

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
“Ижевский государственный технический университет  
имени М.Т. Калашникова”  
Кафедра “Мехатронные системы”

На правах рукописи

**КАРАВАЕВ ЮРИЙ ЛЕОНИДОВИЧ**

**Теоретические и экспериментальные  
исследования динамики и управления некоторых  
систем с качением**

Специальность 01.02.01 — Теоретическая механика

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук  
А.А. Килин

Ижевск — 2015

# Содержание

|  |    |
|--|----|
| <b>Введение</b> . . . . .  | 4  |
| <b>ГЛАВА 1. Конструкция и кинематическая модель сферического робота с внутренней омниколесной платформой</b> . . . . . | 14 |
| 1.1. Введение . . . . .  | 14 |
| 1.2. Анализ конструкций сферических роботов . . . . .  | 16 |
| 1.3. Сферический робот с внутренней омниколесной платформой . . . . .  | 18 |
| 1.3.1. Описание конструкции . . . . .  | 18 |
| 1.3.2. Описание конструкции омниколеса для сфероробота . . . . .   | 21 |
| 1.4. Кинематическая модель сферического робота с внутренней омниколесной платформой . . . . .                          | 22 |
| 1.4.1. Управление в рамках кинематической модели . . . . .   | 25 |
| 1.4.2. Учёт смещения центра масс . . . . .   | 29 |
| 1.4.3. Анализ траектории движения сфероробота при постоянных управляющих воздействиях . . . . .                        | 31 |
| 1.4.4. Определение положения центра масс подвижной платформы сфероробота . . . . .                                     | 33 |
| <b>ГЛАВА 2. Динамика сферического робота с внутренней омниколесной платформой</b> . . . . .                            | 35 |
| 2.1. Введение . . . . .  | 35 |
| 2.2. Динамические уравнения движения сфероробота с внутренней омниколесной платформой . . . . .                        | 38 |
| 2.3. Частные решения . . . . .   | 45 |
| 2.3.1. Неподвижные точки приведённой системы . . . . .   | 46 |

|  |           |
|--|-----------|
| 2.3.2. Устойчивость движения по прямой . . . . .   | 48        |
| 2.4. Управление вдоль заданной траектории . . . . .  | 50        |
| 2.5. Управление при помощи гейтов . . . . .  | 55        |
| <b>ГЛАВА 3. Экспериментальные исследования движения сфероробота с<br/>внутренней омниколесной платформой . . . . .</b> | <b>60</b> |
| 3.1. Описание экспериментальной установки . . . . .  | 60        |
| 3.2. Экспериментальные исследования . . . . .  | 63        |
| 3.2.1. Движение по прямой в зависимости от начальной ори-<br>ентации подвижной платформы . . . . .                     | 63        |
| 3.2.2. Экспериментальное определение положения центра масс<br>подвижной платформы . . . . .                            | 66        |
| 3.2.3. Исследование движения сфероробота по прямой при<br>различных скоростях . . . . .                                | 68        |
| 3.2.4. Движение по окружности при постоянных управляю-<br>щих воздействиях . . . . .                                   | 70        |
| 3.2.5. Движение по окружности с сохранением ориентации по-<br>движной платформы . . . . .                              | 72        |
| <b>ГЛАВА 4. Экспериментальные исследования качения однородного<br/>диска по горизонтальной плоскости . . . . .</b>     | <b>76</b> |
| 4.1. Постановка задачи. . . . .  | 76        |
| 4.2. Разработка экспериментальной установки и методики проведе-<br>ния экспериментальных исследований . . . . .        | 80        |
| <b>Заключение . . . . .</b>  | <b>91</b> |
| <b>Литература . . . . .</b>  | <b>94</b> |

# Введение

## **Актуальность темы исследований.**

Современный интерес к теоретическим и экспериментальным исследованиям систем с качением вызван активным развитием робототехники, прежде всего мобильных роботов [1], предназначенных для эксплуатации как на поверхности Земли, так и в условиях других планет. Для исследования подобных систем используются уравнения движения в различных формах (Эйлера-Лагранжа, Чаплыгина, Воронца, Аппеля, Маджи и др.). Теоретические основы исследования систем с качением в неголономной постановке изложены в работах как российских так и зарубежных авторов [2–7, 65], которые включают описание классических и новых неголономных систем. Отдельно следует отметить работы посвящённые исследованию неголономных моделей мобильных колесных роботов, к которым относятся самая простая и распространённая модель мобильного робота только с двумя приводными колесами, с одним или двумя рулевыми колесами, мобильные роботы с роликонесущими колесами (или омниколесами). Это работы Д. Е. Охоцимского, Ю.Г. Мартыненко, Я.В. Татарина, А.А. Зобовой, С.Ф. Бурдакова, И.В. Мирошника, Р.Э. Стельмакова, А.В. Борисова, И. С. Мамаева, А.А. Килина [8–10, 37–39, 41] и других.

Большую популярность в последние годы, особенно у зарубежных авторов, приобретают исследования различных конструкций сферических роботов. Наиболее полные обзорные работы этого класса неголономных систем с качением представлены в работах А.В. Борисова, И. С. Мамаева, А.А. Килина, М.Свинина, А.Хальме, Р. Чейза, А. Панди, Родри Армура, Ю. Винсента [13, 20, 22, 23, 42, 43, 61] и других. Исследования в этом направлении являются наиболее актуальными, так как сферическое колесо в будущем является

потенциальной заменой классического колеса [12,14,15]. Это существенно повысит маневренность и управляемость мобильных роботов, а следовательно и степень их внедрения в различные сферы жизни. Разработка и внедрение неголономных движителей [12,13], на базе шаровых приводов, неголономных манипуляторов [11,16] требует развития соответствующих нелинейных моделей управления или адаптации существующих моделей движения колесных систем.

Практическая реализация алгоритмов управления системами с качением является сложной задачей, так как для её решения нет универсального подхода, и, как правило, разработке системы управления предшествует теоретический анализ движения, позволяющий подобрать рабочие режимы соответствующие стационарным движениям неголономной системы, оценить их устойчивость и способы стабилизации. С другой стороны, в мобильной робототехнике наличие неголономных связей, ограничивающих возможные перемещения, как правило, обусловлено отсутствием дополнительных приводных элементов. При современном развитии микропроцессорной техники разработка специальной «неголономной» системы управления является более дешевым вариантом, чем введение новых конструктивных и приводных элементов, исключающих неголономность системы, если это технически возможно. Данное обстоятельство особенно актуально для автономных мобильных систем, испытывающих в абсолютном большинстве случаев проблемы с обеспечением энергией.

В работе представлены исследования двух систем с качением. Первая - сферический робот с внутренней омниколесной платформой, разработанный в рамках сотрудничества Лаборатории нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения (ФГБОУ ВПО «УдГУ») и НУЛ «Мобильные системы» кафедры «Мехатронные системы» (ФГБОУ ВПО «ИжГТУ имени М.Т. Калашникова»). Исследование и разработка сферического робота имеют

явную практическую значимость. Однако, без соответствующих теоретических моделей, описывающих движение подобных систем, в независимости от конструкции, реализовать алгоритмы управления для достижения заданной точности, на практике, не представляется возможным.

Вторая система является классической в неголономной механике - однородный диск, катящийся (с проскальзыванием) по горизонтальной поверхности (в зарубежной литературе его часто называют диск Эйлера). Анализ качения диска по горизонтальной поверхности посвящено большое количество работ, в том числе и экспериментальных. Однако, вопрос о поведении диска в момент остановки остаётся открытым, что делает все существующие теоретические модели его движения неполными, а задачу экспериментального исследования момента остановки актуальной, так как существующие гипотезы поведения диска в момент остановки (а также основанные на данных гипотезах теоретические модели), представленные в работах как отечественных так и зарубежных учёных, противоречивы. Отметим, что вопрос о падении диска Эйлера является основным при изучении динамики и управления робота-колеса [17, 18].

### **Цель работы**

Целью диссертационной работы является исследование динамических систем с качением, используя сочетание аналитических, численных и экспериментальных методов. Экспериментальные методы подразумевают разработку и создание натуральных образцов рассматриваемых систем, а также экспериментальных установок и методик определения параметров их движения.

### **Методы исследования**

Для решения поставленных в рамках диссертации задач предполагается использовать аналитические и численные методы теории динамических систем, теории устойчивости. Для проведения экспериментальных исследований качения диска по горизонтальной поверхности разработаны методики,

позволяющие определить наличие потери контакта катящегося диска от поверхности и даже зафиксировать ее длительность. Для исследования звука, сопровождающего качение диска, использовались такие методы спектрального анализа как быстрое преобразование Фурье и вейвлет-преобразование. При проведении экспериментальных исследований движения сфероробота использовались современные технологии захвата движения (Motion Capture). Обработка результатов экспериментов проводилась с использованием программного комплекса Matlab.

Алгебраические преобразования, в том числе вывод уравнений, описывающих динамику, анализ устойчивости выполнялись с помощью пакета программ Maple v.15. Программное обеспечение для управления сферороботом разрабатывалось на языке Си для микроконтроллеров серии STM32F303 с ядром Cortex-M4 в среде Keil uVision4. Пользовательский интерфейс для управления сферороботом разработан на языке C# в среде MS Visual Studio 2010.

### **Научная новизна и основные результаты.**

Разработана новая конструкция сферического робота, приводящегося в движение внутренней омниколесной платформой, и обладающая повышенной маневренностью. Построены кинематическая и динамическая модели движения разработанной конструкции сфероробота, проведен анализ устойчивости частных решений. Проведены экспериментальные исследования разработанных математических моделей, на основе которых сделана оценка возможности их использования для управления движением сферического робота с внутренней омниколесной платформой. Разработан алгоритм планирования траектории движения для идеального случая абсолютно сбалансированной и симметричной внутренней омниколесной платформы, а также с учётом возможного смещения центра масс. Разработана экспериментальная методика определения смещения центра масс для несбалансированной омниколесной платформы, приводящей в движение сферическую оболочку. Доказано, что в общем

случае траекторией движения сфероробота с внутренней омниколесной платформой при постоянных управляющих воздействиях является окружность.

В области исследования движения катящегося диска по горизонтальной поверхности разработана методика, позволяющая обнаружить отрыв диска от поверхности перед остановкой. Экспериментальное подтверждение наличия отрыва диска от поверхности перед остановкой получено впервые, что позволило также выдвинуть гипотезы дальнейшего теоретического исследования данного явления. Проведённые исследования звуковых колебаний, сопровождающих качение диска, с использованием спектральных преобразований хорошо коррелируют с результатами исследований по определению отрывов диска.

#### **Результаты выносимые на защиту.**

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

- 1) Конструкция сферического робота с внутренней омниколесной платформой.
- 2) Кинематическая модель движения сфероробота с внутренней омниколесной платформой, а также границы её применимости.
- 3) Алгоритм планирования траектории движения на базе кинематической модели для сфероробота с внутренней омниколесной платформой.
- 4) Методика определения смещения центра масс для омниколесной платформы сфероробота.
- 5) Динамическая модель движения сфероробота с внутренней омниколесной платформой.
- 6) Алгоритм управления сферическим роботом с использованием базовых маневров (гейтов).
- 7) Экспериментальная методика определения отрыва катящегося диска от горизонтальной поверхности перед остановкой, а также экспериментальное

подтверждение наличия микроотрывов катящегося диска от поверхности, сопровождающих его движение.

### **Обоснованность и достоверность результатов**

Достоверность и обоснованность результатов обеспечивается использованием фундаментальных векторных преобразований, законов сохранения, а также результатами натуральных экспериментов. Разработанные математические модели основываются на классических утверждениях и теоремах и не противоречат известным результатам. Для проведения экспериментальных исследований использовались современные измерительные комплексы, прошедшие поверку.

### **Теоретическая и практическая ценность**

Конструкция разработанного сферического робота с внутренней омниколесной платформой обладает повышенной маневренностью и простотой управления по сравнению с другими конструкциями сферических роботов. Разработанные математические модели движения могут использоваться для управления сферороботом подобной конструкции в реальных условиях, их адекватность подтверждена экспериментальными исследованиями. С другой стороны сфероробот с внутренней омниколесной платформой является примером сложной неголономной динамической системы, на основе которой можно проводить как моделирование, так и экспериментальные исследования, дополняя или упрощая существующую конструкцию, что делает его наглядным лабораторным комплексом, который можно внедрять в учебный процесс для изучения алгоритмов управления, разработки моделей движения, а также в рамках более прикладных дисциплин связанных с мехатроникой и робототехникой.

Разработанная методика для определения отрыва катящегося диска от поверхности впервые позволила однозначно подтвердить наличие отрыва диска от поверхности перед его остановкой, поставив под сомнения гипотезы об

отсутствии потери контакта диска с поверхностью. В настоящее время отсутствует полное теоретическое обоснование данного явления, что будет являться толчком для дальнейших как теоретических, так и экспериментальных исследований.

#### **Апробация результатов.**

Основные результаты работы обсуждались на семинарах Института компьютерных исследований ФГБОУ ВПО «Удмуртский государственный университет», кафедры «Мехатронные системы» ФГБОУ ВПО «Ижевский государственный технический университет имени М.Т. Калашникова». Кроме того результаты исследований, изложенные в диссертации докладывались на российских и международных конференциях:

- IUTAM Symposium « From Mechanical to Biological Systems - an Integrated Approach », 05–10 июня 2012, г. Ижевск, РФ
- Fourth International Conference «Geometry, Dynamics, Integrable System» – GDIS 2013, 10–14 июня 2013, г. Ижевск, РФ
- Международная конференция «Нелинейная динамика и её приложения», 15 - 18 октября 2013, г. Ярославль, РФ
- Fourth forum of young researchers. In framework of international forum «EDUCATION QUALITY – 2014», 23 апреля 2014, г. Ижевск, РФ.
- XI Международная научно-техническая конференция «Вибрация-2014. Вибрационные технологии, мехатроника и управляемые машины», 14-16 мая 2014, г. Курск, ЮЗГУ, РФ.

Поданы заявки в Федеральный институт промышленной собственности (Роспатент) на регистрацию авторских прав на

- 1) Полезную модель сфероробота с внутренней омниколесной платформой.

- 2) Программу для управления сферороботом с внутренней омниколесной платформой.

### **Публикации.**

Основные результаты диссертации опубликованные в журналах входящих Web of Science:

- 1) Borisov, A. V., Mamaev, I. S., Karavaev, Y. L., On the loss of contact of the Euler disk, *Nonlinear Dynamics*, V. 79, Issue 4 (2015), pp. 2287-2294. DOI 10.1007/s11071-014-1811-5.
- 2) Karavaev Y. L., Kilin A. A., The Dynamic and Control of a Spherical Robot with an Internal Omniwheel Platform, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2015, 21 (2), pp. 20-39.

в журналах из перечня ВАК:

- 1) Караваев Ю.Л., Трефилов С. А. Дискретный алгоритм управления по отклонению мобильным роботом с омниколесами, *Нелинейная Динамика*, 2013, Том 9, № 1, с. 91-100.
- 2) Борисов А.В., Мамаев И.С. Караваев Ю.Л. Об отрыве диска Эйлера, *Нелинейная динамика*, 2013, Том 9, № 3, с. 499-506.
- 3) Килин А.А., Караваев Ю.Л., Клековкин А.В. Кинематическая модель управления высокоманевренным мобильным сферороботом с внутренней омниколесной платформой, *Нелинейная Динамика*, 2014, Том 10, № 1, с. 113-126.
- 4) Килин А.А., Караваев Ю.Л. Кинематическая модель управления сферороботом с внутренней динамически несимметричной омниколесной платформой. *Нелинейная Динамика*, 2014, Том 10, № 4, с. 497-511.

- 5) Караваев Ю.Л., Килин А.А. Динамика сфероробота с внутренней омниколесной платформой. Нелинейная Динамика, 2015, Том 11, № 1, с. 187–204.

### **Объем и структура работы.**

Диссертация изложена на 106 страницах и состоит из введения, четырех глав, заключения и списка цитируемой литературы (119 наименований).

### **Краткое содержание диссертации.**

В первой главе рассматривается конструкция сферического робота, приводящегося в движение внутренней омниколесной платформой. Приводится кинематическая модель движения, на основе которой проводится анализ траектории движения с постоянными управляющими воздействиями. Представлена оценка влияния смещения центра масс на характер траектории движения сферического робота, а также предложена методика определения смещения центра масс омниколесной платформы на основе двух экспериментально полученных траекторий. Разработан алгоритм планирования траектории в рамках кинематической квазистатической модели.

Вторая глава посвящена разработке динамической модели на основе уравнений неголономного качения. Получена полная система уравнений, описывающая динамику сферического робота с внутренней омниколесной платформой, для данных уравнений указаны первые интегралы движения и найдены частные решения, соответствующие движению сфероробота по прямой либо окружности. Исследована устойчивость свободного движения сфероробота по прямой в рамках линейного приближения при фиксированных параметрах сфероробота. Разработан алгоритм управления, основанный на численном решении полученной системы дифференциальных уравнений и позволяющий реализовать движение сфероробота по произвольной траектории. Для исключения его недостатков разработан численный алгоритм построения элементарных маневров (гейтов), позволяющих переходить с одного стационарного

движения на другое. Данный алгоритм проиллюстрирован на примере разгона сфероробота и поворота при начальном движении по прямой.

В третьей главе приведены описание экспериментальной установки, а также результаты многочисленных экспериментальных исследований движения сфероробота по типовым траекториям: окружность и прямая. Управляющие воздействия рассчитывались по кинематической (квазистатической) модели, учитывающей смещение центра масс.

Четвертая глава посвящена экспериментальному исследованию качения однородного диска по горизонтальной плоскости. В первой ее части представлен обзор работ, посвященных исследованию движения диска, и в особенности её финальной стадии. Во второй части приведены описания экспериментальных установок, позволивших зафиксировать наличие отрыва диска от горизонтальной плоскости перед его остановкой. Представлены результаты экспериментальных исследований с дисками из различных электропроводящих материалов и с разной массой. Проведен анализ звуковых колебаний, сопровождающих движение диска перед и в момент его остановки. Показана тесная корреляция экспериментальных данных характерных отрыву диска от поверхности перед его остановкой. Выдвинуты гипотезы существования обнаруженных «микроотрывов», сопровождающих качение диска.

## ГЛАВА 1

# **Конструкция и кинематическая модель сферического робота с внутренней омниколесной платформой**

В данной главе представлены описание конструкций существующих сферических роботов и анализ их кинематических схем. Приведены результаты разработки экспериментального образца сферического робота, перемещающегося за счёт движения внутренней омниколесной платформы и его кинематической модели. Проводится анализ возможных траекторий стационарного движения, как в идеальном случае, так и при смещении центра масс подвижной омниколесной платформы. Также предложена методика определения смещения центра масс по двум экспериментам, в ходе которых измеряются радиусы кривизны траекторий движения.

