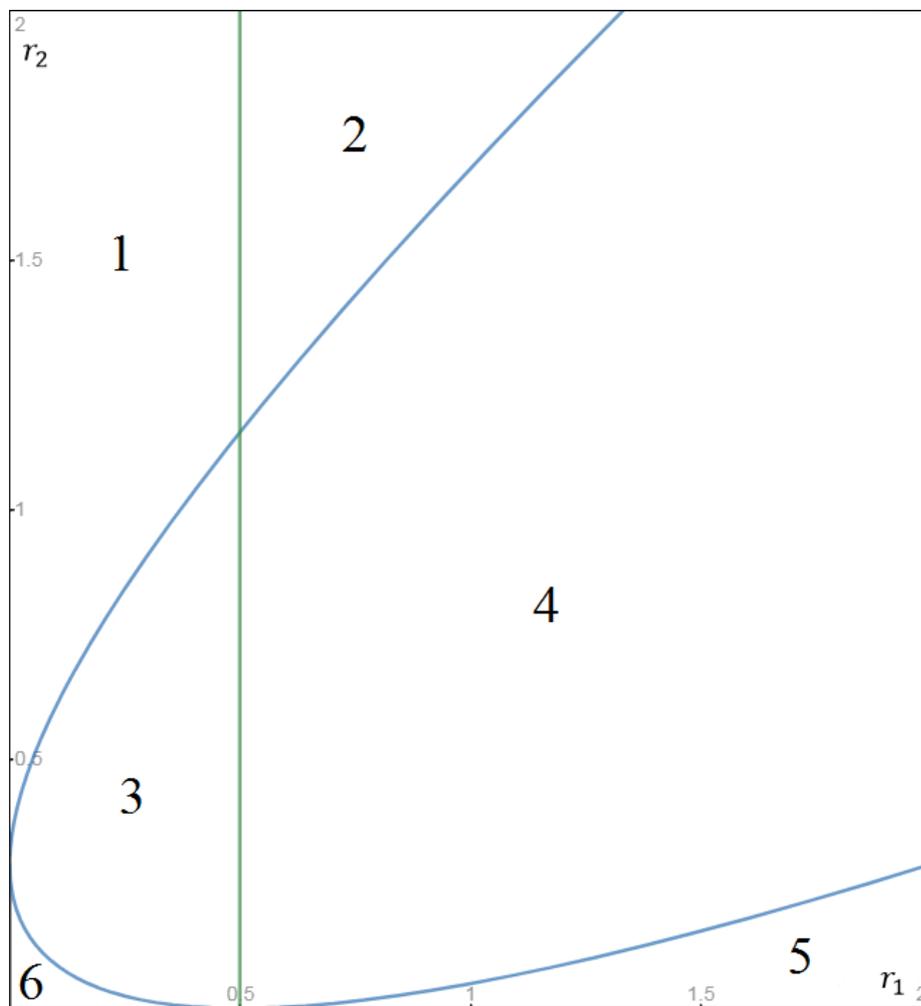


Рисунок 4.3 – Шесть зон на плоскости $0r_1r_2$.

В разных зонах коэффициенты $I_1^{(1)}$ и $I_1^{(2)}$ разложения неавтономного интеграла по малому параметру будут разные. Мы ограничимся получением этих коэффициентов только для зоны 1. Коэффициенты $I_1^{(1)}$ и $I_1^{(2)}$ для остальных зон приведены в приложении А к диссертационной работе.

Качественная картина расположения кривых (4.29) на торе T^2 показана на рисунке 4.4.

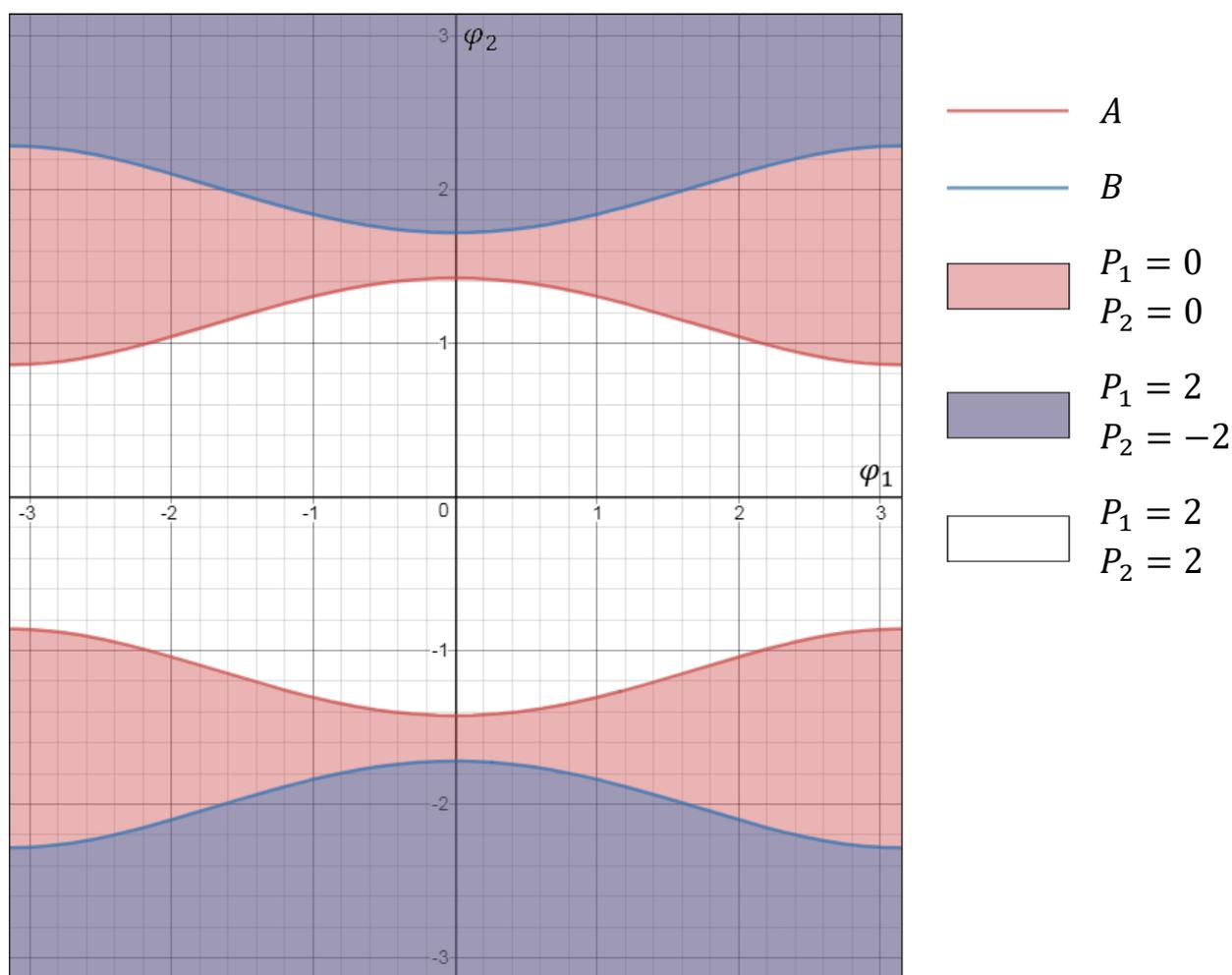


Рисунок 4.4 – Положение кривых (4.29) на торе T^2 в зоне 1.

Проинтегрируем первое уравнение системы (4.28) по переменной φ_1 , фиксируя при этом φ_2 :

$$I_1^{(1)} = \int_{\varphi_1^{(0)}}^{\varphi_1^*} \frac{\sqrt{r_1} \cos(\varphi_1)}{\sqrt{2}} P_1 d\varphi_1. \quad (4.31)$$

Второе уравнение будем интегрировать по φ_2 , фиксируя угол φ_1 :

$$I_1^{(2)} = \int_{\varphi_2^{(0)}}^{\varphi_2^*} \frac{\sqrt{r_2} \cos(\varphi_2)}{\sqrt{2\sqrt{3}}} P_2 d\varphi_2. \quad (4.32)$$

Без потери общности можно положить $\varphi_1^{(0)} = \varphi_2^{(0)} = -\pi$. Значения φ_1^* и φ_2^* представим в виде сумм

$$\varphi_1^* = 2n\pi + \varphi_1, \quad \varphi_2^* = 2k\pi + \varphi_2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\varphi_1, \varphi_2 \in (-\pi; \pi)$. В таком случае можно переписать интегралы (4.31) и (4.32) как суммы интегралов:

$$I_1^{(1)} = n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sqrt{r_1} \cos(\varphi_1)}{\sqrt{2}} P_1 d\varphi_1 + \int_{-\pi}^{\varphi_1} \frac{\sqrt{r_1} \cos(\varphi_1)}{\sqrt{2}} P_1 d\varphi_1, \quad (4.33)$$

$$I_1^{(2)} = k \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sqrt{r_2} \cos(\varphi_2)}{\sqrt{2\sqrt{3}}} P_2 d\varphi_2 + \int_{-\pi}^{\varphi_2} \frac{\sqrt{r_2} \cos(\varphi_2)}{\sqrt{2\sqrt{3}}} P_2 d\varphi_2. \quad (4.34)$$

Чтобы вычислить коэффициент $I_1^{(1)}$ по формуле (4.33), необходимо выделить в торе T^2 разные участки, на которых функция P_1 принимает постоянные значения. Границы этих участков вычисляются из уравнений (4.29) кривых A и B . При этом учитываем, что интеграл (4.33) берётся по переменной φ_1 .

