

Акционерное общество
«Российская корпорация ракетно-космического
приборостроения и информационных систем»
(АО «Российские космические системы»)



На правах рукописи

БАБУРИН АНТОН АЛЕКСАНДРОВИЧ

МЕТОДИКА ВЫСОКОТОЧНОГО АБСОЛЮТНОГО
МЕСТООПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТРЕБИТЕЛЯ
С РАЗРЕШЕНИЕМ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ НЕОДНОЗНАЧНОСТИ
ПСЕВДОФАЗОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ СИГНАЛОВ ГЛОНАСС

Специальность: 2.2.16. – «Радиолокация и радионавигация»

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени

кандидата технических наук

Научный руководитель –
доктор технических наук, профессор
Поваляев Александр Александрович

Москва – 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1 ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ВЫСОКОТОЧНЫХ АБСОЛЮТНЫХ МЕСТООПРЕДЕЛЕНИЙ С РАЗРЕШЕНИЕМ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ НЕОДНОЗНАЧНОСТИ ПСЕВДОФАЗОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ.....	11
1.1 Краткий обзор известных из литературы подходов к реализации режима целочисленного высокоточного абсолютного местоопределения.....	11
1.2 Используемые в работе обозначения.....	20
1.3 Общее описание алгоритмов целочисленного разрешения неоднозначности для высокоточных местоопределений.....	21
1.3.1 Общий алгоритм вычисления высокоточного целочисленного решения.....	21
1.3.2 Алгоритмы поиска целочисленной оценки действительного вектора.....	24
1.3.3 Достоверность найденного целочисленного решения и пути её повышения.....	26
1.4 Математические модели измерений.....	28
1.4.1 Учёт систематических смещений в математических моделях измерений.....	28
1.4.2 Математические модели измерений на исходных частотах.....	31
1.4.3 Линейные комбинации измерений.....	36
1.4.4 Математические модели измерений ГЛОНАСС.....	40
1.4.5 Математические модели измерений GPS. Сравнение математических моделей измерений GPS и ГЛОНАСС.....	46
1.5 Выводы по главе 1.....	51
2 ОСОБЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ ГЛОНАСС.....	52
2.1 Различие кодовых аппаратурных задержек в математических моделях измерений псевдодальностей ГЛОНАСС.....	52
2.1.1 Оценка различия narrow-lane-комбинаций кодовых аппаратурных задержек различных навигационных приёмников ГЛОНАСС.....	54
2.1.2 Оценка различия кодовых аппаратурных задержек на исходных частотах для близко расположенных приёмников ГЛОНАСС.....	63
2.1.3 Упрощение математических моделей измерений совместимой навигационной аппаратуры потребителя ГЛОНАСС.....	69
2.2 Недоопределённость систем линейных алгебраических уравнений измерений в ГНСС.....	72
2.2.1 Применение теории S-преобразования при решении недоопределённых систем линейных уравнений.....	72
2.2.2 Описание решения пользовательской задачи целочисленного высокоточного абсолютного местоопределения по измерениям GPS.....	78
2.3 Выводы по главе 2.....	83
3 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА И МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ВЫСОКОТОЧНОГО АБСОЛЮТНОГО МЕСТООПРЕДЕЛЕНИЯ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ СИГНАЛОВ ГЛОНАСС.....	85

3.1 Применение теории S-преобразования к решению пользовательской задачи целочисленного высокоточного абсолютного местоопределения с использованием ГЛОНАСС	86
3.1.1 Математическая постановка и решение пользовательской задачи.....	86
3.1.2 Способ нестрого целочисленной оценки псевдофазовых неоднозначностей ГЛОНАСС	90
3.1.3 Экспериментальные результаты решения пользовательской задачи	93
3.1.4 Оценка потенциальной точности абсолютных местоопределений при использовании только псевдофазовых измерений.....	102
3.2 Применение теории S-преобразования к решению сетевой задачи целочисленного высокоточного абсолютного местоопределения с использованием ГЛОНАСС	109
3.2.1 Математическая постановка и решение сетевой задачи.....	109
3.2.2 Пример вычисления аналитического выражение оцениваемого в сетевой задаче вектора	120
3.2.3 Экспериментальные результаты решения сетевой задачи	124
3.3 Выводы по главе 3	129
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	131
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ	133
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	135
Приложение А (справочное) Вычисление матрицы проекции в случае ортогональности пространства ядра некоторым осям пространства исходных переменных	148
Приложение Б (справочное) Укрупнённая блок-схема алгоритма решения пользовательской задачи целочисленного высокоточного абсолютного местоопределения.....	150
Приложение В (справочное) Графики ошибок местоопределения для оценки потенциальной точности при использовании GPS и совместном использовании GPS и ГЛОНАСС.....	151
Приложение Г (справочное) Укрупнённая блок-схема алгоритма решения сетевой задачи целочисленного высокоточного абсолютного местоопределения	154
Приложение Д (справочное) Пример аналитического выражения оцениваемого в сетевой задаче вектора.....	155
Приложение Е (справочное) Акты об использовании результатов исследований.....	157

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования

Возрастающие требования к точности и оперативности местоопределений навигационной аппаратуры потребителя (НАП) не могут быть удовлетворены базовыми средствами глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС). Для повышения точности, надёжности, целостности, непрерывности местоопределения широко используются системы функциональных дополнений ГНСС – спутниковые системы дифференциальной коррекции (Satellite Based Augmentation System – SBAS), например, российская Система дифференциальной коррекции и мониторинга (СДКМ) или американская Wide Area Augmentation System (WAAS) и другие. Они обеспечивают точность местоопределений менее 1 метра и действуют в региональном или континентальном масштабе. Тем не менее существует немалое число морских, речных, наземных, космических потребителей, которые выдвигают ещё более высокие требования к навигационному обеспечению. Например, согласно Радионавигационному плану Российской Федерации [21], такие задачи, как:

- плавание в акваториях портов и выполнение специальных работ;
- управление движением железнодорожного транспорта, строительными и сельскохозяйственными машинами;
- картография и геодезия, землеустройство, путевое хозяйство железных дорог;
- навигация космических аппаратов (КА) геодезического обеспечения и дистанционного зондирования Земли требуют от дециметровой до миллиметровой точности местоопределения как в локальном, так и в глобальном масштабе.

В Федеральном радионавигационном плане США [24] выдвигаются аналогичные требования к точности местоопределений.

Для достижения таких точностей с помощью ГНСС необходимо компенсировать систематические смещения в измерениях, использовать высокоточную эфемеридно-временную информацию (ЭВИ) и так называемые псевдофазовые измерения, которые обладают достаточной (сантиметровой-миллиметровой) точностью. Однако псевдофазовые измерения имеют недостаток – они целочисленно неоднозначны, что приводит к трудностям при их обработке.

Степень разработанности темы исследования

Вопросами высокоточной навигации, в том числе обработкой псевдофазовых измерений занимались такие отечественные учёные, как А.А. Поваляев, В.В. Пасынков, К.М. Антонович, А.Н. Подкорытов, В.В. Митрикас, В.Ф. Брагинец, И.О. Скакун, Д.С. Печерица, Л.А. Липатников, А.А. Карауш, А.С. Пустошилов и другие, а также зарубежные учёные: P.J.G. Teunissen, S. Vanville, P. Collins, D. Laurichesse, F. Mercier, S. Bisnath, J. Couba, M. Ge, J. Geng, L. Wanninger, A. Khodabandeh и другие.

Использование псевдофазовых измерений возможно в режиме относительных и абсолютных местоопределений. В алгоритмическом отношении режим относительных местоопределений (известный как Real Time Kinematic, RTK – кинематика в реальном времени) можно считать более простым, однако он требует наличия как минимум одного дополнительного навигационного приёмника (называемого обычно базовым) и имеет ограниченную рабочую зону.

Абсолютные методы навигации, использующие псевдофазовые измерения, в англоязычной литературе известны под общим названием Precise Point Positioning (PPP) [62]. В отечественной литературе используется термин «высокоточное абсолютное местоопределение» (ВАМО) [13]. Как правило, под аббревиатурой PPP обычно понимается режим float PPP (действительное ВАМО), при котором целочисленные свойства псевдофазовых измерений не учитываются. ЭВИ для режима действительного ВАМО состоит из информации о координатах спутников (эфемеридная информация) и информации о смещениях показаний спутниковых часов (временная информация). Такую ЭВИ вычисляют и предоставляют различные аналитические центры, например, Европейский центр определения орбит (Center for Orbit Determination in Europe, CODE), Министерство природных ресурсов Канады (Natural Resources Canada, NRCan) и другие, а также российские: Информационно-аналитический центр координатно-временного и навигационного обеспечения (ИАЦ КВНО) АО «ЦНИИмаш» и АО «НПК «СПП» в рамках Системы высокоточного определения навигационной и эфемеридно-временной информации (СВО ЭВИ). Методы действительного ВАМО могут обеспечить сантиметровую точность местоопределения в абсолютном режиме, однако достижение такой точности требует достаточно долгого времени непрерывных измерений – даже при совместном использовании нескольких ГНСС время сходимости решения к требуемому уровню точности (время инициализации) в статическом режиме составляет не менее десяти, а обычно – несколько десятков минут и более.

Повышение оперативности высокоточного местоопределения (снижение времени сходимости или времени инициализации) возможно за счёт использования целочисленных свойств псевдофазовых измерений (режим целочисленного ВАМО, integer PPP, PPP-AR – ambiguity resolution, разрешение неоднозначности) [18, 29, 36, 41, 69]. Для целочисленной оценки псевдофазовых неоднозначностей необходима информация об аппаратурных задержках приёмника и спутников. Информация о спутниковых аппаратурных задержках отсутствует в оценках смещений показаний спутниковых часов ЭВИ, используемой в действительном ВАМО. В связи с этим для целочисленного ВАМО требуется вычисление специальных поправок к спутниковым часам (временной информации), хотя для вычисления координат спутников можно использовать эфемеридную информацию для действительного ВАМО. Если для американской системы GPS и других ГНСС, где используется кодовое разделение спутниковых сигналов (или кодовое разделение каналов, КПК, англ. Code Division Multiple Access, CDMA), таких как GALILEO (Европейский

союз) и BEIDOU (Китай), алгоритмы целочисленного ВАМО хорошо развиты, то для российской системы ГЛОНАСС, где на большинстве спутников в настоящее время используются только сигналы с частотным разделением каналов (ЧРК, англ. Frequency Division Multiple Access, FDMA), эти алгоритмы развиты намного хуже. Кроме того, на перспективных КА «ГЛОНАСС-К2», излучающих сигналы с КРК, не планируется отказываться от сигналов с ЧРК.

Таким образом, развитие методики и алгоритмов повышения оперативности ВАМО по сигналам ГЛОНАСС с частотным разделением является актуальной задачей.

Объект исследования – технология местоопределения с помощью ГНСС.

Предмет исследования – методики высокоточных абсолютных местоопределений навигационного приёмника с разрешением целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений и алгоритмы вычисления необходимой высокоточной корректирующей информации (смещений показаний спутниковых часов) по измерениям сигналов ГЛОНАСС с частотным разделением.

Цель диссертационной работы – повышение оперативности ВАМО путём снижения времени сходимости навигационного решения (времени достижения сантиметрового уровня точности решения) по измерениям сигналов ГЛОНАСС за счёт разрешения целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений, а также за счёт совместного использования нескольких ГНСС в режиме целочисленного ВАМО.

Частные задачи диссертационной работы:

1) Разработка математических моделей измерений навигационного приёмника по сигналам ГЛОНАСС с частотным разделением, позволяющих целочисленно оценивать псевдофазовые неоднозначности.

2) Разработка методики оценки различия кодовых аппаратурных задержек в НАП, для выделения НАП, обладающей схожими характеристиками (однотипной НАП). Уточнение (упрощение) математических моделей измерений однотипной НАП.

3) Разработка алгоритмов оценивания смещений показаний часов спутников ГЛОНАСС по измерениям сети наземных станций, оборудованных однотипной НАП.

4) Разработка методики целочисленного ВАМО НАП с использованием вычисленных смещений показаний спутниковых часов при отдельном и совместном использовании ГНСС с частотным и кодовым разделением сигналов в диапазонах L1, L2.

Методология и методы исследования

В работе использовались методы математического анализа, линейной алгебры, теории вероятностей и понятия теории линейных векторных пространств. Для программной реализации алгоритмов и обработки реальных измерений навигационных приёмников использовался язык

программирования C/C++ и программный пакет с открытым исходным кодом RTKLib, а также пакет прикладных программ MATLAB.

Научная новизна результатов исследования:

1) Разработанная методика высокоточного абсолютного местоопределения потребителя с разрешением целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений применима к измерениям сигналов ГЛОНАСС с частотным разделением, в отличие от известных методик для ГНСС с кодовым разделением.

2) Разработано приложение теории S-преобразования (линейной алгебры и теории векторных пространств), позволяющее получать нестрогие целочисленные оценки целочисленных переменных недоопределённой системы линейных алгебраических уравнений для измерений псевдофаз сигналов ГЛОНАСС с частотным разделением.

3) Сформулированы условия, при которых возможно осуществлять нестрогое целочисленное оценивание целочисленных переменных недоопределённой системы линейных уравнений для измерений ГЛОНАСС, при котором отличие от целых чисел пренебрежимо мало, что позволяет использовать известные алгоритмы разрешения целочисленной неоднозначности для уменьшения времени сходимости решения.

Теоретическая значимость работы состоит в разработке общего подхода с учётом характерных особенностей решения задачи (пользовательской и сетевой) высокоточных абсолютных местоопределений с разрешением целочисленной псевдофазовой неоднозначности по измерениям сигналов любой ГНСС как с кодовым, так и с частотным разделением.

Практическая значимость результатов исследования:

1) Разработанный способ «нестрогой целочисленной» оценки псевдофазовых неоднозначностей позволил потребителям сигналов ГЛОНАСС с частотным разделением при обработке измерений применять известные алгоритмы целочисленного разрешения неоднозначности, что обеспечивает снижение времени инициализации ВАМО по ГЛОНАСС с сантиметровым уровнем точности.

2) Разработан и реализован в виде специального программно-математического обеспечения алгоритм вычисления необходимых потребителю спутниковых поправок (смещений показаний спутниковых часов) по измерениям сети наземных станций, позволяющий осуществить ВАМО по измерениям сигналов ГЛОНАСС с частотным разделением (с использованием алгоритмов целочисленного разрешения неоднозначностей псевдофазовых измерений).

3) На примере обработки реальных измерений экспериментально продемонстрировано уменьшение времени сходимости решения и увеличение надёжности разрешения целочисленной неоднозначности при совместном использовании сигналов ГЛОНАСС с частотным разделением и GPS с кодовым разделением в режиме целочисленного ВАМО потребителя.

4) Разработанный алгоритм для целочисленного ВАМО однотипной НАП по сигналам ГЛОНАСС с частотным разделением схож с алгоритмом для ГНСС с кодовым разделением, что значительно упрощает модернизацию существующего программного обеспечения.

Достоверность результатов исследования подтверждается корректным использованием математического аппарата и экспериментами, проведенными с использованием реальных измерений навигационных приёмников, а также соответствием результатов, полученных автором, результатам, известным из литературы.

Апробация результатов исследования

Результаты работы докладывались и обсуждались на научно-технических семинарах, заседаниях научно-технического совета АО «Российские космические системы» и на следующих международных научно-технических конференциях:

- X Международный симпозиум «Метрология времени и пространства», Менделеево, Московская область, Россия 6-8 октября 2021, ФГУП «ВНИИФТРИ»;

- XI Всероссийская научно-техническая конференция «Актуальные проблемы ракетно-космического приборостроения и информационных технологий», Москва, 6-8 июня 2023, АО «Российские космические системы».

Публикации

Основные результаты работы опубликованы в 5 печатных работах (в изданиях, входящих в Перечень ВАК рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук):

- Бабурин, А.А. Алгебраические основы обработки измерений при высокоточном абсолютном местопределении с разрешением целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений по сигналам ГЛОНАСС с частотным разделением каналов / А.А. Бабурин // Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы. – 2022. – Т. 9, вып. 4. – С. 47–58.

- Бабурин, А.А. Методы целочисленной оценки псевдофазовых неоднозначностей ГЛОНАСС / А.А. Бабурин. – Текст : электронный // Труды МАИ : электронный журнал. – 2023. – №130. – URL: https://mai.ru/upload/iblock/105/n5fdg3smbxuk90ul7m02ux9f2ca924ue/16_Baburin.pdf (дата обращения: 16.12.2023).

- Бабурин, А.А. Определение временных корректирующих поправок для высокоточного абсолютного местопределения с разрешением целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений по сигналам ГЛОНАСС с частотным разделением каналов / А.А. Бабурин // Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы. – 2023. – Т. 10, вып. 1. – С. 63–77.

- Поваляев, А.А. Применение теории решетчатых упаковок в задаче высокоточного абсолютного местопределения по ионосферосвободным измерениям параметров сигналов ГНСС с

кодовым разделением / А.А. Поваляев, А.А. Бабурин, А.Н. Подкорытов // Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы. – 2021. – Т. 8, вып. 2. – С. 51-61.

- Поваляев, А.А. Применение теории решетчатых упаковок в задаче определения временных корректирующих поправок для высокоточного абсолютного местоопределения по ионосферосвободным измерениям в ГНСС с кодовым разделением / А.А. Поваляев, А.А. Бабурин, А.Н. Подкорытов // Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы. – 2021. – Т. 8, вып. 3. – С. 48-62.

Получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ:

- Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ 2023682719 Российская Федерация. Программный комплекс высокоточного абсолютного местоопределения потребителей с разрешением целочисленной неоднозначности по измерениям сигналов глобальных навигационных спутниковых систем / Бабурин, А.А., Поваляев, А.А. ; заявитель и правообладатель Акционерное общество «Российская корпорация ракетно-космического приборостроения и информационных систем» (АО «Российские космические системы»). – №2023682039 ; заявл. 23.10.2023 ; опубл. 30.10.2023. – 1 с.

Внедрение результатов исследования

Результаты работы использовались в АО «Российские космические системы» и в АО «НПК «СПП», а также в учебном процессе Московского физико-технического института (национального исследовательского университета), что подтверждается соответствующими актами.

Положения, выносимые на защиту:

1) Математические модели измерений ГЛОНАСС с линейной аппроксимацией фазо-частотной характеристики (ФЧХ) НАП позволяют целочисленно оценивать псевдофазовые неоднозначности и не требуют дополнительной калибровки НАП.

2) Методика сравнения кодовых аппаратурных задержек различной НАП позволяет выявлять однотипную НАП, обладающую схожими характеристиками.

3) Предложенный способ «нестрого целочисленной» оценки псевдофазовых неоднозначностей ГЛОНАСС позволяет применять известные алгоритмы целочисленного разрешения неоднозначностей в задаче высокоточных абсолютных местоопределений по измерениям сигналов ГЛОНАСС для сокращения времени сходимости решения.

4) Разработанная методика решения пользовательской и сетевой задач целочисленного ВАМО позволяет сократить время сходимости решения до точности 3-5 см по сигналам ГЛОНАСС с частотным разделением до 5-25 минут, а при совместном использовании ГЛОНАСС и GPS – до мгновенного решения.

Личный вклад автора

Экспериментальная и теоретическая часть работы, относящаяся к использованию системы ГЛОНАСС и совместному использованию ГЛОНАСС и GPS, выполнена автором лично. Часть работы, относящаяся к использованию системы GPS, выполнена совместно с научным руководителем д.т.н., проф. Поваляевым А.А. и к.т.н., доц. Подкорытовым А.Н.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка сокращений и условных обозначений, списка литературы, включающего 110 наименований, и шести приложений. Работа изложена на 161 странице машинописного текста, содержит 36 рисунков и 6 таблиц.

Благодарности

Автор выражает благодарность и глубокую признательность научному руководителю, д.т.н., проф. Поваляеву А.А., а также своим коллегам, сотрудникам АО «Российские космические системы», особенно к.т.н., доц. Подкорытову А.Н. за воодушевление, непрестанную помощь и поддержку, оказанную в процессе написания работы на всех её этапах, а также за критику и содержательные беседы, способствовавшие улучшению работы.

За ценные замечания и критику автор благодарит д.т.н. Жодзишского А.И., д.т.н. Куршина В.В., к.т.н. Кислякова М.Ю., к.т.н., доц. Мезенцева А.В., к.т.н. Миткина Е.В., к.т.н. Нестерова О.В., к.т.н., с.н.с. Федотова С.А.

Работа оформлена с использованием комплекса программ для создания научно-технических документов в редакторе Microsoft Word 2007 и выше «Шаблон Бирюкова Ворд (ШБВ)» (разработчик – Бирюков А.А.), за что автор выражает отдельную признательность.

1 ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ВЫСОКОТОЧНЫХ АБСОЛЮТНЫХ МЕСТООПРЕДЕЛЕНИЙ С РАЗРЕШЕНИЕМ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ НЕОДНОЗНАЧНОСТИ ПСЕВДОФАЗОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Основное назначение ГНСС – предоставление потребителю возможности определения собственных координат и смещения показаний часов относительно шкалы единого времени. В монографии [17] дано хорошее и краткое пояснение принципа определения координат в навигации: «...определить эти величины (*координаты и показания часов. – А.А.*) в приемнике потребителя путем непосредственных измерений невозможно. Координаты и показания часов определяются путем обработки значений параметров спутниковых сигналов, которые могут быть измерены непосредственно в приемнике. Такая обработка основана на использовании математических моделей измеряемых параметров спутниковых сигналов, описывающих функциональные связи этих параметров с координатами и показаниями внешних часов».

В данной главе рассмотрены различные известные из литературы подходы к целочисленному ВАМО, особенности применения алгоритмов целочисленного разрешения неоднозначности, а также математические модели измерений и особенности, характерные для измерений по сигналам конкретных ГНСС – ГЛОНАСС с ЧРК и GPS с КРК. После этого проведено сравнение полученных математических моделей.

1.1 Краткий обзор известных из литературы подходов к реализации режима целочисленного высокоточного абсолютного местоопределения

В ГНСС известны три типа измерений (measurement) или наблюдений (observation): измерения псевдодальности (псевдодальномерные, кодовые измерения, измерения псевдозадержки, code, pseudorange measurement), измерения псевдофазы (псевдофазовые, фазовые, измерения по фазе несущей, carrier phase measurement) и измерения псевдодоплеровского смещения частоты (псевдодоплеровские, доплеровские измерения, doppler). В данной работе рассматриваются два типа измерений – псевдодальности и псевдофазы.

Достижение сантиметровой точности местоопределений с помощью ГНСС в абсолютном режиме возможно в режиме ВАМО при использовании высокоточной ЭВИ, псевдофазовых измерений (примерно на два порядка более точных, чем однозначные кодовые измерения) и компенсации ряда систематических смещений в измерениях [62]. Особенностью высокоточных псевдофазовых измерений является целочисленная неоднозначность, то есть в математической модели каждого такого измерения помимо неизвестных, присущих однозначным кодовым измерениям, присутствует дополнительный неизвестный **целочисленный** параметр псевдофазовой

неоднозначности. Кроме того, при обработке необходимо учитывать наличие в измерениях аппаратурных задержек (*hardware biases, delays*), которые в общем случае различаются для кодовых и фазовых измерений, для диапазонов частот, а также для различных приёмников и спутников. Строгий учёт всех этих неизвестных приводит к тому, что с увеличением числа измерений растёт и число неизвестных. В связи с этим при составлении системы уравнений с целью оценки вектора неизвестных переменных ранг такой системы оказывается меньше, чем число переменных, и такая система не имеет единственного векторного решения.

В режиме относительных местоопределений эта проблема обычно решается путём образования первых и вторых разностей измерений (*single, double differences*), а также с помощью привлечения в обработку псевдофазовых измерений однозначных кодовых измерений.

В режиме действительных абсолютных местоопределений при совместной обработке кодовых и псевдофазовых измерений все имеющиеся аппаратурные задержки обычно объединяются вместе с целочисленными параметрами псевдофазовых неоднозначностей (*traditional, standard PPP model*), которые при таком объединении теряют целочисленные свойства. При этом смещение показаний часов, входящее в математические модели измерений псевдодальности и псевдофазы, считается одинаковым. Число оцениваемых переменных при этом уменьшается, что позволяет получить единственное векторное решение системы уравнений (режим *float PPP* или режим действительного ВАМО [62]). При этом кодовые аппаратурные задержки полагаются постоянными во времени. Из-за высокого уровня шума кодовых измерений (относительно фазовых) требуется достаточно долгое время обработки (обычно несколько десятков минут) для сходимости оценок действительных псевдофазовых неоднозначностей к их истинным значениям. Стабильность кодовых аппаратурных задержек во времени также справедлива не всегда, например, в работе [36] автор наблюдает межсуточные скачки в оценках смещений показаний часов («*day-boundary clock jump*»), которые объясняет нестабильностью кодовых аппаратурных задержек. Отсюда, а также по причине долгого времени сходимости возникает необходимость более строго – целочисленно – и без непосредственного привлечения кодовых измерений оценивать параметры псевдофазовых неоднозначностей. Учёт целочисленных свойств псевдофазовых неоднозначностей позволяет применять алгоритмы целочисленного разрешения неоднозначности для сокращения времени сходимости.

Основная проблема, возникающая при стремлении целочисленно оценивать псевдофазовые неоднозначности и использовать алгоритмы их целочисленного разрешения, состоит в присутствии в кодовых и фазовых измерениях неизвестных задержек в аппаратуре спутников и приёмника. Поправки к показаниям спутниковых часов, используемые в режиме действительного ВАМО, не содержат информации о задержках в аппаратуре КА, поэтому в режиме целочисленного ВАМО использовать эти поправки невозможно. Задача целочисленного ВАМО распадается

на две: «сетевую задачу» [14] («network solution») – задачу определения необходимой временной информации (или временных корректирующих поправок – ВКП) и «пользовательскую задачу» [13] («user solution») – задачу определения высокоточных координат потребителя с использованием вычисленных в сетевой задаче ВКП (высокоточные координаты спутников как в сетевой, так и в пользовательской задаче полагаются известными, например, из ЭВИ для действительного ВАМО). Для акцентирования того, что в режиме целочисленного ВАМО разности измерений не образуются, его называют иногда, например, в работах [72; 77], «zero-difference ambiguity resolution» (разрешение нулевых разностей неоднозначностей) или «undifferenced ambiguity resolution» [44]. Хотя разности измерений в целочисленном ВАМО обычно не образуются, тем не менее фактически оцениваются (из-за недостатка ранга систем уравнений) линейные комбинации (разности) неоднозначностей.

Из литературы известно несколько математических моделей измерений псевдодальностей и псевдофаз, используемых в качестве основы в разных подходах к решению проблемы присутствия в измерениях аппаратных задержек, препятствующих целочисленной оценке псевдофазовых неоднозначностей (несколько подходов к реализации режима целочисленного ВАМО). Эти подходы представлены в Таблице 1 [89; 90].

Таблица 1 – Классификация подходов к реализации режима целочисленного ВАМО

Название модели	Авторы, работы с описанием модели	Аналитический центр, вычисляющий соответствующую ЭВИ
Fractional Cycle Bias (FCB), Uncalibrated Hardware Delay (UHD), Uncalibrated Hardware Bias (UHB), Uncalibrated Phase Delay (UPD), «дробная часть задержки», «дробная часть смещения»	Ge, M., Gendt, G. и др. [41]	Department of Geodesy and Remote Sensing, GeoForschungsZentrum (GFZ), School of Geodesy and Geomatics at Wuhan University (SGG-WHU)
Integer Recovery Clock (IRC), «часы, восстанавливающие целочисленность»	Laurichesse, D., Mercier, F. [69]	Centre national d'études spatiales (CNES)
Decoupled Clock (DC), «разделённые часы»	Collins, P. [36]	Natural Resources Canada (NRCan)

Хотя иногда, например, в работе [34], подходы к реализации режима integer PPP делят на два класса, объединяя методы IRC и DC в одну группу, так как они имеют много общего.

Все представленные алгоритмы целочисленного ВАМО изначально основываются на образовании ионосферосвободных комбинаций кодовых и псевдофазовых измерений (для исключения влияния ионосферной задержки на измерения). При этом длина волны целочисленной неоднозначности существенно уменьшается (≈ 6 мм для GPS и ≈ 5 см для ГЛОНАСС) и

увеличивается вероятность неправильного разрешения неоднозначности (подробнее в разделе 1.3 и 1.4). Для решения этой проблемы в разных подходах последовательно или одновременно целочисленно разрешаются сначала так называемые wide-lane (WL) неоднозначности с помощью образования комбинации измерений Мельбурна-Вуббены (англ. Melbourne-Wubben, MW) на большой («разностной») длине волны (около 86 см для сигналов GPS L1, L2), а затем narrow-lane (NL) неоднозначности на длине волны около 11 см («суммарная» длина волны, для тех же сигналов). Идея такого разложения ионосферосвободной комбинации неоднозначностей была высказана ещё в работе [80] 1985 года. Приведём краткое описание и особенности представленных подходов.

FCB – оценка аппаратурных задержек путём усреднения дробной части действительных оценок псевдофазовых неоднозначностей, при применении которых на стороне потребителя можно восстановить целочисленные свойства псевдофазовых неоднозначностей.

Особенности метода FCB:

- образуются разности измерений между спутниками – single-differenced (SD) UPDs, что не позволяет оценивать смещение показаний часов приёмника;
- в сетевой задаче не используется разрешение целочисленной неоднозначности (как отмечается в работе [34] – это менее «строгое» решение, чем при методе IRC и DC);
- последовательный подход – сначала обрабатываются только MW-комбинации, затем только ионосферосвободные комбинации измерений;
- вводится ограничение на суточную стабильность оцениваемых WL-смещений;
- сетевая задача решается на основе уже вычисленной, «внешней» ЭВИ, для каждого варианта ЭВИ получается своё решение;
- коррекции (поправки) применяются не к смещению показаний часов, а к действительным оценкам неоднозначностей.

IRC – последовательная оценка сначала WL-комбинации спутниковых аппаратурных задержек, а затем смещений показаний спутниковых часов (используются и для кодовых и для псевдофазовых измерений), которые позволяют целочисленно оценивать псевдофазовые неоднозначности в пользовательской задаче.

Особенности метода IRC:

- последовательный подход – сначала обрабатываются только MW-комбинации, затем только ионосферосвободные комбинации измерений;
- WL неоднозначность оценивается путём усреднения на каждом интервале непрерывной видимости КА;

- в работе [71] предложен метод обработки не комбинаций измерений, а измерений на исходных частотах, что даёт ряд преимуществ перед обработкой ионосферосвободных комбинаций измерений;

- необходимо одновременно вычислять и обычное, действительное (float) решение для уточнения тропосферной задержки;

- отсутствует необходимость в дополнительной внешней временной информации (она оценивается в сетевом решении);

- для кодовых и псевдофазовых измерений используется одна поправка к часам (отсутствует разделение на «кодовые» и «фазовые» часы).

DC – оценка смещений показаний спутниковых часов в сумме с кодовыми и фазовыми аппаратурными задержками, таким образом возникают «разделённые» часы – кодовые и фазовые, также оценивается спутниковое смещение Мельбурна-Вуббены. Применение в пользовательской задаче вычисленных таким образом поправок приводит к тому, что псевдофазовые неоднозначности оцениваются целочисленно.

Особенности метода DC:

- не требуется предположений о постоянстве во времени аппаратурных задержек спутников;

- вследствие «разделения» часов математические модели кодовых и псевдофазовых измерений включают различные переменные, обозначающие смещения показаний часов (кодовые и фазовые часы), так как допускается неодновременность формирования этих измерений, поэтому для кодовых, псевдофазовых измерений и для комбинации Мельбурна-Вуббены используются различные спутниковые поправки;

- разрешение неоднозначностей WL и NL происходит одновременно;

- отсутствует необходимость в дополнительной внешней временной информации (она оценивается в сетевом решении);

- целочисленные оценки псевдофазовых неоднозначностей получаются сразу при применении коррекций, не требуется поэтапная обработка.

Исследования [43; 90; 94] выявили, что, несмотря на то, что поправки (высокоточная ЭВИ) для всех трёх подходов представлены в разной форме (имеют различный физический смысл), они содержат одну и ту же информацию и эквивалентны друг другу. В работе [89] содержится сравнение различных сетевых продуктов от различных аналитических центров (с пересчётом их всех в модель DC). Делается вывод о том, что результаты местоопределения потребителя при использовании всех типов поправок показывают примерно одинаковые характеристики.

Также существуют и «гибридные» подходы к решению задачи целочисленного ВАМО. Например, в работе [34] предлагается «альтернативный метод оценки IRC-поправок» («an

alternative integer recovery clock method»), состоящий в том, что при оценке поправок по методу IRC используются поправки FCB. Это позволяет уменьшить вероятность аномальной ошибки (неправильного целочисленного разрешения неоднозначности) при сетевом решении.

Если для системы GPS и других ГНСС с КРК существует несколько поставщиков различных PPP-AR поправок, то с ГЛОНАСС это не так. Частотное разделение спутниковых сигналов ГЛОНАСС [7] создаёт ряд препятствий на пути использования известных алгоритмов целочисленного разрешения неоднозначностей [6; 42; 110]:

1) Вследствие различия длин волн навигационных сигналов, излучаемых разными КА, невозможно строго целочисленно оценить межспутниковые разности псевдофазовых неоднозначностей.

2) Кодовые задержки в аппаратуре приёмника (называемые в литературе «межлитерные задержки», «inter-channel code biases», ICB, «inter-channel hardware biases», «inter-frequency code biases», IFCB) в измерениях по различным КА различаются даже для одного приёмника, причём нет явной линейной зависимости от несущей частоты спутникового сигнала. Это препятствует целочисленной оценке WL-комбинаций псевдофазовых неоднозначностей с помощью MW-комбинации измерений.

Исследования [12; 47] показывают, что причины различия кодовых задержек в аппаратуре приёмника по измерениям различных спутников лежат в различном искажении формы навигационного сигнала («chip-shape distortions»), а также в различной конструкции коррелятора приёмника (схемотехника приёмника, версия прошивки программного обеспечения). В работах [26; 87] выявлена зависимость кодовых аппаратурных задержек от антенны и наличия радиопрозрачного обтекателя (РПО) антенны (англ. dome, radome).

Для ГЛОНАСС из литературы известно несколько подходов к решению задачи целочисленного ВАМО и все они основаны на методе FCB. Например, в работе [42], основываясь на подходе, сформулированном в работе [87], предлагается оценивать WL комбинации неоднозначностей без непосредственного привлечения кодовых измерений (то есть без образования MW-комбинации). Для компенсации ионосферной задержки применяются глобальные ионосферные карты (global ionosphere maps, GIM), доступные в формате IONEX [55]. Причём, так как для разрешения целочисленной неоднозначности непосредственно не привлекаются кодовые измерения, сетевое решение можно получить по измерениям неоднородной сети станций (оборудованной различной НАП, «inhomogeneous stations, receivers»), так как отсутствует влияние различия кодовых аппаратурных задержек на фазовые измерения. Однако при таком подходе точность решения существенно зависит от того, насколько точно известна ионосферная задержка. В условиях отсутствия плотной сети станций (что характерно для обширной территории России) точность ионосферных карт невысока (2-8 TECU, Total Electron Content Unit – единица измерения

полного электронного содержания, соответствует примерно 16 см в диапазоне L1). Кроме того, такой подход не очень удобен, так как требует дополнительной внешней информации, которая к тому же бывает доступна обычно апостериорно, что исключает возможность применения этих алгоритмов в режиме реального времени. Тем не менее, в статье продемонстрировано достижение примерно одинаковой точности при использовании ГЛОНАСС в сравнении с GPS и увеличение надёжности решения при совместном использовании систем. Также отмечается более высокая вероятность неправильного разрешения неоднозначностей при использовании только ГЛОНАСС в связи с меньшим числом КА.

В работе [110] (а также в работе [28], но для режима относительных местоопределений) предлагается альтернативный подход: алгоритмы целочисленного разрешения неоднозначности применяются непосредственно к псевдофазовым неоднозначностям ионосферосвободной комбинации ГЛОНАСС (на длине волны ≈ 5 см, без образования MW-комбинации и разделения неоднозначности на WL и NL). Таким образом, кодовые измерения непосредственно не привлекаются для оценки неоднозначностей и не требуется внешняя информация об ионосфере. Такой подход возможен благодаря выбору несущих частот сигналов ГЛОНАСС с частотным разделением, при котором длина волны ионосферосвободной комбинации псевдофазовых измерений оказывается равна ≈ 5 см (в отличие от ≈ 6 мм для GPS). Кроме того, в [110] продемонстрировано, что уточнение орбит спутников ГЛОНАСС с учётом целочисленных свойств псевдофазовых неоднозначностей («ambiguity-fixed GLONASS orbits») и использование таких «целочисленных» орбит приводит к увеличению точности, с которой неоднозначности сходятся к целым числам: «better agreement among ionospheric-free ambiguity fractional parts» – лучшее согласование дробных частей ионосферосвободных комбинаций неоднозначностей (*перевод. – А.А.*). Для малой сети станций (радиус 500 км) отмечено лучшее согласование, чем для большой (радиус 2000 км). Также в статье [110] отмечается существенное повышение вероятности правильного разрешения неоднозначности при совместном использовании ГЛОНАСС и GPS в режиме PPP-AR.

В статье [107] описан подход, при котором сначала при совместном использовании GPS и ГЛОНАСС оцениваются межлитерные задержки ГЛОНАСС («IFCBs») и специальная ЭВИ (в формате FCB), а затем эта информация передаётся потребителю, который может вычислять независимые и совместные решения по ГЛОНАСС и GPS.

Ещё один вариант решения проблемы различия кодовых аппаратурных задержек в измерениях ГЛОНАСС предлагается в статье [26] – использование станций с одинаковой НАП («clusters of stations with similar equipment», «homogeneous stations»). В работе [75] для решения задачи целочисленного ВАМО по ГЛОНАСС такой подход был применён в рамках модели FCB. Кроме того, было продемонстрировано улучшение решения (в части времени сходимости и вероятности неправильного разрешения неоднозначности) при совместном использовании

ГЛОНАСС, GPS и BEIDOU. Время сходимости при использовании только GPS составляет в среднем от 5 до 20 минут, в то время как при использовании трёх ГНСС сокращается до 5-10 минут.

Более строгим, но также и более сложным вариантом решения проблемы наличия в кодовых измерениях ГЛОНАСС различных межлитерных задержек в приёмнике является калибровка этих задержек («абсолютная», при которой вычисляются абсолютные значения задержек и «относительная» или «выравнивающая», при которой значения калибровочных поправок вычисляются относительно некоторого неизвестного уровня, а применение таких поправок на стороне потребителя позволяет выравнивать межлитерные задержки относительно этого уровня). Различным методам калибровки посвящены работы [8; 11; 22].

Для решения проблемы невозможности строго целочисленно оценить псевдофазовые неоднозначности сигналов ГЛОНАСС с частотным разделением из литературы [26; 27] известен подход, при котором для образования целочисленно оцениваемых комбинаций неоднозначностей требуется наличие в зоне видимости НАП спутников ГЛОНАСС с соседними литерными частотами. В работах [96; 99] предлагается более общий подход, свободный от такого требования, но в этих работах рассматриваются относительные местоопределения с образованием вторых разностей измерений.

Тем не менее, во многих даже относительно новых работах для измерений ГЛОНАСС не реализуется режим целочисленного ВАМО. Например, в работе [50] описано вычисление FCB-поправок для систем GPS, Galileo, BDS (BEIDOU) и QZSS, однако соответствующие поправки для ГЛОНАСС «не вычисляются в связи с использованием частотного разделения» (*перевод. – А.А.*). Также в работе [50] отмечается существенное уменьшение времени сходимости решения при совместном использовании нескольких ГНСС, в том числе при совместном использовании измерений ГЛОНАСС с другими ГНСС, но без разрешения неоднозначностей ГЛОНАСС.

Аналогичные результаты продемонстрированы в работе [33]: проводится сравнение различной высокоточной ЭВИ от различных аналитических центров для систем GPS, GALILEO, BEIDOU, однако для режима целочисленного ВАМО по сигналам ГЛОНАСС в рассматриваемых в работе аналитических центрах отсутствуют необходимые поправки к показаниям спутниковых часов.

В работе [44] ГЛОНАСС использован в режиме целочисленного ВАМО только совместно с GPS («GPS+GLONASS, both fixed»). Продемонстрировано существенное снижение времени сходимости (до 6 минут при совместном разрешении, против 25 минут при использовании только GPS). Однако независимого решения с использованием только ГЛОНАСС продемонстрировано не было.

Интересные результаты демонстрируют авторы работ [95; 108]: они используют в обработке и одновременно, и в различных комбинациях все доступные сигналы ГЛОНАСС (и КРК, и ЧРК), однако только в режиме относительных местоопределений (RTK).

Мгновенное правильное разрешение неоднозначности в абсолютном режиме было продемонстрировано в работе [68]. Такого внушительного результата удалось добиться за счёт совместного использования двухчастотных измерений GPS и измерений на четырёх частотах GALILEO с образованием так называемых extra-WL комбинаций (с длинами волн порядка 4 и 10 м) за счёт большого числа различных частот и определённого выбора номиналов несущих частот в системе GALILEO. Этот результат показывает, что получение мгновенного целочисленного решения в абсолютном режиме возможно с помощью комбинирования нескольких ГНСС и многочастотных измерений.

Существует несколько онлайн-сервисов высокоточных абсолютных местоопределений, реализующих пользовательский режим целочисленного ВАМО по измерениям ГНСС с кодовым разделением, например, Canadian Spatial Reference System Precise Point Positioning (CSRS-PPP) [31] от NRCan (работает по модели DC) или Precise Point Positioning With Integer and Zero-difference Ambiguity Resolution Demonstrator (The PPP-WIZARD project) [86] от CNES (работает по модели IRC). Кроме того, существуют проекты с открытым исходным кодом, например, [81], описанный и использованный в статье [33], позволяющие реализовать пользовательское решение целочисленного ВАМО с различными форматами ЭВИ (реализуется только пользовательское решение, ЭВИ является внешней информацией).

Если для модели FCB в литературе описаны результаты решения сетевой и пользовательской задач целочисленного ВАМО по сигналам ГЛОНАСС, то для моделей IRC и DC соответствующие алгоритмы практически не развиты. Например, на Рисунке 1.1 показана одна из страниц отчёта онлайн-сервиса высокоточного местоопределения (CSRS-PPP) [31] от NRCan по обработке суточного файла совместных измерений GPS и ГЛОНАСС. На этом рисунке видно, что фазовые измерения ГЛОНАСС используются для местоопределения, но алгоритмы целочисленного разрешения неоднозначности к ним не применяются (все неоднозначности ГЛОНАСС изображены тёмно-жёлтым цветом и, согласно введённым на рисунке обозначениям, имеют статус float, то есть оцениваются как действительные числа).

В настоящей работе предлагается решение задачи целочисленного ВАМО по сигналам ГЛОНАСС с ЧРК (как при использовании только ГЛОНАСС, так и в сочетании с GPS). В силу того, что модель DC представляется автору наиболее строгой, а также по причине того, что она лучше других проработана в отечественной литературе (относительно систем с КРК, в частности, GPS), например, работы [13; 14; 18], именно подход DC будет использован для решения задачи. Оценка смещений показаний спутниковых часов ГЛОНАСС (решение сетевой задачи) будет

осуществляться по измерениям однородной сети станций (оборудованных одинаковыми моделями приёмников от одного производителя, одинаковыми антеннами и РПО).

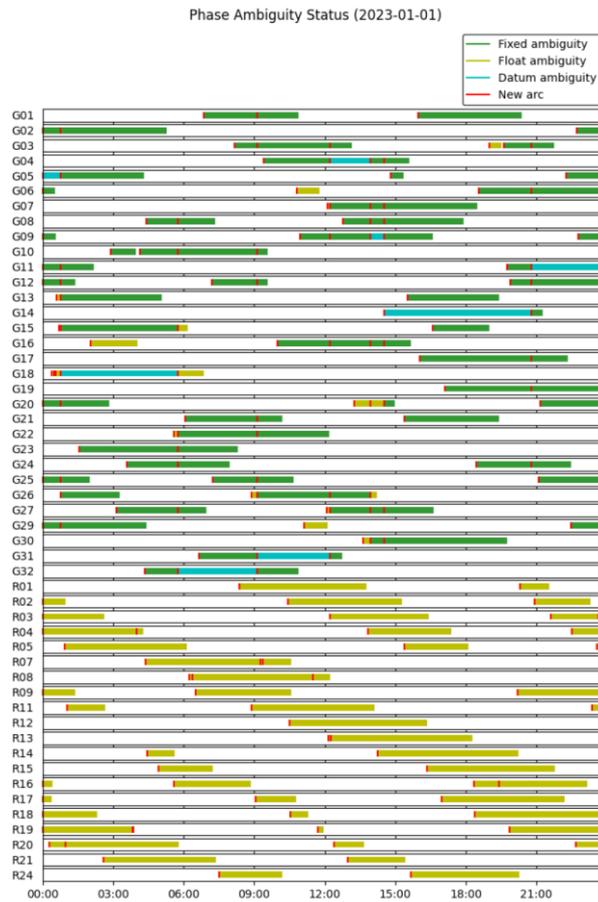


Рисунок 1.1 – Часть отчёта онлайн-сервиса высокоточного местоопределения NRCap по обработке суточного файла измерений от 01.01.2023 станции IGS dund, расположенной в Новой Зеландии

1.2 Используемые в работе обозначения

Для отличия векторов и матриц от скаляров в работе используется выделение полужирным шрифтом с указанием при необходимости снизу в подстрочном индексе размерности, например, $\mathbf{H}_{m \times n}$ – означает матрицу размером $m \times n$, а \mathbf{H} или \mathbf{x} означает матрицу или вектор произвольного размера или размер которой или которого понятен из контекста. Численные оценки соответствующих векторов или скаляров обозначаются «крышкой»: $\hat{\mathbf{x}}$.

В работе используется терминология линейной алгебры и понятия линейных векторных пространств. Линейные векторные пространства обозначаются большими буквами без выделения полужирным шрифтом, однако с указанием размерности, причём первый подстрочный индекс указывает на размерность базисных векторов пространства, а второй – на размерность

самого пространства (количество базисных векторов пространства). Например, $\mathcal{S}_{n \times r}$ означает векторное пространство (или подпространство) размерности r , заданное в n -мерном векторном пространстве (то есть которое задаётся набором из r n -мерных базисных векторов).

Также используются следующие обозначения:

$\mathbf{E}_{m \times n}$ – матрица, у которой по главной диагонали стоят единицы, а остальные элементы равны нулю (единичная матрица в случае $m = n$);

$\mathbf{1}_{m \times n}$ – матрица (или вектор), все элементы которой равны единице;

$\mathbf{0}_{m \times n}$ – матрица (или вектор), все элементы которой равны нулю;

$\mathbf{1}_{m \times 1}^r$ – вектор, все элементы которого равны нулю за исключением r -го, равного единице;

$\mathbf{R}(\mathbf{H}_{m \times n})$ – векторное пространство, образованное n столбцами матрицы $\mathbf{H}_{m \times n}$ (линейная оболочка вектор-столбцов матрицы $\mathbf{H}_{m \times n}$, множество линейных комбинаций вектор-столбцов матрицы $\mathbf{H}_{m \times n}$);

$\text{null}(\mathbf{H}_{m \times n})$ – ядро (нуль-пространство) матрицы $\mathbf{H}_{m \times n}$.

1.3 Общее описание алгоритмов целочисленного разрешения неоднозначности для высокоточных местоопределений

1.3.1 Общий алгоритм вычисления высокоточного целочисленного решения

Для использования алгоритмов целочисленного разрешения неоднозначности в высокоточных местоопределениях необходимо, чтобы часть переменных, оцениваемых в результате решения системы уравнений, обладали свойством целочисленности. Использование информации о целочисленности этих переменных позволяет существенно снизить время сходимости к точному решению [18; 36; 41; 70]. Чтобы проиллюстрировать процесс целочисленного разрешения неоднозначности запишем систему уравнений, включающую действительные и целочисленные переменные:

$$\mathbf{y}_{m \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_b & \mathbf{H}_a \\ m \times p & m \times q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \\ p \times 1 \\ q \times 1 \end{bmatrix}, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{y}_{m \times 1}$ – вектор измерений;

\mathbf{H}_b – матрица связи вектора измерений \mathbf{y} с вектором действительных переменных

$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$ (например, координаты и смещение показаний часов НАП);

\mathbf{H}_a – матрица связи вектора измерений \mathbf{y} с вектором целочисленных переменных

$\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^q$ (например, вектор целочисленных псевдофазовых неоднозначностей);

m – число измерений;

p – число действительных переменных;

q – число целочисленных переменных.

Процесс получения «целочисленного» («фиксированного») решения (integer, fixed solution) можно условно разделить на три этапа [3; 17; 98]:

- Игнорирование целочисленных свойств переменных \mathbf{a} и нахождение действительного решения (float solution) системы (1.1) и его ковариационной матрицы, например, методом наименьших квадратов (МНК) или в результате рекуррентного оценивания:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{b}}} & \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{a}}} \\ \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}} & \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{a}}} \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

где $\hat{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^p$, $\hat{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^q$ – полученные действительные оценки векторов переменных \mathbf{b} и \mathbf{a} ;

$\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{b}}}$, $\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{a}}}$, $\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}}$, $\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{a}}}$ – блоки ковариационной матрицы ошибок вектора действительной

оценки $\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}}^T & \hat{\mathbf{a}}^T \end{bmatrix}^T$.

- Действительный вектор $\hat{\mathbf{a}}$ используется для нахождения целочисленной оценки

$\check{\mathbf{a}} = F(\hat{\mathbf{a}}) \in \mathbb{Z}^q$ вектора \mathbf{a} . Под $F: \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{Z}^q$ понимается функция, ставящая в соответствие дей-

ствительному вектору $\hat{\mathbf{a}}$ целочисленный вектор $\check{\mathbf{a}}$. Наиболее простым и интуитивно понятным

алгоритмом нахождения такой оценки является простое округление элементов вектора $\hat{\mathbf{a}}$ до

ближайшего целого значения, однако существуют и более сложные алгоритмы поиска целочисленных оценок, использующие также ковариационную матрицу вектора действительной оценки.

Также для найденного целочисленного вектора $\check{\mathbf{a}}$ необходимо выполнить оценку достоверности

(validation) – насколько найденная оценка надёжна.

- После того, как получена целочисленная оценка $\check{\mathbf{a}}_{q \times 1}$, она используется для коррекции

действительного решения $\hat{\mathbf{b}}_{p \times 1}$ и вычисления целочисленного решения $\begin{bmatrix} \check{\mathbf{b}}_{1 \times p}^T & \check{\mathbf{a}}_{1 \times q}^T \end{bmatrix}^T$:

$$\check{\mathbf{b}}_{p \times 1} = \hat{\mathbf{b}}_{p \times 1} - \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}} \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{b}}}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_{q \times 1} - \check{\mathbf{a}}_{q \times 1} \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

В случае, если вектор $\check{\mathbf{a}}_{q \times 1}$ был найден верно, он соответствует истинному значению оцениваемых целочисленных параметров. В противном случае возникает понятие аномальной ошибки целочисленного разрешения неоднозначности – отличие элементов вектора $\check{\mathbf{a}}_{q \times 1}$ от их истинных значений (на целое число).

При отсутствии аномальных ошибок становится известно истинное значений части оцениваемых переменных (\mathbf{a}), то есть ковариационная матрица $\mathbf{R}_{\check{\mathbf{a}}}$ становится равна нулевой матрице. Использование этой информации позволяет существенно повысить точность оценки действительных переменных в целочисленном решении $\check{\mathbf{b}}_{p \times 1}$ (1.3) за счёт увеличения избыточности системы уравнений и более высокой точности неоднозначных измерений по сравнению с однозначными. В случае отсутствия аномальных ошибок ковариационная матрица такой оценки (целочисленного решения) вычисляется:

$$\mathbf{R}_{\check{\mathbf{b}}} = \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{b}}} - \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{a}}} \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{a}}}^{-1} \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}}. \quad (1.4)$$

Отличие $\mathbf{R}_{\check{\mathbf{b}}}$ от $\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{b}}}$ количественно характеризует увеличение точности целочисленной оценки.

В связи с тем, что после правильного разрешения неоднозначности точность оценки местоположения скачком увеличивается, в целочисленном ВАМО под «времени сходимости решения» обычно понимают время до правильного разрешения неоднозначности (Time-To-Fix-Ambiguities, TTFA, Time To First Fix, TTFF, initialization period, период инициализации).

Вероятность появления аномальной ошибки зависит, во-первых, от качества действительной оценки $\hat{\mathbf{a}}_{q \times 1}$ (1.2) целочисленного вектора \mathbf{a} , который определяется моделью измерений, то

есть обусловленностью матрицы $\begin{bmatrix} \mathbf{H}_b & \mathbf{H}_a \\ m \times p & m \times q \end{bmatrix}$ системы линейных уравнений (1.1); во-вторых – от уровня шума (от величин случайных ошибок) однозначных измерений (если они используются) и в-третьих – от алгоритма $F: \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{Z}^q$, который используется для нахождения целочисленной

оценки $\check{\mathbf{a}}_{q \times 1}$ [3; 17; 98]. В случае появления в решении $\check{\mathbf{a}}_{q \times 1}$ аномальной ошибки (отличие какого-либо элемента вектора $\check{\mathbf{a}}_{q \times 1}$ от истинного значения на целое число), в решении $\check{\mathbf{b}}_{p \times 1}$ (1.3) возникает ошибка, величина которой определяется величиной аномальной ошибки (целым числом) и коэффициентом, с которым элементы вектора $\check{\mathbf{a}}_{q \times 1}$ входят в уравнения (1.1), определяемые матрицей \mathbf{H}_a (как правило – это длины волн соответствующих несущих колебаний). Таким образом, при сантиметровой точности местоопределений даже аномальная ошибка на 1 цикл приводит не к повышению точности местоопределений, а к недопустимо большой величине ошибки оценки вектора $\check{\mathbf{b}}_{p \times 1}$ (1.3). Поэтому, необходимо минимизировать вероятность аномальной ошибки.

В (1.1) подразумевается, что истинные значения вектора $\mathbf{a}_{q \times 1}$ являются целыми числами. Этот случай относится, например, к известным методам обработки измерений ГНСС с КРК в режиме относительных местоопределений, когда разности псевдофазовых неоднозначностей на одной длине волны оцениваются целочисленно. Однако в данной работе рассматриваются измерения по сигналам ГЛОНАСС с частотным разделением каналов и предлагается такое решение систем уравнений, при котором оценки псевдофазовых неоднозначностей могут оцениваться не строго целочисленно, то есть истинные значения оцениваемых неоднозначностей – действительные числа. В разделе 3.1.1 показано, что при соблюдении ряда условий это отличие от целых чисел невелико и им можно пренебречь.

1.3.2 Алгоритмы поиска целочисленной оценки действительного вектора

Существует несколько алгоритмов нахождения целочисленной оценки $\check{\mathbf{a}}_{q \times 1} : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{Z}^q$. Как уже было отмечено, наиболее простым решением является независимое округление каждого элемента действительного вектора $\hat{\mathbf{a}}_{q \times 1}$ до ближайшего целого значения. Однако при таком подходе вероятность аномальной ошибки (неправильного разрешения целочисленной неоднозначности) оказывается существенно выше, чем при использовании других, более сложных алгоритмов. Кроме того, такой подход не использует информацию о ковариационных связях \mathbf{R}_a между элементами вектора $\hat{\mathbf{a}}_{q \times 1}$ (которые на практике достаточно сильны).

Развитием простого округления является алгоритм «integer bootstrapping» или последовательная условная МНК-оценка (sequential conditional least-squares) [100] и его модернизированная версия «integer aperture bootstrapping» [101]. Он состоит в последовательном округлении к

ближайшему целому числу действительных оценок неоднозначностей (начиная с наиболее точно оценённых) и коррекции при этом остальных действительных оценок и их ковариационной матрицы.

Наиболее сложными алгоритмами с вычислительной точки зрения являются алгоритмы поиска целочисленного вектора, минимизирующего значение положительно определённой квадратичной формы, заданной блоком ковариационной матрицей $\mathbf{R}_{\hat{a}}$ (или минимизирующие расстояние Махаланобиса [79] – обобщение понятия евклидова расстояния между заданным действительным вектором $\hat{\mathbf{a}}$ и искомым целочисленным вектором $\tilde{\mathbf{a}}$). Известны несколько методов: Least-Squares Ambiguity Search Technique (LSAST) [46], Fast Ambiguity Resolution Approach (FARA) [40], Optimal Method for Estimating GPS Ambiguities (OMEGA) [57], Quasi Ionosphere-Free (QIF) Algorithm [37] и другие. Краткий обзор различных методов дан в работе [58]. На практике в связи с плохой обусловленностью матрицы $\mathbf{R}_{\hat{a}}$ (очень большое отношение максимального и минимального собственных чисел) процедура поиска целочисленного минимума квадратичной формы существенно осложняется большой вычислительной нагрузкой. Для уменьшения вычислительной нагрузки обычно выполняют так называемое линейное целочисленное унимодулярное преобразование (ЦУМП), которое преобразует матрицу $\mathbf{R}_{\hat{a}}$ в другую матрицу с лучшей обусловленностью (осуществляется «декорреляция» неоднозначностей) и уже по ней осуществляют процедуру минимизации квадратичной формы. Матрица ЦУМП вычисляется с помощью LLL-алгоритма [74]. В англоязычной литературе описанный метод получил название LABMDA (least-squares ambiguity decorrelation adjustment) [103], а в отечественной литературе используется термин метод ЦУМП [17]. В настоящее время метод LAMBDA или ЦУМП получил наиболее широкое распространение. Также известен модифицированный LAMBDA-метод (modified LAMBDA method, MLAMBDA) [32]. Модификация состоит в снижении вычислительной сложности алгоритма и увеличении скорости его работы. В работе [97] показано, что LAMBDA-метод является оптимальным с точки зрения вероятности правильного разрешения (сравнивались также алгоритмы простого округления и «integer bootstrapping»). Именно он (метод ЦУМП или LAMBDA-метод) используется в настоящей работе для целочисленного разрешения неоднозначностей.