### **1.1. Введение**

В настоящее время, в мире ведутся активные исследования по созданию новых способов передвижения. С одной стороны это связано с насущной необходимостью увеличения маневренности (особенно в городских условиях) транспортных средств и их надежности. С другой стороны, ведутся разработки «экзотических» транспортных средств, перспективность применения которых связана с их использованием в специфических (критических) условиях, например в условиях космоса или других планет. Максимальная степень защиты внутренних функциональных элементов и внешних рабочих органов

мобильных роботов существенно повышает сложность конструкции, массо-габаритные характеристики, что негативно сказывается на маневренности, эффективности и точности позиционирования мобильных робототехнических систем при реализации алгоритмов управления. Таким образом, актуальным является создание транспортных средств, в которых изначально конструктивно заложена высокая степень защиты внутреннего пространства благодаря минимальному количеству внешних рабочих органов.

Сферические роботы обладают значительными преимуществами по сравнению с традиционными колесными или ходящими роботами: защищённость системы управления и конструктивных элементов робота от механических воздействий или неблагоприятных условий внешней окружающей среды; подвижность внутренних приводных механизмов не зависит от условий поверхности, по которой движется сферическая оболочка; оминаправленность, т.е. способность двигаться в любом направлении, без дополнительных маневров; меньшая сила давления на поверхность, что позволяет двигаться сферороботу по сыпучим материалам, снегу и воде. Одним из перспективных направлений разработки сферических роботов является их потенциальная возможность перемещаться из одной среды в другую, например по воде и по суше, существенно расширяя область использования мобильных роботов.

Следует отметить, что большинство работ, посвящённых сферическим роботам, ограничивается рассмотрением кинематических моделей, в виду сложности динамики подобных систем и отсутствием универсальных моделей трения, пригодных для описания контактного взаимодействия. Задача движения твердого тела по неподвижной опорной поверхности относится к числу классических задач динамики твердого тела, однако, построить общие интегралы уравнений движения и получить качественные выводы о динамике тел исследователям удалось лишь в частных случаях. Существенный вклад в развитие отечественных современных исследований внесли В.В. Козлов, А.П. Иванов,

В.Ф. Журавлев, Ю. И. Неймар, Н.А. Фуфаев, А.В. Карапетян, А.В. Борисов, И.С. Мамаев и др. Основное отличие подходов исследователей - это выбор математической модели взаимодействия движущегося тела и опорной поверхности: движение по абсолютной гладкой плоскости, движение по абсолютно шероховатой плоскости, сухое трение на площадке контакта, вязкое трение и т.п. Обзор работ по исследованию динамики качения шара по шероховатой плоскости, а также модели сил трения, и основанные на них модели динамики шара представлены в работах П.К. Плотникова [36] и М.В. Ишханян [35]. Однако, разработанные модели взаимодействия, в виду их сложности, в явном виде не могут быть использованы при расчете управляющих воздействий из уравнений движения с учетом трения. На практике, данная проблема решается использованием в системах управления информации с датчиков обратной связи и различного рода регуляторов.

## **1.2. Анализ конструкций сферических роботов**

Первые модели сферороботов появились ещё в конце двадцатого века, а в течении последнего десятилетия создано более десятка различных моделей, реализующих различные принципы приведения сферической оболочки в движение. Прототипами современных сферороботов являются самодвижущиеся механические игрушки в форме сферы, появившиеся ещё в конце девятнадцатого столетия [21]. Наиболее полный обзор и анализ существующих конструкций сферических роботов на русском языке представлен в работе [20]. Ж. Винцент и Р. Армур в работе [22] одними из первых привели классификацию сферических роботов в тесной взаимосвязи с существующими в природе способами качения, провели анализ действующих моделей и сравнили их достоинства и недостатки. В работе финских учёных Т. Иликорпи и Ю.Суомела [21] представлен анализ патентов, посвящённых созданию самодвижущихся

сферических игрушек, сферических транспортных средств и мобильных платформ, в том числе тех, внутри которых может находиться человек. Представлен анализ движителей и приводных механизмов, а также источников энергии, необходимых для приведения сфероробота в движение и управления.

Все известные способы приведения в движение сферических роботов можно разделить на четыре группы:

- 1) за счёт изменения положения центра масс;
- 2) за счёт изменения гиросtatического (кинетического) момента;
- 3) за счёт изменения формы (деформации) сферической оболочки;
- 4) комбинации предыдущих трёх групп.

Роботы, приводные механизмы которых относятся к первой группе, наиболее распространены. Для перемещения центра масс внутри сферической оболочки используются такие варианты как система маятникового типа [26–29, 53], слайдеры или полозья, по которым движется масса [30, 31], различные тележки, катающиеся внутри шара [23, 24, 60]. В рассмотренных работах представлены не только теоретические модели движения, но и рассмотрены реальные конструкции и результаты экспериментальных исследований, направленных на изучение траекторий движения сферических роботов.

Сферороботы второй группы, передвигаются за счёт создания переменного гиросtatического (кинетического) момента [32–34, 42, 43, 61, 64], то есть для управления шаром используется гиросtatический эффект. Данный принцип исследовался многими учеными, в частности показана алгебраическая управляемость этой системы, получены законы управления [42, 43, 46, 64]. Их работы основаны на задаче о качении уравновешенного динамически несимметричного шара по плоскости, поставленной ещё в конце XIX века С. А. Чаплыгиным [47]. Следует отметить, что в теории сферические роботы дан-

ной группы обладают повышенной маневренностью и подвижностью, что на практике требует от исполнительных механизмов (двигателей) оптимального соотношения параметров: минимальной массы, максимального момента инерции. Двигатели и управляющая электроника должны обеспечивать максимально возможные ускорения на максимальном моменте.

Третья группа, также развивающаяся в последнее время, реализуется за счёт деформации сферической оболочки [48]. Имея деформируемую оболочку, сфероробот может перемещаться и отрываться от поверхности, воспроизводя прыжок.

Также следует отметить работы посвящённые созданию мобильных роботов с изменяемым способом передвижения, в особенности тех, для которых одним из способов передвижения (как правило, основным) является качение. В 2011г. норвежским инженером К. Халворсеном [19] создан робот—трансформер, способный передвигаться как паук—гексапод, но для более скоростных перемещений по ровной поверхности робот трансформируется в сферу. Другой вариант комбинированного робота предложен в работе [79]. Сферическая оболочка данного робота имеет выдвигной сферический сегмент, который используется для преодоления препятствий.

Далее рассмотрим конструкцию сферического робота с внутренней омниколесной платформой, разработанного в лаборатории Нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения.

### **1.3. Сферический робот с внутренней омниколесной платформой**

#### **1.3.1. Описание конструкции**

Сферический робот действует на основе относительного движения несбалансированных масс, находящихся внутри поллой сферы. Подвижный груз, перемещающийся по внутренней сферической поверхности, выполнен в виде

подвижной платформы на омниколесах (омнитележки). Сфероробот с омнидвигателем предназначен для перемещения по горизонтальной, наклонной плоской поверхности, а также по поверхности с небольшими препятствиями.

Движение сфероробота происходит за счет создания движущей силы (момента) при вращении омниколес платформы. Омниколеса опираются роликами на внутреннюю поверхность сферической оболочки и при вращении вызывают качение сферы по наружной опорной поверхности. Главной особенностью омниколесной платформы является то, что она способна осуществлять так называемое всенаправленное движение. Направление движения платформы внутри сферы и самой сферы по опорной поверхности определяется соотношениями скоростей и направлений вращения омниколес. Сфероробот с омниколесной платформой способен выполнять сложные движения на плоскости, отрабатывать траектории движения, которые для других типов двигателей являются невозможными. Например, он способен в любой точке траектории изменить направление движения на любое другое.

Экспериментальная модель сфероробота была разработана, спроектирована и изготовлена для экспериментального исследования возможностей управляемого движения сфероробота. Она дает возможность в лабораторных условиях оценить характеристики подвижности, маневренности, а также отработать режимы управления движением. На рисунке 1 приведена конструктивная схема сфероробота.

Сферический корпус состоит из двух одинаковых полусфер 1, выполненных из прозрачного материала (ПЭТ) и присоединенных друг к другу по экваториальной плоскости. Диаметр сферы составляет  $D = 300$  мм. Толщина сферической оболочки (3 мм) и применяемый материал обеспечивают необходимую прочность при движении (перемещении) сфероробота.

Внутри оболочки размещена платформа 2 с омниколесами 3, установленными на валах шаговых двигателей 4. Оси омниколес в проекции на опорную

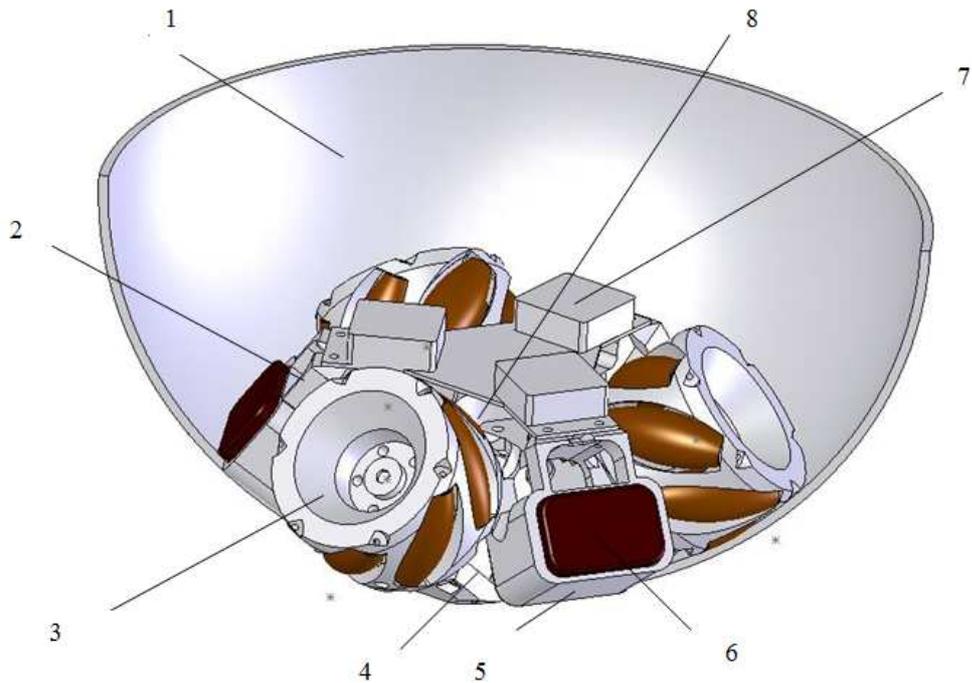


Рис. 1. Конструкция и основные узлы экспериментальной модели сфероробота

плоскость расположены под углами  $120^\circ$ . Каждое из колес установлено непосредственно на вал шагового двигателя, обеспечивающего высокий момент особенно на низких скоростях вращения.

Между омниколесами на подвесках 5 расположены аккумуляторы 6, служащие источниками питания для приводов колес и блоков управления 7. Аккумуляторы и блоки управления используются также для балансировки путем их перемещения в плоскости подвижной платформы, для обеспечения положения центра масс в геометрическом центре симметрии подвижной платформы. Все узлы платформы закреплены на опоре 8, расположенной в центральной части. Размещение узлов на опоре выполнено таким образом, чтобы в максимальной степени сосредоточить массу подвижных частей в нижней части сферы, а также по возможности обеспечить наиболее компактную их компоновку. Драйверы шаговых двигателей, а также микропроцессорное устройство управления сферороботом расположены над опорой 8. Передача данных (от персонального компьютера) для управления движением реализованы по беспроводному каналу связи.

Омниколеса обеспечивают абсолютную подвижность и повышенную маневренность по сравнению с традиционными кинематическими схемами: несколько колес с независимым приводом или несколько приводных колес с дополнительным рулевым механизмом.

Наиболее близкий по конструкции сфероробот представлен в [60]. Основное отличие состоит в том, что оси вращения пассивных роликов расположены под углом  $90^\circ$  к оси вращения омниколеса. В указанной работе выведены кинематические уравнения движения и проведены эксперименты, включающие движение по прямой, окружности и квадрату. Но ошибка перемещения робота составила от 10 до 50 процентов.

### **1.3.2. Описание конструкции омниколеса для сфероробота**

Омниколеса (Omni wheel), также известные как всенаправленные колеса, (в русскоязычной литературе также используется термин роликонесущее колесо [37–39]) - это колеса с маленькими роликами по периметру окружности, на которые колесо опирается при контакте с поверхностью. Существующие конструкции всенаправленных колес отличаются углом наклона оси вращения роликов относительно оси вращения обода колеса. На практике распространены омниколеса двух типов: с углом в  $45^\circ$  - получившие название механум-колес (Mecanum) и с углом в  $90^\circ$  - часто имеют название по фирме производителю (например, Killough, Rotacaster и другие). Механум-колеса также называют колесами Илона (или шведским колесом) в честь их шведского изобретателя, инженера компании Mecanum AB, Бенгта Илона ([40]). Схема механум-колеса приведена на рисунке 2.

Ключевым отличием механум-колес от других вариантов является обеспечение наивысшей плавности хода колесных экипажей, отсутствие вибраций, вызванных переходом точки контакта с поверхностью от одного ролика к другому.

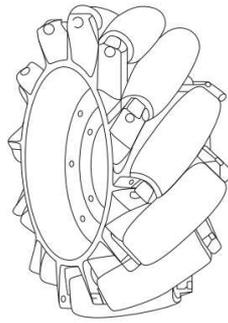


Рис. 2. Схема механум-колеса

Под омниколесами в данной работе будут подразумеваться колеса Mecanum, конструкция и неголономная модель которых представлена в работе [41], где омниколесо моделируется плоским диском, для которого скорость точки контакта с несущей поверхностью направлена вдоль прямой, составляющей постоянный угол с плоскостью колеса. При изготовлении роликов омниколес за основу были взяты ролики омниколеса предназначенного для перемещения по горизонтальной плоскости. Для обеспечения непрерывности контакта роликов с внутренней поверхностью сферической оболочки, профиль пассивных роликов омниколеса перепрофилирован под внутренний радиус сферической оболочки.

#### **1.4. Кинематическая модель сферического робота с внутренней омниколесной платформой**

Для определения управляющих воздействий (скоростей вращения омниколес), необходимых для реализации движения сфероробота по траектории рассмотрим кинематическую модель. Конструкция и неголономная модель омниколеса, а также омниколесного экипажа с различным количеством и расположением колес, перемещающегося по плоскости и по сфере, представлена в работе [41]. В указанной работе сфера, по которой движется платформа непо-

движна. В нашем случае сферическая оболочка, внутри которой перемещается омниколесная платформа, движется по плоскости с угловой скоростью  $\Omega$ .

Для записи кинематических уравнений движения рассмотрим неподвижную систему координат –  $OXYZ$  с ортами  $\alpha, \beta, \gamma$  и жёстко связанную с платформой, подвижную –  $Cxyz$  с ортами  $e_1, e_2, e_3$  и с началом координат расположенным в центре сферической оболочки (см. рисунки 3, 4). Все векторы, используемые далее в работе, будем рассматривать в проекции на оси подвижной системы координат (если не оговаривается иного). Условие отсутствия проскальзывания в точках контакта каждого из колес со сферической оболочкой накладывают следующие связи на рассматриваемую систему [41]

$$(\mathbf{v}_{ci} - \tilde{\mathbf{v}}_{ci}, \boldsymbol{\alpha}_i) = 0, \quad (1.1)$$

где  $\boldsymbol{\alpha}_i$  – единичный вектор, направленный вдоль оси закрепления роликов (см. рисунок 4);  $\mathbf{v}_{ci}$  – скорость точки контакта  $i$ -го колеса,  $\tilde{\mathbf{v}}_{ci}$  – скорость точки контакта сферы с  $i$ -м колесом. Вектора  $\mathbf{v}_{ci}, \tilde{\mathbf{v}}_{ci}$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{ci} &= \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i \left( \frac{R}{R - R_i} \right) + \dot{\chi}_i \mathbf{n}_i \times \mathbf{r}_i \frac{R_i}{R - R_i}, \\ \tilde{\mathbf{v}}_{ci} &= \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i \frac{R}{R - R_i}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $\boldsymbol{\omega}$  – вектор угловой скорости платформы;  $\mathbf{v}$  – вектор линейной скорости центра сферы;  $\boldsymbol{\Omega}$  – вектор угловой скорости сферы;  $\mathbf{r}_i$  – радиус вектор, направленный от центра сферы в центр  $i$ -го колеса;  $\mathbf{n}_i$  – единичный вектор нормальный к плоскости колеса (см. рисунок 3, 4);  $R$  – радиус сферы;  $R_i$  – радиус  $i$ -го колеса;  $\dot{\chi}_i$  – скорость вращения  $i$ -го колеса. Подставив выражения (1.2) в уравнение (1.1), получаем

$$((\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{r}_i, \boldsymbol{\alpha}_i) = \frac{R_i}{R} ((\mathbf{n}_i \times \mathbf{r}_i), \boldsymbol{\alpha}_i) \dot{\chi}_i. \quad (1.3)$$

Введя вектор  $\mathbf{s}_i = \mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\alpha}_i$ , и угловую скорость оболочки относительно платформы  $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}$ , уравнение связи (1.3) можно представить в виде

$$(\mathbf{s}_i, \tilde{\boldsymbol{\omega}}) = \frac{R_i}{R} (\mathbf{s}_i, \mathbf{n}_i) \dot{\chi}_i \quad (1.4)$$