Из уравнения кривой A имеем

$$\sqrt{2r_1} \cos(\varphi_1) + \sqrt{2\sqrt{3}r_2} \cos(\varphi_2) = 1, \quad \varphi_1 = \pm \arccos \left(\frac{1 - \sqrt{2\sqrt{3}r_2} \cos(\varphi_2)}{\sqrt{2r_1}} \right),$$

$$\sqrt{2r_1} \cos(0) + \sqrt{2\sqrt{3}r_2} \cos(\varphi_2) = 1, \quad \varphi_2 = \pm \arccos \left(\frac{1 - \sqrt{2r_1}}{\sqrt{2\sqrt{3}r_2}} \right),$$

$$\sqrt{2r_1} \cos(\pi) + \sqrt{2\sqrt{3}r_2} \cos(\varphi_2) = 1, \quad \varphi_2 = \pm \arccos \left(\frac{1 + \sqrt{2r_1}}{\sqrt{2\sqrt{3}r_2}} \right).$$

Из уравнения кривой B имеем

$$\sqrt{2r_1} \cos(\varphi_1) - \sqrt{2\sqrt{3}r_2} \cos(\varphi_2) = 1, \quad \varphi_1 = \pm \arccos \left(\frac{1 + \sqrt{2\sqrt{3}r_2} \cos(\varphi_2)}{\sqrt{2r_1}} \right),$$

$$\sqrt{2r_1} \cos(0) - \sqrt{2\sqrt{3}r_2} \cos(\varphi_2) = 1, \quad \varphi_2 = \pm \pi \mp \arccos \left(\frac{1 - \sqrt{2r_1}}{\sqrt{2\sqrt{3}r_2}} \right),$$

$$\sqrt{2r_1} \cos(\pi) - \sqrt{2\sqrt{3}r_2} \cos(\varphi_2) = 1, \quad \varphi_2 = \pm\pi \mp \arccos\left(\frac{1 + \sqrt{2r_1}}{\sqrt{2\sqrt{3}r_2}}\right).$$

Для краткости записи введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} C_+ &= \frac{1 + \sqrt{2\sqrt{3}r_2} \cos(\varphi_2)}{\sqrt{2r_1}}, & C_- &= \frac{1 + \sqrt{2\sqrt{3}r_2} \cos(\varphi_2)}{\sqrt{2r_1}}, \\ W_+ &= \frac{1 + \sqrt{2r_1}}{\sqrt{2\sqrt{3}r_2}}, & W_- &= \frac{1 + \sqrt{2r_1}}{\sqrt{2\sqrt{3}r_2}}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

На основе вычислений, указанных выше, запишем промежутки в которых будем фиксировать угол φ_2 :

$$\begin{aligned} a_1 &= [(2k - 1)\pi; (2k - 1)\pi + \arccos(W_+)] \cup \\ &\quad \cup ((2k + 1)\pi - \arccos(W_+); (2k + 1)\pi], \\ a_2 &= [(2k - 1)\pi + \arccos(W_+); (2k - 1)\pi + \arccos(W_-)] \cup \\ &\quad \cup [(2k + 1)\pi - \arccos(W_-); (2k + 1)\pi - \arccos(W_+)], \\ a_3 &= ((2k - 1)\pi + \arccos(W_-); 2k\pi - \arccos(W_-)) \cup \\ &\quad \cup (2k\pi + \arccos(W_-); (2k + 1)\pi - \arccos(W_-)), \\ a_4 &= [2k\pi - \arccos(W_-); 2k\pi - \arccos(W_+)] \cup \\ &\quad \cup [2k\pi + \arccos(W_+); 2k\pi + \arccos(W_-)], \\ a_5 &= [2k\pi - \arccos(W_+); 2k\pi + \arccos(W_+)]. \end{aligned}$$

В зависимости от того, какому участку принадлежит верхний предел интегрирования φ_1 , интеграл (4.33) принимает разные значения. Запишем промежутки для угла φ_1 , в которых этот угол может принадлежать только одному из участков:

$$\begin{aligned} b_1 &= [(2n - 1)\pi; 2n\pi - \arccos(C_+)], \quad b_2 = [2n\pi - \arccos(C_+); 2n\pi + \arccos(C_+)], \\ b_3 &= (2n\pi + \arccos(C_+); (2n + 1)\pi], \quad b_4 = [(2n - 1)\pi; 2n\pi - \arccos(C_-)], \\ b_5 &= [2n\pi - \arccos(C_-); 2n\pi + \arccos(C_-)], \quad b_6 = (2n\pi + \arccos(C_-); (2n + 1)\pi]. \end{aligned}$$

Теперь можно переходить к вычислению коэффициента $I_1^{(1)}$ по формуле (4.33). Значения функции P_1 на каждом из участков будем выяснять с помощью рисунка 4.4. Имеем

$$I_1^{(1)} = \begin{cases} \sqrt{2r_1} \sin(\varphi_1) + S_1^{(1)}, & \text{если } \varphi_2 \in a_1 \cup a_5, \\ 4n \sqrt{2r_1 - \left(\sqrt{2\sqrt{3}r_2} \cos(\varphi_2) + 1 \right)^2} + S_1^{(1)}, & \text{если } \varphi_1 \in b_1, \varphi_2 \in a_2, \\ (2n+1) \sqrt{2r_1 - \left(\sqrt{2\sqrt{3}r_2} \cos(\varphi_2) + 1 \right)^2} + \sqrt{2r_1} \sin(\varphi_1) + S_1^{(1)}, & \text{если } \varphi_1 \in b_2, \varphi_2 \in a_2, \\ (2n+2) \sqrt{2r_1 - \left(\sqrt{2\sqrt{3}r_2} \cos(\varphi_2) + 1 \right)^2} + S_1^{(1)}, & \text{если } \varphi_1 \in b_3, \varphi_2 \in a_2, \\ S_1^{(1)}, & \text{если } \varphi_2 \in a_3, \\ 2n \sqrt{2r_1 - \left(1 - \sqrt{2\sqrt{3}r_2} \cos(\varphi_2) \right)^2} + S_1^{(1)}, & \text{если } \varphi_1 \in b_4, \varphi_2 \in a_4, \\ (2n+1) \sqrt{2r_1 - \left(1 - \sqrt{2\sqrt{3}r_2} \cos(\varphi_2) \right)^2} + \sqrt{2r_1} \sin(\varphi_1) + S_1^{(1)}, & \text{если } \varphi_1 \in b_5, \varphi_2 \in a_4, \\ (2n+2) \sqrt{2r_1 - \left(1 - \sqrt{2\sqrt{3}r_2} \cos(\varphi_2) \right)^2} + S_1^{(1)}, & \text{если } \varphi_1 \in b_6, \varphi_2 \in a_4, \end{cases}$$

где функция $S_1^{(1)} = S_1^{(1)}(r_1, r_2, t - \varphi_1, \sqrt{3}t - \varphi_1)$ есть общее решение однородного уравнения $\frac{\partial I_1^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial I_1^{(1)}}{\partial \varphi_1} + \sqrt{3} \frac{\partial I_1^{(1)}}{\partial \varphi_2} = 0$.

Чтобы вычислить коэффициент $I_1^{(2)}$ по формуле (4.34), необходимо выделить в торе T^2 разные участки, на которых функция P_2 принимает постоянные значения и учитывать при этом, что интеграл (4.34) берётся по переменной φ_2 . Выразив φ_2 из уравнений (4.29), получаем границы этих участков:

$$\varphi_2 = \pm \arccos \left(\frac{1 - \sqrt{2r_1} \cos(\varphi_1)}{\sqrt{2\sqrt{3}r_2}} \right).$$

Для краткости записи введём обозначение

$$C_* = \frac{1 - \sqrt{2r_1} \cos(\varphi_1)}{\sqrt{2\sqrt{3}r_2}}. \quad (4.36)$$

В этом случае кривые A и B не пересекаются ни друг с другом, ни с прямыми $\varphi_2 = \pm\pi$. Угол φ_1 можно зафиксировать любым на промежутке $[-\pi; \pi]$. В зависимости от того, какому участку принадлежит верхний предел интегрирования φ_2 , интеграл (4.34) принимает разные значения. Запишем промежутки для угла φ_2 , в которых верхний предел интегрирования может принадлежать только одному из участков:

$$\begin{aligned} c_1 &= [(2k - 1)\pi; (2k - 1)\pi + \arccos(C_*)]; \\ c_2 &= ((2k - 1)\pi + \arccos(C_*); 2k\pi - \arccos(C_*)); \\ c_3 &= (2k\pi - \arccos(C_*); 2k\pi + \arccos(C_*)); \\ c_4 &= (2k\pi + \arccos(C_*); (2k + 1)\pi - \arccos(C_*)); \\ c_5 &= ((2k + 1)\pi - \arccos(C_*); (2k + 1)\pi]. \end{aligned}$$

Теперь можно переходить к вычислению коэффициента $I_1^{(2)}$ по формуле (4.34). Значения функции P_2 на каждом из участков будем определять, руководствуясь рисунком 4.4.

$$I_1^{(2)} = \begin{cases} \frac{4k}{\sqrt{3}} \sqrt{2\sqrt{3}r_2(1 - C_*^2)} - \sqrt{\frac{2r_2}{\sqrt{3}}} \sin(\varphi_2) + S_1^{(2)}, & \text{если } \varphi_2 \in c_1, \\ \frac{4k+1}{\sqrt{3}} \sqrt{2\sqrt{3}r_2(1 - C_*^2)} + S_1^{(2)}, & \text{если } \varphi_2 \in c_2, \\ \frac{4k+2}{\sqrt{3}} \sqrt{2\sqrt{3}r_2(1 - C_*^2)} + \sqrt{\frac{2r_2}{\sqrt{3}}} \sin(\varphi_2) + S_1^{(2)}, & \text{если } \varphi_2 \in c_3, \\ \frac{4k+3}{\sqrt{3}} \sqrt{2\sqrt{3}r_2(1 - C_*^2)} + S_1^{(2)}, & \text{если } \varphi_2 \in c_4, \\ \frac{4k+4}{\sqrt{3}} \sqrt{2\sqrt{3}r_2(1 - C_*^2)} - \sqrt{\frac{2r_2}{\sqrt{3}}} \sin(\varphi_2) + S_1^{(2)}, & \text{если } \varphi_2 \in c_5, \end{cases}$$

где функция $S_1^{(2)} = S_1^{(2)}(r_1, r_2, t - \varphi_1, \sqrt{3}t - \varphi_1)$ есть общее решение однородного уравнения $\frac{\partial I_1^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial I_1^{(2)}}{\partial \varphi_1} + \sqrt{3} \frac{\partial I_1^{(2)}}{\partial \varphi_2} = 0$.

