На правах рукописи

Гайнанов Дамир Насибуллович

Математическое и программное обеспечение вычислительных комплексов для решения задач анализа несовместных систем с массивно параллельной обработкой данных

Специальность 05.13.11 —
«Математическое и программное обеспечение вычислительных машин, комплексов и компьютерных сетей»
Специальность 05.13.18 —
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2018

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор
Кибзун Андрей Иванович

Официальные оппоненты: **Михайлюк Михаил Васильевич**,
доктор физико–математических наук, профессор, ФГУ «Федеральный научный центр Научно–исследовательский институт системных исследований РАН», заведующий отделом «Центр визуализации и спутниковых информационных технологий»
Лазарев Александр Алексеевич,
доктор физико–математических наук, профессор, ФГБУН «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН», заведующий лабораторией «Теории расписаний и дискретной оптимизации»
Тимофеева Галина Адольфовна,
доктор физико–математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Уральский государственный университет путей сообщения», заведующая кафедрой «Естественнонаучные дисциплины»

Ведущая организация: ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН»

Защита состоится 28 сентября 2018 года в 10 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.125.04 на базе МАИ по адресу: 125993, Москва, А–80, ГСП–3, Волоколамское шоссе, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МАИ по адресу: 125993, Москва, А–80, ГСП–3, Волоколамское ш., 4 или на сайте МАИ по ссылке: https://www.mai.ru/events/defence.

Автореферат разослан «____» ____________ 2018 г.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 125993, Москва, А–80, ГСП–3, Волоколамское ш., 4, Отдел Ученого и диссертационных советов.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 212.125.04,
кандидат физико–математических наук, доцент Н. С. Северина

Общая характеристика работы

Диссертационная работа посвящена разработке математического и прикладного программного обеспечения вычислительных комплексов для решения задач анализа несовместных систем условий.

Актуальность темы. Оптимизация технологических процессов на производстве и в транспорте традиционно являются важнейшими областями применения математических методов, программного обеспечения и новейших достижений аппаратного обеспечения вычислительных средств. Современный этап развития теории и практики оптимизации технологических процессов на производстве и в транспорте характеризуется существенным ростом объемов обрабатываемых данных. Сегодня появились возможности фиксации большого числа параметров и условий, при которых осуществляются технологические процессы, практически для каждого отдельного изделия или оказываемого сервиса. В результате в системах хранения данных накапливаются и архивируются большие объемы исторических данных о реализованных технологических процессах. При этом важную роль начинают играть системы предиктивной аналитики, основанные на обработке больших объемов исторических данных, и системы оптимизации технологических процессов в качестве инструментов внедрения полученных прогнозных аналитик. В настоящей работе оптимизация технологических процессов занимает важную роль и реализуется при решении двух классов прикладных задач: оптимизация технологических процессов на металлургическом производстве и оптимизация технологических процессов при планировании и организации грузовых железнодорожных перевозок.

Оптимизация технологических процессов на металлургическом производстве является актуальной областью исследования, поскольку металлургия представляет собой одну из важнейших отраслей экономики с большим экспортным потенциалом. Оптимизация технологических процессов при планировании и организации грузовых железнодорожных перевозок, в свою очередь, играет важнейшую роль для обеспечения территориальной целостности страны, и также является важным интеграционным фактором, влияющим на развитие экономики. В обеих задачах очень важную роль играет инфраструктура, представляющая собой машины и металлургические агрегаты в первом случае, и инфраструктуру железнодорожной сети — во втором. Развитие инфраструктуры требует значительных капитальных вложений и является, вследствие этого, достаточно инерционным процессом. В то же время потребности в росте качества производимой продукции, объемов (металлургического производства) и качества оказываемых сервисных услуг (транспорта) отличается значительно большей динамикой. Закономерным следствием этого является возрастающее влияние инфраструктурных ограничений в процессах оптимизации технологических процессов и появление конфликтов или противоречий в системах ограничений, то есть, другими словами, несовместных условий.

В связи с этим актуальным является систематическое изучение свойств несовместных систем условий с применением различных математических подходов, которые являются одним из основных объектов исследования в диссертационной работе.

В работах Михайлюка М. В., Ипатова А. А. получены важные результаты в области разработки математического и программного обеспечения вычислительных комплексов и автоматизированных систем различного назначения. В том числе в этих работах получены результаты в области разработки моделей и методов параллельной и распределенной обработки данных.

В работах Хамадеева Ш. А., Селиванова С. Г. Визильтера Ю. В. разрабатываются модификации классических оптимизационных методов управления производственными процессами, таких как MES и ERP–технологии.

Значимые результаты в области разработки методов распознавания и классификации данных получены в работах Журавлева Ю. И., Кельманова А. В., Еремеева А. В. Одним из эффективных методов решения задачи распознавания образов в геометрической постановке является комитетный метод. С практической точки зрения наибольший интерес представляют комитеты систем линейных неравенств, ввиду их широкого применения в области моделирования противоречивых задач. Систематическое изучение противоречивых задач математического программирования осуществлялось в работах Еремина И. И. Систематическое исследование различных комитетных конструкций проводилось в работах Мазурова Вл. Д. и трансформировалось в работах Хачая М. Ю. в самостоятельную область математических исследований.

Большой вклад в развитие математических методов решения задач организации перевозок на железнодорожном транспорте внесли Лазарев А. А., Гафаров Е. Р., Хуснуллин Н. Ф. В работах Тимофеевой Г. А. в контексте задач логистики исследуются вопросы планирования перевозок, необходимых к последующему исполнению. В области решения задачи управления транспортными процессами на этапе назначения локомотивов важные результаты получены в работах Кибзуна А. И., Наумова А. В. Этот этап, ввиду ряда естественных ограничений на доступность и использование локомотивов, характеризуется высокой комбинаторной сложностью. Назначение, оптимальное в части количества используемых ресурсов и равномерности их загрузки, требует разработки эффективных эвристических алгоритмов. Так, например, в работах Гимади Э. Х., Кочетова Ю. А. разрабатываются эффективные алгоритмы для решения различных оптимизационных задач, в том числе связанных с назначением заданного множества ресурсов.

В рамках разработки математического обеспечения вычислительного комплекса в диссертационной работе с различных позиций исследуются комбинаторные и структурные свойства несовместных систем. Для этих целей в рассмотрение вводится базовая математическая конструкция — абстрактный симплициальный комплекс — структурные и комбинаторные свойства которой связаны с аналогичными свойствами несовместных систем. Абстрактные симплициальные комплексы подробно рассматриваются, например, в работах Бухштабера В. М., Прасолова В. В., Спеньера Э., Ротмана Й., Стечкина Б. С. В диссертации на основе этой базовой математической конструкции разрабатываются теоретико–графовые математические модели для решения задач анализа несовместных систем.

Из литературы по теории графов следует отметить фундаментальные работы Баранского В. А., Емеличева В. А., Зыкова А. А., Кристофидеса Н., Свами М., Татта У., Харари Ф., Дистеля Р. Теоретико–графовой математической моделью для исследования структурных и комбинаторных свойств несовместных систем условий является граф системы независимости. Это понятие было впервые введено автором в результате обобщения понятия графа максимальных совместных подсистем несовместной системы линейных неравенств (граф МСП), которое, в свою очередь, было введено Тягуновым Л. И. и Новокшеновым В. Ю. В результате систематического исследования свойств графа МСП получены важные результаты, на основе которых разработаны эффективные вычислительные алгоритмы для решения задач анализа несовместных систем условий.

Другой, развиваемый в диссертации, подход к исследованию структурных и комбинаторных свойств несовместных систем линейных неравенств основан на методах комбинаторной геометрии. В этой связи особый интерес представляет исследование диагональной структуры выпуклых многогранников. Так, например, в работах Калаи Г., Нагеля Ю. исследуются свойства диагоналей различных типов. В частности, в работе Альтшуллера А. было введено понятие A–диагонали, а в работе Фидлера М. — понятие F–диагонали. Однако, комбинаторные типы многогранников, определяемые семействами A– и F–диагоналей, не совпадают с комбинаторным типом, определяемым решеткой граней. В диссертационной работе в рассмотрение вводится новый тип диагоналей, названный G–диагональю, классификация по которому в точности совпадает с классической.

В работах Дэвиса С., Рэя Дж., Шефарда Г., Конна А., Шнейдера Р. исследуются комбинаторные свойства конечномерных пространств, при этом основным объектом исследования выступают положительные базисы. В диссертации эти объекты получили новое приложение в задачах анализа несовместных систем и были всесторонне исследованы как геометрические представления минимальных несовместных подсистем (МНП) систем линейных неравенств.

Обзор теории монотонных булевых функций (МБФ) и их разнообразных применений представлен, например, в работах Логачева О. А., Марченкова С. С., Нигматуллина Р. Г., Крама И., Ведженера И., Коршунова А. Д., Сапоженко А. А. Взаимосвязь задачи расшифровки МБФ и задачи выделения максимальных совместных подсистем (МСП) несовместных систем линейных неравенств обоснована в основополагающих работах Журавлева Ю. И. В рамках этой взаимосвязи в диссертации разрабатываются эффективные алгоритмы расшифровки МБФ и приводятся оценки вычислительных сложностей этих алгоритмов.

Целью диссертационной работы является разработка математического и программного обеспечения вычислительного комплекса для решения задач анализа несовместных систем с использованием массивно параллельной обработки данных. Этот вычислительный комплекс предназначен для решения прикладных задач анализа несовместных систем, возникающих в условиях ограниченности инфраструктурных ресурсов таких, как железнодорожная транспортная сеть, или в условиях технологических процессов с большим числом ограничений таких, как металлургическое производство.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**.

1. Разработать новые эффективные алгоритмы выделения экстремальных подсистем для различных классов несовместных систем, а также алгоритмы построения комитетов несовместных систем, основанные на структурных свойствах соответствующих классов систем независимости, с их применением к решению практически важных классов прикладных задач.

2. Разработать общие модели параллельной обработки данных с использованием теоретико–графовых конструкций, в том числе, модели декомпозиций ориентированных графов на множестве сильно связных подграфов.

3. Исследовать структурные свойства различных классов несовместных систем условий методами теории графов и комбинаторного анализа, комбинаторной геометрии и теории МБФ.

4. Разработать управляющую программу для организации параллельной обработки данных в вычислительном комплексе в приложении к решению задачи управления технологическими маршрутами на дискретном производстве, а также комплекс проблемно–ориентированных программ для решения этой прикладной задачи.

5. Разработать управляющую программу для организации параллельной обработки данных в вычислительном комплексе в приложении к решению задачи управления транспортными процессами в условиях противоречивости, а также комплекс проблемно–ориентированных программ для решения этой прикладной задачи.

Методология и методы исследования. Для решения перечисленных задач используются методы математического моделирования, методы массивно параллельной обработки данных, методы теории графов, комбинаторного анализа и дискретной оптимизации, методы комбинаторной геометрии, теории линейных неравенств, а также методы анализа данных и распознавания образов.

Научная новизна.

1. Предложены новые методы разработки прикладного программного обеспечения, основанные на анализе несовместных систем и моделях массивно параллельной обработки данных.

2. Разработаны новые методы математического моделирования и анализа несовместных систем условий с позиций теории графов и комбинаторной оптимизации (графы систем независимости), комбинаторной геометрии (свойства семейств диагоналей и граней выпуклых многогранников) и теории булевых функций (максимальные верхние нули МБФ).

3. Всесторонне рассмотрены свойства графов систем независимости для различных классов. Для ряда классов систем независимости, представляющих прикладной интерес, доказана связность графа системы независимости, вытекающая из связности соответствующего топологического пространства и

являющаяся важнейшим свойством графа системы независимости, эффективно использующимся при построении алгоритмов выделения их экстремальных подсистем.

4. Получены новые результаты для класса систем независимости, порождаемых несовместными системами линейных неравенств, доказаны связность графа МСП и достаточные условия более сильного типа связности графа МСП, а также получены оценки степеней вершин и диаметра графа МСП. Доказана теорема о существовании цикла нечетной длины в графе МСП, на базе которой предложен новый приближенный алгоритм построения минимального комитета несовместной системы линейных неравенств и получена оценка его эффективности в сравнении с известными алгоритмами. Впервые введено понятие альтернативного покрытия, на основе которого разработан новый критерий классификации классических инструментов обработки данных таких как комитеты и решающие деревья.

5. Введено понятие G–диагонали выпуклого многогранника и получены новые результаты о взаимосвязи между семействами МСП и МНП несовместной системы линейных неравенств и семействами диагоналей и граней соответствующего выпуклого многогранника. Показано, что классификация многогранников по комбинаторному типу совпадает с классификацией многогранников по типам G–диагоналей.

6. Построены новые полиномиальные эвристические алгоритмы дихотомии для решения многоклассовой задачи распознавания образов в геометрической постановке на этапе разделения обучающей выборки.

7. Введен новый естественный критерий оптимальности алгоритма расшифровки МБФ, нормированный на общее число верхних нулей и нижних единиц МБФ и учитывающий объективную сложность задачи. Для МБФ, порождаемых несовместными системами линейных неравенств, построен оптимальный алгоритм по этому критерию.

8. Разработан новый подход к оптимизации управления технологическими маршрутами на дискретном производстве, состоящий в формировании сети задач распознавания образов, решаемых с помощью разработанных в диссертации методов анализа несовместных систем. Разработана модель параллельной обработки данных для решения задач в такой сети.

9. Разработана новая математическая модель управления транспортными процессами в условиях противоречивости на примере задачи управления грузовыми железнодорожными перевозками.

10. Разработан новый общий подход к декомпозиции набора ориентированных путей в графе на множестве сильно связных подграфов этого графа. На основе этого подхода разработана модель параллельной обработки данных для задачи назначения локомотивов на исполнение ниток графика плана перевозок, имеющей высокую комбинаторную сложность.

11. Разработаны управляющие программы для реализации параллельной обработки данных в вычислительном комплексе в приложениях к решению задач управления технологическими маршрутами на дискретном производстве и

транспортными процессами в условиях противоречивости и разработаны комплексы проблемно–ориентированных прикладных программ для решения этих задач.