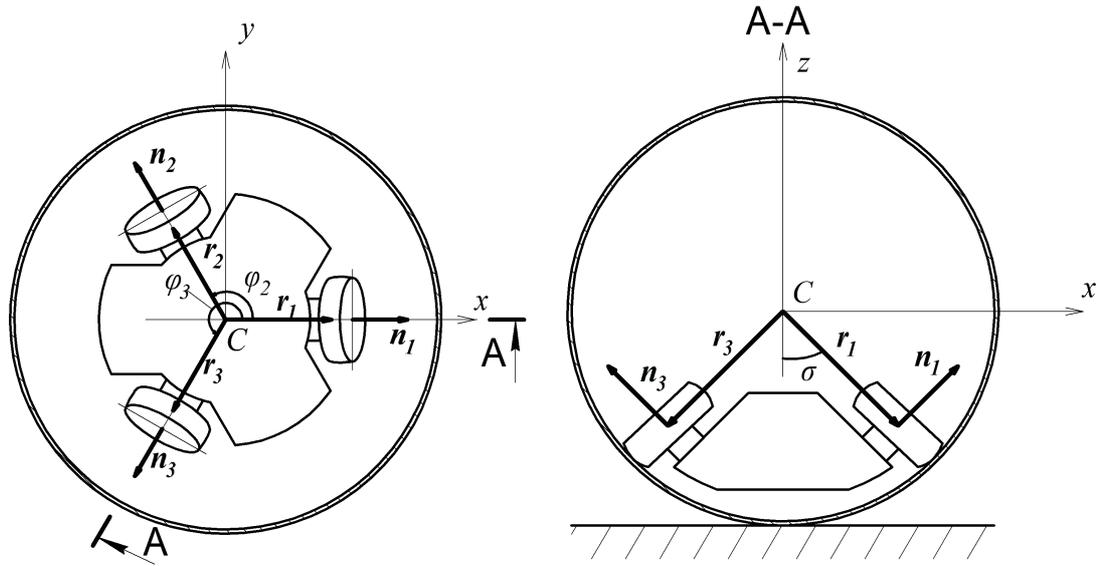


Рис. 3. Схема сфероробота с обозначением некоторых углов и векторов

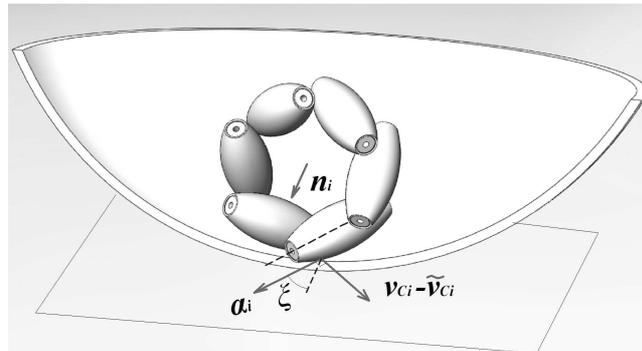


Рис. 4. Модель омниколеса в сферической оболочке

Решение уравнения (1.4) относительно  $\dot{\chi}_i$  позволяет определить скорости вращения каждого из колес при движении по траектории определяемой вектором  $\tilde{\omega}$ . Заметим, что вектора  $n_i, r_i, s_i, \alpha_i$  являются постоянными в подвижной системе координат и их значения зависят только от конструкции сфероробота. Далее мы будем рассматривать конструкцию платформы, с тремя одинаковыми колесами (т.е.  $R_1 = R_2 = R_3 = R_w$ ) расположенными, в углах правильного треугольника. В этом случае вектора  $n_i, r_i, s_i, \alpha_i$  принимают вид

$$\mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} (R - R_w) \cdot \sin \sigma \cdot \cos \phi_i \\ (R - R_w) \cdot \sin \sigma \cdot \sin \phi_i \\ -(R - R_w) \cdot \cos \sigma \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_i = \begin{bmatrix} \cos \sigma \cdot \cos \phi_i \cdot \cos \xi - \sin \phi_i \cdot \sin \xi \\ \cos \sigma \cdot \sin \phi_i \cdot \cos \xi + \cos \phi_i \cdot \sin \xi \\ \sin \sigma \cdot \cos \xi \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{n}_i = \begin{bmatrix} \cos \sigma \cdot \cos \phi_i \\ \cos \sigma \cdot \sin \phi_i \\ \sin \sigma \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} (R - R_w) \cdot (\sin \phi_i \cdot \cos \xi + \cos \phi_i \cdot \cos \sigma \cdot \sin \xi) \\ -(R - R_w) \cdot (\cos \phi_i \cdot \cos \xi - \cos \sigma \cdot \sin \phi_i \cdot \sin \xi) \\ (R - R_w) \cdot \sin \sigma \cdot \sin \xi \end{bmatrix},$$

где  $i = 1..3$ ,  $\sigma$  - угол наклона осей колес платформы относительно горизонтали,  $\phi_i = \frac{2\pi}{3}(i - 1)$  - угол между осью  $Cx$  и проекцией вектора  $\mathbf{r}_i$  на плоскость  $Cxy$ ,  $\xi$  - угол между осями роликов и осью вращения омниколес (См. рисунки 3, 4).

ЗАМЕЧАНИЕ. Уравнение (1.4) соответствует идеальным Месапум-колесам, у которых в каждый момент времени одна точка контакта с поверхностью и отсутствует проскальзывание. В реальности, в момент перехода от одного ролика к другому, колесо может иметь две точки контакта, что требует отдельного рассмотрения.

#### 1.4.1. Управление в рамках кинематической модели

Решение задачи управления рассматриваемым сферороботом заключается в определении зависимости скорости вращения каждого колеса от траектории заданной в виде

$$\mathbf{r}_c(t) = (x(t), y(t), 0)^T. \quad (1.5)$$

Скорости вращения колес  $\dot{\chi}_i$  в соответствии с уравнением (1.4) определяются вектором  $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}$ . Для определения зависимости компонент данного вектора от траектории рассмотрим условие непроскальзывания сферической оболочки:

$$\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R} = 0, \quad (1.6)$$

где  $\mathbf{R} = -R\boldsymbol{\gamma}$  - радиус вектор из центра сферы в точку контакта сферической оболочки с плоскостью. Тогда вектор угловой скорости сферической оболочки в подвижной системе координат  $Cxyz$  можно записать в виде:

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{R}\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{v} + \Omega_\gamma \boldsymbol{\gamma} \quad (1.7)$$

где  $\Omega_\gamma$  - скалярная величина, характеризующая вращение оболочки вокруг вертикали. Из (1.7) следует, что реализовать движение с заданной скоростью  $\mathbf{v}$  можно произвольным числом способов, которые будут отличаться друг от друга различным вращением оболочки вокруг вертикали. Отметим, что в некоторых моделях качения полагается строгое равенство  $\Omega_\gamma \equiv 0$  - так называемая модель качения «резинового» тела [67–70].

Для записи условия непроскальзывания в неподвижной системе координат  $OXYZ$  (рисунок 5) введем матрицу поворота, которая связывает подвижную систему координат с неподвижной [65]

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \theta \sin \psi & \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \theta \cos \psi & \sin \varphi \sin \theta \\ -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \cos \theta \sin \psi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi & \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \psi & -\sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (1.8)$$

где  $\varphi, \theta, \psi$  - углы Эйлера, определяющие ориентацию платформы в неподвижной системе координат. Проекции скорости сферической оболочки на оси подвижной системы координат связаны с проекциями на оси абсолютной системы координат очевидным соотношением  $\mathbf{v} = \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{r}}_c$ . Подставив уравнения связи (1.7) с учётом данного соотношения в (1.4) получим зависимость угловых скоростей колес от заданной траектории и угловых скоростей  $\boldsymbol{\omega}, \Omega_\gamma$

$$\dot{\chi}_i = \frac{1}{R_i} \frac{(\mathbf{s}_i, \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{Q} \dot{\mathbf{r}}_c + R \Omega_\gamma \boldsymbol{\gamma} - R \boldsymbol{\omega})}{(\mathbf{s}_i, \mathbf{n}_i)} \quad (1.9)$$

При этом угловые скорости  $\boldsymbol{\omega}, \Omega_\gamma$  и углы  $\varphi, \theta, \psi$  необходимо определять либо из анализа полной динамической модели системы, либо сделав какие-либо

предположения о характере движения. В данной главе ограничимся рассмотрением кинематической (квазистатической) модели. При этом сделаем следующие предположения о характере движения рассматриваемой системы.

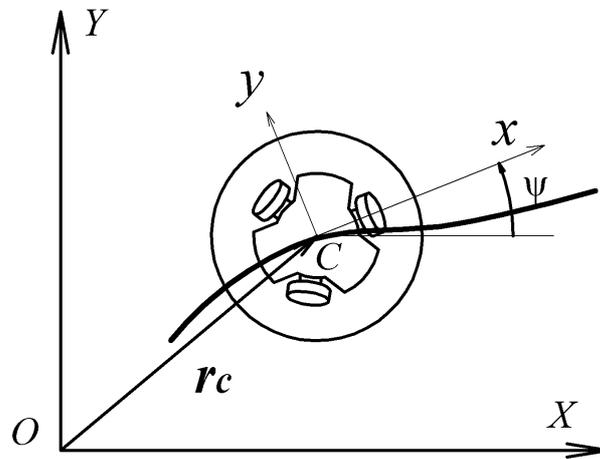


Рис. 5. Движение по траектории

**Предположение.** В рамках кинематической (квазистатической) модели будем считать, что при движении сфероробота центр масс платформы всегда находится в наинижем возможном положении. При этом радиус вектор центра масс можно представить в виде.

$$\mathbf{r}_m = -R_m \boldsymbol{\gamma}, \quad (1.10)$$

где  $R_m$  - расстояние от начала подвижной системы координат до центра масс подвижной платформы.

Данное предположение в случае симметричности платформы (то есть  $\mathbf{r}_m = -R_m \mathbf{e}_3$ ) приводит к ряду следствий:

1. Оси  $OZ$  неподвижной системы координат и  $Cz$  системы координат, связанной с подвижной платформой, совпадают, то есть  $\mathbf{e}_3 \parallel \boldsymbol{\gamma}$ , а матрица  $\mathbf{Q}$  примет вид:

$$\mathbf{Q}_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.11)$$

2. Угловая скорость  $\boldsymbol{\omega}$  перпендикулярна плоскости, по которой движется сфероробот, т.е.:  $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega_z)^T$ , причём компонента  $\omega_z$  определяет вращение подвижной платформы вокруг вертикальной оси и равна производной угла прецессии, т.е.  $\omega_z = \dot{\psi}$ .

С учётом данного предположения, подставив равенство  $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{e}_3$  в (1.9) можно получить зависимость угловых скоростей колес, реализующих движение по заданной траектории. Как было сказано выше, движение по заданной траектории  $\mathbf{r}_c$  с заданным вращением платформы  $\psi(t)$  можно реализовать различными способами, которые будут отличаться друг от друга вращением сферической оболочки. Однако, эксперименты показали, что при движении на малых скоростях вращение сферы вокруг вертикальной оси практически не происходит, таким образом, мы будем рассматривать движение в рамках модели качения «резинового» тела ([67–70]), то есть будем полагать  $\Omega_\gamma = 0$ . Тогда выражение для определения угловых скоростей колес  $\dot{\chi}_i$  запишется в виде

$$\dot{\chi}_i = \frac{(\mathbf{s}_i, \mathbf{Q}_\psi^T \dot{\mathbf{r}}_c \times \mathbf{e}_3 - R\dot{\psi}\mathbf{e}_3)}{R_i(\mathbf{s}_i, \mathbf{n}_i)} \quad (1.12)$$

Далее будем считать ориентацию платформы во время движения заданной, т.е.  $\psi(t)$  - известная функция времени. В частности, качестве примеров можно рассмотреть движение платформы без вращения, т.е.  $\psi(t) = const$ , или такое, при котором скорость подвижной платформы сохраняет постоянное направление в подвижной системе координат

$$\psi = \arctan \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} + const. \quad (1.13)$$

#### 1.4.2. Учёт смещения центра масс

На практике добиться расположения центра масс омниколесной платформы на её оси симметрии чрезвычайно сложно. Результаты экспериментальных исследований показали, что даже при незначительной асимметрии подвижной платформы, происходит отклонение от заданной траектории движения.

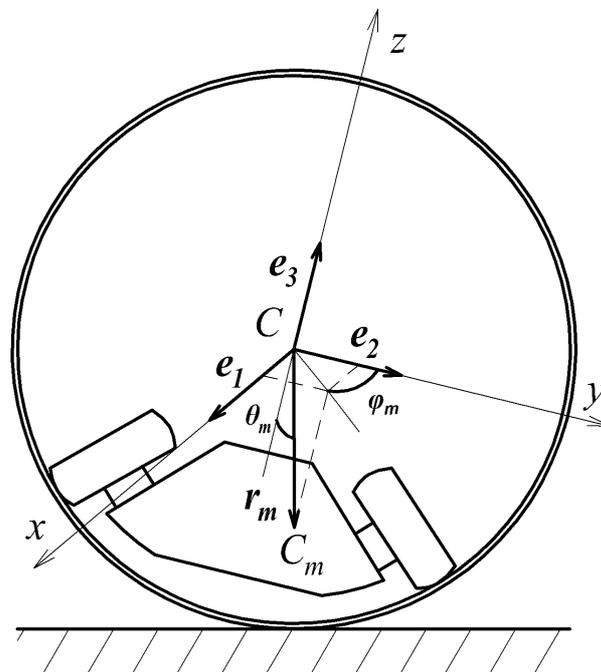


Рис. 6. Расположение осей подвижной системы координат с учётом смещения центра масс

Для описания данного эффекта выберем оси подвижной системы координат  $Cx, Cy, Cz$  в соответствии с геометрической симметрией, при этом они могут не совпадать с осями инерции подвижной платформы. В этой системе положение центра масс подвижной платформы задаётся вектором  $r_m$  (рисунок 6). Учитывая соотношение (1.10) для кинематической модели, нетрудно показать, что вектор  $r_m$  выражается через углы нутации  $\theta_m$  и собственного

вращения  $\varphi_m$  следующим образом

$$\mathbf{r}_m = -R_m \mathbf{Q}_m \mathbf{e}_3 = -R_m \left( \sin \theta_m \sin \varphi_m, \sin \theta_m \cos \varphi_m, \cos \theta_m \right)^T, \quad (1.14)$$

При этом углы  $\varphi_m, \theta_m$  являются постоянными и определяют положение радиус-вектора центра масс подвижной платформы в системе координат  $Sxyz$  (см. рисунок 6). Кроме того, матрицу  $\mathbf{Q}$  можно представить как произведение

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_m \mathbf{Q}_\psi, \quad (1.15)$$

где  $\mathbf{Q}_m$  - постоянная матрица вида

$$\mathbf{Q}_m = \begin{pmatrix} \cos \varphi_m & \cos \theta_m \sin \varphi_m & \sin \theta_m \sin \varphi_m \\ -\sin \varphi_m & \cos \theta_m \cos \varphi_m & \sin \theta_m \cos \varphi_m \\ 0 & -\sin \theta_m & \cos \theta_m \end{pmatrix}, \quad (1.16)$$

Нетрудно показать, что в этом случае справедливо следующее утверждение.

**Утверждение.** Пусть смещение центра масс платформы относительно центра сферы в системе координат  $Sxyz$  задаётся соотношением (1.14), тогда в рамках кинематической модели ( $\mathbf{r}_m = -R_m \boldsymbol{\gamma}$ ) неголономного качения, движение вдоль заданной траектории  $\mathbf{r}_c(t)$  с заданным вращением  $\psi(t)$  реализуется управляющими воздействиями

$$\dot{\chi}_i = \frac{1}{R_w} \frac{(\mathbf{Q}_m^T \mathbf{s}_i, \mathbf{e}_3 \times \mathbf{Q}_\psi^T \dot{\mathbf{r}}_c + R_0(\Omega_\gamma - \omega_\gamma) \mathbf{e}_3)}{(\mathbf{s}_i, \mathbf{n}_i)}. \quad (1.17)$$

Доказательство данного утверждения проводится непосредственной постановкой ограничений налагаемых моделью и выражения (1.14) в уравнения (1.9). Причём угловая скорость  $\omega_\gamma$  является свободным параметром. То есть в рамках кинематической модели можно реализовать движение вдоль заданной траектории с точностью до произвольного вращения платформы вокруг вертикали  $\omega_\gamma(t)$ .

Отметим, что эксперименты по исследованию движения созданного натурного образца показали, что при движении на малых скоростях вращение сферы вокруг вертикальной оси практически не происходит, таким образом, мы будем рассматривать движение в рамках модели качения «резинового» тела [67–70], то есть будем полагать  $\Omega_\gamma \equiv 0$ .

#### 1.4.3. Анализ траектории движения сфероробота при постоянных управляющих воздействиях

Рассмотрим движение сфероробота при постоянных управляющих воздействиях, т.е.

$$\dot{\chi}_i = const. \quad (1.18)$$

Из уравнения связей (1.4) следует, что при постоянном управлении вектор относительной угловой скорости также остаётся постоянным

$$\tilde{\omega} = \Omega - \omega = const. \quad (1.19)$$

Принимая во внимание квазистатичность рассматриваемого движения  $\mathbf{r}_m \parallel \gamma$ ,  $\omega \parallel \gamma$ , условия непроскальзывания сферической оболочки (1.6) можно представить в виде

$$\mathbf{v} = \frac{R_0}{R_m} \mathbf{r}_m \times \tilde{\omega}. \quad (1.20)$$

Кроме того, учитывая модель «резинового» тела ( $\Omega_\gamma = 0$ ), нетрудно показать, что

$$\omega = \frac{1}{R_m^2} (\mathbf{r}_m, \tilde{\omega}) \mathbf{r}_m.$$

Таким образом, вектора скорости сфероробота и угловой скорости платформы в подвижной системе координат остаются постоянными.

Скорость центра сферической оболочки в неподвижной системе координат определяется как

$$\mathbf{V} = \mathbf{Q}^T \mathbf{v}. \quad (1.21)$$

Используя кинематические уравнения Эйлера [65]  $\dot{\mathbf{Q}}^T = \dot{\mathbf{Q}}^T \hat{\omega}$ , где  $\hat{\omega}$  - матрица с элементами  $\hat{\omega}_{ij} = -\varepsilon_{ijk} \omega_k$ , запишем ускорение центра сферы в неподвижной системе координат

$$\dot{\mathbf{V}} = \dot{\mathbf{Q}}^T \mathbf{v} = \mathbf{Q}^T (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}). \quad (1.22)$$

Используя полученные выражения, а также перпендикулярность векторов  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\mathbf{v}$  (следующую из условия квазистатичности), можно вычислить радиус кривизны траектории, по которой движется сфероробот

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|\mathbf{V} \times \dot{\mathbf{V}}|}{|\mathbf{V}|^3} = \frac{|\mathbf{Q}^T \mathbf{v} \times \mathbf{Q}^T (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})|}{|\mathbf{Q}^T \mathbf{v}|^3} = \frac{1}{R_0} \frac{(\tilde{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{r}_m)}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\omega}}^2 \mathbf{r}_m^2 - (\tilde{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{r}_m)^2}}. \quad (1.23)$$

Как видно из выражения (1.23) радиус кривизны данной траектории движения является постоянным. Таким образом, с учётом однородности выражения (1.23) по  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$  и линейной зависимости  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$  от  $\chi_i$ , справедливо следующее утверждение.