Таким образом в зоне 1 мы смогли определить неавтономный интеграл системы (4.6) в виде разложения до порядка δ включительно:

$$I = r_1 + \sqrt{3}r_2 + \delta \left(I_1^{(1)} + \dots + I_1^{(n)} \right) + \dots$$

Заключение

Перечислим основные результаты диссертационной работы.

1. Разработан метод построения семейства интегралов квазиконсервативной системы с одной степенью свободы в виде прямого разложения в ряд по малому параметру, обобщающий классический метод малого параметра из теории возмущений. Установлена эффективность данного метода в переменных действие-угол невозмущённой системы.
2. Сформулирован и доказан критерий существования периодических решений квазиконсервативных систем с одной степенью свободы в терминах неавтономных интегралов. Критерий был успешно применён для определения континуального множества решений уравнения Дюффинга и для оценки числа предельных циклов одного класса уравнений Лъенара.
3. Метод прямого разложения неавтономных интегралов и критерий существования периодических решений обобщены на квазиконсервативные системы с двумя или большим числом степеней свободы, представляющие собой слабо связанные неконсервативными возмущениями нелинейные осцилляторы.
4. Найдена зона залипания, исследован характер движений ящика с внутренним осциллятором по горизонтальной шероховатой плоскости.
5. Методом усреднения исследованы уравнения движения кусочно-линейного осциллятора, который представлял собой два соединённых пружинами ящика, находящихся на ленте конвейера. Между ящиками и лентой действовали силы сухого трения Амонтона-Кулона. Доказано притяжение траекторий системы к множеству предельных торов – границе области инвариантных торов. Инвариантные торы, а также зона залипания ящиков на конвейерной ленте найдены точными методами.
6. Методом прямого разложения, с точностью до первого порядка малости относительно безразмерного коэффициента сухого трения построено

семейство неавтономных интегралов кусочно-линейного осциллятора во всём фазовом пространстве.

На основании полученных в диссертационной работе результатов можно сделать следующие выводы и отметить направления дальнейших исследований.

1. Разработанный в диссертационной работе метод даёт сравнительно простой и эффективный алгоритм получения прямого разложения неавтономных интегралов квазиконсервативных систем с одной степенью свободы и квазиконсервативных систем с n степенями свободы слабо связанных нелинейных осцилляторов. Интересно адаптировать другие методы теории возмущений, например, метод усреднения или метод пограничного слоя и создать новые алгоритмы построения неавтономных интегралов систем уравнений движения.
2. Доказанный критерий существования периодических решений квазиконсервативных систем с одной степенью свободы и его обобщение для квазиконсервативных систем слабо связанных осцилляторов позволяет находить разложения начальных условий и периода периодических решений. Интересно исследовать сочетание этого критерия с классическими методами построения периодических решений. Другая перспективная задача – приложение неавтономных интегралов для нахождения условно периодических движений квазиконсервативных систем, исследования устойчивости, оценки области притяжения предельных циклов и т.д.
3. В дальнейших исследованиях следует найти применение полученному семейству неавтономных интегралов кусочно-линейного осциллятора с двумя степенями свободы, в частности, применить интегралы для установления зоны залипания и предельных торов.

Приложение 1

В текущем приложении приведены коэффициенты $I_1^{(1)}$, $I_1^{(2)}$ разложения неавтономного интеграла системы (4.6) по малому параметру.

Далее для краткости записи используются обозначения (4.35), (4.36), функции $S_1^{(1)} = S_1^{(1)}(r_1, r_2, t - \varphi_1, \sqrt{3}t - \varphi_1)$ и $S_1^{(2)} = S_1^{(2)}(r_1, r_2, t - \varphi_1, \sqrt{3}t - \varphi_1)$ есть общие решения однородных уравнений

$$\frac{\partial I_1^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial I_1^{(1)}}{\partial \varphi_1} + \sqrt{3} \frac{\partial I_1^{(1)}}{\partial \varphi_2} = 0, \quad \frac{\partial I_1^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial I_1^{(2)}}{\partial \varphi_1} + \sqrt{3} \frac{\partial I_1^{(2)}}{\partial \varphi_2} = 0.$$

Зона 2

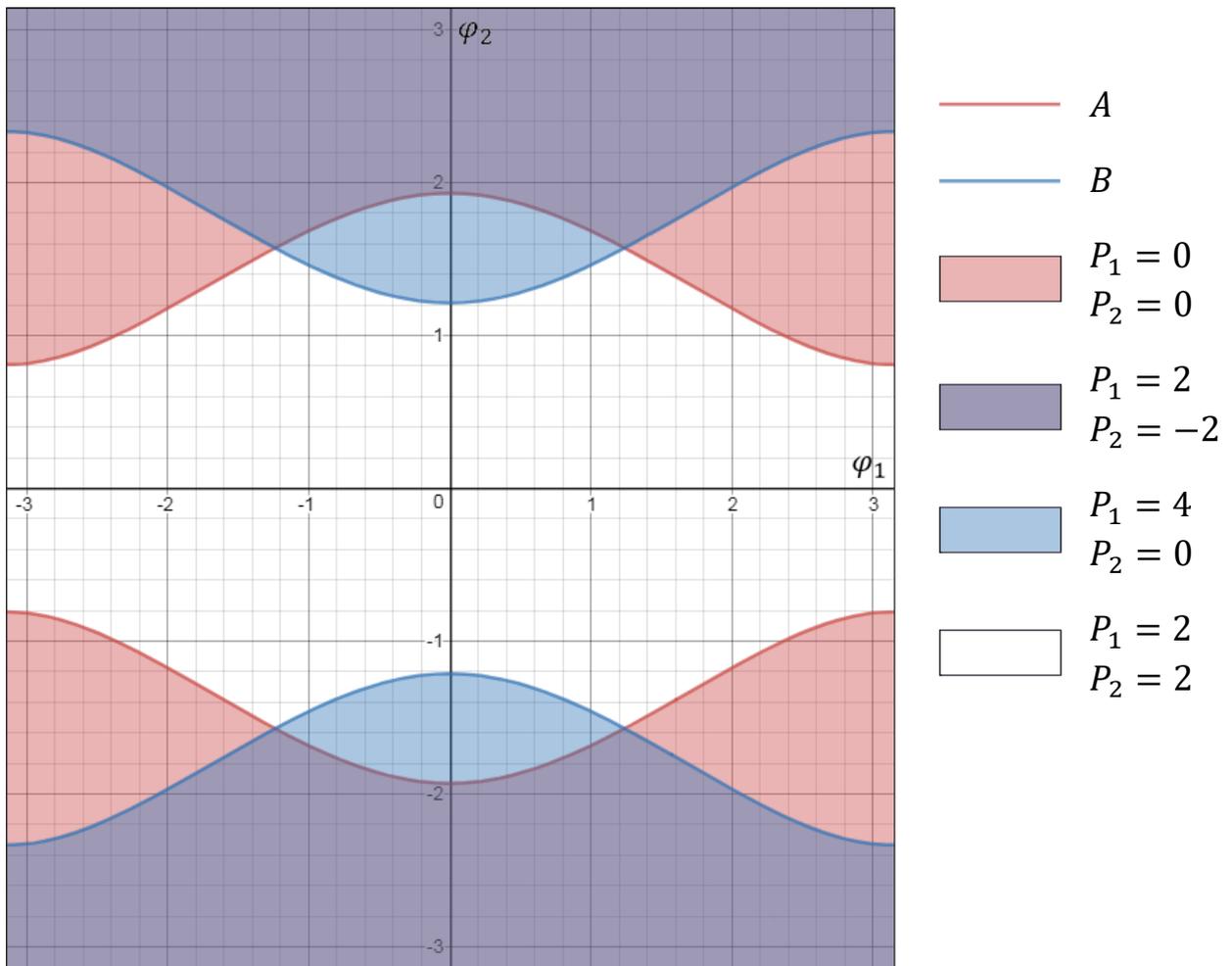


Рисунок 1 – Положение кривых (4.29) на торе T^2 в зоне 2.