Практическая значимость работы состоит в том, что ее основные положения могут быть использованы для построения прикладных систем анализа различных классов несовместных систем. Разработанный в диссертации вычислительный комплекс для решения задач анализа несовместных систем с массивно параллельной обработкой данных может быть использован для оптимизации технологических маршрутов на дискретном производстве, в частности, на металлургическом производстве, с целью снижения затрат и повышения качества продукции, а также для оптимизации транспортных процессов, в частности, грузовых железнодорожных перевозок, с целью повышения уровня автоматизации, снижения влияния человеческого фактора, повышения пропускной способности и обеспечения энергоснабжения.

Достоверность результатов, представленных в диссертационной работе, подтверждается адекватными постановками задач и адекватными применяемыми математическими моделями, строгими математическими доказательствами, проведенными численными экспериментами и практическим использованием разработанного вычислительного комплекса для решения реальных прикладных задач.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на всероссийских и международных научных конференциях и семинарах: научно–техническая конференция «Методы математического программирования и их программное обеспечение» (Свердловск, 1981); 1-я конференция по комбинаторной геометрии и ее приложениям (Батуми, 1985); 23–24 международные научные конференции «Microwave and Telecommunication Technology» (Севастополь, 2013–2014); всероссийская научная конференция «Управление большими системами» (Самара, 2016); международная научная конференция «Математика, информатика и физика и их приложения в науке и образовании» (Москва, 2016); XLII–XLIII международные научные конференции «Гагаринские чтения» (Москва, 2016–2017); XXI–XXIII международные научные конференции «Системный анализ, управление и навигация» (Евпатория, 2016–2018); международная научно–практическая конференция «Big Data and Advanced Analytics» (Минск, 2017); международная научная конференция «Big Data Conference» (Москва, 2017); VIII международная научная конференция «OPTIMA» (Петровац, 2017); XIII международная научная конференция «BALCOR» (Белград, 2018); VII международная научная конференция «OPTA» (Омск, 2018); семинар отдела «Дискретная оптимизация» ОФ ИМ им. С. Л. Соболева СО РАН (Омск, 2017); общероссийский семинар «Информатика, управление и системный анализ» факультета ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова (Москва, 2017); семинары отдела «Математическое программирование» ИММ им. Н. Н. Красовского УрО РАН (Екатеринбург, 2017–2018); семинар лаборатории «Теории расписаний и дискретной оптимизации» ИПУ им. В. А. Трапезникова РАН (Москва, 2018); семинар лаборатории «Дискретная оптимизация в исследовании операций» ИМ им. С. Л. Соболева СО РАН (Новосибирск, 2018); семинар лаборатории «Анализ данных» ИМ им. С. Л. Соболева СО РАН (Новосибирск, 2018).

Результаты диссертации были использованы в научно–исследовательских работах по гранту 218–03–167 в соответствии с договором № 02.G25.31.0055 с Министерством образования и науки России от 12 февраля 2013 г. в рамках проекта «Разработка автоматизированной системы слежения, контроля, моделирования, анализа и оптимизации полного цикла выпуска металлургической продукции на основе создания и интеграции математических моделей технологических, логистических и бизнес–процессов предприятия».

Автор является лауреатом премии им. Е. А. и М. Е. Черепановых по направлению научно–технической деятельности 2000 г. и премии Правительства России в области науки и техники 2004 г.

Публикации. Основные результаты диссертации изложены в 56 работах, включая 2 монографии, 25 статей, опубликованных в рецензируемых научных изданиях, из которых 23 журнала входят в международные реферативные базы Web of Science или Scopus и 13 — в перечень ВАК, а также 4 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ и 4 патента на изобретения.

Личный вклад. Все результаты диссертации получены лично соискателем в ходе научно–исследовательской деятельности. Из результатов, опубликованных в соавторстве, в диссертацию включен только принадлежащий соискателю материал.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 315 страниц текста с 15 рисунками и 7 таблицами. Список литературы содержит 255 источников.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность темы исследования, приводится обзор научной литературы, формулируется цель работы и научная новизна результатов, а также положения, выносимые на защиту.

В первой глава описываются основные математические модели несовместных систем, которые исследуются более детально в последующих главах. Вводится аксиоматическое определение несовместной системы условий в наиболее общем виде (в рамках настоящей работы) на языке отображений булевой решетки в множество подмножеств некоторого множества.

Пусть $\mathfrak{S} := \{\mathfrak{s}_1,\mathfrak{s}_2,\ldots,\mathfrak{s}_m\}$ — конечная непустая система условий и $[m] := \{1,2,\ldots,m\}$ — множество индексов условий, которыми помечены элементы множества $\mathfrak{S}$. Множество всех подмножеств множества $[m]$ частично упорядочено по теоретико–множественному включению и находится во взаимно-однозначном соответствии с элементами булевой решетки $\mathbb{B}(m)$. При этом произвольный элемент $B \in \mathbb{B}(m)$ называется мультииндексом подсистемы $\{\mathfrak{s}_i\colon i \in B\}$ системы $\mathfrak{S}$, и множество атомов $\mathbb{B}(m)^{(1)} := \big\{\{1\},\{2\},\ldots,\{m\}\big\}$ решетки $\mathbb{B}(m)$ находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством условий $\mathfrak{S}$.

Пусть задано отображение $\pi\colon \mathbb{B}(m) \to \mathbf{2}^\Gamma$ в семейство подмножеств некоторого непустого множества Γ со следующими свойствами.

1. Пустая подсистема системы $\mathfrak{S}$ совместна, то есть $\pi(\hat{0}) \neq \varnothing$, при этом обычно полагают $\pi(\hat{0}) := \Gamma$.

2. Каждое условие в отдельности выполнимо (каждая подсистема, состоящая из единственного условия, совместна)

$$B \in \mathbb{B}(m)^{(1)} \Longrightarrow \pi(B) \neq \varnothing \ .$$

3. Для любых $A, B \in \mathbb{B}(m)$ выполняется

$$A \preceq B \Longrightarrow \pi(A) \supseteq \pi(B) \text{ и } \pi(A) \cap \pi(B) \supseteq \pi(A \vee B) \ ,$$

где $A \vee B$ обозначает наименьшую верхнюю грань (то есть объединение множеств $A \cup B$) элементов A и B в решетке $\mathbb{B}(m)$.

4. Система несовместна, то есть $\pi(\hat{1}) = \varnothing$.

Определение 1. *Система $\mathfrak{S}$, для которой связанные с ней отображение π и семейство $\mathbf{2}^\Gamma$ значений этого отображения удовлетворяют условиям $1-4$, называется конечной несовместной монотонной системой условий.*

Многочисленные примеры наборов $(\mathfrak{S}, \Gamma, \pi)$, для которых выполнены ограничения $1 - 4$, доставляют конечные несовместные системы уравнений, неравенств или смешанные системы уравнений и неравенств над векторными пространствами.

Далее в первой главе описывается хорошо известное понятие комитета несовместной системы линейных неравенств и его применение в задаче распознавания образов в геометрической постановке. Данный класс несовместных систем условий играет большую роль в исследованиях, проводимых в последующих главах.

Рассмотрим несовместную систему однородных строгих линейных неравенств ранга n над вещественным евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$:

$$\mathfrak{S}\colon = \left\{ \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle > 0\colon \ \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \ \|\mathbf{a}_i\| = 1, \, i \in [m], \, i_1 \neq i_2 \Rightarrow \mathbf{a}_{i_1} \neq -\mathbf{a}_{i_2} \right\} . \qquad (1)$$

Комитетом несовместной системы (1) называется конечное множество векторов $\boldsymbol{\mathcal{K}} \subset \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$, удовлетворяющее соотношению

$$|\{\mathbf{x} \in \boldsymbol{\mathcal{K}}\colon \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle > 0\}| > \frac{1}{2} |\boldsymbol{\mathcal{K}}| \ ,$$

для каждого задающего систему $\mathfrak{S}$ вектора $\mathbf{a}_i, i \in [m]$.

Метод комитетов эффективно используется для решения несовместных задач принятия решений и, в частности, при обучении распознаванию: задача комитетного разделения обучающей выборки, с целью формирования решающих правил распознавания.

Другой моделью несовместных систем условий служат МБФ. Системе $\mathfrak{S}$ может быть сопоставлена МБФ вида

$$\mathfrak{f}(\boldsymbol{\alpha}) = 0 \Longleftrightarrow \pi\Bigg(\bigcup_{\{a_i\}\in\mathbb{B}(m)^{(1)}:\ \alpha_i=1} \{a_i\}\Bigg) \neq \varnothing\ ,$$

$$\mathfrak{f}(\boldsymbol{\alpha}) = 1 \Longleftrightarrow \pi\Bigg(\bigcup_{\{a_i\}\in\mathbb{B}(m)^{(1)}:\ \alpha_i=1} \{a_i\}\Bigg) = \varnothing\ .$$

В рамках такого подхода набор $\boldsymbol{\alpha}$ является верхним нулем для $\mathfrak{f}$ тогда и только тогда, когда $\bigcup_{a_i\in\mathbb{B}(m)^{(1)}:\ \alpha_i=1} \{a_i\}$ является мультииндексом МСП системы $\mathfrak{S}$.

В качестве следующих базовых математических моделей для исследования задач анализа несовместных систем условий предлагаются абстрактные симплициальные комплексы и близкие к ним системы независимости.

Рассмотрим семейство непустых попарно различных подмножеств $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \mathbb{B}\,(m) : A_i \subseteq [m]$.

Системой представителей семейства $\mathcal{A}$ называется

$$B \subseteq [m]\colon B \cap A_i \neq \varnothing\ \forall\, i \in [n]\ ,$$

при этом если $\forall\, b \in B\ \exists\, j \in [n]\colon\ (B - \{b\}) \cap A_j = \varnothing$, то система B является минимальной по включению. Семейство всех минимальных по включению систем представителей семейства $\mathcal{A}$ называется блокатором и обозначается как $\mathfrak{B}\,(\mathcal{A})$.

Порядковым идеалом решетки $\mathbb{B}\,(m)$, порожденным множеством $\mathcal{A}$, называется семейство множеств

$$\mathfrak{I}\,(\mathcal{A}) = \{E \in \mathbb{B}\,(m) : \exists\ A \in \mathcal{A}, E \preceq A\}\ ,$$

где $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \mathbb{B}\,(m) - \big\{\hat{0}\big\}$, а порядковым фильтром —

$$\mathfrak{F}\,(\mathcal{A}) = \{E \in \mathbb{B}\,(m) : \exists\ A \in \mathcal{A}, E \succeq A\}\ ,$$

где $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{B}\,(m)$.

Определение 2. *Неупорядоченное семейство множеств*

$$\Delta\,(\mathcal{A}) = \{F \subseteq [m]\colon F \in \mathfrak{I}\,(\mathcal{A})\}\ ,$$

где $\mathcal{A}$ — антицепь, называется абстрактным симплициальным комплексом на множестве вершин $\bigcup A_i$ с семейством гиперграней $\mathcal{A}$.

Произвольный абстрактный симплициальный комплекс характеризуется свойством системы независимости:

$$G \in \Delta\ ,\ F \subseteq G\ \Longrightarrow\ F \in \Delta\ ,$$

в частности, $\varnothing \in \Delta$. Рассматривая $\Delta\,(\mathcal{A}) \subsetneq \mathbf{2}^{[m]}$ и его дополнение до булеана, можно показать, что любая антицепь $\mathcal{A} \subset \mathbb{B}\,(m) - \big\{\hat{1}\big\}$ индуцирует разбиение решетки $\mathbb{B}(m)$ вида

$$\mathbb{B}(m) = \mathfrak{I}(\mathcal{A}) \mathbin{\dot\cup} \mathfrak{F}\big(\mathfrak{B}(\mathcal{A}^{\perp})\big)\ ,$$

где $\mathcal{A}^{\perp}$ — семейство дополнений множеств из $\mathcal{A}$.

Абстрактный симплициальный комплекс $\Delta(\mathcal{A}) \subsetneq \mathbf{2}^{[m]}$ на множестве вершин $[m]$ служит основой для разрабатываемых в последующих главах математических моделей, наиболее полно отражающих структурные и комбинаторные свойства несовместных систем условий.

Во **второй главе** разрабатываются теоретико–графовые методы математического моделирования несовместных систем условий. Предлагается подход, в рамках которого исследование сводится к рассмотрению структурных и комбинаторных свойств графов систем независимости. С помощью этой математической модели в последующих главах разрабатываются методы численного решения задач подсчета и выделения всех МСП и МНП несовместных систем.

В рассмотрение вводится специальная конструкция — граф системы независимости — и рассматриваются свойства такого графа для различных классов систем независимости.

Определение 3. *Графом системы независимости* $\mathtt{ISG}(V,\Delta)$ *называется простой граф, определяемый следующим образом:*

– множеством вершин графа $\mathtt{ISG}(V,\Delta)$ *является семейство гиперграней* $\mathbf{max}\,\Delta$ *абстрактного симплициального комплекса* (V,Δ) *на множестве вершин* $V = \bigcup_{H\in\mathbf{max}\,\Delta} H$*,*

– семейством ребер графа $\mathtt{ISG}(V,\Delta)$ *является семейство всех неупорядоченных пар гиперграней* $\{H,H'\} \subseteq \mathbf{max}\,\Delta$*, покрывающих множество вершин:*

$$H \cup H' = V\ .$$

Следующее утверждение показывает, что класс графов систем независимости достаточно широк.

Утверждение 1. *Всякий конечный простой граф* $\mathbf{G}$ *изоморфен некоторому графу системы независимости.*

В алгоритмическом плане интересны ситуации, когда графы систем независимости связны, поскольку связность таких графов может быть эффективно использована при построении алгоритмов выделения семейств гиперграней.

Пусть V — некоторое конечное мультисемейство упорядоченных пар $v_i = (\boldsymbol{Z}_i, \boldsymbol{Z}'_i)$, $i \in [m]$, замкнутых подмножеств $\boldsymbol{Z}_i \subset \boldsymbol{Z}$ и $\boldsymbol{Z}'_i \subset \boldsymbol{Z}$ связного топологического пространства $\boldsymbol{Z}$, покрывающих пространство:

$$\boldsymbol{Z}_i \cup \boldsymbol{Z}'_i = \boldsymbol{Z}\ .$$

Определим комплекс пересечений $(V,\Delta_\cap)$ таким образом, что

$$F \in \Delta_\cap \iff \bigcap_{v\in F} v \neq (\varnothing,\varnothing)\ .$$

Центральным результатом второй главы является следующее утверждение о связности графа системы независимости, состоящей из семейства упорядоченных пар замкнутых подмножеств топологического пространства $\boldsymbol{X}$.