**Утверждение.** *При постоянных управляющих воздействиях  $\chi_i = const$  сфероробот равномерно движется по окружности, радиус которой задаётся выражением (1.23) и зависит только от соотношения управляющих воздействий  $\chi_i/\chi_j$ .*

Анализируя выражение (1.23), можно сделать вывод, что движение по прямой ( $\rho = \infty$ ) возможно в случае  $\boldsymbol{\omega} = 0$ . Следовательно, движение по прямой происходит без изменения ориентации платформы, то есть  $\psi = const$ . Используя данный факт, а также требование непрокручивания в модели «резинового» тела, управляющие воздействия, реализующие движение сфероробота со скоростью  $v$  по прямой, направленной под углом  $\delta$  к оси  $OX$  с ориентацией платформы  $\psi$ , можно представить в виде

$$\dot{\chi}_i = \frac{(\mathbf{Q}_m^T \mathbf{s}_i \times \mathbf{e}_3, \mathbf{Q}_\psi \mathbf{V})}{R_w(\mathbf{s}_i, \mathbf{n}_i)}, \quad (1.24)$$

где  $\mathbf{V} = (v \cos \delta, v \sin \delta, 0)$ .

Заметим, что для вычисления управляющих воздействий (1.17) и (1.24) необходимо знать положение центра масс платформы. Задача его определения требует разработки технически сложных установки и приспособлений, имеющих высокий класс точности. В тоже время для движения сфероробота без датчиков обратной связи необходимо обеспечить либо определение данных параметров, либо балансировку подвижной платформы.

#### 1.4.4. Определение положения центра масс подвижной платформы сфероробота

Используя результаты, полученные в предыдущем разделе, можно вычислить смещение центра масс платформы, проведя несколько пробных экспериментов по движению сфероробота с постоянными управляющими воздействиями.

Действительно, заметим, что радиусы окружностей по которым движется сфероробот при постоянных управлениях связаны с радиус-вектором центра масс соотношением (1.23). Причём данные соотношения зависят только от направления смещения (углов  $\varphi_m, \theta_m$ ), и не зависят от величины смещения. Следовательно, системы двух уравнений типа (1.23) для различных управляющих воздействий достаточно для того, чтобы определить направление смещения центра масс подвижной платформы. Таким образом, проведя два эксперимента по движению сфероробота с разными постоянными управляющими воздействиями, и измерив радиусы окружностей, по которым при этом движется сфероробот, можно вычислить направления смещения центра масс (углы  $\varphi_m, \theta_m$ ).

ЗАМЕЧАНИЕ. Следует отметить существенность влияния абсолютных значений отклонения положения центра масс от его идеального расположения в центре симметрии подвижной платформы. Так смещение центра масс для разработанной конструкции сфероробота на  $\approx 4$  мм от вертикальной оси геометрической симметрии платформы приводит к трехкратному уменьшению радиуса кривизны траектории. С другой стороны зная положение центра масс подвижной платформы, можно определить

более устойчивое направление движения сфероробота, и использовать данное движение как основное, дополняя его, при необходимости, операцией поворота на месте.

Результаты соответствующих экспериментальных измерений положения центра масс омниколесной платформы приведены в главе 3.

## ГЛАВА 2

# Динамика сферического робота с внутренней омниколесной платформой

В данной главе представлены результаты разработки динамической модели сферического робота, перемещающегося за счет движения внутренней омниколесной платформы. С использованием уравнений связей, наложенных на рассматриваемую систему, записываются уравнения движения в квазискоростях с неопределёнными множителями, обсуждаются условия существования интегралов движения. На основании представленных уравнений движения строится теория управления сферическим роботом с учетом количества и геометрии омниколес, проводится анализ устойчивости частных решений. Приведен алгоритм расчета управляющих воздействий на базе динамической модели. Обсуждаются его возможности и недостатки. Разработан алгоритм движения с помощью базовых маневров (гейтов). Представлены результаты численного моделирования.

### 2.1. Введение

Динамические исследования движения сферороботов, к сожалению, мало представлены в литературе. Так в последнее время появились работы по динамике сферороботов, перемещающихся за счёт создания переменного гиросtatического момента внутренними роторами [42, 43, 61–64] и за счет внутреннего сферического маятника [49–54]. В описанных работах приведены разнообразные формы уравнений динамики сферороботов, получены управляющие

воздействия для реализации движения по типовым траекториям. Дело в том, что динамика описывается неголономными уравнениями, выводу которых посвящено большое количество работ, но мы укажем только работы последних лет, в которых можно найти подробный библиографический обзор [55–59]. Результаты полученные в указанных работах полезны на этапе проектирования подобных систем, а также необходимы для разработки алгоритмов управления. Кратко опишем исследования выполненные в самое последнее время. Исследование движения по прямой сферического робота с внутренним маятником по не горизонтальным поверхностям представлены в работе [76]. Авторами проведено численное моделирование для спуска сферического робота в кратер и по наклонной плоскости. Исследование устойчивости и вопросы стабилизации данной модели сферического робота с учётом рекуперации энергии при торможении приведены в работах [73, 77]. Алгоритм управления сферороботом подобной конструкции при движение по наклонной плоскости, а также его динамическая стабилизация представлены также в работе [79]. В [74, 75] А. Хартл и П. Маззолени провели численное моделирование динамики сферического ровера, приводящегося в движение силой ветра, в том числе и по неровным поверхностям. В [78] предложена оригинальная конструкция смещения центра масс сферического робота, приведены кинематическая модель, результаты численного моделирования и экспериментальных исследований. Конструкция сфероробота с двумя внутренними маятниками представлена в работе [71]. Помимо уравнений динамики, авторы исследуют нелинейную обратную связь, обсуждаются результаты многочисленных экспериментов. Результаты исследований, представленные в указанных работах, демонстрируют существенное расхождение теории с результатами экспериментальных исследований. Данное обстоятельство подчеркивает сложность и актуальность продолжения работ в направлении развития алгоритмов управления сферическими роботами.

Наиболее близкими по содержанию отечественными работами, посвящёнными исследованию динамики и анализу устойчивости высокоманевренных мобильных роботов, являются работы Зобовой А.А. [37, 38] и Матыненко Ю.Г. [8, 9, 39]. В данных работах исследуется динамика омниколесных (роликонесущих) мобильных роботов, перемещающихся по горизонтальной плоскости. Стоит отметить, что работы Татарина Я.В., Зобовой А.А. посвящены записи уравнений движения мобильных роботов, как неголономных систем в лаконичной форме, предложенной Татаринным Я.В. в 2003 году, и затрагивают только свободное движение системы. В работах Ю.Г. Матыненко приведены как кинематические так и динамические уравнения движения в форме матричных уравнений Маджи, для свободного движения найден первый интеграл, проведен анализ движения при постоянных управляющих воздействиях, исследована устойчивость прямолинейного движения омниколесного робота.

В целом динамические модели, в виду их сложности, крайне редко используются для управления мобильными роботами. Однако, исследование динамических уравнений движения (особенно, когда количество управляющих воздействий меньше степени подвижности системы), позволяет найти частные решения, обеспечивающие определение управляющих воздействий для устойчивого движения. Или наоборот, показать их неустойчивость.

Далее рассмотрим вывод уравнений динамики для сфероробота с внутренней омниколесной платформой, описанного в главе 1, и проведем исследование полученных решений, с точки зрения их последующей реализации на практике.

## 2.2. Динамические уравнения движения сфероробота с внутренней омниколесной платформой

Для описания движения сфероробота рассмотрим три системы координат. Первая  $OXYZ$  - неподвижная, с осями  $\alpha, \beta, \gamma$ , вторая  $Cx'y'z'$  - подвижная, жёстко связанная со сферической оболочкой, с осями  $\xi, \eta, \zeta$ , и третья  $Cxyz$  - подвижная жёстко связанная с омниколесной платформой с осями  $e_1, e_2, e_3$  (см. рис. 7). При этом начало координат обеих подвижных систем совпадает с центром сферической оболочки (т.  $C$ ). Конструкцию подвижной платформы будем описывать следующими постоянными (в системе координат  $Cxyz$ ) векторами:  $r_i$  - радиус-векторы центров омниколес,  $n_i$  - единичные векторы, направленные вдоль осей вращения омниколес,  $\alpha_i$  - единичные векторы, задающие направления осей вращения роликов каждого колеса в точках контакта с оболочкой, и  $r_m$  - положение центра масс подвижной платформы с омниколесами.

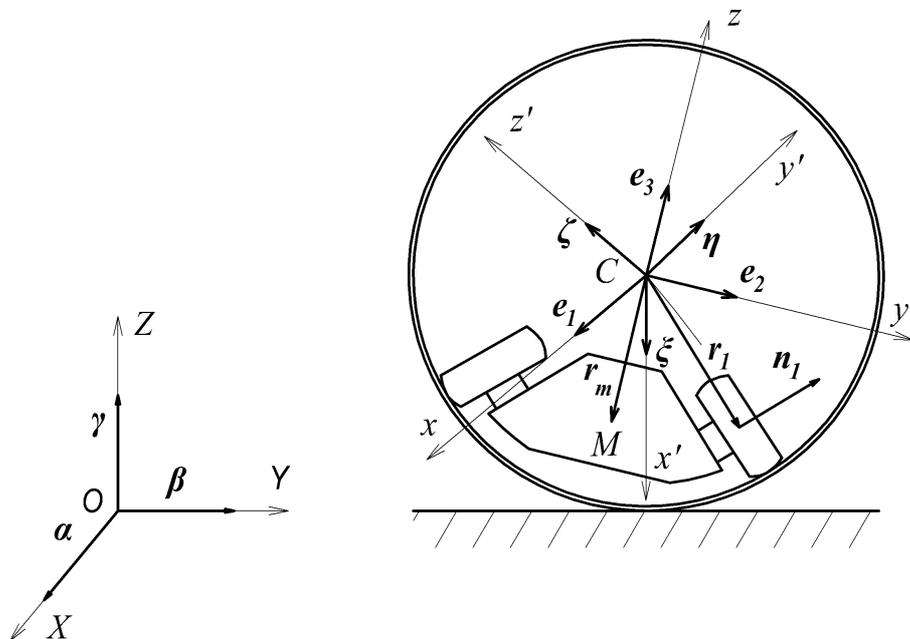


Рис. 7. Схема мобильного сфероробота.

Положение системы будем задавать координатами центра сферической

оболочки в неподвижной системе координат  $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ , углами поворота каждого из колес  $\chi = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$ , и двумя матрицами, задающими ориентацию в пространстве платформы и сферической оболочки

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Здесь и далее (если не оговаривается иное) все вектора записаны в проекциях на оси системы координат  $Cxyz$  жёстко связанной с платформой. Таким образом конфигурационное пространство рассматриваемой системы представляет собой произведение  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^3 \times SO(3) \times SO(3)$ .

В данных координатах движение сферической оболочки и платформы описывается следующими кинематическими соотношениями [65]

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{Q}^T \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{Q}} = \hat{\omega} \mathbf{Q}, \quad \dot{\mathbf{S}} = (\hat{\omega} - \hat{\Omega}) \mathbf{S}, \quad (2.2)$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость центра сферы (в проекциях на оси системы  $Cxyz$ ), а матрицы

$$\hat{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ -\Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

выражаются через компоненты абсолютных угловых скоростей подвижной платформы  $\omega$  и сферической оболочки  $\Omega$ . При этом величины  $\omega$ ,  $\Omega$  и  $\mathbf{v}$  являются квазискоростями, а их связь с обобщенными скоростями задана соотношениями (2.2).

Будем считать, что при движении отсутствует проскальзывание в точках контакта сферической оболочки с плоскостью и омниколесами. Это приводит к наложению неголономных связей на рассматриваемую систему. Непроскальзыванию сферической оболочки относительно плоскости соответствует связь

$$\mathbf{F} = \mathbf{v} - R_0 \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\gamma} = 0, \quad (2.3)$$

а непроскальзыванию колес относительно сферической оболочки получим из выражения (1.3)

$$G_i = \dot{\chi}_i + \frac{R_0}{(\mathbf{n}_i \times \mathbf{r}_i), \boldsymbol{\alpha}_i r} (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}, (\mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\alpha}_i)) = 0.$$

Или приняв  $\mathbf{s}_i = \mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\alpha}_i$

$$G_i = \dot{\chi}_i + \frac{R_0}{(\mathbf{s}_i, \mathbf{n}_i) R_w} (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{s}_i) = 0. \quad (2.4)$$

Для вывода уравнений движения найдем векторные поля  $\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\lambda}_i, \boldsymbol{\vartheta}_i$ ,  $i = 1..3$ , в базисе которых квазискорости  $\mathbf{v}_i, \boldsymbol{\omega}_i, \boldsymbol{\Omega}_i$  являются компонентами скорости рассматриваемой системы. Для этого запишем производную произвольной функции по времени с учетом (2.2)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{f}} &= \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}} \right) + \text{Tr} \left( \dot{\mathbf{Q}}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{Q}} \right) + \text{Tr} \left( \dot{\mathbf{S}}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{S}} \right) = \\ &= v_i \boldsymbol{\mu}_i + \omega_i \boldsymbol{\vartheta}_i + \Omega_i \boldsymbol{\lambda}_i, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где векторные поля:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_i &= Q_{ij} \frac{\partial}{\partial r_j}, \quad \boldsymbol{\lambda}_i = \varepsilon_{ijk} (\xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_k} + \eta_j \frac{\partial}{\partial \eta_k} + \zeta_j \frac{\partial}{\partial \zeta_k}), \\ \boldsymbol{\vartheta}_i &= \varepsilon_{ijk} (\alpha_j \frac{\partial}{\partial \alpha_k} + \beta_j \frac{\partial}{\partial \beta_k} + \gamma_j \frac{\partial}{\partial \gamma_k}) - \varepsilon_{ijk} (\xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_k} + \eta_j \frac{\partial}{\partial \eta_k} + \zeta_j \frac{\partial}{\partial \zeta_k}), \end{aligned} \quad (2.6)$$

а  $\varepsilon_{ijk}$  - символ Леви-Чивиты. Здесь индексы принимают значения  $i, j, k = 1..3$ , и проводится суммирование по повторяющимся индексам. Коммутаторы векторных полей (2.6) имеют вид

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\mu}_j] &= [\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\lambda}_j] = 0, \\ [\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\vartheta}_j] &= -\varepsilon_{ijk} \cdot \boldsymbol{\mu}_k, \quad [\boldsymbol{\lambda}_i, \boldsymbol{\lambda}_j] = \varepsilon_{ijk} \cdot \boldsymbol{\lambda}_k, \\ [\boldsymbol{\vartheta}_i, \boldsymbol{\vartheta}_j] &= \varepsilon_{ijk} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_k, \quad [\boldsymbol{\vartheta}_i, \boldsymbol{\lambda}_j] = -\varepsilon_{ijk} \cdot \boldsymbol{\lambda}_k. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Уравнения динамики в квазискоростях с неопределёнными множителями Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial w_i} \right) = \sum_{r,k} c_{ri}^k w_r \frac{\partial L}{\partial w_k} + \nu^i(L) + \sum_j \lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial w_i}, \quad i = 1, \dots, s. \quad (2.8)$$

где  $\mathbf{w} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, v_1, v_2, v_3)$  - вектор квазискоростей,  $F_j$  - неголономные связи,

$\nu = (\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$  - соответствующие им векторные поля (2.6), а структурные константы  $c_{ri}^k$  определяются из коммутаторов векторных полей

$$[\nu^i, \nu^j] = c_{ij}^k \nu^k, \quad i, j, k = 1..9 \quad (2.9)$$

Представив векторные поля (2.6) и структурные константы определяемые коммутатором (2.7) в (2.8) и объединив их с уравнениями движения колес, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \times \mathbf{v} + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \times \boldsymbol{\gamma} + \left( \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right)^T \tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\Omega}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\Omega}} \times \boldsymbol{\omega} + \left( \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \boldsymbol{\Omega}} \right)^T \tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\Omega}} \right)^T \boldsymbol{\lambda}, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \times \boldsymbol{\omega} + \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{v}} \right)^T \boldsymbol{\lambda}, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}} + \left( \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \dot{\chi}} \right)^T \tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \mathbf{K}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь  $L$  — функция Лагранжа,  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  и  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3)$  неопределённые множители Лагранжа,  $\mathbf{K} = (K_1, K_2, K_3)$  - вектор управляющих моментов, где  $K_i$  - момент сил, приложенный к оси  $i$ -го колеса, а  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{G}$  - неголономные связи (2.3), (2.4). Кинетическую энергию рассматриваемой системы можно представить в виде суммы трёх слагаемых: кинетической энергии сферической оболочки  $T_0$ , кинетической энергии платформы  $T_p$  и кинетической энергии колес  $T_i$

$$T = T_0 + T_p + \sum_{i=1}^3 T_i. \quad (2.11)$$

Кинетическая энергия сферической оболочки и подвижной платформы имеют вид:

$$T_0 = \frac{1}{2}m_0\mathbf{v}^2 + \frac{1}{2}I_0\boldsymbol{\Omega}^2, \quad (2.12)$$

$$T_p = \frac{1}{2}m_p\mathbf{v}^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}_p\boldsymbol{\omega}) + m_p(\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_p) \quad (2.13)$$

где  $m_0$  и  $I_0$  - масса и центральный тензор инерции сферической оболочки,  $m_p$  и  $\mathbf{I}_p$  - масса подвижной платформы и её тензор инерции относительно центра сферы, а  $\mathbf{r}_p$  - радиус-вектор из центра сферы в центр масс платформы (без омниколес).

Кинетическая энергия каждого из колес имеет вид

$$T_i = \frac{1}{2}m_i\mathbf{v}^2 + m_i(\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}_i\boldsymbol{\omega}) + j(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}_i)\dot{\chi}_i + \frac{1}{2}j\dot{\chi}_i^2 \quad (2.14)$$

где  $m_i$  и  $\mathbf{I}_i$  - масса  $i$ -го колеса и его тензор инерции относительно точки  $C$ , а  $j$  - осевой момент инерции колес. Общую кинетическую энергию системы можно представить в виде

$$T = \frac{1}{2}(m + m_0)\mathbf{v}^2 + \frac{1}{2}I_0\boldsymbol{\Omega}^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) + m(\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_m) + \sum_{i=1}^3 j\dot{\chi}_i(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 j\dot{\chi}_i^2, \quad (2.15)$$

где

$$m = m_p + \sum_{i=1}^3 m_i - \text{масса подвижной платформы с омниколесами,}$$

$$\mathbf{r}_m = \frac{m_p\mathbf{r}_p + \sum_{i=1}^3 m_i\mathbf{r}_i}{m} - \text{радиус-вектор центра масс подвижной платформы}$$

с омниколесами,

$\mathbf{I} = \mathbf{I}_p + \sum_{i=1}^3 \mathbf{I}_i$  - тензор инерции подвижной платформы с омниколесами относительно центра сферы.