$$I_1^{(1)} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2r_1} \sin(\varphi_1) + S_1^{(1)}, \quad \text{если } \varphi_2 \in a_1 \cup a_6, \\ 2n \sqrt{2r_1(1 - C_+^2)} + S_1^{(1)}, \quad \text{если } \varphi_1 \in b_1, \varphi_2 \in a_2, \\ (2n + 1) \sqrt{2r_1(1 - C_+^2)} + \sqrt{2r_1} \sin(\varphi_1) + S_1^{(1)}, \quad \text{если } \varphi_1 \in b_2, \varphi_2 \in a_2, \\ (2n + 2) \sqrt{2r_1(1 - C_+^2)} + S_1^{(1)}, \quad \text{если } \varphi_1 \in b_5, \varphi_2 \in a_2, \\ 2n \sqrt{2r_1(1 - C_+^2)} + 2n \sqrt{2r_1(1 - C_-^2)} + S_1^{(1)}, \\ \quad \text{если } \varphi_1 \in b_1, \varphi_2 \in a_3 \text{ или } \varphi_1 \in b_6, \varphi_2 \in a_4, \\ (2n + 1) \sqrt{2r_1(1 - C_+^2)} + 2n \sqrt{2r_1(1 - C_-^2)} + \sqrt{2r_1} \sin(\varphi_1) + S_1^{(1)}, \\ \quad \text{если } \varphi_1 \in b_3, \varphi_2 \in a_3, \\ 2n \sqrt{2r_1(1 - C_+^2)} + (2n + 1) \sqrt{2r_1(1 - C_-^2)} + \sqrt{2r_1} \sin(\varphi_1) + S_1^{(1)}, \\ \quad \text{если } \varphi_1 \in b_8, \varphi_2 \in a_4, \\ (2n + 1) \sqrt{2r_1(1 - C_+^2)} + (2n + 1) \sqrt{2r_1(1 - C_-^2)} + 2\sqrt{2r_1} \sin(\varphi_1) + S_1^{(1)}, \\ \quad \text{если } \varphi_1 \in b_7, \varphi_2 \in a_3 \text{ или } \varphi_1 \in b_2, \varphi_2 \in a_4, \\ (2n + 1) \sqrt{2r_1(1 - C_+^2)} + (2n + 2) \sqrt{2r_1(1 - C_-^2)} + \sqrt{2r_1} \sin(\varphi_1) + S_1^{(1)}, \\ \quad \text{если } \varphi_1 \in b_9, \varphi_2 \in a_3, \\ (2n + 2) \sqrt{2r_1(1 - C_+^2)} + (2n + 1) \sqrt{2r_1(1 - C_-^2)} + \sqrt{2r_1} \sin(\varphi_1) + S_1^{(1)}, \\ \quad \text{если } \varphi_1 \in b_4, \varphi_2 \in a_4, \\ (2n + 2) \sqrt{2r_1(1 - C_+^2)} + (2n + 2) \sqrt{2r_1(1 - C_-^2)} + S_1^{(1)}, \\ \quad \text{если } \varphi_1 \in b_5, \varphi_2 \in a_3 \text{ или } \varphi_1 \in b_{10}, \varphi_2 \in a_4, \\ 2n \sqrt{2r_1(1 - C_-^2)} + S_1^{(1)}, \quad \text{если } \varphi_1 \in b_6, \varphi_2 \in a_6, \\ (2n + 1) \sqrt{2r_1(1 - C_-^2)} + \sqrt{2r_1} \sin(\varphi_1) + S_1^{(1)}, \quad \text{если } \varphi_1 \in b_7, \varphi_2 \in a_6, \\ (2n + 2) \sqrt{2r_1(1 - C_-^2)} + S_1^{(1)}, \quad \text{если } \varphi_1 \in b_{10}, \varphi_2 \in a_6, \end{array} \right.$$

где

$$a_1 = [(2k - 1)\pi; (2k - 1)\pi + \arccos(W_+)] \cup \\ \cup [(2k + 1)\pi - \arccos(W_+); (2k + 1)\pi],$$

$$a_2 = [(2k - 1)\pi + \arccos(W_+); 2k\pi - \arccos(W_-)] \cup \\ \cup [2k\pi + \arccos(W_-); (2k + 1)\pi - \arccos(W_+)],$$

$$a_3 = \left(2k\pi - \arccos(W_-); 2k\pi - \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}; 2k\pi + \arccos(W_-) \right),$$

$$a_4 = \left(2k\pi - \frac{\pi}{2}; (2k-1)\pi + \arccos(W_-) \right) \cup \\ \cup \left((2k+1)\pi - \arccos(W_-); 2k\pi + \frac{\pi}{2} \right),$$

$$a_5 = [(2k-1)\pi + \arccos(W_-); 2k\pi - \arccos(W_+)] \cup \\ \cup [2k\pi + \arccos(W_+); (2k+1)\pi - \arccos(W_-)]$$

$$a_6 = [2k\pi - \arccos(W_+); 2k\pi + \arccos(W_+)],$$

$$b_1 = [(2n-1)\pi; 2n\pi - \arccos(C_+)],$$

$$b_2 = [2n\pi - \arccos(C_+); 2n\pi + \arccos(C_+)],$$

$$b_3 = [2n\pi - \arccos(C_+); 2n\pi - \arccos(C_-)],$$

$$b_4 = [2n\pi + \arccos(C_+); 2n\pi + \arccos(C_-)],$$

$$b_5 = (2n\pi + \arccos(C_+); (2n+1)\pi], \quad b_6 = [(2n-1)\pi; 2n\pi - \arccos(C_-)],$$

$$b_7 = [2n\pi - \arccos(C_-); 2n\pi + \arccos(C_-)],$$

$$b_8 = [2n\pi - \arccos(C_-); 2n\pi - \arccos(C_+)],$$

$$b_9 = [2n\pi + \arccos(C_-); 2n\pi + \arccos(C_+)],$$

$$b_{10} = (2n\pi - \arccos(C_-); (2n+1)\pi].$$

$$I_1^{(2)} = \begin{cases} \frac{4k}{\sqrt{3}} \sqrt{2\sqrt{3}r_2(1 - C_*^2)} - \sqrt{\frac{2r_2}{\sqrt{3}}} \sin(\varphi_2) + S_1^{(2)}, \\ \text{если } \varphi_1 \in d_1, \varphi_2 \in c_1 \text{ или } \varphi_1 \notin d_1, \varphi_2 \in c_6, \\ \frac{4k+1}{\sqrt{3}} \sqrt{2\sqrt{3}r_2(1 - C_*^2)} + S_1^{(2)}, \\ \text{если } \varphi_1 \in d_1, \varphi_2 \in c_2 \text{ или } \varphi_1 \notin d_1, \varphi_2 \in c_7, \\ \frac{4k+2}{\sqrt{3}} \sqrt{2\sqrt{3}r_2(1 - C_*^2)} + \sqrt{\frac{2r_2}{\sqrt{3}}} \sin(\varphi_2) + S_1^{(2)}, \\ \text{если } \varphi_1 \in d_1, \varphi_2 \in c_3 \text{ или } \varphi_1 \notin d_1, \varphi_2 \in c_8, \\ \frac{4k+3}{\sqrt{3}} \sqrt{2\sqrt{3}r_2(1 - C_*^2)} + S_1^{(2)}, \\ \text{если } \varphi_1 \in d_1, \varphi_2 \in c_4 \text{ или } \varphi_1 \notin d_1, \varphi_2 \in c_9, \\ \frac{4k+4}{\sqrt{3}} \sqrt{2\sqrt{3}r_2(1 - C_*^2)} - \sqrt{\frac{2r_2}{\sqrt{3}}} \sin(\varphi_2) + S_1^{(2)}, \\ \text{если } \varphi_1 \in d_1, \varphi_2 \in c_5 \text{ или } \varphi_1 \notin d_1, \varphi_2 \in c_{10}, \end{cases}$$

где

$$d_1 = \left[(2n-1)\pi; 2n\pi - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2r_1}}\right) \right] \cup \left[2n\pi + \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2r_1}}\right); (2n+1)\pi \right],$$

$$c_1 = [(2k-1)\pi; (2k-1)\pi + \arccos(C_*)];$$

$$c_2 = ((2k-1)\pi + \arccos(C_*); 2k\pi - \arccos(C_*));$$

$$c_3 = (2k\pi - \arccos(C_*); 2k\pi + \arccos(C_*));$$

$$c_4 = (2k\pi + \arccos(C_*); (2k+1)\pi - \arccos(C_*));$$

$$c_5 = ((2k+1)\pi - \arccos(C_*); (2k+1)\pi], \quad c_6 = [(2k-1)\pi; 2k\pi - \arccos(C_*)],$$

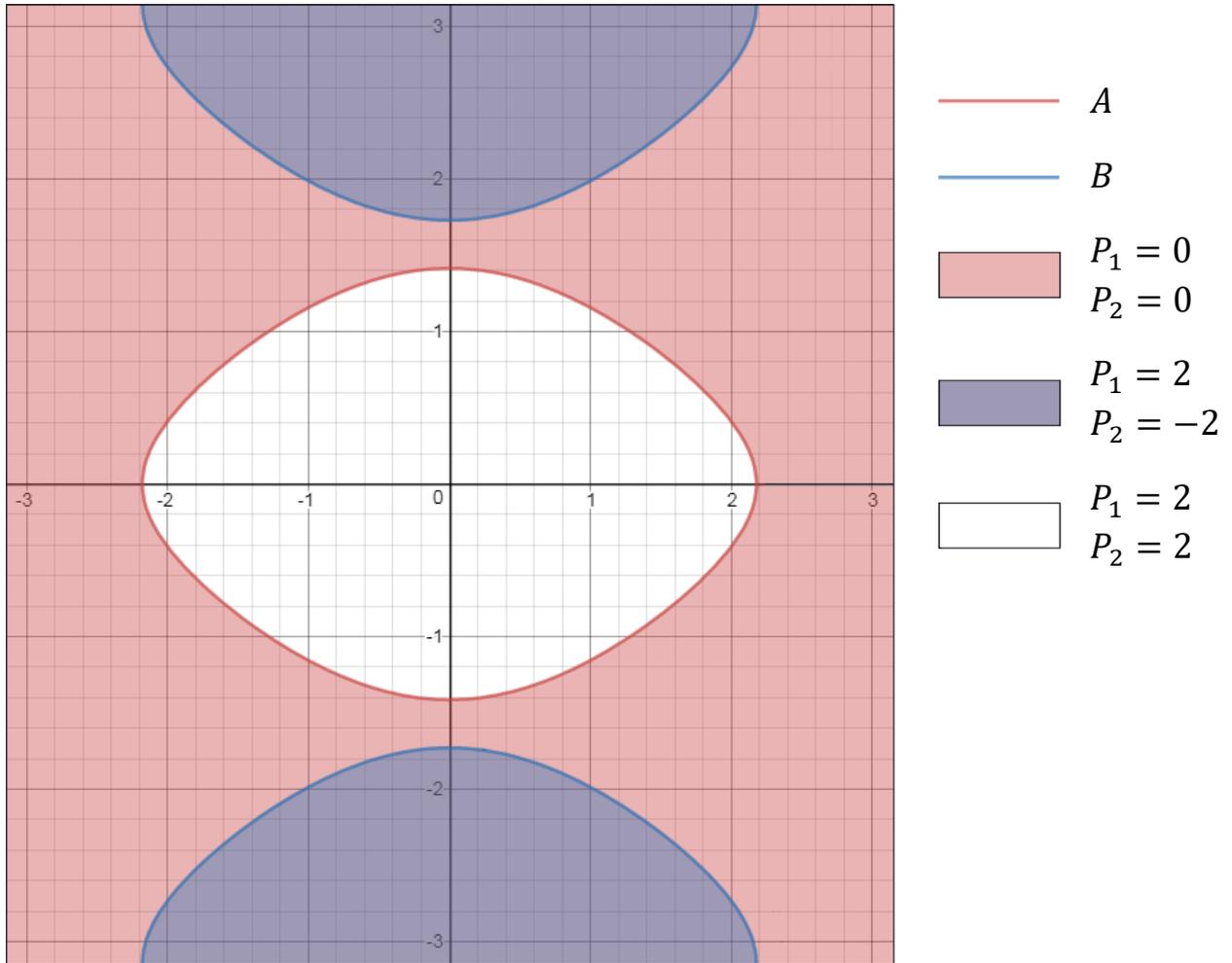
$$c_7 = (2k\pi - \arccos(C_*); (2k-1)\pi + \arccos(C_*));$$