Утверждение 2. *Если* $\#\mathbf{max}\,\Delta_{\cap} > 1$*, то граф системы независимости* $\mathtt{ISG}(V, \Delta_{\cap})$ *связен.*

Этот результат интересен тем, что связность графа системы независимости выводится из связности самого топологического пространства. На основе этого результата в работе формулируются достаточные условия связности графа системы независимости, порождаемой несовместной системой неравенств, определяемых непрерывными вещественными функциями.

Пусть $\mathbf{F}(\boldsymbol{Z}) := \{f_i \colon i \in [m]\}$, $m > 1$, — конечная система вещественных непрерывных функций. Определим комплекс $\big(\mathbf{F}(\boldsymbol{Z}), \Delta_{>}\big)$, в котором $\mathbf{F}(\boldsymbol{Z})$ — множество вершин, и $F \in \Delta_{>}$ тогда и только тогда, когда система неравенств $\{\alpha_F f(\boldsymbol{z}) > 0 \colon f \in F\}$ совместна для некоторого множителя $\alpha^{\star}_F \in \mathbb{R}$.

Обозначим через $\#\mathbf{max}\,\Delta$ общее количество элементов в семействе гиперграней $\mathbf{max}\,\Delta$ абстрактного симплициального комлекса Δ.

Утверждение 3. *Пусть* $\#\mathbf{max}\,\Delta_{>} > 1$*, и в системе* $\mathbf{F}(\boldsymbol{Z})$ *множества* $h^{-1}(0)$ *нигде не плотны для всякой функции* $h \in \mathbf{F}(\boldsymbol{Z})$*. Если множество*

$$\boldsymbol{Z}' := \boldsymbol{Z} - \bigcup_{f,g \in \mathbf{F}(\boldsymbol{Z}) \colon f \neq g} \big(f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)\big)$$

связно, то граф системы независимости $\mathtt{ISG}(\mathbf{F}(\boldsymbol{Z}), \Delta_{>})$ *связен.*

Наибольший прикладной интерес представляет случай линейных функций над пространством $\mathbb{R}^n$.

Пусть $\mathbf{J}$ — семейство мультииндексов МСП системы (1). Комплекс $\Delta(\mathbf{J})$ с семейством гиперграней $\mathbf{J}$ на множестве вершин $[m]$ отвечает семейству мультииндексов всех совместных подсистем системы $\mathfrak{S}$.

Определение 4. *Граф* $\mathtt{MFSG}(\mathfrak{S})$ *максимальных совместных подсистем (граф МСП) системы* $\mathfrak{S}$ *определяется как граф системы независимости, отвечающей комплексу* $\big([m], \Delta(\mathbf{J})\big)$*:*

$$\mathtt{MFSG}(\mathfrak{S}) = \mathtt{ISG}\big([m], \Delta(\mathbf{J})\big)\ .$$

В этом случае достаточное условие связности графа системы независимости из Утверждения 3 формулируется как отсутствие противоположных векторов среди векторов, определяющих линейные неравенства. Тогда попарное пересечение их нуль–множеств имеет размерность $n-2$ и объединение конечного числа плоскостей размерности $n-2$ не разделяет связное пространство $\mathbb{R}^n$. Это условие является общепринятым при рассмотрении несовместных систем однородных строгих линейных неравенств в задачах распознавания образов в геометрической постановке. В связи с указанной практической значимостью несовместных систем линейных неравенств, далее во второй главе более подробно изучаются свойства графов систем независимости, порождаемых такими системами. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Граф* $\mathtt{MFSG}(\mathfrak{S})$ *максимальных совместных подсистем несовместной системы* (1) *связен.*

Результат Теоремы 1 является важнейшим свойством графа МСП. Это свойство лежит в основе алгоритмов выделения МСП системы $\mathfrak{S}$, разрабатываемых в последующих главах.

Следующая теорема дает оценку степеней вершин графа МСП системы (1).

Теорема 2. *Пусть* $J_s \in \mathbf{J}$ *— мультииндекс некоторой максимальной совместной подсистемы системы* (1).

(i) *Степень вершины* J_s *в ее графе МСП* $\mathtt{MFSG}(\mathfrak{S})$ *не меньше двух:* $|\mathcal{N}(J_s)| \geq 2$.

(ii) *Если каждая подсистема из* n *неравенств системы* (1) *совместна, то степень вершины* J_s *в ее графе МСП* $\mathtt{MFSG}(\mathfrak{S})$ *не меньше* n: $|\mathcal{N}(J_s)| \geq n$.

Следующая теорема лежит в основе построения приближенного алгоритма поиска минимальных комитетов системы (1).

Теорема 3. *Граф МСП* $\mathtt{MFSG}(\mathfrak{S})$ *системы* (1) *содержит хотя бы один цикл нечетной длины.*

Следующее утверждение дает характеризацию графов МСП системы $\mathfrak{S}$ ранга 2 над $\mathbb{R}^2$.

Утверждение 4. *Некоторый граф изоморфен графу МСП* $\mathtt{MFSG}(\mathfrak{S})$ *системы* $\mathfrak{S}$ *ранга* 2 *над* $\mathbb{R}^2$ *тогда и только тогда, когда этот граф представляет собой простой цикл нечетной длины* $q, 3 \leq q \leq m$.

При построении алгоритмов выделения МСП системы (1) могут быть эффективно использованы положения следующего утверждения.

Утверждение 5. *Справедливы следующие утверждения:*

(i) *всякое ребро графа МСП* $\mathtt{MFSG}(\mathfrak{S})$ *системы* (1) *принадлежит простому циклу (и, как следствие, граф* $\mathtt{MFSG}(\mathfrak{S})$ *не имеет мостов) длины не более* m*;*

(ii) *граф* $\mathtt{MFSG}(\mathfrak{S})$ *содержит простой цикл нечетной длины, не превосходящей* m*;*

(iii) *диаметр графа* $\mathtt{MFSG}(\mathfrak{S})$ *не превосходит* $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$.

Следующее утверждение дополняет Теорему 2 о крайних оценках для степеней вершин графа.

Утверждение 6. *Пусть для некоторого* k, $1 \leq k \leq n-1$, *каждая подсистема из* $k+1$ *неравенств системы* (1) *совместна. Тогда степень любой вершины* J_s *в графе* $\mathtt{MFSG}(\mathfrak{S})$ *не меньше* $k+1$.

Наравне с параметрами вершин графа важную роль играют свойства графа $\mathtt{MFSG}(\mathfrak{S})$, характеризующие его тип связности. При некоторых условиях граф МСП системы $\mathfrak{S}$ обладает более сильным типом связности, чем просто связность, подтверждаемая Теоремой 1.

Утверждение 7. *Если ранг каждой подсистемы из трех неравенств системы* (1) *равен трем, то ее граф МСП* $\mathtt{MFSG}(\mathfrak{S})$ *является 2-связным.*

Естественным продолжением результатов, полученных во второй главе, стала разработка приближенных комбинаторно–графовых алгоритмов для численного решения задач анализа несовместных систем на этапах подсчета и выделения МСП, а также приближенных алгоритмов построения комитетов несовместных систем линейных неравенств.

В **третьей главе** несовместные системы линейных неравенств рассматриваются с позиций комбинаторной геометрии. Установлена тесная взаимосвязь между комбинаторными свойствами систем линейных неравенств и аналогичными свойствами выпуклых многогранников.

Будем использовать стандартные обозначения: pos — положительная оболочка, conv — выпуклая оболочка, ri — относительная внутренность, vert — множество вершин, dim — аффинная размерность.

В третьей главе вводится важное новое понятие G-диагонали выпуклого многогранника. Введенное понятие соотносится с двумя другими понятиями A-диагоналей и F-диагоналей. Выводятся все попарные зависимости между шестью свойствами многогранников такими, как «быть циклическим», «иметь вершины в общем положении», «быть симплициальным» и три свойства попарных совпадений семейств A-, F- и G-диагоналей.

Определение 5. *Пусть* $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ *— многогранник,* $D \subsetneqq \operatorname{vert}\boldsymbol{\mathcal{P}}$. *Множество* D *(или* $\operatorname{conv} D$*) является*

– A-*диагональю, если* $\operatorname{conv} D \cap \operatorname{ri}\boldsymbol{\mathcal{P}} \neq \varnothing$, *но для любого собственного подмножества* $D' \subsetneqq D$ *множество* $\operatorname{conv} D'$ *является гранью многогранника* $\boldsymbol{\mathcal{P}}$*;*

– G-*диагональю, если* $\operatorname{conv} D \cap \operatorname{ri}\boldsymbol{\mathcal{P}} \neq \varnothing$, *но любое собственное подмножество* $D' \subsetneqq D$ *лежит в некоторой собственной грани многогранника* $\boldsymbol{\mathcal{P}}$*;*

– F-*диагональю, если* $\operatorname{conv} D \cap \operatorname{ri}\boldsymbol{\mathcal{P}} = \operatorname{ri}\operatorname{conv} D \cap \operatorname{ri}\boldsymbol{\mathcal{P}} \neq \varnothing$.

Для семейства всех A-, G- и F-диагоналей и семейства всех r-мерных диагоналей (r-диагоналей) многогранника $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ обозначим соответственно:

$$\mathcal{D}_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{\mathcal{P}})\ ,\ \mathcal{D}_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{\mathcal{P}})\ ,\ \mathcal{D}_{\mathrm{F}}(\boldsymbol{\mathcal{P}}) \text{ и } \mathcal{D}^r_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{\mathcal{P}})\ ,\ \mathcal{D}^r_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{\mathcal{P}})\ ,\ \mathcal{D}^r_{\mathrm{F}}(\boldsymbol{\mathcal{P}})\ .$$

Следующее утверждение вытекает непосредственно из определения диагоналей различных типов.

Утверждение 8. *Для* A-*,* G- *и* F-*диагоналей* d*-многогранника* $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ *и* $r \in [d-1]$ *выполняются соотношения:*

$$\mathcal{D}^r_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{\mathcal{P}}) \subset \mathcal{D}^r_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{\mathcal{P}}) \subset \mathcal{D}^r_{\mathrm{F}}(\boldsymbol{\mathcal{P}})\ ;$$
$$\mathcal{D}^0_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{\mathcal{P}}) = \mathcal{D}^0_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{\mathcal{P}}) = \mathcal{D}^0_{\mathrm{F}}(\boldsymbol{\mathcal{P}}) = \mathcal{D}^d_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{\mathcal{P}}) = \mathcal{D}^d_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{\mathcal{P}}) = \mathcal{D}^d_{\mathrm{F}}(\boldsymbol{\mathcal{P}}) = \varnothing\ ;$$
$$\mathcal{D}^1_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{\mathcal{P}}) = \mathcal{D}^1_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{\mathcal{P}}) = \mathcal{D}^1_{\mathrm{F}}(\boldsymbol{\mathcal{P}})\ .$$

Говорят, что два многогранника имеют одинаковый комбинаторный тип, если их решетки граней изоморфны. Для многогранника $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ обозначим через $\mathcal{F}(\boldsymbol{\mathcal{P}})$ класс всех многогранников, имеющих комбинаторный тип как у $\boldsymbol{\mathcal{P}}$, и через $\mathcal{F}_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{\mathcal{P}})$ — класс всех многогранников, имеющих A-диагональный тип как у $\boldsymbol{\mathcal{P}}$. Обозначения $\mathcal{F}_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{\mathcal{P}})$ и $\mathcal{F}_{\mathrm{F}}(\boldsymbol{\mathcal{P}})$ несут аналогичный смысл.

Отношение «иметь одинаковый диагональный комбинаторный тип» является отношением эквивалентности и порождает комбинаторную классификацию на множестве многогранников. В третьей главе диссертации показано, что определение G-диагоналей отличается от определений A- и F-диагоналей тем, что классификация многогранников по комбинаторному типу совпадает с классификацией по диагональному типу только для G-диагоналей. В связи с этим введение понятия G-диагоналей и изучение комбинаторных свойств G-диагоналей многогранников приобретает особый научный и практический интерес.

Утверждение 9. *Для произвольного многогранника $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ справедливы соотношения*

$$\mathcal{F}_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{\mathcal{P}}) \supset \mathcal{F}(\boldsymbol{\mathcal{P}}) = \mathcal{F}_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{\mathcal{P}}) \supset \mathcal{F}_{\mathrm{F}}(\boldsymbol{\mathcal{P}})\ .$$

Положительный базис (ПБ) линейного пространства определяется как минимальное по включению подмножество линейного пространства, положительная оболочка которого совпадает со всем линейным пространством. Положительные базисы в $\mathbb{R}^n$ изучаются в третьей главе диссертации с точки зрения комбинаторной структуры двух семейств подмножеств — так называемых минимальных подбазисов и максимальных односторонних подмножеств. Для максимального одностороннего подмножества ПБ $\boldsymbol{B} \subset \mathbb{R}^n$ рассматриваются две характеристики: $\alpha\,(\boldsymbol{B})$ — мощность наибольшего максимального одностороннего подмножества, и $\beta\,(\boldsymbol{B})$ — мощность наименьшего максимального одностороннего подмножества. Показано, что ПБ $\boldsymbol{B} \subset \mathbb{R}^n$ является строго положительным (то есть пересечение положительных оболочек любых непересекающихся подмножеств $\boldsymbol{B}$ состоит из единственного нулевого вектора) тогда и только тогда, когда

$$\alpha\,(\boldsymbol{B}) = \beta\,(\boldsymbol{B}) = n\ .$$

В результате исследования свойств ПБ также получены оценки для характеристик $\alpha\,(\boldsymbol{B})$ и $\beta\,(\boldsymbol{B})$ для положительных базисов $\boldsymbol{B} \subset \mathbb{R}^n$.

Особый случай, интересный для рассмотрения в теории положительных базисов — это регулярные базисы. Положительный базис $\boldsymbol{B}$ пространства $\mathbb{R}^n$ называется регулярным, если для некоторого его симплициального представления $(\boldsymbol{B}', \boldsymbol{B}'')$ выполняется включение:

$$\boldsymbol{B} \subset \operatorname{conv} \boldsymbol{B}'\ ,$$

где conv — выпуклая оболочка. В рамках исследования свойств ПБ также получены характеризации регулярных положительных базисов $\boldsymbol{B} \subset \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим несовместную систему условий общего вида

$$\mathsf{S} := \big\{ \langle \boldsymbol{a}_i, \mathrm{x} \rangle > 0 \colon \boldsymbol{a}_i, \mathrm{x} \in \mathbb{R}^r,\ \|\boldsymbol{a}_i\| = 1,\ i \in [m] \big\}\ , \qquad (2)$$

определяемых множеством $\boldsymbol{A}(\mathsf{S}) := \{\boldsymbol{a}_i \colon i \in [m]\}$ задающих векторов.