В выбранных обозначениях потенциальная энергия рассматриваемой системы может быть представлена в виде

$$U = mg(\mathbf{r}_m, \boldsymbol{\gamma}), \quad (2.16)$$

где  $g$  — ускорение свободного падения. Определив функцию Лагранжа  $L = T - U$  с помощью соотношений (2.15) и (2.16), и подставив её в уравнения (2.10), получим

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + m(\mathbf{r}_m \times \dot{\mathbf{v}}) + \sum_{i=1}^3 j\ddot{\chi}_i \mathbf{n}_i + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + m(\mathbf{r}_m \times \mathbf{v}) + \sum_{i=1}^3 j\dot{\chi}_i \mathbf{n}_i) + \\
+m\mathbf{v} \times (\mathbf{r}_m \times \boldsymbol{\omega}) = \sum_{i=1}^3 k_i \mathbf{s}_i \lambda_i - mg(\mathbf{r}_m \times \boldsymbol{\gamma}), \\
I_0 \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\omega} \times I_0 \boldsymbol{\Omega} = -(R_0 \boldsymbol{\gamma}) \times \tilde{\boldsymbol{\lambda}} - \sum_{i=1}^3 k_i \mathbf{s}_i \lambda_i, \\
(m + m_0)\dot{\mathbf{v}} + m(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_m) + \boldsymbol{\omega} \times ((m_0 + m)\mathbf{v} + m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_m)) = \tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \\
j\ddot{\chi}_i + j(\dot{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{n}_i) = \lambda_i + K_i,
\end{aligned} \tag{2.17}$$

где  $k_i = \frac{R_0}{R_w(\mathbf{s}_i, \mathbf{n}_i)}$ . Из последних двух уравнений (2.17) и производной по времени уравнений связи (2.4) найдем неопределённые множители

$$\begin{aligned}
\lambda_i = jk_i(\dot{\boldsymbol{\Omega}} - \dot{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{s}_i) + j(\dot{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{n}_i) - K_i, \quad i = 1..3, \\
\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = (m + m_0)\dot{\mathbf{v}} + m(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_m) + \boldsymbol{\omega} \times ((m_0 + m)\mathbf{v} + m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_m)).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Подставив их в уравнения движения и исключив  $\dot{\chi}_i$  и  $\mathbf{v}$  с помощью уравнений связей (2.3), (2.4) получим

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{I} + \mathbf{J}_{ss} - \mathbf{J}_{ns} - \mathbf{J}_{sn})\dot{\boldsymbol{\omega}} + (\mathbf{J}_{ns} - \mathbf{J}_{ss} + mR_0((\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{r}_m) - \boldsymbol{\gamma} \otimes \mathbf{r}_m))\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \\
& - \sum_{i=1}^3 k_i \mathbf{s}_i K_i - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + (\mathbf{J}_{ns}(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega})) \times \boldsymbol{\omega} - \\
& - mR_0 \mathbf{r}_m \times (\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega})) - mg(\mathbf{r}_m \times \boldsymbol{\gamma}) \\
& (\mathbf{J}_{sn} - \mathbf{J}_{ss} + mR_0((\mathbf{r}_m, \boldsymbol{\gamma}) - \mathbf{r}_m \otimes \boldsymbol{\gamma}))\dot{\boldsymbol{\omega}} + \\
& + (I_0 + \mathbf{J}_{ss} + (m + m_0)R_0^2(\boldsymbol{\gamma}^2 - \boldsymbol{\gamma} \otimes \boldsymbol{\gamma}))\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \\
& - (m + m_0)R_0^2 \boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega})) - mR_0(\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_m))) - \\
& - I_0 \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega} + \sum_{i=1}^3 k_i \mathbf{s}_i K_i
\end{aligned} \tag{2.19}$$

где введены обозначения  $\mathbf{J}_{ss} = \sum_{i=1}^3 jk_i^2(\mathbf{s}_i \otimes \mathbf{s}_i)$ ,  $\mathbf{J}_{sn} = \sum_{i=1}^3 jk_i(\mathbf{s}_i \otimes \mathbf{n}_i)$ ,  $\mathbf{J}_{ns} = \sum_{i=1}^3 jk_i(\mathbf{n}_i \otimes \mathbf{s}_i)$ , а тензорное произведение векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  определяется следующим образом:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \|a_i b_j\|.$$

Вместе с уравнением Пуассона (одним из уравнений (2.2))

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega} \tag{2.20}$$

уравнения (2.19) образуют замкнутую приведённую систему уравнений.

Данная система допускает два первых интеграла движения

$$\boldsymbol{\gamma}^2 = 1, (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) = M_\gamma = \text{const}, \tag{2.21}$$

где вектор  $\mathbf{M}$  имеет вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} = & (\mathbf{I} - \mathbf{J}_{ns} + mR_0((\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{r}_m) - \mathbf{r}_m \otimes \boldsymbol{\gamma}))\boldsymbol{\omega} + \\
& (I_0 + \mathbf{J}_{ns} + mR_0((\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{r}_m) - \boldsymbol{\gamma} \otimes \mathbf{r}_m) + (m + m_0)R_0^2(1 - \boldsymbol{\gamma} \otimes \boldsymbol{\gamma}))\boldsymbol{\Omega}.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

В случае свободного движения ( $\mathbf{K} = 0$ ) к интегралам (2.21) добавляется интеграл энергии, который после подстановки в (2.15) уравнений связи (2.3),

(2.4) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{2}(m + m_0)R_0^2(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\gamma})^2 + \frac{1}{2}I_0\boldsymbol{\Omega}^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) + mR_0(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_m) + \\ & + (\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}, \mathbf{J}_{sn}\boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}, \mathbf{J}_{ss}(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega})) + mg(\mathbf{r}_m, \boldsymbol{\gamma}). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Таким образом, даже для свободного движения фазовый поток в девяти-мерном пространстве  $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\gamma})$  расслаивается на шестимерные уровни интегралов (2.21), (2.23), и в общем случае, по видимому, является неинтегрируемым. Поэтому интересным представляется поиск интегрируемых случаев системы (2.19), (2.20) и её частных решений. Отметим, что в общем случае свободное движение, описываемое неголономной системой (2.19), (2.20), может иметь достаточно сложный характер, и включать как элементы гамильтонового, так и диссипативного поведения. В частности, в системе могут наблюдаться как простые, так и сложные притягивающие (отталкивающие) множества, включая странные аттракторы различных типов. Подобное поведение для более простых систем с неголономными связями было указано в работах [68, 80–86].

ЗАМЕЧАНИЕ. Уравнение движения для вектора  $\mathbf{M}$  не зависит от управляющих воздействий и имеет вид

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} - mg(\mathbf{r}_m \times \boldsymbol{\gamma}). \quad (2.24)$$

Выразив  $\boldsymbol{\Omega}$  в зависимости от  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\mathbf{M}$  из уравнения (2.22) и подставив в уравнения движения можно получить замкнутую систему в переменных  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$ . Однако, получающееся уравнение для  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  слишком громоздко, поэтому мы не будем его здесь приводить. Отметим также, что в случае отсутствия силы тяжести вектор  $\mathbf{M}$  сохраняется в абсолютном пространстве, и по-видимому является обобщением сохраняющегося вектора кинетического момента относительно точки контакта в более простых задачах о качении сферических тел по плоскости [42–45].

### 2.3. Частные решения

Найдем далее неподвижные точки системы (2.19), (2.20), являющиеся её наиболее простыми частными решениями. Прежде чем, искать неподвижные

точки системы докажем простое утверждение о характере движения сфероробота в абсолютном пространстве, соответствующего неподвижным точкам приведенной системы.

**Утверждение.** Пусть  $\omega_0, \Omega_0, \gamma_0$  неподвижная точка приведённой системы (2.19, 2.20), тогда в абсолютном пространстве ей соответствует движение по траектории с постоянным радиусом кривизны

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{v_0^2 \omega_0^2 - (\omega_0, v_0)^2}}{v_0^2}, \quad (2.25)$$

где

$$v_0 = R_0 \Omega_0 \times \gamma_0. \quad (2.26)$$

**Доказательство.** Отметим сначала, что из условия непроскальзывания (2.3) следует, что при постоянстве векторов  $\Omega, \gamma$  скорость сфероробота (2.26) в проекциях на оси подвижной системы координат является постоянной.

Выразим скорость сфероробота  $V$  в проекциях на оси неподвижной системы координат  $OXYZ$  и её производную через проекции на оси подвижной системы координат  $V = Q^T v$ ,  $\dot{V} = Q^T(\dot{v} + \omega \times v)$ . Подставив полученные соотношения в выражение для вычисления радиуса кривизны (первое равенство выражения (1.23)) с учётом (2.26), получим выражение (2.25) для радиуса кривизны траектории.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Аналогичное утверждение справедливо для произвольных систем описывающих качение сферических тел по плоскости. Изменится лишь зависимость скорости  $v_0$  от переменных приведённой системы. В частности, для систем без внутренних механизмов типа шара со смещённым центром масс угловые скорости  $\omega$  и  $\Omega$  совпадают, следовательно  $v = -R_0 \dot{\gamma}$ , то есть шар стоит на месте (возможно вращаясь вокруг вертикали).

### 2.3.1. Неподвижные точки приведённой системы

Найдем неподвижные точки приведённой системы (2.19), (2.20) для свободного движения, которые соответствуют стационарным движениям сферо-

робота в абсолютном пространстве. Подставив  $\dot{\Omega} = 0, \dot{\omega} = 0, \mathbf{K} = 0$  в уравнения (2.20) получим систему алгебраических уравнений для определения данных неподвижных точек

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{I}\omega + \mathbf{J}_{\text{ns}}(\Omega - \omega) + mR_0(\mathbf{r}_m, \gamma)\Omega) \times \omega - \\
& (mR_0(\gamma, \omega)\Omega - mg\gamma) \times \mathbf{r}_m = 0 \\
& ((m + m_0)R_0^2\gamma \times (\Omega \times \omega) + mR_0\omega \times (\omega \times \mathbf{r}_m)) \times \gamma - I_0\omega \times \Omega = 0 \\
& \gamma \times \omega = 0
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Система (2.27) имеет следующие решения.

1. Два трёхпараметрических семейства неподвижных точек.

$$\omega = 0, \Omega = \Omega_0, \gamma = \pm \frac{\mathbf{r}_m}{|\mathbf{r}_m|}. \tag{2.28}$$

Данному решению соответствуют такие движения сфероробота, при которых центр масс платформы располагается в наинизшей (наивысшей) возможной точке, её ориентация не изменяется со временем, сферическая оболочка вращается с постоянной угловой скоростью  $\Omega_0$ , а центр сфероробота либо остаётся на месте (при  $\Omega_0 \parallel \gamma$ ), либо движется прямолинейно (при  $\Omega_0 \nparallel \gamma$ ). Отметим, что так как неголономная связь (2.4) является неудерживающей, то решение со знаком "+" нереализуемо на практике.

2. Двухпараметрическое семейство неподвижных точек, задаваемое соотношениями

$$\begin{aligned}
\omega &= \omega\gamma, \Omega = \omega C_1\gamma - \omega \frac{mR_0}{J_0}\mathbf{r}_m, \\
\gamma &= -\frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} + \mathbf{r}_m \times (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{r}_m \times \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b})}{1 - (\mathbf{r}_m, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{r}_m)},
\end{aligned} \tag{2.29}$$

где

$$\mathbf{A} = \frac{J_0}{m^2 R_0^2} (\mathbf{I} + (C_1 - 1)\mathbf{J}_{\text{ns}} - C_2), \mathbf{b} = \frac{J_0}{m^2 R_0^2} \left( mR_0 C_1 - \frac{mg}{\omega^2} - \frac{R_0}{J_0} \mathbf{J}_{\text{ns}} \right) \mathbf{r}_m,$$

$J_0 = I_0 + (m + m_0)R_0^2$ , а  $C_1, C_2$  и  $\omega$  являются параметрами семейства, два из которых можно считать независимыми, а третий вычисляется из условия  $\gamma^2 = 1$ . Данные параметры можно выразить через значения интегралов движения  $M_\gamma, \mathcal{E}$ , подставив (2.29) в соответствующие уравнения. Дальнейшее изучение неподвижных точек может быть направлено на исследование разрешимости получающейся системы уравнений и определения областей существования решений (2.28), (2.29) в пространстве первых интегралов. Данный вопрос достаточно сложный, требует отдельного рассмотрения и выходит за рамки настоящего исследования. Отметим, что в абсолютной системе координат решения (2.29) соответствуют качению сфероробота по окружности радиуса

$$\rho = \frac{mR_0}{J_0} \sqrt{r_m^2 - (\mathbf{r}_m, \boldsymbol{\gamma})^2}, \quad (2.30)$$

где  $\boldsymbol{\gamma}$  выражается из второго уравнения (2.29).

### 2.3.2. Устойчивость движения по прямой

Рассмотрим вопрос об устойчивости частного решения (2.28). Для этого линеаризуем систему (2.19), (2.20) вблизи данного решения и получим систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами вида

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{B}\mathbf{z}, \quad (2.31)$$

где  $\mathbf{z} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \Omega_1 - \Omega_{01}, \Omega_2 - \Omega_{02}, \Omega_3 - \Omega_{03}, \gamma_1 - \gamma_{01}, \gamma_2 - \gamma_{02}, \gamma_3 - \gamma_{03})$  - отклонение от рассматриваемого решения, постоянные матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  имеют блочнодиагональный вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} + \mathbf{J}_{\text{ss}} - \mathbf{J}_{\text{ns}} - \mathbf{J}_{\text{sn}} & \mathbf{J}_{\text{ns}} - \mathbf{J}_{\text{ss}} + mR_0((\boldsymbol{\gamma}_0, \mathbf{r}_m) - \boldsymbol{\gamma}_0 \otimes \mathbf{r}_m) & 0 \\ \mathbf{J}_{\text{sn}} - \mathbf{J}_{\text{ss}} + mR_0((\mathbf{r}_m, \boldsymbol{\gamma}_0) - \mathbf{r}_m \otimes \boldsymbol{\gamma}_0) & I_0 + \mathbf{J}_{\text{ss}} + (m + m_0)R_0^2(\boldsymbol{\gamma}_0^2 - \boldsymbol{\gamma}_0 \otimes \boldsymbol{\gamma}_0) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{E} \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \widehat{\Omega} - mR_0|\mathbf{r}_m|(\widetilde{\Omega}_0(\gamma_0 \otimes \gamma_0) + (\Omega_0, \gamma_0)\widetilde{\gamma}_0 & 0 & mg|\mathbf{r}_m|\widetilde{\gamma}_0 \\ -\mathbf{I}\widetilde{\Omega}_0 - (m + m_0)R_0^2(\widetilde{\Omega}_0(\gamma_0 \otimes \gamma_0) + (\Omega_0, \gamma_0)\widetilde{\gamma}_0 & 0 & 0 \\ & -\widetilde{\gamma}_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

где  $\mathbf{E}$  - единичная матрица  $3 \times 3$ , матрицы  $\widetilde{\gamma}_0$ ,  $\widetilde{\Omega}_0$  и  $\widehat{\Omega}$  определены следующим образом

$$\widetilde{\gamma}_{0ij} = \varepsilon_{ijk}\gamma_{0k}, \quad \widetilde{\Omega}_{0ij} = \varepsilon_{ijk}\Omega_{0k}, \quad \widehat{\Omega}_{ij} = \varepsilon_{ijk}(\mathbf{J}_{\text{ns}}\Omega_0)_k,$$

а  $\varepsilon_{ijk}$  - символ Леви-Чивиты.

Для решения вопроса об устойчивости рассматриваемого решения необходимо найти корни характеристического уравнения системы (2.31)

$$\det(\mu\mathbf{A} - \mathbf{B}) = 0. \quad (2.34)$$

В общем случае уравнение (2.34) имеет сложный вид, поэтому здесь (и далее при проведении численных расчетов) мы ограничимся исследованием устойчивости при заданных параметрах системы, соответствующих экспериментальному образцу сфероробота, рассмотренному в главе 1:

$$R_0 = 0.15, \quad R_w = 0.07, \quad \mathbf{r}_m = (0, 0, 0.08), \quad m_0 = 0.8,$$

$$I_0 = 0.012, \quad m = 2.5, \quad \mathbf{I} = \text{diag}(0.016, 0.016, 0.023),$$

$$\mathbf{J}_{\text{ns}} = \mathbf{J}_{\text{sn}}^T = \begin{pmatrix} 0.0001767857 & -0.0002500127 & 0 \\ 0.0002500127 & 0.0001767857 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0003535714 \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

$$\mathbf{J}_{\text{ss}} = \begin{pmatrix} 0.001136479 & 4.3 \cdot 10^{-13} & 0 \\ 4.3 \cdot 10^{-13} & 0.001136479 & -1.414213562 \cdot 10^{-13} \\ 0 & -1.414213562 \cdot 10^{-13} & 0.000757653 \end{pmatrix}.$$

Кроме того ограничимся рассмотрением случая, когда отсутствует прокручивание сферической оболочки в точке контакта с плоскостью, то есть будем

полагать  $(\Omega, \gamma) = 0$ . В этом случае семейство решений (2.28) можно параметризовать следующим образом

$$\omega_0 = (0, 0, 0), \quad \Omega_0 = (-\Omega_0 \sin(\delta), \Omega_0 \cos(\delta), 0), \quad \gamma_0 = (0, 0, 1). \quad (2.36)$$

Здесь  $\Omega_0 = \frac{v}{R_0}$  - задаёт угловую скорость вращения сферической оболочки при качении сфероробота по прямой со скоростью  $v$ , а угол  $\delta$  (как и выше) задаёт направление движения относительно оси  $OX$ .

После подстановки значений параметров в уравнение (2.34) с учётом выбранной параметризации (2.36) получим характеристическое уравнение вида

$$\mu^5 \cdot (\mu^2 + 204.2205)(\mu^2 + 0.00829 \cdot \Omega_0^2 + 204.2205) = 0 \quad (2.37)$$

Как видно из (2.37), собственные числа характеристического уравнения не зависят от угла  $\delta$ , т.е. от направления движения. Кроме того, они не имеют положительной вещественной части вне зависимости от величины  $\Omega_0$ . Это позволяет говорить об отсутствии экспоненциальной неустойчивости данного решения. Наличие нулевых собственных чисел говорит о том, что для решения вопроса об устойчивости в полной нелинейной постановке необходимо провести разложение системы (2.19) до более высоких порядков.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Отметим, что для рассматриваемой конструкции сфероробота решение (2.29) вырождается и представляет собой вращение сфероробота на месте, когда сферическая оболочка и внутренняя подвижная платформа вращаются вокруг вертикали с постоянными, но разными, угловыми скоростями  $\Omega_0$  и  $\omega_0$ . В связи с этим исследование устойчивости данных решений не представляет практического интереса.