$$c_8 = ((2k-1)\pi + \arccos(C_*); (2k+1)\pi - \arccos(C_*));$$

$$c_9 = ((2k+1)\pi - \arccos(C_*); 2k\pi + \arccos(C_*));$$

$$c_{10} = (2k\pi + \arccos(C_*); (2k+1)\pi].$$

Зона 3

Рисунок 2 – Положение кривых (4.29) на торе T^2 в зоне 3.

$$I_1^{(1)} = \begin{cases} 4n \sqrt{2r_1 - \left(\sqrt{2\sqrt{3}r_2 \cos(\varphi_2)} + 1 \right)^2} + S_1^{(1)}, & \text{если } \varphi_1 \in b_1, \varphi_2 \in a_1, \\ (2n+1) \sqrt{2r_1 - \left(\sqrt{2\sqrt{3}r_2 \cos(\varphi_2)} + 1 \right)^2} + \sqrt{2r_1} \sin(\varphi_1) + S_1^{(1)}, & \text{если } \varphi_1 \in b_2, \varphi_2 \in a_1, \\ (2n+2) \sqrt{2r_1 - \left(\sqrt{2\sqrt{3}r_2 \cos(\varphi_2)} + 1 \right)^2} + S_1^{(1)}, & \text{если } \varphi_1 \in b_3, \varphi_2 \in a_1, \\ S_1^{(1)}, & \text{если } \varphi_2 \in a_2, \\ 2n \sqrt{2r_1 - \left(1 - \sqrt{2\sqrt{3}r_2 \cos(\varphi_2)} \right)^2} + S_1^{(1)}, & \text{если } \varphi_1 \in b_4, \varphi_2 \in a_3, \\ (2n+1) \sqrt{2r_1 - \left(1 - \sqrt{2\sqrt{3}r_2 \cos(\varphi_2)} \right)^2} + \sqrt{2r_1} \sin(\varphi_1) + S_1^{(1)}, & \text{если } \varphi_1 \in b_5, \varphi_2 \in a_3, \\ (2n+2) \sqrt{2r_1 - \left(1 - \sqrt{2\sqrt{3}r_2 \cos(\varphi_2)} \right)^2} + S_1^{(1)}, & \text{если } \varphi_1 \in b_6, \varphi_2 \in a_3, \end{cases}$$

где

$$a_1 = [(2k-1)\pi; (2k-1)\pi + \arccos(W_-)] \cup \\ \cup [(2k+1)\pi - \arccos(W_-); (2k+1)\pi],$$

$$a_2 = ((2k-1)\pi + \arccos(W_-); 2k\pi - \arccos(W_-)) \cup \\ \cup (2k\pi + \arccos(W_-); (2k+1)\pi - \arccos(W_-)),$$

$$a_3 = [2k\pi - \arccos(W_-); 2k\pi + \arccos(W_-)],$$

$$b_1 = [(2n-1)\pi; 2n\pi - \arccos(C_+)], b_2 = [2n\pi - \arccos(C_+); 2n\pi + \arccos(C_+)],$$

$$b_3 = (2n\pi + \arccos(C_+); (2n+1)\pi], b_4 = [(2n-1)\pi; 2n\pi - \arccos(C_-)],$$

$$b_5 = [2n\pi - \arccos(C_-); 2n\pi + \arccos(C_-)], b_6 = (2n\pi + \arccos(C_-); (2n+1)\pi].$$

$$I_1^{(2)} = \begin{cases} S_1^{(2)}, & \text{если } \varphi_1 \in d_1, \\ \frac{4k}{\sqrt{3}} \sqrt{2\sqrt{3}r_2(1-C_*^2)} - \sqrt{\frac{2r_2}{\sqrt{3}}} \sin(\varphi_2) + S_1^{(2)}, & \text{если } \varphi_1 \notin d_1, \varphi_2 \in c_1, \\ \frac{4k+1}{\sqrt{3}} \sqrt{2\sqrt{3}r_2(1-C_*^2)} + S_1^{(2)}, & \text{если } \varphi_1 \notin d_1, \varphi_2 \in c_2, \\ \frac{4k+2}{\sqrt{3}} \sqrt{2\sqrt{3}r_2(1-C_*^2)} + \sqrt{\frac{2r_2}{\sqrt{3}}} \sin(\varphi_2) + S_1^{(2)}, & \text{если } \varphi_1 \notin d_1, \varphi_2 \in c_3, \\ \frac{4k+3}{\sqrt{3}} \sqrt{2\sqrt{3}r_2(1-C_*^2)} + S_1^{(2)}, & \text{если } \varphi_1 \notin d_1, \varphi_2 \in c_4, \\ \frac{4k+4}{\sqrt{3}} \sqrt{2\sqrt{3}r_2(1-C_*^2)} - \sqrt{\frac{2r_2}{\sqrt{3}}} \sin(\varphi_2) + S_1^{(2)}, & \text{если } \varphi_1 \notin d_1, \varphi_2 \in c_5, \end{cases}$$

где

$$d_1 = \left[(2n-1)\pi; 2n\pi - \arccos\left(\frac{1 - \sqrt{2\sqrt{3}r_2}}{\sqrt{2r_1}}\right) \right] \cup \left[2n\pi + \arccos\left(\frac{1 - \sqrt{2\sqrt{3}r_2}}{\sqrt{2r_1}}\right); (2n+1)\pi \right]$$

$$c_1 = [(2k-1)\pi; (2k-1)\pi + \arccos(C_*)];$$

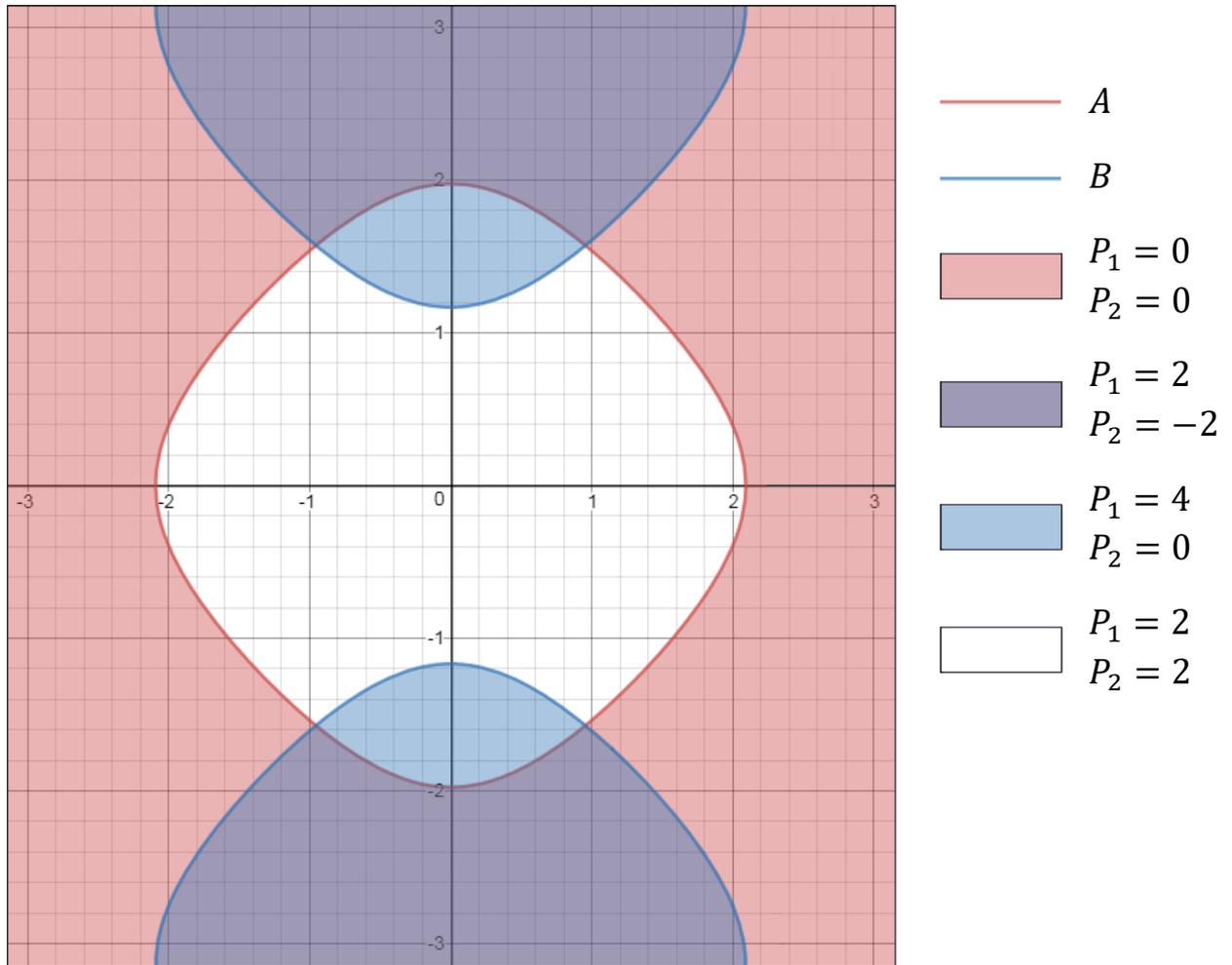
$$c_2 = ((2k-1)\pi + \arccos(C_*); 2k\pi - \arccos(C_*));$$

$$c_3 = (2k\pi - \arccos(C_*); 2k\pi + \arccos(C_*));$$

$$c_4 = (2k\pi + \arccos(C_*); (2k+1)\pi - \arccos(C_*));$$

$$c_5 = ((2k+1)\pi - \arccos(C_*); (2k+1)\pi].$$

Зона 4

Рисунок 3 – Положение кривых (4.29) на торе T^2 в зоне 3.