Неравенство $\langle \boldsymbol{a}_i,\mathbf{x}\rangle > 0$ системы S вида (2) называется существенным, если оно не входит хотя бы в одну из ее МСП, и, таким образом, система несократима, если все ее неравенства существенные.

Утверждение 10. *Система* S *несократима тогда и только тогда, когда множество* $\operatorname{pos}\boldsymbol{A}(\mathsf{S})$ *является линейным подпространством.*

Таким образом, при изучении комбинаторных свойств несовместных систем линейных неравенств, не уменьшая общности, можно ограничиться несократимыми системами.

Центральным результатом третьей главы является полученная двойственная связь между комбинаторной структурой несовместной системы линейных неравенств и комбинаторной структурой некоторого соответствующего выпуклого многогранника. Для построения указанной двойственности используются преобразования Гейла конечной последовательности точек.

Пусть задана конечная последовательность точек $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_m) \subset \mathbb{R}^r$ такая, что $\operatorname{aff}\boldsymbol{X} \simeq \mathbb{R}^r$. Рассмотрим $(m-r-1)$-мерное пространство $\mathbf{K}(\boldsymbol{X})$ всех решений $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m) \in \mathbb{R}^m$ следующей системы однородных линейных уравнений:

$$\sum_{i\in[m]} \beta_i \boldsymbol{x}_i = \mathbf{0}\ , \quad \sum_{i\in[m]} \beta_i = 0\ .$$

Зафиксируем в пространстве $\mathbf{K}(\boldsymbol{X})$ его произвольный упорядоченный базис $(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\ldots,\boldsymbol{b}_{m-r-1})$. Пусть $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{X})$ — $(m-r-1)\times m$-матрица, строками которой служат векторы $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\ldots,\boldsymbol{b}_{m-r-1}$ этого базиса. При этом для каждого индекса $i \in [m]$ вектор $\boldsymbol{x}_i^*$ пространства $\mathbb{R}^{m-r-1}$ соответствует i-му столбцу матрицы $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{X})$.

Определение 6. *Преобразованием Гейла последовательности* $\boldsymbol{X}$ *называется последовательность* $\boldsymbol{X}^* = (\boldsymbol{x}_1^*,\boldsymbol{x}_2^*,\ldots,\boldsymbol{x}_m^*)$.

Для произвольного конечного непустого набора точек $\boldsymbol{X} \subset \mathbb{R}^r$ введем следующее определение диагонали.

Определение 7. *Минимальный по включению поднабор* $\boldsymbol{D} \subseteq \boldsymbol{X}$, *обладающий свойством*

$$\operatorname{conv}\boldsymbol{D} \cap \operatorname{ri}\operatorname{conv}\boldsymbol{X} \neq \varnothing\ ,$$

называется диагональю набора $\boldsymbol{X}$.

Теорема 4. *Пусть* S — *некоторая несократимая несовместная система вида* (2) *ранга* r *над* $\mathbb{R}^r$.

(i) *Семейство* $\mathbf{I}$ *подмножеств множества* $[m]$ — *семейство мультииндексов всех МНП системы* S *тогда и только тогда, когда семейство*

$$\mathbf{I}^{\perp} = \{[m] - I \colon I \in \mathbf{I}\} \ —$$

семейство мультииндексов всех гиперграней некоторого набора m точек аффинной размерности $d = m - r - 1$ в пространстве $\mathbb{R}^d$.

(ii) *Семейство* $\mathbf{J}$ *подмножеств множества* $[m]$ *— семейство мультииндексов всех МСП системы* S *тогда и только тогда, когда семейство*

$$\mathbf{J}^{\perp} = \{[m] - J \colon J \in \mathbf{J}\} \text{ —}$$

семейство мультииндексов всех диагоналей некоторого набора m точек аффинной размерности $d = m - r - 1$ в пространстве $\mathbb{R}^d$.

Установленная двойственная связь играет важную роль при исследовании комбинаторных свойств несовместных систем линейных неравенств в связи с тем, что результаты комбинаторной геометрии в области исследования выпуклых многогранников могут быть использованы для исследования свойств семейств МСП и МНП несовместных систем линейных неравенств. И, напротив, свойства семейств МСП и МНП несовместных систем линейных неравенств могут быть использованы для исследования свойств диагоналей и гиперграней конечных наборов точек.

Рассмотрим пример (рис. 1) использования Теоремы 4 для исследования структурных и комбинаторных свойств несовместной системы линейных неравенств.

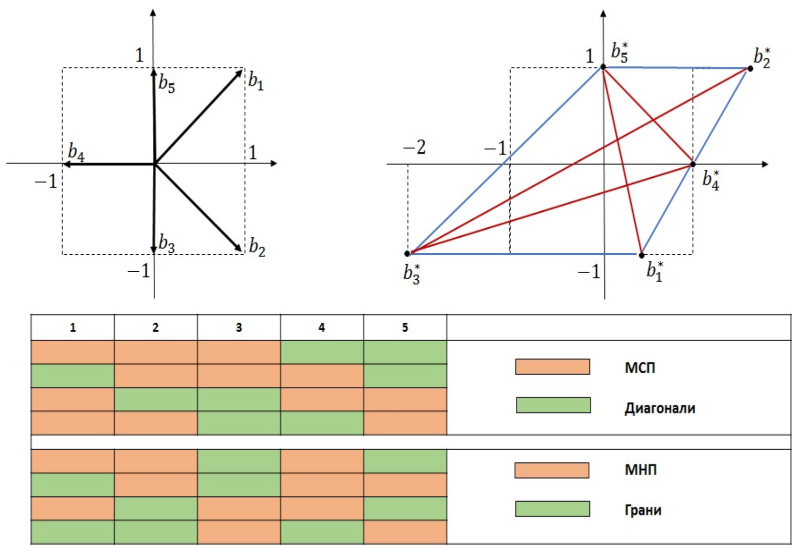

Рис. 1 Комбинаторные свойства многогранников и несовместных систем линейных неравенств

Для множества задающих векторов несовместной системы линейных неравенств (слева) с помощью преобразования Гейла получен набор точек (справа). Семейство диагоналей этого набора: $\Big\{\{b_4^*, b_5^*\}, \{b_1^*, b_5^*\}, \{b_2^*, b_3^*\}, \{b_3^*, b_4^*\}\Big\}$, а его дополнение соответствует семейству мультииндексов МСП исходной системы: $\Big\{\{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \{1,4,5\}, \{1,2,5\}\Big\}$. Аналогично, семейство граней: $\Big\{\ \{b_3^*, b_5^*\}, \{b_1^*, b_3^*\}, \{b_2^*, b_5^*\}, \{b_1^*, b_2^*, b_4^*\}\Big\}$, а его дополнение соответствует семейству мультииндексов МНП: $\Big\{\{1,2,4\}, \{2,4,5\}, \{1,3,4\}, \{3,5\}\Big\}$.

В качестве другого примера использования полученной двойственности, в работе приводится оценка снизу для максимального количества МСП несовместной системы линейных неравенств. Для этого используется циклический многогранник.

Определение 8. *Циклический многогранник* $\mathfrak{C}(d,m)$ *определяется как выпуклая оболочка* m *различных точек параметрически заданной кривой*

$$\boldsymbol{x}(t) = (t, t^2, \ldots, t^d) \in \mathbb{R}^d .$$

Циклический многогранник известен своими экстремальными свойствами. В третьей главе диссертации получены оценки для числа диагоналей в циклическом многограннике и с помощью установленной двойственности получен следующий результат.

Утверждение 11. *Пусть* $\mathrm{D}(d,m)$ *— количество всех диагоналей, и* $\mathrm{D}_s(d,m)$ *— количество диагоналей из* s *элементов набора* $\boldsymbol{V}$ *вершин циклического многогранника* $\mathfrak{C}(d,m)$.

$$\mathrm{D}(d,m) = \begin{cases} 1, & \text{если } m \le d+1 \ , \\ 2\binom{m-k-2}{k} + \binom{m-k-2}{k+1}, & \text{если } m \ge d+2 \text{ и } d = 2k \ , \\ \binom{m-k-2}{k+1} + \binom{m-k-3}{k}, & \text{если } m \ge d+2 \text{ и } d = 2k+1 \ . \end{cases}$$

В **четвертой** главе разрабатываются численные методы решения задач анализа несовместных систем условий, которые лежат в основе разработки математического обеспечения вычислительного комплекса.

На основе результатов, полученных во второй главе, разрабатывается ряд алгоритмов выделения МСП несовместных систем линейных неравенств, построения их графов МСП и алгоритмов решения задачи построения минимального комитета несовместной системы линейных неравенств. Программная реализация этих алгоритмов является компонентой математического обеспечения вычислительного комплекса.

Базовый алгоритм КОМБ$(L, \{J_i \in \mathbf{J} \colon i \in T\})$ выделения МСП решает задачу выделения всех МСП несовместной системы, содержащих некоторую выделенную совместную подсистему L. Алгоритм КОМБ основан на построении блокатора семейства дополнений уже найденных МСП до всей системы.

В случае $L = \varnothing$ алгоритм КОМБ будет находить все МСП несовместной системы.

Использование факта связности графа МСП несовместной системы линейных неравенств позволяет построить алгоритм ГРАФ–КОМБ путем сведения задачи выделения всех МСП системы к серии задач меньшей размерности. Каждая подзадача из этой серии состоит в поиске МСП, смежных с выделенной МСП в графе МСП исходной системы. Связность графа МСП гарантирует, что при таком подходе будут найдены все МСП исходной системы, содержащие выделенную совместную подсистему — дополнение выделенной МСП до всей системы всегда совместно.

В четвертой главе рассматриваются также варианты алгоритмов КОМБ и ГРАФ-КОМБ, обозначаемые как КОМБ$^{(k)}$ и ГРАФ–КОМБ$^{(k)}$. Отличия этих алгоритмов состоят в том, что при поиске МСП, содержащих выделенную подсистему, они останавливаются, если уже найдено k таких МСП, или исчерпаны все элементы блокаторов. Следует отметить, что алгоритм ГРАФ–КОМБ$^{(k)}$ даже при очень малых значениях k, скажем, близких к n, находит, благодаря связности графа

МСП, большое количество МСП. При этом вычислительные затраты на выделение очередной МСП растут тем медленнее, чем меньше значение k.

Следующий результат является одним из центральных в четвертой главе.

Теорема 5. *Пусть последовательность* $(J_{i_1},J_{i_2},\ldots,J_{i_{2k+1}},J_{i_1})$ *составляет цикл нечетной длины в графе МСП системы* $\mathfrak{S}$, *и пусть выбраны попарно различные векторы–решения*

$$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_{2k+1}$$

МСП с мультииндексами $J_1,J_2,\ldots,J_{2k+1}$ *соответственно. Тогда совокупность векторов*

$$\mathcal{K}=\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_{2k+1}\}$$

является комитетом системы $\mathfrak{S}$.

Данная теорема, в сочетании с утверждением о существовании цикла нечетной длины в графе МСП, доказанным во второй главе, легла в основу разработки приближенного алгоритма построения комитета минимальной мощности несовместной системы линейных неравенств. С целью уточнения классификации комитетов в четвертой главе впервые вводится понятие альтернативного покрытия и мощности альтернативного покрытия. На основе введенного понятия, вводится дополнительный критерий классификации комитетов. Содержательный смысл этого критерия состоит в том, что при равенстве числа членов двух комитетов, приоритетным считает тот из них, для которого мощность соответствующего альтернативного покрытия меньше.

Пусть X — непустое множество произвольной природы, и $\mathcal{M}\subseteq\mathbf{2}^X$ — некоторое семейство подмножеств множества X. Пусть $\mathcal{A},\mathcal{B}\subset X$ — непустые непересекающиеся подмножества множества X: $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}=\varnothing$.

Определение 9. *Упорядоченная пара* $(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ *семейств* $\mathfrak{A},\mathfrak{B}\subset\mathcal{M}$ *подмножеств множества* X, *выбранных из семейства* $\mathcal{M}$, *называется альтернативным покрытием пары* $(\mathcal{A},\mathcal{B})$, *если*

$$\mathcal{A}\subseteq\bigcup_{A\in\mathfrak{A}}A\,,\ \mathcal{B}\subseteq\bigcup_{B\in\mathfrak{B}}B \text{ и } A\cap B=\varnothing$$

для любых множеств $A\in\mathfrak{A}$ *и* $B\in\mathfrak{B}$.

Задача эффективного разделения множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ пространства X в классе подмножеств из $\mathcal{M}$ может быть поставлена как задача поиска конечного альтернативного покрытия минимальной мощности пары $(\mathcal{A},\mathcal{B})$:

$$\mathrm{R}_1\colon\ \bigl(X,\,(\mathcal{A},\mathcal{B}),\,\mathcal{M}\subseteq\mathbf{2}^X\bigr)\to(\mathfrak{A},\mathfrak{B})\,,$$

$$\mathrm{R}_2\colon\ \bigl(X,\,(\mathcal{A},\mathcal{B}),\,\mathcal{M}\subseteq\mathbf{2}^X,\,f\colon\mathbf{2}^{\mathcal{M}}\times\mathbf{2}^{\mathcal{M}}\to\mathbb{R}\bigr)\xrightarrow{\min f}(\mathfrak{A},\mathfrak{B})\,,$$

$$\mathrm{R}_3\colon\ \bigl(X,\,(\mathcal{A},\mathcal{B}),\,\mathcal{M}\subseteq\mathbf{2}^X,\,f_{\mathrm{card}}=|\mathcal{A}|+|\mathcal{B}|\bigr)\xrightarrow{\min f_{\mathrm{card}}}(\mathfrak{A},\mathfrak{B})\,.$$

Тогда всякому комитету $\mathcal{K}$ системы неравенств (1) можно поставить в соответствие альтернативное покрытие $\left(\mathfrak{A}(\mathcal{K}),\mathfrak{B}(\mathcal{K})\right)$ пары $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ следующим образом:

$$\mathfrak{A} = \left\{\mathbf{C}_{>}(\mathcal{K}')\colon |\mathcal{K}'| > \frac{1}{2}|\mathcal{K}|,\, \mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}\right\}\ ,\ \mathfrak{B} = \left\{\mathbf{C}_{<}(\mathcal{K}')\colon |\mathcal{K}'| > \frac{1}{2}|\mathcal{K}|,\, \mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}\right\}\ .$$

Приведем пример, который показывает, что существуют два комитета с равным числом членов, но с различными мощностями соответствующих альтернативных покрытий (рис. 2).