## 2.4. Управление вдоль заданной траектории

Рассмотрим теперь задачу управления рассматриваемой системой в следующей постановке:

*Необходимо определить управляющее воздействие  $K(t)$ , реализующее движение по заданной траектории  $x(t), y(t)$  при  $t \in [0, T]$ , с заранее задан-*

ной зависимостью от времени проекций угловой скорости сферической оболочки на вертикаль  $\Omega_\gamma(t)$ , при известных начальных ориентации  $\alpha(0)$ ,  $\beta(0)$ ,  $\gamma(0)$ , и угловой скорости платформы  $\omega(0)$ .

Разобьём решение данной задачи на несколько этапов.

1. Представим угловую скорость  $\Omega$  в следующем виде

$$\Omega = \Omega_\alpha(t)\alpha + \Omega_\beta(t)\beta + \Omega_\gamma(t)\gamma, \quad (2.38)$$

где  $\Omega_\gamma(t)$  известная функция времени, а  $\Omega_\alpha(t)$ ,  $\Omega_\beta(t)$  выражаются с помощью уравнения связи (2.3) и первого из кинематических уравнений (2.2) следующим образом

$$\Omega_\alpha(t) = \frac{\dot{y}(t)}{R_0} \quad \Omega_\beta(t) = \frac{\dot{x}(t)}{R_0}, \quad (2.39)$$

тогда

$$\dot{\Omega} = \dot{\Omega}_\alpha(t)\alpha + \Omega_\alpha(t)\dot{\alpha} + \dot{\Omega}_\beta(t)\beta + \Omega_\beta(t)\dot{\beta} + \dot{\Omega}_\gamma(t)\gamma + \Omega_\gamma(t)\dot{\gamma}. \quad (2.40)$$

2. Исключим управляющие моменты  $K(t)$  из уравнений (2.19) (сложив первое и второе уравнения системы). В результате вместе со вторым кинематическим уравнением (2.2) получим замкнутую неавтономную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} & (\mathbf{I} - J_{ns} + mR_0((\mathbf{r}_m, \gamma) - \mathbf{r}_m \otimes \gamma))\dot{\omega} + \\ & + (J_{ns} + I_0 + (m + m_0)R_0^2(\gamma^2 - \gamma \otimes \gamma) + mR_0((\gamma, \mathbf{r}_m) - \gamma \otimes \mathbf{r}_m))\dot{\Omega} = \\ & - \omega \times (\mathbf{I}\omega + I_0\Omega + J_{ns}(\Omega - \omega)) - mR_0(\mathbf{r}_m \times (\gamma \times (\Omega \times \omega))) - mg(\mathbf{r}_m \times \gamma) - \\ & - (m + m_0)R_0^2(\gamma \times (\gamma \times (\Omega \times \omega))) - mR_0(\gamma \times (\omega(\omega, \mathbf{r}_m) - \mathbf{r}_m)) \\ & \dot{\alpha} = \alpha \times \omega, \quad \dot{\beta} = \beta \times \omega, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Подставив в получившиеся уравнения  $\Omega$  и  $\dot{\Omega}$  в форме (2.38), (2.40) и численно проинтегрировав данную систему с заданными начальными условиями  $\alpha(0)$ ,  $\beta(0)$ ,  $\gamma(0)$  и  $\omega(0)$  получим явную зависимость векторов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\omega$  от времени.

3. Подставив получившиеся решения  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$ ,  $\gamma(t)$ ,  $\omega(t)$  в одно из уравнений (2.19) найдем зависимость управляющих моментов от времени  $K(t)$ .

Данный алгоритм вычисления управляющих воздействий для движения по траектории только гипотетически может применяться на практике, так как в условиях реального времени и реализации скоростных движений процесс численного интегрирования занимает достаточно длительное время, что является критичным в задачах управления. Более того полученная система (2.41), по-видимому, является неинтегрируемой, следовательно существует вероятность получения хаотического решения, что требует проведения отдельного анализа.

Рассмотрим пример определения управляющих моментов для движения сфероробота по отрезку  $[0, 1]$  без вращения сферической оболочки вокруг вертикали

$$x(t) = 0, \quad y(t) = -\frac{\sin(2\pi t)}{20\pi} + \frac{t}{10}, \quad \Omega_\gamma = 0. \quad (2.42)$$

Графически данная траектория, а также ненулевая компонента угловой скорости сферической оболочки приведены на рисунке 8. Начальные условия, определяющие положение внутренней подвижной платформы задаются векторами

$$\alpha_0 = (1, 0, 0), \quad \beta_0 = (0, 1, 0), \quad \gamma_0 = (0, 0, 1), \quad \omega_0 = (0, 0, 0). \quad (2.43)$$

Результаты численного решения системы (2.41) для вектора  $\gamma$  и угловой скорости подвижной платформы  $\omega$  приведены на рисунках 9а и 9б. Соответствующие зависимости от времени управляющих моментов, необходимых для реализации траектории (2.42) приведены на рисунке 9с.

Выполним проверку полученных численных решений управляющих моментов, приведённых на рисунке 9с. Для этого подставим полученные решения  $K_i(t)$  в полную систему дифференциальных уравнений (2.19), (2.20).

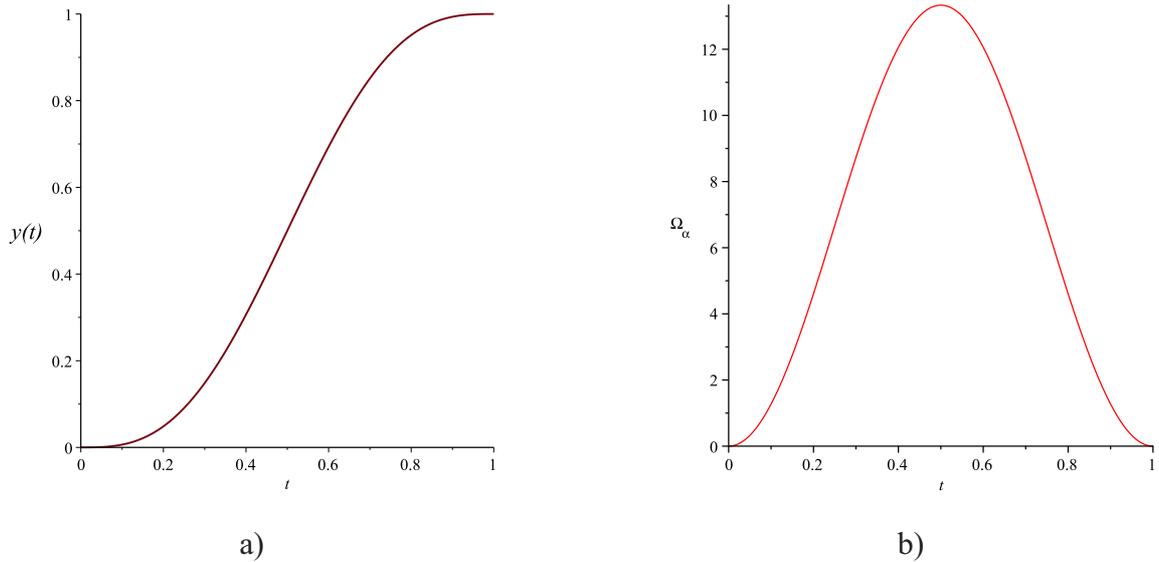


Рис. 8. Траектория движения сфероробота

Численное решение полученной системы относительно переменных состояния системы  $\alpha, \beta, \gamma, \omega, \Omega, x, y$  графически представлено на рисунках 10.

Как видно из представленных графиков в конечной точке угловая скорость подвижной платформы  $\omega$ , а также компоненты вектора  $\gamma_1, \gamma_2$  не равны нулю. Следовательно, после того как сфероробот проедет по прямой в соответствии с управлениями, изображенными на рисунке 9с, он не остановится, а продолжит свободное движение (в общем случае хаотическое). При этом начальными условиями для этого движения будут являться положение и скорости платформы и сферической оболочки в момент отключения управления. Исключение подобных эффектов возможно тремя способами.

1. После остановки продолжать управлять системой, чтобы «заставить» сферическую оболочку оставаться на месте, при этом в неподвижной оболочке омниколесная платформа будет продолжать двигаться. В этом случае необходимо решать систему (2.41) при условии  $\Omega(t) = \dot{\Omega}(t) = 0$  в промежутке времени  $t > T$  и находить соответствующее управление  $\mathbf{K}(t), t > T$ . Однако, данное решение, скорее всего, будет расходиться, а его поиск и ана-

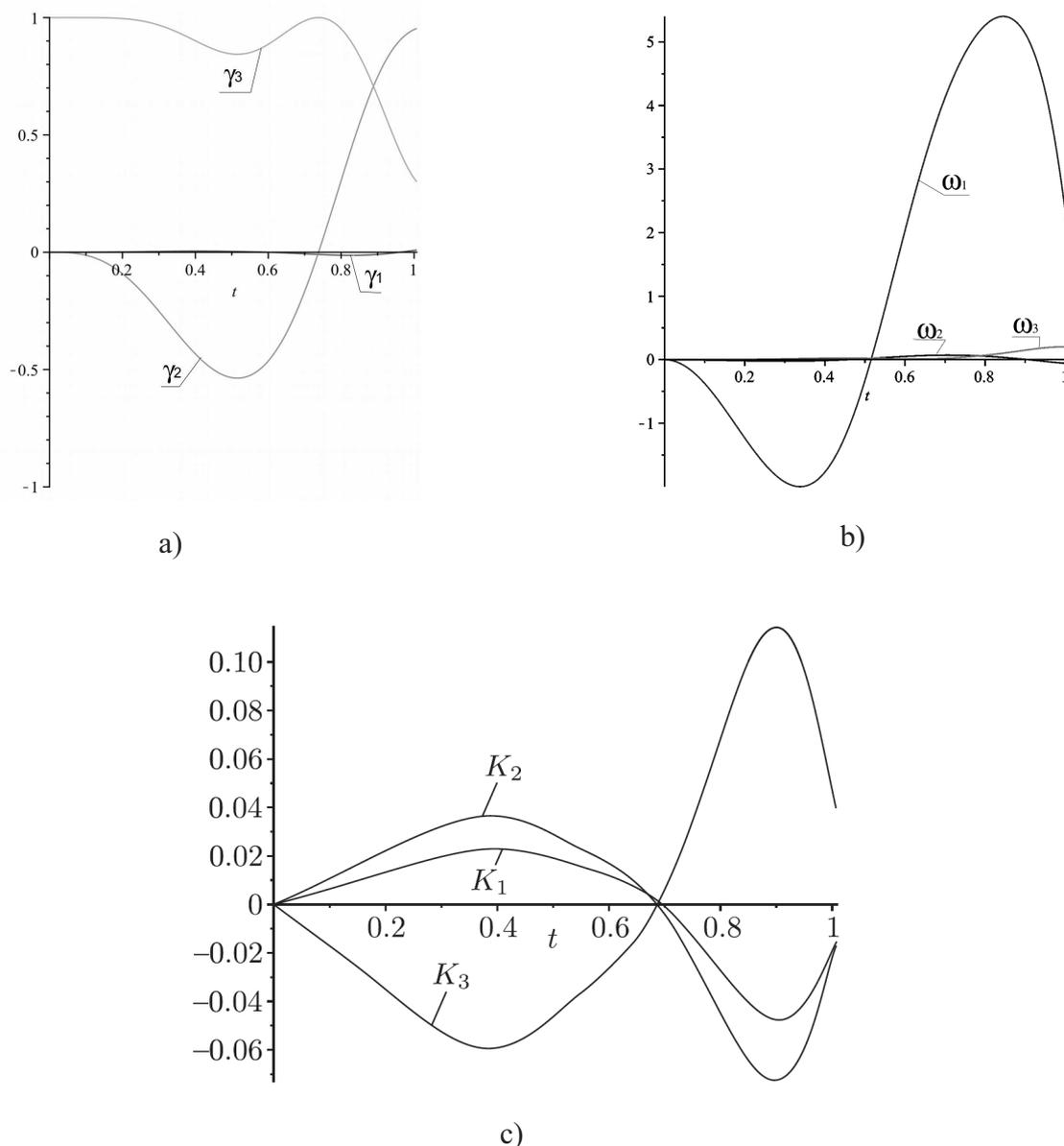


Рис. 9. Зависимости а)  $\gamma(t)$ , б)  $\omega(t)$  и в)  $K(t)$  при движении сфероробота по траектории (2.42).

лиз требуют проведения отдельного исследования, и не являются предметом рассмотрения данной работы.

2. Подобрать такую зависимость  $\Omega_\gamma(t)$  или скорость прохождения по заданной траектории, чтобы в конечный момент времени  $t = T$  омниколесная платформа приобрела положение и скорость принадлежащие какому либо стационарному решению свободной системы. В этом случае после отключения управления сфероробот будет двигаться по данному стационарному решению (в частном случае стоять). Данный способ подразумевает решение некото-

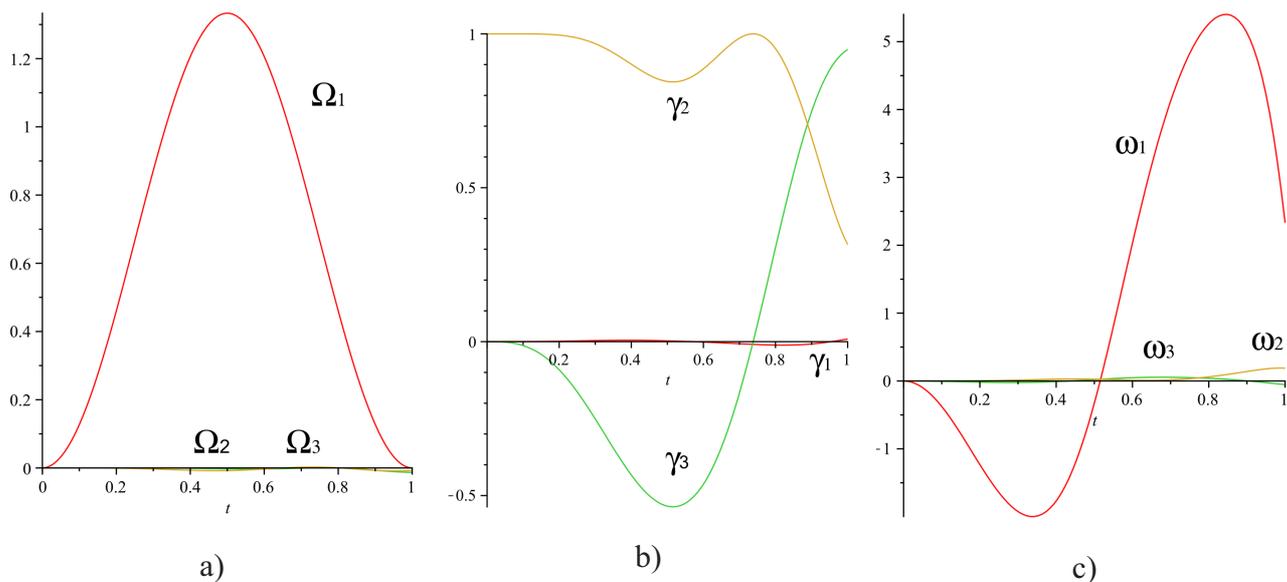


Рис. 10. Результаты проверки численных расчётов: а) угловая скорость сферической оболочки, б) компоненты вектора  $\gamma$ , в) угловая скорость подвижной платформы.

рой вариационной задачи относительно скорости прохождения по траектории и/или зависимости  $\Omega_\gamma(t)$  и является достаточно трудоемким.

Третий способ связан с управлением при помощи гейтов и более подробно представлен в следующем разделе.

## 2.5. Управление при помощи гейтов

Данный способ заключается в вычислении управляющих воздействий, при которых сфероробот в начальный и конечный момент времени заведомо движется по какому либо стационарному решению (в частном случае стоит). Однако, в этом случае траектория движения сфероробота заранее не определена. При этом задача управления сводится к подбору маневра, при котором получающаяся траектория движения сфероробота удовлетворяет необходимым требованиям. Пример такого управления для сфероробота с маятником Лагранжа внутри приведен в [49]. Рассмотрим аналогичный алгоритм поиска подходящего маневра, связывающего два движения по прямой (2.28).

Движения по прямой, соответствующие неподвижным точкам (2.28) можно параметризовать четырьмя величинами:  $v$  - скоростью движения по пря-

мой,  $\delta$  - углом наклона прямой относительно оси  $OX$ ,  $\Omega_\gamma$  - угловой скоростью «прокручивания» оболочки в точке контакта с плоскостью, и  $\psi$  - постоянным углом прецессии, определяющим ориентацию омниколесной платформы во время движения. Отметим, что два других угла Эйлера  $\theta, \varphi$  при движении по прямой также постоянны и задаются вектором  $\gamma \parallel \mathbf{r}_m$ . Данные параметры связаны с векторами  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $\Omega$  следующим образом

$$\Omega = \Omega_\gamma \gamma + \frac{v}{R_0} (\cos \delta \beta - \sin \delta \alpha), \operatorname{tg} \psi = -\frac{\beta_3}{\alpha_3}. \quad (2.44)$$

Нетрудно показать, что справедливо следующее

**Утверждение.** Пусть при  $t < 0$  сфероробот движется по прямой с параметрами  $v_0, \delta_0, \Omega_{\gamma_0}, \psi_0$ . Кроме того, при совершении маневра вектор  $\gamma$  и величина  $\omega_\gamma$  являются заданными функциями времени

$$\gamma = \gamma(t), \omega_\gamma = \omega_\gamma(t), t \in [0, T]$$

такими, что

$$\gamma(0) = \gamma(T) = \frac{\mathbf{r}_m}{|\mathbf{r}_m|}, \dot{\gamma}(0) = \dot{\gamma}(T) = 0, \omega_\gamma(0) = \omega_\gamma(T) = 0.$$

Тогда после совершения маневра (при  $t > T$ ) сфероробот будет также двигаться по прямой с параметрами  $v_f, \delta_f, \Omega_{\gamma_f}, \psi_f$ , которые связаны с векторами  $\alpha(T), \beta(T), \Omega(T)$  соотношениями аналогичными (2.44). При этом зависимости  $\alpha(t), \beta(t), \Omega(t)$  от времени находятся из решения первых трёх уравнений системы (2.41) в которых вектор  $\omega$  является известной функцией времени и выражается через  $\gamma(t)$  и  $\omega_\gamma(t)$  следующим образом

$$\omega(t) = \gamma(t)\omega_\gamma(t) + \dot{\gamma}(t) \times \gamma(t).$$

Управления, реализующие данный маневр можно получить подставив  $\omega(t), \Omega(t)$ , и  $\gamma(t)$  в одно из уравнений (2.19), а явный вид траектории сфероробота, соединяющей два движения по прямой можно получить проинтегрировав первое из кинематических уравнений (2.2).