$$I_1^{(1)} = \begin{cases} 2n\sqrt{2r_1(1-C_+^2)} + S_1^{(1)}, & \text{если } \varphi_1 \in b_1, \varphi_2 \in a_1, \\ (2n+1)\sqrt{2r_1(1-C_+^2)} + \sqrt{2r_1}\sin(\varphi_1) + S_1^{(1)}, & \text{если } \varphi_1 \in b_2, \varphi_2 \in a_1, \\ (2n+2)\sqrt{2r_1(1-C_+^2)} + S_1^{(1)}, & \text{если } \varphi_1 \in b_5, \varphi_2 \in a_1, \\ 2n\sqrt{2r_1(1-C_+^2)} + 2n\sqrt{2r_1(1-C_-^2)} + S_1^{(1)}, & \\ & \text{если } \varphi_1 \in b_1, \varphi_2 \in a_2 \text{ или } \varphi_1 \in b_6, \varphi_2 \in a_3, \\ (2n+1)\sqrt{2r_1(1-C_+^2)} + 2n\sqrt{2r_1(1-C_-^2)} + \sqrt{2r_1}\sin(\varphi_1) + S_1^{(1)}, & \\ & \text{если } \varphi_1 \in b_3, \varphi_2 \in a_2, \\ 2n\sqrt{2r_1(1-C_+^2)} + (2n+1)\sqrt{2r_1(1-C_-^2)} + \sqrt{2r_1}\sin(\varphi_1) + S_1^{(1)}, & \\ & \text{если } \varphi_1 \in b_8, \varphi_2 \in a_3, \\ (2n+1)\sqrt{2r_1(1-C_+^2)} + (2n+1)\sqrt{2r_1(1-C_-^2)} + 2\sqrt{2r_1}\sin(\varphi_1) + S_1^{(1)}, & \\ & \text{если } \varphi_1 \in b_7, \varphi_2 \in a_2 \text{ или } \varphi_1 \in b_2, \varphi_2 \in a_3, \\ (2n+1)\sqrt{2r_1(1-C_+^2)} + (2n+2)\sqrt{2r_1(1-C_-^2)} + \sqrt{2r_1}\sin(\varphi_1) + S_1^{(1)}, & \\ & \text{если } \varphi_1 \in b_9, \varphi_2 \in a_2, \\ (2n+2)\sqrt{2r_1(1-C_+^2)} + (2n+1)\sqrt{2r_1(1-C_-^2)} + \sqrt{2r_1}\sin(\varphi_1) + S_1^{(1)}, & \\ & \text{если } \varphi_1 \in b_4, \varphi_2 \in a_3, \\ (2n+2)\sqrt{2r_1(1-C_+^2)} + (2n+2)\sqrt{2r_1(1-C_-^2)} + S_1^{(1)}, & \\ & \text{если } \varphi_1 \in b_5, \varphi_2 \in a_2 \text{ или } \varphi_1 \in b_{10}, \varphi_2 \in a_3, \\ 2n\sqrt{2r_1(1-C_-^2)} + S_1^{(1)}, & \text{если } \varphi_1 \in b_6, \varphi_2 \in a_4, \\ (2n+1)\sqrt{2r_1(1-C_-^2)} + \sqrt{2r_1}\sin(\varphi_1) + S_1^{(1)}, & \text{если } \varphi_1 \in b_7, \varphi_2 \in a_4, \\ (2n+2)\sqrt{2r_1(1-C_-^2)} + S_1^{(1)}, & \text{если } \varphi_1 \in b_{10}, \varphi_2 \in a_4, \end{cases}$$

где

$$a_1 = [(2k-1)\pi; 2k\pi - \arccos(W_-)] \cup (2k\pi + \arccos(W_-); (2k+1)\pi],$$

$$a_2 = \left(2k\pi - \arccos(W_-); 2k\pi - \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}; 2k\pi + \arccos(W_-) \right),$$

$$a_3 = \left(2k\pi - \frac{\pi}{2}; (2k-1)\pi + \arccos(W_-) \right) \cup \\ \cup \left((2k+1)\pi - \arccos(W_-); 2k\pi + \frac{\pi}{2} \right),$$

$$a_4 = [(2k-1)\pi + \arccos(W_-); (2k+1)\pi - \arccos(W_-)],$$

$$b_1 = [(2n-1)\pi; 2n\pi - \arccos(C_+)],$$

$$b_2 = [2n\pi - \arccos(C_+); 2n\pi + \arccos(C_+)],$$

$$b_3 = [2n\pi - \arccos(C_+); 2n\pi - \arccos(C_-)],$$

$$b_4 = [2n\pi + \arccos(C_+); 2n\pi + \arccos(C_-)],$$

$$b_5 = (2n\pi + \arccos(C_+); (2n+1)\pi], \quad b_6 = [(2n-1)\pi; 2n\pi - \arccos(C_-)],$$

$$b_7 = [2n\pi - \arccos(C_-); 2n\pi + \arccos(C_-)],$$

$$b_8 = [2n\pi - \arccos(C_-); 2n\pi - \arccos(C_+)],$$

$$b_9 = [2n\pi + \arccos(C_-); 2n\pi + \arccos(C_+)], \quad b_{10} = (2n\pi - \arccos(C_-); (2n+1)\pi]$$

$$I_1^{(2)} = \begin{cases} S_1^{(2)}, & \text{если } \varphi_1 \in d_1 \\ \frac{4k}{\sqrt{3}} \sqrt{2\sqrt{3}r_2(1-C_*^2)} - \sqrt{\frac{2r_2}{\sqrt{3}}} \sin(\varphi_2) + S_1^{(2)}, & \\ \text{если } \varphi_1 \in d_2, \varphi_2 \in c_1 \text{ или } \varphi_1 \in d_3, \varphi_2 \in c_6, \\ \frac{4k+1}{\sqrt{3}} \sqrt{2\sqrt{3}r_2(1-C_*^2)} + S_1^{(2)}, & \\ \text{если } \varphi_1 \in d_2, \varphi_2 \in c_2 \text{ или } \varphi_1 \in d_3, \varphi_2 \in c_7, \\ \frac{4k+2}{\sqrt{3}} \sqrt{2\sqrt{3}r_2(1-C_*^2)} + \sqrt{\frac{2r_2}{\sqrt{3}}} \sin(\varphi_2) + S_1^{(2)}, & \\ \text{если } \varphi_1 \in d_2, \varphi_2 \in c_3 \text{ или } \varphi_1 \in d_3, \varphi_2 \in c_8, \\ \frac{4k+3}{\sqrt{3}} \sqrt{2\sqrt{3}r_2(1-C_*^2)} + S_1^{(2)}, & \\ \text{если } \varphi_1 \in d_2, \varphi_2 \in c_4 \text{ или } \varphi_1 \in d_3, \varphi_2 \in c_9, \\ \frac{4k+4}{\sqrt{3}} \sqrt{2\sqrt{3}r_2(1-C_*^2)} - \sqrt{\frac{2r_2}{\sqrt{3}}} \sin(\varphi_2) + S_1^{(2)}, & \\ \text{если } \varphi_1 \in d_2, \varphi_2 \in c_5 \text{ или } \varphi_1 \in d_3, \varphi_2 \in c_{10}, \end{cases}$$

где

$$d_1 = \left[(2n-1)\pi; 2n\pi - \arccos\left(\frac{1 - \sqrt{2\sqrt{3}r_2}}{\sqrt{2r_1}}\right) \right] \cup$$

$$\cup \left[2n\pi + \arccos\left(\frac{1 - \sqrt{2\sqrt{3}r_2}}{\sqrt{2r_1}}\right); (2n+1)\pi \right],$$

$$d_2 = \left[2n\pi - \arccos\left(\frac{1 - \sqrt{2\sqrt{3}r_2}}{\sqrt{2r_1}}\right); 2n\pi - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2r_1}}\right) \right] \cup$$

$$\cup \left[2n\pi + \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2r_1}}\right); 2n\pi + \arccos\left(\frac{1 - \sqrt{2\sqrt{3}r_2}}{\sqrt{2r_1}}\right) \right],$$

$$d_3 = \left[2n\pi - \arccos\left(\frac{1 - \sqrt{2\sqrt{3}r_2}}{\sqrt{2r_1}}\right); 2n\pi + \arccos\left(\frac{1 - \sqrt{2\sqrt{3}r_2}}{\sqrt{2r_1}}\right) \right],$$

$$c_1 = [(2k-1)\pi; (2k-1)\pi + \arccos(C_*)];$$

$$c_2 = ((2k-1)\pi + \arccos(C_*); 2k\pi - \arccos(C_*));$$

$$c_3 = (2k\pi - \arccos(C_*); 2k\pi + \arccos(C_*));$$

$$c_4 = (2k\pi + \arccos(C_*); (2k+1)\pi - \arccos(C_*));$$

$$c_5 = ((2k+1)\pi - \arccos(C_*); (2k+1)\pi], \quad c_6 = [(2k-1)\pi; 2k\pi - \arccos(C_*)],$$