Снижение времени сходимости к точному решению при использовании алгоритмов целочисленного разрешения неоднозначности объясняется тем, что благодаря этим алгоритмам истинное значение неопределённых целочисленных переменных \mathbf{a} становится известно раньше,

чем действительное решение сойдётся к точному в случае рекуррентной (фильтрационной) процедуры оценивания.

1.3.3 Достоверность найденного целочисленного решения и пути её повышения

Для оценки достоверности целочисленного решения используется понятие «контрастного отношения» [17] (ratio test) – отношения значений минимизируемой положительно определённой квадратичной формы в двух найденных последовательно нарастающих целочисленных минимумах. Чем контрастное отношение выше (чем меньше первый найденный минимум квадратичной формы относительно второго) – тем надёжнее решение. Также известен способ проверки решения, основанный на вычислении оценки вероятности правильного разрешения (ambiguity success rate) [97].

Для повышения достоверности решения (снижения вероятности аномальной ошибки и уменьшения времени получения правильного целочисленного решения – времени сходимости) возможен подход, при котором целочисленно разрешаются не все элементы вектора $\mathbf{a}_{q \times 1}$, а только некоторые из них. Такой подход в англоязычной литературе [84; 98] получил название partial ambiguity resolution (частичное разрешение неоднозначностей). Ясно, что чем меньше элементов вектора $\mathbf{a}_{q \times 1}$ будут использоваться для разрешения, тем меньше вероятность ошибиться при поиске целых значений элементов вектора, но и тем меньше получится точность целочисленного решения $\check{\mathbf{b}}_{p \times 1}$ (1.3), так как будет использовано меньше информации о целочисленных переменных. Для получения более высокого значения вероятности правильного разрешения следует выбирать для разрешения, например, такие неоднозначности, дисперсия действительной оценки $\hat{\mathbf{a}}_{q \times 1}$ (1.2) которых меньше или действительная оценка которых меньше отличается от целого числа. На основе идеи частичного разрешения неоднозначности из литературы известно несколько алгоритмов.

В работе [84] предлагается последовательно проверять все возможные наборы неоднозначностей (рассматриваются в порядке соответствия некоторому критерию). В случае, если набор не проходит проверку достоверности – выбирается следующий за ним набор. Однако в связи с возможным большим числом таких наборов такой подход требует больших вычислительных ресурсов.

В работе [109] описан «последовательный алгоритм частичного разрешения» (Sequential and Partial Ambiguity Resolution, SPAR). Он состоит в образовании и последовательном независимом разрешении сначала набора WL-комбинаций неоднозначностей, а затем оставшихся

(исходных) неоднозначностей в первом диапазоне частот. При этом если в процессе разрешения каждого набора неоднозначностей контрастное отношение ниже 3, из набора удаляется неоднозначность с наибольшей дисперсией. В случае, если не нашлось набора неоднозначностей, дающих контрастное отношение больше 3, считается, что надёжное целочисленное решение найти не удалось. Эффективность описанного алгоритма SPAR продемонстрирована на примере относительных местоопределений на базовой линии до 111 км.

В работе [83] предлагается последовательно увеличивать набор разрешаемых неоднозначностей с одновременной оценкой вероятности правильного разрешения этого набора (в процессе увеличения набора неоднозначностей вероятность правильного разрешения, естественно будет уменьшаться). Когда вероятность разрешения достигнет некоторого порогового значения, в найденном наборе неоднозначностей выполняется поиск целочисленного минимума квадратичной формы LAMBDA-методом. Эффективность подхода продемонстрирована на модельных данных.

Авторы статьи [78] предлагают «алгоритм тройной проверки при частичном разрешении» (Triple Checked Partial Ambiguity Resolution, TC-PAR). Три проверки включают в себя: оценку вероятности правильного разрешения (Bootstrapping Success Rate, BSR), проверку с помощью модернизированного контрастного отношения (Bounded Fixed-failure Ratio Test, B-FFRT) и оценку того, насколько точность целочисленного решения, полученного по найденному вектору неоднозначностей, лучше действительного (Baseline Precision Defect, BPD). В ходе первых двух проверок набор разрешаемых неоднозначностей может уменьшаться в случае неудачного прохождения проверки. Эффективность алгоритма TC-PAR проверяется на реальных данных в режиме относительных местоопределений для статичных и динамичных (наземных и морских) потребителей на базовых линиях от 0,1 до 27 км.

Однако при работе только по одной ГНСС возможны ситуации, когда в зоне видимости НАП находится минимальное число спутников, поэтому такой подход эффективен скорее при совместной обработке измерений нескольких ГНСС. В настоящей работе используется противоположный, более простой подход к выбору целочисленно разрешаемых элементов вектора $\mathbf{a}_{q \times 1}$, когда одновременно разрешаются все элементы вектора. В литературе [109] он называется batch ambiguity resolution (полное, пакетное разрешение неоднозначностей), в работе [78] используется термин «full-fixed LAMBDA method» (лямбда-метод полного разрешения), а в работе [83] по аналогии с partial ambiguity resolution (PAR) вводится термин full ambiguity resolution (FAR) – полное разрешение неоднозначности.

Таким образом, использование алгоритмов целочисленного разрешения неоднозначности позволяет повысить оперативность местоопределения (снизить время сходимости решения)

ценой снижения надёжности полученной оценки, так как для целочисленных оценок возникает понятие вероятности аномальной ошибки (неправильного разрешения).

1.4 Математические модели измерений

Так как вопросам формирования навигационных измерений в приёмнике посвящена обширная литература, например, [10; 17; 49; 73], в данном разделе сразу рассмотрены математические модели этих измерений.

1.4.1 Учёт систематических смещений в математических моделях измерений

При высокоточных местоопределениях критически важную роль играет соответствие математических моделей реальным измерениям, поэтому при обработке необходимо учесть все возможные систематические смещения и эффекты, возникающие в измерениях. Часть из них можно смоделировать и учесть априорно, а часть необходимо оценивать в процессе обработки. Поскольку учёт многих смещений и эффектов приводит к громоздким математическим выражениям, а также по причине того, что все эти вопросы хорошо изучены и описаны в литературе, в приводимых математических моделях в явном виде не будут отражены хорошо моделируемые систематические ошибки измерений в целях уменьшения громоздкости. Ограничимся их перечислением:

- смещения (phase center offset, PCO) и вариации (phase center variation, PCV) фазовых центров антенн спутников и приёмника;
- релятивистские и гравитационные смещения;
- систематические смещения, порождаемые океаническими, полярными и твердотельными приливными эффектами в упругом теле Земли (ocean, pole, solid tidal effects);
- смещение, порождаемое изменением взаимной ориентации антенн спутника и приёмника (wind-up эффект);
- многолучевые искажения измерений (multipath error);
- влияние вращения Земли.

Остальные систематические смещения, которые невозможно заранее спрогнозировать и компенсировать с достаточной точностью (такие как задержки распространения сигнала в атмосфере, аппаратные задержки) будут в явном виде включены в модели измерений.

Вычисление и учёт перечисленных выше систематических смещений и эффектов возможен либо по известной априорно информации (файлы формата «ANTEX» [25], «erp» [61] и другие) и грубых координатах и скоростях спутников и приёмника, либо по прогнозной информации, также доступной априорно. Необходимая информация доступна для скачивания с сайта

IGS [51], The Crustal Dynamics Data Information System (CDDIS) [53] или другого аналитического центра. Алгоритмы вычисления перечисленных систематических смещений описаны в литературе, например, [1; 49; 62; 73; 93]. Учёт этих систематических ошибок является критически важным при целочисленном ВАМО. Хотя они в явном виде не отражены в математических моделях, предполагается, что они корректно учтены и внесены в измерения в виде поправок.

В данной работе предполагается, что многолучевые искажения отсутствуют или подавляются аппаратурными (антенны со специальной диаграммой направленности и поляризацией) или организационными (установка антенны на возвышении, на открытой местности) методами.

Кроме того, обычно в измерения помимо смещения и вариации фазового центра антенны приёмника PCO и PCV, определяемые типом используемой антенны и защитного РПО, вносится также поправка о положении антенны (*antenna reference point, ARP*) в локальной системе координат (обычно указывается в заголовке файлов измерений в формате RINEX с обозначением «ANTENNA: DELTA N/E/N» вместе с типом используемой антенны «ANT # / TYPE» [88]). Эта поправка означает координаты некой точки, называемой «маркером станции» [88], относительно реального положения антенны в пространстве. Эти смещения постоянны во времени и зависят только от используемой антенны и её крепления на поверхности. После внесения этих поправок измерения относятся уже не к фазовому центру антенны приёмника, а к точке (маркеру), которая смещена относительно фазового центра на указанную величину смещения. Это может быть удобно при смене типа антенны или конструкции её крепления. Если бы указанные поправки (PCO и ARP) не вносились, то оцениваемые по измерениям координаты изменялись бы с изменением антенны или её крепления, однако, если вносить эти поправки, то оцениваемые координаты остаются прежними, так как не меняется положение той точки (маркера), к которой относятся измерения. Графические пояснения к описанным поправкам к положению фазового центра антенны приёмника ARP, PCO и PCV приведены на Рисунке 1.2, заимствованном из монографии [49].

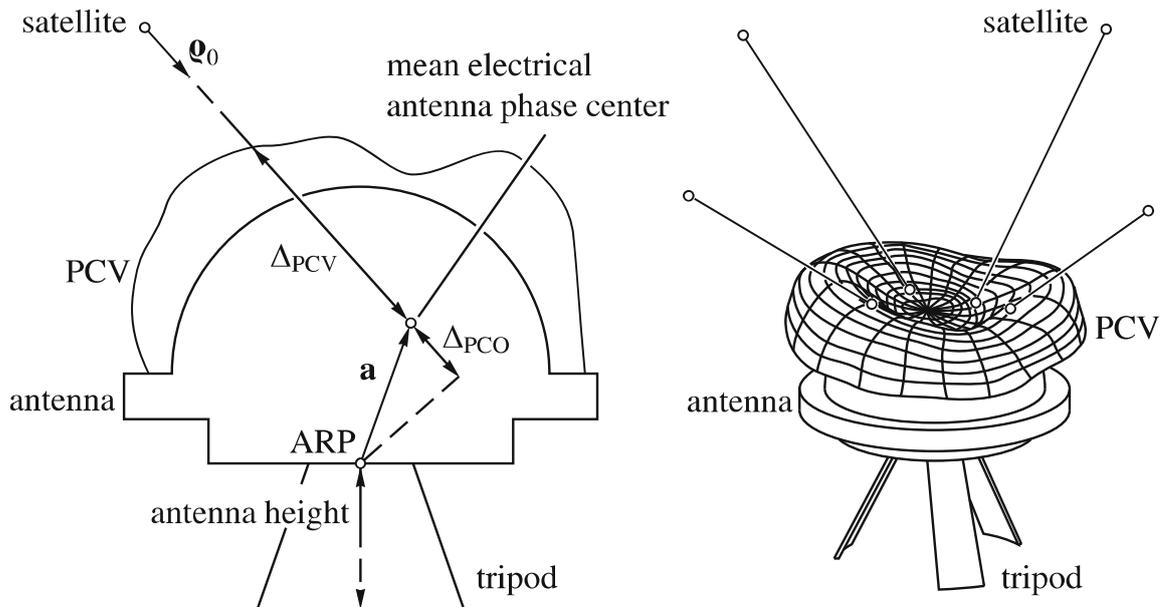


Рисунок 1.2 – Графические пояснения к поправкам к положению фазового центра антенны [49]

На Рисунке 1.2 схематично изображены поправки ARP, PCO и PCV, а также показан пример зависимости величины PCV от пространственного направления на спутник.

Также необходимо учитывать моменты «затмений» и «полудней» спутников («satellite eclipse», «orbits noon and midnight»), когда Солнце оказывается в плоскости орбиты спутника или рядом с ней, а сам спутник оказывается в тени или полутени Земли [39; 63]. Так как система ориентации спутника работает таким образом, чтобы одна из осей системы координат спутника совпадала с направлением на центр Земли, а солнечные панели были направлены в сторону Солнца, в моменты спутниковых затмений и полудней спутник начинает разворачиваться, при этом ввиду отсутствия прямой видимости теряется направление на Солнце. В связи с этим возникают две проблемы: 1) так как точная ориентация спутника неизвестна, невозможно точно вычислить коррекцию смещения фазового центра спутниковой антенны относительно центра масс спутника и 2) вследствие возможного изменения ориентации спутника возникает нескорректированный wind-up эффект [73]. Для вычисления положения и ориентации таких спутников необходимо или использовать специальные алгоритмы, или вовсе исключать их из обработки при ВАМО, или присваивать их измерениям меньший вес, или не выполнять для их измерений процедуру разрешения целочисленной неоднозначности.

При учёте wind-up эффекта необходимо вычислять ориентацию спутниковой системы координат. Так как в различных аналитических центрах могут быть приняты различные договорённости об ориентации спутниковой системы координат, то при работе с внешней информацией о спутниковых орбитах и/или смещениях показаний спутниковых часов от определённого аналитического центра потребитель должен следовать договорённости, принятой в соответствующем

аналитическом центре [89]. В противном случае в математических моделях измерений могут возникать неучтённые ошибки. В связи с этим известны предложения по разработке формата обмена данными об ориентации спутников для увеличения согласованности продуктов (информации о положении спутников и смещении показаний их часов) от различных аналитических центров [76].

В приводимых математических моделях также с целью уменьшения громоздкости опущены обозначения момента времени, к которому относятся измерения, и ГНСС, по спутникам которой проводятся эти измерения.

1.4.2 Математические модели измерений на исходных частотах

Учитывая все упрощения и полагая, что в измерения уже внесены коррекции перечисленных выше систематических смещений, можно записать выражения для моделей скорректированных измерений псевдодальностей P_i^j , м и псевдофаз L_i^j , м для j -го спутника (верхний индекс) в i -м диапазоне частот (нижний индекс) [10; 17; 49; 73]:

$$\begin{aligned} P_i^j &= R^j + T_{trop}^j + T_{ion,i}^j + T + B_i^j - t^j - b_i^j + \varepsilon_{P_i}^j, \\ L_i^j &= R^j + T_{trop}^j - T_{ion,i}^j + T + \lambda_i^j \varphi_i^j - t^j - \lambda_i^j \psi_i^j - \lambda_i^j N_i^j + \varepsilon_{L_i}^j, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где R^j – расстояние между положениями фазовых центров антенн приёмника в момент измерения и спутника в момент предшествования (момент времени, предшествующий моменту измерения на время распространения сигнала от спутника к приёмнику), м;

T_{trop}^j – задержка распространения сигнала в тропосфере, м;

$T_{ion,i}^j$ – задержка распространения сигнала в ионосфере, м;

T – смещение показаний часов приёмника в момент измерения относительно шкалы времени ГНСС, выраженное в метрах (одинаковое для всех измерений псевдодальности и псевдофазы приёмника по всем спутникам, но различное для разных ГНСС и приёмников), м;

B_i^j – кодовые задержки в аппаратуре приёмника (в общем случае различные для разных спутников, приёмников и диапазонов частот), м;

t^j – смещение показаний часов спутника в момент предшествования относительно шкалы времени ГНСС, выраженное в метрах, м;

b_i^j – кодовые задержки в аппаратуре спутника, м;

$\varepsilon_{P_i}^j$ – случайная (шумовая) ошибка измерения псевдодальности, м;

λ_i^j – длина волны несущего колебания (в общем случае различная для разных спутников), м;

φ_i^j – фазовые задержки в аппаратуре приёмника (в общем случае различные для разных спутников, приёмников и диапазонов частот), включающие начальную фазу сигнала приёмника, циклы;

ψ_i^j – фазовые задержки в аппаратуре спутника, включающие начальную фазу спутникового сигнала, циклы;

N_i^j – целочисленная ($N_i^j \in \mathbb{Z}$) неоднозначность псевдофазовых измерений, циклы;

ε_{Li}^j – случайная (шумовая) ошибка измерения псевдофазы, м.

Так как псевдофазовые измерения неоднозначны (каждое псевдофазовое измерение включает различное неопределённое целое число N_i^j соответствующих длин волн λ_i^j), фазовые задержки в аппаратуре спутника ψ_i^j и приёмника φ_i^j , которые постоянны во времени, можно ограничить величиной \pm половина цикла соответствующей длины волны $|\psi_i^j| \leq 0,5$ цикла, $|\varphi_i^j| \leq 0,5$ цикла.

Тропосферная задержка распространения сигнала T_{trop}^j составляет в среднем величину 2-2,5 м в зенитном направлении и увеличивается для более низких спутников до 20-28 м. Она зависит от температуры, влажности и давления, изменяется с высотой потребителя и с типом местности под траекторией сигнала и не зависит от частоты сигнала [1]. Необходимо обязательно учитывать её при обработке измерений. С достаточной точностью тропосферную задержку можно представить в виде суммы сухой (dry, гидростатичной, hydrostatic, зависящий от концентрации в атмосфере сухих газов) и влажной (wet, зависящий от концентрации в атмосфере водяного пара) компонент [1; 59]:

$$T_{trop}^j = w_h(el^j)D_h + w_w(el^j)D_w, \quad (1.6)$$

где $w_h(\)$, $w_w(\)$ – функции отображения вертикальной составляющей («zenith delay») в наклонную («slant delay») для сухой и влажной компонент тропосферной задержки соответственно; el^j , град – угол возвышения j -го спутника; D_h , D_w , м – вертикальные составляющие сухой и влажной компонент тропосферной задержки. Существует несколько моделей для вычисления зенитной тропосферной задержки и функции отображения (J. Saastamoinen, H. Hopfield, H. Black, J. Marini, A. Niell [1], gridded Vienna Mapping Function [64] и другие). При обработке измерений тропосферная задержка, как правило, вычисляется по модели и включается в невязки измерений, а

оценивается не скомпенсированная с помощью модели часть её вертикальной составляющей (одинаковая, для измерений всех спутников всех систем) [62].

Целочисленные неоднозначности N_i^j полагаются постоянными на всём интервале непрерывной видимости спутника при условии отсутствия срывов слежения за фазой (cycle slip). Срывы слежения за фазой могут случаться по причине низкого отношения сигнал/шум, затенения сигнала спутника препятствиями, многолучёвости, высокой динамики приёмника, неполадок в программном обеспечении приёмника, коррекции показаний часов приёмника. Известно множество алгоритмов обнаружения и устранения срывов слежения за фазой [2; 30] как для двухчастотных, так и для одночастотных приёмников. Они основаны на различных принципах:

- анализе разностей измерений [17];
- анализе комбинаций Мельбурна-Вуббены и геометрически свободных комбинациях измерений;
- полиномиальной аппроксимации измерений;
- работе приёмника в режиме относительных местоопределений;
- привлечении в обработку псевдодоплеровских измерений и более сложные алгоритмы, например, используемые в работах [9; 20].

В настоящей работе не рассматривается задача поиска и устранения срывов слежения за фазой несущей и во всех уравнениях (за исключением главы 2, где это отдельно оговаривается) полагается, что целочисленные неоднозначности N_i^j постоянны во времени. При обработке измерений для обнаружения срывов слежения в настоящей работе были использованы геометрически свободные комбинации измерений, MW-комбинации измерений и аппроксимация измерений полиномом 3 степени, а также (когда это было возможно при наличии близко расположенных приёмников) анализ невязок разностей псевдофазовых измерений.

В общем случае неоднозначности N_i^j могут принимать любые целочисленные значения. Однако на практике в навигационном приёмнике обычно выполняется так называемое согласование («выравнивание», «притягивание») псевдофазовых измерений с кодовыми (phase-code alignment [45]). Наиболее простой способ выполнить его состоит в прибавлении к псевдофазовым измерениям L_i^j такого целого числа $\Delta N_{PL,i}^j$ соответствующих длин волн λ_i^j , чтобы разница между соответствующими измерениями псевдодальности и псевдофазы на текущий момент времени была бы меньше половины длины волны, то есть $\Delta N_{PL,i}^j = \left[\frac{P_i^j - L_i^j}{\lambda_i^j} \right]$, где $[]$ – операция округления до ближайшего целого. Это целое число циклов, вычисленное один раз, должно поддерживаться постоянным на всём интервале непрерывной видимости спутника (при условии отсутствия срывов слежения за фазой). Если в приёмнике такой операции не выполняется, всегда

есть возможность выполнить её при обработке измерений. Рассмотрим более подробно с учётом (1.5) математическую модель $\Delta N_{PL,i}^j$, цикл:

$$\begin{aligned} \Delta N_{PL,i}^j &= \left[\frac{P_i^j - L_i^j}{\lambda_i^j} \right] = \\ &= \left[\frac{2T_{ion,i}^j + B_i^j - b_i^j + \lambda_i^j (-\varphi_i^j + \psi_i^j) + \varepsilon_{PLi}^j}{\lambda_i^j} \right] + N_i^j, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $\varepsilon_{PLi}^j = \varepsilon_{Pi}^j - \varepsilon_{Li}^j \approx \varepsilon_{Pi}^j$. Видно, что $\Delta N_{PL,i}^j$ является достаточно грубой, смещённой оценкой истинной величины псевдофазовой неоднозначности N_i^j . Смещение

$\left[\frac{2T_{ion,i}^j + B_i^j - b_i^j + \lambda_i^j (-\varphi_i^j + \psi_i^j) + \varepsilon_{PLi}^j}{\lambda_i^j} \right]$ зависит главным образом от величины ионосферной задержки $T_{ion,i}^j$, кодовых задержек в аппаратуре спутника и приёмника B_i^j , b_i^j и шумовой ошибки измерений псевдодальности ε_{Pi}^j . Таким образом, операцию согласования кодовых и псевдофазовых измерений можно выразить формулой:

$$\widehat{L}_i^j = L_i^j + \lambda_i^j \Delta N_{PL,i}^j, \quad (1.8)$$

где \widehat{L}_i^j , м – выравненное с кодовым измерением измерение псевдофазы с новым параметром псевдофазовой неоднозначности \widehat{N}_i^j .

При выполнении такого согласования, величины исходных псевдофазовых целочисленных неоднозначностей N_i^j заменяются «скорректированными» (минимизированными) целочисленными псевдофазовыми неоднозначностями

$$\widehat{N}_i^j = -N_i^j + \Delta N_{PL,i}^j = \left[\frac{2T_{ion,i}^j + B_i^j - b_i^j + \lambda_i^j (-\varphi_i^j + \psi_i^j) + \varepsilon_{PLi}^j}{\lambda_i^j} \right], \quad (1.9)$$

которые по-прежнему остаются неизвестными, но становятся ограничены по модулю величиной, зависящей от величин ионосферной задержки, кодовых и фазовых задержек в аппаратуре спутника и приёмника и шумовой ошибки измерений псевдодальности.

Причём, если величина кодовой задержки в аппаратуре B_i^j велика, (если, например, кодовые измерения ГЛОНАСС имеют значительное смещение относительно фазовых измерений, которое, если известно, может передаваться в заголовке файла измерений RINEX – «GLONASS

COD/PHS/BIS» [88]), ошибка оценки $\Delta N_{PL,i}^j$ (1.7) – то есть величина \hat{N}_i^j (1.9) – также будет велика.

Так как ионосферная задержка увеличивается при уменьшении угла места спутников, очевидно, что чем ближе положение спутника к зениту, тем точнее можно оценить N_i^j формулой (1.7). Выражения (1.7), (1.8) представляет собой наиболее простой и грубый способ оценки и уменьшения величины исходной псевдофазовой неоднозначности N_i^j . Можно предложить более сложные способы:

- обработка не исходных измерений (на исходных частотах), а их комбинаций;
- привлечении в обработку информации об ионосферной задержке (ионосферные карты, оценка ионосферной задержки по многочастотным кодовым измерениям других ГНСС, как предлагается, например, в работе [70], или расчёт ионосферной задержки по модели, например, Клобучара [60], параметры которой передаются в широкоэвещательном (broadcast) сообщении GPS [82]);
- рекуррентная обработка измерений в течение некоторого времени для уменьшения влияния шума измерений.

Однако уменьшить влияние присутствия в измерениях кодовой задержки в аппаратуре B_i^j такими способами невозможно.

Уменьшить истинное значение исходной неоднозначности также желательно при осуществлении калмановской фильтрации, например, в режиме ВАМО (не важно действительного или целочисленного) при начальной инициализации оцениваемых в фильтре псевдофазовых неоднозначностей нулевыми значениями. Чем ближе к начальным оценкам (к нулям) будут исходные неоднозначности – тем лучше задана априорная оценка и тем лучше пойдёт процесс фильтрации.

В литературе [8; 11; 35; 65; 106] показано, что кодовые задержки в аппаратуре приёмника B_i^j достаточно стабильны во времени (хотя существенно зависят от типа приёмника, антенны, РПО, версии прошивки программного обеспечения приёмника, включения или отключения в приёмнике функции программного подавления многолучёвости). Однако в работе [36] показано, что при высокоточном абсолютном местопределении нестабильность кодовых аппаратурных задержек может заметно влиять на результаты местопределения. Это проявляется в режиме действительного ВАМО в «межсуточных скачках» в оценках смещений показаний часов спутников («day-boundary clock jumps»). В работе [36] приводятся примеры таких «скачков» в оценках смещений показаний спутниковых часов от IGS [52]. Поэтому в [36] предлагается подход DC (разделение часов), в котором не требуется вводить ограничений на стабильность этих кодовых аппаратурных задержек. Так как в настоящей работе используется подход DC для измерений GPS

(и аналогичная DC модель для измерений ГЛОНАСС), введение ограничений на стабильность кодовых аппаратурных задержек также не требуется (за исключением главы 2, где это отдельно оговорено).

Ошибки измерений $\varepsilon_{P_i}^j$ и $\varepsilon_{L_i}^j$ полагаются независимыми случайными величинами, распределёнными по нормальному закону. В данной работе в задаче целочисленного ВАМО используются измерения с темпом 30 с, поэтому предполагается также отсутствие корреляции шумов измерений во времени. Среднеквадратическое отклонение (СКО) шумовых ошибок измерений псевдодальностей зависят от класса используемого приёмника и типа сигнала, по которому проводятся измерения, причём измерения псевдофазы в среднем на 2 порядка точнее измерений псевдодальности. В различных работах используются различные априорные значения величин СКО случайных ошибок измерений, например, в работе [34] для измерений псевдодальности принимается величина 0,3 м, а для псевдофазы – 0,006 цикла; в работе [42] – 3 м и 0,006 цикла; в работе [44] для шумов измерений ГЛОНАСС и GPS используются различные СКО 0,6 м и 0,006 цикла и 0,3 м и 0,006 цикла соответственно; в работе [68] – 0,3 м и 3 мм; в работе [98] – от 10 см до 30 см и 3 мм соответственно; в работах [70; 75] – 1 м и 1 см соответственно; в работе [83] – 25 см и 3 мм соответственно. В настоящей работе вне зависимости от ГНСС для СКО ошибок измерений псевдодальностей используется значение 1 м, а для псевдофаз – 1 см.

Длины волн несущих колебаний сигналов ГЛОНАСС с ЧРК, согласно Интерфейсному контрольному документу (ИКД) [7], выбраны так, что выполняется отношение

$$\frac{f_1^j}{f_2^j} = \frac{\lambda_2^j}{\lambda_1^j} = \frac{n_1}{n_2} = \text{const}, \forall j, \text{ где } n_1 = 9, n_2 = 7. \text{ Для систем с КРК, где используется одна несущая}$$

частота для каждого диапазона, это соотношение тем более выполняется, так как длина волны не зависит от номера спутника j [82].

1.4.3 Линейные комбинации измерений

Кодовых измерений на одной несущей частоте в принципе достаточно для определения координат фазового центра антенны приёмника (в режиме стандартного абсолютного местоопределения, standalone), но недостаточно для режима целочисленного ВАМО. Наличие измерений в нескольких диапазонах частот позволяет повысить избыточность системы уравнений при решении навигационной задачи, а также образовать линейные комбинации многочастотных измерений. Образуя линейные комбинации, можно добиться исключения некоторых величин (например, ионосферной, тропосферной задержек, дальностей до спутников, смещений показаний часов приёмника) из математических моделей этих линейных комбинаций измерений. В данной работе рассматриваются двухчастотные измерения и следующие линейные комбинации:

ионосферосвободная (безионосферная, ionosphere-free, iono-free, ifr), комбинация на суммарной длине волны (узкая комбинация, NL), комбинация на разностной длине волны (широкая комбинация, WL), кодово-фазовая комбинация Мельбурна-Вуббены (MW). Рассмотрим подробнее каждую из них.

Ионосферосвободная комбинация (ifr) измерений используется для устранения ионосферной задержки (основной её части, обратно пропорциональной квадрату частоты) из измерений псевдодальности и псевдофазы. В связи с тем, что ионосфера является диспергирующей средой, т.е. задержка распространения сигнала в такой среде зависит от несущей частоты, пренебрегая членами более высоких порядков можно записать следующее выражение для ионосферной задержки $T_{ion,i}^j$ на i -й несущей частоте [1; 10]:

$$T_{ion,i}^j = \left(\frac{n_1}{n_i} \right)^2 T_{ion,1}^j, \quad (1.10)$$

где $T_{ion,1}^j$ – ионосферная задержка на 1-й несущей частоте.

В данной работе рассматриваются измерения (псевдодальности или псевдофазы) в двух диапазонах частот L1 и L2 – Obs_1 , Obs_2 , поэтому измерениям в этих диапазонах далее будут соответствовать нижние индексы 1 и 2, а ifr-комбинациям – индекс 3. Выражение для ifr-комбинации измерений Obs_3 , м в имеет вид [1]:

$$Obs_3 = \frac{n_1^2}{n_1^2 - n_2^2} Obs_1 - \frac{n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} Obs_2, \quad (1.11)$$

где Obs_1 , Obs_2 – измерения (псевдодальности или псевдофазы) в диапазоне частот L1, L2 соответственно, м;

n_1/n_2 – отношение несущих частот диапазонов L1, L2.

Оценим, как изменится величина СКО σ_3 ошибки ifr-комбинации измерений Obs_3 (1.11) по сравнению с величинами СКО σ_1 , σ_2 ошибок измерений на исходных частотах Obs_1 , Obs_2 . Если принять величины СКО ошибок измерений одинаковыми в обоих диапазонах и ввести для них обозначение $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, то, в соответствии с (1.11) можно вычислить отношение:

$$\frac{\sigma_3}{\sigma} = \sqrt{\left(\frac{n_1^2}{n_1^2 - n_2^2} \right)^2 + \left(\frac{n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} \right)^2}. \quad (1.12)$$

Для отношения частот несущих сигналов систем ГЛОНАСС и GPS это отношение приблизительно равно 3: $\frac{\sigma_3}{\sigma} \approx 3$. Таким образом, если считать, что СКО ошибок измерений псевдодальности и псевдофазы на исходных частотах равны соответственно 1 м и 1 см, то ошибки ифг-комбинаций этих измерений будут иметь большее СКО 3 м и 3 см соответственно.

В математической модели ифг-комбинации измерений устраняется ионосферная задержка, а переменные, не зависящие от диапазона частот (расстояние R^j , тропосферная задержка T_{trop}^j , смещения показаний часов T и t^j) остаются неизменными. Однако недостатком ифг-комбинации является существенное увеличение шума измерений и уменьшение длины волны ионосферосвободной комбинации целочисленных неоднозначностей псевдофаз (что будет видно при подробном рассмотрении математической модели измерений в разделах 1.4.4, 1.4.5).

Комбинация на суммарной длине волны (NL) Obs_{NL} , м определяется выражением [1]:

$$Obs_{NL} = \frac{n_1}{n_1 + n_2} Obs_1 + \frac{n_2}{n_1 + n_2} Obs_2. \quad (1.13)$$

По аналогии с ифг-комбинацией оценим, как изменится СКО σ_{NL} ошибки NL-комбинации измерений по сравнению с СКО ошибки исходных измерений σ . В соответствии с (1.13) можно вычислить отношение:

$$\frac{\sigma_{NL}}{\sigma} = \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_1 + n_2}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{n_1 + n_2}\right)^2}. \quad (1.14)$$

Для систем ГЛОНАСС и GPS это отношение приблизительно равно 0,71: $\frac{\sigma_{NL}}{\sigma} \approx 0,71$. Таким образом, если считать, что СКО ошибок измерений псевдодальности и псевдофазы на исходных частотах равны соответственно 1 м и 1 см, то ошибки NL-комбинаций этих измерений будут иметь меньшее СКО 0,71 м и 0,71 см соответственно.

В математической модели NL-комбинации не устраняются никакие слагаемые модели измерений на исходных частотах, при этом аналогично ифг-комбинации, переменные, не зависящие от диапазона частот (расстояние R^j , тропосферная задержка T_{trop}^j , смещения показаний часов T и t^j) остаются неизменными. Её достоинством является уменьшение шумов измерений по сравнению с шумами на исходных частотах (что является весьма желательным для измерений псевдодальности).

Комбинация на разностной длине волны (WL) Obs_{WL} , м определяется выражением [1]:

$$Obs_{WL} = \frac{n_1}{\Delta n} Obs_1 - \frac{n_2}{\Delta n} Obs_2, \quad (1.15)$$

где $\Delta n = n_1 - n_2$.

Аналогично оценим, как изменится СКО σ_{WL} ошибки WL-комбинации измерений по сравнению с СКО ошибки исходных измерений σ . В соответствии с (1.15) можно вычислить отношение:

$$\frac{\sigma_{WL}}{\sigma} = \sqrt{\left(\frac{n_1}{\Delta n}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{\Delta n}\right)^2}. \quad (1.16)$$

Для систем ГЛОНАСС и GPS это отношение приблизительно равно 5,7: $\frac{\sigma_{WL}}{\sigma} \approx 5,7$. Таким образом, если считать, что СКО ошибок измерений псевдодальности и псевдофазы на исходных частотах равны соответственно 1 м и 1 см, то ошибки WL-комбинаций этих измерений будут иметь большее СКО 5,7 м и 5,7 см соответственно.

В ней, также как и в NL-комбинации, не устраниваются никакие слагаемые модели измерений на исходных частотах, а переменные, не зависящие от диапазона частот, остаются неизменными. Её достоинством является увеличение длины волны псевдофазовой неоднозначности при формировании WL-комбинации из измерений псевдофазы по сравнению с длиной волны исходных частот диапазонов L1, L2 (≈ 84 см для ГЛОНАСС и ≈ 86 см для GPS, что будет видно при подробном рассмотрении математической модели измерений в разделах 1.4.4, 1.4.5).

Комбинация Мельбурна-Вуббены (MW) Obs_{MW} , м определяется как разность WL-измерений псевдофазы и NL-измерений псевдодальности [1]:

$$Obs_{MW} = L_{WL} - P_{NL}, \quad (1.17)$$

где $L_{WL} = \frac{n_1}{\Delta n} L_1 - \frac{n_2}{\Delta n} L_2$ – WL-комбинация измерений псевдофазы L_1, L_2 в диапазонах L1, L2, м;

$P_{NL} = \frac{n_1}{n_1 + n_2} P_1 + \frac{n_2}{n_1 + n_2} P_2$ – NL-комбинация измерений псевдодальности P_1, P_2 в диапазонах L1, L2, м.

Так как MW-комбинация измерений состоит из WL-измерений псевдофазы и NL-измерений псевдодальности, то СКО ошибки MW-комбинации измерений приблизительно равно 0,77 м.

Таким образом, MW-комбинация сочетает в себе достоинства NL- и WL-комбинаций: шум измерений псевдодальности уменьшается (с коэффициентом 0,71), а длина волны псевдофазовых измерений увеличивается (≈ 84 см для ГЛОНАСС и ≈ 86 см для GPS). В ней исключается влияние ионосферы и всех переменных, одинаковых для измерений псевдодальности и псевдофазы (расстояние R^j , тропосферная задержка T_{trop}^j , смещения показаний часов приёмника T и спутников t^j).

Математические модели комбинаций измерений будут рассмотрены ниже при рассмотрении математических моделей измерений ГЛОНАСС и GPS.

1.4.4 Математические модели измерений ГЛОНАСС

Так как основное внимание в настоящей работе сосредоточено на системе ГЛОНАСС, в обозначениях для простоты будет опущено уточнение принадлежности величин именно к системе ГЛОНАСС. Шкалой системного времени считается шкала ГЛОНАСС и под обозначением j понимается номер спутника ГЛОНАСС. При рассмотрении уравнений системы GPS для спутников GPS будет введён свой индекс.

В настоящей работе рассматриваются двухчастотные измерения в диапазонах L1, L2, поэтому, исходя из введённых исходных моделей измерений (1.5), можно перейти к моделям измерений псевдодальностей P_1^j, P_2^j и псевдофаз L_1^j, L_2^j j -го спутника ГЛОНАСС в диапазонах соответственно L1, L2 (нижние индексы 1, 2 означают соответствующий диапазон). Так как рассматриваются сигналы ГЛОНАСС с частотным разделением каналов, сигнал каждого спутника в соответствии со своей литерой lit^j имеет свою несущую частоту f_1^j, f_2^j в диапазонах L1, L2, которая в соответствии с ИКД ГЛОНАСС [7] определяется формулой:

$$\begin{aligned} f_1^j &= f_{01} + lit^j \Delta f_1, \\ f_2^j &= f_{02} + lit^j \Delta f_2, \end{aligned} \quad (1.18)$$

где $f_{01} = 1602$ МГц; $\Delta f_1 = 562,5$ кГц; $f_{02} = 1246$ МГц; $\Delta f_2 = 437,5$ кГц. Величины спутниковых литер lit^j лежат в диапазоне $-7 \dots +6$.

С учётом того, что $\frac{f_{01}}{\Delta f_1} = \frac{f_{02}}{\Delta f_2} = 2848$, выражение (1.18) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} f_1^j &= \Delta f_1 (2848 + lit^j), \\ f_2^j &= \Delta f_2 (2848 + lit^j). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Выражения для длин волн спутниковых сигналов ГЛОНАСС имеют вид:

$$\lambda_1^j = \frac{c}{\Delta f_1 (2848 + lit^j)},$$

$$\lambda_2^j = \frac{c}{\Delta f_2 (2848 + lit^j)},$$
(1.20)

где $c = 299792458$ м/с – скорость света в вакууме. Для сигналов ГЛОНАСС с ЧРК $\lambda_1^j \in (18,674; 18,760)$ см, $\lambda_2^j \in (24,010; 24,120)$ см. Для частот и длин волн спутниковых сигналов ГЛОНАСС известно соотношение:

$$\frac{f_1^j}{f_2^j} = \frac{f_{01}}{f_{02}} = \frac{\Delta f_1}{\Delta f_2} = \frac{\lambda_2^j}{\lambda_1^j} = \frac{9}{7} = \frac{n_1}{n_2},$$
(1.21)

где далее $n_1 = 9$, $n_2 = 7$.

С учётом отношений (1.21) и (1.10) можно записать математические модели измерений псевдодальностей P_1^j , м, P_2^j , м и псевдофаз L_1^j , м, L_2^j , м ГЛОНАСС в диапазонах L1, L2

$$\begin{aligned} P_1^j &= R^j + T_{trop}^j + T_{ion,1}^j + T + B_1^j - t^j - b_1^j + \varepsilon_{P1}^j, \\ P_2^j &= R^j + T_{trop}^j + \frac{n_1^2}{n_2^2} T_{ion,1}^j + T + B_2^j - t^j - b_2^j + \varepsilon_{P2}^j, \\ L_1^j &= R^j + T_{trop}^j - T_{ion,1}^j + T + \lambda_1^j \varphi_1^j - t^j - \lambda_1^j \psi_1^j - \lambda_1^j N_1^j + \varepsilon_{L1}^j, \\ L_2^j &= R^j + T_{trop}^j - \frac{n_1^2}{n_2^2} T_{ion,1}^j + T + \lambda_2^j \varphi_2^j - t^j - \lambda_2^j \psi_2^j - \lambda_2^j N_2^j + \varepsilon_{L2}^j, \end{aligned}$$
(1.22)

где $T_{ion,1}^j$ – задержка распространения сигнала в ионосфере для диапазона L1, м. Остальные обозначения соответствуют (1.5).

В связи с тем, что сигналы спутников ГЛОНАСС с ЧРК имеют различные несущие частоты, в модели измерений (1.22) кодовые и фазовые задержки в аппаратуре приёмника B_1^j , B_2^j , φ_1^j и φ_2^j также зависят от номера спутника j . Но, так как в ГЛОНАСС одна литерная частота f_1^j и f_2^j может соответствовать сразу двум спутникам (называемым антиподными, то есть расположенным на одной орбите диаметрально противоположно, поэтому их сигналы никогда не могут быть приняты одновременно одним приёмником) [7], то корректнее было бы задать зависимость кодовых задержек в аппаратуре приёмника не от номера спутника j , а от номера литеры lit^j . Однако, так как сигналы антиподных спутников не могут быть одновременно приняты одной НАП, оставим для простоты обозначения j .

Из литературы [17; 91; 105] известно, что фазовые задержки в аппаратуре приёмника ГЛОНАСС φ_1^j и φ_2^j можно аппроксимировать линейной функцией частоты:

$$\begin{aligned}\varphi_1^j &= \varphi_{01} + \dot{\varphi}_1 f_1^j, \\ \varphi_2^j &= \varphi_{02} + \dot{\varphi}_2 f_2^j,\end{aligned}\quad (1.23)$$

где φ_{01} , φ_{02} – фазовые аппаратурные задержки на частоте f_{01} , f_{02} (для нулевой литеры $lit^j = 0$), включающие начальную фазу приёмника, циклы; $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$ – наклон ФЧХ НАП, циклы/Гц. Эти величины не зависят от номера спутника j . При выражении в метрах:

$$\begin{aligned}\lambda_1^j \varphi_1^j &= \lambda_1^j \varphi_{01} + c \dot{\varphi}_1, \\ \lambda_2^j \varphi_2^j &= \lambda_2^j \varphi_{02} + c \dot{\varphi}_2.\end{aligned}\quad (1.24)$$

С учётом линейной аппроксимации ФЧХ НАП ГЛОНАСС (1.24) модели измерений (1.22) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}P_1^j &= R^j + T_{trop}^j + T_{ion,1}^j + T + B_1^j - t^j - b_1^j + \varepsilon_{P1}^j, \\ P_2^j &= R^j + T_{trop}^j + \frac{n_1^2}{n_2^2} T_{ion,1}^j + T + B_2^j - t^j - b_2^j + \varepsilon_{P2}^j, \\ L_1^j &= R^j + T_{trop}^j - T_{ion,1}^j + T + \lambda_1^j \varphi_{01} + c \dot{\varphi}_1 - t^j - \lambda_1^j \psi_1^j - \lambda_1^j N_1^j + \varepsilon_{L1}^j, \\ L_2^j &= R^j + T_{trop}^j - \frac{n_1^2}{n_2^2} T_{ion,1}^j + T + \lambda_2^j \varphi_{02} + c \dot{\varphi}_2 - t^j - \lambda_2^j \psi_2^j - \lambda_2^j N_2^j + \varepsilon_{L2}^j.\end{aligned}\quad (1.25)$$

В моделях измерений псевдофазы (1.22) для описания фазовых аппаратурных задержек в НАП для каждого j -го спутника и диапазона частот использовалась своя переменная φ_1^j , φ_2^j . Использование в моделях (1.25) линейной аппроксимации ФЧХ НАП ГЛОНАСС (1.24) позволило сократить число переменных для описания фазовых аппаратурных задержек в НАП до четырёх: φ_{01} , φ_{02} , $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$ (по две на каждый диапазон частот).

Для устранения ионосферной задержки сигнала $T_{ion,1}^j$ в данной работе используется ифр-комбинация измерений (1.11).

Используя модели измерений с линеаризованными фазовыми задержками в аппаратуре приёмника на исходных частотах (1.25), можно записать математические модели ифр-комбинаций (1.11) измерений псевдодальностей P_3^j , м и псевдофаз L_3^j , м ГЛОНАСС:

$$\begin{aligned}P_3^j &= R^j + T_{trop}^j + T + B_3^j - t^j - b_3^j + \varepsilon_{P3}^j, \\ L_3^j &= R^j + T_{trop}^j + T + \lambda_3^j \varphi_{03} + c \dot{\varphi}_3 - t^j - \lambda_3^j \psi_3^j - \lambda_3^j N_3^j + \varepsilon_{L3}^j,\end{aligned}\quad (1.26)$$

где $P_3^j = \frac{n_1^2}{n_1^2 - n_2^2} P_1^j - \frac{n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} P_2^j$ – ifr-комбинация измерений псевдодальности, м;

$B_3^j = \frac{n_1^2}{n_1^2 - n_2^2} B_1^j - \frac{n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} B_2^j$ – ifr-комбинация кодовых задержек в аппаратуре приёмника, м;

ника, м;

$b_3^j = \frac{n_1^2}{n_1^2 - n_2^2} b_1^j - \frac{n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} b_2^j$ – ifr-комбинация кодовых аппаратурных задержек спутника, м;

$\varepsilon_{P3}^j = \frac{n_1^2}{n_1^2 - n_2^2} \varepsilon_{P1}^j - \frac{n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} \varepsilon_{P2}^j$ – ifr-комбинация шумовых ошибок измерения псевдодальности, м;

сти, м;

$L_3^j = \frac{n_1^2}{n_1^2 - n_2^2} L_1^j - \frac{n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} L_2^j$ – ifr-комбинация измерений псевдофазы, м;

$\lambda_3^j = \frac{n_1 \lambda_1^j}{n_1^2 - n_2^2} = \frac{n_2 \lambda_2^j}{n_1^2 - n_2^2}$ – длина волны ifr-комбинации, м, $\lambda_3^j \in (5,252; 5,276)$ см;

$\Phi_{03} = n_1 \Phi_{01} - n_2 \Phi_{02}$ – комбинация фазовых задержек в НАП, включающая начальную фазу, циклы;

$\dot{\Phi}_3 = \frac{n_1^2}{n_1^2 - n_2^2} \dot{\Phi}_1 - \frac{n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} \dot{\Phi}_2$ – ifr-комбинация наклонов ФЧХ НАП ГЛОНАСС, цикл/Гц;

$\Psi_3^j = n_1 \Psi_1^j - n_2 \Psi_2^j$ – комбинация фазовых задержек в аппаратуре спутника, циклы;

$N_3^j = n_1 N_1^j - n_2 N_2^j$ – целочисленная комбинация ($N_3^j \in \mathbb{Z}$) неоднозначностей псевдофазовых измерений, циклы;

$\varepsilon_{L3}^j = \frac{n_1^2}{n_1^2 - n_2^2} \varepsilon_{L1}^j - \frac{n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} \varepsilon_{L2}^j$ – ifr-комбинация случайных ошибок измерения псевдофазы, м.

фазы, м.

В результате линейного преобразования измерений (1.11), исключая ионосферную задержку, целочисленность неоднозначностей псевдофазовых измерений N_3^j сохраняется, так как числа n_1, n_2 – целые. Однако длина волны λ_3^j фазовых целочисленных неоднозначностей N_3^j составляет величину приблизительно 5,26 см.

Если считать, что на исходных частотах среднее квадратическое отклонение ошибок ε_{L1}^j , ε_{L2}^j составляло 1 см, то СКО ошибки измерений ε_{L3}^j составит приблизительно 3 см. Это существенно осложняет разрешение псевдофазовых неоднозначностей N_3^j на длине волны $\lambda_3^j \approx 5,3$ см. Кроме того, можно показать аналитически, что вероятность правильного

разрешения неоднозначностей резко снижается в связи с тем, что количество оцениваемых неоднозначностей уменьшилось с 2 (N_1^j , N_2^j) при использовании модели (1.25) до одной (N_3^j) при использовании модели (1.26) [17; 102].

Вектор неоднозначностей модели (1.25) имеет вид $\begin{bmatrix} N_1^j \\ N_2^j \end{bmatrix}$. В результате преобразования (1.11) он принимает вид $N_3^j = \mathbf{Tr} \begin{bmatrix} N_1^j \\ N_2^j \end{bmatrix}$ с матрицей преобразования $\mathbf{Tr} = [n_1 \quad -n_2]$. Для сохранения вероятности правильного разрешения необходимо, чтобы матрица преобразования \mathbf{Tr} была унимодулярной матрицей (её элементы должны быть целыми числами, а определитель по модулю равен единице) [102; 17].

Известным способом преодоления этой проблемы является добавление к ifr-комбинациям измерений псевдодальностей P_3^j и псевдофаз L_3^j (1.26) MW-комбинации измерений (1.17) [36, 41, 70, 102]. Так как в данной работе рассматриваются двухчастотные измерения, а нижний индекс 3 означает ifr-комбинацию, нижний индекс 4 далее будет относиться к MW-комбинации. Математическая модель MW-комбинации измерений A_4^j , м, имеет вид:

$$A_4^j = -B_{NL}^j + b_{NL}^j + \lambda_{WL}^j \varphi_{WL} + c\dot{\varphi}_{WL} - \lambda_{WL}^j \psi_{WL}^j - \lambda_{WL}^j N_{WL}^j + \varepsilon_{A4}^j, \quad (1.27)$$

где $A_4^j = \left(\frac{n_1}{\Delta n} L_1^j - \frac{n_2}{\Delta n} L_2^j \right) - \left(\frac{n_1}{n_1 + n_2} P_1^j + \frac{n_2}{n_1 + n_2} P_2^j \right)$ – MW-комбинация измерений, м;

$$B_{NL}^j = \frac{n_1}{n_1 + n_2} B_1^j + \frac{n_2}{n_1 + n_2} B_2^j \quad \text{– NL-комбинация кодовых задержек в аппаратуре приёмника, м;}$$

ника, м;

$$b_{NL}^j = \frac{n_1}{n_1 + n_2} b_1^j + \frac{n_2}{n_1 + n_2} b_2^j \quad \text{– NL-комбинация кодовых задержек в аппаратуре спутника, м;}$$

$$\lambda_{WL}^j = \frac{n_1 \lambda_1^j}{\Delta n} = \frac{n_2 \lambda_2^j}{\Delta n} = (n_1 + n_2) \lambda_3^j \quad \text{– длина волны WL-комбинации, м,}$$

$$\lambda_{WL}^j \in (84,034; 84,419) \text{ см;}$$

$\varphi_{WL} = \varphi_{01} - \varphi_{02}$ – комбинация фазовых задержек в аппаратуре приёмника, включающая начальные фазы, циклы;

$$\dot{\varphi}_{WL} = \frac{n_1}{\Delta n} \dot{\varphi}_1 - \frac{n_2}{\Delta n} \dot{\varphi}_2 \quad \text{– WL-комбинация наклонов ФЧХ НАП ГЛОНАСС, цикл/Гц;}$$

$$\psi_{WL}^j = \psi_1^j - \psi_2^j \quad \text{– комбинация фазовых задержек в аппаратуре спутника, циклы;}$$

$N_{WL}^j = N_1^j - N_2^j$ – целочисленная комбинация ($N_{WL}^j \in \mathbb{Z}$) неоднозначностей псевдофазовых измерений, циклы;

$$\varepsilon_{A4}^j = \left(\frac{n_1}{\Delta n} \varepsilon_{L1}^j - \frac{n_2}{\Delta n} \varepsilon_{L2}^j \right) - \left(\frac{n_1}{n_1 + n_2} \varepsilon_{P1}^j + \frac{n_2}{n_1 + n_2} \varepsilon_{P2}^j \right) - \text{MW-комбинация случайных ошибок}$$

измерения псевдофазы и псевдодальности, м.

В результате образования MW-комбинации измерений, также как и при образовании ifr-комбинации, произошло исключение из модели ионосферной задержки и сохранилась целочисленность комбинации неоднозначностей псевдофазовых измерений N_{WL}^j . При этом длина волны λ_{WL}^j фазовых целочисленных неоднозначностей N_{WL}^j составила величину порядка 84,2 см. Однако совместное использование ifr-комбинаций измерений псевдодальностей и псевдофаз (1.26) с MW-комбинациями измерений (1.27) по-прежнему будет иметь высокую вероятность аномальных ошибок в связи с тем, что преобразование $\mathbf{Tr} = \begin{bmatrix} n_1 & -n_2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ вектора неоднозначностей $\begin{bmatrix} N_1^j \\ N_2^j \end{bmatrix}$

в вектор неоднозначностей $\begin{bmatrix} N_3^j \\ N_{WL}^j \end{bmatrix} = \mathbf{Tr} \begin{bmatrix} N_1^j \\ N_2^j \end{bmatrix}$ по-прежнему описывается не унимодулярной матрицей: $\det(\mathbf{Tr}) = n_2 - n_1 = -2$. Добавление MW-комбинации никак не влияет на оценку неоднозначностей N_3^j : у уравнений MW-комбинаций и ifr-комбинаций нет общих переменных. Для того, чтобы решить эту проблему, необходимо выразить неоднозначность N_3^j через N_1^j и N_{WL}^j .

Для единообразия WL-комбинации фазовых задержек, целочисленных неоднозначностей и их длины волн обозначены далее нижним индексом 4: $\varphi_{04} = \varphi_{WL}$, $\psi_4^j = \psi_{WL}^j$, $N_4^j = N_{WL}^j$, $\lambda_4^j = \lambda_{WL}^j$. Выражая величины ifr-комбинаций фазовых задержек в аппаратуре приёмника φ_{03} и целочисленных неоднозначностей N_3^j через φ_{01} , φ_{04} и N_1^j , N_4^j

$$\begin{aligned} \varphi_{03} &= n_1 \varphi_{01} - n_2 \varphi_{02} = n_1 \varphi_{01} - n_2 (\varphi_{01} - \varphi_{04}) = \Delta n \varphi_{01} + n_2 \varphi_{04}, \\ N_3^j &= n_1 N_1^j - n_2 N_2^j = n_1 N_1^j - n_2 (N_1^j - N_4^j) = \Delta n N_1^j + n_2 N_4^j, \end{aligned} \quad (1.28)$$

можно записать модели ifr- и MW-комбинаций измерений в желаемом виде:

$$\begin{aligned} P_3^j &= R^j + T_{trop}^j + T + B_3^j - (t^j + b_3^j) + \varepsilon_{P3}^j, \\ L_3^j &= R^j + T_{trop}^j + T + c\dot{\varphi}_3 - (t^j + \lambda_3^j \psi_3^j) - \Delta n \lambda_3^j (N_1^j - \varphi_{01}) - n_2 \lambda_3^j (N_4^j - \varphi_{04}) + \varepsilon_{L3}^j, \\ A_4^j &= c\dot{\varphi}_{WL} - B_{NL}^j - (\lambda_4^j \psi_4^j - b_{NL}^j) - \lambda_4^j (N_4^j - \varphi_{04}) + \varepsilon_{A4}^j. \end{aligned} \quad (1.29)$$

При записи моделей в виде (1.29) преобразование вектора неоднозначностей $\begin{bmatrix} N_1^j \\ N_2^j \end{bmatrix}$ в вектор неоднозначностей $\begin{bmatrix} N_1^j \\ N_4^j \end{bmatrix} = \mathbf{Tr} \begin{bmatrix} N_1^j \\ N_2^j \end{bmatrix}$ описывается унимодулярной матрицей $\mathbf{Tr} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\det(\mathbf{Tr}) = -1$. Поэтому в смысле вероятности аномальной ошибки модели (1.29) лучше, чем (1.26).

Так как ifr- и MW-комбинации измерений неоднозначны, величины комбинаций фазовых аппаратурных задержек φ_{01} и φ_{04} можно ограничить \pm половиной цикла соответствующей длины волны: $|\varphi_{01}| \leq 0,5$ цикла, $|\varphi_{04}| \leq 0,5$ цикла.

1.4.5 Математические модели измерений GPS. Сравнение математических моделей измерений GPS и ГЛОНАСС

Математические модели измерений псевдодальности и псевдофазы по сигналам системы GPS во многом схожи с соответствующими моделями для ГЛОНАСС. Для сравнения соответствующих математических моделей измерений ГЛОНАСС и GPS в данном разделе будут приведены математические модели измерений для GPS, но без подробного вывода, так как все рассуждения аналогичны приведённым в разделе 1.4.4. Для исключения влияния ионосферы также будут образованы ifr-комбинации измерений, а для уменьшения вероятности аномальных ошибок к ifr-комбинациям будет добавлена MW-комбинация.