В качестве примера рассмотрим управления сферороботом, реализующие разгон из состояния покоя и поворот во время движения по прямой. Вектор  $\gamma$ , задающий маневр (гейт), представим в виде

$$\gamma(t) = (\sin \theta(t) \cos \varphi(t), \sin \theta(t) \sin \varphi(t) \cos \theta(t)), \quad (2.45)$$

где углы Эйлера  $\varphi(t), \theta(t)$  определяют ориентацию подвижной платформы во время маневра. Зависимости  $\varphi(t), \theta(t), \omega_\gamma(t)$  для обоих маневров выберем в виде

$$\theta(t) = \theta_{max} \sin^2(\pi t), \quad \varphi(t) = \varphi_0 = 0, \quad \omega_\gamma(t) = 0, \quad t \in [0, 1], \quad (2.46)$$

где  $\theta_{max}$  при численных расчётах будем принимать равным  $\theta_{max} = 0.2$ . Отличие указанных двух маневров заключается только в разных начальных условиях. Разгону из состояния покоя соответствуют начальные условия

$$\Omega_0 = 0, \quad \alpha_0 = (1, 0, 0), \quad \beta_0 = (0, 1, 0), \quad (2.47)$$

а повороту при начальном движении по прямой соответствуют начальные условия

$$\Omega_0 = (-1, 0, 0), \quad \alpha_0 = (1, 0, 0), \quad \beta_0 = (0, 1, 0). \quad (2.48)$$

Результаты численного решения системы уравнений (2.41) для маневра (2.46) с начальными условиями (2.47) и (2.48) изображены на рисунках 11 и 12 соответственно.

Как видно из рисунка 11, в силу отсутствия осевой симметрии конструкции омниколесной платформы, изменение  $\gamma(t)$  в вертикальной плоскости на сфере Пуассона ( $\varphi = const$ ) приводит к криволинейному движению сфероробота, хотя и довольно близкому к прямой. Это отличает данную систему от сфероробота с маятником Лагранжа, где подобные управления приводят к чисто прямолинейному движению.

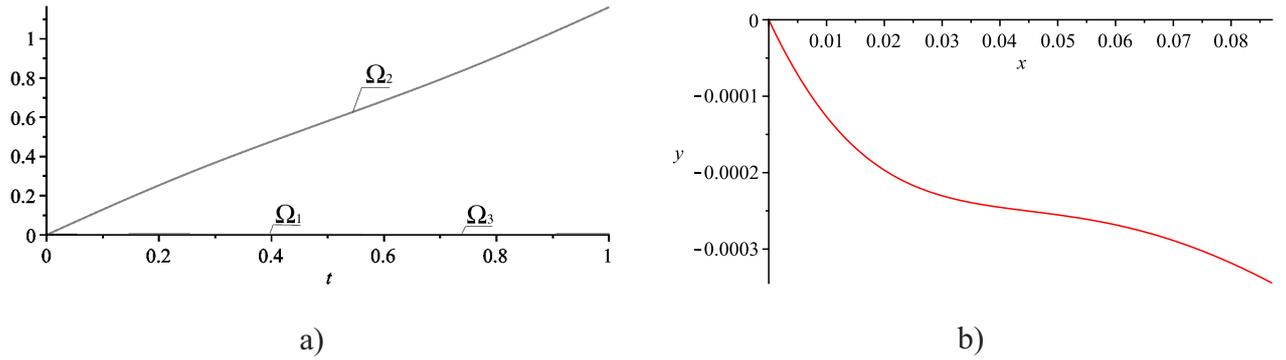


Рис. 11. Угловая скорость  $\Omega(t)$  (а) и траектория движения  $y(x)$  (б) сфероробота при разгоне в соответствии с начальными условиями(2.47).

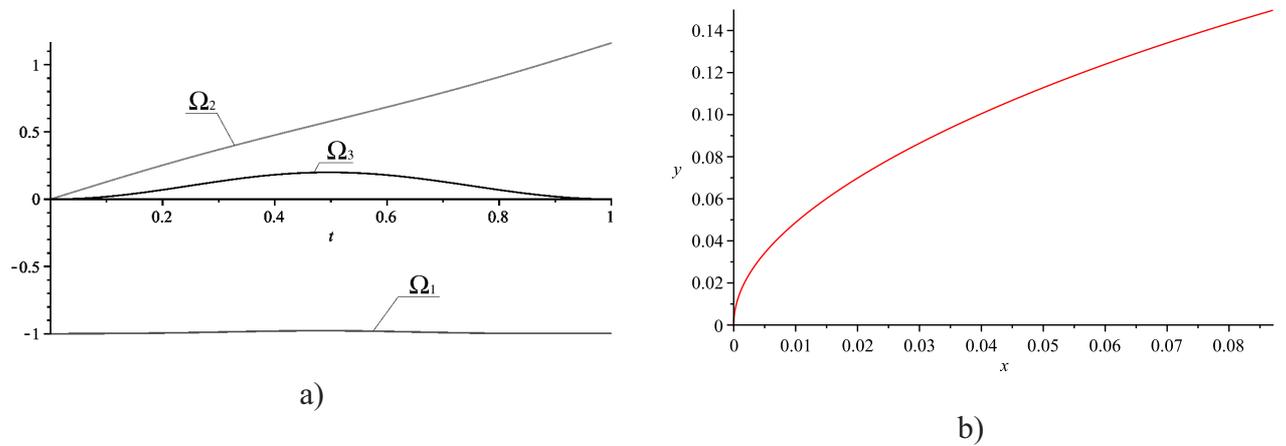


Рис. 12. Угловая скорость  $\Omega(t)$  (а) и траектория движения  $y(x)$  (б) сфероробота при повороте в соответствии с начальными условиями (2.48).

Используя приведенную выше процедуру можно получить (численную) зависимость параметров финального движения от параметров начального движения и маневра

$$\mathbf{p}_f = \mathbf{f}(\mathbf{p}_0, \theta_{max}, \varphi_0), \quad (2.49)$$

где введено обозначение  $\mathbf{p} = (v, \delta, \Omega_\gamma, \psi)$ . Обратив любые два уравнения системы (2.49) (например для  $v$  и  $\delta$ ) можно получить (численную) зависимость  $\theta_{max}$  и  $\varphi_0$  от параметров начального и конечного движений

$$(\theta_{max}, \varphi_0) = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{p}_0, v_f, \delta_f). \quad (2.50)$$

Данная зависимость включает только два параметра конечного движения, оставшиеся два параметра  $(\Omega_{\gamma_f}, \psi_f)$ , при этом, находятся из уравнений (2.49). Отметим, что выбранная пара уравнений (2.49) не всегда разрешима отно-

сительно  $\theta_{max}$  и  $\varphi_0$ . Условия их разрешимости определяют ограничения на возможные маневры, совершаемые с помощью зависимости (2.46).

Используя численную зависимость (2.50) можно определить параметры маневра  $\theta_{max}$  и  $\varphi_0$ , которые позволят повернуть на заданный угол с ускорением (замедлением) до заданной скорости. При этом параметры конечного движения  $(\Omega_{\gamma_f}, \psi_f)$  не контролируются. То есть, после маневра омниколесная платформа будет двигаться с другой ориентацией (по сравнению с начальной), а оболочка может приобрести некоторую закрутку вокруг вертикали.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для полностью контролируемого маневра необходимо рассмотреть четырехпараметрическую зависимость  $\gamma(t), \omega_\gamma(t)$  от времени, и потребовать разрешимости уравнений (2.49) относительно вводимых параметров.

## ГЛАВА 3

# Экспериментальные исследования движения сфероробота с внутренней омниколесной платформой

В данной главе представлены результаты экспериментальных исследований движения сфероробота по типовым траекториям при управлении на основе кинематической модели. Приводится описание экспериментальной установки и методики проведения экспериментов.

### 3.1. Описание экспериментальной установки

Для проведения проверки теоретических моделей управления проведены экспериментальные исследования движения сферороботом с внутренней омниколесной платформой. Задачей данных исследований являлось определение отклонения реальной траектории движения сфероробота от заданной траектории, по которой рассчитывались управляющие воздействия. Для решения поставленной задачи необходимо в процессе движения определять координаты центра сферического робота и ориентацию внутренней подвижной платформы, что достигалось использованием системы захвата движения (СЗД) (Motion Capture), разработанной фирмой Vicon, и установленной в лаборатории «Мобильные системы» ИжГТУ имени М.Т. Калашникова. Система захвата движения представляет собой семь специализированных видеокамер, объединённых в высокоскоростную сеть и расположенных по периметру площадки, по

которой перемещается сферический робот. Эффективная рабочая зона системы составляет в длину - 3м., в ширину - 2м. Каждая камера оснащена источником инфракрасного излучения, которое отражается от пассивных световозвращающих маркеров, устанавливаемых на исследуемых объектах. Точность определения координат маркеров  $\pm 1$  мм. Необходимость использования инфракрасного излучения вызвана размещением пассивных маркеров внутри прозрачной сферической оболочки, что обуславливает сильную зависимость от внешнего освещения и наличия бликов от прозрачной сферической поверхности. Благодаря размещению маркеров непосредственно на внутренней подвижной омниколесной платформе, возможно определять её ориентацию в процессе движения. Фотография подвижной платформы, с размещёнными на ней маркерами представлена на рисунке 13. Камеры фиксировали положение каждого маркера с частотой 100Гц, после чего на специализированном программном обеспечении осуществлялась обработка и построение траектории движения геометрического центра объекта, ограниченного маркерами.

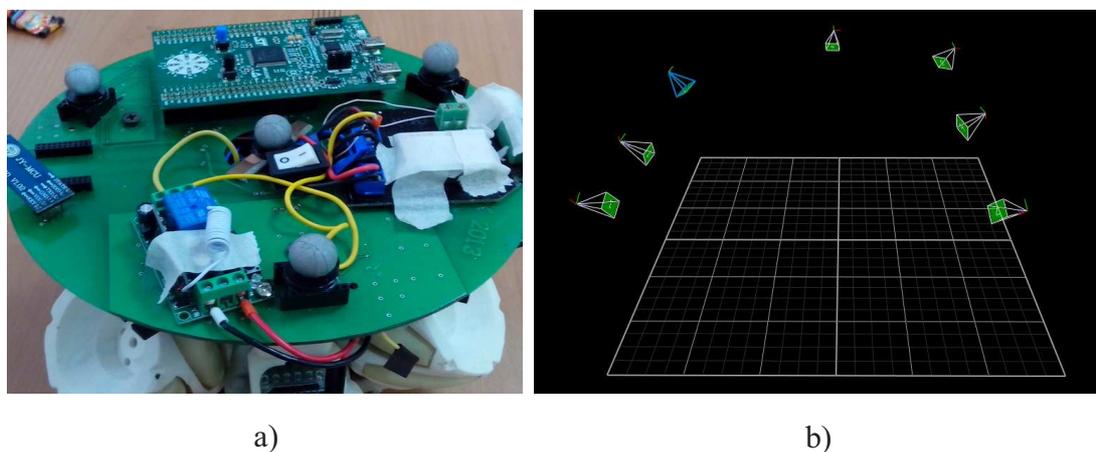


Рис. 13. а) Маркеры размещённые на подвижной платформе б) вид рабочей зоны в трекаре

Как показано в главе 1 траектория движения сфероробота с постоянными управляющими воздействиями в общем случае представляет собой окружность. Поэтому экспериментальные данные, представляющие траекторию движения сфероробота в виде  $x_i, y_i$  аппроксимировались окружностью,

т.е. для каждого набора координат  $x_i, y_i$  проводился расчёт координат центра окружности  $\hat{x}_0, \hat{y}_0$  и её радиуса  $\hat{R}_t$ , обеспечивающие минимальное значение суммы квадратов ошибки (метод наименьших квадратов [87])

$$\sum_{i=1}^n e(x_i, y_i)^2 \rightarrow \min, \quad (3.1)$$

где

$$e(x_i, y_i) = x_i^2 + y_i^2 - 2x_i\hat{x}_0 - 2y_i\hat{y}_0 + \hat{x}_0^2 + \hat{y}_0^2 - \hat{R}_t^2 \quad i = 1 \dots n \quad (3.2)$$

$n$  зависит от времени движения по траектории  $T$ , и при частоте съёмки 100 кадров в секунду определяется как  $n = T \cdot 100$ .

Погрешность аппроксимации определялась стандартным отклонением для набора экспериментальных точек, относящихся к одной окружности

$$S_{Rj} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\sqrt{(x_i - \hat{x}_0)^2 + (y_i - \hat{y}_0)^2} - \hat{R}_{tj})^2}{(n - 1)}}, \quad (3.3)$$

где  $j$  нумерует эксперименты, проведенные при одинаковых условиях.

Для исключения случайных факторов при проведении экспериментальных исследований каждый эксперимент проводился не менее пяти раз в одинаковых условиях. После чего проводилась статистическая обработка экспериментальных данных, которая заключалась в определении средней величины для  $k$  опытов ( $k \geq 5$ )

$$\begin{aligned} \bar{R}_t &= \frac{\sum_{j=1}^k \hat{R}_{tj}}{k}, \quad \bar{x}_0 = \frac{\sum_{j=1}^k \hat{x}_{0j}}{k}, \\ \bar{y}_0 &= \frac{\sum_{j=1}^k \hat{y}_{0j}}{k}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

и среднего стандартного отклонения :

$$S_R = \frac{\sum_{j=1}^k S_{Rj}}{k}, \quad (3.5)$$

Тогда доверительный интервал для вероятности 95%, т.е. коэффициента

Стьюдента  $\bar{t} = 1.8125$ , для измеряемых величин будем записывать в виде

$$R_t = \bar{R}_t \pm \bar{t}S_R, \quad x_0 = \bar{x}_0 \pm \bar{t}S_x, \quad y_0 = \bar{y}_0 \pm \bar{t}S_y. \quad (3.6)$$

### 3.2. Экспериментальные исследования

Экспериментальные исследования проводились для разработанного натурального образца сферического робота с внутренней омниколесной платформой. Изображение трехмерной модели и фото натурального образца приведены на рисунке 14. Геометрические и массо-инерционные характеристики разработанного сфероробота соответствуют параметрам (2.35), с использованием которых выше проводилось численное моделирование. Угол наклона оси вращения омниколеса относительно вертикали  $\sigma = 45^\circ$ , углы на которых расположены оси омниколес в горизонтальной плоскости подвижной платформы (в подвижной системе координат) составляют:  $\phi_1 = 0^\circ$ ,  $\phi_2 = 120^\circ$ ,  $\phi_3 = 240^\circ$ , угол наклона роликов омниколеса  $\xi = 45^\circ$ .

Подставив данные значения параметров в уравнения движения по прямой без учета смещения центра масс (1.12), движения по окружности (в случае постоянства управляющих воздействий) (1.17), движения по прямой с учетом смещения центра масс (1.24), получим зависимости угловых скоростей колес от траектории в виде функции  $\dot{\chi}_i = f(\dot{x}, \dot{y}, \omega_z)$ .

#### 3.2.1. Движение по прямой в зависимости от начальной ориентации подвижной платформы

В данном разделе представлены результаты экспериментальных исследований движения сфероробота по прямой в зависимости от направления движения сфероробота относительно оси  $OY$ , которое задавалось углом  $\delta$  в диапазоне углов  $[0^\circ, 240^\circ]$  в силу симметричности конструкции омниколесной платформы.



а)



б)

Рис. 14. Трехмерная (а) и реальная (б) модель сфероробота с внутренней омниколесной платформой

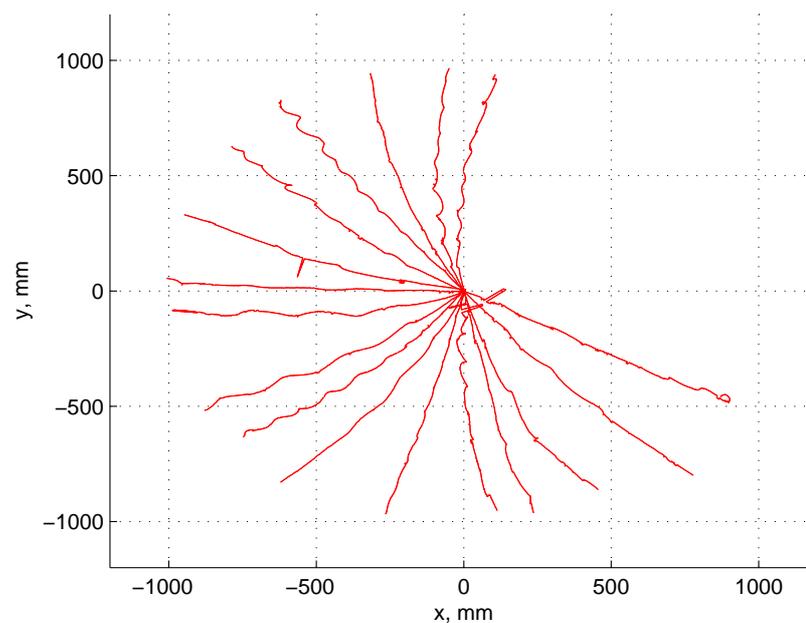


Рис. 15. Траектория движения сфероробота в зависимости от направления движения

На рисунке 15 представлены типовые траектории движения сфероробота по прямой при различных направлениях движения. Для каждого направления рассчитывались управляющие воздействия для движения по прямой со скоростью  $v = 0,2$  м/с в соответствии с выражением (1.12), то есть без учета смещения центра масс. Каждая траектория аппроксимировалась окружностью и в таблице 3.1 сведены значения средних радиусов окружностей, полученных по

Таблица 3.1. Средний радиус кривизны траектории в зависимости от направления движения

|                       |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|-----------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\delta$ , град.      | 0      | 20     | 30     | 40     | 60     | 80     | 90     | 100    | 120    |
| $\overline{R}_t$ , мм | 2596,7 | 1645,3 | 1818,6 | 3514,2 | 2269,2 | 2272,5 | 7024,4 | 1927,3 | 1892,5 |
| $\delta$ , град.      | 140    | 150    | 160    | 180    | 200    | 210    | 220    | 240    |        |
| $\overline{R}_t$ , мм | 2319,7 | 2221,2 | 3160,9 | 1861,7 | 3398,1 | 1849,7 | 3633,8 | 2971,8 |        |

пяти опытам с одинаковыми начальными условиями. Графически полученная зависимость представлена на рисунке 16.