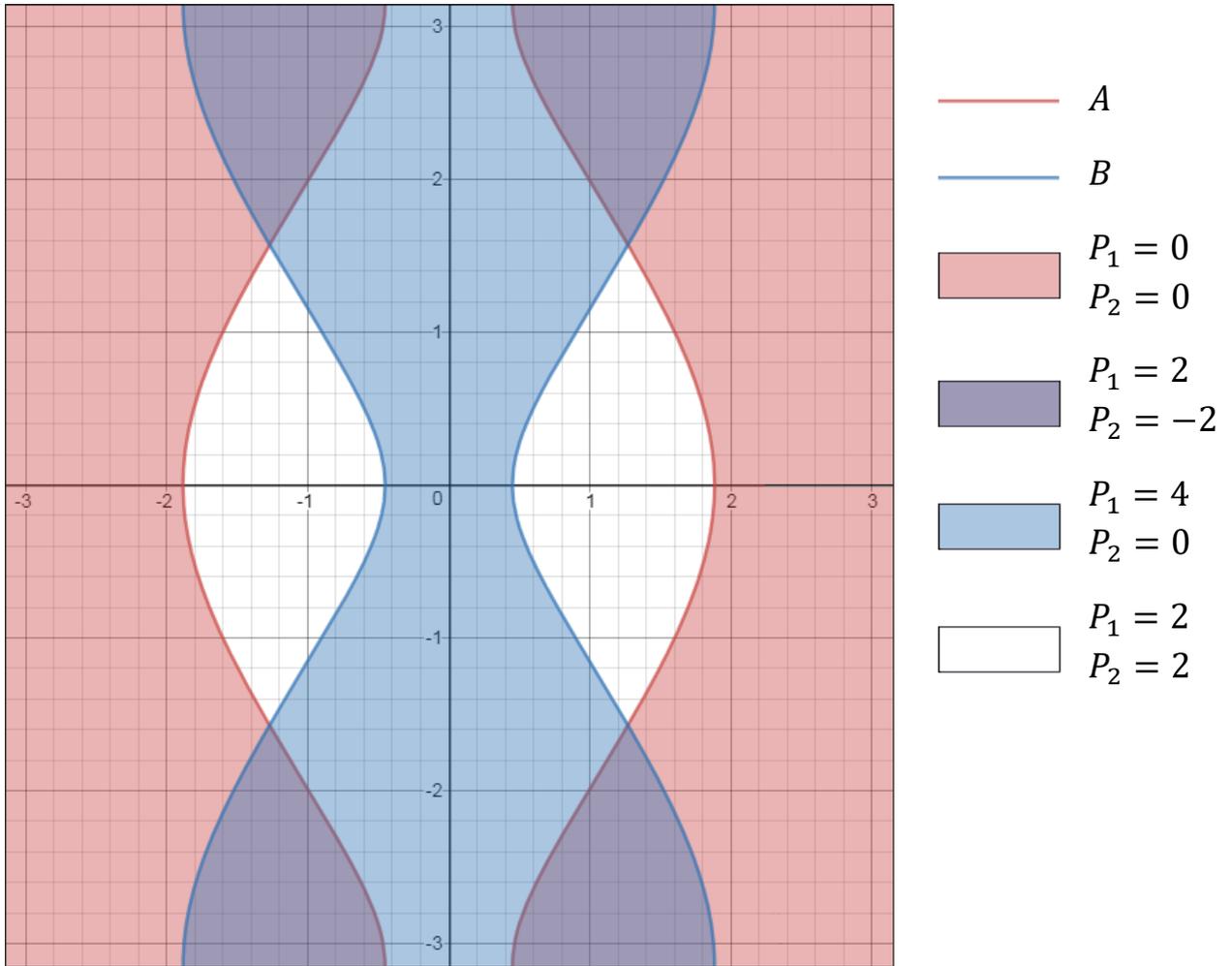
$$c_7 = (2k\pi - \arccos(C_*); (2k-1)\pi + \arccos(C_*));$$

$$c_8 = ((2k-1)\pi + \arccos(C_*); (2k+1)\pi - \arccos(C_*));$$

$$c_9 = ((2k+1)\pi - \arccos(C_*); 2k\pi + \arccos(C_*));$$

$$c_{10} = (2k\pi + \arccos(C_*); (2k+1)\pi].$$

Зона 5

Рисунок 4 – Положение кривых (4.29) на торе T^2 в зоне 3.

$$I_1^{(1)} = \left\{ \begin{array}{l} 2n\sqrt{2r_1(1-C_+^2)} + 2n\sqrt{2r_1(1-C_-^2)} + S_1^{(1)}, \\ \text{если } \varphi_1 \in b_1, \varphi_2 \in a_1 \text{ или } \varphi_1 \in b_6, \varphi_2 \notin a_1, \\ (2n+1)\sqrt{2r_1(1-C_+^2)} + 2n\sqrt{2r_1(1-C_-^2)} + \sqrt{2r_1}\sin(\varphi_1) + S_1^{(1)}, \\ \text{если } \varphi_1 \in b_3, \varphi_2 \in a_1, \\ 2n\sqrt{2r_1(1-C_+^2)} + (2n+1)\sqrt{2r_1(1-C_-^2)} + \sqrt{2r_1}\sin(\varphi_1) + S_1^{(1)}, \\ \text{если } \varphi_1 \in b_8, \varphi_2 \notin a_1, \\ (2n+1)\sqrt{2r_1(1-C_+^2)} + (2n+1)\sqrt{2r_1(1-C_-^2)} + 2\sqrt{2r_1}\sin(\varphi_1) + S_1^{(1)}, \\ \text{если } \varphi_1 \in b_7, \varphi_2 \in a_1 \text{ или } \varphi_1 \in b_2, \varphi_2 \notin a_1, \\ (2n+1)\sqrt{2r_1(1-C_+^2)} + (2n+2)\sqrt{2r_1(1-C_-^2)} + \sqrt{2r_1}\sin(\varphi_1) + S_1^{(1)}, \\ \text{если } \varphi_1 \in b_9, \varphi_2 \in a_1, \\ (2n+2)\sqrt{2r_1(1-C_+^2)} + (2n+1)\sqrt{2r_1(1-C_-^2)} + \sqrt{2r_1}\sin(\varphi_1) + S_1^{(1)}, \\ \text{если } \varphi_1 \in b_4, \varphi_2 \notin a_1, \\ (2n+2)\sqrt{2r_1(1-C_+^2)} + (2n+2)\sqrt{2r_1(1-C_-^2)} + S_1^{(1)}, \\ \text{если } \varphi_1 \in b_5, \varphi_2 \in a_1 \text{ или } \varphi_1 \in b_{10}, \varphi_2 \notin a_1, \end{array} \right.$$

где

$$a_2 = \left((2k-1)\pi; 2k\pi - \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}; (2k+1)\pi \right),$$

$$b_1 = [(2n-1)\pi; 2n\pi - \arccos(C_+)],$$

$$b_2 = [2n\pi - \arccos(C_+); 2n\pi + \arccos(C_+)],$$

$$b_3 = [2n\pi - \arccos(C_+); 2n\pi - \arccos(C_-)],$$

$$b_4 = [2n\pi + \arccos(C_+); 2n\pi + \arccos(C_-)],$$

$$b_5 = (2n\pi + \arccos(C_+); (2n+1)\pi], \quad b_6 = [(2n-1)\pi; 2n\pi - \arccos(C_-)],$$

$$b_7 = [2n\pi - \arccos(C_-); 2n\pi + \arccos(C_-)],$$

$$b_8 = [2n\pi - \arccos(C_-); 2n\pi - \arccos(C_+)],$$

$$b_9 = [2n\pi + \arccos(C_-); 2n\pi + \arccos(C_+)], \quad b_{10} = (2n\pi - \arccos(C_-); (2n+1)\pi].$$

$$I_1^{(2)} = \begin{cases} S_1^{(2)}, & \text{если } \varphi_1 \in d_1 \cup d_4 \\ \frac{4k}{\sqrt{3}} \sqrt{2\sqrt{3}r_2(1 - C_*^2)} - \sqrt{\frac{2r_2}{\sqrt{3}}} \sin(\varphi_2) + S_1^{(2)}, & \\ \text{если } \varphi_1 \in d_2, \varphi_2 \in c_1 \text{ или } \varphi_1 \in d_3, \varphi_2 \in c_6, \\ \frac{4k+1}{\sqrt{3}} \sqrt{2\sqrt{3}r_2(1 - C_*^2)} + S_1^{(2)}, & \\ \text{если } \varphi_1 \in d_2, \varphi_2 \in c_2 \text{ или } \varphi_1 \in d_3, \varphi_2 \in c_7, \\ \frac{4k+2}{\sqrt{3}} \sqrt{2\sqrt{3}r_2(1 - C_*^2)} + \sqrt{\frac{2r_2}{\sqrt{3}}} \sin(\varphi_2) + S_1^{(2)}, & \\ \text{если } \varphi_1 \in d_2, \varphi_2 \in c_3 \text{ или } \varphi_1 \in d_3, \varphi_2 \in c_8, \\ \frac{4k+3}{\sqrt{3}} \sqrt{2\sqrt{3}r_2(1 - C_*^2)} + S_1^{(2)}, & \\ \text{если } \varphi_1 \in d_2, \varphi_2 \in c_4 \text{ или } \varphi_1 \in d_3, \varphi_2 \in c_9, \\ \frac{4k+4}{\sqrt{3}} \sqrt{2\sqrt{3}r_2(1 - C_*^2)} - \sqrt{\frac{2r_2}{\sqrt{3}}} \sin(\varphi_2) + S_1^{(2)}, & \\ \text{если } \varphi_1 \in d_2, \varphi_2 \in c_5 \text{ или } \varphi_1 \in d_3, \varphi_2 \in c_{10}, \end{cases}$$