Для обозначения того, что рассматривается система GPS, вводится верхний индекс «G», кроме того, номера спутников GPS будут обозначены переменной k , в отличие от ГЛОНАСС, где использовалась переменная j . Основное различие математических моделей GPS и ГЛОНАСС (помимо того, что все смещения показаний часов считаются относительно показаний часов системы GPS) состоит в том, что сигналы GPS в диапазонах L1, L2 излучаются на одной несущей частоте в каждом из диапазонов, а для разделения сигналов разных спутников используется кодовый метод (КРК) согласно ИКД GPS [82]. Несущие частоты GPS в диапазонах L1, L2 равны соответственно $f_1^G = 1575,42$ МГц и $f_2^G = 1227,60$ МГц, а длины волн $\lambda_1^G = c/f_1^G \approx 19,03$ см и $\lambda_2^G = c/f_2^G \approx 24,42$ см и не зависят от номера спутника k . Подобно выражению (1.21) для ГЛОНАСС, для GPS отношение частот и длин волн диапазонов L1, L2 тоже можно выразить отношением двух взаимно простых чисел

$$\frac{f_1^G}{f_2^G} = \frac{\lambda_2^G}{\lambda_1^G} = \frac{77}{60} = \frac{n_1^G}{n_2^G}, \quad (1.30)$$

где далее $n_1^G = 77$; $n_2^G = 60$.

С учётом отношений (1.30) и (1.10) можно записать математические модели измерений псевдодальностей $P_1^{G,k}$, м, $P_2^{G,k}$, м и псевдофаз $L_1^{G,k}$, м, $L_2^{G,k}$, м для k -го спутника GPS в диапазонах L1, L2:

$$\begin{aligned}
 P_1^{G,k} &= R^{G,k} + T_{trop}^{G,k} + T_{ion,1}^{G,k} + T^G + B_1^G - t^{G,k} - b_1^{G,k} + \varepsilon_{P_1}^{G,k}, \\
 P_2^{G,k} &= R^{G,k} + T_{trop}^{G,k} + \left(\frac{n_1^G}{n_2^G}\right)^2 T_{ion,1}^{G,k} + T^G + B_2^G - t^{G,k} - b_2^{G,k} + \varepsilon_{P_2}^{G,k}, \\
 L_1^{G,k} &= R^{G,k} + T_{trop}^{G,k} - T_{ion,1}^{G,k} + T^G + \lambda_1^G \Phi_{01}^G - t^{G,k} - \lambda_1^G \Psi_1^{G,k} - \lambda_1^G N_1^{G,k} + \varepsilon_{L_1}^{G,k}, \\
 L_2^{G,k} &= R^{G,k} + T_{trop}^{G,k} - \left(\frac{n_1^G}{n_2^G}\right)^2 T_{ion,1}^{G,k} + T^G + \lambda_2^G \Phi_{02}^G - t^{G,k} - \lambda_2^G \Psi_2^{G,k} - \lambda_2^G N_2^{G,k} + \varepsilon_{L_2}^{G,k},
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

где все обозначения соответствуют обозначениям (1.5) и (1.22) с уточнением, что рассматривается система GPS (верхний индекс «G»).

Разница между моделями измерений на исходных частотах GPS (1.31) и ГЛОНАСС (1.22) состоит в том, что в ГЛОНАСС длины волн, кодовые и фазовые задержки в аппаратуре приёмника зависят от номера КА, а в GPS – нет.

Применение линейной аппроксимации (1.23) ФЧХ НАП ГЛОНАСС (линеаризация фазовых задержек в аппаратуре ГЛОНАСС) приводит к модели (1.25). Из сравнения моделей GPS (1.31) и ГЛОНАСС (1.25) следует, что после введения линейной аппроксимации ФЧХ приёмника ГЛОНАСС модели измерения псевдофаз для GPS и ГЛОНАСС становятся одинаковыми с точностью до констант $s\dot{\phi}_1$, $s\dot{\phi}_2$ (наклон ФЧХ НАП ГЛОНАСС, одинаковый для всех спутников ГЛОНАСС) и различия длин волн. Так как в GPS в каждом диапазоне используется одинаковая несущая частота, понятия «наклон ФЧХ НАП GPS» в модели измерений GPS не возникает.

Образуя ifr-комбинации и добавляя к ним MW-комбинации моделей измерений GPS (1.31), приходим к следующей модели:

$$\begin{aligned}
 P_3^{G,k} &= R^{G,k} + T_{trop}^{G,k} + T^G + B_3^G - (t^{G,k} + b_3^{G,k}) + \varepsilon_{P_3}^{G,k}, \\
 L_3^{G,k} &= R^{G,k} + T_{trop}^{G,k} + T^G - (t^{G,k} + \lambda_3^G \Psi_3^{G,k}) - \Delta n^G \lambda_3^G (N_1^{G,k} - \Phi_{01}^G) - n_2^G \lambda_3^G (N_4^{G,k} - \Phi_{04}^G) + \varepsilon_{L_3}^{G,k}, \\
 A_4^{G,k} &= -B_{NL}^G - (\lambda_4^G \Psi_4^{G,k} - b_{NL}^{G,k}) - \lambda_4^G (N_4^{G,k} - \Phi_{04}^G) + \varepsilon_{A_4}^{G,k},
 \end{aligned} \tag{1.32}$$

где $P_3^{G,k} = \frac{(n_1^G)^2}{(n_1^G)^2 - (n_2^G)^2} P_1^{G,k} - \frac{(n_2^G)^2}{(n_1^G)^2 - (n_2^G)^2} P_2^{G,k}$ – ifr-комбинация измерений псевдодальности

GPS, м;

$$B_3^G = \frac{(n_1^G)^2}{(n_1^G)^2 - (n_2^G)^2} B_1^G - \frac{(n_2^G)^2}{(n_1^G)^2 - (n_2^G)^2} B_2^G - \text{ifr-комбинация кодовых задержек в аппаратуре}$$

приёмника GPS, м;

$$b_3^{G,k} = \frac{(n_1^G)^2}{(n_1^G)^2 - (n_2^G)^2} b_1^{G,k} - \frac{(n_2^G)^2}{(n_1^G)^2 - (n_2^G)^2} b_2^{G,k} - \text{ifr-комбинация кодовых задержек в аппара-}$$

туре спутника GPS, м;

$$\varepsilon_{P3}^{G,k} = \frac{(n_1^G)^2}{(n_1^G)^2 - (n_2^G)^2} \varepsilon_{P1}^{G,k} - \frac{(n_2^G)^2}{(n_1^G)^2 - (n_2^G)^2} \varepsilon_{P2}^{G,k} - \text{ifr-комбинация шумовых ошибок измерения}$$

псевдодальности GPS, м;

$$L_3^{G,k} = \frac{(n_1^G)^2}{(n_1^G)^2 - (n_2^G)^2} L_1^{G,k} - \frac{(n_2^G)^2}{(n_1^G)^2 - (n_2^G)^2} L_2^{G,k} - \text{ifr-комбинация измерений псевдофазы}$$

GPS, м;

$$\lambda_3^G = \frac{n_1^G \lambda_1^G}{(n_1^G)^2 - (n_2^G)^2} = \frac{n_2^G \lambda_2^G}{(n_1^G)^2 - (n_2^G)^2} - \text{длина волны ifr комбинации GPS, м, } \lambda_3^G \approx 0,63 \text{ см;}$$

$$\Psi_3^{G,k} = n_1^G \Psi_1^{G,k} - n_2^G \Psi_2^{G,k} - \text{комбинация фазовых задержек в аппаратуре спутника GPS,}$$

циклы;

$$\Delta n^G = n_1^G - n_2^G = 17;$$

$$N_4^{G,k} = N_1^{G,k} - N_2^{G,k} - \text{целочисленная комбинация } (N_4^{G,k} \in \mathbb{Z}) \text{ неоднозначностей псевдофазо-}$$

вых измерений GPS, циклы;

$$\Phi_{04}^G = \Phi_{01}^G - \Phi_{02}^G - \text{комбинация фазовых задержек в аппаратуре приёмника GPS, циклы;}$$

$$\varepsilon_{L3}^{G,k} = \frac{(n_1^G)^2}{(n_1^G)^2 - (n_2^G)^2} \varepsilon_{L1}^{G,k} - \frac{(n_2^G)^2}{(n_1^G)^2 - (n_2^G)^2} \varepsilon_{L2}^{G,k} - \text{ifr-комбинация шумовых ошибок измерения}$$

псевдофазы GPS, м;

$$A_4^{G,k} = \left(\frac{n_1}{\Delta n} L_1^{G,k} - \frac{n_2}{\Delta n} L_2^{G,k} \right) - \left(\frac{n_1}{n_1 + n_2} P_1^{G,k} + \frac{n_2}{n_1 + n_2} P_2^{G,k} \right) - \text{MW-комбинация измерений}$$

GPS, м;

$$B_{NL}^G = \frac{n_1}{n_1 + n_2} B_1^G + \frac{n_2}{n_1 + n_2} B_2^G - \text{NL-комбинация кодовых задержек в аппаратуре приёмника}$$

GPS, м;

$$\lambda_4^G = \frac{n_1^G \lambda_1^G}{\Delta n^G} = \frac{n_2^G \lambda_2^G}{\Delta n^G} = (n_1^G + n_2^G) \lambda_3^G \quad - \text{длина волны WL-комбинации фазовых измерений}$$

GPS, м, $\lambda_4^G = (n_1^G + n_2^G) \lambda_3^G \approx 86,2$ см;

$$\psi_4^{G,k} = \psi_1^{G,k} - \psi_2^{G,k} \quad - \text{комбинация фазовых задержек в аппаратуре спутника GPS, циклы};$$

$$b_{NL}^{G,k} = \frac{n_1}{n_1 + n_2} b_1^{G,k} + \frac{n_2}{n_1 + n_2} b_2^{G,k} \quad - \text{NL-комбинация кодовых задержек в аппаратуре спутника}$$

GPS, м;

$$\varepsilon_{A4}^{G,k} = \left(\frac{n_1}{\Delta n} \varepsilon_{L1}^{G,k} - \frac{n_2}{\Delta n} \varepsilon_{L2}^{G,k} \right) - \left(\frac{n_1}{n_1 + n_2} \varepsilon_{P1}^{G,k} + \frac{n_2}{n_1 + n_2} \varepsilon_{P2}^{G,k} \right) \quad - \text{MW-комбинация шумовых ошибок}$$

измерений, м.

Для более наглядного сравнения приведём ещё раз математические модели ifr- и MW-комбинаций псевдодальностей и псевдофаз GPS (1.32) и ГЛОНАСС (1.29) (Таблица 2).

Красным цветом в уравнениях для ГЛОНАСС в Таблице 2 выделены отличия от уравнений GPS. Сравнение этих моделей показывает, что

- модель ifr-комбинации измерений псевдодальностей ГЛОНАСС P_3^j включает ifr-комбинации кодовых задержек в аппаратуре приёмника B_3^j , различные для каждого j -го спутника, а в модели измерений псевдодальностей GPS $P_3^{G,k}$ они не зависят от номера спутника k : B_3^G ;

- модель ifr-комбинаций псевдофаз ГЛОНАСС L_3^j и GPS $L_3^{G,k}$ совпадают с точностью до константы $c\dot{\phi}_3$ – ifr-комбинации наклонов ФЧХ НАП ГЛОНАСС (одинаковой для всех спутников ГЛОНАСС);

- модель MW-комбинации измерений ГЛОНАСС A_4^j включает NL-комбинации кодовых задержек в аппаратуре ГЛОНАСС B_{NL}^j , различные для каждого j -го спутника и константу $c\dot{\phi}_{NL}$, не зависящую от номера спутника, а в GPS NL-комбинации кодовых задержек в аппаратуре B_{NL}^G не зависят от номера спутника k и отсутствует понятие «наклон ФЧХ»;

- длины волн ГЛОНАСС λ_3^j , λ_4^j различаются для разных спутников, а для GPS они не зависят от номера спутника k : λ_3^G , λ_4^G .

В остальном вид моделей измерений ГЛОНАСС схож с видом моделей измерений GPS.

Таблица 2 – Сравнение математических моделей измерений GPS и ГЛОНАСС (красным цветом выделены отличия ГЛОНАСС от GPS)

	Измерение	Геометрическая дальность	Тропосферная задержка	Смещение часов НАП	Кодовые задержки в НАП	Смещение часов КА и аппаратурные задержки на КА	Целочисленные неоднозначности и начальные фазы	Случайные (шумовые) ошибки	
GPS	$P_3^{G,k} =$	$R^{G,k} + T_{trop}^{G,k}$	$+T^G + B_3^G$	$-(t^{G,k} + b_3^{G,k})$				$+\varepsilon_{P3}^{G,k}$	Псевдодальность
	$L_3^{G,k} =$	$R^{G,k} + T_{trop}^{G,k}$	$+T^G$	$-(t^{G,k} + \lambda_3^G \psi_3^{G,k})$	$-\Delta n^G \lambda_3^G (N_1^{G,k} - \varphi_{01}^G)$			$+\varepsilon_{L3}^{G,k}$	Псевдофаза
	$A_4^{G,k} =$			$-B_{NL}^G$	$-(\lambda_4^G \psi_4^{G,k} - b_{NL}^{G,k})$	$-\lambda_4^G (N_4^{G,k} - \varphi_{04}^G)$		$+\varepsilon_{A4}^{G,k}$	MW-комбинация
ГЛОНАСС	$P_3^j =$	$R^j + T_{trop}^j$	$+T + B_3^j$	$-(t^j + b_3^j)$				$+\varepsilon_{P3}^j$	Псевдодальность
	$L_3^j =$	$R^j + T_{trop}^j$	$+T + c\dot{\varphi}_3$	$-(t^j + \lambda_3^j \psi_3^j)$	$-\Delta n \lambda_3^j (N_1^j - \varphi_{01})$			$+\varepsilon_{L3}^j$	Псевдофаза
	$A_4^j =$			$c\dot{\varphi}_{WL} - B_{NL}^j$	$-(\lambda_4^j \psi_4^j - b_{NL}^j)$	$-\lambda_4^j (N_4^j - \varphi_{04})$		$+\varepsilon_{A4}^j$	MW-комбинация

В связи с тем, что в модели измерений ГЛОНАСС (1.29) комбинации задержек в аппаратуре приёмника B_3^j и B_{NL}^j зависят от номера спутника j (так называемые межлитерные задержки, inter-channel biases, ICB, inter-frequency biases, IFCB), при составлении системы уравнений для измерений по модели (1.29) число переменных будет слишком велико для решения задачи целочисленного ВАМО. Причём из литературы [8; 22; 26] известно, что задержки B_3^j и B_{NL}^j нелинейно зависят от частоты (номера литеры), поэтому использовать для их описания линейную аппроксимацию, подобно псевдофазовым измерениям, невозможно. Пренебрежение этим различием приведёт к тому, что при решении системы уравнений неучтённые задержки B_3^j будут вносить систематическую погрешность в оценку положения приёмника и смещения показаний его часов, а задержки B_{NL}^j будут смещать оценки целочисленных неоднозначностей N_1^j , N_4^j в область действительных чисел [11; 22]. В работе [35] также показано, что наличие различных кодовых задержек в измерениях ГЛОНАСС оказывает существенное влияние на стандартное автономное местоопределение. Поэтому для того, чтобы решить задачу целочисленного ВАМО по модели (1.29), необходимо решить проблему присутствия в модели измерений различных задержек в аппаратуре приёмника B_3^j и B_{NL}^j .

Так как слагаемые $c\dot{\phi}_3$ и $c\dot{\phi}_{NL}$ (наклон ФЧХ НАП ГЛОНАСС) в математической модели измерений ГЛОНАСС (1.29) не зависят от номера спутника, их можно объединить со смещением показаний часов приёмника T и комбинацией кодовых задержек в НАП B_{NL}^j . Таким образом, они не будут влиять ни на оценку координат НАП, ни на оценку псевдофазовых неоднозначностей и не будут вносить существенную разницу в модели измерений ГЛОНАСС и GPS.

1.5 Выводы по главе 1

Проведён краткий обзор литературы, дана классификация и описание основных подходов к реализации режима целочисленного ВАМО в ГНСС с кодовым разделением (GPS, GALILEO, BEIDOU): FCB, IRC, DC. Из литературы следует, что режим целочисленного ВАМО по измерениям сигналов ГЛОНАСС с частотным разделением реализован только в рамках модели FCB. Для реализации режима целочисленного ВАМО по измерениям сигналов ГЛОНАСС с частотным разделением в настоящей работе выбран наиболее перспективный с точки зрения автора и лучше описанный в отечественной литературе подход DC (decoupled clock).

Описаны особенности использования алгоритмов целочисленного разрешения неоднозначности.

Введены математические модели измерений псевдодальностей и псевдофаз, линейных комбинаций этих измерений. Особое внимание при обработке следует уделять коррекции систематических смещений в измерениях.

Продемонстрирована необходимость использования MW-комбинации измерений (Мельбурна-Вуббены) при обработке ионосферосвободных комбинаций псевдодальностей и псевдофаз в режиме целочисленного ВАМО.

Выявлены основные различия математических моделей измерений GPS и ГЛОНАСС. Введение линейной аппроксимации ФЧХ в модель псевдофазовых измерений ГЛОНАСС приводит к тому, что она практически совпадает с моделью измерений для GPS. Существенным отличием является присутствие в математических моделях ГЛОНАСС в общем случае различных кодовых межлитерных задержек и различие длин несущих волн сигналов между спутниками ГЛОНАСС. Преодолению этих проблем посвящена следующая глава.

2 ОСОБЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ ГЛОНАСС

Для кодовых измерений ГЛОНАСС характерно присутствие в математических моделях задержек в НАП, которые различаются для измерений разных КА (**межлитерные задержки**). Это является следствием частотного разделения сигналов КА ГЛОНАСС и дополнительно осложняет решение задачи (увеличивает число переменных). В данной главе описан способ упрощения математической модели кодовых измерений ГЛОНАСС, основанный на использовании одностипных приёмников (одной модели, от одного производителя, оборудованных одинаковыми антеннами и РПО) в предположении о том, что их кодовые задержки совпадают. Предлагается методика сравнения кодовых аппаратурных задержек и проверки введённого предположения.

Кроме того, при математической постановке задачи целочисленного ВАМО как по измерениям сигналов ГЛОНАСС, так и при использовании ГНСС с кодовым разделением, возникают **недоопределённые системы линейных уравнений**, имеющие бесконечное число векторных решений. Однако за счёт особых свойств этих систем **единственные оценки координат НАП** могут быть получены с использованием так называемой теории S-преобразования [18; 38; 104].

Непреодолимым различием математических моделей измерений ГЛОНАСС и ГНСС-КРК (в частности GPS) остаётся различие длин волн КА ГЛОНАСС. Однако длины волн в ГЛОНАСС относительно близки. Поэтому для решения задачи целочисленного ВАМО по ГЛОНАСС предлагается использовать близость длин волн и применить известные методы обработки измерений, присущие GPS, где длины волн не просто близки, а одинаковы. Для этого математические модели измерений ГЛОНАСС и GPS приводятся к единому виду. Это приведение состоит в объединении действительных фазовых аппаратурных задержек с целочисленными параметрами псевдофазовой неоднозначности. Продемонстрировано, что такое объединение не влияет на результат решения задачи целочисленного ВАМО по GPS (так как при решении недоопределённой системы уравнений оцениваются целочисленные комбинации неоднозначностей GPS).

В данной и следующей главах приведены результаты обработки реальных измерений, взятых из открытого источника – Федерального центра навигационных данных [23].

2.1 Различие кодовых аппаратурных задержек в математических моделях измерений псевдодальностей ГЛОНАСС

В настоящем разделе рассмотрен один из вариантов решения проблемы различия в математической модели измерений ГЛОНАСС (1.29) *ifr*- и *NL*-комбинаций кодовых задержек в НАП B_3^j и B_{NL}^j для различных спутников. Эта проблема известна давно, существуют разные подходы к её решению. Например, потребители информации российской системы широкозонной

дифференциальной коррекции СДКМ могут калибровать свою НАП таким образом, чтобы выровнять все кодовые задержки относительно неизвестного, но одинакового для всех литер уровня [8]. Также известны методы абсолютной калибровки с использованием государственных эталонов [11].

В настоящей работе предлагается использовать НАП одной модели от одного производителя, оборудованную одинаковыми антеннами и РПО в предположении о том, что эта НАП обладает схожими характеристиками. Следовательно, величины комбинаций кодовых задержек для любой пары НАП u и v из рассматриваемого множества $B_{3,u}^j$, $B_{3,v}^j$ и $B_{NL,u}^j$, $B_{NL,v}^j$, входящие в модели измерений ГЛОНАСС (1.29), для любого спутника ГЛОНАСС полагаются равными с точностью до константы, не зависящей от номера спутника. То есть допускается наличие между ними смещений, не зависящих от номера спутника j (одинакового для всех литер):

$$\begin{aligned} B_{3,u}^j - B_{3,v}^j &= \Delta B_{3,u-v}, \\ B_{NL,u}^j - B_{NL,v}^j &= \Delta B_{NL,u-v}, \end{aligned} \quad \forall j. \quad (2.1)$$

Это предположение находит подтверждение в литературе [26; 35] и позволяет упростить математические модели измерений псевдодальности и MW-комбинаций ГЛОНАСС.

НАП, удовлетворяющую описанному свойству, будем далее называть «совместимой». Таким образом, в данном разделе рассматриваются станции, оборудованные такой НАП (приёмники от одного производителя одной модели, подключенные к одинаковым моделям антенн, оборудованных одинаковыми защитными РПО), и предлагается методика проверки их совместимости, то есть проверки гипотезы (2.1).

Выполнить проверку равенства $B_{NL,u}^j - B_{NL,v}^j = \Delta B_{NL,u-v}$ из (2.1) можно путём сравнения дробных частей (путём сравнения остатков при вычитании целого числа длин волн λ_4^j) величин B_{NL}^j различных приёмников в предположении о стабильности кодовых аппаратурных задержек спутников и приёмников во времени. Этот алгоритм основан на идеях, описанных в [22] («Алгоритм оценки дробной части систематических смещений комбинации MW») и [11] («метод дифференциальной калибровки»). Он состоит в сравнении усреднённых по времени величин MW-комбинаций измерений сравниваемых приёмников (так как в математическую модель MW-комбинации (1.27) кодовые аппаратурные задержки входят в виде NL-комбинации B_{NL}^j). Преимуществом такого подхода является то, что для него не требуется никакая внешняя информация (эфемериды, поправки к смещениям показаний часов спутников и приёмников, информация об атмосферных задержках), нет ограничений на расстояние между сравниваемыми приёмниками и не требуется никакое дополнительное оборудование. Однако недостатком является то, что он не

позволяет напрямую проверить равенство $B_{3,u}^j - B_{3,v}^j = \Delta B_{3,u-v}$ из (2.1), то есть из совпадения дробных частей NL-комбинаций кодовых задержек $B_{NL,u}^j, B_{NL,v}^j$ между сравниваемыми приёмниками напрямую не следует совпадение их ифг-комбинаций $B_{3,u}^j, B_{3,v}^j$ и тем более совпадение задержек на исходных частотах $B_{1,u}^j, B_{1,v}^j$ и $B_{2,u}^j, B_{2,v}^j$ (где 1 и 2 обозначают диапазоны частот L1, L2).

Для преодоления этого недостатка и дополнительной проверки предлагается описанный в статье [26] алгоритм оценки разностей этих задержек $B_{1,u}^j - B_{1,v}^j$ и $B_{2,u}^j - B_{2,v}^j$, основанный на обработке первых разностей кодовых измерений между этими приёмниками и последующем анализе полученных невязок при условии близкого расположения приёмников. Из равенств $B_{1,u}^j - B_{1,v}^j = \text{const}_1$ и $B_{2,u}^j - B_{2,v}^j = \text{const}_2$ напрямую следуют и оба равенства (2.1), однако недостатком этого подхода является его ограничение на расстояние между приёмниками (расстояние, на котором атмосферные задержки можно считать одинаковыми – обычно не более десятков километров).

Для целочисленного ВАМО НАП, которая не является совместимой, предлагается использовать тот же алгоритм оценки различия кодовых задержек на исходных частотах B_1^j, B_2^j с соответствующими задержками в НАП, которая относится к совместимой или другие, более сложные методы калибровки. После вычисления этих задержек их можно использовать как поправки к измерениям псевдодалностей на исходных частотах L1, L2. Применение этих поправок должно приводить к тому, что такая НАП становится совместимой с той, относительно которой проводилась калибровка («метод дифференциальной калибровки» [11]).

Подтверждение гипотезы (2.1) позволит существенно упростить математические модели измерений ГЛОНАСС (1.29). В результате они принимают такой же вид, как в GPS (1.32) и единственным различием моделей GPS и ГЛОНАСС останется различие длин волн.

2.1.1 Оценка различия narrow-lane-комбинаций кодовых аппаратурных задержек различных навигационных приёмников ГЛОНАСС

Оценку различия NL-комбинаций кодовых задержек B_{NL}^j между различным навигационными приёмниками (различной НАП) будем производить по MW-комбинациям измерений, поскольку в них отсутствуют все смещения, связанные с тропосферой, ионосферой, расстояниями до спутников и со смещением показаний часов приёмника и спутников (то есть все относительно быстро меняющиеся во времени величины). В модель MW-комбинации измерений ГЛОНАСС A_4^j (1.29) входят только комбинации кодовых и фазовых задержек в аппаратуре спутников и приёмника, наклонов ФЧХ НАП, которые мы полагаем константами, и неопределённое целое число

циклов, которые считаются постоянными на интервале непрерывной видимости спутника. Кроме того, MW-комбинация удобна тем, что в ней уменьшается СКО шумовой ошибки измерений по сравнению с СКО шумовой ошибки кодовых измерений на исходных частотах. (за счёт того, что кодовые измерения входят в неё в виде NL-комбинации (1.13) с коэффициентами, меньшими 1).

Введём в рассмотрение пару приёмников u и v , кодовые задержки которых $B_{NL,u}^j$ и $B_{NL,v}^j$ будем сравнивать по всем спутникам ГЛОНАСС $j = \overline{1, J^{GLO}}$. Необходимо оценить, зависят ли от номера спутника j разности кодовых задержек этих двух приёмников $\Delta B_{NL,u-v}^j = B_{NL,u}^j - B_{NL,v}^j$. В силу неоднозначности MW-комбинаций измерений, возможно получить оценку не для самих разностей $\Delta B_{NL,u-v}^j$, а только для их дробных частей $\{\Delta B_{NL,u-v}^j\} = \Delta B_{NL,u-v}^j - \left[\frac{\Delta B_{NL,u-v}^j}{\lambda_4^j} \right] \lambda_4^j$, где $[]$ – операция округления до ближайшего целого, а $\{ \}$ – операция отбрасывания ближайшего целого числа длин волн λ_4^j . Если эти разности для данных приёмников u и v окажутся одинаковыми по всем спутникам ГЛОНАСС, то есть $\{\Delta B_{NL,u-v}^j\} = \text{const}(u, v) \quad \forall j$ (где запись $\text{const}(u, v)$ означает константу, зависящую от выбора u и v), значит для рассматриваемой пары станций дробные части NL-комбинаций кодовых задержек в аппаратуре различаются на константу и не зависят от номера спутника j . В [22] такие станции названы «совместимыми в смысле разрешения неоднозначности комбинации Melbourne-Wubben» и аналогичное условие для «совместимости» сформулировано следующим образом: «необходимо и достаточно, чтобы разность систематических смещений комбинации Melbourne-Wubben между разными НКА одного приемника совпадала с разностью смещений тех же НКА другого приемника в циклах с точностью до целого (дробная часть)».

Получить оценку $\{\Delta B_{NL,u-v}^j\}$ можно усредняя по времени величины MW-комбинаций измерений A_4^j (1.29) для рассматриваемых станций и сравнивая результаты усреднения (образуя разности между сравниваемыми станциями). Из литературы [22] известно, что MW-комбинации измерений достаточно стабильны во времени, поэтому в данной задаче они полагаются постоянными на интервале усреднения и для уменьшения влияния шума измерений используется усреднение по времени. Для нахождения такой оценки не требуется никакая внешняя информация (эфемериды, поправки к смещениям показаний часов спутников, информация об атмосферных задержках) – только текущие двухчастотные измерения псевдодальностей и псевдофаз.

Запишем ещё раз модель MW-комбинации для измерений ГЛОНАСС $A_{4,m}^j$ (1.29) для произвольной m -й станции:

$$A_{4,m}^j = c\dot{\phi}_{WL,m} - B_{NL,m}^j - (\lambda_4^j \psi_4^j - b_{NL}^j) - \lambda_4^j (N_{4,m}^j - \Phi_{04,m}) + \varepsilon_{A4,m}^j. \quad (2.2)$$

На Рисунке 2.1 изображён график зависимости MW-комбинаций измерений $A_{4,m}^j$ от времени для трёх спутников ГЛОНАСС.

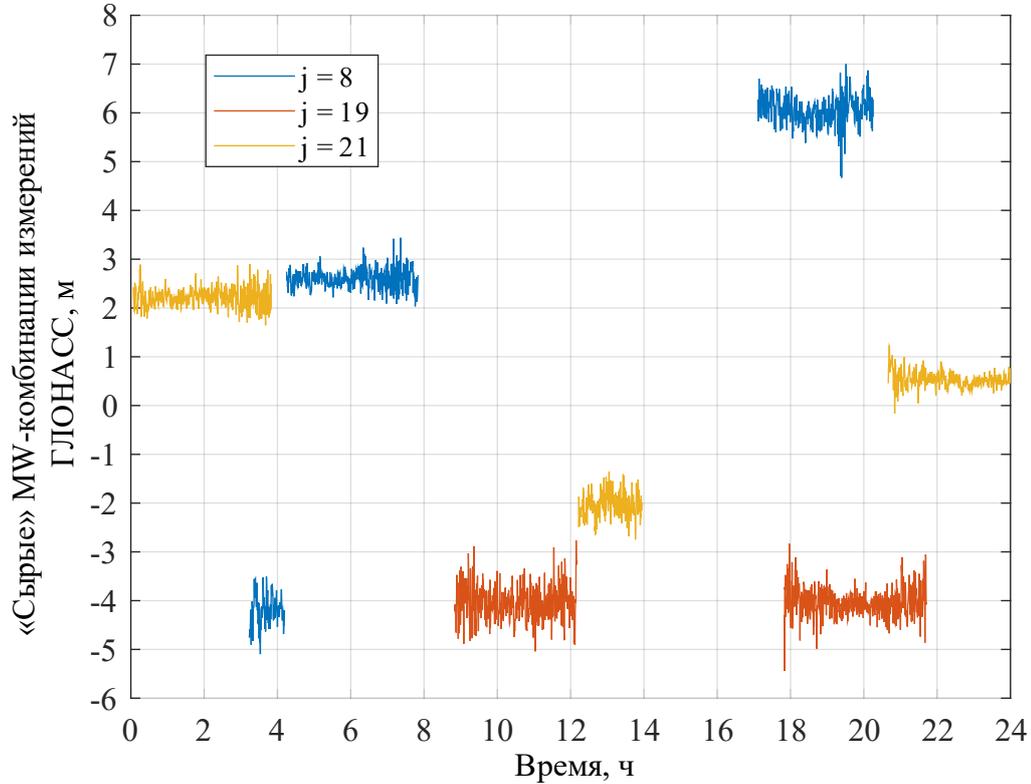


Рисунок 2.1 – Пример величин MW-комбинаций измерений $A_{4,m}^j$ приёмника в г. Иркутск (1) для некоторых спутников ГЛОНАСС на суточном интервале 13.08.2021

При срыве слежения за спутниковым сигналом (в результате ухода спутника из зоны видимости или в результате срыва слежения за фазой несущей – cycle slip) или вследствие коррекции показаний часов НАП может меняться и величина псевдофазовой неоднозначности $N_{4,m}^j$. Это хорошо видно на Рисунке 2.1: MW-комбинация достаточно стабильна во времени, однако при потере спутникового сигнала целочисленная неоднозначность может меняться и наблюдается скачок на целое число длин волн λ_4^j . Поэтому усреднять по времени «сырую» величину комбинаций $A_{4,m}^j$ (2.2) нельзя. Однако благодаря тому, что длина волны λ_4^j фазовой неоднозначности $N_{4,m}^j$ достаточно велика ($\lambda_4^j \in (84,034; 84,419)$ см) по сравнению с величиной СКО ошибки $\varepsilon_{A4,m}^j$ (0,71 м) и благодаря относительной стабильности во времени MW-комбинации (Рисунок 2.1), на каждом интервале видимости каждого j -го спутника к измерениям $A_{4,m}^j$ можно добавить такое

целое число $\Delta N_{4,m}^j$ длин волн λ_4^j , чтобы неоднозначность $N_{4,m}^j$ была одинаковой на всех интервалах видимости спутника, то есть «выровнять» скачки на целое число длин волн λ_4^j в измерениях $A_{4,m}^j$ (2.2) относительно некоторого уровня. Кроме того, можно выбрать такое $\Delta N_{4,m}^j$, что $N_{4,m}^j + \Delta N_{4,m}^j = N_{04,m}^j$ и отличие усреднённого значения $A_{4,m}^j$ от нуля не будет превосходить по модулю половину длины волны λ_4^j , то есть производит «выравнивание» относительно минимального по абсолютной величине уровню. Результаты такого «выравнивания» MW-комбинации сырых измерений (Рисунок 2.1) и усреднения полученной оценки представлены на Рисунке 2.2.

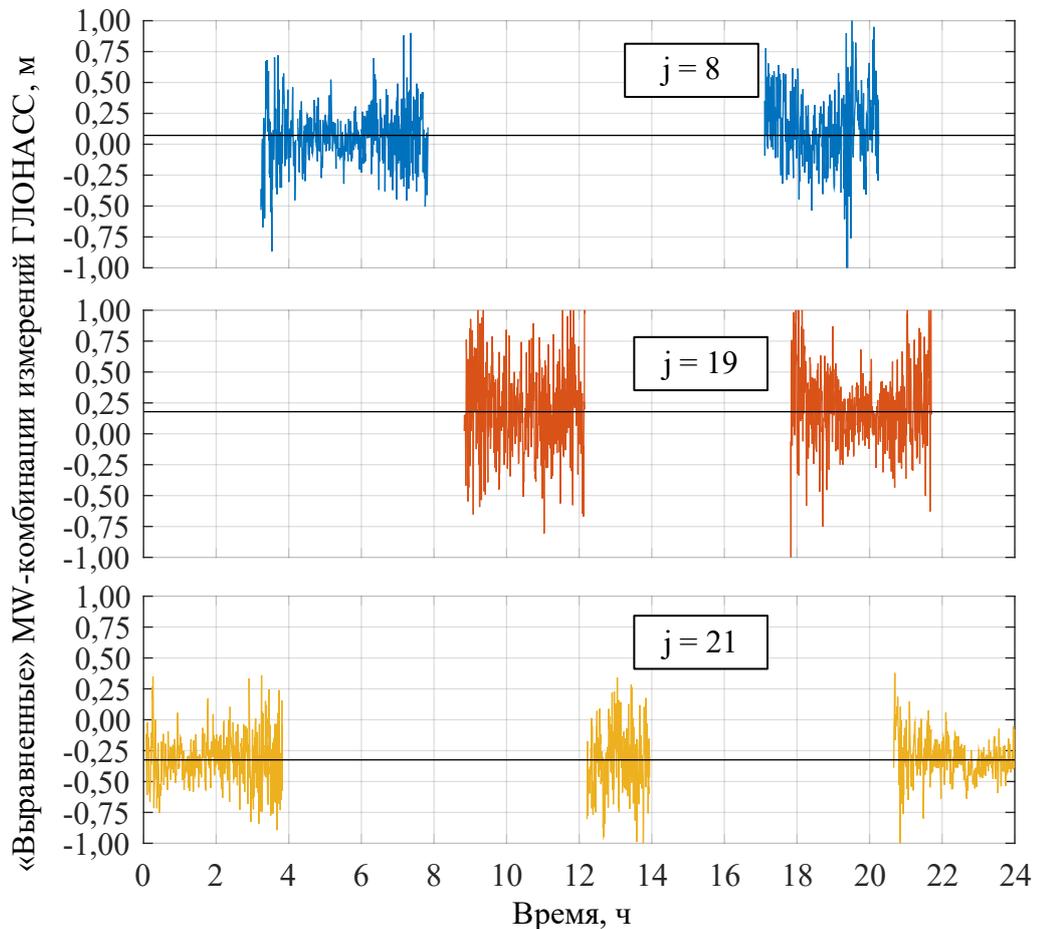


Рисунок 2.2 – Результаты «выравнивания» и усреднения по времени MW-комбинаций измерений приёмника в г. Иркутск (1) для некоторых спутников ГЛОНАСС на суточном интервале

На Рисунке 2.2 показаны «выравненные» посредством добавления целого числа длин волн λ_4^j MW-комбинации измерений, а чёрным цветом показано их взвешенное с учётом угла места спутника среднее значение. В результате такой процедуры для каждого спутника для m -й станции получается оценка средней величины MW-комбинации $\bar{A}_{4,m}^j$, м:

$$\bar{A}_{4,m}^j = c\dot{\phi}_{WL,m} - B_{NL,m}^j - (\lambda_4^j \psi_4^j - b_{NL}^j) - \lambda_4^j (N_{04,m}^j - \varphi_{04,m}) + \bar{\varepsilon}_{A4,m}^j, \quad (2.3)$$

где $N_{04,m}^j$ – некоторое «выравненное» неопределённое целое;

$\bar{\varepsilon}_{A4,m}^j$ – средняя величина случайной ошибки MW-комбинации.

При образовании первых разностей $\Delta \bar{A}_{4,u-v}^j = \bar{A}_{4,u}^j - \bar{A}_{4,v}^j$ оценок усреднённых MW-комбинаций $\bar{A}_{4,m}^j$ (2.3) двух рассматриваемых станций u и v по всем спутникам в их математических моделях устраняются общие слагаемые, не зависящие от номера станции – MW-комбинации кодовых и фазовых задержек в аппаратуре спутника $-(\lambda_4^j \psi_4^j - b_{NL}^j)$:

$$\Delta \bar{A}_{4,u-v}^j = c\Delta \dot{\phi}_{WL,u-v} - \Delta B_{NL,u-v}^j - \lambda_4^j (\Delta N_{04,u-v}^j - \Delta \varphi_{04,u-v}) + \Delta \bar{\varepsilon}_{A4,u-v}^j, \quad (2.4)$$

где $c\Delta \dot{\phi}_{WL,u-v} = c(\dot{\phi}_{WL,u} - \dot{\phi}_{WL,v})$, $\Delta B_{NL,u-v}^j = B_{NL,u}^j - B_{NL,v}^j$, $\Delta N_{04,u-v}^j = N_{04,u}^j - N_{04,v}^j$,

$\Delta \varphi_{04,u-v} = \varphi_{04,u} - \varphi_{04,v}$, $\Delta \bar{\varepsilon}_{A4,u-v}^j = \bar{\varepsilon}_{A4,u}^j - \bar{\varepsilon}_{A4,v}^j$.

Дробная часть $\left\{ \Delta \bar{A}_{4,u-v}^j \right\} = \Delta \bar{A}_{4,u-v}^j - \left[\frac{\Delta \bar{A}_{4,u-v}^j}{\lambda_4^j} \right] \lambda_4^j$ первой разности $\Delta \bar{A}_{4,u-v}^j$ (2.4), представ-

ляет собой смещённую на действительную величину Δ_B^j искомую оценку разности дробной ча-

сти NL-комбинаций кодовых задержек в НАП $\left\{ \Delta B_{NL,u-v}^j \right\} = \Delta B_{NL,u-v}^j - \left[\frac{\Delta B_{NL,u-v}^j}{\lambda_4^j} \right] \lambda_4^j$ исследуемой

пары станций для j -го спутника:

$$\left\{ \Delta \bar{A}_{4,u-v}^j \right\} = \Delta_B^j - \left\{ B_{NL,u-v}^j \right\} + \bar{\varepsilon}_{A4,u-v}^j, \quad (2.5)$$

где $\Delta_B^j = \left\{ c\Delta \dot{\phi}_{WL,u-v} + \lambda_4^j \Delta \varphi_{04,u-v} \right\} = \left\{ c\Delta \dot{\phi}_{WL,u-v} \right\} + \lambda_4^j \Delta \varphi_{04,u-v}$, так как $|\varphi_{04,u-v}| \leq 0,5$ цикла.

Максимальное различие длин волн λ_4^j не превышает 0,39 см для наиболее разнесённых спутниковых литер -7 и 6, поэтому можно считать, что слагаемое $\lambda_4^j \Delta \varphi_{04,u-v}$ не зависит от номера спутника j , то есть $\lambda_4^j \Delta \varphi_{04,u-v} \approx \lambda_4^0 \Delta \varphi_{04,u-v}$, где λ_4^0 – длина волны λ_4 для нулевой литеры. В таком

случае $\Delta_B^j \approx \Delta_B = \text{const}(u, v)$ – константа, зависящая от сравниваемых приёмников u и v . Таким

образом, сравнивая между собой оценки $\left\{ \Delta \bar{A}_{4,u-v}^j \right\}$ (2.5) для пары станций по различным спутни-

кам, в случае, если $\left\{ \Delta \bar{A}_{4,u-v}^j \right\} = \text{const}(u, v) \forall j$, можно сделать вывод о различии на константу

кодовых задержек в НАП этих станций $B_{NL,u-v}^j = \text{const}(u, v) \forall j$, то есть о выполнении второго равенства гипотезы (2.1). Иными словами, $\{\Delta \bar{A}_{4,u-v}^j\}$ (2.5) – смещённая на действительную величину Δ_B оценка $\{\Delta \hat{B}_{NL,u-v}^j\}$ дробной части NL-комбинации разности кодовых задержек $\{\Delta B_{NL,u-v}^j\}$:

$$\{\Delta \hat{B}_{NL,u-v}^j\} = -\{\Delta \bar{A}_{4,u-v}^j\}. \quad (2.6)$$

Так как в силу неоднозначности измерений между величинами $\{\Delta \bar{A}_{4,u-v}^j\}$ (2.5) при выражении в циклах для разных спутников может быть разница более 0,5 цикла, для большей наглядности следует привести их путём прибавления или вычитания целого числа циклов к такому виду, чтобы разница между ними была меньше либо равна 0,5 цикла.

Для станций u и v , для которых выполняется условие $B_{NL,u-v}^j = \text{const}(u, v) \forall j$, кодовые аппаратные задержки станции u $B_{NL,u}^j$ для всех спутников можно выразить через кодовые аппаратные задержки станции v $B_{NL,v}^j$: $B_{NL,u}^j = \text{const}(u) + B_{NL,v}^j$.

Если рассмотреть некоторую сеть приёмников, для которых выполняется второе равенство (2.1) (не обязательно сравнивать все возможные пары приёмников, достаточно сравнить все приёмники в паре с одним, обозначим его R), то модели MW-комбинаций измерений (2.2) для приёмников такой сети упрощаются: NL-комбинации кодовых задержек для m -й станции можно разделить на задержки в приёмнике и на КА. Математически это выражается в разложении на два слагаемых – одно зависит только от номера станции, а второе – только от номера спутника: $B_{NL,m}^j = \Delta B_{NL,m} + B_{NL,R}^j$, где $\Delta B_{NL,m} = B_{NL,m}^j - B_{NL,R}^j = \text{const}(m) \forall j$. Без этого разделения задержки, относящиеся к приёмнику, невозможно отделить от задержек, относящихся к спутнику. Тогда математическая модель MW-комбинации измерений A_4^j (1.29) таких станций принимает вид:

$$A_{4,m}^j = c\dot{\varphi}_{WL,m} - \Delta B_{NL,m} - B_{NL,R}^j - (\lambda_4^j \psi_4^j - b_{NL}^j) - \lambda_4^j (N_{4,m}^j - \varphi_{04,m}) + \varepsilon_{A4,m}^j. \quad (2.7)$$

Такой вид удобен тем, что слагаемое $\Delta B_{NL,m}$, зависящее от номера станции, не зависит от номера спутника, а слагаемое $B_{NL,R}^j$, зависящее от номера спутника, не зависит от номера станции. В дальнейшем будет показано, что это позволяет упростить модель измерений (1.29).

Однако оценить с помощью такого алгоритма по разностям ifr-комбинаций измерений псевдодальности различие ifr-комбинаций кодовых задержек пары станций $B_{3,u}^j - B_{3,v}^j$, то есть проверить выполнение первого равенства (2.1), невозможно, так как слагаемые, входящие в

модель измерения псевдодальности быстро и случайным образом меняются во времени. Тем не менее, на основании того, что NL-комбинации (точнее их дробные части) для анализируемых станций совпадают, можно сделать предположение о том, что и *ifr*-комбинации тоже будут совпадать (также с точностью до константы), то есть выполнены оба равенства (2.1). Результаты обработки реальных измерений, проведённые в настоящей работе или, например, в работе [22], не противоречат данной гипотезе. Поэтому в данной работе для станций, у которых совпадают дробные части NL-комбинаций кодовых задержек, вводится допущение о том, что у них совпадают и *ifr*-комбинации кодовых задержек и их также можно представить в аналогичном виде $B_{3,m}^j = \Delta B_{3,m} + B_{3,R}^j$, где $\Delta B_{3,m} = B_{3,m}^j - B_{3,R}^j = \text{const}(m) \forall j$. При таком представлении модель кодовых измерений *ifr*-комбинации $P_{3,m}^j$ m -й станции, входящая в (1.29), принимает вид:

$$P_{3,m}^j = R_m^j + T_{trop,m}^j + T_m + \Delta B_{3,m} + B_{3,R}^j - (t^j + b_3^j) + \varepsilon_{P_{3,m}^j}^j. \quad (2.8)$$

Оценки $\{\Delta \hat{B}_{NL,u-v}^j\}$ (2.6) были получены для однородной (одинаковые модели приёмников от одного производителя, одинаковые антенны и РПО) локальной сети, состоящей из станций, расположенных на территории Российской Федерации. Станции расположены в 6 городах, каждая включает 3 близко расположенных приёмника (кроме одной, расположенной в г. Усть-Илимск, на которой работают 2 приёмника), подключенные каждый к своей антенне и своему внешнему стандарту частоты (расположение станций показано на Рисунке 3.1 в главе 3). Таким образом, всего было рассмотрено 17 приёмников. Были получены оценки различия дробных частей NL-комбинаций кодовых задержек $\{\Delta \hat{B}_{NL,u-v}^j\}$ (2.6) между всеми приёмниками и первым приёмником в г. Иркутск (обозначение номера приёмника дано в скобках). Результаты оценки $\{\Delta \hat{B}_{NL,u-v}^j\}$ (2.6) для некоторых приёмников приведены на Рисунках 2.3, 2.4.

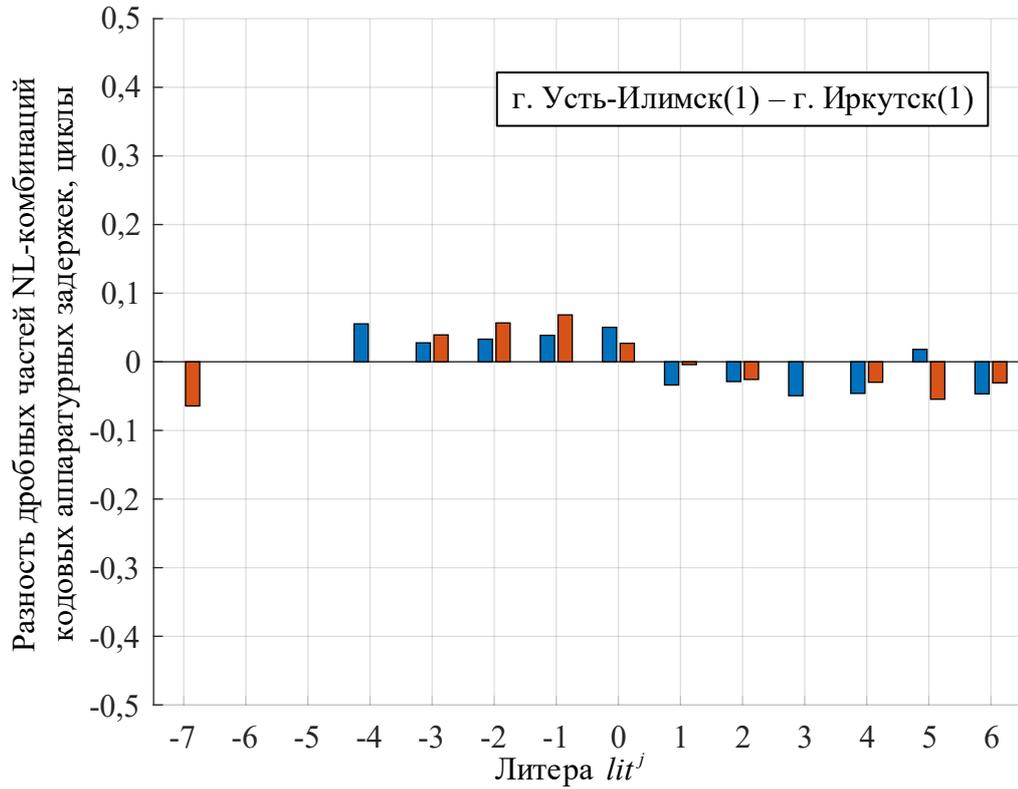


Рисунок 2.3 – Оценка разности дробных частей NL-комбинаций кодовых задержек в НАП ГЛОНАСС $\{\Delta \hat{B}_{NL,u-v}^j\}$ (в циклах). Приёмники в г. Усть-Илимск (1) и г. Иркутск (1)

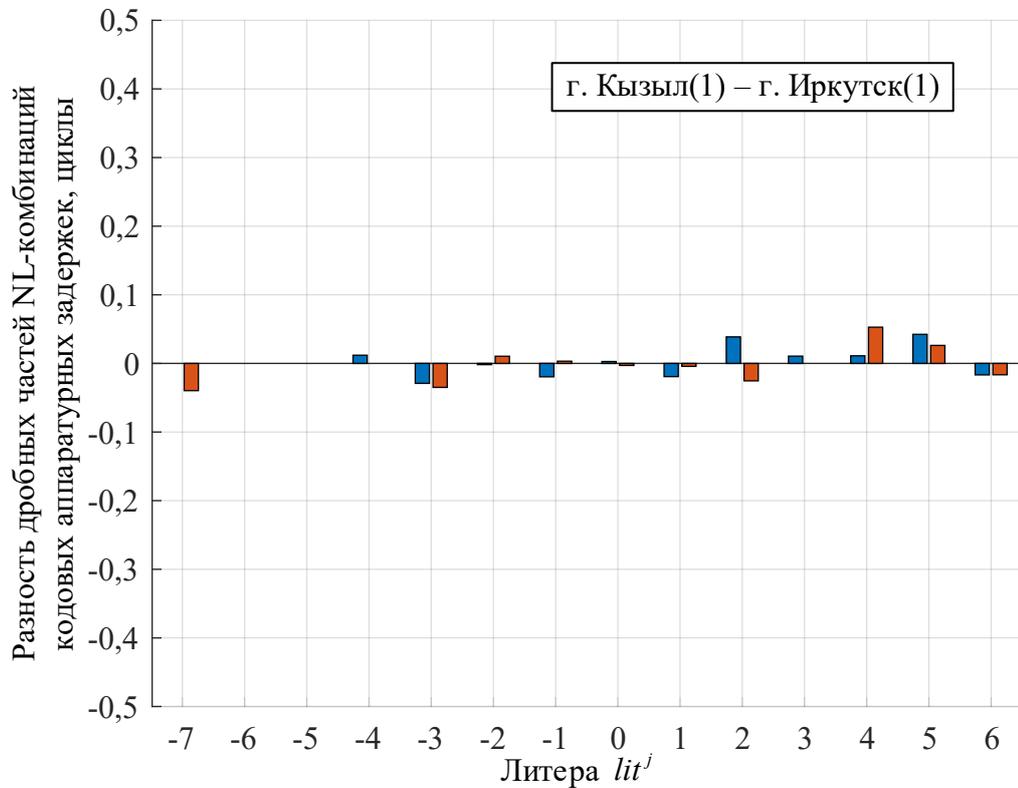


Рисунок 2.4 – Оценка разности дробных частей NL-комбинаций кодовых задержек в НАП ГЛОНАСС $\{\Delta \hat{B}_{NL,u-v}^j\}$ (в циклах). Приёмники в г. Кызыл (1) и г. Иркутск (1)

На Рисунках 2.3, 2.4 после названий городов в скобках указаны номера приёмников. На этих рисунках приведён характерный вид оцениваемых разностей $\{\Delta\hat{B}_{NL,u-v}^j\}$ (2.6), при этом графики для большей наглядности «сдвинуты в ноль» (на графиках изображены соответствующие величины за вычетом среднего значения). Выявлено, что оценки $\{\Delta\hat{B}_{NL,u-v}^j\}$ совпадают по всем спутникам для всех рассматриваемых приёмников, а различия в среднем не превышают 0,1 цикла. СКО оценок $\{\Delta\hat{B}_{NL,u-v}^j\}$, вычисленных для всех спутников, приведены в Таблице 3.

Для приёмника 1 в г. Иркутск величина СКО в Таблице 3 отсутствует, так как он был опорным для сравнения (т.е. все приёмники сравнивались с ним).

Таблица 3 – Результаты сравнения дробных частей NL-комбинаций кодовых задержек спутников ГЛОНАСС между приёмниками рассматриваемой сети

Расположение	Номер приёмника	СКО разностей кодовых задержек, цикл
Иркутск	1	–
Иркутск	2	0,0345
Иркутск	3	0,0257
Колпашево	1	0,0569
Колпашево	2	0,0406
Колпашево	3	0,0276
Красноярск	1	0,0248
Красноярск	2	0,0434
Красноярск	3	0,0545
Кызыл	1	0,0254
Кызыл	2	0,0454
Кызыл	3	0,0350
Усть-Илимск	1	0,0434
Усть-Илимск	3	0,0458
Чита	1	0,0370
Чита	2	0,0653
Чита	3	0,0435
Среднее значение		0,0405

Из Таблицы 3 видно, что оцениваемые дробные части NL-комбинаций кодовых задержек в НАП $\{\Delta\hat{B}_{NL,u-v}^j\}$ для рассматриваемых приёмников совпадают с высокой точностью (в среднем 0,04 цикла). Таким образом, рассматриваемые приёмники можно считать совместимыми.

Для проверки предлагаемого алгоритма сравнение дробных частей NL-комбинаций кодовых задержек было выполнено также и для измерений GPS (Рисунок 2.5). В модели измерений

GPS (1.32) кодовые задержки в НАП B_{NL}^G не зависят от номера спутника, поэтому логично ожидать, что оценки $\{\Delta\hat{B}_{NL,u-v}^k\}$ (2.6) для GPS тем более не будут зависеть от номера спутника GPS k , что и подтверждает Рисунок 2.5 (график также как и на Рисунках 2.3, 2.4 «сдвинут в ноль»). Отличия от нуля можно считать случайной ошибкой вследствие шума измерений.

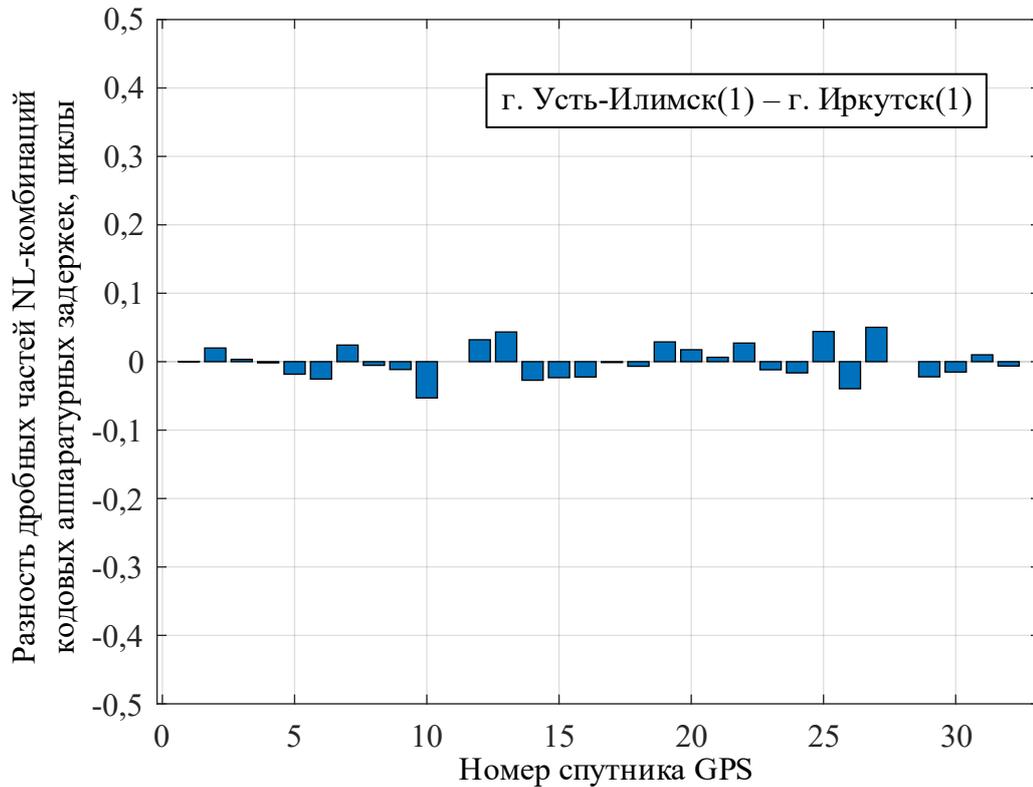


Рисунок 2.5 – Оценка разности дробных частей NL-комбинаций кодовых задержек в НАП GPS $\{\Delta\hat{B}_{NL,u-v}^k\}$ (в циклах). Приёмники в г. Усть-Илимск (1) и г. Иркутск (1)

Так как в рассматриваемой сети присутствуют близко (десяtkи метров) расположенные приёмники, для них можно дополнительно оценить разности кодовых задержек на исходных частотах.