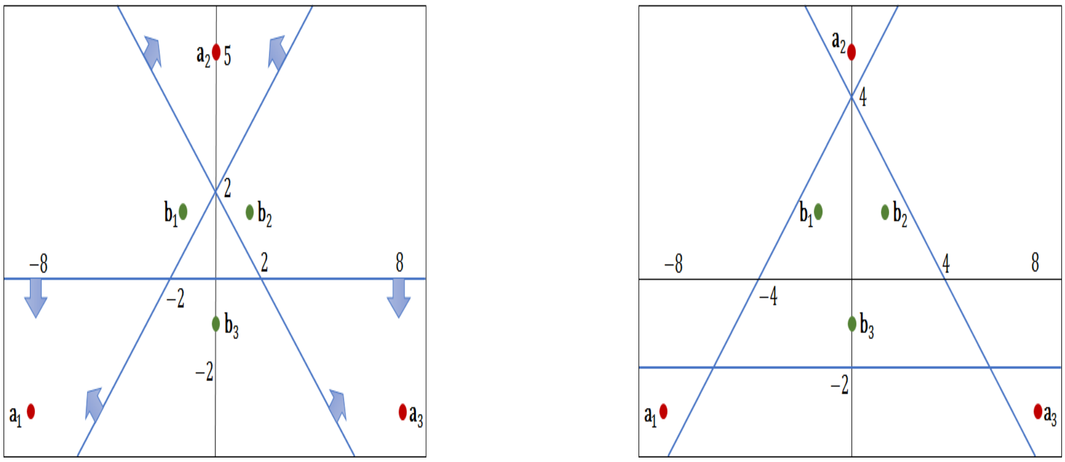

Рис. 2 Комитеты и альтернативные покрытия

Комитеты $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ (прямые линии синего цвета справа и слева соответственно) содержат одинаковое и минимально возможное количество членов (три). Однако, альтернативные покрытия, соответствующие этим комитетам (области, ограниченные линиями синего цвета, и содержащие хотя бы одну точку как внутреннюю), имеют разную мощность: $|\mathfrak{A}(\mathcal{K}_1)| + |\mathfrak{B}(\mathcal{K}_1)| = 6$, в то время как $|\mathfrak{A}(\mathcal{K}_2)| + |\mathfrak{B}(\mathcal{K}_2)| = 4$.

Для построения альтернативных покрытий в четвертой главе диссертации разработан подход, связанный с построением логических решающих деревьев. На этом этапе важной стандартной задачей является построение решающей функции для узла дерева. С этой целью рассматривается задача оптимального разбиения множества классов и формализуется критерий качества разбиения для узла дерева. Разрабатываются приближенные алгоритмы решения задачи, а также приводятся результаты вычислительных экспериментов и оценки качества решений, доставляемых этими приближенными алгоритмами. Близость решений для двух различных разбиений оценивается по расстоянию Хэмминга между двоичными кодами, представляющими эти разбиения. В частности, в серии из 100 экспериментов со случайными выборками, результаты демонстрируют в среднем близость в 88,4% между разбиениями, полученными полным перебором (со сложностью $\mathcal{O}\left(n \cdot 2^m\right)$) и приближенным алгоритмом (со сложностью $\mathcal{O}\left(n \cdot m^2\right)$). Это означает, что в среднем приближенный алгоритм получает решение весьма близкое к оптимальному при существенно меньшей сложности вычислений.

Как было показано в первой главе, в терминах МБФ мультииндексы МСП и МНП соответствуют верхним нулям и нижним единицам некоторой МБФ, связанной с системой. В четвертой главе рассматривается взаимосвязь задач поиска максимальных совместных подсистем с задачей расшифровки монотонных булевых функций. Классическая задача расшифровки МБФ подразумевает использование оракула, который по предъявленному двоичному набору возвращает значение МБФ на этом наборе. В качестве критерия оптимальности алгоритма расшифровки традиционно принимается число обращений этого алгоритма к оракулу. При этом значения МБФ на остальных наборах (для которых обращения к оракулу не происходило) должны однозначно восстанавливаться, исходя из свойств монотонности.

Обозначим класс всех монотонных булевых функций от m переменных через $\mathcal{M}_m$.

Пусть с функцией $\mathfrak{f} \in \mathcal{M}_m$ связан оракул $\mathcal{O}_\mathfrak{f}$, то есть оператор, позволяющий для произвольной точки $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{B}^m$ вычислять значение функции $\mathfrak{f}$ в этой точке. Пусть $\varphi(G, \mathfrak{f})$ — количество обращений некоторого алгоритма G к оператору $\mathcal{O}_\mathfrak{f}$ при расшифровке функции $\mathfrak{f} \in \mathcal{M}_m$.

Классический минимаксный критерий Шеннона вида

$$\varphi(G,m) = \max_{\mathfrak{f}\in\mathcal{M}_m} \varphi(G,\mathfrak{f})$$

требует от оптимального алгоритма в худшем случае минимального числа $\varphi(m)$ обращений к оракулу среди всех алгоритмов расшифровки. Для оптимального по этому критерию алгоритма точная оценка имеет вид

$$\varphi(m) = \binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor} + \binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor + 1} .$$

Однако, для разнообразных практических целей оптимального в шенноновской постановке алгоритма недостаточно.

Поскольку значения МБФ для верхних нулей и нижних единиц не могут быть восстановлены по принципу монотонности, исходя из значений МБФ в других точках, то число обращений к оракулу не может быть меньше, чем сумма числа верхних нулей — $\mathfrak{P}$, и числа нижних единиц — $\mathfrak{Q}$. Исходя из этого в диссертации вводится новый нормированный критерий оптимальности алгоритма расшифровки МБФ, в котором число обращений к оракулу нормируется на сумму $\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}$, то есть на общее количество верхних нулей и нижних единиц МБФ. Этот критерий имеет вид

$$\eta(G, m) = \max_{\mathfrak{f}\in\mathcal{M}_m} \frac{\varphi(G,\mathfrak{f})}{|\mathfrak{Q}(\mathfrak{f}) \dot{\cup} \mathfrak{P}(\mathfrak{f})|}$$

и, таким образом, учитывает объективную сложность расшифровки конкретной МБФ. В области исследования свойств нового критерия в работе получены оценки сверху и снизу для функции $\eta\,(m)$, доставляющей минимальное значение для $\eta(G, m)$ среди всех алгоритмов расшифровки.

Утверждение 12. *Для функции $\eta(m)$ справедливо*

$$\max\bigl\{2, \log_2 m^{1/2}\bigr\} \le \eta(m) \le \lfloor \tfrac{m}{2} \rfloor + 2 .$$

Для подтверждения работоспособности подхода для тестового примера приводится сравнение разработанного приближенного алгоритма с известными алгоритмами, оптимальными по критерию Шеннона. Результаты этого сравнения показали, что разработанный приближенный алгоритм потребовал не более 71 обращения к оракулу, в то время, как вышеупомянутые алгоритмы потребовали 252 обращения.

Интересный результат с использованием введенного критерия оптимальности получен для МБФ, порожденной несовместной системой линейных неравенств. В рассмотрение вводится модернизированный оракул $\mathcal{O}'_{\mathfrak{f}}$ от которого требуется:

1) установить значение функции $\mathfrak{f}(\boldsymbol{\alpha})$ для данного набора $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{B}^m$;

2) если $\mathfrak{f}(\boldsymbol{\alpha}) = 1$, то выдать одну нижнюю единицу $\boldsymbol{\alpha}'$ функции $\mathfrak{f}$ такую, что $\boldsymbol{\alpha}' \leq \boldsymbol{\alpha}$.

Обозначим через $\varphi(\mathcal{O}'_{\mathfrak{f}}, G, \mathfrak{f})$ число обращений к оператору $\mathcal{O}'_{\mathfrak{f}}$ алгоритма G при расшифровке функции $\mathfrak{f} \in \mathcal{M}_m$ и

$$\eta(\mathcal{O}'_{\mathfrak{f}}, G, \mathfrak{f}) = \frac{\varphi(\mathcal{O}'_{\mathfrak{f}}, G, \mathfrak{f})}{|\mathfrak{Q}(\mathfrak{f}) \dot\cup \mathfrak{P}(\mathfrak{f})|} \; .$$

Для такой постановки разработан алгоритм $G^*(\mathfrak{f})$, для которого справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. *Существует алгоритм G^* расшифровки МБФ такой, что для всякой функции $\mathfrak{f} \in \mathcal{M}_m$ выполняется*

$$\eta(\mathcal{O}'_{\mathfrak{f}}, G, \mathfrak{f}) = 1 \; .$$

Следующий класс МБФ, рассматриваемый в работе, составляют МБФ, порожденные неориентированными графами. Такая МБФ на некотором двоичном наборе принимает значение 0, если подмножество вершин графа, состоящее из вершин, номера которых соответствуют единичным компонентам этого набора, не содержит ребер. Для расшифровки этой МБФ могут быть использованы как известные, так и разработанные в диссертации алгоритмы. Для практических целей особый интерес представляют максимальные верхние нули МБФ или, в терминах теории графов, наибольшее независимое множество вершин (Maximum Independend Set — MIS) в неориентированном графе, порождающем МБФ.

Задача MIS является классической $\mathcal{NP}$–трудной задачей. Для ее решения в четвертой главе разработан эвристический алгоритм с абсолютной оценкой точности решения. С этой целью вводится понятие (k, m)–вершины в графе и доказано, что если в графе существует $(k, 0)$–вершина, то она входит в некоторое наибольшее независимое множество. В общем случае показано, что если в процессе построения независимого множества будут выбраны n вершин, которые являются соответственно $(k_1, m_1)-, (k_2, m_2)-, \ldots, (k_n, m_n)$–вершинами, то мы получим независимое множество вершин с абсолютной погрешностью, не превосходящей сумму $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$. В случае если все вершины в отобранной последовательности являются $(k, 0)$–вершинами, то полученное решение будет точным. Например, это имеет место для дерева.

Для дополнительных графов тестовой библиотеки DIMACS в четвертой главе диссертации приводятся результаты вычислительных экспериментов с использованием разработанного эвристического алгоритма. При этом алгоритм демонстрирует высокую эффективность. Полученные приближенные решения (рис. 3) либо совпадают с наилучшими, известными на сегодняшний день, либо очень близки к ним. Следует отметить также высокую эффективность алгоритма в части сложности вычислений, которая подтверждается той же серией экспериментов.

В четвертой главе также разработан общий подход к реализации массивно параллельной обработки данных с графовой структурой. В основе этого подхода лежит идея декомпозиции набора ориентированных путей на множестве сильно связных подграфов ориентированного графа. Разработанный метод параллельной обработки данных положен в основу одной из компонент программного обеспечения вычислительного комплекса — управляющей программы для реализации метода параллельной обработки данных с графовой структурой. Эта управляющая программа используется в приложении вычислительного комплекса для решения задачи управления транспортными процессами в условиях противоречивости (в частности, на этапе организации грузовых железнодорожных перевозок).

	DIMACS	Известное решение	Приближенное решение	Время, с
1	c125.9	34	33	0,001
2	mann_a27	126	126	0,01
3	mann_a45	345	344	48,151001
4	mann_a81	1100	1099	696,870972
5	hamming8-4	16	16	0,011
6	p_hat300-1	8	8	0,038
7	p_hat300-2	25	25	0,029
8	p_hat300-3	36	34	0,015
9	p_hat700-2	44	43	0,691
10	p_hat700-3	62	61	0,144

Рис. 3 Вычислительные эксперименты

Математическая постановка задачи параллельной обработки данных с графовой структурой состоит в следующем.

Пусть задан ориентированный граф $\overrightarrow{G} = (V, E)$ и набор порожденных сильно связных подграфов $\overrightarrow{G_s} = (V_s, E_s)\,, s = [1, K]$, таких, что выполняются соотношения

$$\bigcup_{s=1}^{K} V_s = V \text{ и } \bigcup_{s=1}^{K} E_s = E\,.$$

Простые графы по определению не содержат петель и кратных ребер, поэтому если в ориентированном графе существует дуга между некоторой парой вершин, то эта дуга единственна в рассматриваемом направлении. Таким образом любой путь в ориентированном графе $\overrightarrow{G} = (V, E)$ может быть представлен в виде последовательности вершин:

$$p_i = \left(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{k(i)}}\right) \ , v_{i_j} \in V, i = [1, m], j = [1, k(i)] \ . \quad (3)$$

Пусть задано некоторое множество путей вида (3) в ориентированном графе $\overrightarrow{G} = (V, E)$:

$$\mathbb{P} = \{p_i, i = [1, m]\} \ . \quad (4)$$

Такая модель представления данных (в виде множества путей сильно связного ориентированного графа) оказывается эффективной для исследования прикладной задачи организации грузовых железнодорожных перевозок на этапе назначения и перемещения локомотивов. Для решения этой задачи будет использоваться разрабатываемый в диссертации вычислительный комплекс. При этом, ввиду ее высокой комбинаторной сложности, особый интерес представляет разработка метода параллельной обработки данных такого типа.

Пусть заданное множество путей ориентированного графа подлежит обработке в вычислительном комплексе. Эта процедура подразумевает передачу данных вышеуказанного типа в некоторую программу, которая, после реализации ряда алгоритмов, возвращает преобразованные данные такого же типа и передает их в некоторую другую программу для последующей обработки. Задача при этом состоит в том, чтобы разбить каждый путь из множества (4) на подпути меньшей длины

$$p_i = \left(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_{n(i)}}\right) \ , i = [1, m] \ ,$$

таким образом, чтобы каждый подпуть $p_{i_j}, j = [1, n(i)]$, целиком лежал в некотором порожденном сильно связном подграфе $\overrightarrow{G}_s, s \in [1, K]$. Такой подход позволит передавать на вход алгоритмов данные меньшей размерности и обрабатывать их независимо, не нарушая при этом структуру решения.