где

$$d_1 = \left[(2n-1)\pi; 2n\pi - \arccos\left(\frac{1 - \sqrt{2\sqrt{3}r_2}}{\sqrt{2r_1}}\right) \right] \cup \\ \cup \left[2n\pi + \arccos\left(\frac{1 - \sqrt{2\sqrt{3}r_2}}{\sqrt{2r_1}}\right); (2n+1)\pi \right], \\ d_2 = \left[2n\pi - \arccos\left(\frac{1 - \sqrt{2\sqrt{3}r_2}}{\sqrt{2r_1}}\right); 2n\pi - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2r_1}}\right) \right] \cup \\ \cup \left[2n\pi + \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2r_1}}\right); 2n\pi + \arccos\left(\frac{1 - \sqrt{2\sqrt{3}r_2}}{\sqrt{2r_1}}\right) \right],$$

$$d_3 = \left[2n\pi - \arccos\left(\frac{1 - \sqrt{2\sqrt{3}r_2}}{\sqrt{2r_1}}\right); 2n\pi - \arccos\left(\frac{1 + \sqrt{2\sqrt{3}r_2}}{\sqrt{2r_1}}\right) \right] \cup$$

$$\cup \left[2n\pi + \arccos\left(\frac{1 + \sqrt{2\sqrt{3}r_2}}{\sqrt{2r_1}}\right); 2n\pi + \arccos\left(\frac{1 - \sqrt{2\sqrt{3}r_2}}{\sqrt{2r_1}}\right) \right],$$

$$d_4 = \left[2n\pi - \arccos\left(\frac{1 + \sqrt{2\sqrt{3}r_2}}{\sqrt{2r_1}}\right); 2n\pi + \arccos\left(\frac{1 + \sqrt{2\sqrt{3}r_2}}{\sqrt{2r_1}}\right) \right]$$

$$c_1 = [(2k - 1)\pi; (2k - 1)\pi + \arccos(C_*)];$$

$$c_2 = ((2k - 1)\pi + \arccos(C_*); 2k\pi - \arccos(C_*));$$

$$c_3 = (2k\pi - \arccos(C_*); 2k\pi + \arccos(C_*));$$

$$c_4 = (2k\pi + \arccos(C_*); (2k + 1)\pi - \arccos(C_*));$$

$$c_5 = ((2k + 1)\pi - \arccos(C_*); (2k + 1)\pi], \quad c_6 = [(2k - 1)\pi; 2k\pi - \arccos(C_*)],$$

$$c_7 = (2k\pi - \arccos(C_*); (2k - 1)\pi + \arccos(C_*));$$

$$c_8 = ((2k - 1)\pi + \arccos(C_*); (2k + 1)\pi - \arccos(C_*));$$

$$c_9 = ((2k + 1)\pi - \arccos(C_*); 2k\pi + \arccos(C_*));$$

$$c_{10} = (2k\pi + \arccos(C_*); (2k + 1)\pi].$$

Зона 6

В зоне 6 находятся инвариантные торы системы (4.6). В этом случае уравнения (4.28) будут однородными.

$$I_1^{(1)} = S_1^{(1)}, \quad I_1^{(2)} = S_1^{(2)}.$$

Литература

1. *Морозов А. Д.* Резонансы, цикл и хаос в квазиконсервативных системах, М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2005, 424 с.
2. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. – 339 с.
3. *Циглер Г.* Основы теории устойчивости конструкций. М.: мир, 1971. 192 с.
4. *Гроссман Е. П.* Флаттер // Труды ЦАГИ. 1937. Вып. 284. 248 с.
5. *Bisplinghoff R. L., Ashley H.* Principles of aeroelasticity. 1975. New York. Dover.
6. *Рабинович Б. И.* Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1975, 416 с.
7. *Белецкий В. В., Голубицкая М. Д.* Стабилизация и экстремальные свойства резонансных режимов двуногой ходьбы // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 2. С. 193–200.
8. *Lienard A.* Etudes des oscillations entretenues, Revue generale de l'Electricite, 1928, 901–912, 946–954.
9. *Van der Pol B.* On relaxation oscillations // Philos. Mag., 1926, № 2, P. 978–992.
10. *Петрова Е. В.* Количество и устойчивость нелинейных параметрических колебаний в системе слабо связанных осцилляторов с маятниковой нелинейностью, Матем. заметки, 1999, том 65, выпуск 3, 369–376.
11. *Кузнецов А. П., Станкевич Н. В., Тюрюкина Л. В.* Связанные осцилляторы Ван дер Поля и Ван дер Поля–Дуффинга: фазовая динамика и компьютерное моделирование, Изв. вузов «ПНД», т. 16, № 4, 2008, 101–136.

12. Байков А. Е. Предельный цикл в неконсервативной системе при резонансе 1:2 // ПММ, 2011 Т. 75, Вып. 3, С. 384-395.
13. Черноусько Ф. Л. О движении тела, содержащего подвижную внутреннюю массу // Доклады РАН. 2005. № 1. С. 56 – 60.
14. Chernous'ko F. L. Analysis and Optimization of the Motion of a Body Controlled by Means of Movable Internal Mass // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2006, vol. 70, no. 6, pp. 819 - 842.
15. Черноусько Ф. Л. Движение тела по плоскости под влиянием подвижных внутренних масс // Доклады Академии наук. 2016. Т. 470. № 4. С. 406 – 410.
16. Панёв А. С. О движении твердого тела с подвижной внутренней массой по горизонтальной поверхности в вязкой среде // Труды МАИ. 2018. № 98.
17. Bardin B. S., Panev A. S. On the Motion of a Rigid Body with an Internal Moving Point Mass on a Horizontal Plane // AIP Conference Proceedings, 2018, vol. 1959, no. 1.
18. Bardin B. S., Panev A. S. On the Motion of a Body with a Moving internal Mass on a Rough Horizontal Plane // Rus. Journal Nonlinear Dynamics, 2018, vol. 14, no. 4, pp. 519 - 542.
19. Sobolev N. A., Sorokin K. S. Experimental Investigation of a Model of a Vibration-Driven Robot with Rotating Masses // Journal of Computer and Systems Sciences International, 2007, vol. 46, no. 5, pp. 826 - 835.
20. Bolotnik N. N., Figurina T. Yu. Optimal Control of the Rectilinear Motion of a Rigid Body on a Rough Plane by Means of the Motion of Two Internal Masses // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2008, vol. 72, no. 2, pp. 126 - 135.
21. Volkova L. Yu., Yatsun S. F. Simulation of the Plane Controlled Motion of a Three-Mass Vibration System // Journal of Computer and Systems Sciences International, 2012, vol. 51, no. 6, pp. 859 - 878.

22. *Иванов А. П., Сахаров А. В.* Динамика твёрдого тела с подвижными внутренними массами и роторов на шероховатой плоскости // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 4. С. 763 - 772.
23. *Pascal M., Stepanov S.* Dynamics of coupled oscillators excited by dry friction // Proc. of the 9th Conf. on Dynamical Systems, Theory and Applications (Poland, Dec 17–20, 2007): Vol. 1. Lódź: Left Grupa, 2008. P. 355–362.
24. *Гюнтер Н. М.* Интегрирование уравнений в частных производных первого порядка. Л.-М.: ОНТИ, 1934, 360 с.
25. *Горицкий А. Ю., Кружков С. Н., Чечкин Г. А.* Уравнения с частными производными первого порядка: Учебное пособие. М.: Изд-во ЦПИ при механико-математической факультете МГУ, 1999, 96 с.
26. *Poincaré H.* Les méthodes nouvelles de la mécanique celeste, T.1, Paris : Gauthier-Villars et fils, 1892, 412 pp.
27. *Пуанкаре А.* Избранные труды в трёх томах. Т.1: Новые методы небесной механики, М.: Наука 1971, 772 с.
28. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики, М.: Едиториал УРСС, 2003, 416 с.
29. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью, М.: Наука, 1985, 224 с.
30. *Filippov A. F.* Differential Equations with Discontinuous Righthand Side, Math. Appl., 18, Springer, Dordrecht, 1988, X, 304 pp.
31. *Плотников В. А., Зверкова Т. С.* Метод усреднения для систем стандартного вида с разрывными правыми частями // Дифференц. уравнения, 18:6 (1982), с. 1091–1093.
32. *Байков А. Е., Ковалев Н. В.* Исследование динамики кусочно-линейного осциллятора с двумя степенями свободы // Нелинейная динамика, 2017, т. 13, №4, с. 533-542.
33. *Ковалев Н. В.* Прямое разложение неавтономных интегралов квазиконсервативных систем с одной степенью свободы // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. Т. 18, № 3. С. 32–40.

34. *Байков А. Е., Ковалев Н. В.* О зоне залипания ящика с внутренним осциллятором на горизонтальной плоскости // Труды МАИ, №107.
35. *Байков А. Е., Ковалев Н. В.* Неавтономные интегралы и периодические решения квазиконсервативных систем // III Международная школа-конференция молодых учёных «Нелинейная динамика машин». Сборник трудов. 2016. С. 163-171.
36. *Байков А. Е., Ковалев Н. В.* Применение неавтономных интегралов для исследования динамики кусочно-линейного осциллятора // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2018». 2018.
37. *Байков А. Е., Ковалев Н. В.* Методы построения и приложения неавтономных интегралов квазиконсервативных систем // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (DIFF2018). Сборник тезисов докладов. 2018. С. 35-36.
38. *Байков А. Е., Ковалев Н. В.* Приложение неавтономных интегралов к исследованию динамики кусочно-линейных осцилляторов // Сборник тезисов докладов XLV Международной молодёжной научной конференции «Гагаринские чтения-2019» 2019. С. 755-756.
39. *Кодингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: УРСС, 2010. - 472 с.