2.1.2 Оценка различия кодовых аппаратурных задержек на исходных частотах для близко расположенных приёмников ГЛОНАСС

Для дополнительной проверки гипотезы о совпадении кодовых аппаратурных задержек в одинаковой НАП (одна модель приёмника от одного производителя, одинаковые антенны, РПО) предлагается использовать алгоритм, описанный в [26]. Он состоит в оценке разности смещений показаний часов двух рассматриваемых приёмников по первым разностям их измерений

псевдодальности и анализе остаточных невязок при условии точно известных координат приёмников. В первых разностях на короткой базовой линии устраняются все атмосферные задержки (тропосферная и ионосферная), а также все неизвестные, связанные со спутниками и ошибками определения их координат. По первым разностям производится оценка разностей смещений показаний часов, а неучтённые в модели различные кодовые задержки в НАП можно получить, усредняя остаточные невязки. Преимущество алгоритма состоит в том, что сравниваются сами кодовые задержки в НАП на исходных частотах, то есть $B_{1,u}^j$, $B_{2,u}^j$ и $B_{1,v}^j$, $B_{2,v}^j$, где u и v обозначают сравниваемые приёмники, а 1 и 2 – диапазоны частот L1 и L2.

Уравнение первой разности $\Delta P_{i,u-v}^j = P_{i,u}^j - P_{i,v}^j$ измерений псевдодальности ГЛОНАСС для пары приёмников u и v , расположенных на короткой базовой линии, в i -м диапазоне частот по j -му спутнику имеет вид:

$$\Delta P_{i,u-v}^j = \Delta R_{u-v}^j + \Delta T_{u-v} + \Delta B_{i,u-v}^j + \Delta \varepsilon_{Pi}^j, \quad (2.9)$$

где $\Delta R_{u-v}^j = R_u^j - R_v^j$; $\Delta T_{u-v} = T_u - T_v$; $\Delta B_{i,u-v}^j = B_{i,u}^j - B_{i,v}^j$; $\Delta \varepsilon_{Pi}^j = \varepsilon_{Pi,u}^j - \varepsilon_{Pi,v}^j$.

В случае, если координаты станций известны точно, разность расстояний ΔR_{u-v}^j тоже известна и её можно перенести в левую часть уравнения. Пренебрегая кодовыми аппаратными задержками $\Delta B_{i,u-v}^j$ (считая, что их средняя величина для видимых спутников равна нулю), при наличии в зоне видимости НАП J спутников ГЛОНАСС можно получить оценку разности смещений показаний часов приёмников ΔT_{u-v} (для каждого i -го диапазона частот решается своя независимая система уравнений):

$$dP_{i,u-v}^j \approx \Delta T_{i,u-v} + \Delta \varepsilon_{Pi}^j \quad j = \overline{1, J}, \quad (2.10)$$

где $dP_{i,u-v}^j = \Delta P_{i,u-v}^j - \Delta R_{u-v}^j$.

Решая систему (2.10), можно получить оценку разности смещений показаний часов $\Delta \hat{T}_{i,u-v}$. Однако в (2.10) пренебрегли слагаемыми $\Delta B_{i,u-v}^j$ (поэтому используется знак приближительного, а не строгого равенства). Чтобы оценить их, в [26] предлагается усреднять во времени разность невязки $dP_{i,u-v}^j$ и оценки $\Delta \hat{T}_{i,u-v}$ по каждому спутнику:

$$\Delta \hat{B}_{i,u-v}^j = dP_{i,u-v}^j - \Delta \hat{T}_{i,u-v} \quad j = \overline{1, J}. \quad (2.11)$$

Этот алгоритм не позволит сравнить каждый приёмник с каждым или хотя бы каждый с каким-то одним, поскольку требует близкого расположения двух приёмников. Однако он

позволит дополнительно подтвердить предположение о том, что рассматриваемая НАП (рассматриваемый приёмник определённой модели одного производителя) обладает схожими характеристиками и кодовые аппаратные задержки в рассматриваемой НАП действительно можно считать одинаковыми (с точностью до константы). Так как рассматривается однородная сеть, состоящая из одинаковой НАП, можно получить дополнительные основания полагать, что все станции этой сети совместимы.

На Рисунках 2.6, 2.7 показаны графики зависимости оценок $\Delta \hat{B}_{i,u-v}^j$ (2.11) от спутников ГЛОНАСС (точнее от номеров спутниковых литер) для двух пар приёмников, расположенных: одна пара – в г. Красноярск (приведена оценка в диапазоне L1), вторая – в г. Чита (приведена оценка в диапазоне L2). Для наглядности из оценок удалено общее смещение (графики «сдвинуты к нулю»). Так как рассматриваются задержки на исходных частотах, их величины приведены в метрах (а не в циклах λ_4^j).

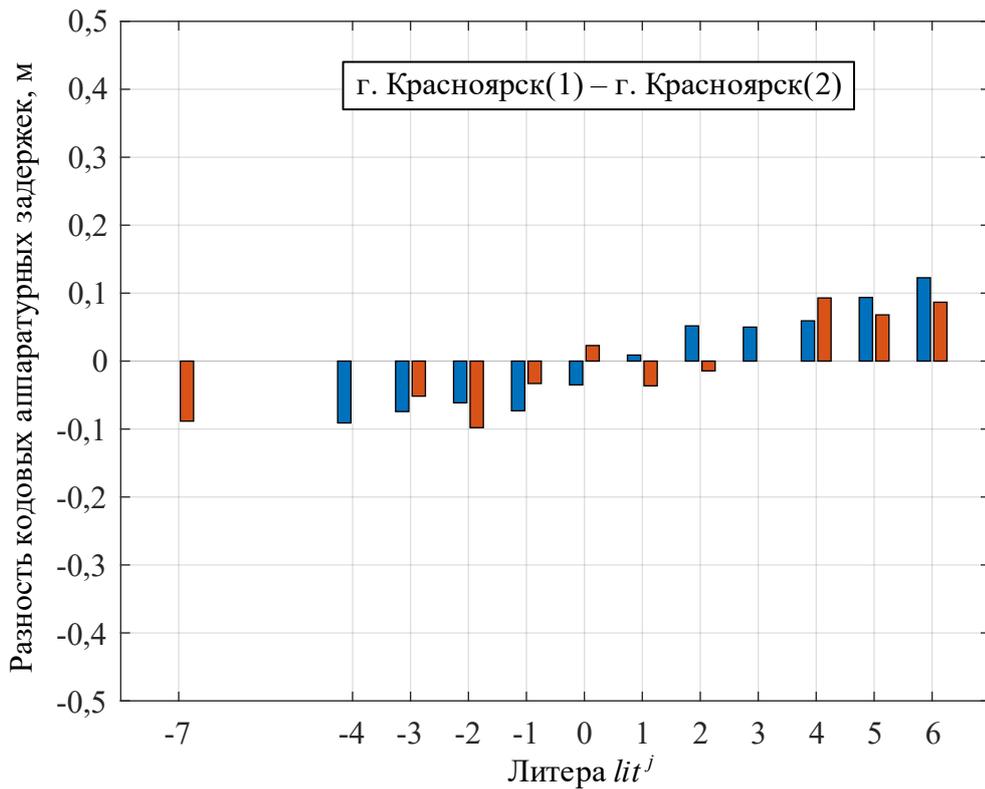


Рисунок 2.6 – Оценка разности кодовых задержек в НАП ГЛОНАСС $\Delta \hat{B}_{1,u-v}^j$ (в метрах). Приёмники в г. Красноярск. Диапазон L1

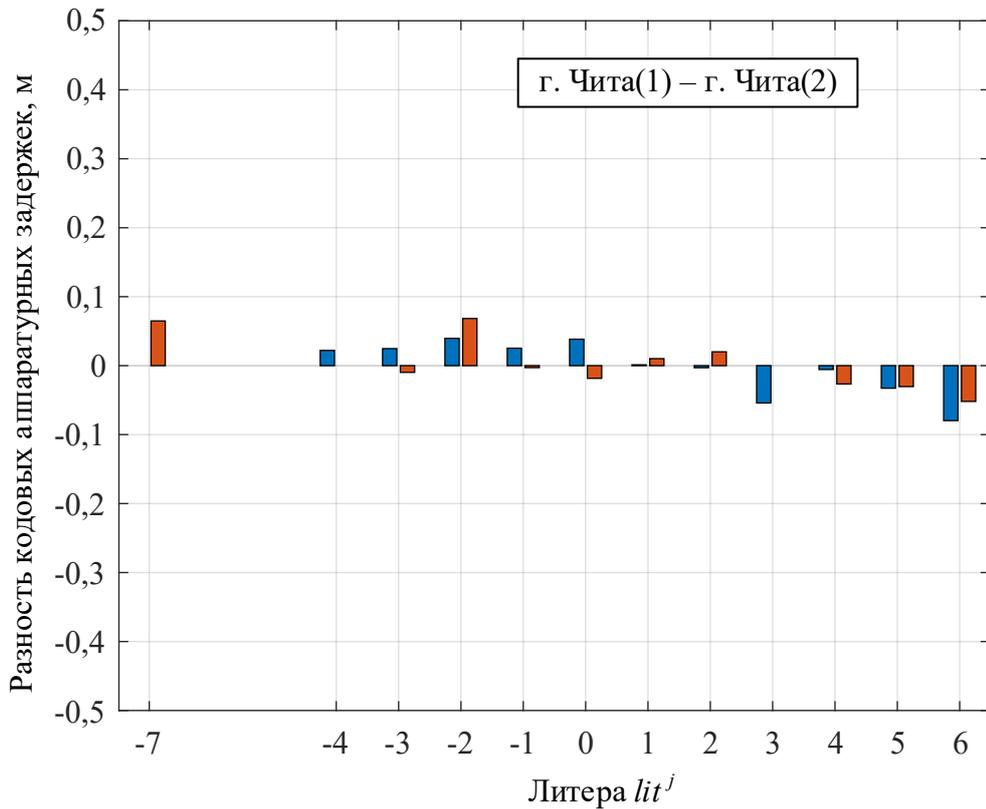


Рисунок 2.7 – Оценка разности кодовых задержек в НАП ГЛОНАСС $\Delta \hat{B}_{2,u-v}^j$ (в метрах). Приёмники в г. Чита. Диапазон L2

Видно, что в пределах ± 10 см и лучше кодовые задержки в НАП на исходных частотах для рассматриваемых приёмников совпадают (с точностью до константы, которая на графике не показана) по всем спутникам.

Для проверки предлагаемого алгоритма сравнение кодовых задержек в НАП на исходных частотах было выполнено также и для измерений GPS (Рисунки 2.8, 2.9). В модели измерений GPS на исходных частотах (1.31) кодовые задержки в НАП B_1^G , B_2^G не зависят от номера спутника, поэтому логично ожидать, что оценки $\Delta \hat{B}_{i,u-v}^k$ (2.11) для GPS тем более не будут зависеть от номера спутника (верхний индекс j , означающий номер спутника ГЛОНАСС заменён на k , означающий спутник GPS).

Рисунки 2.8, 2.9 подтверждают это предположение (они также «сдвинуты в ноль»). Отличия от нуля можно считать случайной ошибкой вследствие шума измерений.

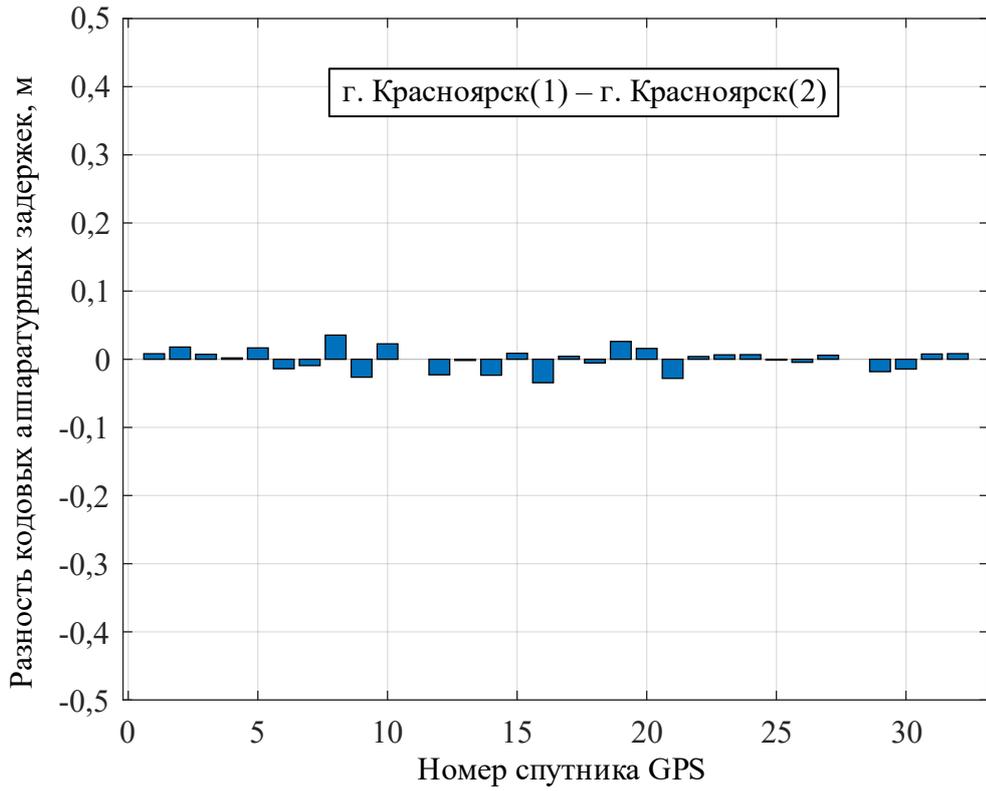


Рисунок 2.8 – Оценка разности кодовых задержек в НАП GPS $\Delta\hat{B}_{1,u-v}^k$ (в метрах). Приёмники в г. Красноярск. Диапазон L1

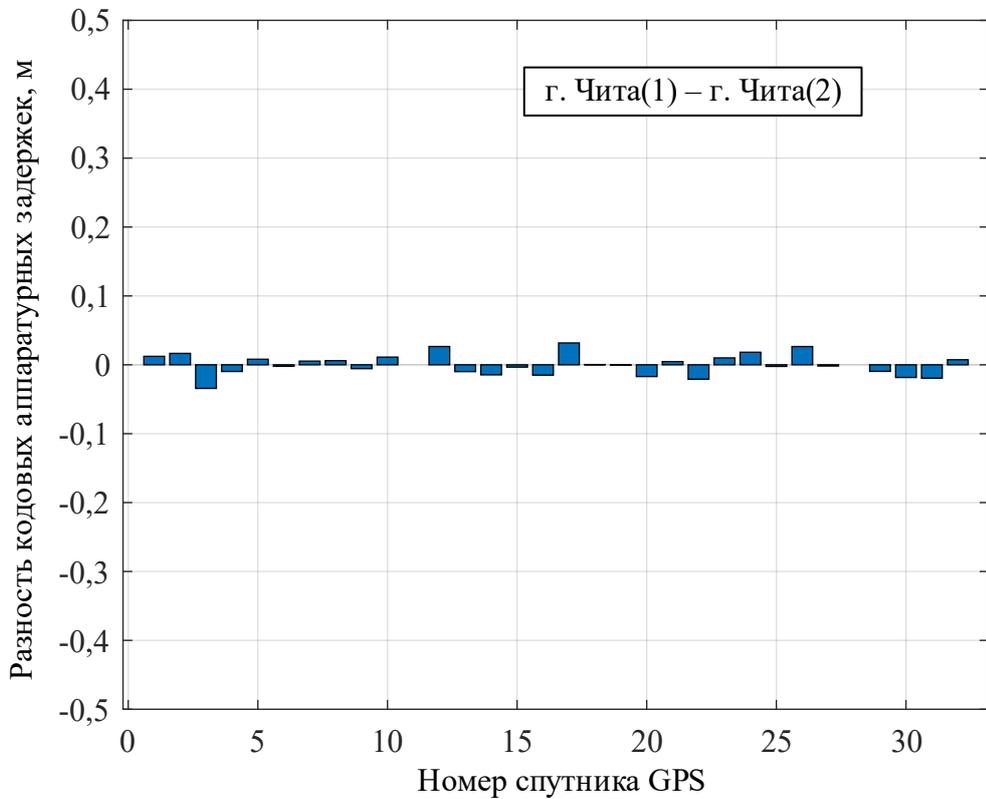


Рисунок 2.9 – Оценка разности кодовых задержек в НАП GPS $\Delta\hat{B}_{2,u-v}^k$ (в метрах). Приёмники в г. Чита. Диапазон L2

Оценки $\Delta\hat{B}_{i,u-v}^j$ (2.11) невозможно получить для далеко разнесённых приёмников, однако оценки $\{\Delta\hat{B}_{NL,u-v}^j\}$ (2.6) можно получить для близко расположенных приёмников и сравнить результат с NL-комбинацией $\Delta\hat{B}_{NL,u-v}^j$ оценок на исходных частотах $\Delta\hat{B}_{1,u-v}^j$ и $\Delta\hat{B}_{2,u-v}^j$. Пример такого сравнения для приёмников, расположенных в г. Колпашево, показан на Рисунках 2.10, 2.11 (графики аналогичным образом «сдвинуты к нулю»).

Можно сделать вывод о том, что во-первых: результаты оценок $\Delta\hat{B}_{NL,u-v}^j$ на Рисунке 2.10 и $\{\Delta\hat{B}_{NL,u-v}^j\}$ на Рисунке 2.11 совпадают и во-вторых: NL-комбинации кодовых задержек в рассматриваемой НАП для разных спутников различаются не более чем на $\pm 0,15$ цикла (с точностью до константы), поэтому их можно считать одинаковыми. Эти выводы позволяют говорить о корректности сделанных предположений на счёт совпадения кодовых задержек в используемой однотипной НАП. Кроме того, на обоих графиках видно небольшое систематическое смещение для литер с -1 по 6. Причём такая ситуация характерна для обоих антиподных КА, имеющих одинаковую литеру. Совпадение результатов такой оценки (наличие систематических смещений) для антиподных КА является ещё одним косвенным доказательством корректности используемого алгоритма сравнения аппаратурных задержек.

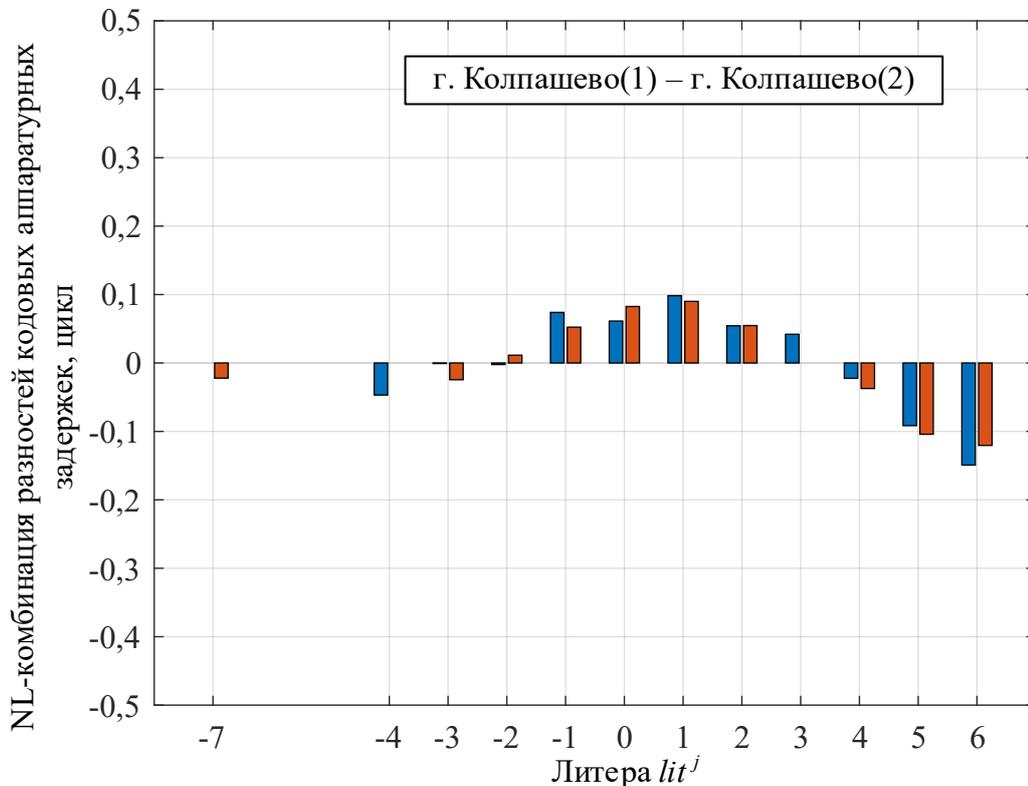


Рисунок 2.10 – Оценка разности NL-комбинаций кодовых задержек в НАП $\Delta\hat{B}_{NL,u-v}^j$ (в циклах).
Приёмники в г. Колпашево

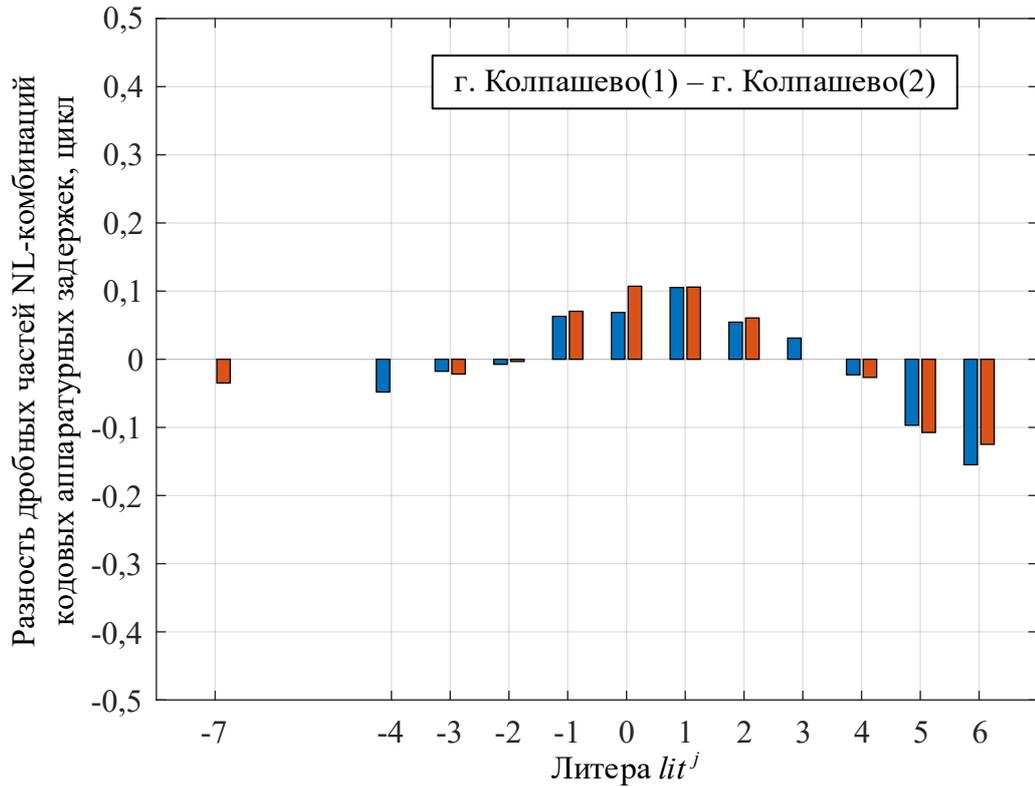


Рисунок 2.11 – Оценка разности дробных частей NL-комбинаций кодовых задержек в НАП $\{\Delta\hat{B}_{NL,u-v}^j\}$ (в циклах). Приёмники в г. Колпашево

2.1.3 Упрощение математических моделей измерений совместимой навигационной аппаратуры потребителя ГЛОНАСС

При использовании измерений совместимой НАП ГЛОНАСС (у которой кодовые задержки совпадают) математические модели кодовых и MW-комбинаций измерений (1.29) такой НАП могут быть переписаны в более простом виде (2.7) и (2.8) (модель псевдофазовых измерений при этом не изменяется). В таком случае, группируя слагаемые, зависящие только от номера спутника j и от номера станции m , вместе, математические модели измерений (1.29) m -й станции по j -му спутнику с учётом (2.7) и (2.8) можно переписать в упрощённом виде:

$$\begin{aligned}
 P_{3,m}^j &= R_m^j + T_{trop,m}^j + (T_m + \Delta B_{3,m}) - (t^j + b_3^j - B_{3,R}^j) + \varepsilon_{P3,m}^j, \\
 L_{3,m}^j &= R_m^j + T_{trop,m}^j + (T_m + c\dot{\phi}_{3,m}) - (t^j + \lambda_3^j \psi_3^j) - \Delta n \lambda_3^j (N_{1,m}^j - \Phi_{01,m}) \\
 &\quad - n_2 \lambda_3^j (N_{4,m}^j - \Phi_{04,m}) + \varepsilon_{L3,m}^j, \\
 A_{4,m}^j &= (c\dot{\phi}_{WL,m} - \Delta B_{NL,m}) - (\lambda_4^j \psi_4^j - b_{NL}^j + B_{NL,R}^j) - \lambda_4^j (N_{4,m}^j - \Phi_{04,m}) + \varepsilon_{A4,m}^j.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Введённое упрощение позволяет приблизить математические модели кодовых и MW-комбинаций измерений ГЛОНАСС к соответствующим моделям GPS (1.32). Приведём ещё раз модели GPS с обозначением номера станции m для сравнения:

$$\begin{aligned}
 P_{3,m}^{G,k} &= R_m^{G,k} + T_{trop,m}^{G,k} + (T_m^G + B_{3,m}^G) - (t^{G,k} + b_3^{G,k}) + \varepsilon_{P3,m}^{G,k}, \\
 L_{3,m}^{G,k} &= R_m^{G,k} + T_{trop,m}^{G,k} + (T_m^G) - (t^{G,k} + \lambda_3^G \psi_3^{G,k}) - \Delta n^G \lambda_3^G (N_{1,m}^{G,k} - \varphi_{01,m}^G) \\
 &\quad - n_2^G \lambda_3^G (N_{4,m}^{G,k} - \varphi_{04,m}^G) + \varepsilon_{L3,m}^{G,k}, \\
 A_{4,m}^{G,k} &= (-B_{NL,m}^G) - (\lambda_4^G \psi_4^{G,k} - b_{NL}^{G,k}) - \lambda_4^G (N_{4,m}^{G,k} - \varphi_{04,m}^G) + \varepsilon_{A4,m}^{G,k}.
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

В (2.12) и (2.13) в скобки взяты группы слагаемых, которые можно объединить с образованием новых переменных для уменьшения числа переменных. Хотя эти группы слагаемых немного различаются по физическому смыслу для моделей GPS (2.13) и ГЛОНАСС (2.12), структура уравнений одинакова. Существенным различием моделей остаётся зависимость длины волны в ГЛОНАСС от номера спутника j .

В соответствии с идеей «разделения часов» (подход decoupled clock) [36] необходимо так преобразовать модели (2.12) и (2.13), чтобы образовать новые переменные путём объединения кодовых и фазовых задержек со смещениями показаний часов для спутника и приёмника и провести аналогичное объединение для математической модели MW-комбинации измерений. В таком случае кодовые задержки в аппаратуре оцениваются независимо от фазовых в комбинации со смещением показаний часов («кодовые часы»), поэтому нет необходимости вводить какие-либо ограничения на стабильность во времени кодовых аппаратурных задержек, как это делается в режиме действительного ВАМО (float PPP). В GPS при использовании модели с разделёнными часами фазовые задержки φ_{01}^G и φ_{04}^G обычно объединяются со смещениями показаний часов и смещениями Мельбурна-Вуббены с образованием новых переменных «фазовые часы» и «смещение Мельбурна-Вуббены», так как длины волн несущих колебаний разных спутников совпадают.

Однако, так как в ГЛОНАСС длины волн зависят от номера спутника, провести такое объединение в ГЛОНАСС невозможно. Исходя из того, что структура уравнений ГЛОНАСС и GPS (2.12) и (2.13) одинакова, а также того, что относительное различие длин волн сигналов ГЛОНАСС невелико ($\lambda_3^j \in (5,252; 5,276)$ см, $\lambda_4^j \in (84,034; 84,419)$ см), возникает стремление использовать известные методы решения задачи целочисленного ВАМО GPS в ГЛОНАСС. Поэтому для того чтобы модели измерений GPS и ГЛОНАСС можно было представить в едином виде, проведём такое преобразование этих моделей, при котором происходит объединение целочисленных неоднозначностей $N_{1,m}^j$, $N_{4,m}^j$ и $N_{1,m}^{G,k}$, $N_{4,m}^{G,k}$ с фазовыми задержками $\varphi_{01,m}$, $\varphi_{04,m}$ и $\varphi_{01,m}^G$, $\varphi_{04,m}^G$ соответственно с образованием новых действительных переменных:

$$\begin{aligned}
P_{3,m}^j &= R_m^j + T_{trop,m}^j + T_{P,m}^j - t_P^j + \varepsilon_{P3,m}^j, \\
L_{3,m}^j &= R_m^j + T_{trop,m}^j + T_{L,m}^j - t_L^j - \Delta n \lambda_3^j \tilde{N}_{1,m}^j - n_2 \lambda_3^j \tilde{N}_{4,m}^j + \varepsilon_{L3,m}^j, \\
A_{4,m}^j &= B_{A4,m}^j - b_{A4}^j - \lambda_4^j \tilde{N}_{4,m}^j + \varepsilon_{A4,m}^j,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

где $T_{P,m} = T_m + \Delta B_{3,m}$, $T_{L,m} = T_m + c\dot{\phi}_{3,m}$, $B_{A4,m} = c\dot{\phi}_{WL,m} - \Delta B_{NL,m}$, $t_P^j = t^j + b_3^j - B_{3,R}^j$, $t_L^j = t^j + \lambda_3^j \psi_3^j$, $b_{A4}^j = \lambda_4^j \psi_4^j - b_{NL}^j + B_{NL,R}^j$ – смещения показаний ионосферосвободных кодовых и фазовых часов и смещения Мельбурна-Вуббены (MW-смещения) НАП и спутников ГЛОНАСС соответственно;

$\tilde{N}_{1,m}^j = N_{1,m}^j - \phi_{01,m}$, $\tilde{N}_{4,m}^j = N_{4,m}^j - \phi_{04,m}$ – новые действительные неоднозначности. При этом следует заметить, что все новые действительные неоднозначности $\tilde{N}_{1,m}^j$ и $\tilde{N}_{4,m}^j$, соответствующие одной станции, получают одинаковое действительное смещение $-\phi_{01,m}$ и $-\phi_{04,m}$ соответственно.

$$\begin{aligned}
P_{3,m}^{G,k} &= R_m^{G,k} + T_{trop,m}^{G,k} + T_{P,m}^G - t_P^{G,k} + \varepsilon_{P3,m}^{G,k}, \\
L_{3,m}^{G,k} &= R_m^{G,k} + T_{trop,m}^{G,k} + T_{L,m}^G - t_L^{G,k} - \Delta n^G \lambda_3^G \tilde{N}_{1,m}^{G,k} - n_2^G \lambda_3^G \tilde{N}_{4,m}^{G,k} + \varepsilon_{L3,m}^{G,k}, \\
A_{4,m}^{G,k} &= B_{4,m}^G - b_4^k - \lambda_4^G \tilde{N}_{4,m}^{G,k} + \varepsilon_{A4,m}^{G,k},
\end{aligned} \tag{2.15}$$

где $T_{P,m}^G = T_m^G + B_{3,m}^G$, $T_{L,m}^G = T_m^G$, $B_{4,m}^G = -B_{NL,m}^G$, $t_P^{G,k} = t^{G,k} + b_3^{G,k}$, $t_L^{G,k} = t^{G,k} + \lambda_3^G \psi_3^{G,k}$, $b_4^k = \lambda_4^G \psi_4^{G,k} - b_{NL}^{G,k}$, – смещения показаний ионосферосвободных кодовых, фазовых часов и смещений Мельбурна-Вуббены спутников GPS и НАП соответственно;

$\tilde{N}_{1,m}^{G,k} = N_{1,m}^{G,k} - \phi_{01,m}^G$, $\tilde{N}_{4,m}^{G,k} = N_{4,m}^{G,k} - \phi_{04,m}^G$ – новые действительные неоднозначности. При этом следует заметить, что все новые действительные неоднозначности $\tilde{N}_{1,m}^{G,k}$ и $\tilde{N}_{4,m}^{G,k}$, соответствующие одной станции, получают одинаковое действительное смещение $-\phi_{01,m}^G$ и $-\phi_{04,m}^G$ соответственно.

Математическое обоснование такого объединения будет приведено в разделе 2.2.2.

Таким образом, после упрощения вид модели измерений (2.14) совместимой НАП ГЛОНАСС совпадает с видом преобразованной модели измерений GPS с разделёнными часами (2.15). Различия состоят только в физическом смысле некоторых переменных – смещений показаний фазовых часов и MW-смещений НАП, так как в уравнениях для ГЛОНАСС в отличие от GPS присутствует слагаемое, связанное с наклоном ФЧХ НАП ГЛОНАСС, а также то, что длины волн различных спутников ГЛОНАСС различаются (зависят от номера спутника j).

По аналогии с определением, введённым в [18] для модели измерений GPS, модель измерений (2.14) будем называть далее моделью P3L3A4-ГЛОНАСС.

2.2 Недоопределённость систем линейных алгебраических уравнений измерений в ГНСС

2.2.1 Применение теории S-преобразования при решении недоопределённых систем линейных уравнений

Рассмотрим в общем матричном виде систему линейных (линеаризованных) уравнений задачи целочисленного ВАМО:

$$\underset{m \times 1}{\mathbf{y}} = \underset{m \times n}{\mathbf{H}} \underset{n \times 1}{\mathbf{x}}, \quad (2.16)$$

где $\underset{m \times 1}{\mathbf{y}}$ – вектор измерений;

$\underset{m \times n}{\mathbf{H}}$ – матрица связи вектора измерений с вектором исходных переменных (информационная матрица, матрица коэффициентов системы линейных уравнений, дизайн-матрица, design matrix);

$$\underset{n \times 1}{\mathbf{x}} = [x_1 \quad \cdots \quad x_n]^T \quad (2.17)$$

– вектор исходных переменных (исходный вектор), состоящий из p действительных переменных и q псевдофазовых неоднозначностей. Всё множество значений вектора $\underset{n \times 1}{\mathbf{x}}$ (2.17) образует линейное векторное пространство исходных переменных \mathcal{X} ; $\underset{n \times n}{\mathcal{X}}$;

m – число измерений;

$n = p + q$ – число исходных переменных или размер вектора $\underset{n \times 1}{\mathbf{x}}$ (2.17).

Системы уравнений в задаче целочисленного ВАМО как по измерениям ГНСС с КРК [18], так и с ЧРК (которые подробно рассмотрены в главе 3) относятся к классу совместных или несовместных недоопределённых систем, то есть имеют бесчисленное множество решений («строгих», обращающих систему уравнений в равенства, или МНК-решений) [18; 104]. В работе [13] такие системы названы «сингулярными». Для недоопределённых систем ранг матрицы $\underset{m \times n}{\mathbf{H}}$

$r = \text{rank}(\underset{m \times n}{\mathbf{H}})$ строго меньше числа её столбцов $r < n$. Тогда имеет место недостаток (дефицит, дефект) ранга (rank defect), который определяется как разность между числом переменных n и рангом r матрицы связи $\underset{m \times n}{\mathbf{H}}$ $d = n - r$.

Для таких систем существует понятие ядра (нуль-пространства, nullspace) матрицы $\mathbf{H}_{m \times n}$ $\mathcal{K} = \text{null}(\mathbf{H})$. Ядро можно задать набором его базисных векторов $\mathbf{K} : \mathcal{K} = \mathbf{R}(\mathbf{K})$ (обозначение латинской буквой «K» выбрано от англ. kernel – ядро). Пространство ядра \mathcal{K} – это такое подпространство пространства исходных переменных ($\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$), что любой вектор, лежащий в этом подпространстве, отображается в нулевой вектор под действием \mathbf{H} [92]:

$$\mathbf{H} \mathbf{K} = \mathbf{0} . \quad (2.18)$$

Таким образом, всё множество решений недоопределённой системы (2.16) смещено параллельно ядру \mathcal{K} . Однако системы уравнений в задаче целочисленного ВАО обладают важным свойством: ядра таких систем уравнений (при достаточном числе видимых КА) ортогональны некоторым осям системы координат, в частности тем, вдоль которых откладываются оцениваемые координаты потребителя [18] (выражения для ядер систем линейных уравнений задачи целочисленного ВАО, из вида которых вытекает указанное свойство, приведены далее в настоящей, а также в следующей главе). Это означает, что не смотря на сингулярность систем уравнений, координаты потребителя могут быть оценены однозначно (далее они называются «однозначно» или «несмещённо» оцениваемыми переменными). Такие системы в работе [13] названы «полусингулярными». Ортогональность определённым осям означает, что строки матрицы \mathbf{K} , соответствующие переменным, откладываемым вдоль этих осей, будут состоять только из нулей. Остальные переменные такой системы будут оцениваться неоднозначно (со смещением), или, иными словами, будут оцениваться некоторые их линейные комбинации (далее они называются «неоднозначно» или «смещённо оцениваемые переменные» [13]). Геометрическая интерпретация множества решений полусингулярной системы уравнений представлена на Рисунке 2.12.

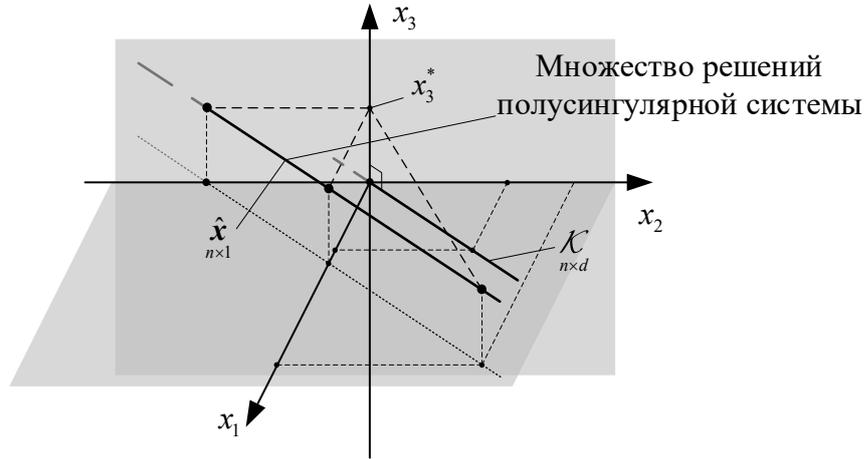


Рисунок 2.12 – Множество решений полусингулярной системы линейных уравнений

На Рисунке 2.12 рассмотрен пример трёхмерного пространства исходных переменных $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3 = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$. Рисунок соответствует случаю $n=3$ и $d=1$ (одномерное ядро – прямая \mathcal{K} ортогональная координатной оси x_3). Множество решений системы уравнений обозначено прямой $\hat{\mathbf{x}}_{n \times 1}$, параллельной ядру $\mathcal{K}_{n \times d}$. Из рисунка видно, что всему множеству решений системы уравнений соответствует одна и та же оценка x_3^* переменной x_3 , следовательно эта переменная в данном примере может быть оценена однозначно (несмещённо). Алгоритм получения соответствующей оценки будет рассмотрен далее.

Решение (оценка однозначно оцениваемых переменных) полусингулярных систем линейных уравнений может быть получено с помощью теории S-преобразования (S-transformation, S-basis) [18; 38; 104], которая оперирует понятиями линейной алгебры и теории линейных векторных пространств. Для этого в пространстве исходных переменных $\mathcal{A}_{n \times n}$ вводится подпространство $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$, размерность которого равна рангу r матрицы $\mathbf{H}_{m \times n}$. Оно задаётся набором своих базисных векторов $\mathbf{S}_{n \times r} : \mathbf{R}(\mathbf{S}_{n \times r}) = \mathcal{S}_{n \times r}$. Однако на практике более удобно задавать S-пространство с помощью матрицы $\mathbf{S}^\perp_{n \times d}$, которая является набором базисных векторов \mathcal{S}^\perp -пространства $\mathcal{S}^\perp = \mathbf{R}(\mathbf{S}^\perp_{n \times d}) \perp \mathcal{S}_{n \times r}$. В таком случае нормальное уравнение S-пространства записывается в виде:

$$\mathbf{0}_{d \times 1} = (\mathbf{S}^\perp_{d \times n})^T \mathbf{x}_{n \times 1}. \quad (2.19)$$

Все точки пространства исходных переменных \mathcal{X} проецируются вдоль ядра \mathcal{K} на S-пространство \mathcal{S} . В результате такой проекции образуется новый вектор оцениваемых переменных \mathbf{x}_S . С вектором исходных переменных он связан матрицей проекции \mathbf{P}_S из пространства исходных переменных \mathcal{X} на S-пространство \mathcal{S} :

$$\mathbf{x}_S = \mathbf{P}_S \mathbf{x}. \quad (2.20)$$

Матрица проекции вдоль ядра \mathcal{K} на S-пространство определяется выражением [104]:

$$\mathbf{P}_S = \mathbf{E} - \mathbf{K} \left((\mathbf{S}^\perp)^T \mathbf{K} \right)^{-1} (\mathbf{S}^\perp)^T. \quad (2.21)$$

В случае, если ядро \mathcal{K} ортогонально некоторым осям системы координат (в матрице \mathbf{K} присутствуют нулевые строки), можно показать, что в результате проекции (2.20) такие переменные не изменятся, а остальные переменные оцениваемого вектора \mathbf{x}_S будут соответствовать линейным комбинациям исходного вектора \mathbf{x} (Приложение А). Эти линейные комбинации определяются выбором S-пространства, в то время как однозначно оцениваемые переменные никак не меняются при проектировании вдоль ядра на S-пространство.

Для нахождения оценки $\hat{\mathbf{x}}_S$ вектора \mathbf{x}_S (S-решения) исходную недоопределённую систему (2.16) необходимо дополнить уравнениями S-пространства (2.19) и перейти к определённой, совместной или несовместной расширенной системе уравнений:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ (\mathbf{S}^\perp)^T \end{bmatrix} \mathbf{x}. \quad (2.22)$$

Решение расширенной системы (2.22) $\hat{\mathbf{x}}_S$ и его ковариационную матрицу \mathbf{R}_{x_S} можно вычислить по формуле обобщённого (взвешенного) МНК («weighted least squares») [92]:

$$\hat{\mathbf{x}}_S = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_S^T & \mathbf{B}_S & \mathbf{H}_S \\ n \times (m+d) & (m+d) \times (m+d) & (m+d) \times n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{H}_S^T & \mathbf{B}_S \\ n \times (m+d) & (m+d) \times (m+d) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ m \times 1 \\ \mathbf{0} \\ d \times 1 \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{R}_{xS} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_S^T & \mathbf{B}_S & \mathbf{H}_S \\ n \times (m+d) & (m+d) \times (m+d) & (m+d) \times n \end{pmatrix}^{-1},$$

где \mathbf{B}_S $_{(m+d) \times (m+d)}$ – весовая матрица расширенного вектора измерений $\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ m \times 1 \\ \mathbf{0} \\ d \times 1 \end{bmatrix}$;

\mathbf{H}_S $_{(m+d) \times n} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ m \times n \\ (\mathbf{S}^\perp)^T \\ d \times n \end{bmatrix}$ – расширенная матрица коэффициентов системы уравнений.

Весовую матрицу \mathbf{B}_S $_{(m+d) \times (m+d)}$ можно получить, обратив ковариационную матрицу шумов расширенного вектора измерений. Однако если ковариационная матрица шумов \mathbf{R}_y $_{m \times m}$ исходного вектора измерений \mathbf{y} $_{m \times 1}$ известна или её можно каким-то образом задать, так как на практике это реальные (физические) измерения, то уравнения S-пространства (2.19) не соответствуют никаким физическим измерениям, не включают шума (случайных величин), поэтому ковариационная матрица этих «псевдоизмерений» – нулевая, то есть ковариационная матрица шумов расширенного вектора измерений вырождена (уравнения S-пространства (2.19) имеют «бесконечно большой вес» по сравнению с реальными физическими измерениями \mathbf{y} $_{m \times 1}$). На практике [18; 38] эта проблема решается заданием S-пространства определённого вида, который будет описан далее.

Выбор S-пространства, то есть матрицы \mathbf{S}^\perp $_{n \times d}$, должен удовлетворять двум ограничениям:

1) S-пространство следует задавать таким образом, чтобы оно дополняло до полного пространства исходных переменных пространство ядра \mathcal{K} $_{n \times d}$ матрицы связи \mathbf{H} $_{m \times n}$ (было ему комплементарно) $\mathcal{S} \oplus \mathcal{K} = \mathcal{A}$ $_{n \times n}$ (иначе матрица \mathbf{H}_S $_{(m+d) \times n}$ расширенной системы (2.22) не будет обладать полным рангом).

2) Оцениваемые комбинации псевдофазовых неоднозначностей, получающиеся в результате проекции (2.20), должны быть целочисленны, так как это позволит использовать алгоритмы разрешения их целочисленной неоднозначности для сокращения времени сходимости решения в задаче целочисленного ВАМО.

Для ГНСС с кодовым разделением из литературы [13-16; 18; 36; 38] известен наиболее простой вид матрицы базисных векторов $\mathbf{S}_{n \times d}^\perp$, определяющих конкретный вид нормального уравнения S-пространства (2.19), удовлетворяющего двум вышеописанным ограничениям:

$$\mathbf{S}_{n \times d}^\perp = \left[\mathbf{1}_{n \times 1}^{r_1} \quad \cdots \quad \mathbf{1}_{n \times 1}^{r_d} \right], \quad r_1 \neq r_2 \neq \cdots \neq r_d, \quad (2.24)$$

где r_1, r_2, \dots, r_d – отличающиеся друг от друга целые числа, соответствующие различным ненулевым элементам столбцов матрицы базисных векторов ядра $\mathbf{K}_{n \times d}$. Положения единиц в столбцах матрицы $\mathbf{S}_{n \times d}^\perp$ определяют переменные, которые будут «смещающими» (или «опорными») при S-преобразовании (не будут оцениваться непосредственно, но будут смещать остальные смещённо оцениваемые переменные в линейных комбинациях). В англоязычной литературе, например, [29; 36; 104], множество таких переменных называется «datum». Для того, чтобы оцениваемые комбинации неоднозначностей были целочисленными, при осуществлении S-преобразования необходимо, чтобы смещающими были псевдофазовые неоднозначности («integer datum» [36]), количество которых обозначено символом q . То есть для ГНСС с кодовым разделением существует ограниченное счётное множество S-пространств вида (2.24), и любая матрица из этого множества удовлетворяет указанным ограничениям при рассмотрении ГНСС с кодовым разделением. Уравнения S-пространства (2.19) в таком случае принимают вид

$$\begin{cases} 0 = x_{r_1}, \\ \vdots \\ 0 = x_{r_d}, \end{cases} \quad (2.25)$$

где переменные x_{r_1}, \dots, x_{r_d} соответствуют положениям единиц в столбцах матрицы $\mathbf{S}_{n \times d}^\perp$ (2.24).

Это позволяет исключить эти переменные из расширенной системы уравнений (2.22), так как их значение в данном случае должно быть строго равно нулю. В таком случае можно перейти от расширенной матрицы $\mathbf{H}_S_{(m+d) \times n}$ к сжатой (редуцированной, reduced) матрице $\mathbf{H}_{red}_{m \times r}$ и соответствующей сжатой системе уравнений:

$$\mathbf{y}_{m \times 1} = \mathbf{H}_{red}_{m \times r} \mathbf{x}_{S.red}_{r \times 1}, \quad (2.26)$$

где $\mathbf{H}_{red}^{m \times r}$ – матрица полученная путём вычёркивания из матрицы $\mathbf{H}^{m \times n}$ столбцов, соответствующих переменным x_{r_1}, \dots, x_{r_d} , имеющая полный ранг $\text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{red} \\ m \times r \end{pmatrix} = r$ (ранг равен числу оцениваемых переменных);

$\mathbf{x}_{S,red}^{r \times 1}$ – сжатый вектор оцениваемых переменных, полученный из вектора $\mathbf{x}_S^{n \times 1}$ (2.20) путём

вычёркивания переменных x_{r_1}, \dots, x_{r_d} , которые равны нулю согласно (2.25).

Такой подход позволяет избежать проблемы с заданием весов уравнениям S-пространства (2.19). Оценку $\hat{\mathbf{x}}_{S,red}^{r \times 1}$ вектора $\mathbf{x}_{S,red}^{r \times 1}$ и его ковариационную матрицу $\mathbf{R}_{xS,red}^{r \times r}$ можно также получить обобщённым МНК [92]:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{S,red}^{r \times 1} &= \left(\begin{matrix} \mathbf{H}_{red}^T & \mathbf{B}_y & \mathbf{H}_{red} \\ r \times m & m \times m & m \times r \end{matrix} \right)^{-1} \begin{matrix} \mathbf{H}_{red}^T & \mathbf{B}_y & \mathbf{y} \\ r \times m & m \times m & m \times 1 \end{matrix}, \\ \mathbf{R}_{xS,red}^{r \times r} &= \left(\begin{matrix} \mathbf{H}_{red}^T & \mathbf{B}_y & \mathbf{H}_{red} \\ r \times m & m \times m & m \times r \end{matrix} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

где $\mathbf{B}_y = \mathbf{R}_y^{-1}$ – матрица весов вектора измерений $\mathbf{y}^{m \times 1}$.

2.2.2 Описание решения пользовательской задачи целочисленного высокоточного абсолютного местоопределения по измерениям GPS

Рассмотрим решение с использованием теории S-преобразования пользовательской задачи GPS – задачи оценки координат НАП с помощью математической модели измерений (2.15) в которой действительные фазовые задержки $-\varphi_{01,m}^G$ и $-\varphi_{04,m}^G$ объединены с целочисленными параметрами псевдофазовой неоднозначности $N_{1,m}^{G,k}$, $N_{4,m}^{G,k}$. Смещения показаний спутниковых часов $t_P^{G,k}$, $t_L^{G,k}$, b_4^k полагаются известными. При наличии в зоне видимости НАП $K \geq 5$ спутников GPS можно составить следующую систему из $3K$ уравнений (обозначение номера станции m опущено, так как рассматривается единственный приёмник):

$$\begin{aligned} P_3^{G,k} + t_P^{G,k} &= R^{G,k} + T_{trop}^{G,k} + T_P^G + \varepsilon_{P_3}^{G,k}, \\ L_3^{G,k} + t_L^{G,k} &= R^{G,k} + T_{trop}^{G,k} + T_L^G - \Delta n^G \lambda_3^G \tilde{N}_1^{G,k} - n_2^G \lambda_3^G \tilde{N}_4^{G,k} + \varepsilon_{L_3}^{G,k}, \quad k = \overline{1, K}. \\ A_4^{G,k} + b_4^k &= B_4^G - \lambda_4^G \tilde{N}_4^{G,k} + \varepsilon_{A_4}^{G,k}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

В систему уравнений (2.28) непосредственно не входят координаты потребителя $[x \ y \ z]^T$, оценка которых является целью решения пользовательской задачи. Они входят в нелинейную зависимость дальности до k -го спутника $R^{G,k}(x, y, z) = \sqrt{(x - x^{G,k})^2 + (y - y^{G,k})^2 + (z - z^{G,k})^2}$ (где $x^{G,k}$, $y^{G,k}$, $z^{G,k}$ – координаты k -го спутника GPS, которые полагаются известными). Если имеется грубая (coarse) оценка местоположения НАП $[x_c \ y_c \ z_c]^T$ (из заголовка RINEX-файла «APPROX POSITION XYZ» [88] или из результата обработки псевдодальностей с использованием широковещательной ЭВИ), нелинейное выражение $R^{G,k}(x, y, z)$ можно линеаризовать, раскладывая в ряд Тейлора относительно точки $[x_c \ y_c \ z_c]^T$ и ограничиваясь членами ряда в степени не выше первой. Тогда приближённое линеаризованное выражение для дальности до спутника принимает вид

$$R^{G,k}(x, y, z) \approx R_c^{G,k} + h_x^{G,k} \Delta x + h_y^{G,k} \Delta y + h_z^{G,k} \Delta z, \quad (2.29)$$

где $R_c^{G,k} = R^{G,k}(x_c, y_c, z_c)$ – грубая дальность до k -го спутника GPS;

$\Delta x = x - x_c$, $\Delta y = y - y_c$, $\Delta z = z - z_c$ – поправки к грубым координатам НАП $[x_c \ y_c \ z_c]^T$;

$h_x^{G,k} = \frac{x_c - x^{G,k}}{R_c^{G,k}}$, $h_y^{G,k} = \frac{y_c - y^{G,k}}{R_c^{G,k}}$, $h_z^{G,k} = \frac{z_c - z^{G,k}}{R_c^{G,k}}$ – направляющие косинусы единичного вектора, ориентированного из точки фазового центра антенны k -го спутника GPS в точку грубого местоположения НАП $[x_c \ y_c \ z_c]^T$.

В связи с очень большой величиной расстояния до спутника в сравнении с ошибками координат потребителя $[x_c \ y_c \ z_c]^T$ приближённое выражение (2.29) справедливо с достаточной для практики точностью.

При наличии измерений по K спутникам GPS и известных смещений показаний спутниковых часов t_p^j , t_L^j и MW-смещений спутников b_4^j можно составить линеаризованную систему из $3K$ уравнений:

$$\begin{aligned} dP_3^{G,k} &= h_x^{G,k} \Delta x + h_y^{G,k} \Delta y + h_z^{G,k} \Delta z + w^{G,k} \Delta D + T_P^G + \varepsilon_{P_3}^{G,k}, \\ dL_3^{G,k} &= h_x^{G,k} \Delta x + h_y^{G,k} \Delta y + h_z^{G,k} \Delta z + w^{G,k} \Delta D + T_L^G - \Delta n^G \lambda_3^G \tilde{N}_1^{G,k} - n_2^G \lambda_3^G \tilde{N}_4^{G,k} + \varepsilon_{L_3}^{G,k}, \\ dA_4^{G,k} &= B_4^G - \lambda_4^G \tilde{N}_4^{G,k} + \varepsilon_{A_4}^{G,k}, \end{aligned} \quad k = \overline{1, K}, \quad (2.30)$$

где $dP_3^{G,k} = P_3^{G,k} - R_c^{G,k} + t_P^{G,k} - T_{trop,model}^{G,k}$, $dL_3^{G,k} = L_3^{G,k} - R_c^{G,k} + t_L^{G,k} - T_{trop,model}^{G,k}$, $dA_4^{G,k} = A_4^{G,k} + b_{A4}^{G,k}$ – невязки измерений псевдодалностей, псевдофаз и MW-комбинаций, в которые входит также величина тропосферной задержки $T_{trop,model}^j$, рассчитанная по модели;

ΔD – часть вертикальной тропосферной задержки, не скомпенсированная с помощью модели;

$w^{G,k}$ – функция отображения вертикальной тропосферной задержки в наклонную.