Обозначим через $c\,(D)$ — сложность декомпозиции (количество полученных подпутей); через $balance\,(D)$ — баланс декомпозиции (общее количество пар взаимно обратных подпутей в полученном множестве подпутей); и через $\Delta t_{\max}\,(D) - \Delta t_{\min}\,(D)$ — равномерность декомпозиции (показатель распределения подпутей по сильно связным подграфам).

Задача о декомпозиции заданного множества путей $\mathbb{P} = \{p_i, i = [1, m]\}$ ориентированного графа $\overrightarrow{G} = (V, E)$ для заданного набора порожденных сильно связных подграфов $\overrightarrow{G}_s, s = [1, K]$, определенных вместе со своими ресурсами $N_s, s = [1, K]$, может быть формализована как многокритериальная задача оптимизации. При этом требуется найти такую декомпозицию, для которой выполняются следующие ограничения:

$$\begin{cases} c\,(D) \ \longrightarrow \ \min\limits_j c\,(D_j) \\ balance\,(D) \ \longrightarrow \ \max\limits_j balance\,(D_j) \ , \\ \Delta t_{\max}\,(D) - \Delta t_{\min}\,(D) \ \longrightarrow \ \min\limits_j \left(\Delta t_{\max}\,(D_j) - \Delta t_{\min}\,(D_j)\right) \ , \end{cases}$$

где $\{D_j, j = 1, 2, \dots\}$ — все возможные декомпозиции заданного множества путей ориентированного графа.

Для решения этой многокритериальной задачи, и, как следствие, для реализации метода параллельной обработки данных с графовой структурой, в диссертации разработан эвристический алгоритм, основанный на идее быстрой сортировки строк специальным образом построенной таблицы. В четвертой главе также приводятся результаты в области сравнения по сложности разработанного эвристического алгоритма с алгоритмом полного перебора.

В **пятой главе** исследуются классы прикладных задач, для решения которых могут быть использованы методы анализа несовместных систем условий. Другими словами, задачи этих классов могут быть эффективно решены с помощью вычислительного комплекса для решения задач анализа несовместных систем с массивно параллельной обработкой данных.

Первой рассматривается задача управления транспортными процессами в условиях противоречивости. В частности, рассматривается задача организации грузовых железнодорожных перевозок, которая включает два этапа: этап планирования перевозок и этап назначения локомотивов для исполнения заданного плана перевозок. В задаче планирования основным объектом рассмотрения являются нормативные нитки графика движения поездов. Задача состоит в построении множества нормативных ниток графика движения поездов, каждая пара которых «не пересекается» по времени и станциям движения. В терминах нормативных ниток конфликтность (противоречивость) означает невозможность одновременного их исполнения, что в практике эксплуатации железнодорожного транспорта влечет существенное снижение пропускной способности сети. Непосредственно задача построения бесконфликтного (непротиворечивого) набора нормативных ниток возникает на этапе долгосрочного планирования, при этом формальное ограничение на максимальность набора (по включению) характеризуется избыточностью решения.

В рассмотрение вводится ориентированный граф железнодорожной транспортной сети $\overrightarrow{\Gamma} = (S, E)$, в котором множество вершин $S = \{s_i, i \in [n]\}$ — характеризует множество станций, и множество дуг $E \subseteq \{(s_i, s_j), i, j \in [n]\}$ — характеризует множество ориентированных перегонов, связывающих соседние станции. Нормативные нитки определяются как ориентированные пути в графе сети. При этом для каждой дуги заданы путь, по которому осуществляется движение на соответствующем перегоне. Кроме того, для каждой вершины в пути заданы время прибытия и время отправления из соответствующей станции.

Определение 10. *Нормативной ниткой графика движения поездов называется последовательность вида:*

$$\mathrm{n}\colon \big(s_1(\mathrm{n}), s_2(\mathrm{n}), Nom_{12}(\mathrm{n}), t_{12}^{om}(\mathrm{n}), t_{12}^{np}(\mathrm{n}), g_{12}(t, \mathrm{n})\big), \dots,$$

где $(s_i, s_j) \in E, Nom, t_{ij}^{np}, t_{ij}^{om}, g_{ij}(t, \mathrm{n})$ *— заданные номер пути, время прибытия, время отправления и график движения на перегоне* (s_i, s_j).

Элементы инфраструктуры сети такие, как пути на перегонах, приемо–отправочные пути, являются основными ресурсами, которые используют вышеупомянутые нормативные нитки графика. Обозначим через $[T_0, T]\,, d, l_{ij}$ — заданные период планирования, расстояние, допустимое между поездами, и длину перегона, связывающего станции s_i, s_j.

Определение 11. *Пусть нормативные нитки* n_1 *и* n_2 *проходят ориентированный перегон* (s_i, s_j) *по одному и тому же пути в одном и том же или в разных направлениях. Тогда если существует момент времени* $t \in [T_0, T]$ *такой, что*

$$|g_{ij}\,(t, \mathrm{n}_1) - g_{ij}\,(t, \mathrm{n}_2)| \leqslant d\ ,$$

или

$$|g_{ij}\,(t, \mathrm{n}_1) - (l_{ij} - g_{ji}\,(t, \mathrm{n}_2))| \leqslant d\ ,$$

то нормативные нитки $\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2$ *имеют на этом перегоне однонаправленный или разнонаправленный конфликт соответственно.*

На основе этого понятия вводится определение графа конфликтов. В неориентированном графе конфликтов $G = (\mathcal{N}, \mathcal{E})$ множество вершин соответствует множеству нормативных ниток графика движения поездов, а ребрами $\{\mathrm{n}_i, \mathrm{n}_j\} \in \mathcal{E}$ связаны те вершины, для которых соответствующие нормативные нитки имеют однонаправленный или разнонаправленный конфликты.

Определение 12. *Любое подмножество нормативных ниток* $\mathcal{N}^{'} \subseteq \mathcal{N}$ *такое, что порожденный подграф* $\langle \mathcal{N}^{'} \rangle_G$ *не имеет ребер, является совместной системой нормативных ниток и называется бесконфликтным набором нормативных ниток.*

Таким образом, бесконфликтный набор нормативных ниток может служить допустимым расписанием для осуществления перевозок. При этом с практической точки зрения интересны максимальные бесконфликтные наборы. Следовательно, задача планирования грузовых железнодорожных перевозок сводится в рамках разработанной теоретико–графовой модели к задаче поиска максимального независимого множества вершин в неориентированном графе конфликтов. В четвертой главе для решения этой задачи был разработан эвристический алгоритм с абсолютной оценкой отклонения приближенного решения от оптимального.

В пятой главе рассматривается также задача о назначении и перемещении локомотивов с целью исполнения некоторого бесконфликтного набора нормативных ниток. В реальных системах организации грузовых железнодорожных перевозок есть существенная особенность. Она состоит в том, что все локомотивы «приписаны» к некоторому множеству депо (так называемое депо приписки). При этом локомотивы могут перемещаться только в некоторой ограниченной подсети всей железной дороги, определяемой для каждого депо приписки.

Рассмотрим ориентированный граф железнодорожной транспортной сети $\overrightarrow{G} = (S, E)$ и множество локомотивов, доступных для назначения $\mathcal{L} = \{L_i, i = [1, l]\}$.

Пусть для каждого локомотива определена область обслуживания, в пределах которой этот локомотив может быть использован:

$$dep\left(L_i\right) = \left\{s_j, j \in [1, n]\right\}, i = [1, l]\,. \tag{5}$$

Таким образом, ориентированный граф сети может быть представлен как объединение сильно связных подграфов, каждый из которых определяет некоторое депо приписки. При этом для каждого сильно связного подграфа задан ресурс — те локомотивы (и их условия доступности), которые приписаны к соответствующему депо. Кроме того, сильно связные подграфы имеют пересечения. В связи с этим возникает задача декомпозиции нормативных ниток, подлежащих исполнению, на поднитки, каждая из которых будет целиком расположена в области обслуживания локомотивов некоторого депо.

В четвертой главе был разработан эффективный метод параллельной обработки данных такого типа и алгоритм декомпозиции множества ориентированных путей на множестве сильно связных подграфов. В приложении этого метода к решению прикладной задачи устанавливаются следующие соотношения:

– граф сети $\overrightarrow{G} = (S, \mathcal{E})$ соответствует исходному ориентированному графу;

– множество нормативных ниток, подлежащих исполнению, соответствует заданному множеству путей;

– множество различных плечей обслуживания вида (5) соответствует заданному набору сильно связных подграфов (заметим, что каждое плечо обслуживания действительно является порожденным сильно связным подграфом графа сети, поскольку не может содержать недостижимых вершин).

Для подтверждения работоспособности подхода в пятой главе приводятся результаты вычислительных экспериментов на тестовой задаче прикладного происхождение (реальные данные). Набор ориентированных путей размерности 1215 (количество нормативных ниток) был декомпозирован на множестве сильно связных подграфов размерности 16 (количество локомотивных депо на Московской железной дороге). В результате для каждого сильно связного подграфа был сформирован набор подпутей. При этом максимальная размерность набора для отдельно взятого сильно связного подграфа составила 197 подпутей, а минимальная — 12 подпутей. Таким образом, в результате использования разработанного метода параллельной обработки данных с графовой структурой размерность подзадач, подлежащих решению, снижается почти на порядок по сравнению с размерностью исходной задачи.

Далее в пятой главе рассматривается задача управления технологическими маршрутами на дискретном производстве. Не уменьшая общности, задача исследуется на примере металлургического производства. В частности, в диссертации исследуется задача оптимального назначения технологических маршрутов в процессе изготовления продукции.

В рассмотрение вводится инфраструктурный граф, вершины которого соответствуют технологическим агрегатам производства. Из одной вершины выходит дуга в другую вершину, если единица продукции после обработки на первом агрегате может проследовать в этом направлении на обработку на втором агрегате.

Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ — совокупность технологических агрегатов, задействованных в производстве. Под единицей продукции (ЕП) понимается неделимая часть выходной или входной продукции, получаемой на агрегате или технологической линии.

Определение 13. *Ориентированный граф $\overrightarrow{G} = (\mathcal{A}, E)$ с множеством вершин $\mathcal{A}$ и множеством дуг $E \subseteq \mathcal{A}^2$ называется инфраструктурным графом, если $(A_i, A_j) \in E$ тогда и только тогда, когда выходная ЕП агрегата A_i может служить входной ЕП для агрегата A_j.*

Например, для металлургического производства ЕП сляб является выходной ЕП для машины непрерывного литья заготовок и, одновременно, входной ЕП для стана горячей прокатки.

Определение 14. *Технологическим маршрутом (ТМ) $P_i = \left(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_{k(i)}}\right)$ называется любой ориентированный путь в графе $\overrightarrow{G}$. При этом множество всех ТМ $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_k\}$ составляет технологическую базу рассматриваемого производства.*

Пусть через $\mathrm{EP} = \{ep_1, \ldots, ep_m\}$ обозначено множество всех возможных ЕП рассматриваемого производства, и пусть каждая ЕП ep_i характеризуется набором параметров $\mathrm{P}_i = \{p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_{n(i)}}\}, i = [m], n\,(i) \in [K]$.

Определение 15. *Последовательность*

$$AI_i = \Big(A_{i_1}, \mathrm{P}_{i_1}\,(AI_i)\,, \ldots, A_{i_{s(i)}}, \mathrm{P}_{i_{s(i)}}\,(AI_i)\Big)\,, \tag{6}$$

где $\mathrm{P}_{i_j}\,(AI_i)$ — набор значений параметров для ep_{i_j} в конкретной реализации ТМ AI_i — называется исполненным технологическим маршрутом (ИТМ).

В результате производственной деятельности рассматриваемого производства будет сгенерировано множество ИТМ на текущий момент времени t:

$$\mathcal{P}_{\text{итм}}(t) = \{AI_i, i = [q(t)]\}\ .$$

Идея оптимального назначения основана на возможности сбора и архивирования больших объемов исторических данных о реализации технологических процессов. Возможность дальнейшего использования этих данных мотивирует исследование задач прогнозирования и распознавания качества конечной продукции с целью выбора оптимального маршрута для продолжения технологического процесса. Конечной целью такого выбора является исключение брака производства или повышение объемов выпуска товарной продукции на единицу затрат.

Здесь через $G^k(v)$ обозначено множество всех вершин v' графа $\overrightarrow{G}$ таких, что существует простой путь из вершины v в вершину v' длины $k-1$.

Определение 16. *Терминальной вершиной графа (подграфа) называется вершина, из которой не выходит ни одной дуги, лежащей в этом графе (подграфе).*

Определение 17. *Любая вершина* $v' \in \left\{v \cup G(v) \ldots G^k(v)\right\}$ *такая, что* $|G(v')| > 1$*, называется вершиной–развилкой.*

Пусть V' — множество терминальных вершин подграфа $\langle v \cup G(v) \ldots G^k(v) \rangle_G$. Для каждой терминальной вершины $v_i \in V'$ существует некоторая ЕП ep_i, являющаяся выходной ЕП для этой вершины, причем таких ep_i может быть несколько в зависимости от вида ИТМ, в результате которого была получена данная ЕП.

Определение 18. *ИТМ* (6) *называется продуктовым, если ЕП на выходе терминальной вершины* $A_{i_{s(i)}}$ *ИТМ* AI_i *— обозначим эту вершину* $\operatorname{term}(AI_i)$ *— является одним из видов конечного продукта, поставляемого на рынок.*

На рисунке (рис. 4) приводится пример, иллюстрирующий понятия инфраструктурного графа и ТМ, включая продуктовые ТМ, а также понятия различных типов вершин инфраструктурного графа.