Систему (2.30) можно записать в компактном матричном виде:

$$\mathbf{Y}^G = \mathbf{H}^G \mathbf{x}^G + \boldsymbol{\varepsilon}^G, \quad (2.31)$$

где $\mathbf{Y}^G = [dP_3^{G,1} \ \dots \ dP_3^{G,K} \ dL_3^{G,1} \ \dots \ dL_3^{G,K} \ dA_4^{G,1} \ \dots \ dA_4^{G,K}]^T$ – вектор невязок измерений;

$$\mathbf{x}^G = [\Delta x \ \Delta y \ \Delta z \ \Delta D \ T_P^G \ T_L^G \ B_{A4}^G \ \tilde{N}_1^{G,1} \ \dots \ \tilde{N}_1^{G,K} \ \tilde{N}_4^{G,1} \ \dots \ \tilde{N}_4^{G,K}]^T \quad (2.32)$$

– вектор исходных переменных пользовательской задачи, все возможные значения которого образуют пространство исходных переменных пользовательской задачи $\mathcal{X}^G = \mathbb{R}^{nxG}$;

$nxG = 7 + 2K$ – количество исходных переменных пользовательской задачи;

$$\mathbf{H}^G = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^G_{K \times 4} & \mathbf{1}_{K \times 1} & \mathbf{0}_{K \times 1} & \mathbf{0}_{K \times 1} & \mathbf{0}_{K \times K} & \mathbf{0}_{K \times K} \\ \mathbf{A}^G_{K \times 4} & \mathbf{0}_{K \times 1} & \mathbf{1}_{K \times 1} & \mathbf{0}_{K \times 1} & -\Delta n^G \lambda_3^G \mathbf{E}_{K \times K} & -n_2^G \lambda_3^G \mathbf{E}_{K \times K} \\ \mathbf{0}_{K \times 4} & \mathbf{0}_{K \times 1} & \mathbf{0}_{K \times 1} & \mathbf{1}_{K \times 1} & \mathbf{0}_{K \times K} & -(n_1^G + n_2^G) \lambda_3^G \mathbf{E}_{K \times K} \end{bmatrix} \text{ – матрица связи вектора невязок}$$

зок \mathbf{Y} с вектором исходных переменных \mathbf{x} (2.32);

$$\mathbf{A}^G = \begin{bmatrix} h_x^{G,1} & h_y^{G,1} & h_z^{G,1} & w^{G,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_x^{G,K} & h_y^{G,K} & h_z^{G,K} & w^{G,K} \end{bmatrix} \text{ – матрица направляющих косинусов и значений функции}$$

отображения вертикальной составляющей тропосферной задержки;

$$\boldsymbol{\varepsilon}^G = [\boldsymbol{\varepsilon}_{P3}^{G,1} \ \dots \ \boldsymbol{\varepsilon}_{P3}^{G,K} \ \boldsymbol{\varepsilon}_{L3}^{G,1} \ \dots \ \boldsymbol{\varepsilon}_{L3}^{G,K} \ \boldsymbol{\varepsilon}_{A4}^{G,1} \ \dots \ \boldsymbol{\varepsilon}_{A4}^{G,K}]^T \text{ – вектор случайных ошибок измерений}$$

с ковариационной матрицей \mathbf{R}_Y^G .

$3K \times 3K$

Система уравнений (2.31) – сингулярна (полусингулярна). Для её матрицы коэффициентов – матрицы $\mathbf{H}^G_{3K \times nxG}$ – найдено аналитическое выражение матрицы базисных векторов её ядра $\mathbf{K}^G_{nxG \times 2}$ для случая, когда число видимых спутников $K \geq 5$:

$$\mathbf{K}^G_{nxG \times 2} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{5 \times 1} & \mathbf{0}_{5 \times 1} \\ \Delta n^G \lambda_3 & n_2^G \lambda_3 \\ 0 & (n_1^G + n_2^G) \lambda_3 \\ \mathbf{1}_{K \times 1} & \mathbf{0}_{K \times 1} \\ \mathbf{0}_{K \times 1} & \mathbf{1}_{K \times 1} \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Из того, что первые 5 строк матрица $\mathbf{K}^G_{nxG \times 2}$ (2.33) равны нулю следует, что ядро ортогонально тем осям системы координат, вдоль которых откладываются первые 5 элементов вектора исходных переменных, среди которых поправки к грубым координатам НАП. Таким образом, эти первые 5 переменных, в том числе координаты НАП, могут быть оценены однозначно.

Выражение (2.33) совпадает с выражением для ядра системы уравнений пользовательской задачи GPS, когда в математической модели измерений начальные фазы ϕ_{01}^G , ϕ_{04}^G объединяются не с целочисленными параметрами псевдофазовой неоднозначности, а со смещениями показаний спутниковых часов и MW-смещениями T_L^G и B_4^G [15].

Известным способом задания S-пространства в пользовательской задаче GPS является задание матрицы $\mathbf{S}^\perp_{n \times d}$ в виде [13-16; 18; 36; 38]:

$$\mathbf{S}^{G\perp}_{nxG \times 2} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{7+rG} & \mathbf{1}_{7+K+rG} \\ \mathbf{1}_{nxG \times 1} & \mathbf{1}_{nxG \times 1} \end{bmatrix}, \quad (2.34)$$

где rG – номер одного из спутников GPS, называемого «опорным».

Таким образом, матрица $\mathbf{S}^{G\perp}_{nxG \times 2}$ (2.34) состоит из двух векторов, каждый из которых имеет единицу на месте, соответствующем неоднозначности $\tilde{N}_1^{G,rG}$ и $\tilde{N}_4^{G,rG}$ в векторе исходных переменных $\mathbf{x}_{nxG \times 1}$ (2.32) и нули – на остальных местах.

Далее по формулам (2.20), (2.21) нетрудно вычислить матрицу проекции и вектор оцениваемых переменных для найденной матрицы ядра $\mathbf{K}^G_{nxG \times 2}$ (2.33) и $\mathbf{S}^{G\perp}_{nxG \times 2}$ (2.34) (для примера $rG = 3$):

математической модели не с целочисленными неоднозначностями, а со смещениями показаний фазовых часов и MW-смещениями [13].

2.3 Выводы по главе 2

Описаны две особенности систем уравнений задачи целочисленного ВАМО по измерениям ГЛОНАСС – различие кодовых аппаратурных задержек приёмника в математических моделях измерений разных спутников (межлитерные задержки) и недоопределённость систем линейных уравнений.

Для преодоления проблемы различия кодовых аппаратурных задержек в НАП ГЛОНАСС предложено использовать одинаковую НАП (приёмники одной модели от одного производителя, подключенные к одинаковым антеннам с одинаковыми РПО). Рассмотрена сеть таких однородных приёмников, распределённых по территории России.

Для проверки истинности гипотезы о совпадении с точностью до константы у рассматриваемых приёмников кодовых аппаратурных задержек используется методика, основанная на двух алгоритмах: алгоритм сравнения дробных частей их NL-комбинаций и алгоритм сравнения кодовых аппаратурных задержек на исходных частотах для близко расположенных приёмников. В результате делается вывод о совпадении (с точностью до константы) кодовых аппаратурных задержек в рассматриваемой НАП ГЛОНАСС (такая НАП называется в работе совместимой). Этот факт позволяет упростить математические модели измерений.

Недоопределённые системы линейных уравнений в задаче целочисленного ВАМО хотя и имеют бесчисленное множество решений, позволяют однозначно оценить координаты потребителя с помощью теории S-преобразования. Эта теория позволяет переходить к системе уравнений полного ранга с помощью проекции пространства исходных переменных вдоль ядра недоопределённой системы на специально заданное подпространство пространства исходных переменных системы уравнений, обозначаемое как S-пространство.

Для приведения математических моделей измерений ГЛОНАСС и GPS к единому виду действительные фазовые аппаратурные задержки объединяются с целочисленными параметрами псевдофазовой неоднозначности. Продемонстрировано, что такое объединение не влияет на результат решения пользовательской задачи целочисленного ВАМО по измерениям GPS. Единственным различием моделей поле такого объединения остаётся различие величин длин волн для различных спутников ГЛОНАСС. Так как относительное различие длин волн для разных спутников ГЛОНАСС невелико и модели измерений GPS и ГЛОНАСС практически совпадают, возникает стремление использовать известные для GPS методы при решении задачи целочисленного ВАМО по ГЛОНАСС. Остается только рассмотреть те особенности, которые порождаются

слабым различием длин волн несущих колебаний в ГЛОНАСС. Это различие учитывается путем проектирования всех точек пространства исходных переменных вдоль ядра ГЛОНАСС, но на S пространство, используемое в GPS. Задача целочисленного ВАМО по ГЛОНАСС рассмотрена в следующей главе.

3 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА И МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ВЫСОКОТОЧНОГО АБСОЛЮТНОГО МЕСТООПРЕДЕЛЕНИЯ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ СИГНАЛОВ ГЛОНАСС

Рассматриваемая задача целочисленного ВАМО состоит из двух частей – «пользовательской» [13] и «сетевой» [14] задач. **Пользовательской** (user solution) называется задача определения высокоточных абсолютных координат потребителя с использованием двухчастотных кодовых и фазовых измерений и ВКП – корректирующей информации о величине смещений показаний спутниковых часов и аппаратурных спутниковых задержках (решение пользовательской задачи рассмотрено в разделе 3.1). **Сетевой** (network solution) называется задача определения этих ВКП при помощи обработки измерений сети наземных станций с известными координатами (решение сетевой задачи рассмотрено в разделе 3.2). В решении пользовательской задачи использовались ВКП, оценённые в сетевой задаче. При этом в настоящей работе как в сетевой, так и в пользовательской задачах спутниковые орбиты полагаются известными (хотя, с использованием псевдофазовых измерений возможно оценить и спутниковые орбиты, этой теме посвящена, например, работа [9]). Для спутников GPS были использованы быстрые (rapid) орбиты от аналитического центра IGS [54], а для спутников ГЛОНАСС – быстрые (rapid) орбиты от ИАЦ КВНО АО «ЦНИИмаш» [19] в формате «.SP3» (standard product 3) [48].

В данной главе рассматривается совместимая НАП – приёмники одной модели от одного производителя, подключенные к одинаковым антеннам, использующим одинаковые защитные РПО. Оценка совместимости рассматриваемой НАП была проведена в главе 2. При этом для решения сетевой и пользовательской задач была использована различная НАП (но из одного множества совместимой НАП). Расположение используемой НАП показано на Рисунке 3.1.

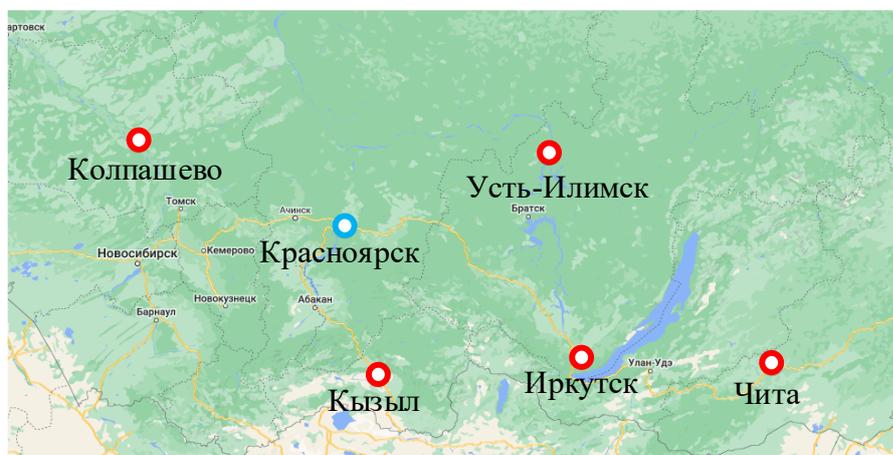


Рисунок 3.1 – Расположение станций. Красный цвет – станции, использованные для решения сетевой задачи. Синий цвет – станция, использованная для решения пользовательской задачи

Красным цветом на Рисунке 3.1 выделены станции, измерения которых использовались для решения сетевой задачи (оценки ВКП). Для решения пользовательской задачи выбран приёмник, расположенный в г. Красноярск (обозначен синим цветом) и удалённый от всех сетевых станций на сотни километров.

3.1 Применение теории S-преобразования к решению пользовательской задачи целочисленного высокоточного абсолютного местоопределения с использованием ГЛОНАСС

3.1.1 Математическая постановка и решение пользовательской задачи

Запишем модель измерений P3L3A4-ГЛОНАСС (2.14) НАП, совместимой с аппаратурой станций сети, которая используется для оценки смещений показаний спутниковых часов в сетевой задаче (которая будет рассмотрена в разделе 3.2):

$$\begin{aligned} P_3^j &= R^j + T_{trop}^j + T_P - t_P^j + \varepsilon_{P3}^j, \\ L_3^j &= R^j + T_{trop}^j + T_L - t_L^j - \Delta n \lambda_3^j \tilde{N}_1^j - n_2 \lambda_3^j \tilde{N}_4^j + \varepsilon_{L3}^j, \\ A_4^j &= B_{A4} - b_{A4}^j - \lambda_4^j \tilde{N}_4^j + \varepsilon_{A4}^j. \end{aligned} \quad (3.1)$$

При наличии измерений по J спутникам и известных из решения сетевой задачи смещений показаний спутниковых часов t_P^j , t_L^j и MW-смещения спутников b_4^j можно аналогично разделу 2.2.2 составить систему из $3J$ линеаризованных уравнений:

$$\begin{aligned} dP_3^j &= h_x^j \Delta x + h_y^j \Delta y + h_z^j \Delta z + w^j \Delta D + T_P + \varepsilon_{P3}^j, \\ dL_3^j &= h_x^j \Delta x + h_y^j \Delta y + h_z^j \Delta z + w^j \Delta D + T_L - \Delta n \lambda_3^j \tilde{N}_1^j - n_2 \lambda_3^j \tilde{N}_4^j + \varepsilon_{L3}^j, \quad j = \overline{1, J}, \\ dA_4^j &= B_{A4} - \lambda_4^j \tilde{N}_4^j + \varepsilon_{A4}^j, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $dP_3^j = P_3^j - R_c + t_P^j - T_{trop,model}^j$, $dL_3^j = L_3^j - R_c + t_L^j - T_{trop,model}^j$, $dA_4^j = A_4^j + b_{A4}^j$ – невязки измерений псевдодальностей, псевдофаз и MW-комбинаций, в которые входит также величина тропосферной задержки $T_{trop,model}^j$, рассчитанная по модели. Остальные обозначения соответствуют разделу 2.2.2.

Также при обработке рекомендуется учитывать дисперсии ВКП t_P^j , t_L^j и b_4^j (если они известны из решения сетевой задачи) в дисперсиях невязок измерений.

Следует заметить, что система уравнений (3.2) такова, что добавление в невязки кодовых измерений dP_3^j одинакового произвольного смещения δT_P не влияет на оценки поправок к грубым координатам НАП Δx , Δy и Δz и тропосферной задержки ΔD . При добавлении это

смещение, так как оно является одинаковым для всех спутников (не зависит от j), влияет только на оценку смещения кодовых часов приёмника. То же относится и к невязкам псевдофазовых и MW-комбинаций измерений dL_3^j и dA_4^j и смещениям показаний часов T_L и B_{A4} соответственно. Кроме того, так как псевдофазовые и MW-комбинации измерений неоднозначны, то к их невязкам можно также добавлять различные для каждого j -го спутника (с соответствующими длинами волн $\Delta n\lambda_3^j$, $n_2\lambda_3^j$ и $\lambda_4^j = (n_1 + n_2)\lambda_3^j$) смещения $\delta\tilde{N}_1^j$ и $\delta\tilde{N}_4^j$ (целочисленные, но имеющие одинаковое действительное смещение, подобно неоднозначностям \tilde{N}_1^j и \tilde{N}_4^j) соответственно. Продемонстрируем это:

$$\begin{aligned}
 dP_3^{j'} &= h_x^j \Delta x + h_y^j \Delta y + h_z^j \Delta z + w^j \Delta D & + (T_p + \delta T_p) & + \varepsilon_{P3}^j, \\
 dL_3^{j'} &= h_x^j \Delta x + h_y^j \Delta y + h_z^j \Delta z + w^j \Delta D & + (T_L + \delta T_L) & - \Delta n \lambda_3^j (\tilde{N}_1^j - \delta\tilde{N}_1^j) - \\
 & & & - n_2 \lambda_3^j (\tilde{N}_4^j - \delta\tilde{N}_4^j) & + \varepsilon_{L3}^j, \\
 dA_4^{j'} &= & (B_{A4} + \delta B_{A4}) & - \lambda_4^j (\tilde{N}_4^j - \delta\tilde{N}_4^j) & + \varepsilon_{A4}^j,
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

где $dP_3^{j'} = dP_3^j + \delta T_p$, $dL_3^{j'} = dL_3^j + \delta T_L + \Delta n \lambda_3^j \cdot \delta\tilde{N}_1^j + n_2 \lambda_3^j \cdot \delta\tilde{N}_4^j$, $dA_4^{j'} = dA_4^j + \delta B_{A4} + \lambda_4^j \cdot \delta\tilde{N}_4^j$.

При этом важно, чтобы в псевдофазовые и MW-комбинации измерений j -го спутника были добавлены одинаковые числа $\delta\tilde{N}_4^j$, так как изначально в математические модели псевдофазовых и MW-комбинаций измерений входит одинаковая величина неоднозначности \tilde{N}_4^j и нарушать это условие нельзя (так как, основной смысл добавления к ифр-комбинациям псевдофазовых и кодовых измерений MW-комбинации измерений состоит в том, чтобы оценивать с их помощью комбинацию \tilde{N}_4^j псевдофазовых неоднозначностей на большей длине волны $\lambda_4^j = (n_1 + n_2)\lambda_3^j$).

Из сделанных замечаний вытекает следующий вывод: ВКП, вычисляемые в сетевой задаче, то есть оценки смещений показаний спутниковых часов t_p^j , t_L^j и MW-смещений b_4^j , могут быть смещены на величины δT_p , δT_L и δB_{A4} соответственно. Как будет видно при рассмотрении решения сетевой задачи в разделе 3.2 эти смещения равны смещению показаний соответствующих часов и MW-комбинации одной из станций сети (опорной станции), по измерениям которой вычисляются ВКП. Кроме того, допускается наличие в оценках смещений показаний спутниковых часов t_L^j и b_4^j описанных смещений $\delta\tilde{N}_1^j$ и $\delta\tilde{N}_4^j$.

Систему уравнений (3.2) (аналогично (2.31)) будем называть системой линеаризованных уравнений пользовательской задачи целочисленного ВАМО. Её можно записать в матричном виде:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H} \mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.4)$$

где $\mathbf{Y} = [dP_3^1 \ \dots \ dP_3^J \ dL_3^1 \ \dots \ dL_3^J \ dA_4^1 \ \dots \ dA_4^J]^T$ – вектор невязок измерений;

$$\mathbf{x} = [\Delta x \ \Delta y \ \Delta z \ \Delta D \ T_p \ T_L \ B_{A4} \ \tilde{N}_1^1 \ \dots \ \tilde{N}_1^J \ \tilde{N}_4^1 \ \dots \ \tilde{N}_4^J]^T \quad (3.5)$$

– вектор исходных переменных пользовательской задачи, все возможные значения которого образуют исходное пространство пользовательской задачи $\mathcal{A} = \mathbb{R}^{nx}$;

$nx = 7 + 2J$ – количество исходных переменных пользовательской задачи;

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\Delta n \boldsymbol{\Lambda} & -n_2 \boldsymbol{\Lambda} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -(n_1 + n_2) \boldsymbol{\Lambda} \end{bmatrix} \text{ – матрица связи вектора невязок } \mathbf{Y} \text{ с век-}$$

тором исходных переменных \mathbf{x} (3.5);

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} h_x^1 & h_y^1 & h_z^1 & w^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_x^J & h_y^J & h_z^J & w^J \end{bmatrix} \text{ – матрица направляющих косинусов и значений функции отобра-$$

жения вертикальной составляющей тропосферной задержки;

$\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_3^1, \dots, \lambda_3^J)$ – диагональная матрица, у которой на главной диагонали стоят эле-

менты, равные длинам волн $\lambda_3^1, \dots, \lambda_3^J$ ифр-комбинаций псевдофазовых неоднозначностей;

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{P3}^1 \ \dots \ \varepsilon_{P3}^J \ \varepsilon_{L3}^1 \ \dots \ \varepsilon_{L3}^J \ \varepsilon_{A4}^1 \ \dots \ \varepsilon_{A4}^J]^T \text{ – вектор случайных ошибок измерений}$$

с ковариационной матрицей \mathbf{R}_Y . Учёт ковариационной матрицы измерений \mathbf{R}_Y играет суще-

ственную роль при обработке измерений, особенно в алгоритмах целочисленного разрешения неоднозначностей, ею нельзя пренебрегать. Алгоритм её вычисления описан в статье [13]. В ней желательно учитывать дисперсии применяемых ВКП.

Система уравнений пользовательской задачи (3.4) – сингулярна. Для её матрицы коэффициентов – матрицы \mathbf{H} – в работе [4] было найдено аналитическое выражение матрицы базисных векторов её ядра \mathbf{K} для случая, когда число видимых спутников $J \geq 5$:

$$\mathbf{K}_{n \times 2} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{5 \times 1} & \mathbf{0}_{5 \times 1} \\ \Delta n \cdot \Delta \lambda_3 & n_2 \cdot \Delta \lambda_3 \\ 0 & (n_1 + n_2) \cdot \Delta \lambda_3 \\ \mathbf{g}_{J \times 1} & \mathbf{0}_{J \times 1} \\ \mathbf{0}_{J \times 1} & \mathbf{g}_{J \times 1} \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

где $\Delta \lambda_3 = \frac{c}{\Delta f_1} \frac{n_1}{n_1^2 - n_2^2} \approx 150$ м, $\mathbf{g}_{J \times 1} = [g^1 \ \dots \ g^J]^T = [2848 + lit^1 \ \dots \ 2848 + lit^J]^T$. Для пояснения смысла чисел $g^j = 2848 + lit^j$ см. (1.19).

Так как базис ядра состоит из двух векторов, недостаток ранга матрицы $\mathbf{H}_{3J \times n}$ равен 2 и не зависит от числа видимых спутников (при $J \geq 5$). Как видно, первые пять элементов базисных векторов ядра $\mathbf{K}_{n \times 2}$ (3.6) равны нулю. Следовательно ядро $R(\mathbf{K}_{n \times 2})$ ортогонально первым пяти осям системы координат, вдоль которых откладываются первые пять элементов Δx , Δy и Δz , оцениваемая часть вертикальной тропосферной задержки ΔD и смещение показаний кодовых часов приёмника T_p вектора $\mathbf{x}_{n \times 1}$ (3.5) исходных переменных, и эти переменные могут быть оценены однозначно. Остальные элементы исходного вектора будут оцениваться со смещением.

В случае, если число видимых спутников $J < 5$, недостаток ранга системы (3.4) увеличивается и её ядро перестаёт быть ортогонально каким-либо осям системы координат исходного пространства $\mathcal{X}_{n \times n}$, вдоль которых откладываются исходные переменные $\mathbf{x}_{n \times 1}$ (3.5), то есть никакие переменные, в том числе поправки к координатам НАП Δx , Δy и Δz , не могут быть оценены однозначно. Точно такая же ситуация наблюдалась при решении пользовательской задачи GPS [18]. Поэтому минимальное для решения пользовательской задачи целочисленного ВАМО число спутников, сигналы которых должна принимать НАП, $J_{\min} = 5$. При $J = J_{\min}$ система (3.4) относится к классу совместных недоопределённых, а при $J > J_{\min}$ – несовместных недоопределённых.

Сингулярная система (3.4) практически совпадает с системой (2.31) пользовательской задачи целочисленного ВАМО по измерениям GPS. Единственным отличием является то, что в ГЛОНАСС длины волн различаются для различных спутников (и, следовательно, в базисных векторах ядра ГЛОНАСС $\mathbf{K}_{n \times 2}$ (3.6) присутствуют различные числа g^j ($\mathbf{g}_{J \times 1}$), когда в базисных векторах ядра GPS $\mathbf{K}_{n \times 2}^G$ (2.33) – единицы $\mathbf{1}_{K \times 1}$). Однако различие между собой длин волн спутников ГЛОНАСС относительно невелико. Поэтому для преодоления недостатка ранга в задаче (3.4)

– матрица проекции, приведена для частного случая $J = 5$, $r = 3$, где $\Delta\lambda_4 = (n_1 + n_2) \cdot \Delta\lambda_3$. В (3.8) для простоты большинство нулевых элементов матрицы проекции \mathbf{P}_S не показаны в явном виде.

$$\mathbf{x}_S = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta D \\ T_p \\ T_L - \Delta n \lambda_3^r \tilde{N}_1^r - n_2 \lambda_3^r \tilde{N}_4^r \\ B_{A4} - \lambda_4^r \tilde{N}_4^r \\ \tilde{N}_1^j - \frac{g^j}{g^r} \tilde{N}_1^r, j = \overline{1, J} \\ \tilde{N}_4^j - \frac{g^j}{g^r} \tilde{N}_4^r, j = \overline{1, J} \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta D \\ T_p \\ T_{L,S} \\ B_{A4,S} \\ \tilde{N}_{1,S}^j, j = \overline{1, J} \\ \tilde{N}_{4,S}^j, j = \overline{1, J} \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Как и в (2.36), первые пять переменных (Δx , Δy , Δz , ΔD , T_p) оцениваются однозначно.

Однако существенным отличием от (2.36) является наличие коэффициентов $\frac{g^j}{g^r}$ перед неоднозначностями \tilde{N}_1^r и \tilde{N}_4^r в оцениваемых комбинациях $\tilde{N}_1^j - \frac{g^j}{g^r} \tilde{N}_1^r$, $\tilde{N}_4^j - \frac{g^j}{g^r} \tilde{N}_4^r$. Физический смысл чисел $g^j = 2848 + lit^j$ может быть неочевиден, однако отношение $\frac{g^j}{g^r}$ фактически представляет собой обратное отношение длин волн $\frac{g^j}{g^r} = \frac{\lambda_3^r}{\lambda_3^j}$. В GPS, где все длины волн одинаковы, это отношение равно единице, что и видно в (2.36). В ГЛОНАСС оно, строго говоря, не равно единице, но, вследствие относительной близости величин длин волн, оно близко к единице.

Вычислим оценку отличия комбинаций неоднозначностей $\tilde{N}_1^j - \frac{g^j}{g^r} \tilde{N}_1^r$, $\tilde{N}_4^j - \frac{g^j}{g^r} \tilde{N}_4^r$ от целых чисел (для примера рассмотрим неоднозначности в только первом диапазоне $\tilde{N}_1^j - \frac{g^j}{g^r} \tilde{N}_1^r$):

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_1^j - \frac{g^j}{g^r} \tilde{N}_1^r &= (N_1^j - \varphi_{01}) - \frac{g^j}{g^r} (N_1^r - \varphi_{01}) = \\
&= (N_1^j - \varphi_{01}) - \left(1 + \frac{\Delta g^{j-r}}{g^r}\right) (N_1^r - \varphi_{01}) = \\
&= N_1^j - N_1^r - \frac{\Delta g^{j-r}}{g^r} N_1^r + \frac{\Delta g^{j-r}}{g^r} \varphi_{01},
\end{aligned} \tag{3.10}$$

где $\Delta g^{j-r} = g^j - g^r = lit^j - lit^r$, $\Delta g^{j-r} \in [-13; 13]$.

От целого числа выражение (3.10) отличают два слагаемых: $-\frac{\Delta g^{j-r}}{g^r} N_1^r$ и $-\frac{\Delta g^{j-r}}{g^r} \varphi_{01}$. Так

как $|\Delta \varphi_0| \leq 0,5$ цикла, а $\left| \frac{\Delta g^{j-r}}{g^r} \right| \leq \left| \frac{13}{2848-7} \right| = \left| \frac{13}{2841} \right| \approx 4,58 \times 10^{-3}$ для наиболее разнесённых литер

-7 и 6 (для наиболее различающихся длин волн), то $\left| \frac{\Delta g^{j-r}}{g^r} \Delta \varphi_0 \right| \leq 2,29 \times 10^{-3}$ цикла для любого

распределения литер видимых НАП спутников (для любой комбинации чисел Δg^{j-r} , g^r) и любой фазовой задержки $\Delta \varphi_0$. Столь малым значением можно пренебречь.

Величина слагаемого $-\frac{\Delta g^{j-r}}{g^r} N_1^r$ в (3.10) зависит от литер j -го и r -го (опорного) спутни-

ков (от чисел Δg^{j-r} , g^r , а точнее от их отношения $\frac{\Delta g^{j-r}}{g^r}$) и величины неоднозначности опорного

спутника N_1^r . Для отношения $\frac{\Delta g^{j-r}}{g^r}$ уже известна оценка $\left| \frac{\Delta g^{j-r}}{g^r} \right| \leq 4,58 \times 10^{-3}$, а величина неодно-

значности N_1^r в общем случае может быть любой. Если задаться максимальным по модулю значением аномальной ошибки δ , возникающей при целочисленном разрешении неоднозначности оценок (3.10):

$$\delta = \left| \tilde{N}_{1,S}^j - \left[\tilde{N}_{1,S}^j \right] \right|, \tag{3.11}$$

где $[\]$ – операция округления до ближайшего целого. То есть задаться максимальным абсолют-

ным значением слагаемого $-\frac{\Delta g^{j-r}}{g^r} N_1^r$: $\left| \frac{\Delta g^{j-r}}{g^r} N_1^r \right| < \delta$, то можно получить максимальное по мо-

дулю значение неоднозначности опорного спутника $\left| N_1^r \right|_{\max}$, обеспечивающее это условие (усло-

вие не превышения аномальной ошибкой заданного порога δ):

$$\left| \Delta N_1^r \right|_{\max} = \delta \left| \frac{g^r}{\Delta g^{j-r}} \right|. \quad (3.12)$$

Для $\delta = 0,1$ цикл получаем $\left| N_1^r \right|_{\max} \approx 21,85$. Следовательно, если истинное значение неоднозначности опорного спутника не превышает максимального значения 21 цикла – $N_1^r < 21$ цикл, то величина наибольшего отличия от целого числа любой оцениваемой неоднозначности $\tilde{N}_{1,S}^j$ не превысит 0,1 цикл. Такой ошибкой можно пренебречь, так как она сравнима с величиной случайной ошибки измерений. В таком случае становится возможно применять алгоритмы целочисленного разрешения к оцениваемым неоднозначностям $\tilde{N}_{1,S}^j, \tilde{N}_{4,S}^j$ (3.9).

Обеспечить минимизацию величин псевдофазовых неоднозначностей можно с помощью согласования псевдофазовых измерений с кодовыми (1.8). Опыт обработки реальных измерений показывает, что применение алгоритмов целочисленного разрешения при обработке измерений ГЛОНАСС позволяет сократить время сходимости решения. Таким образом, отличие оцениваемых комбинаций неоднозначностей ГЛОНАСС от целых чисел на практике действительно пренебрежимо мало.

Описанный способ нестрогой целочисленной оценки псевдофазовых неоднозначностей удобен тем, что не требует значительной модернизации существующего программного обеспечения, предназначенного для работы с измерениями сигналов с кодовым разделением, для работы с сигналами с частотным разделением. Тем не менее, можно предложить и более сложный подход, при котором псевдофазовые неоднозначности ГЛОНАСС оцениваются строго целочисленно [5]. В настоящей работе используется только описанный выше нестрогий подход.

Общая укрупнённая блок-схема алгоритма решения пользовательской задачи целочисленного ВАМО приведена в Приложении Б.

3.1.3 Экспериментальные результаты решения пользовательской задачи

В настоящем разделе приводятся результаты решения пользовательской задачи по реальным измерениям НАП, расположенной в г. Красноярск и удалённой от сетевых станций на сотни километров (расположение станций сети и потребителя – на Рисунке 3.1).

Был обработан суточный файл измерений от 13.08.2021 с темпом измерений 30 с. Однако, так как использованные для пользовательского решения ВКП были получены при обработке измерений за те же сутки, для сходимости сетевой задачи (для получения точных значений ВКП) был взят запас 1 час. То есть потребитель начинает применять спутниковые поправки только по прошествии одного часа с начала обработки измерений в сетевом решении.

Кроме того, при использовании информации о спутниковых орбитах в формате «.SP3» точность восстановления (интерполяции) координат спутника вблизи границ суток снижается в связи с тем, что в суточном SP3-файле отсутствуют опорные координаты спутника за предыдущие сутки. При использовании нескольких SP3-файлов (на соседние сутки) возможно возникновение аномалий в восстановленных орбитах с связи с тем, что координаты спутников на разные сутки могут быть не согласованы. Поиску таких аномалий посвящена, например, работа [20]. Поэтому обрабатываются не все суточные измерения, а измерения с 01 часа до 23 часов для сетевой задачи и с 02 часов до 23 часов для пользовательской задачи.

Таким образом, учитывая запас на сходимость сетевого решения и запас на точность восстановленных орбит, длительность интервала обработки измерений потребителя составляет 21 час.

Из-за наличия в измерениях случайных ошибок определить одномоментно псевдофазовые неоднозначности невозможно, поэтому для решения пользовательской задачи применялась калмановская фильтрация. Использовались алгоритмы, основанные на «квадратных корнях» матриц (разложении Холецкого, Cholesky decomposition) [56]. Непрерывно на всём протяжении интервала измерений рекуррентно вычислялась оценка вектора \mathbf{x}_S (3.9) и ковариационная матрица \mathbf{R}_{xS} $n \times n$ этой оценки \mathbf{R}_{xS} $n \times n$. Координаты НАП оценивались как константы (режим статических местоопределений, static). Псевдофазовые неоднозначности $\tilde{N}_{1,s}^j$, $\tilde{N}_{4,s}^j$, $j = \overline{1, J}$ также оценивались как константы. Смещений показаний часов и MW-смещение T_P , $T_{L,s}$ и $B_{A4,s}$ оценивались с дисперсией шумов прогноза $(100 \text{ м})^2$. Не скомпенсированная часть вертикальной тропосферной задержки оценивалась с шумом прогноза $2,7 \times 10^{-5} \text{ м}^2$.

На Рисунке 3.2 показана зависимость трёхмерной ошибки местоопределения при непрерывной калмановской фильтрации измерений потребителя. Как видно из рисунка, несколько раз (после 2, 4 и 12 часа обработки) процесс фильтрации начинался сначала в связи с тем, что в зоне видимости НАП находилось менее 5 спутников (условием нахождения спутника в зоне видимости считается наличие в НАП одновременно кодовых и псевдофазовых двухчастотных измерений и ВКП для этого спутника) и продолжать фильтрацию в таких условиях было невозможно. Тем не менее, видно, что каждый раз решение сходилось к сантиметровому уровню точности и оставалось стабильным. Это свидетельствует о корректности вычисленных в результате решения сетевой задачи ВКП.

Для оценки влияния спутникового созвездия на точность полученных оценок координат НАП предлагается использовать понятие геометрического фактора (dilution of precision, DOP) [2]. В связи с тем, что в задаче целочисленного ВАМО помимо координат и смещения

показаний часов НАП оценивается вертикальная составляющая тропосферной задержки ΔD , следует ожидать, что численные значения величин HDOP, VDOP и PDOP будут хуже (больше), чем при стандартном автономном местоопределении (когда оцениваются только координаты НАП и смещение показаний часов НАП) при «обычном» определении понятия геометрического фактора.

Для демонстрации того, что оценки неоднозначностей сходятся к целым числам приведены графики на Рисунке 3.3, которые, как и нижний график на Рисунке 3.2, соответствуют первому часу обработки измерений.

На нижнем графике Рисунка 3.2 в более крупном масштабе показан первый час фильтрации. Он хорошо иллюстрирует преимущество использования алгоритмов целочисленного разрешения неоднозначности (красная кривая): менее чем через 10 минут обработки после правильного разрешения целочисленной неоднозначности ошибка местоопределения резко снижается до сантиметрового уровня. Действительное решение (синяя пунктирная кривая) достигает такой точности только через 1 час обработки измерений. Также на этом графике видны последствия неправильного разрешения неоднозначности (аномальной ошибки) – после 17 минуты обработки ошибка целочисленного решения резко увеличивается и уменьшается только на 22 минуте, когда скачком улучшается PDOP (очевидно, с увеличением числа видимых спутников).

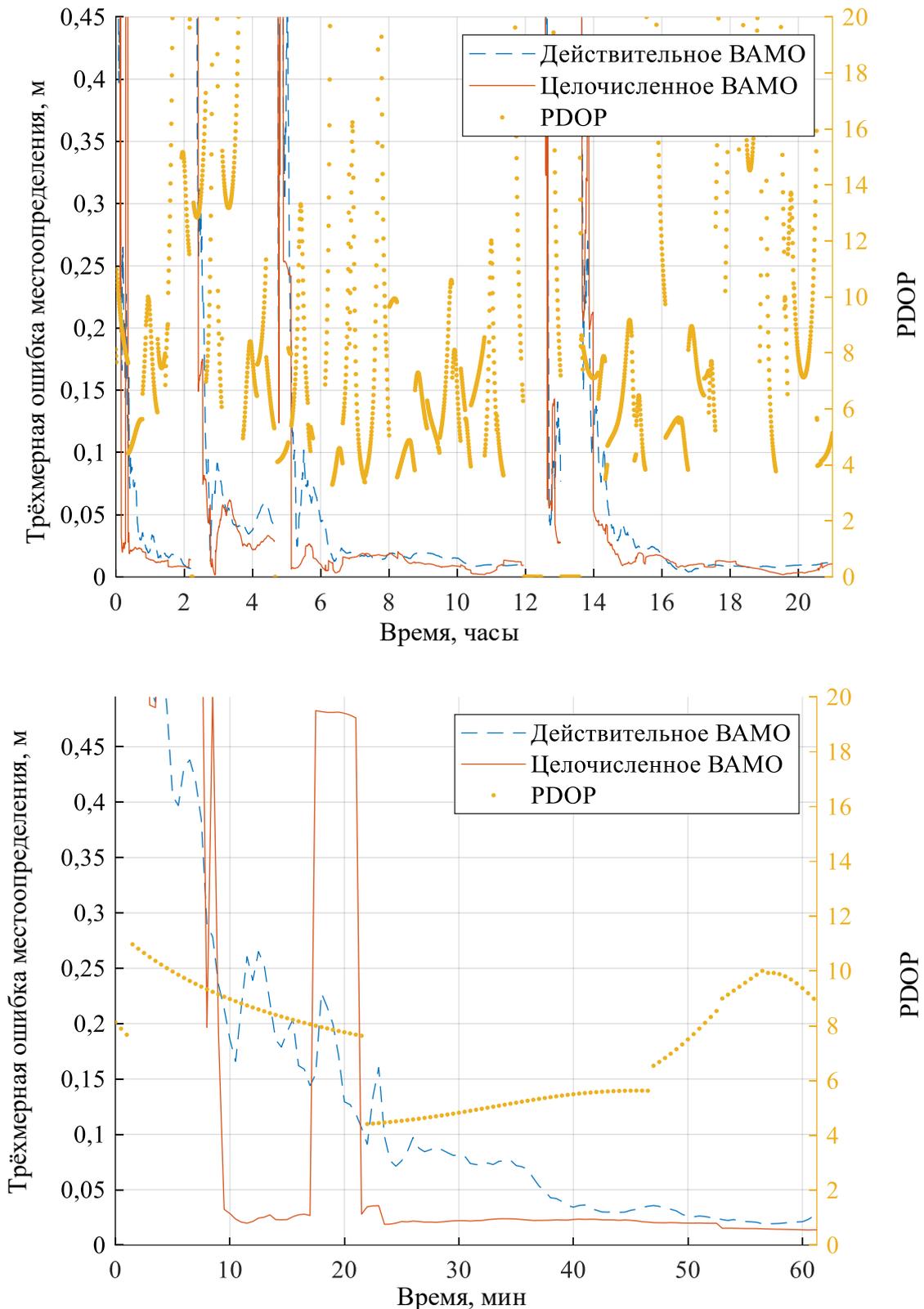


Рисунок 3.2 – График зависимости от времени величины трёхмерной ошибки местоопределения при действительном ВАМО (синяя пунктирная кривая) и после целочисленного разрешения неоднозначности (целочисленное ВАМО – красная кривая), а также величины PDOP (жёлтые точки). Верхний график соответствует 21 часу обработки измерений, а нижний – первому часу, в более крупном масштабе

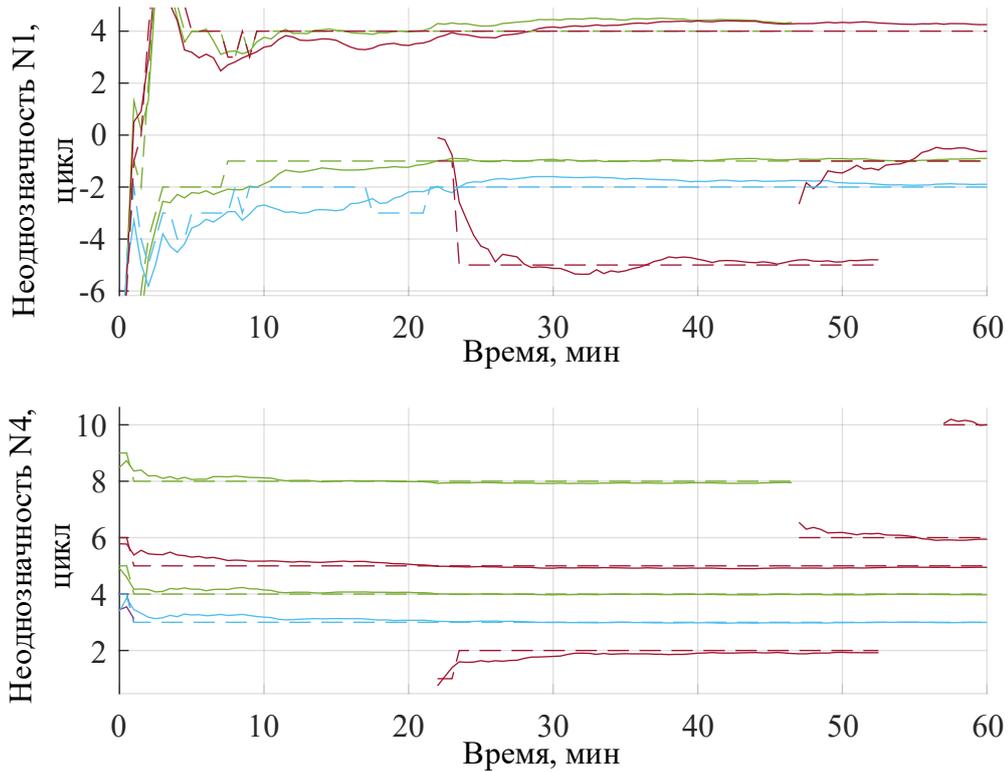


Рисунок 3.3 – График зависимости от времени оценок псевдофазовых неоднозначностей $\tilde{N}_{1,s}^j$ (верхний график) и $\tilde{N}_{4,s}^j$ (нижний график). Сплошная линия – действительная оценка, пунктирная линия – целочисленная оценка после выполнения процедуры разрешения неоднозначности

Помимо того, что Рисунок 3.3 иллюстрирует сходимость оценок псевдофазовых неоднозначностей к целым числам, на нём также хорошо видно, за счёт чего достигается уменьшение времени сходимости при целочисленном ВАМО. На десятой минуте обработки видно, как целочисленные оценки псевдофазовых неоднозначностей (пунктирные кривые) уже достигли значений, к которым действительные оценки придут только к концу целого часа непрерывной обработки. Также на верхнем графике видна аномальная ошибка, последствия которой были отмечены на Рисунке 3.2, – неоднозначность $\tilde{N}_{1,s}^j$ (голубая пунктирная кривая) в промежутке с 17 до 22 минут разрешалась неправильно (-3 вместо истинного значения -2).

Также на Рисунке 3.3 видно, что правильное целочисленное разрешение оценок неоднозначностей $\tilde{N}_{4,s}^j$ (нижний график) происходит значительно быстрее, почти на первой-второй эпохе наблюдений, чем оценок $\tilde{N}_{1,s}^j$ (верхний график). Это объясняется тем, что длина волны неоднозначностей $\tilde{N}_{4,s}^j$ (около 84 см) больше длины волны неоднозначностей $\tilde{N}_{1,s}^j$ (около 10,5 см).

Для демонстрации оперативности сходимости пользовательское решение на том же интервале времени (21 час) было вычислено с выполнением каждые 45 минут принудительного

сброса процесса фильтрации и начинанием его с начала. Всего на 21 часе укладывается 28 таких 45-минутных интервалов. Для наглядности трёхмерные ошибки местоопределения на этих интервалах изображены на одном графике на Рисунке 3.4.

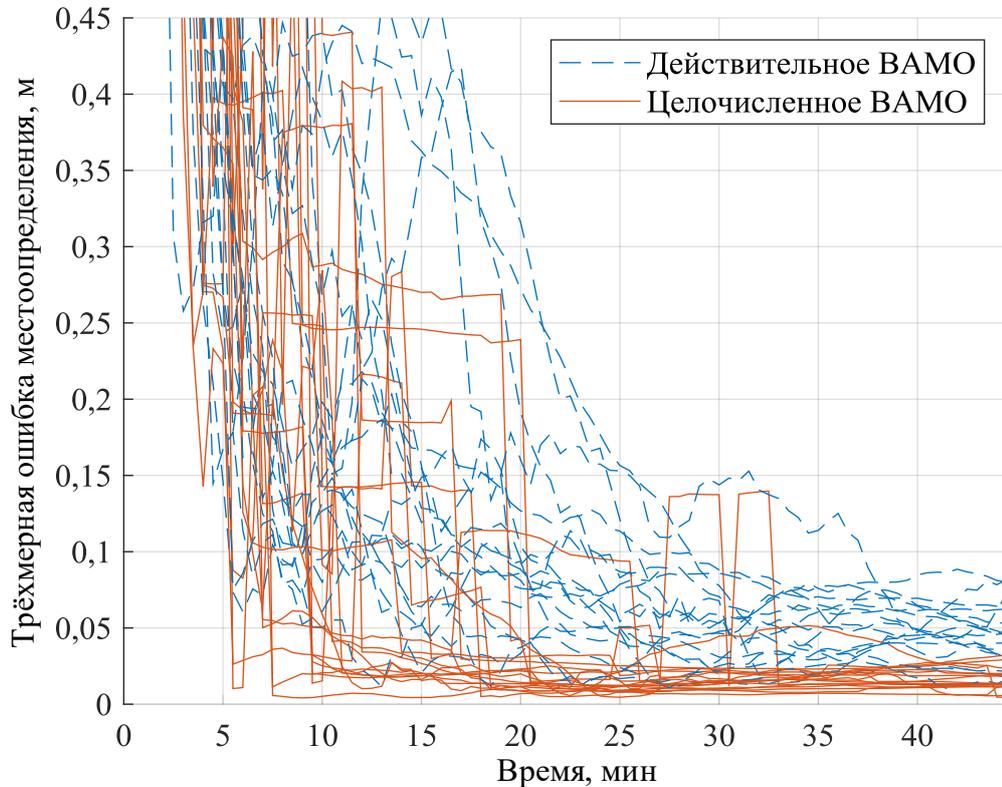


Рисунок 3.4 – График зависимости от времени трёхмерной ошибки местоопределения при периодическом сбросе процесса фильтрации для демонстрации оперативности местоопределения при целочисленном ВАМО (красная сплошная кривая) по сравнению с действительным ВАМО (синяя пунктирная кривая)

Учитывая то, что несколько раз в течение времени измерений наблюдалась ситуация, при которой в зоне видимости НАП находилось менее 5 спутников ГЛОНАСС, когда решить пользовательскую задачу ВАМО принципиально невозможно, и то, что даже при условии видимости не менее 5 спутников ГЛОНАСС значение PDOP достаточно велико (превышает величину 10 и даже 20), что было видно на Рисунке 3.2, продемонстрировать высокую оперативность целочисленного ВАМО при использовании ГЛОНАСС – непростая задача. Поэтому на Рисунке 3.4 приведены не все 28 45-минутных интервала сходимости, а только 19 из них, на которых действительно видно преимущество целочисленного ВАМО перед действительным. При этом допускается наличие аномальных ошибок разрешения неоднозначности на интервалах времени после достижения сходимости (например, в районе 25-35 минут). Из Рисунка 3.4 видно, что время сходимости целочисленного решения (время до правильного разрешения неоднозначности) составляет от 5 до 20 минут. При этом по достижении сходимости трёхмерная ошибка целочисленного

решения не превышает 5 см, в то время как ошибка действительного решения даже после 45 минут непрерывной фильтрации лежит в интервале от 3 до 10 см.

Таким образом, Рисунок 3.4 показывает возможность оперативного целочисленного ВАМО по сигналам ГЛОНАСС.

Наиболее простым путём ещё большего повышения оперативности местоопределений является совместное использование нескольких ГНСС. При этом оперативность решения пользовательской задачи будет повышаться с одной стороны за счёт того, что будет повышаться избыточность системы уравнений пользовательской задачи – переменные, не зависящие от ГНСС (поправки к координатам НАП и не скомпенсированная часть вертикальной тропосферной задержки), входят одновременно в уравнения измерений всех ГНСС, а с другой стороны – за счёт появления большего числа оцениваемых псевдофазовых неоднозначностей и ковариационных связей между ними. При этом смещения показаний кодовых и фазовых часов НАП относительно каждой ГНСС и MW-смещения должны оцениваться для каждой ГНСС независимо.

При совместном использовании ГЛОНАСС и GPS в векторе оцениваемых переменных возникают два набора неоднозначностей $\tilde{N}_{1,s}^j$, $\tilde{N}_{4,s}^j$ – для ГЛОНАСС и GPS. Для их целочисленного разрешения возможны два подхода – одновременный (когда процедура поиска целочисленного минимума квадратичной формы осуществляется сразу по неоднозначностям обеих систем) и отдельно по системам (каждая ГНСС образует независимую квадратичную форму, которая минимизируется независимо от другой). Второй подход лучше с вычислительной точки зрения, так как размерность матриц квадратичной формы получается меньше, однако он не учитывает информацию о ковариационных связях между неоднозначностями различных ГНСС. Учёт этих ковариационных связей позволяет существенно повысить вероятность правильного разрешения неоднозначности (снизить вероятность аномальной ошибки).

На Рисунке 3.5 показаны абсолютные значения элементов ковариационной матрицы \mathbf{R}_{xS} _{lx×lx} оцениваемого в пользовательской задаче вектора \mathbf{x}_S (3.9) на один момент времени, полученные в результате калмановской фильтрации.

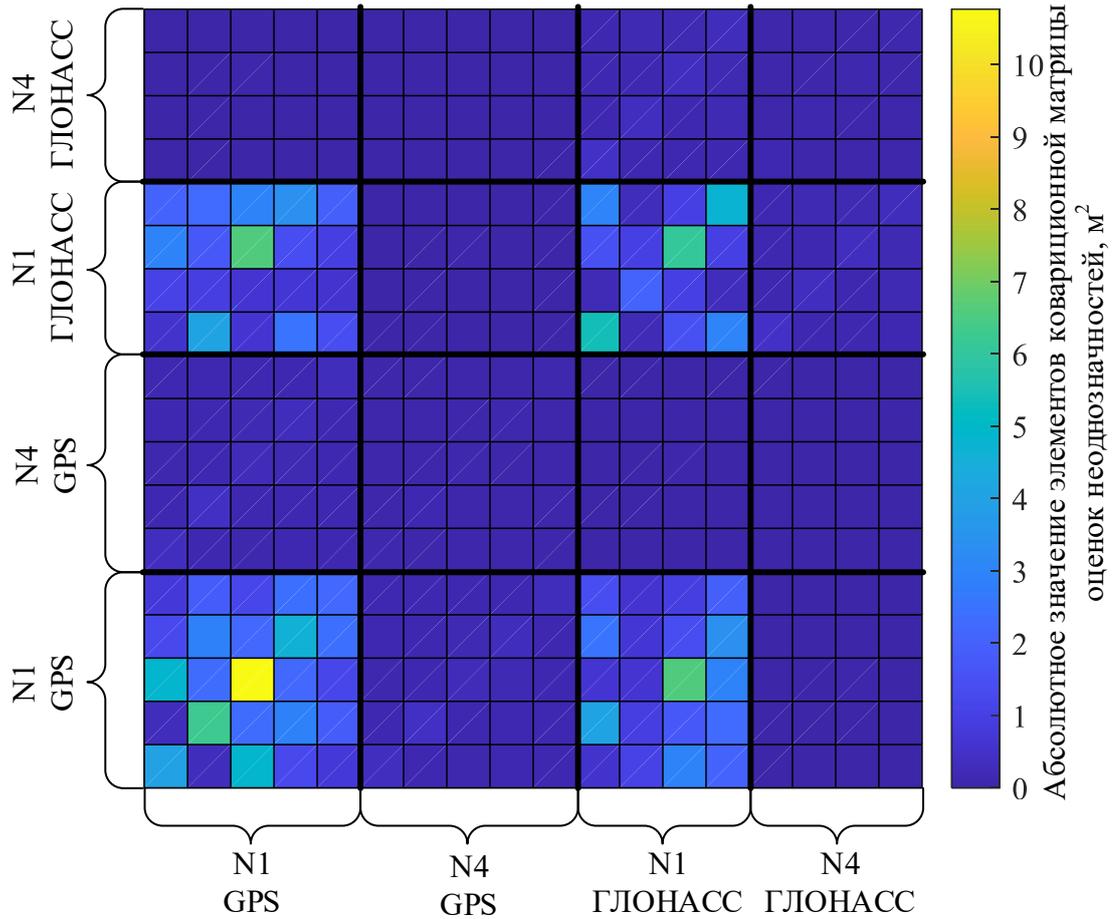


Рисунок 3.5 – Абсолютные значения элементов ковариационной матрицы оцениваемого в пользовательской задаче вектора \mathbf{x}_s (3.9), относящиеся к псевдофазовым неоднозначностям, для случая совместной обработки измерений ГЛОНАСС и GPS

На Рисунке 3.5 цветом изображены абсолютные величины только блока ковариационной матрицы \mathbf{R}_{x_s} оцениваемого вектора, относящегося к оцениваемым неоднозначностям. На диагонали стоят величины дисперсий соответствующих неоднозначностей, вне диагонали – ковариации. Вдоль осей отложены номера строк и столбцов этого блока ковариационной матрицы, которые соответствуют неоднозначностям $\tilde{N}_{1,s}^j$ и $\tilde{N}_{4,s}^j$ GPS и ГЛОНАСС. Рисунок соответствует моменту времени, когда в зоне видимости НАП находились 6 спутников GPS и 5 – ГЛОНАСС. Так как неоднозначности одного из спутников в каждой ГНСС были выбраны в качестве опорной, реально оценивались по 5 и 4 неоднозначности $\tilde{N}_{1,s}^j$ и $\tilde{N}_{4,s}^j$ GPS и ГЛОНАСС соответственно. Видно, что величины взаимной ковариации между неоднозначностями $\tilde{N}_{1,s}^j$ ГЛОНАСС и GPS достигают 7 м². Такими сильными ковариационными связями не стоит пренебрегать и для снижения вероятности аномальной ошибки и увеличения оперативности высокоточного

местоопределения алгоритмы целочисленного разрешения неоднозначностей следует применять одновременно ко всем неоднозначностям пользовательской задачи.

Для демонстрации увеличения оперативности местоопределения при совместном использовании ГЛОНАСС и GPS, также, как и для решения по ГЛОНАСС, пользовательская задача была решена с выполнением каждые 45 минут принудительного сброса процесса фильтрации. Результаты представлены на Рисунке 3.6.

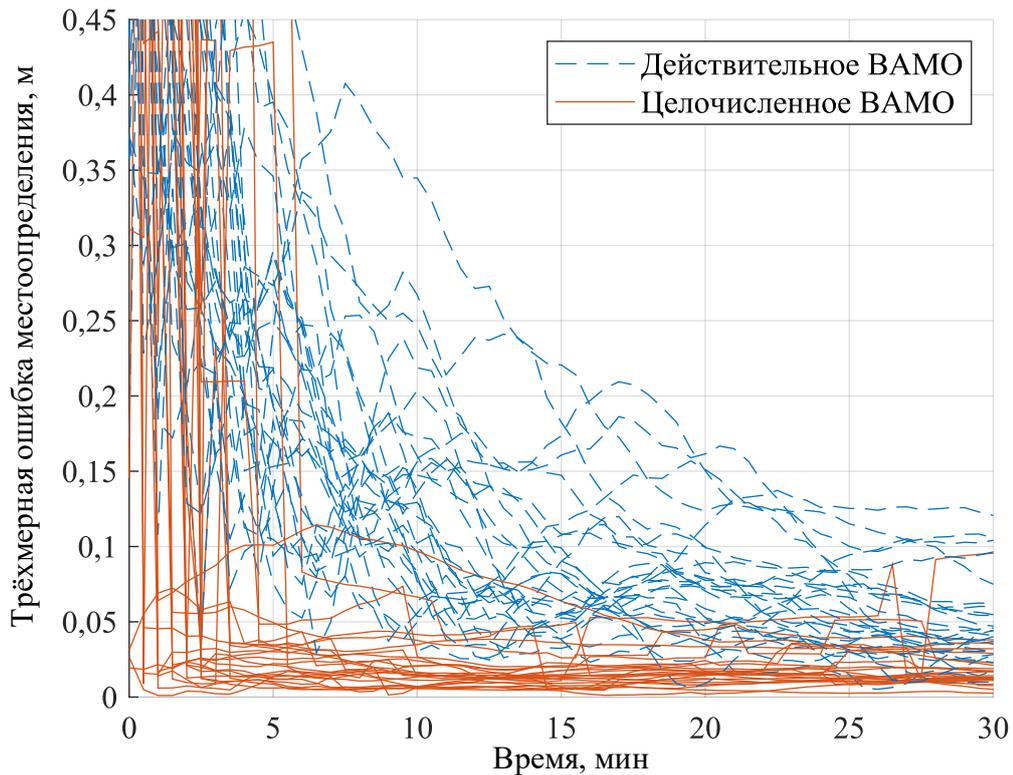


Рисунок 3.6 – График зависимости от времени трёхмерной ошибки местоопределения при периодическом сбросе процесса фильтрации для демонстрации повышения оперативности при целочисленном ВАМО за счёт совместного использования ГЛОНАСС и GPS

Рисунок 3.6 полностью аналогичен Рисунку 3.4 и отличается только тем, что в данном случае используются совместно ГЛОНАСС и GPS. Из 28 45-минутных интервалов на Рисунке 3.6 изображено 25. При этом на трёх из этих интервалов правильное разрешение неоднозначности произошло мгновенно (с первой эпохи наблюдений). Время сходимости целочисленного решения составляет от 0 (мгновенное разрешение) до 12 минут.

3.1.4 Оценка потенциальной точности абсолютных местоопределений при использовании только псевдофазовых измерений

Измерения псевдофазы обладают большой точностью – примерно на два порядка лучшей, чем измерения псевдодальности. Однако их существенным недостатком является их неоднозначность. Тем не менее, после целочисленного разрешения псевдофазовых неоднозначностей при их обработке в пользовательской задаче целочисленного ВАМО истинные величины оцениваемых комбинаций неоднозначностей становятся известны. Этим можно воспользоваться, чтобы оценить точность местоопределения при использовании только псевдофазовых измерений.

В пользовательской задаче целочисленного ВАМО оценить истинные значения исходных целочисленных неоднозначностей $N_1^1, \dots, N_1^J, N_4^1, \dots, N_4^J$ невозможно. Оцениваются разности неоднозначностей (относительно опорного спутника) (3.9):

$$\begin{aligned}\tilde{N}_{1,s}^j &= \tilde{N}_1^j - \frac{\mathbf{g}^j}{\mathbf{g}^r} \tilde{N}_1^r \\ \tilde{N}_{4,s}^j &= \tilde{N}_4^j - \frac{\mathbf{g}^j}{\mathbf{g}^r} \tilde{N}_4^r\end{aligned}\quad (3.13)$$

В результате решения системы линейных уравнений пользовательской задачи (3.4) получается действительная оценка оцениваемого вектора $\hat{\mathbf{x}}_s$, в который входят действительные оценки неоднозначностей $\hat{N}_{1,s}^j$ и $\hat{N}_{4,s}^j$. В результате работы алгоритмов целочисленного разрешения неоднозначностей получают соответствующие целочисленные оценки $\check{N}_{1,s}^j$ и $\check{N}_{4,s}^j$.

При достаточно долгом процессе фильтрации (или при фильтрации в прямом и обратном направлении по времени), когда видно, что использование целочисленных оценок $\check{N}_{1,s}^j, \check{N}_{4,s}^j$ привело к снижению ошибки местоопределения до сантиметрового уровня, то, пренебрегая аномальной ошибкой нестроого сохранения целочисленности (оценки которой были даны в разделе 3.1.1), можно говорить о том, что целочисленные оценки $\check{N}_{1,s}^j, \check{N}_{4,s}^j$ равны истинному значению оцениваемых неоднозначностей $\tilde{N}_{1,s}^j, \tilde{N}_{4,s}^j$. В таком случае, прибавляя эти значения к невязкам псевдофазовых измерений (3.2) получаем уравнение:

$$dL_3^j + \Delta n \lambda_3^j \check{N}_{1,s}^j + n_2 \lambda_3^j \check{N}_{4,s}^j = h_x^j \Delta x + h_y^j \Delta y + h_z^j \Delta z + w^j \Delta D + T_{L,s}^j + \varepsilon_{L3}^j. \quad (3.14)$$

При объединении $j = \overline{1, J}$ уравнений (3.14) получается полноранговая система линеаризованных уравнений, которую можно записать в матричном виде:

$$\mathbf{Y}_L = \mathbf{H}_L \mathbf{x}_L + \boldsymbol{\varepsilon}_L, \quad (3.15)$$

где $\mathbf{Y}_L = \left[dL_3^j + \Delta n \lambda_3^j \tilde{N}_{1,s}^j + n_2 \lambda_3^j \tilde{N}_{4,s}^j, j = \overline{1, J} \right]$ – вектор невязок «однозначных» псевдофазовых измерений;

$$\mathbf{x}_L = \left[\Delta x \quad \Delta y \quad \Delta z \quad \Delta D \quad T_{L,s} \right]^T$$
 – оцениваемый по «однозначным» псевдофазовым измерениям вектор;

рениям вектор;

$$\mathbf{H}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{1} \\ J \times 4 & J \times 1 \end{bmatrix}$$
 – матрица связи вектора невязок \mathbf{Y}_L и оцениваемого вектора \mathbf{x}_L ;

$$\boldsymbol{\varepsilon}_L = \left[\varepsilon_{L3}^1 \quad \dots \quad \varepsilon_{L3}^J \right]^T$$
 – вектор случайных ошибок ифг-комбинаций измерений псевдофазы.

Псевдофазовые измерения названы «однозначными», поскольку их неоднозначность не разрешена в полном смысле – истинные значения исходных псевдофазовых неоднозначностей остались неизвестны. Однако известны истинные значения линейных комбинаций этих неоднозначностей $\tilde{N}_{1,s}^j, \tilde{N}_{4,s}^j$ (3.13) (разности относительно неоднозначности опорного спутника). Благодаря этому по таким измерениям можно получить однозначную оценку координат НАП и смещённую на неоднозначности опорного спутника оценку смещений показаний часов НАП $T_{L,s} = T_L - \Delta n \lambda_3^r \tilde{N}_1^r - n_2 \lambda_3^r \tilde{N}_4^r$.

Значения $\tilde{N}_{1,s}^j, \tilde{N}_{4,s}^j$ можно использовать для получения «однозначных» псевдофазовых измерений на всём промежутке времени между сменой опорного спутника при условии отсутствия срывов слежения за фазой. Для спутников, по которым произошёл срыв слежения за фазой, необходимо заново оценивать псевдофазовую неоднозначность.

Так как фазовые измерения обладают большой точностью, оценки координат НАП, даже полученные при помощи МНК при решении системы (3.15) независимо на каждый момент времени, будут обладать высокой (сантиметровой) точностью. Это позволяет оценить потенциальную точность местоопределения при использовании только псевдофазовых измерений, в отличие от решения пользовательской задачи (3.4), где совместно обрабатываются измерения псевдодальностей, псевдофаз и MW-комбинации измерений и координаты НАП оцениваются в фильтре как константы (с нулевым шумом прогноза). Благодаря тому, что оценки координат, полученные МНК на каждый момент времени независимы, можно вычислить математическое ожидание (МО) и СКО ошибки оценки координат (чего нельзя сделать при фильтрации). Кроме того, хотя приёмники статичны в пространстве, такой метод оценки ближе к кинематическому режиму, чем фильтрация, так как координаты оцениваются независимо на каждый момент времени.

На рисунках ниже приведены результаты ошибки оценки местоположения для приёмника, расположенного в г. Красноярск. В результате сетевого решения были получены ВКП, которые были применены в пользовательском решении. Для уменьшения вероятности аномальных ошибок пользовательское решение было получено при калмановской фильтрации в прямом и обратном направлении (по времени). В результате стали известны целочисленные оценки псевдофазовых неоднозначностей $\tilde{N}_{1,s}^j$, $\tilde{N}_{4,s}^j$ на каждый момент времени. Затем с использованием ВКП и величин $\tilde{N}_{1,s}^j$, $\tilde{N}_{4,s}^j$ в результате решения системы (3.15) на каждый момент времени были получены независимые МНК оценки вектора \mathbf{x}_L . Ошибки оценок координат и приведены на рисунках ниже.

Было получено 3 решения: при независимом использовании ГЛОНАСС (Рисунки 3.7, 3.8, 3.9) и GPS (Рисунок 3.10) и при совместном (Рисунок 3.11). На этих рисунках представлены графики ошибок местоопределения – в местной системе координат (восток-север-вертикаль) по отдельности для каждого направления, в плоскости (график типа «мишень») и трёхмерная ошибка. На графиках зависимости от времени вместе с ошибками местоопределения приведены величины геометрического фактора (EDOP, NDOP, VDOP, PDOP). Для удобства сравнения и большей наглядности масштабы графиков для всех систем совпадают.

Следует обратить внимание, что масштаб по оси ординат для ошибок местоопределения во высоте отличается от масштабов осей ошибок местоопределения по направлениям запад-восток и юг-север. Масштабы для EDOP, NDOP и VDOP совпадают.

Из Рисунка 3.7 видно, что ошибка местоопределения по высоте существенно (в несколько раз) превышает ошибку местоопределения в горизонтальной плоскости и, соответственно, величины VDOP существенно превышают EDOP и NDOP. Такая ситуация характерна для любых местоопределений с помощью ГНСС, однако в данном случае она усугубляется тем обстоятельством, что необходимо оценивать также величину не скомпенсированной составляющей вертикальной тропосферной задержки, которая сильно коррелирована с ошибкой по высоте.

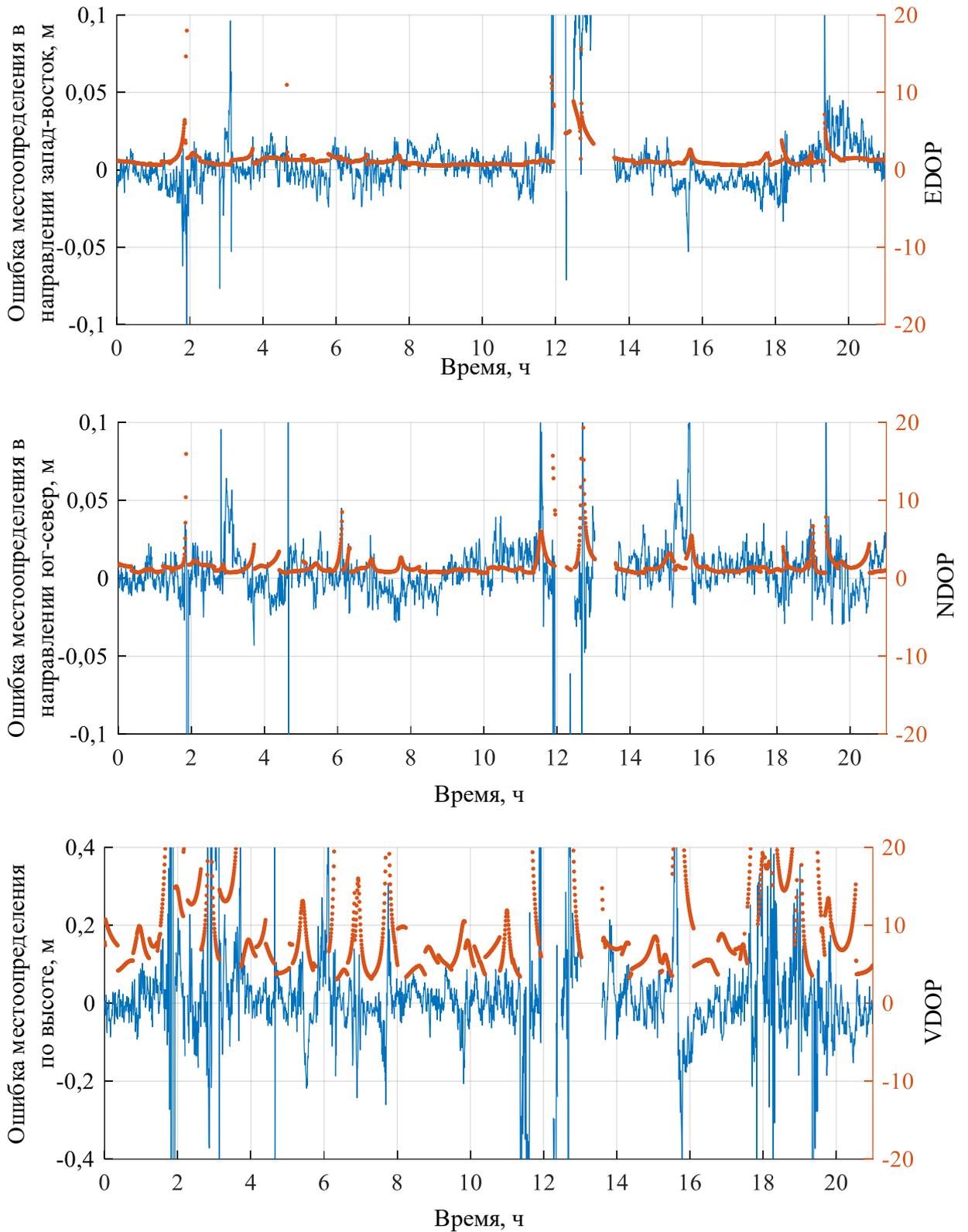


Рисунок 3.7 – График зависимости от времени величин ошибок местоопределения (синяя кривая) и геометрического фактора (оранжевые точки) при использовании ГЛОНАСС

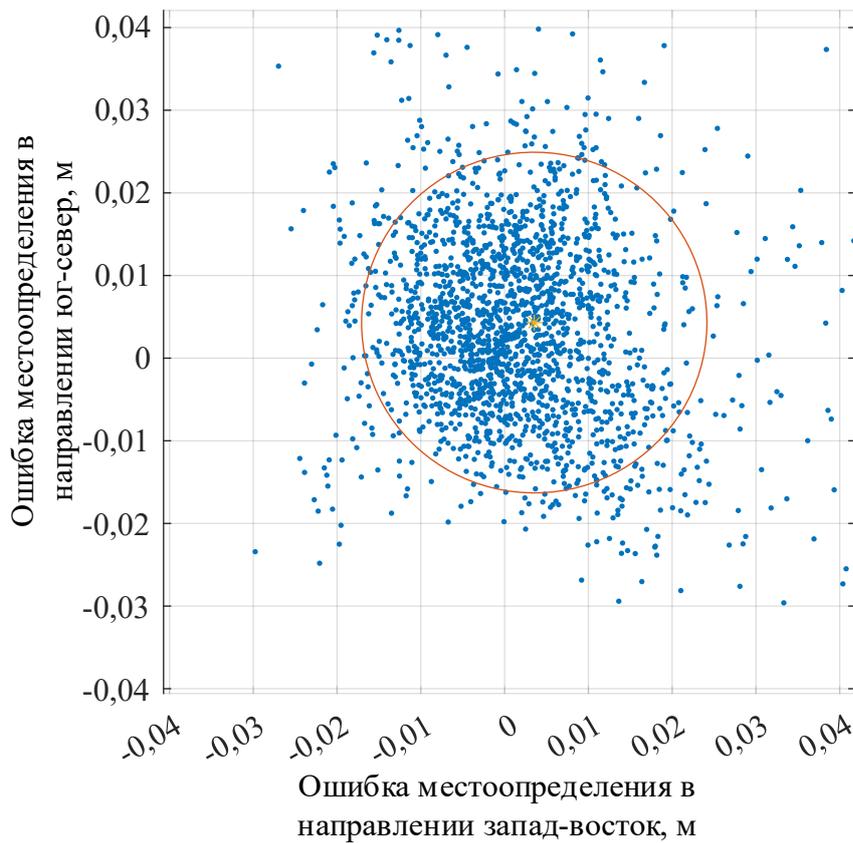


Рисунок 3.8 – График ошибок местоопределения в горизонтальной плоскости типа «мишень» при использовании ГЛОНАСС

Отрицательные значения геометрического фактора не имеют смысла, однако масштаб от -20 до 20 на графиках EDOP, NDOP и VDOP выбран для того, чтобы проиллюстрировать, как зависит ошибка местоопределения от геометрического фактора – с увеличением DOP увеличивается и ошибка, графики DOP как бы «оггибают» графики ошибок местоопределения.

На Рисунке 3.8 приведён отдельный график типа «мишень» для ошибок в горизонтальной плоскости. Для построения этого графика использованы только те оценки местоположения, которые были получены при величине PDOP < 20. По этим данным были вычислены характеристики случайных ошибок местоопределения – МО и СКО. Жёлтая точка (в виде символа «*») на Рисунке 3.8 соответствует МО ошибки местоопределения в горизонтальной плоскости, а радиус окружности оранжевого цвета вокруг неё – СКО ошибки в плане. МО ошибки составило в направлении запад-восток: 3,54 мм; юг-север: 4,31 мм; по высоте: 11,81 мм. СКО ошибки местоопределения в горизонтальной плоскости 20,61 мм; по высоте: 108,28 мм. На графике и из приведённых значений видно, что ошибки имеют сантиметровую точность и сосредоточены в районе нуля.

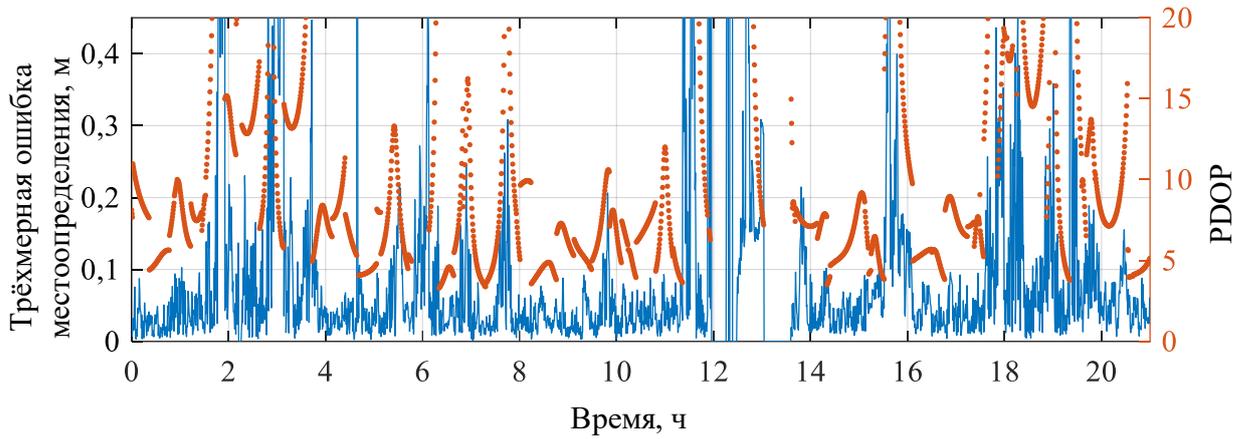


Рисунок 3.9 – График зависимости от времени трёхмерной ошибки местоопределения (синяя кривая) и величины PDOP (оранжевые точки) при использовании ГЛОНАСС

На Рисунке 3.9 приведён график зависимости от времени трёхмерной ошибки местоопределения и вместе с ним график зависимости от времени величины PDOP. Разрывы на графике на Рисунке 3.9 и 3.7, например, в районе 13 часов, связаны с тем, что в эти моменты времени число спутников, находящихся в зоне видимости НАП (для которых при этом доступны временные корректирующие поправки), было меньше, чем минимально необходимое ($J_{\min} = 5$). Как и на Рисунке 3.7, на Рисунке 3.9 ярко выражено увеличение ошибки местоопределения с ухудшением (увеличением) PDOP. Средняя величина PDOP за время наблюдения составила 18,27.

Далее на Рисунках 3.10, 3.11 представлены графики зависимости от времени трёхмерной ошибки местоопределения и величины PDOP при использовании GPS и совместном использовании ГЛОНАСС и GPS, аналогичные графику на Рисунке 3.9. Остальные графики для системы GPS и совместного использования GPS и ГЛОНАСС вынесены в Приложение В.

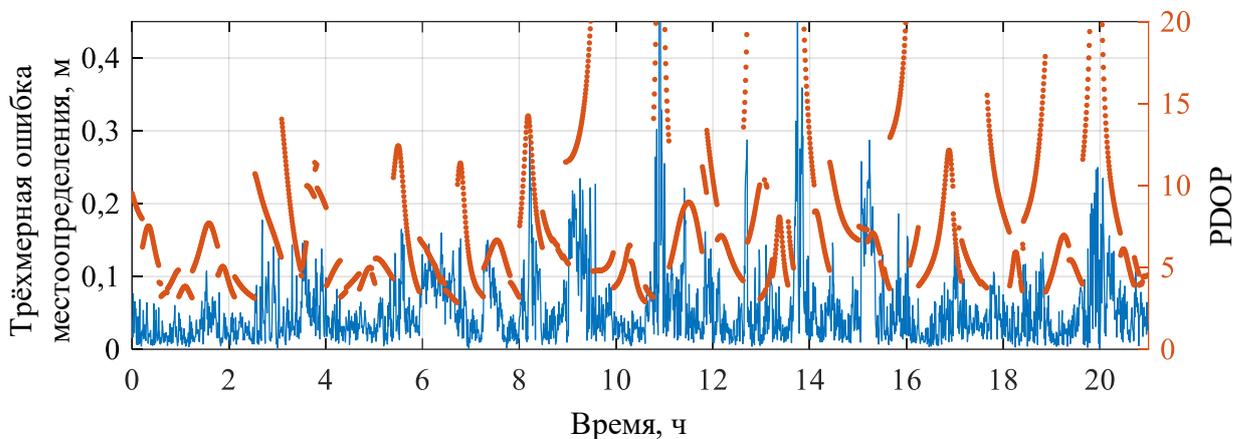


Рисунок 3.10 – График зависимости от времени трёхмерной ошибки местоопределения (синяя кривая) и величины PDOP (оранжевые точки) при использовании GPS

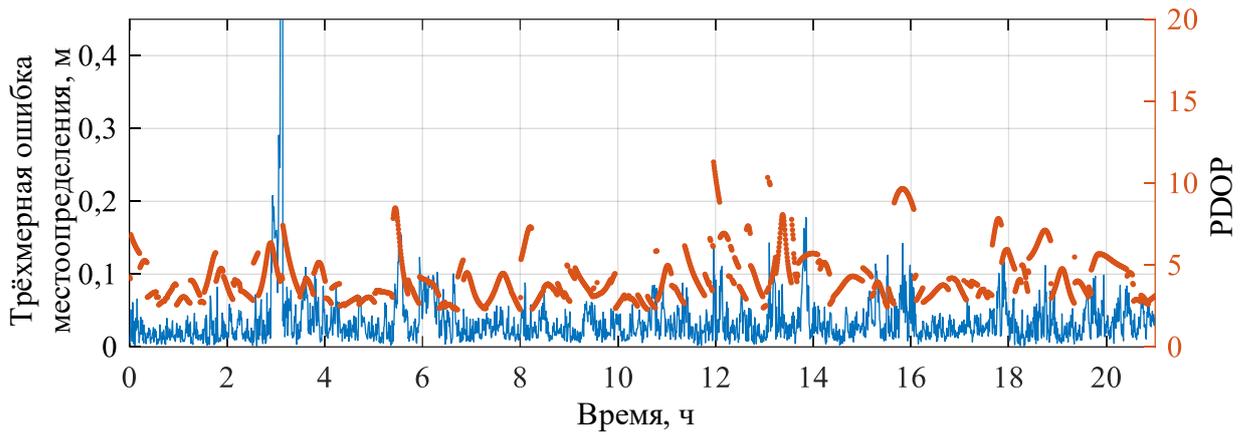


Рисунок 3.11 – График зависимости от времени трёхмерной ошибки местоопределения (синяя кривая) и величины PDOP (оранжевые точки) при совместном использовании ГЛОНАСС и GPS

В Таблицу 4 сведены общие характеристики ошибок местоопределения при раздельном и совместном использовании ГЛОНАСС и GPS, а также средние величины геометрического фактора PDOP за время наблюдений.

Таблица 4 – Сравнение потенциальной точности местоопределения при раздельном и совместном использовании ГЛОНАСС и GPS

Используемая ГНСС	МО ошибки в направлении, мм			СКО ошибки, мм		Средняя величина PDOP
	запад-восток	юг-север	высота	в плане	по высоте	
ГЛОНАСС	3,54	4,31	11,81	20,61	108,28	18,27
GPS	-2,11	2,91	-10,85	8,27	62,63	7,91
ГЛОНАСС+GPS	1,12	3,44	3,73	5,68	65,23	4,22

Из Таблицы 4 видно, что МО ошибок местоопределения в плане при раздельном и совместном использовании ГЛОНАСС и GPS находится примерно на одном уровне. Совместное использование ГЛОНАСС и GPS позволяет значительно уменьшить МО ошибок по высоте. ГЛОНАСС уступает по точности местоопределения GPS в части СКО ошибок. Это объясняется тем, что в штатной группировке ГЛОНАСС меньшее число спутников, чем в GPS. Кроме того, так как в настоящей работе используются ионосферосвободные комбинации измерений, которые требуют наличия измерений одновременно в двух диапазонах, число доступных спутников ГЛОНАСС ещё сильнее уменьшается. Это отражается на средней величине PDOP. Однако, сравнивая Рисунки 3.9 и 3.10 можно сделать вывод, что даже для GPS за время наблюдений были промежутки времени, когда величина PDOP превышала значение 15-20, хотя таких моментов было меньше, чем для ГЛОНАСС. В такие моменты времени невозможно получить точное решение ни при использовании GPS, ни при использовании ГЛОНАСС. И тем более невозможно

получить надежное решение пользовательской задачи с правильным целочисленным разрешением неоднозначности (низкой вероятностью аномальной ошибки). Совместное использование ГЛОНАСС и GPS позволяет решить проблему плохой геометрии спутникового созвездия. На Рисунке 3.11 видно, что величина PDOP в случае совместного использования ГЛОНАСС и GPS почти никогда не превышает 10, а трёхмерная ошибка местоопределения – 10 см.

3.2 Применение теории S-преобразования к решению сетевой задачи целочисленного высокоточного абсолютного местоопределения с использованием ГЛОНАСС

3.2.1 Математическая постановка и решение сетевой задачи

Запишем модель измерений P3L3A4-ГЛОНАСС (2.14), выполненных m -й станцией сети совместимых (однородных) станций:

$$\begin{aligned} P_{3,m}^j &= R_m^j + T_{trop,m}^j + T_{P,m} - t_P^j + \varepsilon_{P3,m}^j, \\ L_{3,m}^j &= R_m^j + T_{trop,m}^j + T_{L,m} - t_L^j - \Delta n \lambda_3^j \tilde{N}_{1,m}^j - n_2 \lambda_3^j \tilde{N}_{4,m}^j + \varepsilon_{L3,m}^j, \\ A_{4,m}^j &= B_{A4,m} - b_{A4}^j - \lambda_4^j \tilde{N}_{4,m}^j + \varepsilon_{A4,m}^j. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Для каждой станции определены свои смещения показаний часов $T_{P,m}$, $T_{L,m}$ и MW-смещения $B_{A4,m}$, общие для измерений по всем спутникам каждой станции, однако в математические модели измерений всех станций входят одинаковые смещения показаний часов спутников t_P^j , t_L^j и MW-смещения b_{A4}^j . Измерения всех станций относятся к одному моменту времени (когда показания часов всех станций равны), однако, так как часы всех станций идут независимо, строго говоря все измерения относятся к разным моментам физического времени. Но так как на спутниках установлены высокостабильные стандарты частоты, полагаем, что смещения показаний часов спутников равны для измерений всех станций, относящихся к одному моменту времени.

Целью решения сетевой задачи является оценка смещений показаний спутниковых часов t_P^j , t_L^j и MW-смещения b_{A4}^j . При этом известными полагаются координаты станций и спутников. Поэтому дальности до спутников R_m^j можно считать известными.

При наличии измерений $m = \overline{1, M}$ станций сети, в зоне видимости каждой из которых находится J_m спутников, можно составить следующую систему из $3J_\Sigma$ линейных уравнений:

$$\begin{aligned} dP_{3,m}^j &= w_m^j D_m + T_{P,m} - t_P^j + \varepsilon_{P3,m}^j, & m = \overline{1, M}, \\ dL_{3,m}^j &= w_m^j D_m + T_{L,m} - t_L^j - \Delta n \lambda_3^j \tilde{N}_{1,m}^j - n_2 \lambda_3^j \tilde{N}_{4,m}^j + \varepsilon_{L3,m}^j, & j = \overline{1, J_m}, \\ dA_{4,m}^j &= B_{A4,m} - b_{A4}^j - \lambda_4^j \tilde{N}_{4,m}^j + \varepsilon_{A4,m}^j, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где $dP_{3,m}^j = P_{3,m}^j - R_m^j - T_{trop,model,m}^j$, $dL_{3,m}^j = L_{3,m}^j - R_m^j - T_{trop,model,m}^j$, $dA_{4,m}^j = A_{4,m}^j$ – невязки измерений псевдодальности, псевдофазы и MW-комбинации;

$$J_{\Sigma} = \sum_{m=1}^M J_m - \text{общее число спутников, видимых всеми станциями сети.}$$

Систему уравнений (3.17) будем называть системой линейных уравнений сетевой задачи целочисленного ВАМО. Заметим, что в отличие от системы линейных уравнений пользовательской задачи целочисленного ВАМО (3.4) система (3.17) линейна изначально, для неё не требуется проводить процедуру линеаризации.

Так как сетевая задача связана с обработкой измерений многих станций, причём видимость спутников станциями сети может быть различной, общую картину видимости спутников станциями сети удобно представить в виде «матрицы сценария» [14] $SC_{M \times J}$ (Таблица 5).

Таблица 5 – Пример образования матрицы сценария

	Спутники, видимые сетью станций					Число спутников, видимых m -й станцией
	j m	1	2	...	J	
Станции сети	1	$sc_{1,1}$	$sc_{1,2}$...	$sc_{1,J}$	J_1
	2	$sc_{2,1}$	$sc_{2,2}$...	$sc_{2,J}$	J_2
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	M	$sc_{M,1}$	$sc_{M,2}$...	$sc_{M,J}$	J_M

В Таблице 5 показан принцип формирования матрицы сценария $SC_{M \times J}$ (выделена чёрной рамкой в таблице). Её элементы, $sc_{m,j}$ принимают значения 0 и 1. Если в зоне видимости m -й станции находится j -й спутник, то элемент $sc_{m,j} = 1$, иначе – $sc_{m,j} = 0$. Так как в настоящей работе рассматривается обработка двухчастотных кодовых и псевдофазовых измерений, под видимостью спутника в определённый момент времени полагается наличие в приёмнике двухчастотных измерений псевдодальности и псевдофазы на этот момент, иначе – спутник не считается видимым. Под J понимается число спутников, которые видны хотя бы одной станцией сети, то есть число спутников, смещения показаний часов которых можно оценить, используя измерения сети. При этом не по всякому сценарию можно провести такую оценку. Например, можно представить сценарий, при котором каждая станция видит только один уникальный спутник (диагональная матрица сценария). Конечно, в реальной практике такое маловероятно, тем не менее,

этот теоретический пример иллюстрирует, что существуют некие ограничения на обработку определённых сценариев, которые будут подробнее описаны в ниже.

Систему линейных уравнений (3.17) можно представить в матричном виде:

$$\mathbf{Y}_{net} = \mathbf{H}_{net} \mathbf{x}_{net} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.18)$$

$3J_{\Sigma} \times 1 \quad 3J_{\Sigma} \times nx_{net} \quad nx_{net} \times 1 \quad 3J_{\Sigma} \times 1$

где $\mathbf{Y}_{net} = \begin{bmatrix} d\mathbf{P}_3^T & d\mathbf{L}_3^T & d\mathbf{A}_4^T \\ 1 \times J_{\Sigma} & 1 \times J_{\Sigma} & 1 \times J_{\Sigma} \end{bmatrix}^T$ – вектор невязок измерений псевдодальности, псевдофазы и MW-комбинации, элементы которого упорядочены по станциям, а внутри станций – по спутникам, видимых соответствующей m -й станцией. Составляющие вектор \mathbf{Y}_{net} подвекторы определяются:

$$\begin{aligned} d\mathbf{P}_3 &= \begin{bmatrix} d\mathbf{P}_{3,1}^T & \cdots & d\mathbf{P}_{3,M}^T \\ 1 \times J_1 & & 1 \times J_M \end{bmatrix}^T, \quad d\mathbf{L}_3 = \begin{bmatrix} d\mathbf{L}_{3,1}^T & \cdots & d\mathbf{L}_{3,M}^T \\ J_{\Sigma} \times 1 & & 1 \times J_M \end{bmatrix}^T, \quad d\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} d\mathbf{A}_{4,1}^T & \cdots & d\mathbf{A}_{4,M}^T \\ 1 \times J_1 & & 1 \times J_M \end{bmatrix}^T; \\ d\mathbf{P}_{3,m} &= \begin{bmatrix} d\mathbf{P}_{3,m}^1 & \cdots & d\mathbf{P}_{3,m}^{J_m} \\ J_m \times 1 \end{bmatrix}^T, \quad d\mathbf{L}_{3,m} = \begin{bmatrix} d\mathbf{L}_{3,m}^1 & \cdots & d\mathbf{L}_{3,m}^{J_m} \\ J_m \times 1 \end{bmatrix}^T, \quad d\mathbf{A}_{4,m} = \begin{bmatrix} d\mathbf{A}_{4,m}^1 & \cdots & d\mathbf{A}_{4,m}^{J_m} \\ J_m \times 1 \end{bmatrix}^T; \\ m &= \overline{1, M}; \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}_{net} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^T & \mathbf{T}_P^T & \mathbf{T}_L^T & \mathbf{B}_{A4}^T & \mathbf{t}_P^T & \mathbf{t}_L^T & \mathbf{b}_{A4}^T & \tilde{\mathbf{N}}_1^T & \tilde{\mathbf{N}}_4^T \\ 1 \times M & 1 \times M & 1 \times M & 1 \times M & 1 \times J & 1 \times J & 1 \times J & 1 \times J_{\Sigma} & 1 \times J_{\Sigma} \end{bmatrix}^T \quad (3.19)$$

– вектор исходных переменных сетевой задачи, все возможные значения которого образуют исходное пространство сетевой задачи $\mathcal{X}'_{net} = \mathbb{R}^{nx_{net}}$. Составляющие вектор \mathbf{x}_{net} подвекторы определяются следующим образом:

определяются следующим образом:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_1 & \cdots & D_M \end{bmatrix}^T \text{ – вектор оцениваемых частей вертикальных тропосферных задержек}$$

M станций сети;

$$\mathbf{T}_P = \begin{bmatrix} T_{P,1} & \cdots & T_{P,M} \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{T}_L = \begin{bmatrix} T_{L,1} & \cdots & T_{L,M} \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{B}_{A4} = \begin{bmatrix} B_{A4,1} & \cdots & B_{A4,M} \end{bmatrix}^T \text{ – векторы смещений показаний кодовых, фазовых часов и MW-смещений } M \text{ станций сети;}$$

ний показаний кодовых, фазовых часов и MW-смещений M станций сети;

$$\mathbf{t}_P = \begin{bmatrix} t_P^1 & \cdots & t_P^J \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{t}_L = \begin{bmatrix} t_L^1 & \cdots & t_L^J \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{b}_{A4} = \begin{bmatrix} b_{A4}^1 & \cdots & b_{A4}^J \end{bmatrix}^T \text{ – векторы смещений показаний кодовых, фазовых часов и MW-смещений } J \text{ спутников, видимых одновременной сетью станций;}$$

ний кодовых, фазовых часов и MW-смещений J спутников, видимых одновременной сетью станций;

$$\tilde{\mathbf{N}}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{N}}_{1,1}^T & \cdots & \tilde{\mathbf{N}}_{1,M}^T \\ 1 \times J_1 & & 1 \times J_M \end{bmatrix}^T, \quad \tilde{\mathbf{N}}_4 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{N}}_{4,1}^T & \cdots & \tilde{\mathbf{N}}_{4,M}^T \\ J_{\Sigma} \times 1 & & 1 \times J_M \end{bmatrix}^T;$$

$$\tilde{N}_{1,m} = \begin{bmatrix} \tilde{N}_{1,m}^1 & \cdots & \tilde{N}_{1,m}^{J_m} \end{bmatrix}, \quad \tilde{N}_{4,m} = \begin{bmatrix} \tilde{N}_{4,m}^1 & \cdots & \tilde{N}_{4,m}^{J_m} \end{bmatrix}, \quad m = \overline{1, M} \quad - \text{векторы псевдофазовых}$$

неоднозначностей;

$$n_{x_{net}} = 4M + 3J + 2J_{\Sigma} \quad - \text{количество исходных переменных сетевой задачи};$$

$$\mathbf{H}_{net} \quad - \text{матрица связи вектора невязок } \mathbf{Y}_{net} \quad \text{с вектором исходных переменных } \mathbf{x}_{net} \quad (3.19).$$

Матрица \mathbf{H}_{net} задаётся следующим образом:

$$\mathbf{H}_{net} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_D & \mathbf{H}_T & \mathbf{H}_N \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{H}_D = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_D \\ \mathbf{h}_D \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_D = \begin{bmatrix} w_1^1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ w_1^{J_1} & 0 \\ \ddots & \ddots \\ 0 & w_1^1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & w_1^{J_M} \end{bmatrix} \quad - \text{матрица связи невязок измерений с оцениваемыми}$$

частями вертикальных тропосферных задержек;

$$\mathbf{H}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{U} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{h}_T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{U} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{h}_T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{U} \end{bmatrix} \quad - \text{матрица связи невязок измерений со сме-}$$

щениями показаний кодовых и фазовых часов и MW-смещений станций и спутников;

$$\mathbf{h}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1^T & \cdots & \mathbf{U}_M^T \end{bmatrix}^T \quad - \text{«расщеплённая» матрица сценария, полученная из матриц } \mathbf{U}_m,$$

$m = \overline{1, M}$ путём «расщепления» строк матрицы сценария. Рисунок 3.12 [14] поясняет процесс «расщепления»;

$$\mathbf{H}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{J_\Sigma \times J_\Sigma} & \mathbf{0}_{J_\Sigma \times J_\Sigma} \\ -\Delta n \Lambda_{J_\Sigma \times J_\Sigma} & -n_2 \Lambda_{J_\Sigma \times J_\Sigma} \\ \mathbf{0}_{J_\Sigma \times J_\Sigma} & -(n_1 + n_2) \Lambda_{J_\Sigma \times J_\Sigma} \end{bmatrix} - \text{матрица связи невязок измерений с псевдофазовыми}$$

неоднозначностями, $\Lambda_{J_\Sigma \times J_\Sigma}$ – диагональная матрица, у которой по главной диагонали стоят длины волн λ_3^j видимых спутников, упорядоченные в соответствии с матрицей сценария по станциям и внутри станций – по спутникам;

$\boldsymbol{\varepsilon}_{3J_\Sigma \times 1}$ – вектор случайных ошибок измерений с ковариационной матрицей \mathbf{R}_{Ynet} $_{3J_\Sigma \times 3J_\Sigma}$ Учёт ковариационной матрицы измерений \mathbf{R}_{Ynet} $_{3J_\Sigma \times 3J_\Sigma}$ играет существенную роль при обработке измерений, особенно в алгоритмах целочисленного разрешения неоднозначностей, её нельзя пренебрегать. Алгоритм её вычисления описан в статье [14].

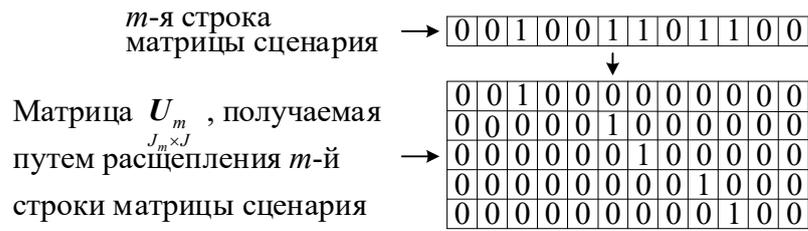


Рисунок 3.12 – Пример из статьи [14] получения «расщеплённой» матрицы \mathbf{U}_m $_{J_m \times J}$

Система уравнений сетевой задачи (3.18) – сингулярна. Для её матрицы коэффициентов – матрицы \mathbf{H}_{net} $_{3J_\Sigma \times nx_{net}}$ – было вычислено два аналитических выражения матрицы базисных векторов её ядра \mathbf{K}_{net} $_{nx_{net} \times d_{net}}$ (один из которых был получен в работе [6]):

$$\mathbf{K}_{net} = \begin{bmatrix} \mathbf{K1}_{net} & \mathbf{K2}_{net} & \mathbf{K3}'_{net} \\ nx_{net} \times 3 & nx_{net} \times 2M & nx_{net} \times 2(J-1) \end{bmatrix}, \tag{3.20}$$

$$\mathbf{K}_{net} = \begin{bmatrix} \mathbf{K1}_{net} & \mathbf{K2}'_{net} & \mathbf{K3}_{net} \\ nx_{net} \times 3 & nx_{net} \times 2(M-1) & nx_{net} \times 2J \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{K1}_{net}^{nx_{net} \times 3} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M \times 1} & \mathbf{0}_{M \times 1} & \mathbf{0}_{M \times 1} \\ \mathbf{1}_{M \times 1} & \mathbf{0}_{M \times 1} & \mathbf{0}_{M \times 1} \\ \mathbf{0}_{M \times 1} & \mathbf{1}_{M \times 1} & \mathbf{0}_{M \times 1} \\ \mathbf{0}_{M \times 1} & \mathbf{0}_{M \times 1} & \mathbf{1}_{M \times 1} \\ \mathbf{1}_{J \times 1} & \mathbf{0}_{J \times 1} & \mathbf{0}_{J \times 1} \\ \mathbf{0}_{J \times 1} & \mathbf{1}_{J \times 1} & \mathbf{0}_{J \times 1} \\ \mathbf{0}_{J \times 1} & \mathbf{0}_{J \times 1} & \mathbf{1}_{J \times 1} \\ \mathbf{0}_{J_{\Sigma} \times 1} & \mathbf{0}_{J_{\Sigma} \times 1} & \mathbf{0}_{J_{\Sigma} \times 1} \\ \mathbf{0}_{J_{\Sigma} \times 1} & \mathbf{0}_{J_{\Sigma} \times 1} & \mathbf{0}_{J_{\Sigma} \times 1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K2}_{net}^{nx_{net} \times 2M} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M \times M} & \mathbf{0}_{M \times M} \\ \mathbf{0}_{M \times M} & \mathbf{0}_{M \times M} \\ (n_1 - n_2)\Delta\lambda_3 \mathbf{E}_{M \times M} & n_2\Delta\lambda_3 \mathbf{E}_{M \times M} \\ \mathbf{0}_{M \times M} & (n_1 + n_2)\Delta\lambda_3 \mathbf{E}_{M \times M} \\ \mathbf{0}_{J \times M} & \mathbf{0}_{J \times M} \\ \mathbf{G}_{net}^{J_{\Sigma} \times M} & \mathbf{0}_{J_{\Sigma} \times M} \\ \mathbf{0}_{J_{\Sigma} \times M} & \mathbf{G}_{net}^{J_{\Sigma} \times M} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{K3}_{net}^{nx_{net} \times 2J} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M \times J} & \mathbf{0}_{M \times J} \\ \mathbf{0}_{J \times J} & \mathbf{0}_{J \times J} \\ -\Delta n \mathbf{\Lambda}_{J \times J} & -n_2 \mathbf{\Lambda}_{J \times J} \\ \mathbf{0}_{J \times J} & -(n_1 + n_2) \mathbf{\Lambda}_{J \times J} \\ \mathbf{U}_{J_{\Sigma} \times J} & \mathbf{0}_{J_{\Sigma} \times J} \\ \mathbf{0}_{J_{\Sigma} \times J} & \mathbf{U}_{J_{\Sigma} \times J} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_{net}^{J_{\Sigma} \times M} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1^{J_1 \times 1} & \mathbf{0}_{J_1 \times 1} & \mathbf{0}_{J_1 \times 1} \\ \mathbf{0}_{J_2 \times 1} & \mathbf{g}_2^{J_2 \times 1} & \mathbf{0}_{J_2 \times 1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_{J_M \times 1} & \mathbf{0}_{J_M \times 1} & \mathbf{g}_M^{J_M \times 1} \end{bmatrix};
\end{aligned}$$

$\mathbf{g}_m = [\mathbf{g}_1 \ \cdots \ \mathbf{g}_{J_m}]^T = [2848 + lit^1 \ \cdots \ 2848 + lit^{J_m}]^T$, $m = \overline{1, M}$ – все векторы \mathbf{g}_m соответ-

ствуют спутникам, видимым m -й станцией;

$d_{net} = 3 + 2(M + J - 1)$ – недостаток ранга системы (3.18) и матрицы $\mathbf{H}_{net}^{3J_{\Sigma} \times nx_{net}}$. Таким образом,

ранг матрицы $\mathbf{H}_{net}^{3J_{\Sigma} \times nx_{net}}$ $\text{rank} \left(\mathbf{H}_{net}^{3J_{\Sigma} \times nx_{net}} \right) = nx_{net} - d_{net} = 4M + 3J + 2J_{\Sigma} - 3 - 2(M + J - 1) =$

$= 2M + J + 2J_{\Sigma} - 3$. Отсюда вытекает минимальное ограничение на количество измерений (то

есть на суммарное число спутников J_{Σ}) для решения сетевой задачи: $(3J_{\Sigma})_{\min} = \text{rank} \left(\mathbf{H}_{net}^{3J_{\Sigma} \times nx_{net}} \right)$, то

есть $3J_{\Sigma} \geq 2M + J + 2J_{\Sigma} - 3$ или

$$J_{\Sigma} \geq 2M + J - 3. \quad (3.21)$$

Верхний штрих в выражениях $\mathbf{K2}'_{net}$, $\mathbf{K3}'_{net}$ означает выбрасывание из исходных матриц $\mathbf{K2}_{net}$ и $\mathbf{K3}_{net}$ произвольного i -го, $(M+i)$ -го ($i \leq M$) и k -го, $(J+k)$ -го ($k \leq J$) столбцов соответственно, так как они оказываются линейно зависимыми с остальными столбцами матрицы \mathbf{K}_{net} .

Аналитическое выражение для базисных векторов ядра \mathbf{K}_{net} (3.20) справедливо не для всех матриц сценария, подобно тому, как выражение для базисных векторов ядра пользовательской задачи \mathbf{K} (3.6) было справедливо только для случая, когда в зоне видимости НАП находятся 5 спутников и более. Поэтому, подобно пользовательской задаче, можно выделить класс особых случаев матрицы сценария, при которых недостаток ранга системы уравнений сетевой задачи (3.18) оказывается не равен (больше, чем) $d_{net} = 3 + 2(M + J - 1)$.

Критерии отнесения матрицы сценария к классу особых были описаны в работе [16]: «в число особых случаев матриц сценария входят: матрица сценария, в котором некоторая m -я станция сети видит только один спутник, который при этом виден только этой станцией; матрица сценария, в котором некоторая m -я станция сети видит $J_m > 1$ спутников, при этом $J_m - 1$ этих спутников видит только эта же станция. Вывод таких матриц из числа особых осуществляется путем отбрасывания из них строки, содержащей измерения m -й станции [16]».

Также в число особых можно включить такие матрицы сценария, которые можно разбить на несколько независимых матриц сценария, то есть в них присутствуют несколько групп станций (по крайней мере две), которые видят свой, уникальной только для этой группы набор спутников. Например, если все станции одной группы сосредоточены на севере, а второй группы – на юге Земли. Такие матрицы сценария следует разбить на две отдельные и обрабатывать как две независимые сетевые задачи.

Кроме того, можно численно вычислить ранг матрицы \mathbf{H}_{net} и сравнить его с аналитическим выражением $2M + J + 2J_\Sigma - 3$. В случае, если ранг матрицы \mathbf{H}_{net} , вычисленный численно, совпадает с результатом расчёта по формуле, можно полагать, что матрица сценария не относится к классу особых. Кроме того, для любой матрицы сценария должно выполняться выражение (3.21) (минимальное необходимое количество измерений всей сети станций).

Кроме принципиальной возможности вычисления сетевого решения конфигурация сети влияет и на качество решения. Можно дать общие рекомендации: сеть станций должна быть относительно равномерной, не должно быть отдельных далеко стоящих станций, и видящих свой

(уникальный) набор спутников. Более подробно влияние структуры наземной сети станций на качество вычисляемых ВКП рассмотрено в работе [85].

Из аналитического выражения для базисных векторов ядра \mathbf{K}_{net} (3.20) видно, что недостаток ранга матрицы \mathbf{H}_{net} d_{net} зависит от сети (количества станций M) и количества спутников, видимых одновременно всей сетью станций J , то есть зависит от матрицы сценария, поэтому может меняться во времени. Все исходные переменные сетевой задачи, кроме оцениваемых частей вертикальных тропосферных задержек $\mathbf{D}_{M \times 1}$, будут оцениваться смещённо, так как базисные векторы ядра содержат нулевые элементы только в первых M строках.

Аналитическое выражение для матрицы базисных векторов ядра сетевой задачи \mathbf{K}_{net} (3.20) значительно более сложное, чем для пользовательской задачи (3.6). Тем не менее, так как эти системы уравнений (для сетевой задачи – (3.18) и для пользовательской задачи – (3.4)) основаны на одной модели измерений ((1.5) – при выражении на исходных частотах и (2.14) – при формировании ifr- и MW-комбинаций), поэтому у матриц базисных векторов ядер есть сходства, например, подвекторы, зависящие от спутниковых литер \mathbf{g}_m . Поэтому принцип решения этих систем уравнений очень похож.

В связи с тем, что недостаток ранга d_{net} меняется во времени, так как зависит от матрицы сценария, S-пространство также будет меняться во времени и зависеть от матрицы сценария. В разделе 2.2 было сформулировано правило задания S-пространства в наиболее простом виде (2.24) с помощью матрицы базисных векторов S[⊥]-пространства: необходимо, чтобы положения единиц в матрице базисных векторов S[⊥]-пространства соответствовали различным ненулевым элементам матрицы базисных векторов ядра, причём выбранные элементы (то есть переменные) оказываются смещающими для остальных смещённо оцениваемых переменных. Так как матрица \mathbf{K}_{net} (3.20) задана в блочном виде, логично было бы и матрицу базисных векторов S[⊥]-пространства задавать в блочном виде в соответствии с блоками матрицы \mathbf{K}_{net} (3.20):

$$\mathbf{S}_{net}^{\perp} = \begin{bmatrix} \mathbf{S1}_{net}^{\perp} & \mathbf{S2}_{net}^{\perp} & \mathbf{S3}_{net}^{\perp} \\ nx_{net} \times d_{net} & nx_{net} \times 3 & nx_{net} \times 2M & nx_{net} \times 2(J-1) \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Каждый из блоков матрицы базисных векторов ядра \mathbf{K}_{net} (3.20) – $\mathbf{K1}_{net}$, $\mathbf{K2}_{net}$, $\mathbf{K3}_{net}$ – показывает линейную зависимость между столбцами матрицы \mathbf{H}_{net} соответствующими

определённым исходным переменным, вызывающую сингулярность матрицы \mathbf{H}_{net} и порождающую бесчисленное множество решений системы (3.18). $\mathbf{K1}_{net}$ – зависимость между переменными T_P , T_L , B_{A4} и t_P , t_L , b_{A4} соответственно. $\mathbf{K2}_{net}$ – зависимость переменными T_L , B_{A4} и \tilde{N}_1 , \tilde{N}_4 соответственно. $\mathbf{K3}_{net}$ – зависимость между переменными t_L , b_{A4} и \tilde{N}_1 , \tilde{N}_4 соответственно.

Таким образом, первый блок $\mathbf{S1}_{net}^\perp$ определяет смещение оценок часов и не влияет на оценки псевдофазовых неоднозначностей. Так как в системе уравнений сетевой задачи три типа часов – кодовые, псевдофазовые и смещение Мельбурна-Вуббены, то необходимо назначить для каждого типа свою смещающую переменную. В общем случае их можно назначать независимо, но наиболее удобным является способ задать в качестве смещающей переменной смещение часов одной из станций (назовём эту станцию опорной и обозначим r) [14; 18; 38]. Известен также способ задать в качестве смещающей переменной усреднённое смещение часов всех станций [38]. Однако первый способ выглядит более предпочтительным, так как в качестве опорной можно выбрать станцию, на которой установлен высокостабильный (водородный) стандарт частоты, который обеспечивает стабильное смещение показаний часов этой станции на большом промежутке времени. Кроме того, если, например, опорная станция будет подключена к опорному генератору, задающему шкалу времени системы ГЛОНАСС, измерения этой опорной станции и, следовательно, оценки смещений показаний спутниковых часов будут «абсолютными» в том смысле, что не будут включать в себя смещение показаний часов НАП относительно шкалы времени системы ГЛОНАСС.

Таким образом, аналитическое выражение для $\mathbf{S1}_{net}^\perp$ имеет вид:

$$\mathbf{S1}_{net}^\perp = \begin{bmatrix} \mathbf{1}^{M+r} & \mathbf{1}^{2M+r} & \mathbf{1}^{3M+r} \\ \mathbf{1}_{nx_{net} \times 1} & \mathbf{1}_{nx_{net} \times 1} & \mathbf{1}_{nx_{net} \times 1} \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

где r – номер опорной станции.

В результате все оценки переменных T_P , T_L , B_{A4} , t_P , t_L и b_{A4} получили одинаковое действительное смещение $T_{P,r}$, $T_{L,r}$ и $B_{A4,r}$ соответственно.

Блоки $\mathbf{S2}_{net}^\perp$ и $\mathbf{S3}_{net}^\perp$ влияют на оценки псевдофазовых неоднозначностей, поэтому в качестве смещающих переменных (которых всего надо выбрать $2(M+J-1)$) необходимо

выбирать только псевдофазовые неоднозначности. Поэтому анализировать будем не матрицы

$\mathbf{K2}_{net}$, $\mathbf{K3}_{net}$ целиком, а только их нижние $2J_\Sigma$ строки, а с учётом симметрии, только блок

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{net} & \mathbf{U} \\ J_\Sigma \times M & J_\Sigma \times J \end{bmatrix}.$$

Таким образом, необходимо выбрать из векторов исходных псевдофазовых неоднозначностей $\tilde{\mathbf{N}}_1$, $\tilde{\mathbf{N}}_4$ ($2J_\Sigma$ переменных) $2(M+J-1)$ различных смещающих переменных так, чтобы

каждая соответствовала одному ненулевому элементу одного из столбцов блока $\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{net} & \mathbf{U} \\ J_\Sigma \times M & J_\Sigma \times J \end{bmatrix}$ и

полученное S-пространство свойству дополнения пространства ядра до пространства исходных переменных. В силу симметрии задачи достаточно рассмотреть один набор неоднозначностей и

один блок матриц $\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{net} & \mathbf{U} \\ J_\Sigma \times M & J_\Sigma \times J \end{bmatrix}$ – для второго набора неоднозначностей ситуация будет аналогич-

ная. При этом рассматривать следует не все $M+J$ столбцы блока $\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{net} & \mathbf{U} \\ J_\Sigma \times M & J_\Sigma \times J \end{bmatrix}$, а только

$M+J-1$, так как оставшийся неучтённый недостаток ранга равен (с учётом симметрии)

$M+J-1$ и блок $\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{net} & \mathbf{U} \\ J_\Sigma \times M & J_\Sigma \times J \end{bmatrix}$ не входит в матрицу базисных векторов ядра \mathbf{K}_{net} (3.20) полно-

стью: либо из \mathbf{G}_{net} либо из \mathbf{U} следует отбросить произвольный столбец.

Подобно решению пользовательской задачи, будем использовать алгоритм задания S-пространства, известный для системы GPS [16]. Таким образом, алгоритм выбора набора базисных векторов S^\perp -пространства можно представить следующим образом:

1. В начале искомый набор базисных векторов S^\perp -пространства пуст.

2. Рассматриваются (в общем случае в произвольном порядке) столбцы блока матриц

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{net} & \mathbf{U} \\ J_\Sigma \times M & J_\Sigma \times J \end{bmatrix}.$$

3. В каждом n -м столбце выбирается ненулевой элемент (обозначим его номер r_n). Так как каждая строка матрицы \mathbf{K}_{net} (3.20) соответствует одной из исходных переменных, каждая

строка рассматриваемого блока $\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{net} & \mathbf{U} \\ J_\Sigma \times M & J_\Sigma \times J \end{bmatrix}$ соответствует одной из исходных псевдофазовых

неоднозначностей. Таким образом, выбранный ненулевой элемент блока $\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{net} & \mathbf{U} \\ J_\Sigma \times M & J_\Sigma \times J \end{bmatrix}$

соответствует одной из неоднозначностей \tilde{N}_1 (и одной из \tilde{N}_4 в силу симметрии), которая становится смещающей. В набор базисных векторов S^\perp -пространства добавляется вектор $\mathbf{1}_{\substack{4M+3J+r_n \\ nx_{net} \times 1}}$ (и $\mathbf{1}_{\substack{4M+3J+J_\Sigma+r_n \\ nx_{net} \times 1}}$ в силу симметрии задачи). Для уменьшения шумов измерений оценок элементы n -го столбца следует рассматривать в порядке уменьшения угла места соответствующего спутника (уменьшении дисперсии ошибок соответствующих измерений).

4. Шаг 3 повторяется для $n = \overline{1, (M + J - 1)}$ до тех пор, пока набор базисных векторов S^\perp -пространства не составит матрицу
$$\begin{bmatrix} \mathbf{S2}_{net}^\perp & \mathbf{S3}_{net}^\perp \\ nx_{net} \times 2M & nx_{net} \times 2(J-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{\substack{4M+3J+r_n \\ nx_{net} \times 1}} & \mathbf{1}_{\substack{4M+3J+J_\Sigma+r_n \\ nx_{net} \times 1}} \end{bmatrix}, \quad n = \overline{1, (M + J - 1)},$$
 причём необходимо, чтобы числа r_n были различны $r_1 \neq r_2 \neq \dots r_{M+J-1}$.