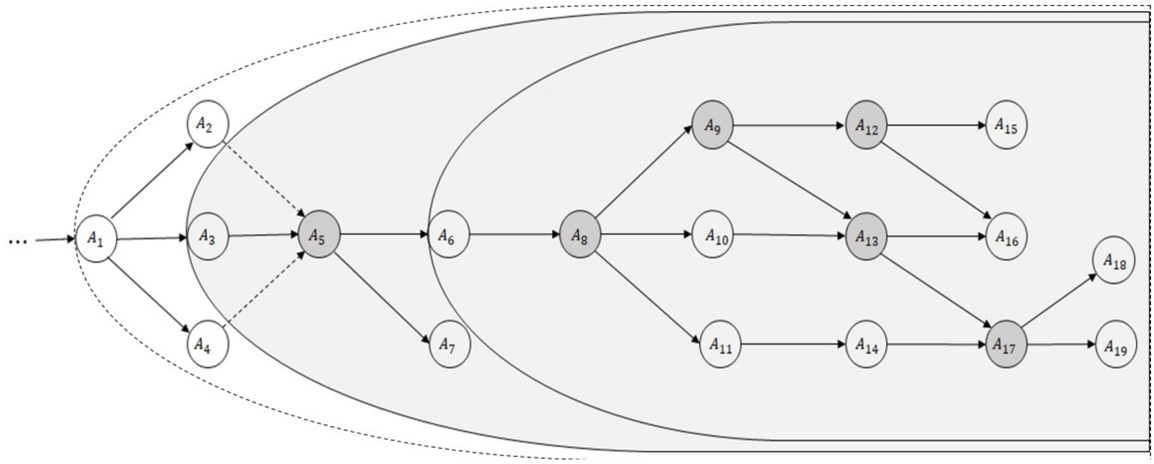

Рис. 4 Инфраструктурный граф

В результате накопления технологической информации возникает большая база данных с продуктовыми исполненными технологическими маршрутами (ИТМ) с маркерами классов эффективности. Все продуктовые ИТМ могут быть разбиты на классы по принципу принадлежности к одному и тому же ориентированному пути в инфраструктурном графе. На каждом таком пути может располагаться одна и более вершин–развилок. Для каждого такого класса и каждой такой вершины–развилки может быть поставлена задача прогнозирования или, другими словами, задача распознавания класса эффективности, которому будет принадлежать готовое изделие, если технологический маршрут данного класса будет продолжен далее при достижении данной вершины–развилки.

Таким образом, для каждого ТМ и вершины–развилки v в каждом классе эффективности возникает выборка, которая может быть представлена в в виде многомерных векторов:

$$\mathrm{a}_j = \left(a_{j_0}, a_{j_1}, b_{j_1}, \ldots, b_{j_{n(j)}}\right),$$

где $a_{j_0} \in \{E_1, \ldots, E_m\}$ — значение эффективности продуктового ИТМ, a_{j_1} — идентификатор ТМ данного ИТМ. Вектор $\mathrm{a}_j = \left(a_{j_0}, a_{j_1}, \ldots, b_{j_{n(j)}}\right)$ отнесём к классу K_i, если $a_{j_0} \in E_i$. Тогда каждый вектор a_j будет отнесен к одному из классов

$K_1, \ldots, K_m$ и возникает известная задача распознавания образов в геометрической постановке.

Таким образом, возникает целая серия задач распознавания образов в геометрической постановке, каждая из которых состоит из большого числа конечномерных векторов, снабженных маркером принадлежности к одному из классов эффективности. Для этих векторов необходимо построить решающее правило для отнесения нового такого вектора к одному из классов эффективности.

Численные методы решения таких задач подробно рассматривались в четвертой главе диссертации.

Полный цикл работ показан в пятой главе на примере задачи прогнозирования и снижения брака на производстве. Предполагается, что рассматривается всего два класса эффективности: годное и бракованное изделие. Предполагается также, что для всех указанных выше задач распознавания построены решающие правила. Рассмотрим механизм использования полученной сети решающих правил для снижения брака производства. Пусть выбран для реализации некоторый технологический маршрут, который связан с некоторым ориентированным путем в инфраструктурном графе. Пусть исполняемый технологический маршрут достиг первой вершины–развилки на рассматриваемом маршруте. Следовательно, получен конечномерный вектор параметров для начального участка до этой вершины–развилки. Используя построенное ранее решающее правило, можно определить, какой будет результат при продолжении технологического маршрута дальше. Если прогнозируется годное изделие, то технологический маршрут продолжается по плану. Если же прогнозируется брак, то следует испытать все другие маршруты, имеющие такой же начальный участок до рассматриваемой вершины–развилки. Для всех этих случаев, используя соответствующие найденные ранее решающие правила, будет получен прогноз о качестве конечной продукции. Если найдутся маршруты с прогнозом годного изделия, то следует выбрать один из них для дальнейшего продолжения. Если же для всех технологических маршрутов прогнозируется брак, то текущий технологический процесс следует прекратить, а единицу продукции отправить на переработку.

В пятой главе также разработан метод параллельной обработки данных, возникающих в процессе управления технологическими маршрутами. Рассматривается вся сеть задач распознавания образов, каждая из которых определяется выделенными начальными участками исполненных технологических маршрутов до некоторой вершины–развилки. Суть метода состоит в том, чтобы запускать процесс дообучения системы по мере поступления новых данных в приоритетном порядке независимо для каждого класса исполненных технологических маршрутов. Этот метод реализован в управляющей программе вычислительного комплекса, которая функционирует согласно принятому в вычислительном комплексе механизму передачи данных на параллельную обработку.

В **шестой главе** приводится описание вычислительного комплекса для решения задач анализа несовместных систем с массивно параллельной обработкой данных в приложении к решению исследуемых прикладных задач.

Математическое обеспечение вычислительного комплекса представляет собой программную реализацию алгоритмов численного решения задач анализа несовместных систем. Программное обеспечение, в свою очередь, состоит из двух управляющих программ для реализации методов параллельной обработки данных, и двух комплексов проблемно–ориентированных прикладных программ.

Вычислительный комплекс (рис. 5) состоит из нескольких компонент: сервер сбора данных, сервер хранения данных, сервер математических моделей, сервер управляющих программ, сервер планирования и сервер принятия решений. В каждом из этих серверов функционируют специализированные программы. При этом сервер сбора данных и сервер принятия решений оснащены также каналами связи с внешними системами и уровнем пользователей соответственно.

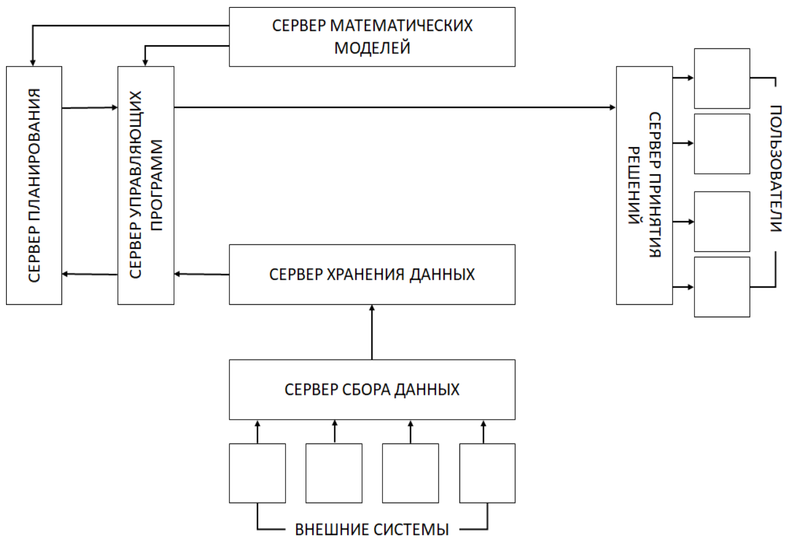

Рис. 5 Вычислительный комплекс

Математическое обеспечение вычислительного комплекса располагается на сервере математических моделей и взаимодействует с сервером планирования и сервером управляющих программ. В рамках взаимодействия сервера математических моделей с сервером управляющих программ в вычислительном комплексе реализованы такие методы параллельной обработки данных, как декомпозиция множества путей ориентированного графа на множестве сильно связных подграфов, а также параллельная обработка на сети задач распознавания (прогнозной аналитики).

В шестой главе также разрабатываются комплексы проблемно–ориентированных программ для решения исследуемых задач управления технологическими маршрутами на дискретном производстве и транспортными процессами в условиях противоречивости.

Комплекс программ «Управление технологическими маршрутами» состоит из двух программных компонент: программа «Data–Track» [52] и программа «Expert Base» [49].

В рамках архитектуры вычислительного комплекса (рис. 6) программа «Data–Track» располагается на серверах сбора и хранения данных. Программа «Data–Track» взаимодействует в вычислительном комплексе с внешними системами и с сервером управляющих программ. Основным функционалом этой программы является сбор, архивирование и первичная обработка данных о завершившихся и действующих технологических процессах.

Аналогично, будучи расположенной на серверах планирования и принятия решений, программа «Expert Base» взаимодействует в вычислительном комплексе с сервером управляющих программ, сервером математических моделей и с уровнем пользователей. Основной задачей этой программной компоненты является непосредственно формирование решающих правил о продолжении или переназначении действующих технологических маршрутов, а также подготовка и представление на уровень пользователей информации рекомендательного характера.

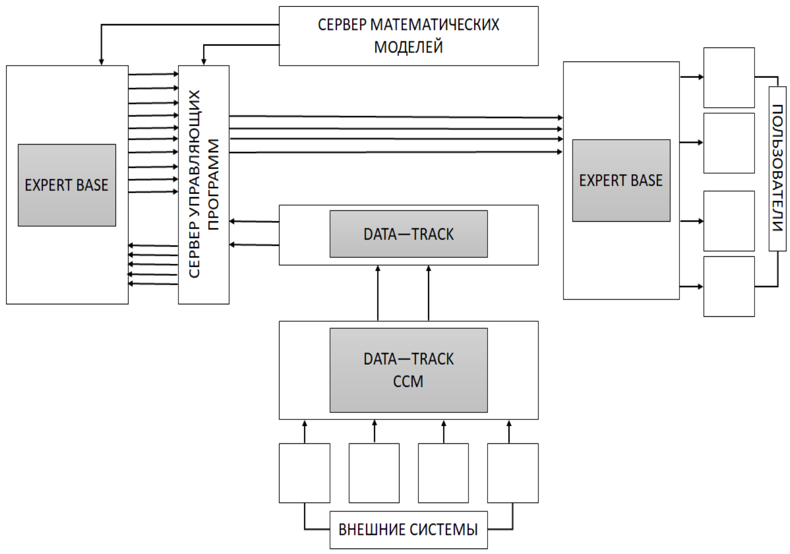

Рис. 6 Комплекс программ «Управление технологическими маршрутами на дискретном производстве»

Комплекс программ «Управление транспортными процессами» также состоит из двух компонент: программа «Регистратор прохождения транспорта» [51] и программа «PLAMER» [50]. Обе эти программные компоненты в рамках архитектуры вычислительного комплекса (рис. 7) располагаются на сервере сбора данных и взаимодействуют с внешними системами и сервером хранения данных.

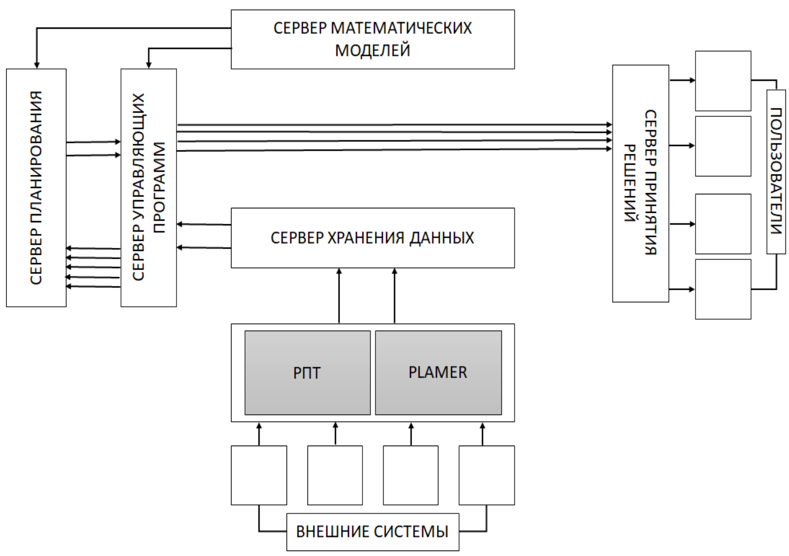

Рис. 7 Комплекс программ «Управление транспортными процессами в условиях противоречивости»

Программа «Регистратор прохождения транспорта» предназначена для сбора данных о доступных ресурсах локомотивного и вагонного парка, а также для формирования отчетности о локализации задействованных ресурсов в режиме реального времени. В свою очередь, программа «PLAMER» предназначена для планирования местной работы. Обработка информации, предоставляемой программой «PLAMER», является неотъемлемой составляющей этапа формирования размеров движения.