Таким образом, получен полный набор базисных векторов S^\perp -пространства
$$\mathbf{S}_{net}^\perp = \begin{bmatrix} \mathbf{S1}_{net}^\perp & \mathbf{S2}_{net}^\perp & \mathbf{S3}_{net}^\perp \\ nx_{net} \times d_{net} & nx_{net} \times 3 & nx_{net} \times 2M & nx_{net} \times 2(J-1) \end{bmatrix}.$$
 Аналогичный алгоритм был получен в работе [16] для ГНСС с КРК на основе теории решетчатых упаковок.

При решении задачи целочисленного ВАМО по сигналам ГНСС с КРК обычно для формирования матрицы базисных векторов S^\perp -пространства используется алгебраическая теория графов и такие понятия, как «граф сети станций» и «остовное дерево (минимальное остовное дерево) сети» (GNSS grid, GNSS graph, spanning tree, minimum spanning tree) [38; 66; 67]. Этот подход использовался также в работе [18]. Такой же подход может быть использован при решении сетевой задачи ГЛОНАСС: результат выбора базисных векторов S^\perp -пространства, полученный по описанному выше алгоритму, совпадает с результатом выбора S^\perp -пространства в соответствии с остовным деревом графа. Тем не менее с помощью теории графов невозможно вычислить аналитические выражения оцениваемых переменных без определения аналитического выражения базисных векторов ядра \mathbf{K}_{net} (3.20). Таким образом, использование теории графов может быть удобно при совместной обработке измерений ГНСС с частотным и кодовым разделением, так как в таком случае не потребуются существенная модернизация программного обеспечения для обработки измерений сигналов с частотным разделением.

Общая укрупнённая блок-схема алгоритма решения сетевой задачи целочисленного ВАМО приведена в Приложении Г.

3.2.2 Пример вычисления аналитического выражение оцениваемого в сетевой задаче вектора

Проиллюстрируем выбор S^\perp -пространства и вычисление аналитического выражение оцениваемого в результате решения сетевой задачи вектора на примере простой матрицы сценария (Таблица 6) [6].

Таблица 6 – Пример простой матрицы сценария

	Спутники, видимые сетью станций				Число спутников, видимых m -й станцией	
	$m \backslash j$	1	2	3		4
Станции сети	1	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	0	3
	2	<u>1</u>	0	1	<u>1</u>	3
	3	0	1	1	<u>1</u>	3

В соответствии со сценарием в Таблице 6 $M = 3$ станции видят $J = 4$ спутника, при этом не все станции видят весь набор спутников (что обычно и бывает на практике), $J_\Sigma = 9$, $nx_{net} = 42$. Выделение цветом и подчёркивание некоторых значений в таблице будет пояснено ниже. Условие (3.21) выполняется: $(J_\Sigma = 9) > (2M + J - 3 = 7)$, то есть матрица сценария не относится к классу особых и пригодна для определения ВКП с помощью теории S-преобразования.

Вектор исходных переменных \mathbf{x}_{net} состоит из следующих подвекторов:

$$\mathbf{D} = [D_1 \quad D_2 \quad D_3]^T;$$

$$\mathbf{T}_P = [T_{P,1} \quad T_{P,2} \quad T_{P,3}]^T, \quad \mathbf{T}_L = [T_{L,1} \quad T_{L,2} \quad T_{L,3}]^T, \quad \mathbf{B}_{A4} = [B_{A4,1} \quad B_{A4,2} \quad B_{A4,3}]^T;$$

$$\mathbf{t}_P = [t_P^1 \quad t_P^2 \quad t_P^3 \quad t_P^4]^T, \quad \mathbf{t}_L = [t_L^1 \quad t_L^2 \quad t_L^3 \quad t_L^4]^T, \quad \mathbf{b}_{A4} = [b_{A4}^1 \quad b_{A4}^2 \quad b_{A4}^3 \quad b_{A4}^4]^T;$$

$$\tilde{\mathbf{N}}_1 = [\tilde{N}_{1,1}^1 \quad \tilde{N}_{1,1}^2 \quad \tilde{N}_{1,1}^3 \quad \tilde{N}_{1,2}^1 \quad \tilde{N}_{1,2}^3 \quad \tilde{N}_{1,2}^4 \quad \tilde{N}_{1,3}^2 \quad \tilde{N}_{1,3}^3 \quad \tilde{N}_{1,3}^4]^T;$$

$$\tilde{\mathbf{N}}_4 = [\tilde{N}_{4,1}^1 \quad \tilde{N}_{4,1}^2 \quad \tilde{N}_{4,1}^3 \quad \tilde{N}_{4,2}^1 \quad \tilde{N}_{4,2}^3 \quad \tilde{N}_{4,2}^4 \quad \tilde{N}_{4,3}^2 \quad \tilde{N}_{4,3}^3 \quad \tilde{N}_{4,3}^4]^T.$$

В качестве опорной станции выберем первую станцию, то есть $\mathbf{S1}_{net}^\perp = \begin{bmatrix} \mathbf{1}^4 & \mathbf{1}^7 & \mathbf{1}^{10} \\ nx_{net} \times 1 & nx_{net} \times 1 & nx_{net} \times 1 \end{bmatrix}$.

Для отыскания $\begin{bmatrix} \mathbf{S2}_{net}^\perp & \mathbf{S3}_{net}^\perp \\ n_{x_{net}} \times 2M & n_{x_{net}} \times 2(J-1) \end{bmatrix}$ составим блок матриц $\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{net} & \mathbf{U} \\ J_\Sigma \times M & J_\Sigma \times J \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{net} & \mathbf{U} \\ 9 \times 3 & 9 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{g^1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ g^2 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 0 & 0 \\ g^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & \underline{g^1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g^3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & g^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} \\ 0 & 0 & g^2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g^3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{g^4} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{SN}_{net}^\perp = \begin{bmatrix} \underline{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Красным цветом и подчёркиванием выделены выбранные элементы матрицы, которые соответствуют смещающим переменным. В матрице сценария в Таблице 6 таким же образом выделены соответствующие спутники. Этот набор спутников соответствует одному из возможных остовных деревьев, полученному по графу матрицы сценария в Таблице 6. Такому выбору S^\perp -пространства соответствует матрица

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S2}_{net}^\perp & \mathbf{S3}_{net}^\perp \\ 42 \times 6 & 42 \times 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 24 \times 6 & 24 \times 6 \\ \mathbf{SN}_{net}^\perp & \mathbf{0} \\ 9 \times 6 & 9 \times 6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{SN}_{net}^\perp \\ 9 \times 6 & 9 \times 6 \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

После того, как полностью задана матрица базисных векторов S^\perp -пространства, можно вычислить матрицу проекции и аналитическое выражение для матрицы оцениваемого вектора. Так как выражение для матрицы проекции \mathbf{P}_S слишком громоздко, сразу приведём выражения для подвекторов оцениваемого вектора $\mathbf{x}_{S,net} = \mathbf{P}_S \mathbf{x}_{net}$ (они вынесены в Приложение Д). Далее подробно будут рассмотрены только подвекторы, представляющие наибольший интерес при решении сетевой задачи.

Тропосферная задержка \mathbf{D}_s , как и ожидалось, оценивается однозначно (без смещения).

Однако остальные оцениваемые переменные получили различное смещение. Рассмотрим подвекторы ветвора $\mathbf{x}_{S,net} : \mathbf{t}_{PS}, \mathbf{t}_{LS}, \mathbf{b}_{A4S}$ – ВКП, оценка которых является целью решения сетевой задачи и $\mathbf{N}_{1S}, \mathbf{N}_{4S}$ – целочисленное свойство которых позволит применять алгоритмы

целочисленного разрешения неоднозначности для решения сетевой задачи. Оценим, насколько эти смещения удовлетворяют требованиям, предъявляемым к ВКП.

Все элементы вектор \mathbf{t}_{PS} имеют одинаковое действительное смещение, поэтому можно заключить, что оценки этого вектора годятся для решения пользовательской задачи целочисленного ВАМО. Также видно, что смещения оценок \mathbf{t}_{LS} и \mathbf{b}_{A4S} совпадают (с той лишь разницей, что \mathbf{t}_{LS} смещают как неоднозначности \tilde{N}_1 , так и неоднозначности \tilde{N}_2). Поэтому подробно рассмотрим только \mathbf{b}_{A4S} .

Выразим действительные псевдофазовые неоднозначности с учётом выражений $\tilde{N}_{1,m}^j = N_{1,m}^j - \varphi_{01,m}$, $\tilde{N}_{4,m}^j = N_{4,m}^j - \varphi_{04,m}$, введённых в (2.14), через исходные целочисленные неоднозначности и фазовые задержки:

$$\mathbf{b}_{A4S} = \begin{bmatrix} b_{A4}^1 - B_{A4,1} - \lambda_4^1 \varphi_{04,1} + \lambda_4^1 N_{4,1}^1 \\ b_{A4}^2 - B_{A4,1} - \lambda_4^2 \varphi_{04,1} + \lambda_4^2 N_{4,1}^2 \\ b_{A4}^3 - B_{A4,1} - \lambda_4^3 \varphi_{04,1} + \lambda_4^3 N_{4,1}^3 \\ b_{A4}^4 - B_{A4,1} - \lambda_4^1 \varphi_{04,1} + (\lambda_4^1 - \lambda_4^4) \varphi_{04,2} + \lambda_4^1 (N_{4,1}^1 - N_{4,2}^1) + \lambda_4^4 N_{4,2}^4 \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Видно, что действительное смещение (не считая $B_{A4,1}$ опорной станции) у всех оцениваемых комбинаций b_{A4S}^j различное и смещающие целочисленные неоднозначности могут входить в оцениваемые комбинации различных спутников с различными длинами волн.

Однако при более подробном рассмотрении слагаемым $(\lambda_4^1 - \lambda_4^4) \varphi_{04,2}$ можно пренебречь ввиду его малости, так как $|\varphi_{04,m}| \leq 0,5$ цикла $\forall m$ и $|\lambda_4^i - \lambda_4^j| \leq 0,39$ см $\forall i \neq j$.

В оценку \mathbf{b}_{A4S} 4-го спутника входят целочисленные неоднозначности $(N_{4,1}^1 - N_{4,2}^1)$ и $N_{4,2}^4$ с коэффициентами λ_4^1 и λ_4^4 (длины волн неоднозначностей равны длинам волн соответствующих спутников). Так как спутниковые длины волн различны для спутников, коэффициенты перед этими слагаемыми тоже различны и их нельзя объединить. Однако длины волн ГЛОНАСС λ_4^j различаются не сильно, то есть $\Delta \lambda_4^{i-j} = |\lambda_4^i - \lambda_4^j| \leq 0,39$ см, поэтому $\lambda_4^1 (N_{4,1}^1 - N_{4,2}^1) + \lambda_4^4 N_{4,2}^4 = \Delta \lambda_4^{1-4} (N_{4,1}^1 - N_{4,2}^1) + \lambda_4^4 (N_{4,2}^4 + N_{4,1}^1 - N_{4,2}^1) \approx \lambda_4^4 (N_{4,2}^4 + N_{4,1}^1 - N_{4,2}^1)$ с точностью до $-\Delta \lambda_4^{1-4} (N_{4,1}^1 - N_{4,2}^1)$. В таком случае

$$\mathbf{b}_{4 \times 1}^{A4S} \approx \begin{bmatrix} b_{A4}^1 - B_{A4,1} - \lambda_4^1 \Phi_{04,1} + \lambda_4^1 N_{4,1}^1 \\ b_{A4}^2 - B_{A4,1} - \lambda_4^2 \Phi_{04,1} + \lambda_4^2 N_{4,1}^2 \\ b_{A4}^3 - B_{A4,1} - \lambda_4^3 \Phi_{04,1} + \lambda_4^3 N_{4,1}^3 \\ b_{A4}^4 - B_{A4,1} - \lambda_4^4 \Phi_{04,1} + \lambda_4^4 (N_{4,2}^4 + N_{4,1}^1 - N_{4,2}^1) \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

и такой вид уже удовлетворяет требованиям, предъявляемым к ВКП в пользовательской задаче. В силу симметрии задачи аналитические выражения $\mathbf{t}_{4 \times 1}^{LS}$ можно преобразовать таким же образом.

Теперь оценим, насколько отличаются от целых чисел оценки $N_{9 \times 1}^{1S}$, $N_{9 \times 1}^{4S}$. Так как вид оцениваемых комбинаций у них полностью совпадает, рассмотрим только $N_{9 \times 1}^{1S}$. Выразим действительные псевдофазовые неоднозначности с учётом выражений $\tilde{N}_{1,m}^j = N_{1,m}^j - \Phi_{01,m}$, $\tilde{N}_{4,m}^j = N_{4,m}^j - \Phi_{04,m}$, введённых в (2.14) через исходные целочисленные неоднозначности и фазовые задержки и рассмотрим только ненулевые элементы вектора $N_{9 \times 1}^{1S}$:

$$\begin{aligned} & N_{1,2}^3 - N_{1,1}^3 + \frac{g^3}{g^1} N_{1,1}^1 - \frac{g^3}{g^1} N_{1,2}^1 - \Phi_{01,2} \left(1 - \frac{g^3}{g^1} \right) - \Phi_{01,1} \left(\frac{g^3}{g^1} - 1 \right), \\ & N_{1,3}^2 - N_{1,1}^2 + \frac{g^2}{g^1} (N_{1,1}^1 - N_{1,2}^1) + \frac{g^2}{g^4} (N_{1,2}^4 - N_{1,3}^4) - \Phi_{01,1} \left(\frac{g^2}{g^1} - 1 \right) - \Phi_{01,2} \left(\frac{g^2}{g^4} - \frac{g^2}{g^1} \right) - \\ & \quad - \Phi_{01,3} \left(1 - \frac{g^2}{g^4} \right), \\ & N_{1,3}^3 - N_{1,1}^3 + \frac{g^3}{g^1} (N_{1,1}^1 - N_{1,2}^1) + \frac{g^3}{g^4} (N_{1,2}^4 - N_{1,3}^4) - \Phi_{01,1} \left(\frac{g^3}{g^1} - 1 \right) - \Phi_{01,2} \left(\frac{g^3}{g^4} - \frac{g^3}{g^1} \right) - \\ & \quad - \Phi_{01,3} \left(1 - \frac{g^3}{g^4} \right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Оцениваемые комбинации целочисленных неоднозначностей отличаются от целых чисел за счёт присутствия в них действительных слагаемых (начальные фазы $\Phi_{01,m}$) и отличия от целых чисел коэффициентов перед неоднозначностями $\frac{g^i}{g^k}$.

Так как начальные фазы $|\Phi_{01,m}| \leq 0,5$ цикла $\forall m$ и целые числа $g^j \in [2841; 2854]$, то есть

$$\left| \frac{g^i}{g^k} - \frac{g^i}{g^n} \right| < 9,1 \times 10^{-3} \text{ то всеми слагаемыми начальными фазами в можно пренебречь.}$$

Для оценки того, насколько отличаются от целых чисел слагаемые типа $\frac{g^i}{g^k} (N_{1,m1}^k - N_{1,m2}^k)$,

представим отношение $\frac{g^i}{g^k}$ в виде $\frac{g^i}{g^k} = \frac{g^k + \Delta g^{i-k}}{g^k} = 1 + \frac{\Delta g^{i-k}}{g^k}$, где $\Delta g^{i-k} = g^i - g^k$. В наихудшем

случае, когда $\Delta g^{i-k} = 2854 - 2841 = 13$ и $g^k = 2841$ $\frac{\Delta g^{i-k}}{g^k} = \frac{13}{2841} \approx 0,00046$ (наибольшее отличие

от единицы). Однако, принимая во внимание, что в (3.28) входит до четырёх целочисленных слагаемых с таким коэффициентом, если каждая исходная неоднозначность будет равна 8, отличие всех комбинации от целого числа может достигнуть до 0,15 цикла. Поэтому необходимо уделять особое внимание согласованию псевдофазовых измерений с кодовыми (т.е. уменьшению величин неопределённых целых – псевдофазовых неоднозначностей) или не использовать алгоритмы целочисленного разрешения неоднозначностей при решении сетевой задачи. Хотя эта оценка дана для наименее благоприятного распределения литер видимых спутников ГЛОНАСС (при наибольшем разбросе величин литер и, следовательно, наибольшем различии длин волн сигналов различных спутников ГЛОНАСС) и вероятность появления именно такого неблагоприятного распределения литер при обработке измерений по реальной сети станций относительно невелика.

Таким образом, при выборе S-пространства при решении сетевой задачи следует с одной стороны стремиться включать в базис S^\perp -пространства наиболее высокие спутники (для минимизации дисперсии оцениваемых неоднозначностей), а с другой, такие спутники, которые при формировании линейных комбинаций оцениваемых неоднозначностей давали бы коэффициенты наиболее близкие к единице (для минимизации аномальной ошибки при целочисленном разрешении таких нестрогих целочисленных оценок).

3.2.3 Экспериментальные результаты решения сетевой задачи

В настоящем разделе приведены результаты решения сетевой задачи, полученные из обработки измерений 5 станций, локально расположенных на территории Российской Федерации (Рисунок 3.1). Обработывались суточные измерения от 13.08.2021 с темпом 30 с на интервале с 01 часа до 23 часов. Протяжённость сети с запада на восток – около 2 тыс. км (30 градусов по долготе) между г. Колпашево и г. Чита; с севера на юг – около 870 км (6 градусов по широте) между г. Усть-Илимск и г. Кызыл. В качестве опорной была выбрана станция, расположенная в г. Иркутск, так как эта НАП оборудована внешним высокостабильным водородным стандартом частоты. Для оценки ВКП, также как и в пользовательской задаче применялись алгоритмы калмановской фильтрации, основанные на «квадратных корнях» матриц [56]. В сетевой задаче они

особенно эффективны, так как её размерность задачи больше и численная определённость значительно хуже.

На Рисунках 3.13, 3.14. приведены графики зависимости от времени оценённых по измерениям сети станций ВКП – смещений показаний спутниковых часов $t_{PS}^{J \times 1}$, $t_{LS}^{J \times 1}$ и смещений Мельбурна-Вуббены $b_{A4S}^{J \times 1}$ для спутника ГЛОНАСС № 1.

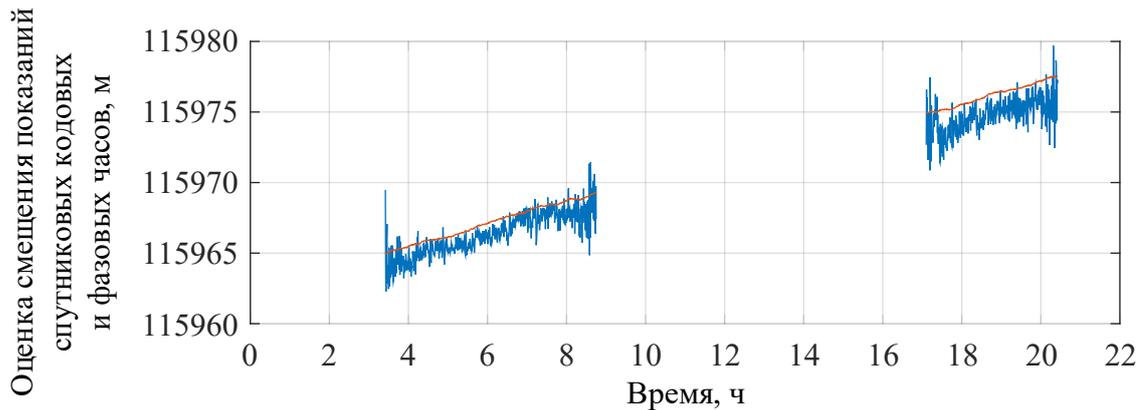


Рисунок 3.13 – График зависимости от времени оценок смещений показаний кодовых (синяя кривая) и фазовых (красная кривая) спутниковых часов, полученных в результате решения сетевой задачи

Так как используется локальная сеть, спутники не находятся в зоне видимости этой сети непрерывно, с связи с этим оценки смещений часов в течение суток прерываются. Видно, что на границах зон видимости спутников шум оценок повышается. Это связано с тем, что на границах зоны видимости спутники имеют малые углы места и измерения по ним имеют бóльший уровень шума, кроме того, на границах зон видимости они видны меньшим числом станций. Также на Рисунке 3.13 видно, что шум оценок смещений показаний фазовых часов значительно меньше, чем кодовых, так как фазовые измерения имеют примерной на два порядка меньший уровень шума.

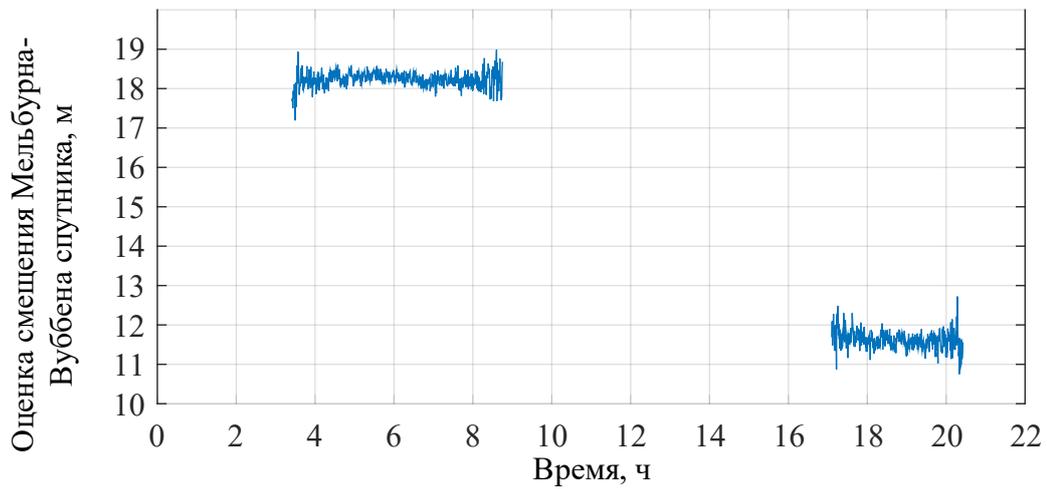


Рисунок 3.14 – График зависимости от времени оценок спутниковых смещений Мельбурна-Вуббены

На Рисунке 3.14 видно характерное увеличение шума оценок спутниковых MW-смещений на границах зоны видимости, а также то, что MW-смещение спутника достаточно стабильно во времени. Так как смещения показаний спутниковых часов t_{PS} , t_{LS} и смещений Мельбурна-Вуббены b_{A4S} оценивается неоднозначно (со смещением), то при новом заходе спутника в зону видимости сети, так как меняются величины псевдофазовых неоднозначностей и S-пространство, то меняется и величина этого смещения. Видно, что оценка b_{A4S} на Рисунке 3.14 при втором заходе спутника в зону видимости сети в районе 17-21 часа и при первом в районе 3-9 часов различаются величиной смещения. Однако недопустимо, чтобы в течение интервала видимости спутника это смещение менялось, так как при передаче таких оценок потребителю в качестве ВКП это явление на стороне потребителя будет восприниматься как срыв слежения за фазой несущей.

На Рисунке 3.15 приведены действительные оценки \hat{N}_{4S} неоднозначностей N_{4S} , полученные при решении сетевой задачи до их целочисленного разрешения.

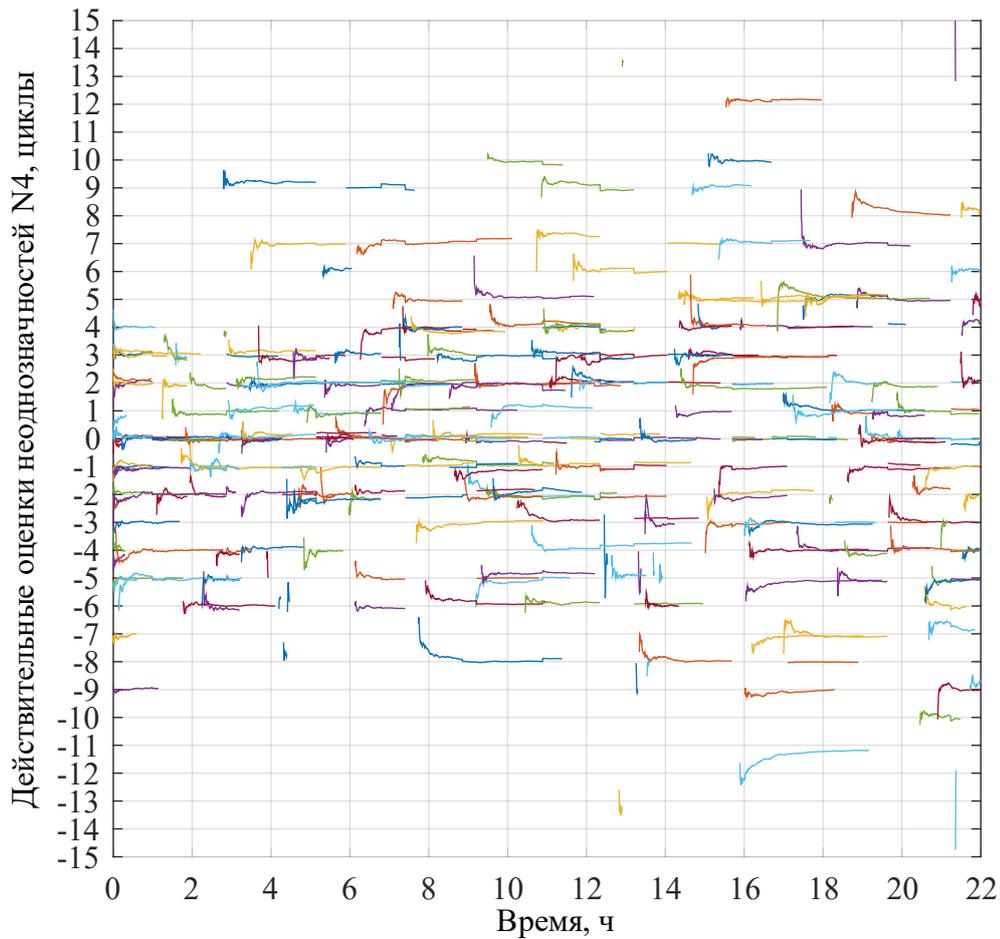


Рисунок 3.15 – Действительные оценки $\hat{N}_{J_2 \times 1}^{4S}$ неоднозначностей $N_{J_2 \times 1}^{4S}$ сетевой задачи

Хорошо видно, что оценки сходятся к целым числам. Видно, что численные значения оценок неоднозначностей $N_{J_2 \times 1}^{4S}$ лежат в пределах ± 15 циклов. Для неоднозначностей $N_{J_2 \times 1}^{1S}$ (на рисунке не показана, так как её шум больше в связи с меньшей длиной волны) этот разброс несколько больше и составляет ± 30 циклов. Малая численная величина оцениваемых неоднозначностей является косвенным доказательством того, что исходные неоднозначности также были малы.

В отличие от пользовательской задачи, в сетевой задаче в уравнения измерений по различным ГНСС не входят никакие общие переменные, кроме компонент вертикальных тропосферных задержек станций $\mathbf{D}_{M \times 1}$. Поэтому совместное использование нескольких ГНСС не оказывает существенного влияния на результат решения сетевой задачи и влияет только на оценки тропосферных задержек. Преимущество совместного использования GPS и ГЛОНАСС для решения сетевой задачи состоит в том, что при отсутствии на какой-то момент времени (по какой-либо причине) решения по одной из систем тропосферная задержка тем не менее непрерывно оценивается (по спутникам другой системы) [6].

При совместном использовании ГЛОНАСС и GPS в сетевой задаче, как и при решении пользовательской задачи, процедуру целочисленного поиска неоднозначностей можно выполнять одновременно по неоднозначностям обеих систем и отдельно по неоднозначностям ГЛОНАСС и GPS. Чтобы продемонстрировать ковариационные связи между оцениваемыми неоднозначностями ГЛОНАСС и GPS на Рисунке 3.16 изображены величины элементов блока ковариационной матрицы оцениваемого в сетевой задаче вектора, относящийся к псевдофазовым неоднозначностям.

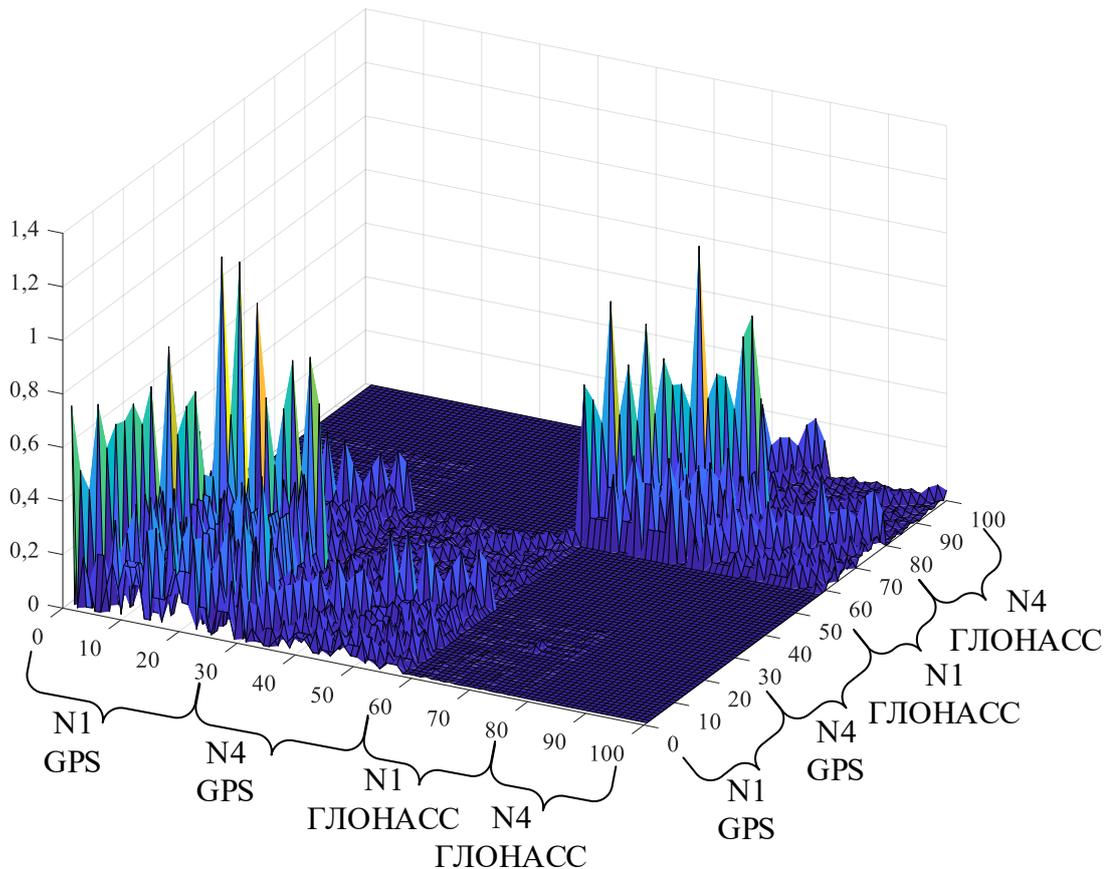


Рисунок 3.16 – Абсолютные значения элементов ковариационной матрицы оцениваемого в сетевой задаче вектора, относящиеся к псевдофазовым неоднозначностям, для случая совместной обработки измерений ГЛОНАСС и GPS

Рисунок 3.16 аналогичен Рисунку 3.5 для пользовательской задачи, однако для большей наглядности он «повернут» таким образом, чтобы величины элементов ковариационной матрицы были видны визуально вдоль вертикальной оси, а не только выделены цветом, как на Рисунке 3.5. По осям в горизонтальной плоскости отложены порядковые номера оцениваемых неоднозначностей, а по вертикальной оси – абсолютные значения величин соответствующих элементов ковариационной матрицы (цикл²). Рисунок соответствует моменту времени, когда процесс непрерывной фильтрации шёл уже около 40 минут и величины неоднозначностей сошлись к своим

истинным значениям, а величины дисперсий их оценок уменьшились до единиц циклов² – долей циклов². Из Рисунка 3.16 видно, что ковариация между неоднозначностями N1 GPS и ГЛОНАСС на этот момент времени мала (десятые-сотые доли цикла²), поэтому, принимая во внимание значительную вычислительную нагрузку при одновременном поиске и разрешении неоднозначностей GPS и ГЛОНАСС, более целесообразным будет выполнение процедуры целочисленного поиска псевдофазовых неоднозначностей ГЛОНАСС и GPS отдельно.

Вместе с оценками смещений показаний спутниковых часов t_{PS} , t_{LS} и MW-смещений

b_{A4S} потребителю также можно передавать величины дисперсий этих оценок, полученных в сетевой задаче, для более корректного их применения на стороне потребителя.

3.3 Выводы по главе 3

С помощью теории S-преобразования решена задача целочисленного ВАМО по сигналам ГЛОНАСС. Для пользовательской и сетевой задач рассмотрены аналитические выражения оцениваемых переменных. При применении нестрого целочисленного способа оценки псевдофазовых неоднозначностей следует уделять особое внимание согласованию псевдофазовых и кодовых измерений (минимизировать величины исходных псевдофазовых неоднозначностей).

На примере обработки реальных измерений продемонстрирована возможность использования процедуры разрешения неоднозначности для высокоточных абсолютных местоопределений по сигналам ГЛОНАСС с частотным разделением, которая приводит к значительному ускорению получения сантиметровой точности местоопределений (от 5 до 20 минут). Показано, что совместное использование ГЛОНАСС и GPS позволяет сократить это время практически до мгновенного правильного разрешения неоднозначности.

Дана оценка потенциальной точности местоопределений при использовании только псевдофазовых измерений как при использовании систем ГЛОНАСС и GPS по отдельности, так и совместно. При использовании систем по отдельности как для ГЛОНАСС, так и для GPS во время обработки бывают интервалы времени, на которых из-за необходимости оценивать тропосферную задержку геометрический фактор ухудшается настолько, что даже использование высокоточных псевдофазовых измерений не даёт сантиметровой точности местоопределения. Совместное использование ГЛОНАСС и GPS позволяет избавиться от этих проблем за счёт увеличения числа спутников в обработке и улучшения геометрического фактора.

Необходимые для целочисленного ВАМО ВКП были вычислены по измерениям локальной сети наземных станций. Недостатком локальной сети станций перед глобальной является то, что спутники не находятся в зоне видимости сети непрерывно и, таким образом, вычисленные

ВКП не могут применяться глобально, а только на той территории, где видны те же спутники, которые находятся в зоне видимости сети. Однако локальная сеть также обладает и рядом преимуществ: чем меньше число неоднозначностей, используемых для целочисленного разрешения, тем меньше вероятность аномальной ошибки при их разрешении. Кроме того, меньше вероятность наличия в измерениях всей сети выбросов, неучтённых ошибок (многолучёвости, срывов слежения за фазой и др.). Также обработка меньшего числа измерений требует меньших вычислительных ресурсов.

Для решения пользовательской задачи использованы измерения НАП, которая не участвовала в сетевом решении и находится на значительном удалении (сотни км) от сетевых станций. Вся используемая в численном эксперименте НАП является совместимой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача целочисленного ВАМО по сигналам ГЛОНАСС с частотным разделением. Разработана и реализована в виде специального программно-математического обеспечения методика её решения с использованием подхода «разделённых часов» (decoupled clock, DC) на однородной сети станций (оборудованных одинаковыми моделями НАП от одного производителя, одинаковыми антеннами и РПО), у которых с достаточной для практики точностью совпадают (с точностью до константы) кодовые аппаратурные задержки.

Основные результаты работы состоят в следующем:

1) Разработанная методика целочисленного ВАМО позволяет сократить время сходимости навигационного решения до сантиметрового уровня точности до 5-20 минут при использовании только сигналов ГЛОНАСС с частотным разделением за счёт применения алгоритмов целочисленного разрешения неоднозначности в высокоточном абсолютном местопределении.

2) Повышение вероятности правильного разрешения неоднозначности и ещё более сильное сокращение времени сходимости – от мгновенного правильного разрешения до 5-7-минут при совместном использовании измерений сигналов нескольких ГНСС (продемонстрировано на примере сигналов ГЛОНАСС с частотным разделением и GPS).

3) Применение аппарата линейной алгебры и понятий линейных векторных пространств (теории S-преобразования) позволило изложить подход к решению как сетевой, так и пользовательской задачи высокоточных местопределений по сигналам любой ГНСС как с частотным (ГЛОНАСС L1, L2), так и с кодовым разделением (GPS, GALILEO, BEIDOU, ГЛОНАСС L3) в едином виде.

4) Дана оценка потенциальной точности абсолютных местопределений при использовании только ионосферосвободных комбинаций псевдофазовых измерений с разрешёнными целочисленными неоднозначностями как при раздельном использовании ГЛОНАСС и GPS, так и при совместном.

5) В связи с тем, что штатная группировка ГЛОНАСС состоит из меньшего числа КА, чем группировка GPS, ГЛОНАСС демонстрирует меньшую оперативность (большее время сходимости решения) и несколько меньшую точность. Тем не менее, даже при использовании GPS во время обработки возникают такие моменты, когда геометрический фактор увеличивается настолько (за счёт необходимости оценивать тропосферную задержку), что не позволяет достичь сантиметровую точность местопределения. Совместное использование нескольких ГНСС позволяет решить эту проблему за счёт увеличения числа доступных спутников.

6) Разработан способ нестрого целочисленной оценки псевдофазовых неоднозначностей ГЛОНАСС, при условии, что величины исходных псевдофазовых неоднозначностей достаточно

малы. Такой способ оценки не требует существенной модернизации программного обеспечения, предназначенного для работы с ГНСС с кодовым разделением.

7) Предложена методика оценки различия величин кодовых задержек в навигационной аппаратуре различных приёмников ГЛОНАСС. Для рассматриваемой однородной сети станций подтверждено совпадение величин этих задержек.

8) Обратной стороной высокой точности целочисленных абсолютных местоопределений является снижение надёжности решения – возникает понятие аномальной ошибки (неправильного разрешения неоднозначности), приводящей к недопустимо большой ошибке местоопределения.

Перспективы дальнейших исследований:

- снижение вероятности аномальной ошибки (неправильного разрешения неоднозначности), например, за счёт использования алгоритмов частичного разрешения неоднозначности (partial ambiguity resolution);

- применение алгоритмов калибровки НАП для работы этой НАП в режиме целочисленного ВАМО по сигналам ГЛОНАСС с частотным разделением;

- переход от использования ионосферосвободных комбинаций двухчастотных измерений к измерениям на исходных частотах (с оценкой ионосферной задержки), а также на сигналы в других диапазонах, например, L3 ГЛОНАСС с кодовым разделением, L5 GPS.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

ВАМО	высокоточное абсолютное местоопределение
ВКП	временные корректирующие поправки
ГНСС	глобальная навигационная спутниковая система
ИАЦ КВНО	информационно-аналитический центр координатно-временного и навигационного обеспечения
ИКД	интерфейсный контрольный документ
КА	космический аппарат
КРК	кодированное разделение каналов
МНК	метод наименьших квадратов
МО	математическое ожидание
НАП	навигационная аппаратура потребителя
РПО	радиопрозрачный обтекатель
СДКМ	Система дифференциальной коррекции и мониторинга
СКО	среднеквадратичное отклонение
ФЧХ	фаза-частотная характеристика
ЦУМП	целочисленное унимодулярное преобразование
ЧРК	частотное разделение каналов
ЭВИ	эфемеридно-временная информация
ARP	antenna reference point
CNES	Centre national d'études spatiales, Национальный центр космических исследований, Франция
DC	decoupled clock, разделённые часы
DOP	dilution of precision, ухудшение точности, геометрический фактор
EDOP	east dilution of precision, геометрический фактор в направлении восток-запад
FCB	fractional cycle bias, дробная часть задержки, дробная часть смещения
Float PPP	float precise point positioning, высокоточное абсолютное местоопределение без целочисленного разрешения неоднозначности
HDOP	horizontal dilution of precision, горизонтальный геометрический фактор
ifr	ionosphere-free, ионосферосвободная комбинация
IGS	International GNSS Service, международная служба ГНСС
Integer PPP	integer precise point positioning, высокоточное абсолютное местоопределение с целочисленным разрешением неоднозначности

IRC	integer recovery clock, часы, восстанавливающие целочисленность
MW	Melbourne-Wubben, комбинация Мельбурная-Вуббены
NDOP	north dilution of precision, геометрический фактор в направлении север-юг
NL	narrow-lane, суммарная комбинация, комбинация на суммарной длине волны, узкая комбинация
NRCan	Natural Resources Canada, министерство природных ресурсов Канады
PCO	phase center offset, смещение фазового центра
PCV	phase center variation, вариация фазового центра
PDOP	positioning dilution of precision, геометрический фактор местоопределения
PPP	precise point positioning, высокоточное абсолютное местоопределение
PPP-AR	precise point positioning with ambiguity resolution, высокоточное абсолютное местоопределение с целочисленным разрешением неоднозначности
RINEX	The Receiver Independent Exchange Format, формат обмена навигационными данными, не зависящий от приёмника
RTK	real time kinematic, кинематика реального времени, режим относительных местоопределений
VDOP	vertical dilution of precision, вертикальный геометрический фактор
WL	wide-lane, разностная комбинация, комбинация на разностной длине волны, широкая комбинация

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Антонович, К.М. Использование спутниковых радионавигационных систем в геодезии : в 2 т. Т. 1. Монография / К. М. Антонович; ГОУ ВПО «Сибирская государственная геодезическая академия». – М. : ФГУП «Картгеоцентр», 2005. – 334 с. : ил. – ISBN 5-86066-072-3 Т. 1.
- 2 Антонович, К.М. Использование спутниковых радионавигационных систем в геодезии : в 2 т. Т. 2. Монография / К. М. Антонович; ГОУ ВПО «Сибирская государственная геодезическая академия». – М. : ФГУП «Картгеоцентр», 2006. – 360 с. : ил. – ISBN 5-86066-077-4 Т. 2.
- 3 Архангельский, В.А. Радиосистемы и комплексы управления. Учебник / В.А. Архангельский, В.А. Вейцель, А.С. Волковский, С.А. Волковский [и др.] ; под. ред. В.А. Вейцеля. – М. : Вузовская книга, 2016. – 574 с. : ил. + CD. – ISBN 978-5-9502-0794-5.
- 4 Бабурин, А.А. Алгебраические основы обработки измерений при высокоточном абсолютном местоопределении с разрешением целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений по сигналам ГЛОНАСС с частотным разделением каналов / А.А. Бабурин. – Текст : электронный // Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы. – 2022. – Т. 9, вып. 4. – С. 47–58. – DOI 10.30894/issn2409-0239.2022.9.4.47.58. EDN QXKSUY. – URL: <https://spacedevice.ru/wp-content/uploads/2022/12/6.-Baburin-str.-47-58-1.pdf> (дата обращения: 05.05.2023).
- 5 Бабурин, А.А. Методы целочисленной оценки псевдофазовых неоднозначностей ГЛОНАСС / А.А. Бабурин. – Текст : электронный // Труды МАИ : электронный журнал. – 2023. – №130. – DOI 10.34759/trd-2023-130-16. – EDN KXFSBV. – URL: https://trudymai.ru/upload/iblock/105/n5fdg3smbxuk90ul7m02ux9f2ca924ue/16_Baburin.pdf (дата обращения: 13.07.2023).
- 6 Бабурин, А.А. Определение временных корректирующих поправок для высокоточного абсолютного местоопределения с разрешением целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений по сигналам ГЛОНАСС с частотным разделением каналов / А.А. Бабурин. – Текст : электронный // Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы. – 2023. – Т. 10, вып. 1. – С. 63–77. DOI 10.30894/issn2409-0239.2022.10.1.63.77. – EDN BEPUIC. – URL: https://spacedevice.ru/wp-content/uploads/2023/03/7.-Baburin_RKS_Tom-10_V-1_Blok_1-104-63-77-szhatuu.pdf (дата обращения: 05.05.2023).
- 7 Глобальная навигационная спутниковая система ГЛОНАСС. Интерфейсный контрольный документ. Навигационный радиосигнал в диапазонах L1, L2 с открытым доступом и частотным разделением. – Текст : электронный – Ред. 5.1. – М. : РНИИ КП, 2008 – URL: https://russianspacesystems.ru/wp-content/uploads/2016/08/ICD_GLONASS_rus_v5.1.pdf (дата обращения: 08.04.2023).

8 Исаев, Ю.В. Калибровка измерений псевдодальностей ГЛОНАСС совмещенного GPS/ГЛОНАСС-приемника для работы с поправками СДКМ / Ю.В. Исаев, А.Н. Подкорытов. – Текст : электронный // Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы. – 2019. – Т. 6, вып. 3. – С. 3-14. – DOI 10.30894/issn2409-0239.2019.6.3.3.14. URL: https://russian spacesystems.ru/wp-content/uploads/2019/10/1_p3_0603.pdf (дата обращения: 16.12.2023).

9 Карауш, А.А. Разработка и исследование алгоритмов оценивания текущих навигационных параметров спутников ГНСС по данным беззапросных траекторных измерений : дисс. ... канд. техн. наук : 05.12.14 / Артем Андреевич Карауш. – Текст : электронный. – Новосибирск, 2016. – 125 с. – URL: https://research.sfu-kras.ru/sites/research.sfu-kras.ru/files/Dissertaciya_Karaush.pdf (дата обращения: 09.04.2023).

10 Перов, А.И. ГЛОНАСС. Принципы построения и функционирования / А.И. Перов, В.Н. Харисов ; под ред. А. И. Перова, В. Н. Харисова. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Радиотехника, 2010. – 800 с. : ил. – ISBN 978-5-88070-251-0.

11 Печерица, Д.С. Метод калибровки навигационной аппаратуры потребителей ГЛОНАСС с использованием эталонов, прослеживаемых к государственным первичным эталонам единиц величин : дисс. ... канд. техн. наук : 05.11.15 / Дмитрий Станиславович Печерица. – Текст : электронный. – Менделеево, 2018. – 123 с. – URL: <https://www.vniiftri.ru/upload/iblock/e91/e91d3fe0a7c947d35f83414c04c250fb.pdf> (дата обращения: 09.04.2023).

12 Печерица, Д.С. Феномен различных систематических погрешностей измерений псевдодальности по сигналам НКА с общей рабочей частотой / Д.С. Печерица, В.Н. Федотов. – Текст : электронный // Тезисы докладов 9-й всероссийской конференции «Фундаментальное и прикладное координатно-временное и навигационное обеспечение» (КВНО-2021), СПб., 13–17 сентября 2021. – С. 91. – URL: https://iaaras.ru/media/docs/abstract_kvno2021.pdf (дата обращения: 09.04.2023).

13 Поваляев, А.А. Алгебраические основы обработки измерений при высокоточном абсолютном местоопределении по сигналам ГНСС с кодовым разделением каналов / А.А. Поваляев, А.Н. Подкорытов, С.А. Никитин, Д.В. Филимонова. – Текст : электронный // Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы. – 2019. – Т. 6, вып. 1. – С. 4-16. – DOI 10.30894/issn2409-0239.2019.6.1.4.16. – EDN DYOUML. – URL: https://spacedevice.ru/wp-content/uploads/2019/04/1_p4_0601.pdf (дата обращения: 16.12.2023).

14 Поваляев, А.А. Определение временных корректирующих поправок для высокоточного абсолютного местоопределения по сигналам ГНСС с кодовым разделением каналов / А.А. Поваляев, А.Н. Подкорытов, С.А. Никитин, Д.В. Филимонова. – Текст : электронный // Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы. – 2019. – Т. 6, вып. 2. – С. 3-

16. – DOI 10.30894/issn2409-0239.2019.6.2.3.16. – EDN TBJPNG. – URL: https://russianspacesystems.ru/wp-content/uploads/2019/07/1_p3_0602.pdf (дата обращения: 16.12.2023).

15 Поваляев, А.А. Применение теории решетчатых упаковок в задаче высокоточного абсолютного местоопределения по ионосферосвободным измерениям параметров сигналов ГНСС с кодовым разделением / А.А. Поваляев, А.А. Бабурин, А.Н. Подкорытов. – Текст : электронный // Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы. – 2021. Т. 8, вып. 2. – С. 51-61. – DOI 10.30894/issn2409-0239.2021.8.2.51.61. EDN NKAFTF. – URL: https://spacedevice.ru/wp-content/uploads/2021/06/08_p51_0802n.pdf (дата обращения: 16.12.2023).

16 Поваляев, А.А. Применение теории решетчатых упаковок в задаче определения временных корректирующих поправок для высокоточного абсолютного местоопределения по ионосферосвободным измерениям в ГНСС с кодовым разделением / А.А. Поваляев, А.А. Бабурин, А.Н. Подкорытов // Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы. – 2021. – Т. 8, вып. 3. – С. 48-62. – DOI 10.30894/issn2409-0239.2021.8.3.48.62. EDN EALNOX.

17 Поваляев, А.А. Спутниковые радионавигационные системы. Время, показания часов, формирование измерений и определение относительных координат / А.А. Поваляев. – М. : Радиотехника, 2008. – 328 с. – ISBN 978-5-88070-153-7.

18 Подкорытов, А.Н. Высокоточное местоопределение в глобальных навигационных спутниковых системах в абсолютном режиме за счет разрешения неоднозначности псевдофазовых измерений : дисс. ... канд. техн. наук : 05.12.14 / Андрей Николаевич Подкорытов. – Текст : электронный. – М., 2014. – 195 с. – URL: <https://mai.ru/upload/iblock/bfb/bfb80a9fa12e478286a975fe6a56c156.pdf> (дата обращения: 09.04.2023).

19 Потребительский прикладной центр ГЛОНАСС [сайт] / Информационно-аналитический центр координатно-временного и навигационного обеспечения. – АО ЦНИИмаш. – URL: <https://glonass-iac.ru/> (дата обращения: 23.02.2023).

20 Пустошилов, А.С. Повышение точности обработки данных ГНСС с использованием полиномиальных и адаптивных методов : дисс. ... канд. техн. наук : 2.2.16 / Александр Сергеевич Пустошилов. – Текст : электронный. – Красноярск, 2021. – 147 с. – URL: https://research.sfu-kras.ru/sites/research.sfu-kras.ru/files/Dissertaciya_Pustoshilov.pdf (дата обращения: 09.04.2023).

21 Российская Федерация. Радионавигационный план Российской Федерации : утв. приказом Минпромторга России от 4 сентября 2019 г. №3296. – Текст : электронный. – Москва, 2019. – URL: https://internavigation.ru/wp-content/uploads/2021/10/РНИП-РФ-2019-2024_Пр.3296_04.09.19.pdf (дата обращения: 09.04.2023).

22 Скакун, И.О. Разработка метода сравнения шкал времени по сигналам ГЛОНАСС с учётом целочисленного свойства параметров неоднозначности фазовых измерений : дисс. ... канд. техн. наук : 05.11.15 / Иван Олегович Скакун. – Менделеево, 2017. – 113 с.

23 Федеральный центр навигационных данных [Электронный ресурс]. – Госкорпорация «Роскосмос». – URL: <https://fcnd.ru/data/> (дата обращения: 27.11.2023).

24 2021 Federal Radionavigation Plan : Report Number: DOT-VNTSC-OST-R-15-01 / United States. Department of Defense, United States. Department of Homeland Security, United States. Department of Transportation. – Текст : электронный. – 2022-07-01. – URL: <https://rosap.ntl.bts.gov/view/dot/63024> (дата обращения: 23.02.2023).

25 ANTEX: The Antenna Exchange Format, Version 1.4. / M. Rothacher, R. Schmid ; Forschungseinrichtung Satellitengeodäsie, TU München. – Текст : электронный. – 15 September 2010. – URL: <https://files.igs.org/pub/data/format/antex14.txt> (дата обращения: 09.04.2023).

26 Banville, S. Concepts for Undifferenced GLONASS Ambiguity Resolution / S. Banville, P. Collins, F. Lahaye. – Текст : электронный // Proceedings of the 26th International Technical Meeting of the ION Satellite Division, ION GNSS+. Nashville, Tennessee, September 16-20, 2013. – P. 1186-1197. URL: https://www.researchgate.net/profile/Simon-Banville/publication/257944811_Concepts_for_undifferenced_GLONASS_ambiguity_resolution/links/004635266c54b1ec66000000/Concepts-for-undifferenced-GLONASS-ambiguity-resolution.pdf (дата обращения: 09.04.2023).

27 Banville, S. GLONASS ambiguity resolution of mixed receiver types without external calibration / S. Banville, P. Collins, F. Lahaye. – Текст : электронный // GPS Solutions. – 2013. – Vol. 17, No. 3. – P. 275-282. – DOI 10.1007/s10291-013-0319-7. – URL: https://www.researchgate.net/profile/Simon-Banville/publication/257493216_GLONASS_ambiguity_resolution_of_mixed_receiver_types_without_external_calibration/links/53ee10190cf26b9b7dc641c3/GLONASS-ambiguity-resolution-of-mixed-receiver-types-without-external-calibration.pdf (дата обращения: 09.04.2023).

28 Banville, S. GLONASS ionosphere-free ambiguity resolution for precise point positioning / S. Banville // Journal of Geodesy. – 2016. – Vol. 90. – P. 487–496. – DOI 10.1007/s00190-016-0888-7.

29 Banville, S. Improved Convergence for GNSS Precise Point Positioning : Ph.D. dissertation. / S. Banville. – Текст : электронный. – Department of Geodesy and Geomatics Engineering, Technical Report No. 294, University of New Brunswick, Fredericton, New Brunswick, Canada, 2014. – 269 p. – URL: https://www.researchgate.net/profile/Simon-Banville/publication/264756805_IMPROVED_CONVERGENCE_FOR_GNSS_PRECISE_POINT_POSITIONING/links/53ee11090cf2981ada17476d/IMPROVED-CONVERGENCE-FOR-GNSS-PRECISE-POINT-POSITIONING.pdf (дата обращения: 09.04.2023).

30 Banville, S. Instantaneous cycle-slip correction for real-time PPP applications / S. Banville, R.B. Langley // Navigation: Journal of The Institute of Navigation. – Winter 2010. – Vol. 57, No. 4. – P. 325–334.

31 Canadian Spatial Reference System Precise Point Positioning (CSRS-PPP) [Электронный ресурс] : онлайн-сервис высокоточного местоопределения. – URL: <https://webapp.csrscs-scrcs.nrcan-mnscn.gc.ca/geod/tools-outils/ppp.php> (дата обращения: 23.02.2023). – Загл. с экрана.

32 Chang, X.-W. MLAMBDA: a modified LAMBDA method for integer least-squares estimation / X.-W. Chang, X. Yang, T. Zhou. – Текст : электронный // Journal of Geodesy. – 2005. – Vol. 79, iss. 9. – P. 552-565. – DOI 10.1007/s00190-005-0004-x. – URL: https://www.researchgate.net/profile/Xiao-Wen-Chang/publication/225518977_MLAMBDA_a_modified_LAMBDA_method_for_integer_least-squares_estimation/links/547d4c2a0cf27ed978623447/MLAMBDA-a-modified-LAMBDA-method-for-integer-least-squares-estimation.pdf (дата обращения: 16.04.2023).

33 Chen, C. Assessment of GPS/Galileo/BDS Precise Point Positioning with Ambiguity Resolution Using Products from Different Analysis Centers / C. Chen, X. Guorui., C. Guobin, X. Tianhe, Y. Liu // Remote Sensing. – 2021. – Vol. 13, iss. 16, 3266. – DOI 10.3390/rs13163266.

34 Chen, X. An alternative integer recovery clock method for precise point positioning with ambiguity resolution // Satellite Navigation. – 2020. – Vol. 1, 28. – DOI 10.1186/s43020-020-00028-6.

35 Chuang, S. GLONASS pseudorange inter-channel biases and their effects on combined GPS/GLONASS precise point positioning / S. Chuang, Y. Wenting, S. Weiwei, S. Yidong, Y. Yibin, Z. Rui // GPS Solutions. – 2013. – Vol. 17. – P. 439–451. – DOI 10.1007/s10291-013-0332-x.

36 Collins, P. Isolating and Estimating Undifferenced GPS Integer Ambiguities / P. Collins // Proceedings of the National Technical Meeting of the Institute of Navigation, San Diego, California. – January 28-30, 2008. – P. 720-732.

37 Dach, R. Bernese GPS Software, Version 5.0. / R. Dach, U. Hugentobler, P. Fridez, M. Meindl, Astronomical Institute, University of Bern : Bern, Switzerland. – Текст : электронный. – January 2007. – URL: <http://ftp.aiub.unibe.ch/BERN50/DOCU/DOCU50.pdf> (дата обращения: 16.04.2023).

38 De Jonge, P.J. A processing Strategy for the Application of the GPS in Networks / P.J. De Jonge. – Delft, August 1998 : Publications on Geodesy 46. – ISBN 90 6132 266 9.

39 Dilssner, F. The GLONASS-M satellite yaw-attitude model / F. Dilssner, T. Springer, G. Gienger, J. Dow. – Текст : электронный // Advances in Space Research. – 2011. – Vol. 47. – DOI 10.1016/j.asr.2010.09.007. – URL: http://acc.igs.org/orbits/glonass-attitude-model_ASR10.pdf (дата обращения: 09.04.2023).

40 Frei E. Rapid static positioning based on the fast ambiguity resolution approach "FARA": theory and first results / E. Frei, G. Beutler // Manuscripta Geodaetica. – 1990. – Vol. 15. – P: 325-356.

41 Ge, M. Resolution of GPS Carrier-Phase Ambiguities in Precise Point Positioning (PPP) with Daily Observations / M. Ge, G. Gendt, M. Rothacher, S. Changhong, J. Liu. – Текст : электронный //

Journal of Geodesy. – 2008. – Vol. 82. – P. 389-399. – DOI 10.1007/s00190-007-0187-4. – URL: <http://www.ppp-wizard.net/Articles/JG2008.pdf> (дата обращения: 09.04.2023).

42 Geng, J. GLONASS fractional-cycle bias estimation across inhomogeneous receivers for PPP ambiguity resolution / J. Geng, Y. Bock. – Текст : электронный // Journal of Geodesy. – 2015. – Vol. 90. – DOI 10.1007/s00190-015-0879-0. – URL: https://www.researchgate.net/profile/J-Geng/publication/288323831_GLONASS_fractional-cycle_bias_estimation_across_inhomogeneous_receivers_for_PPP_ambiguity_resolution/links/5690fe7e08aee91f69a4eb3d/GLONASS-fractional-cycle-bias-estimation-across-inhomogeneous-receivers-for-PPP-ambiguity-resolution.pdf (дата обращения: 09.04.2023).

43 Geng, J. Integer ambiguity resolution in precise point positioning: method comparison / J. Geng, X. Meng, A. Dodson, F. Teferle. – Текст : электронный // Journal of Geodesy. – 2010. – Vol. 84. – P. 569–581. DOI 10.1007/s00190-010-0399-x. – URL: https://www.researchgate.net/profile/Alan-Dodson/publication/225764864_Integer_ambiguity_resolution_in_precise_point_positioning_Method_comparison/links/0deec52023f2a798af000000/Integer-ambiguity-resolution-in-precise-point-positioning-Method-comparison.pdf (дата обращения: 09.04.2023).

44 Geng, J. Rapid initialization of real-time PPP by resolving undifferenced GPS and GLONASS ambiguities simultaneously / J. Geng, C. Shi. – Текст : электронный // Journal of Geodesy. – 2017. – Vol. 91. – P. 361–374. – DOI 10.1007/s00190-016-0969-7. – URL: https://www.researchgate.net/profile/J-Geng/publication/309634844_Rapid_initialization_of_real-time_PPP_by_resolving_undifferenced_GPS_and_GLONASS_ambiguities_simultaneously/links/60e649f61c28af34585104b0/Rapid-initialization-of-real-time-PPP-by-resolving-undifferenced-GPS-and-GLONASS-ambiguities-simultaneously.pdf (дата обращения: 09.04.2023).

45 GNSS toolkit : пакет программ с открытым исходным кодом [Электронный ресурс]. – URL: <https://github.com/SGL-UT/gnssstk> (дата обращения: 23.02.2023). – Загл. с экрана.

46 Hatch, R.R. Instantaneous ambiguity resolution / R.R. Hatch // Proceedings of KIS '90 : Banff, Canada : Springer-Verlag. – 1990. – P. 299-308.

47 Hauschild, A. A study on the dependency of GNSS pseudorange biases on correlator spacing / A. Hauschild, O. Montenbruck // GPS Solutions. – 2016. – Vol.20. – P. 159-171. – DOI 10.1007/s10291-014-0426-0.

48 Hilla, S. The Extended Standard Product 3 Orbit Format (SP3-d) / Steve Hilla ; National Geodetic Survey, National Ocean Service, NOAA ; Silver Spring, MD 20910, USA. – Текст : электронный. – 2016. – URL: <https://files.igs.org/pub/data/format/sp3d.pdf> (дата обращения: 09.04.2023).

49 Hofmann-Wellenhof, B. GNSS — Global Navigation Satellite Systems: GPS, GLONASS, Galileo, and more / B. Hofmann-Wellenhof, H. Lichtenegger, E. Wasle // Springer–Wien–NewYork, – 2008. – ISBN 978-3-211-73012-6.

50 Hu, J. Multi-GNSS fractional cycle bias products generation for GNSS ambiguity-fixed PPP at Wuhan University / J. Hu, X. Zhang, P. Li, F. Ma, L. Pan. – Текст : электронный // GPS Solutions. – 2020. – Vol. 24, 15. – DOI 10.1007/s10291-019-0929-9. – URL: https://www.researchgate.net/profile/Jiahuan-Hu/publication/337408984_Multi-GNSS_fractional_cycle_bias_products_generation_for_GNSS_ambiguity-fixed_PPP_at_Wuhan_University/links/5e0ed300a6fdcc2837529745/Multi-GNSS-fractional-cycle-bias-products-generation-for-GNSS-ambiguity-fixed-PPP-at-Wuhan-University.pdf (дата обращения: 09.04.2023).

51 International GNSS Service [Электронный ресурс]. – URL: <https://igs.org/> (дата обращения: 23.02.2023).

52 International GNSS Service, GNSS Final Combined Satellite and Receiver Clock Solution (30 second) Product [Электронный ресурс] / Greenbelt, MD, USA:NASA Crustal Dynamics Data Information System (CDDIS). – DOI 10.5067/GNSS/gnss_igsclk30_001. – URL: https://cddis.nasa.gov/Data_and_Derived_Products/GNSS/gnss_igsclk30.html (дата обращения: 16.12.2023).

53 International GNSS Service, GNSS Rapid Combined Earth Rotation Parameter (ERP) Product [Электронный ресурс] / Greenbelt, MD, USA:NASA Crustal Dynamics Data Information System (CDDIS). – DOI 10.5067/GNSS/gnss_igsrerp_001. – URL: https://cddis.nasa.gov/Data_and_Derived_Products/GNSS/gnss_igsrerp.html (дата обращения: 16.12.2023).

54 International GNSS Service, GNSS Rapid Combined Orbit Solution Product [Электронный ресурс] / Greenbelt, MD, USA:NASA Crustal Dynamics Data Information System (CDDIS). – DOI 10.5067/gnss/gnss_igsrorb_001. – URL: https://cddis.nasa.gov/Data_and_Derived_Products/GNSS/gnss_igsrorb.html (дата обращения: 16.12.2023).

55 IONEX: The IONosphere Map EXchange Format Version 1.1 / Stefan Schaer, Werner Gurtner. – Текст : электронный. – Astronomical Institute, University of Berne, Switzerland. Joachim Felten, ESA/ESOC, Darmstadt, Germany. February 25 : 1998, September 17 : 2015 (Update to V1.1). – URL: <https://gssc.esa.int/wp-content/uploads/2018/07/ionex11.pdf> (дата обращения: 09.04.2023).

56 Kaminski, P.G. Discrete square root filtering: a survey of current techniques / P.G. Kaminski, A.E. Bryson. S.F. Schmidt // IEEE Transactions on Automatic Control. – December 1971. – Vol. 16, no. 6. – P. 727-736. – DOI 10.1109/TAC.1971.1099816. [пер. с англ. Каминский, Брайсон, Шмидт. Обзор современных методов дискретной фильтрации, использующих квадратные корни матриц // Зарубежная радиоэлектроника. – 1973. – № 6. – стр. 37–53].

57 Kim, D. An optimized least-squares technique for improving ambiguity resolution performance and computational efficiency / D. Kim, R.B. Langley. – Текст : электронный // Proceedings of the 12th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GPS 1999) : Nashville, Tennessee. – 14-17 September 1999. – P. 1579-1588. – URL: <http://gauss2.gge.unb.ca/papers.pdf/iongps99.pdf> (дата обращения: 16.04.2023).

58 Kim, D. GPS Ambiguity Resolution and Validation: Methodologies, Trends and Issues / D. Kim, R.B. Langley. – Текст : электронный // Proceedings of 7th GNSS Workshop and International Symposium on GPS/GNSS : Seoul, Korea. November 30 – December 2. – P. 213–221. – URL: <http://gauss2.gge.unb.ca/papers.pdf/gnss2000.kim.pdf> (дата обращения: 16.04.2023).

59 Kleijer, F. Troposphere Modeling and Filtering for Precise GPS Leveling. / F. Kleijer, Delft : NCG Nederlandse Commissie voor Geodesie Netherlands Geodetic Commission. – April 2004. – ISBN 90 6132 284 7.

60 Klobuchar, J.A. Ionospheric Time-Delay Algorithm for Single-Frequency GPS Users / J.A. Klobuchar // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. – May 1987. – Vol. AES-23, no. 3. – P. 325-331. DOI 10.1109/TAES.1987.310829.

61 Kouba, J. [IGSMail-1943] New IGS ERP Format (version 2) / J. Kouba, Y. Mireault. – Текст : электронный. – 1998. – URL: <https://lists.igs.org/pipermail/igsmail/1998/003315.html> (дата обращения: 08.04.2023).

62 Kouba, J. A guide to using international GNSS service (IGS) products / J. Kouba, Geodetic Survey Division, Natural Resources Canada. – September 2015.

63 Kouba, J. A simplified yaw-attitude model for eclipsing GPS satellites / J. Kouba. – Текст : электронный // GPS Solutions. – 2009. – Vol. 13. – P. 1–12. DOI 10.1007/s10291-008-0092-1. – URL: https://www.researchgate.net/profile/Jan-Kouba/publication/225411137_A_simplified_yaw-attitude_model_for_eclipsing_GPS_satellites/links/00b7d529e06435333a000000/A-simplified-yaw-attitude-model-for-eclipsing-GPS-satellites.pdf (дата обращения: 09.04.2023).

64 Kouba, J. Implementation and testing of the gridded Vienna Mapping Function 1 (VMF1) [Электронный ресурс] // Journal of Geodesy. – 2008. – Vol. 82. – P. 193–205. – DOI 10.1007/s00190-007-0170-0. – URL: https://www.researchgate.net/profile/Jan-Kouba/publication/225541299_Implementation_and_testing_of_the_gridded_Vienna_Mapping_Function_1_VMF1/links/54fc71ac0cf20700c5e96b22/Implementation-and-testing-of-the-gridded-Vienna-Mapping-Function-1-VMF1.pdf (дата обращения: 09.04.2023).

65 Kozlov, D. Statistical Characterization of Hardware Biases in GPS+GLONASS Receivers / D. Kozlov, M. Tkachenko, A. Tochilin // Proceedings of the 13th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GPS 2000). Salt Lake City, UT, September 2000. – P. 817-826.

66 Lannes, A. GNSS algebraic structures / A. Lannes, P.J.G. Teunissen // Journal of Geodesy. – May 2011. – Vol. 85. – P. 273-290. – DOI 10.1007/s00190-010-0435-x.

67 Lannes, A. GNSS Networks in Algebraic Graph Theory / A. Lannes, S. Gratton. – Текст : электронный // Journal of Global Positioning Systems. – 2009. – Vol. 8, No. 1. – P. 53-75. – DOI 10.5081/jgps.8.1.53. – URL: https://www.researchgate.net/profile/Serge-Gratton/publication/225541299_Implementation_and_testing_of_the_gridded_Vienna_Mapping_Function_1_VMF1/links/54fc71ac0cf20700c5e96b22/Implementation-and-testing-of-the-gridded-Vienna-Mapping-Function-1-VMF1.pdf

ation/250395672_GNSS_Networks_in_Algebraic_Graph_Theory/links/0deec5293a60ecbd01000000/GNSS-Networks-in-Algebraic-Graph-Theory.pdf (дата обращения: 09.04.2023).

68 Laurichesse, D. Instantaneous Centimeter-Level Multi-Frequency Precise Point Positioning / D. Laurichesse, S. Vanville. – Текст : электронный // GPS World, Innovation Column. – July 2018. – URL: <http://www.ppp-wizard.net/Articles/Innovation-PPP.pdf> (дата обращения: 09.04.2023).

69 Laurichesse, D. Integer Ambiguity Resolution on Undifferenced GPS Phase Measurements and its Application to PPP / D. Laurichesse, F. Mercier // Proceedings of the 20th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GNSS 2007). – Fort Worth, TX, September 2007. – P. 839-848.

70 Laurichesse, D. Integer Ambiguity Resolution on Undifferenced GPS Phase Measurements and its Application to PPP and Satellite Precise Orbit Determination / D. Laurichesse, F. Mercier, J.-P. Berthias, P. Broca, L. Cerri // NAVIGATION: Journal of the institute of Navigation. – Summer 2009. – Vol. 56, N°2. – P. 135-149. – DOI 10.1002/j.2161-4296.2009.tb01750.x.

71 Laurichesse, D. Phase biases for ambiguity resolution: from an undifferenced to an uncombined formulation / D. Laurichesse. – Текст : электронный. – White Paper. – URL: <http://www.ppp-wizard.net/Articles/WhitePaperL5.pdf> (дата обращения: 08.04.2023).

72 Laurichesse, D. Zero-difference Ambiguity Fixing for Spaceborne GPS Receivers / D. Laurichesse, F. Mercier, J.-P. Berthias, P. Broca, L. Cerri // Proceedings of the 21st International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GNSS 2008), Savannah, GA. – September 2008. – P. 758-768.

73 Leick, A. GPS satellite surveying / A. Leick. – 3rd ed. – John Wiley & Sons : 2004. – ISBN 0-471-05930-7.

74 Lenstra, A.K. Factoring polynomials with rational coefficients / A.K. Lenstra, H.W. Lenstra, L. Lovasz. – Текст : электронный // Mathematische Annalen. – 1982. – Vol. 261. – P. 515-534. – DOI 10.1007/BF01457454. – URL: <https://www.math.leidenuniv.nl/~hwl/PUBLICATIONS/1982f/art.pdf> (дата обращения: 09.04.2023).

75 Liu, Y. Assessment of PPP integer ambiguity resolution using GPS, GLONASS and BeiDou (IGSO, MEO) constellations / Y. Liu, Y. Lou, S. Ye, R. Zhang, W. Song, X. Zhang, Q. Li. – Текст : электронный // GPS Solutions. – 2017. – Vol. 21. – P. 1647–1659. DOI 10.1007/s10291-017-0641-6. – URL: https://www.researchgate.net/profile/Yanyan-Liu-29/publication/317773786_Assessment_of_PPP_integer_ambiguity_resolution_using_GPS_GLONASS_and_BeiDou_IGSO_MEO_constellations/links/59d75b70a6fdcc52aca6668a/Assessment-of-PPP-integer-ambiguity-resolution-using-GPS-GLONASS-and-BeiDou-IGSO-MEO-constellations.pdf (дата обращения: 09.04.2023).

76 Loyer, S. Disseminating GNSS attitude for improved clock correction consistency : Poster PS01-04 / S. Loyer, S. Vanville, F. Mercier, F. Perosanz // IGS Workshop : Paris, France. – 2017. –

URL: https://www.researchgate.net/profile/Simon-Banville/publication/318542441_Disseminating_GNSS_attitude_for_improved_clock_correction_consistency/links/596f97c94585158a48ff860b/Disseminating-GNSS-attitude-for-improved-clock-correction-consistency.pdf (дата обращения: 16.04.2023).

77 Loyer, S. Zero-difference GPS ambiguity resolution at CNES-CLS IGS analysis center / S. Loyer, F. Perosanz, F. Mercier, H. Capdeville, J.-C. Marty // *Journal of Geodesy*. – 2012. – Vol. 86. – P. 991-1003. – DOI 10.1007/s00190-012-0559-2.

78 Lu, L. A Triple Checked Partial Ambiguity Resolution for GPS/BDS RTK Positioning / L. Lu, L. Ma, W. Liu, T. Wu, B. Chen. // *Sensors*. – 18 Nov. 2019. – Vol. 19 (22), 5034. – DOI 10.3390/s19225034.

79 Mahalanobis, P.C. On the generalized distance in statistics / P.C. Mahalanobis. – Текст : электронный // *Proceedings of the National Institute of Sciences of India*. – 1936. – Vol. 2, N. 1. – P. 49—55. – URL: http://bayes.acs.unt.edu:8083/BayesContent/class/Jon/MiscDocs/1936_Mahalanobis.pdf (дата обращения: 16.04.2023).

80 Melbourne, W.G. The case for ranging in GPS-based geodetic systems / W.G. Melbourne // *Proceedings of first international symposium on precise positioning with the Global Positioning System, Rockville, MD*. – 1985. – P. 373–386.

81 Multi-GNSS Precise Point Positioning with Ambiguity Resolution (GitHub project) [Электронный ресурс]. – URL: https://github.com/heiwa0519/PPP_AR (дата обращения: 23.02.2023).

82 NAVSTAR GPS Space Segment/Navigation User Segment Interfaces : IS-GPS-200. Revision N. 01-Aug-2022. – Текст : электронный. – URL: <https://www.gps.gov/technical/icwg/IS-GPS-200N.pdf> (дата обращения: 09.04.2023).

83 Odijk, D. Predicting the Success Rate of Long-baseline GPS+Galileo (Partial) Ambiguity Resolution / D. Odijk, B.S. Arora, P.J.G. Teunissen // *Journal of Navigation*. – 2014. – Vol. 67. – P. 385-401. – DOI 10.1017/S037346331400006X.

84 Parkins, A. Increasing GNSS RTK availability with a new single-epoch batch partial ambiguity resolution algorithm / A. Parkins. – Текст : электронный // *GPS Solutions*. – 2011. – Vol. 15. – P. 391–402. – DOI 10.1007/s10291-010-0198-0. – URL: <https://discovery.ucl.ac.uk/id/eprint/1298584/1/A%20Parkins%20GPS%20Solutions.pdf> (дата обращения: 09.04.2023).

85 Podkorytov, A. The influence of network structure on quality of satellite corrections for precise point positioning in GNSS / A. Podkorytov // *IOP Conference Series Materials Science and Engineering*. – 2020. – Vol. 868. – DOI 10.1088/1757-899X/868/1/012031.

86 Precise Point Positioning With Integer and Zero-difference Ambiguity Resolution Demonstrator (The PPP-WIZARD project) [Электронный ресурс] : онлайн-сервис высокоточного местопределения. – URL: <http://www.ppp-wizard.net/> (дата обращения: 23.02.2023). – Загл. с экрана.

87 Reussner, N. GLONASS inter-frequency code biases and PPP carrier-phase ambiguity resolution / N. Reussner, L. Wanninger // IGS workshop, Olsztyn, Poland. – 2012, 23–27 Jul.

88 RINEX. The Receiver Independent Exchange Format. Version 4.00 / Ignacio Romero (ed.), IGS/RTCM RINEX WG Chair, ESA/ESOC/Navigation Support Office, Darmstadt, Germany. – Текст : электронный. – 1 December, 2021. – URL: https://files.igs.org/pub/data/format/rinex_4.00.pdf (дата обращения: 09.04.2023).

89 Seepersad, G. An assessment of the interoperability of PPP-AR network products / G. Seepersad, S. Bisnath // The Journal of Global Positioning Systems. – 2017. – Vol. 15. – DOI 10.1186/s41445-017-0009-9.

90 Shi, J. A comparison of three PPP integer ambiguity resolution methods / J. Shi, Y. Gao. – Текст : электронный // GPS Solutions. – 2014. – Vol. 18. – P. 519–528. – DOI 10.1007/s10291-013-0348-2. – URL: https://www.researchgate.net/profile/Junbo-Shi-2/publication/265604636_A_comparison_of_three_PPP_integer_ambiguity_resolution_methods/links/54a0b4b70cf267bdb90168e4/A-comparison-of-three-PPP-integer-ambiguity-resolution-methods.pdf (дата обращения: 09.04.2023).

91 Sleewaegen, J.-M. Digital vs analog. Demystifying GLONASS inter-frequency carrier phase biases / J.-M. Sleewaegen, A. Simsky, W. De Wild, F. Boon, T. Willems. – Текст : электронный // Inside GNSS. – 2012. – Vol. 7(3). – P. 57–61. – URL: https://www.researchgate.net/profile/Andrew-Simsky/publication/275019157_Digital_vs_analog_Demystifying_GLONASS_inter-frequency_carrier_phase_biases/links/552e63130cf22d43716e1be6/Digital-vs-analog-Demystifying-GLONASS-inter-frequency-carrier-phase-biases.pdf (дата обращения: 09.04.2023).

92 Strang, G. Introduction to Linear Algebra / G. Strang. – 5th Edition. – Wellesley-Cambridge Press. : 2016. – ISBN 978-0-9802327-7-6.

93 Takasu, T. RTKLIB ver. 2.4.2 Manual / T. Takasu. – Текст : электронный. – URL: https://www.rtklib.com/prog/manual_2.4.2.pdf (дата обращения: 08.04.2023).

94 Teunissen P.J.G. Review and principles of PPP-RTK methods / P.J.G. Teunissen, A. Khodabandeh. – Текст : электронный // Journal of Geodesy. – 2015. – Vol. 89. – P. 217–240. – DOI 10.1007/s00190-014-0771-3. – URL: https://www.researchgate.net/profile/P-Teunissen/publication/268520221_Review_and_principles_of_PPP-RTK_methods/links/54a21f1a0cf267bdb902cab4/Review-and-principles-of-PPP-RTK-methods.pdf (дата обращения: 09.04.2023).

95 Teunissen, P.G.J. First Results Of Glonass-Only Cdma+Fdma Integer Ambiguity Resolution / P.G.J. Teunissen, S. Zaminpardaz, A. Khodabandeh // European Navigation Conference, Dresden, Germany. – 2020. – DOI 10.23919/ENC48637.2020.9317484.

96 Teunissen, P.J.G. A new GLONASS FDMA model / P.G.J. Teunissen // GPS Solutions. – 2019. – Vol. 23(4). – DOI 10.1007/s10291-019-0889-0.

97 Teunissen, P.J.G. An Optimality Property of the Integer Least-Squares Estimator / P.G.J. Teunissen. – Текст : электронный // Journal of Geodesy. – 1999. – Vol. 73. – P. 587-593. – DOI 10.1007/s001900050269. – URL: https://www.researchgate.net/profile/P-Teunissen/publication/225171339_An_Optimality_Property_of_the_Integer_Least-Squares_Estimator/links/02e7e52c4c5b4129df000000/An-Optimality-Property-of-the-Integer-Least-Squares-Estimator.pdf (дата обращения: 09.04.2023).

98 Teunissen, P.J.G. Geometry-free Ambiguity Success Rates in Case of Partial Fixing / P.G.J. Teunissen, P. Joosten, C.C.J.M Tiberius. – Текст : электронный // Proceedings of ION-NTM 1999. – URL: https://www.researchgate.net/profile/Ccjm-Tiberius/publication/266016106_Geometry-free_Ambiguity_Success_Rates_in_Case_of_Partial_Fixing/links/54b642530cf28ebe92e7c106/Geometry-free-Ambiguity-Success-Rates-in-Case-of-Partial-Fixing.pdf (дата обращения: 09.04.2023).

99 Teunissen, P.J.G. GLONASS ambiguity resolution / P.G.J. Teunissen, A. Khodabandeh // GPS Solutions. – 2019. – Vol. 23. – DOI 10.1007/s10291-019-0890-7.

100 Teunissen, P.J.G. GNSS Ambiguity Bootstrapping: Theory and Application / P.G.J. Teunissen. – Текст : электронный. – 2001. – URL: https://www.researchgate.net/profile/P-Teunissen/publication/228870630_GNSS_Ambiguity_Bootstrapping_Theory_and_Application/links/02e7e5181c18048d0a000000/GNSS-Ambiguity-Bootstrapping-Theory-and-Application.pdf (дата обращения: 09.04.2023).

101 Teunissen, P.J.G. Integer aperture bootstrapping: A new GNSS ambiguity estimator with controllable fail-rate / P.G.J. Teunissen. – Текст : электронный // Journal of Geodesy. – 2005. – Vol. 79(6). – P. 389-397. DOI 10.1007/s00190-005-0481-y. – URL: https://www.researchgate.net/profile/P-Teunissen/publication/226046031_Integer_aperture_bootstrapping_A_new_GNSS_ambiguity_estimator_with_controllable_fail-rate/links/02e7e52c4c5b28e8c1000000/Integer-aperture-bootstrapping-A-new-GNSS-ambiguity-estimator-with-controllable-fail-rate.pdf (дата обращения: 09.04.2023).

102 Teunissen, P.J.G. The invertible GPS ambiguity transformations / P.G.J. Teunissen. – Текст : электронный // Manuscripta Geodaetica. – 1995. – Vol. 20. – P. 489-497. – URL: https://www.researchgate.net/profile/P-Teunissen/publication/247920865_The_invertible_GPS_ambiguity_transformations/links/547527830cf29afed61269ca/The-invertible-GPS-ambiguity-transformations.pdf (дата обращения: 09.04.2023).

103 Teunissen, P.J.G. The least-squares ambiguity decorrelation adjustment: A method for fast GPS integer ambiguity estimation / P.G.J. Teunissen. – Текст : электронный // Journal of Geodesy. – 1995. – Vol. 70. – P. 65-82. – URL: https://www.researchgate.net/profile/P-Teunissen/publication/224969472_The_least-squares_ambiguity_decorrelation_adjustment_A_method_for_fast_GPS_integer_ambiguity_estimation/links/0f31753215b58bbd5c000000/The-least-squares-ambiguity-decorrelation-adjustment-A-method-for-fast-GPS-integer-ambiguity-estimation.pdf (дата обращения: 09.04.2023).

104 Teunissen, P.J.G. Zero Order Design: Generalized Inverses, Adjustment the Datum Problem and S-transformations / P.G.J. Teunissen, Preprint. Delft University of Technology : Reports of the Department of Geodesy Mathematical and Physical Geodesy. – Текст : электронный. – 1984. – DOI 10.1007/978-3-642-70659-2_3. – URL: https://www.researchgate.net/profile/P-Teunissen/publication/268854520_Zero_Order_Design_Generalized_Inverses_Adjustment_the_Datum_Problem_and_S-Transformations/links/54a21d950cf257a636037c22/Zero-Order-Design-Generalized-Inverses-Adjustment-the-Datum-Problem-and-S-Transformations.pdf (дата обращения: 09.04.2023).

105 Wanninger, L. Carrier-phase inter-frequency biases of GLONASS receivers / L. Wanninger // Journal of Geodesy. – 2012. – Vol. 86, No. 2. – P. 139-148. DOI 10.1007/s00190-011-0502-y.

106 Yamada, H. Evaluation and Calibration of Receiver Inter-channel Biases for RTK-GPS/GLONASS / H. Yamada, T. Takasu, N. Kubo, A. Yasuda // Proceedings of the 23rd International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GNSS 2010), Portland, OR. – September 2010. – P. 1580-1587.

107 Yi, W. A method of undifferenced ambiguity resolution for GPS+GLONASS precise point positioning / W. Yi, W. Song, Y. Lou, C. Shi, Y. Yao // Scientific Reports. – 2016. – Vol. 6, 26334. – DOI 10.1038/srep26334.

108 Zaminpardaz, S. GLONASS-only FDMA+CDMA RTK: Performance and outlook / S. Zaminpardaz, P.J.G. Teunissen, A. Khodabandeh // GPS Solutions. – 2021. – Vol. 25(3). – DOI 10.1007/s10291-021-01132-z.

109 Zhang, S. A sequential and partial ambiguity resolution strategy for improving the initialization performance of medium-baseline relative positioning / S. Zhang, L. Zhao, X. Li, B. Cheng // Earth, Planets and Space. – 2016. – Vol. 68. – DOI 10.1186/s40623-016-0411-7.

110 Zhao Q. Undifferenced ionospheric-free ambiguity resolution using GLONASS data from inhomogeneous stations / Q. Zhao, X. Li, Y. Liu, J. Geng, J. Liu // GPS Solutions. – 2018. – Vol, 22, 26. – DOI 10.1007/s10291-017-0691-9.

Приложение А
(справочное)

Вычисление матрицы проекции в случае ортогональности пространства ядра некоторым осям пространства исходных переменных

Рассмотрим матрицу ядра \mathbf{K} в блочном виде

$$\mathbf{K}_{n \times d} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{u \times d} \\ \mathbf{k}_{b \times d} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

при котором первые u её строк – нулевые, то есть пространство $R(\mathbf{K}_{n \times d})$ ортогонально осям вдоль которых откладываются первые u переменных, а остальные b строк не равны нулю. Общее число строк равно $u + b = n$. Покажем, что при проекции вдоль пространства $R(\mathbf{K}_{n \times d})$ на S -пространство, заданное матрицей

$$\mathbf{S}^\perp_{n \times d} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_u^\perp \\ \mathbf{S}_b^\perp \end{bmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

первые u переменных не изменяются (не получают смещения, англ. unbiased) в отличие от остальных переменных (которые будут смещены, англ. biased). Для этого вычислим матрицу проекции:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_S &= \mathbf{E}_{n \times n} - \mathbf{K}_{n \times d} \left(\begin{bmatrix} (\mathbf{S}^\perp)^\top & \mathbf{K} \end{bmatrix}_{d \times n} \right)^{-1} (\mathbf{S}^\perp)^\top_{d \times n} = \\ &= \mathbf{E}_{n \times n} - \mathbf{K}_{n \times d} \left(\begin{bmatrix} (\mathbf{S}^\perp)^\top & \mathbf{K} \end{bmatrix}_{d \times n} \right)^{-1} (\mathbf{S}^\perp)^\top_{d \times n} = \\ &= \mathbf{E}_{n \times n} - \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{u \times d} \\ \mathbf{k}_{b \times d} \end{bmatrix} \mathbf{M}_{d \times n}, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

где матрицей $\mathbf{M}_{d \times n}$ обозначен результат выражения $\left(\begin{bmatrix} (\mathbf{S}^\perp)^\top & \mathbf{K} \end{bmatrix}_{d \times n} \right)^{-1} (\mathbf{S}^\perp)^\top_{d \times n}$. Представляя матрицу $\mathbf{M}_{d \times n}$

в виде двух блоков $\mathbf{M}_{d \times n} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 \\ d \times u & d \times b \end{bmatrix}$, преобразование (A.3) можно продолжить далее:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_S &= \mathbf{E} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 \\ d \times u & d \times b \end{bmatrix} = \\
&= \mathbf{E} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 \\ u \times d & d \times u & u \times d & d \times b \\ \mathbf{k} & \mathbf{M}_1 & \mathbf{k} & \mathbf{M}_2 \\ b \times d & d \times u & b \times d & d \times b \end{bmatrix} = \\
&= \mathbf{E} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ u \times u & u \times b \\ \mathbf{k} & \mathbf{M}_1 \\ b \times d & d \times u \\ \mathbf{k} & \mathbf{M}_2 \\ b \times d & d \times b \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Из (A.4) видно, что в результате проекции \mathbf{P}_S первые u переменных не изменяются, так как первым u строкам матрицы проекции соответствуют строки единичной матрицы. Остальные переменные в результате проекции будут соответствовать линейным комбинациям элементов вектора исходных переменных, определяемым выбранным S-пространством.

Приложение Б
(справочное)

Укрупнённая блок-схема алгоритма решения пользовательской задачи целочисленного высокоточного абсолютного местоопределения



Рисунок Б.1 – Укрупнённая блок-схема алгоритма решения пользовательской задачи целочисленного ВАМО

Исходными данными являются измерения псевдодальностей и псевдофаз навигационного приёмника потребителя, координаты спутников и смещения показаний спутниковых часов t_p^j , t_L^j и MW-смещения спутников b_4^j (выделены синим цветом, известны из решения сетевой задачи), а также оценки, полученные на предыдущий момент времени (или начальные априорные значения этих оценок) \hat{x}_{prev} , $R_{\hat{x}_{prev}}$ (также выделены синим цветом).

В результате работы получается действительное решение \hat{x} , $R_{\hat{x}}$ и целочисленное решение \tilde{x} , $R_{\tilde{x}}$, скорректированное с учётом целочисленных свойств псевдофазовых измерений (выделены красным цветом).

Приложение В
(справочное)

Графики ошибок местоопределения для оценки потенциальной точности при использовании GPS и совместном использовании GPS и ГЛОНАСС

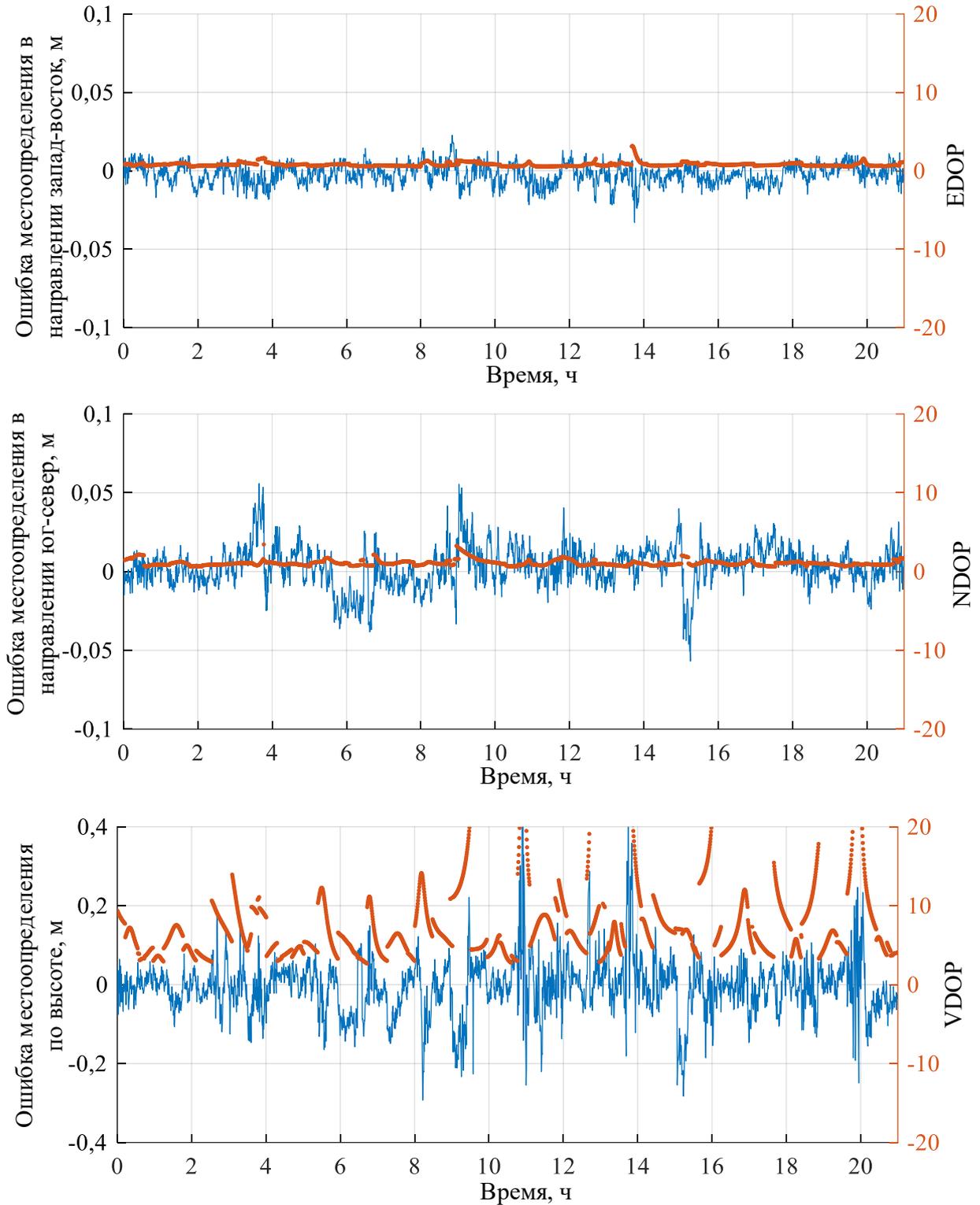


Рисунок В.1 – График зависимости от времени величин ошибок местоопределения (синяя кривая) и геометрического фактора (оранжевые точки) при использовании GPS

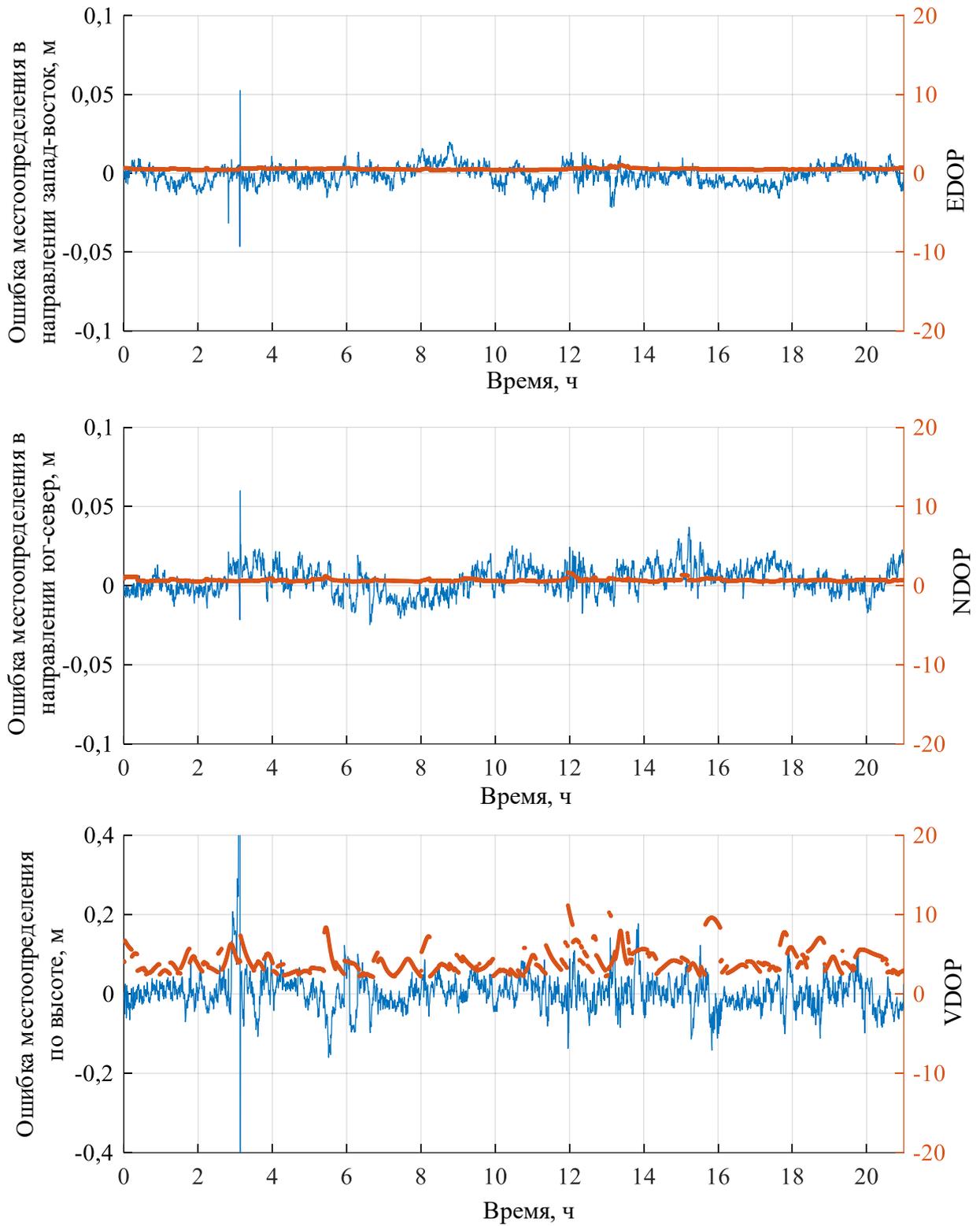


Рисунок В.2 – График зависимости от времени величин ошибок местоопределения (синяя кривая) и геометрического фактора (оранжевые точки) при совместном использовании ГЛОНАСС и GPS

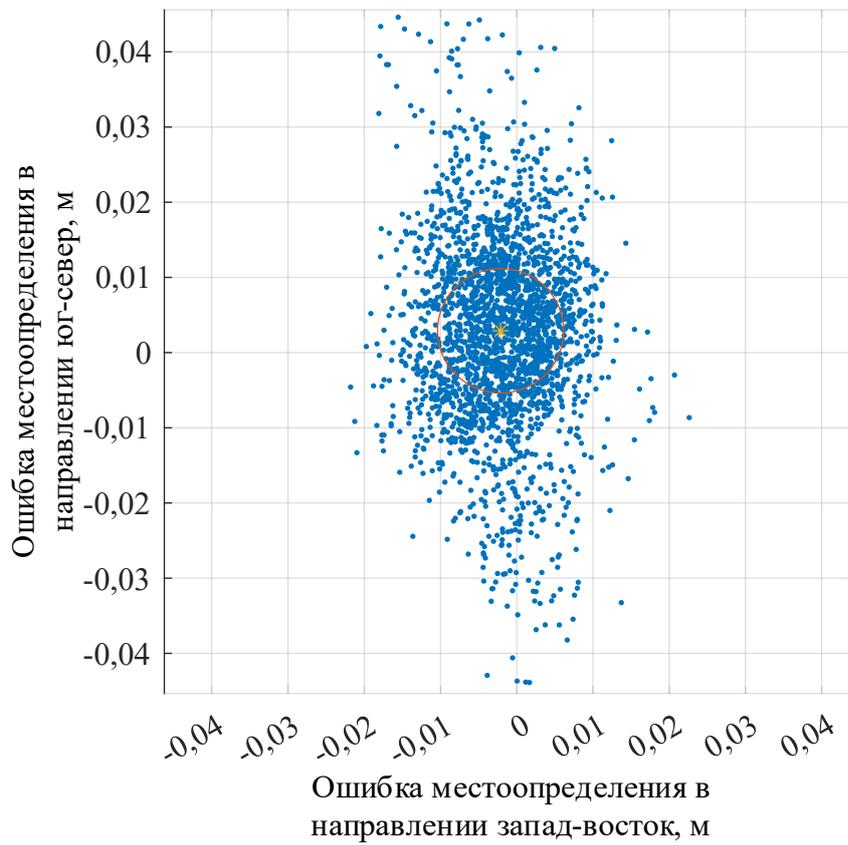


Рисунок В.3 – График ошибок местоопределения в горизонтальной плоскости типа «мишень» при использовании GPS

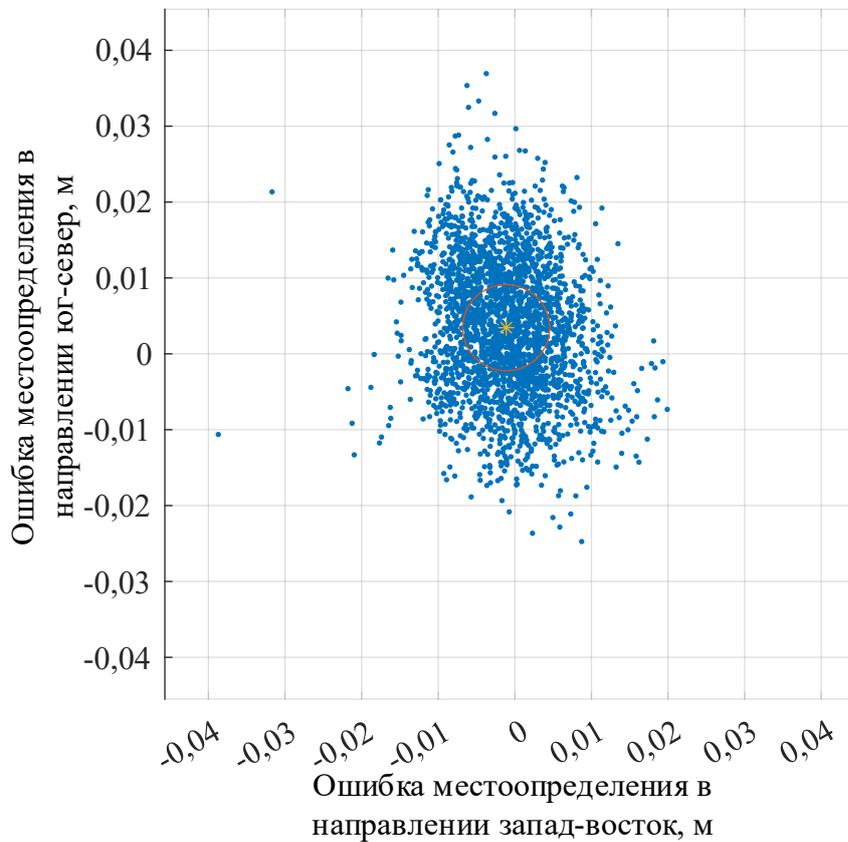


Рисунок В.4 – График ошибок местоопределения в горизонтальной плоскости типа «мишень» при совместном использовании ГЛОНАСС и GPS

Приложение Г
(справочное)

**Укрупнённая блок-схема алгоритма решения сетевой задачи целочисленного
высокоточного абсолютного местоопределения**



Рисунок Г.1 – Укрупнённая блок-схема алгоритма решения сетевой задачи целочисленного
ВАМО

Исходными данными являются измерения псевдодальностей и псевдофаз сети станций с известными координатами, координаты спутников (таким образом, известными являются расстояния до спутников R_m^j), а также оценки, полученные на предыдущий момент времени (или начальные априорные значения этих оценок) $\hat{x}_{net,prev}, R_{\hat{x},net,prev}$ (выделены синим цветом).

В результате работы получают действительное решение $\hat{x}, R_{\hat{x}}$ и целочисленное решение $\tilde{x}, R_{\tilde{x}}$, скорректированное с учётом целочисленных свойств псевдофазовых измерений (выделены красным цветом). Среди оцениваемых параметров имеются оценки смещений показаний спутниковых часов t_P^j, t_L^j и MW-смещений спутников b_4^j .

Приложение Д
(справочное)

Пример аналитического выражения оцениваемого в сетевой задаче вектора

$$\mathbf{D}_s = [D_1 \quad D_2 \quad D_3]^T \quad (\text{Д.1})$$

$$\mathbf{T}_{PS} = \begin{bmatrix} 0 \\ T_{P,2} - T_{P,1} \\ T_{P,3} - T_{P,1} \end{bmatrix} \quad (\text{Д.2})$$

$$\mathbf{T}_{LS} = \begin{bmatrix} 0 \\ T_{L,2} - T_{L,1} + \lambda_{\Delta n}^1 (\tilde{N}_{1,1}^1 - \tilde{N}_{1,2}^1) + \lambda_{n2}^1 (\tilde{N}_{4,1}^1 - \tilde{N}_{4,2}^1) \\ T_{L,3} - T_{L,1} + \lambda_{\Delta n}^1 (\tilde{N}_{4,1}^1 - \tilde{N}_{4,2}^1) + \lambda_{\Delta n}^4 (\tilde{N}_{4,2}^4 - \tilde{N}_{4,3}^4) + \lambda_{n2}^1 (\tilde{N}_{4,1}^1 - \tilde{N}_{4,2}^1) + \lambda_{n2}^4 (\tilde{N}_{4,2}^4 - \tilde{N}_{4,3}^4) \end{bmatrix} \quad (\text{Д.3})$$

$$\mathbf{B}_{A4S} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{A4,2} - B_{A4,1} + \lambda_4^1 (\tilde{N}_{4,1}^1 - \tilde{N}_{4,2}^1) \\ B_{A4,3} - B_{A4,1} + \lambda_4^1 (\tilde{N}_{4,1}^1 - \tilde{N}_{4,2}^1) + \lambda_4^4 (\tilde{N}_{4,2}^4 - \tilde{N}_{4,3}^4) \end{bmatrix} \quad (\text{Д.4})$$

$$\mathbf{t}_{PS} = \begin{bmatrix} t_P^1 - T_{P,1} \\ t_P^2 - T_{P,1} \\ t_P^3 - T_{P,1} \\ t_P^4 - T_{P,1} \end{bmatrix} \quad (\text{Д.5})$$

$$\mathbf{t}_{LS} = \begin{bmatrix} t_L^1 - T_{L,1} + \lambda_{\Delta n}^1 \tilde{N}_{1,1}^1 + \lambda_{n2}^1 \tilde{N}_{4,1}^1 \\ t_L^2 - T_{L,1} + \lambda_{\Delta n}^2 \tilde{N}_{1,1}^2 + \lambda_{n2}^2 \tilde{N}_{4,1}^2 \\ t_L^3 - T_{L,1} + \lambda_{\Delta n}^3 \tilde{N}_{1,1}^3 + \lambda_{n2}^3 \tilde{N}_{4,1}^3 \\ t_L^4 - T_{L,1} + \lambda_{\Delta n}^1 (\tilde{N}_{1,1}^1 - \tilde{N}_{1,2}^1) + \lambda_{\Delta n}^4 \tilde{N}_{1,2}^4 + \lambda_{n2}^1 (\tilde{N}_{4,1}^1 - \tilde{N}_{4,2}^1) + \lambda_{n2}^4 \tilde{N}_{4,2}^4 \end{bmatrix} \quad (\text{Д.6})$$

$$\mathbf{b}_{A4S} = \begin{bmatrix} b_{A4}^1 - B_{A4,1} + \lambda_4^1 \tilde{N}_{4,1}^1 \\ b_{A4}^2 - B_{A4,1} + \lambda_4^2 \tilde{N}_{4,1}^2 \\ b_{A4}^3 - B_{A4,1} + \lambda_4^3 \tilde{N}_{4,1}^3 \\ b_{A4}^4 - B_{A4,1} + \lambda_4^1 (\tilde{N}_{4,1}^1 - \tilde{N}_{4,2}^1) + \lambda_4^4 \tilde{N}_{4,2}^4 \end{bmatrix} \quad (\text{Д.7})$$

$$\mathbf{N}_{9 \times 1}^{1S} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{N}_{1,2}^3 - \tilde{N}_{1,1}^3 + \frac{\mathfrak{g}^3}{\mathfrak{g}^1} \tilde{N}_{1,1}^1 - \frac{\mathfrak{g}^3}{\mathfrak{g}^1} \tilde{N}_{1,2}^1 \\ 0 \\ \tilde{N}_{1,3}^2 - \tilde{N}_{1,1}^2 + \frac{\mathfrak{g}^2}{\mathfrak{g}^1} \tilde{N}_{1,1}^1 - \frac{\mathfrak{g}^2}{\mathfrak{g}^1} \tilde{N}_{1,2}^1 + \frac{\mathfrak{g}^2}{\mathfrak{g}^4} \tilde{N}_{1,2}^4 - \frac{\mathfrak{g}^2}{\mathfrak{g}^4} \tilde{N}_{1,3}^4 \\ \tilde{N}_{1,3}^3 - \tilde{N}_{1,1}^3 + \frac{\mathfrak{g}^3}{\mathfrak{g}^1} \tilde{N}_{1,1}^1 - \frac{\mathfrak{g}^3}{\mathfrak{g}^1} \tilde{N}_{1,2}^1 + \frac{\mathfrak{g}^3}{\mathfrak{g}^4} \tilde{N}_{1,2}^4 - \frac{\mathfrak{g}^3}{\mathfrak{g}^4} \tilde{N}_{1,3}^4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.8})$$

$$\mathbf{N}_{9 \times 1}^{4S} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{N}_{4,2}^3 - \tilde{N}_{4,1}^3 + \frac{\mathfrak{g}^3}{\mathfrak{g}^1} \tilde{N}_{4,1}^1 - \frac{\mathfrak{g}^3}{\mathfrak{g}^1} \tilde{N}_{4,2}^1 \\ 0 \\ \tilde{N}_{4,3}^2 - \tilde{N}_{4,1}^2 + \frac{\mathfrak{g}^2}{\mathfrak{g}^1} \tilde{N}_{4,1}^1 - \frac{\mathfrak{g}^2}{\mathfrak{g}^1} \tilde{N}_{4,2}^1 + \frac{\mathfrak{g}^2}{\mathfrak{g}^4} \tilde{N}_{4,2}^4 - \frac{\mathfrak{g}^2}{\mathfrak{g}^4} \tilde{N}_{4,3}^4 \\ \tilde{N}_{4,3}^3 - \tilde{N}_{4,1}^3 + \frac{\mathfrak{g}^3}{\mathfrak{g}^1} \tilde{N}_{4,1}^1 - \frac{\mathfrak{g}^3}{\mathfrak{g}^1} \tilde{N}_{4,2}^1 + \frac{\mathfrak{g}^3}{\mathfrak{g}^4} \tilde{N}_{4,2}^4 - \frac{\mathfrak{g}^3}{\mathfrak{g}^4} \tilde{N}_{4,3}^4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.9})$$

Приложение Е
(справочное)

Акты об использовании результатов исследований

Утверждаю

Директор филиала «Прецизионного
навигационно-баллистического
обеспечения» АО «НПК «СПП»



А.Н. Жуков

2023 г.

АКТ № 1/11-2023 от «07» ноября 2023 г.

об использовании научных положений и выводов диссертации

Бабурина Антона Александровича
в работах АО «НПК «СПП»

Комиссия в составе:

Председателя комиссии главного конструктора – заместителя директора филиала «Прецизионного навигационно-баллистического обеспечения» АО «НПК «СПП» Брагинца В.Ф.;

Членов комиссии: начальника отдела филиала «Прецизионного навигационно-баллистического обеспечения» АО «НПК «СПП» Бурдина И.А.;

старшего научного сотрудника отдела филиала «Прецизионного навигационно-баллистического обеспечения» АО «НПК «СПП» Мещерякова В.М.

составила настоящий акт в том, что положения разработанной в кандидатской диссертации Бабурина А.А. методики решения сетевой задачи целочисленного высокоточного абсолютного позиционирования при использовании одноплатных навигационных приёмников, опубликованной в статье «Алгебраические основы обработки измерений при высокоточном абсолютном местоопределении с разрешением целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений по сигналам ГЛОНАСС с частотным разделением каналов» (журнал «Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы» 2022, том 9, выпуск 4,

с. 47–58), использованы в АО «НПК «СПП» при разработке эскизного проекта ОКР «Сигал-М», выполняемой по заказу Госкорпорации «Роскосмос», для формирования обобщенной методики решения сетевой задачи по технологии Integer PPP с разделенной моделью часов и с целочисленным разрешением неоднозначности фазовых измерений для системы ГЛОНАСС и зарубежных ГНСС.

Разработанная Бабуриным А.А. методика позволит вычислять разделённые по видам измерений поправки к показаниям спутниковых часов по сигналам системы ГЛОНАСС с частотным разделением при выполнении определенных условий. Указанные поправки позволят использовать в навигационных приёмниках алгоритмы целочисленного разрешения неоднозначности, за счёт чего время сходимости решения задачи абсолютного высокоточного позиционирования при использовании сигналов ГЛОНАСС с частотным разделением должно уменьшиться на величину до 25% по сравнению с нецелочисленным решением.

Председатель комиссии

Члены комиссии:

«07» ноября 2023 г.



В.Ф. Брагинец

И.А. Бурдин

В.М. Мещеряков

реализованы в АО «Российские космические системы» при разработке Интерфейсного контрольного документа «Радиосигнал ВКК с кодовым разделением в диапазоне L3 для гражданских пользователей. Редакция 1».

Результаты включены Интерфейсный контрольный документ в виде приложений «Алгоритм внесения в НАП корректирующих поправок в ширококвещательную ЭВИ и обработки поправленных измерений в режиме действительного ВАМО» и «Алгоритм внесения в НАП корректирующих поправок в ширококвещательную ЭВИ и обработки поправленных измерений в режиме целочисленного ВАМО», а также в виде прилагаемого тестового примера. Использование описанных алгоритмов местоопределения позволяет потребителю сократить время сходимости решения до сантиметрового уровня точности до значений 10-25 минут (при использовании ГЛОНАСС) и от мгновенного высокоточного местоопределения до 5-минутной сходимости (при совместном использовании ГЛОНАСС и GPS).

Председатель комиссии



А.А. Поваляев

Члены комиссии:



В.Г. Сернов



М.Ю. Кисляков

« 3 » ноября 2023 г.



УТВЕРЖДАЮ

Директор Физтех-школы
аэрокосмических технологий
Негодяев С.С.
2023 г.

АКТ

внедрения в учебном процессе научных положений и выводов
диссертационной работы Бабурина Антона Александровича
«Методика высокоточного абсолютного местоопределения потребителя с
разрешением целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений
сигналов ГЛОНАСС»

Комиссия в составе: председателя – заведующего кафедрой «Космическое приборостроение» В.Е. Туркова; членов: заместителя заведующего кафедрой «Космическое приборостроение» А.В. Мезенцева, профессора кафедры «Космическое приборостроение» А.А. Поваляева составила настоящий акт о том, что результаты исследований, полученные в кандидатской диссертации Бабурина А.А., а именно математическая модель измерений псевдодальности и псевдофазы и методика высокоточного абсолютного местоопределения потребителя с разрешением целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений сигналов ГЛОНАСС внедрены в учебный процесс по базовой кафедре «Космическое приборостроение» Московского физико-технического института (национального исследовательского университета) при разработке и в ходе проведения лекционных и практических занятий по дисциплине «Глобальные спутниковые системы местоопределения и синхронизации».

Использование указанных результатов позволило повысить качество обучения студентов, обучающихся по профилю «Геокосмические информационные системы и управление движением» (направление 03.03.01 – Прикладные математика и физика).

Председатель комиссии:
заведующий кафедрой «Космическое приборостроение»
к.ф.-м.н.

В.Е. Турков

Члены комиссии:
зам. заведующего кафедрой «Космическое приборостроение»
к.т.н., доцент
профессор кафедры «Космическое приборостроение»
д.т.н., профессор

А.В. Мезенцев

А.А. Поваляев