В **заключении** приводятся основные результаты, полученные в диссертации.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Методы разработки программного обеспечения вычислительного комплекса, основанные на анализе несовместных систем и моделях массивно параллельной обработки данных. Общая архитектура вычислительного комплекса и функционал составляющих элементов. [3, 5, 16–18]

2. Формализация задачи управления технологическими маршрутами на дискретном производстве как задачи распознавания образов в геометрической постановке. Новый эффективный метод параллельной обработки данных на сети задач распознавания образов: кластеризация векторов обучающей выборки каждой задачи сети по мере накопления данных. [12, 22–26]

3. Формализация задачи управления транспортными процессами в условиях противоречивости как задачи расшифровки монотонной булевой функции (МБФ). Для решения этой задачи предложен новый полиномиальный алгоритм расшифровки МБФ, порождаемых неориентированными графами, с абсолютной оценкой точности приближенного решения. Проведены вычислительные эксперименты на известных примерах графов из библиотеки DIMACS, для которых показана эффективность разработанного подхода в сравнении с известными быстрыми алгоритмами. [9–10, 13–14, 19–21]

4. Новые теоретико–графовые методы математического моделирования несовместных систем. Теоремы о связности графов для широкого класса систем независимости. Для класса несовместных систем линейных неравенств доказана теорема о существовании цикла нечетной длины в графе максимальных совместных подсистем (граф МСП) и впервые установлена взаимосвязь таких циклов с комитетами исходной системы. На основе полученных результатов разработаны эффективные алгоритмы построения графа МСП с последующим синтезом комитетов с числом членов, близким к минимальному. [3, 6, 17]

5. Эффективные полиномиальные алгоритмы дихотомии с линейными разделяющими функциями в многоклассовой задаче распознавания образов для этапа разделения обучающей выборки. Метод альтернативных покрытий для повышения эффективности комитетных конструкций. [6, 16–18]

6. Новые комбинаторно–геометрические методы математического моделирования несовместных систем. Введено новое для комбинаторной геометрии понятие G–диагонали выпуклого многогранника и впервые несовместной системе линейных неравенств поставлен в соответствие (по определенному правилу) выпуклый многогранник таким образом, что семейства МСП (максимальных совместных подсистем) и МНП (минимальных несовместных подсистем) системы

неравенств комбинаторно изоморфны семействам дополнений G–диагоналей и дополнений гиперграней многогранника. Исследованы комбинаторные свойства положительных базисов конечномерных евклидовых пространств, представляющих все многообразие элементов семейства МНП несовместных систем линейных неравенств. [5, 6–8]

7. Новый подход к оптимальной расшифровке МБФ: введен новый для теории булевых функций критерий оптимальной расшифровки, нормированный по числу обращений к оракулу и учитывающий объективную сложность МБФ. В рамках этого подхода разработан алгоритм расшифровки МБФ, оптимальный по введенному нормированному критерию для несовместных систем линейных неравенств. [4, 10, 27]

8. Новый общий подход к параллельной обработке данных путем декомпозиции набора ориентированных путей в графе на множестве сильно связных подграфов этого графа. На основе этого подхода разработана модель параллельной обработки данных для задачи назначения локомотивов на исполнение ниток графика плана перевозок, имеющей высокую комбинаторную сложность. Важным преимуществом разработанной модели параллельной обработки данных является существенное снижение размерности задачи. [11, 13, 15]

9. Управляющая программа для организации параллельной обработки данных в задаче управления технологическими маршрутами на дискретном производстве. Комплекс проблемно-ориентированных программ для решения задач управления технологическими маршрутами на дискретном производстве. [49, 52, 53–56]

10. Управляющая программа для организации параллельной обработки данных в задаче управления транспортными процессами в условиях противоречивости. Комплекс проблемно-ориентированных прикладных программ для решения задачи управления транспортными процессами в условиях противоречивости. [50–51]

Публикации по теме диссертационной работы

Монографии

1. Гайнанов Д. Н. Комбинаторная геометрия и графы в анализе несовместных систем и распознавании образов. М.: Наука, 2014. 173 с. ISBN 978-5-02-039095-9.

2. Gainanov D. N. Graphs for Pattern Recognition. Infeasible Systems of Linear Inequalities. DeGruyter, 2016. 152 pp. ISBN 978-3-11-048106-8.

Публикации в изданиях из перечня ВАК

3. Гайнанов Д. Н., Новокшенов В. Ю., Тягунов Л. И. О графах, порождаемых несовместными системами линейных неравенств // Математические заметки, 1983, 2 (33), с. 293–300. (Scopus, WoS)

4. Гайнанов Д. Н. Об одном критерии оптимальности алгоритма расшифровки монотонных булевых функций // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1984, 8 (24), с. 1250–1257. (Scopus, WoS)

5. Гайнанов Д. Н. О комбинаторных свойствах несовместных систем линейных неравенств и многогранников // Математические заметки, 1985, 3 (38), с. 463–474. (Scopus, WoS)

6. Гайнанов Д. Н. Теоретико-графовый алгоритм построения комитета несовместной системы линейных неравенств // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1986, 9 (26), с. 1431–1432. (Scopus, WoS)

7. Гайнанов Д. Н., Гусак И. Я. Комбинаторные свойства положительных базисов // Математические заметки, 1987, 3 (42), с. 463–474. (Scopus, WoS)

8. Гайнанов Д. Н., Гусак И. Я. Диагонали выпуклых многогранников // Математические заметки, 1991, 4 (49), с. 20–30. (Scopus, WoS)

9. Гайнанов Д. Н., Коныгин А. В., Рассказова В. А. Математическое моделирование грузовых железнодорожных перевозок методами теории графов и комбинаторной оптимизации // Автоматика и телемеханика, 2016, 11, с. 60–79. (Scopus, WoS)

10. Гайнанов Д. Н., Рассказова В. А. Алгоритм расшифровки монотонных булевых функций, порождаемых неориентированными графами // Вестник Южно–уральского государственного университета, 2016, 9 (3), с. 17–30. (Scopus, WoS)

11. Гайнанов Д. Н., Азанов В. М., Буянов М. В., Иванов С. В. Алгоритмическое и программное обеспечение для назначения локомотивов с целью перевозки грузовых составов // Вестник Южно–уральского государственного университета, 2016, 9 (4), с. 73–85. (Scopus, WoS)

12. Гайнанов Д. Н., Кабаков П. З., Кабаков З. К., Бречалов А. С. Системы управления качеством в металлургии: особенности, подходы и методы // Металлург, 2016, 8, с. 4–8. (Scopus, WoS)

13. Гайнанов Д. Н., Рассказова В. А. Алгоритм покрытия вершин ориентированного графа в задаче о назначении и перемещении локомотивов // Труды МАИ, 2017, 92.

14. Гайнанов Д. Н., Кибзун А. И., Рассказова В. А. Алгоритм покрытия вершин ориентированного графа минимальным числом простых ориентированных путей // Вестник компьютерных и информационных технологий, 2017, 5, с. 51–56.

15. Гайнанов Д. Н., Кибзун А. И., Рассказова В. А. Задача о декомпозиции множества путей ориентированного графа и ее приложение // Автоматика и телемеханика (принята к публикации).

Публикации в изданиях, индексируемых международными базами Scopus и Web of Science

16. Gainanov D. N., Matveev A. O. Lattice diagonals and geometric pattern recognition problems // Pattern Recognition and Image Analysis, 1991, Vol. 3, No. 1, pp. 277–282. (Scopus)

17. Gainanov D. N. Alternative covers and independence systems in pattern recognition // Pattern Recognition and Image Analysis, 1992, Vol. 2, No. 2, pp. 147–160. (Scopus)

18. Gainanov D. N., Matveev A. O. Finite lattice diagonals and their relation to pattern recognition // Pattern Recognition and Image Analysis, 1993, Vol. 2, No. 3, pp. 84–91. (Scopus)

19. Gainanov D. N., Akimova E. N., Golubev O. A., Kolmogortsev I. D., Konygin A. V. The problem of scheduling for the linear section of a single-track railway

with independent edges orientations // CEUR Workshop Proceedings, 2015, Vol. 1513, pp. 130–136. (Scopus)

20. Gainanov D. N., Akimova E. N., Golubev O. A., Kolmogortsev I. D., Konygin A. V. Optimal scheduling for the linear section of a single-track railway with independent edges orientations // Applied Mathematics and Information Sciences, 2016, Vol. 10, No. 5, pp. 1763–1768. (Scopus)

21. Gainanov D. N., Akimova E. N., Golubev O. A., Kolmogortsev I. D., Konygin A. V. The problem of scheduling for the linear section of a single-track railway // AIP Conference Proceedings, 2016, Vol. 1738, pp. 110005. (Scopus)

22. Gainanov D. N., Berenov D. A. Big Data Analytics and Pattern Recognition Methods in the Problem of Optimization of Technological Processes in Metallurgical Production // Journal of Physics: Conference Series (JPCS), 2017, Vol. 913, No. 1, pp. 012003. (Scopus)

23. Gainanov D. N., Berenov D. A. Algorithm for Predicting the Quality of the Product of Metallurgical Production // CEUR Workshop Proceedings, 2017, vol. 1987, pp. 194–200. (Scopus)

Публикации в других изданиях

24. Gainanov D. N., Berenov D. A. Algorithm for Predicting the Quality of the Product of Metallurgical Production Based on Technological Pyramids in Graphs // Optimization Letters (submitted). (Scopus, WoS)

25. Gainanov D., Mladenović N., Rasskazova V., Urosević D. Heuristic Algorithm for Finding the Maximum Independent Set with Absolute Estimate of the Accuracy // CEUR Workshop Proceedings. (submitted) (Scopus)

26. Gainanov D., Mladenović N., Berenov D. Dichotomy algorithms in the multi–class problem of pattern recognition // Springer Proceedings in Business and Economics (submitted). (Scopus)

27. Gainanov D., Mladenović N., Rasskazova V. A., Urosević D. The Largest Independent Set in the Problem of Planning of the Freight Railway Transportations // Frontiers of Engineering Management (submitted). (Scopus)

28. Гайнанов Д. Н., Федоров Е. В. Планирование горнометаллургического производства: программы оптимизации // Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1977, 7, с. 133–136.

29. Гайнанов Д. Н., Тягунов Л. И., Карапетян Э. Г., Мирзоев Р. Г. Алгоритм выделения всех максимальных совместных подсистем несовместной системы линейных неравенств // Управление качеством промышленных изделий. Л.: ЛГУ, 1977, с. 100–115.

30. Гайнанов Д. Н. О графах максимальных совместных подсистем несовместных систем линейных неравенств // Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1981, 46 с. Деп. ВИНИТИ 18.12.1980 № 229–81.

31. Гайнанов Д. Н. О разделении пространства семействами выпуклых конусов // Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1981. 19 с. Деп. ВИНИТИ 18.12.1980 № 230–81.

32. Гайнанов Д. Н. Разделение пространства выпуклыми конусами. Комбинаторные свойства выпуклых множеств и графов // Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1983. с. 3–15.

33. Гайнанов Д. Н. О связности графов некоторых классов систем независимости // Исследования по теории выпуклых множеств и графов. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1987, с. 16–23.

34. Гайнанов Д. Н. Двойственность минимальных несовместных подсистем несовместной системы линейных неравенств и kограней политопа // Методы математического программирования и их программное обеспечение. Свердловск, 1981. Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1981, с. 39–40.

Публикации в сборниках трудов конференций

35. Гайнанов Д. Н. Комбинаторные свойства систем независимости, порождаемых односторонними подмножествами точек на сфере // Сб: Первая конференция по комбинаторной геометрии и ее приложениям, Батуми, 1985.

36. Гайнанов Д. Н., Рассказова В. А. Теоретико–графовый алгоритм решения задачи о назначении и перемещении локомотивов // XLII международная научная конференция «Гагаринские чтения», Москва, 2016.

37. Гайнанов Д. Н., Рассказова В. А. Алгоритм вершинного покрытия для минимизации холостого хода в задаче назначения и перемещения локомотивов // XXI международная научная конференция «Системный анализ, управление и навигация», Евпатория, 2016.

38. Гайнанов Д. Н., Рассказова В. А. Покрытие вершин графа в задаче о назначении локомотивов // Всероссийская научная конференция «Управление большими системами», Самара, 2016.

39. Гайнанов Д. Н., Рассказова В. А. Покрытие вершин графа в задаче оптимального назначения и перемещения локомотивов // Международная научная конференция «Математика, информатика и физика и их приложения в науке и образовании», Москва, 2016.

40. Гайнанов Д. Н., Рассказова В. А. Математическое моделирование в задаче планирования железнодорожных перевозок // XLIII международная научная конференция «Гагаринские чтения», Москва, 2017.

41. Гайнанов Д. Н., Рассказова В. А. Покрытие вершин ориентированного графа в задаче о назначении и перемещении локомотивов // XXII международная научная конференция «Системный анализ, управление и навигация», Евпатория, 2017.

42. Gainanov D. N., Berenov D. A. Algorithm for predicting the Quality of the product of Metallurgical Production // 3d Int. Conf. and Expo«Big Data and Advanced Analytics», Belarus', Minsk, 2017.

43. Gainanov D. N., Berenov D. A. Big Data Analytics and Pattern Recognition Methods in the Problem of Optimization of Technological Processes in Metallurgical Production // Int. Conf. on Big Data and Its Applications (ICBDA 2017), Moscow, 2017.

44. Gainanov D. N., Berenov D. A. Algorithm for Predicting the Quality of the Product of Metallurgical Production // VIII Int. Conf. on Optimization Methods and Applications (OPTIMA 2017), Montenegro, Petrovac, 2017.

45. Гайнанов Д. Н., Кибзун А. И., Рассказова В. А. Декомпозиция путей ориентированного графа в задаче организации грузового железнодорожного

движения // XXIII международная научная конференция «Системный анализ, управление и навигация», Евпатория, 2018.

46. Gainanov D., Mladenović N., Rasskazova V., Urosević D. Two-sided estimate of the maximum independent set of vertices in an undirected graph // XIII Balkan Conf. on Operational Research (BALCOR-2018), Serbia, Belgrade, 2018.

47. Gainanov D., Mladenović N., Rasskazova V., Urosević D. Heuristic algorithm for the maximum independent set with absolute estimate of the accuracy // VII Int. Conf. on Optimization Problems and Their Applications (OPTA-2018), Omsk, 2018.

48. Gainanov D., Mladenović N., Rasskazova V., Urosević D. Constructive heuristic with guaranteed bounds (CHwGB) // IX Int. Conf. on Optimization Methods and Applications (OPTIMA 2018), Montenegro, Petrovac, 2018. (submitted)

Свидетельства о регистрации программ и патенты

49. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011611453. Expert Base / Гайнанов Д. Н., Беренов Д. А. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 14.02.2011.

50. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012612252. PLAMER / Гайнанов Д. Н. [и др.]. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 29.02.2012.

51. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012612253. РПТ / Гайнанов Д. Н. [и др.]. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 29.02.2012.

52. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014662444. Data–Track / Гайнанов Д. Н. [и др.]. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 01.12.2014.

53. Патент на изобретение № 2250151. Способ производства тонкого металлического листа из тонкой литой полосы и автоматизированная линия технологического оборудования для производства тонкого металлического листа из тонкой литой полосы / Гайнанов Д. Н. [и др.]. Зарегистрировано в Государственном Реестре изобретений 20.04.2005.

54. Патент на изобретение № 2260495. Способ производства качественной прутковой металлопродукции / Гайнанов Д. Н. [и др.]. Зарегистрировано в Государственном Реестре изобретений РФ 20.09.2005.

55. Патент на изобретение № 2261477. Способ и устройство автоматизированного видеоанализа темплетов при непрерывном литье заготовок на мнлз (система сват) / Гайнанов Д. Н. [и др.]. Зарегистрировано в Государственном Реестре изобретений РФ 27.09.2005.

56. Патент на изобретение № 25773855. Способ слежения за перемещением материала на производстве и в складских помещениях / Гайнанов Д. Н. [и др.]. Зарегистрировано в Государственном Реестре изобретений РФ 23.12.2014.

Гайнанов Дамир Насибуллович

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Подписано в печать 25.07.2018
Тираж 100 экз.
HD print — Рекламно–производственная группа, 107045, Москва, Сретенский тупик, 2