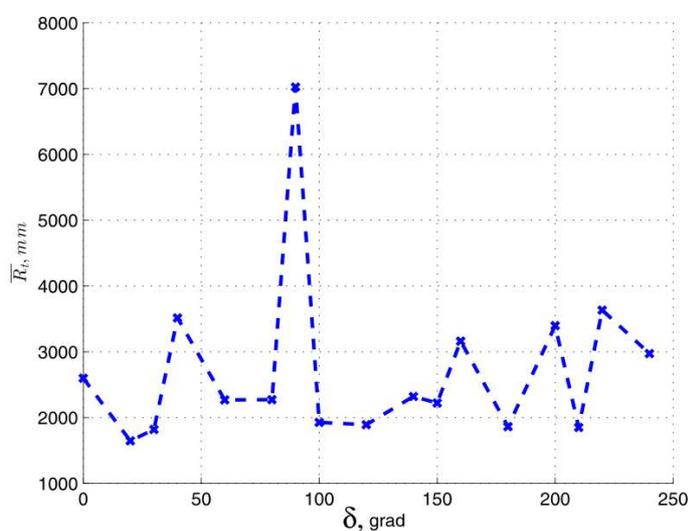


Рис. 16. Зависимость среднего радиуса кривизны траектории от направления движения

Результаты экспериментов показывают существенную зависимость формы траектории от направления движения. По графику на рисунке 16 можно сделать предположение, что центр масс подвижной платформы имеет смещение, совпадающее с направлением движения  $\approx 90^\circ$ . Причём подобные результаты характерны и для других скоростей движения. Движение по направлению совпадающему со смещением центра масс является более равномерным, а траектория имеет меньшее отклонение от расчетной прямой. Данное обстоятельство объясняется несбалансированностью или отклонениями от идеальной симметричности конструкции натурального образца. Это можно компенсировать

ровать разработкой модели управления, учитывающей смещение центра масс или точной балансировкой подвижной платформы.

### 3.2.2. Экспериментальное определение положения центра масс подвижной платформы

Для проведения экспериментов в первую очередь необходимо определить смещение центра масс подвижной платформы. Для этого воспользуемся методом приведённым в главе 1.

В качестве управлений, по которым будем определять направление смещения центра масс выберем управляющие воздействия (1.12), соответствующие движению сфероробота по прямой в различных направлениях, и рассчитанные без учёта смещения центра масс.

Первое управляющее воздействие соответствует движению сфероробота с уравновешенной платформой по прямой под углом  $\delta = 0$  к оси  $OY$  с линейной скоростью  $v = 0.2$  м/с ( $\psi = 0$ ,  $\dot{\mathbf{r}} = (0.2, 0, 0)^T$ ), и согласно выражению (1.12) задаётся постоянными угловыми скоростями омниколес

$$\dot{\chi}_1 = 4.8774, \dot{\chi}_2 = -4.1884, \dot{\chi}_3 = -0.6891. \quad (3.7)$$

Второе управляющее воздействие соответствует движению сфероробота с уравновешенной платформой по прямой под углом наклона  $\delta = 20^\circ$  ( $\psi = 0$ ,  $\mathbf{V} = (0.188, 0.07, 0)^T$ ), и задаётся угловыми скоростями

$$\dot{\chi}_1 = 3.8923, \dot{\chi}_2 = -5.035, \dot{\chi}_3 = 1.1427. \quad (3.8)$$

Траектории движения для управляющих воздействий (3.7), (3.8) представлены на рисунке 17а. Средние значения радиусов окружностей, вычисленные по результатам десяти экспериментов методом наименьших квадратов, составили  $\rho_0 = 3234 \pm 644$ мм и  $\rho_{20} = 2194 \pm 308$ мм. Соответствующие части окружностей изображены на рисунке 17 жирными линиями.

Используя значения угловых скоростей колес (3.7) и (3.8) для определения относительных угловых скоростей согласно выражению (1.4), и решив систему уравнений для соответствующих радиусов окружностей (1.23) относительно углов  $\theta_m$  и  $\varphi_m$ , исключая мнимые корни и значения, при которых центр масс физически располагается вне подвижной платформы, получим:

$$\varphi_m = 1.521 \pm 0.018, \quad \theta_m = 0.0535 \pm 0.0075. \quad (3.9)$$

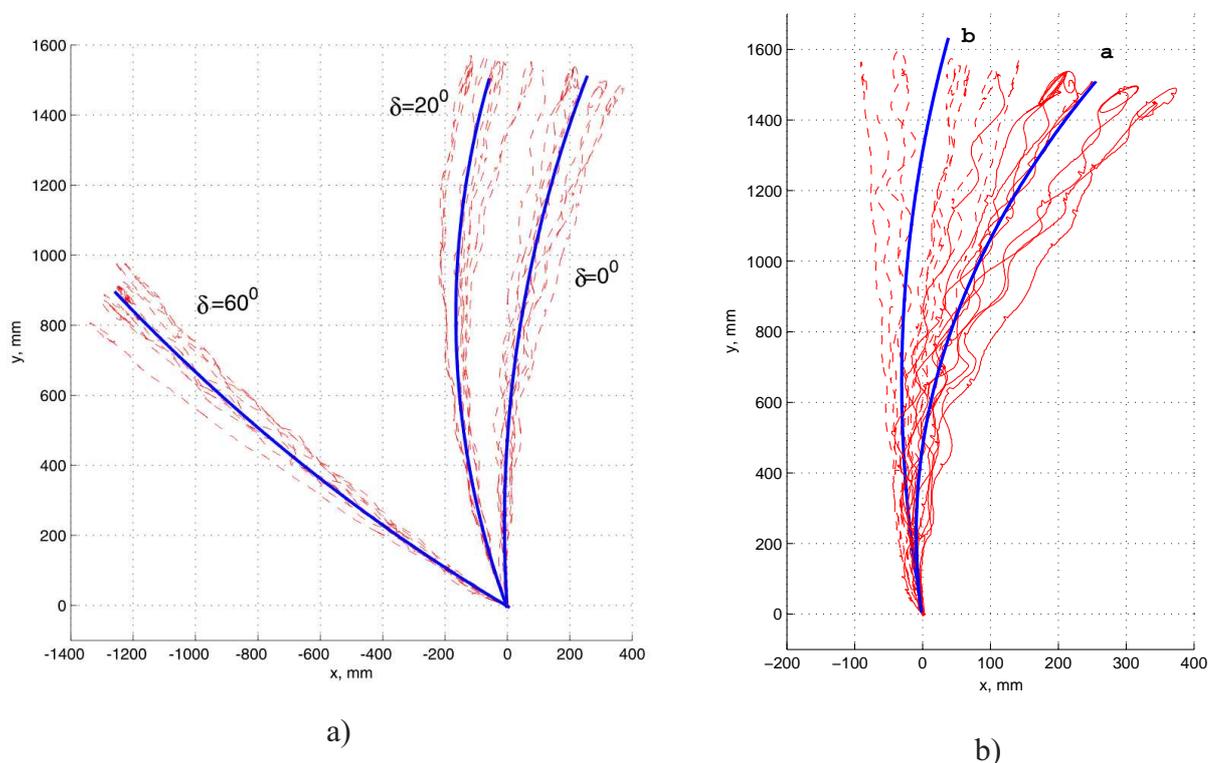


Рис. 17. а) Траектории сфероробота при управляющих воздействиях (3.7), (3.8), (3.10). б) Траектории сфероробота при управлениях, рассчитанных для прямолинейного движения: **а** - без учёта смещения центра масс, **б** - с учётом смещения центра масс

Для проверки полученных значений рассмотрим движение с угловыми скоростями колес

$$\dot{\chi}_1 = 0.6891, \quad \dot{\chi}_2 = -4.8774, \quad \dot{\chi}_3 = 4.1884, \quad (3.10)$$

соответствующими движению сфероробота с уравновешенной платформой под углом  $\delta = 60^\circ$  к оси  $OY$ . Радиус окружности, вычисленный для данного управления с учётом смещения центра масс (3.9) равен  $\rho_{60} = 6152$  мм.

Экспериментально определённое значение данного радиуса составляет  $\rho_{60} = 5779 \pm 844$  мм (см. рисунок 17а). Таким образом, расчётное значение принадлежит доверительному интервалу экспериментально измеренного радиуса окружности, что подтверждает правильность разработанной методики и возможность её использования для определения смещения центра масс подвижной платформы сфероробота.

На рисунке 17б представлены экспериментальные траектории движения сфероробота при управлениях (1.12) и (1.24), рассчитанных для прямолинейного движения в рамках модели без смещения центра масс, и с учётом смещения соответственно. Жирными линиями на рисунке изображены окружности с усреднёнными по результатам десяти экспериментам радиусами для обоих вариантов управления со скоростью  $|V| = 0.2$  м/с и направлением  $\delta = 0$ . Данные радиусы составляют  $\rho_b = 6965 \pm 2105$  мм и  $\rho_a = 3234 \pm 644$  мм. Следует отметить существенность влияния отклонения положения центра масс от его идеального расположения в центре симметрии подвижной платформы. Так, учёт смещения центра масс для разработанной конструкции сфероробота на  $\approx 3$  градуса от вертикальной оси геометрической симметрии платформы приводит к более чем двукратному уменьшению радиуса кривизны траектории. С другой стороны зная положение центра масс подвижной платформы, можно определить более устойчивое направление движения сфероробота, и использовать данное движение как основное, дополняя его, при необходимости, операцией поворота на месте.

### 3.2.3. Исследование движения сфероробота по прямой при различных скоростях

Рассмотрим зависимость кривизны траектории сфероробота от скорости движения, при управляющих воздействиях для движения по прямой в рамках кинематической модели (1.24) с учётом смещения центра масс.

На рисунке 18 представлены три серии траекторий движения, соответ-

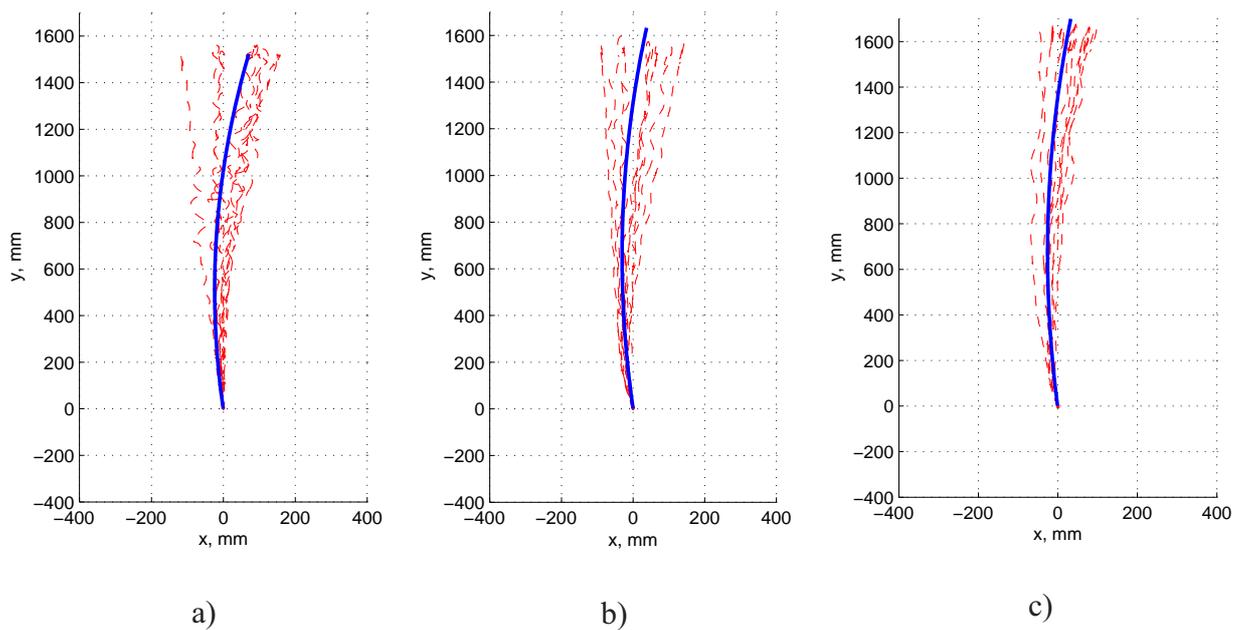


Рис. 18. Траектории движения сфероробота при  $\delta = 0$  для скоростей а)  $V=0.1$  м/с, б)  $V=0.2$  м/с, в)  $V=0.3$  м/с

ствующих скоростям (а) -  $v = 0.1$ , (б) -  $v = 0.2$ , (в) -  $v = 0.3$  м/с. В каждой серии проводилось десять экспериментов с одинаковыми начальными условиями. Радиусы средних аппроксимирующих окружностей, показанных на рисунке жирной линией, соответственно равны  $\rho_a = 5430$  мм,  $\rho_b = 6965$  мм,  $\rho_c = 9073$  мм (см. рисунок 19а).

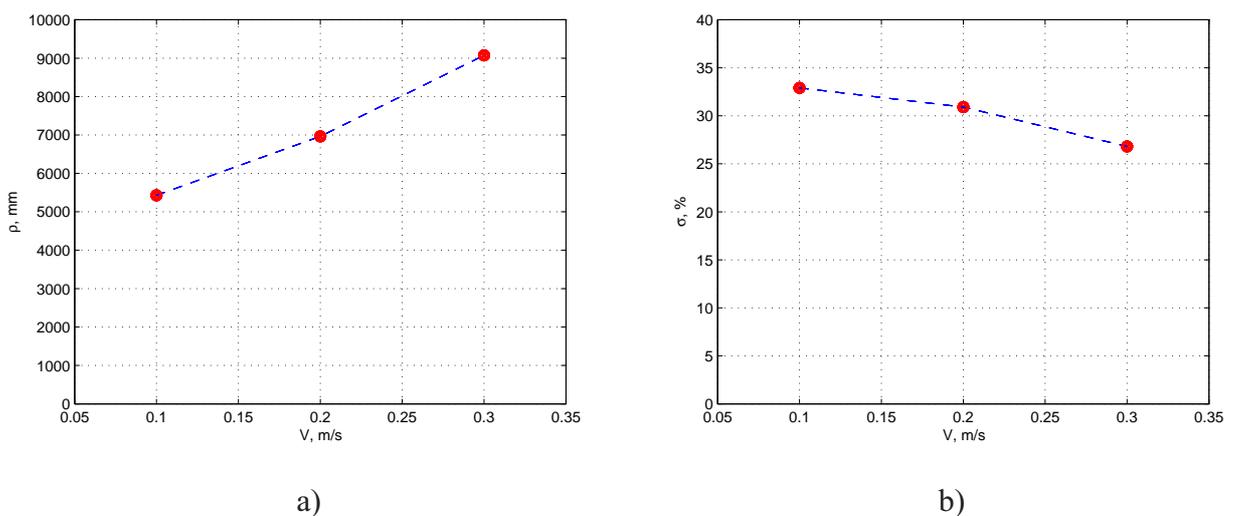


Рис. 19. а) Зависимость радиуса кривизны траектории от скорости движения при  $\delta = 0$ . б) Зависимость среднеквадратичного отклонения радиуса кривизны траектории от скорости движения при  $\delta = 0$ .

Как видно из рисунка 19, радиус траектории растёт при увеличении скорости движения. Кроме того, с увеличением скорости повышается плавность хода, сокращаются колебательные процессы, сопровождающие движение сфероробота. Это отражается на уменьшении среднеквадратичного отклонения радиуса аппроксимирующей окружности от среднего значения вычисленного для десяти экспериментов (рисунок 19b). Всё это говорит об эффекте динамической стабилизации при движении по прямой.

#### 3.2.4. Движение по окружности при постоянных управляющих воздействиях

Как указано выше, траекторией движения с постоянными управляющими воздействиями в общем случае является окружность, радиус которой определяется соотношением угловых скоростей колес сфероробота и смещением центра масс. При этом в рамках кинематической модели отсутствует зависимость радиуса от абсолютных значений управляющих воздействий (от них зависит только скорость прохождения по траектории).

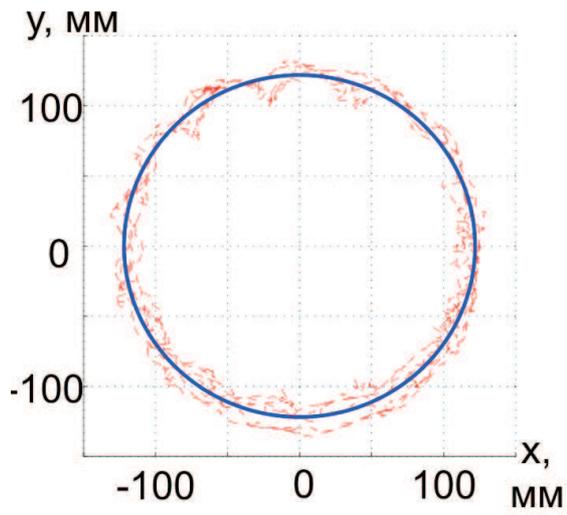
Исследуем зависимость радиуса траектории от абсолютных значений управляющих воздействий. В качестве базового выберем движение с управляющими воздействиями

$$\dot{\chi}_1 = -14.28, \quad \dot{\chi}_2 = 28.57, \quad \dot{\chi}_3 = 57.14. \quad (3.11)$$

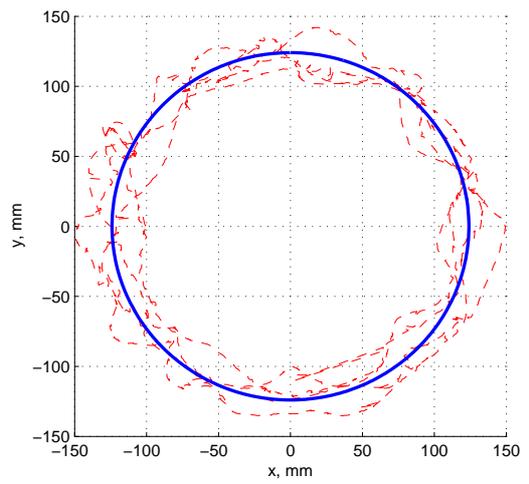
Соответствующий радиус кривизны траектории, рассчитанный по формуле (1.23) с учётом смещения центра масс (3.9)

$$\rho = 100.08 \text{ мм}. \quad (3.12)$$

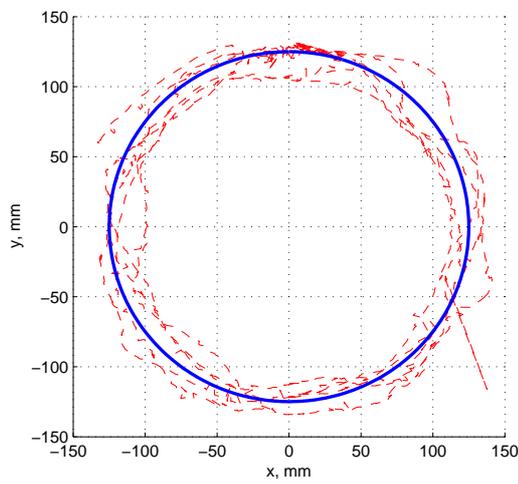
Проведены пять серий экспериментов с управляющими воздействиями увеличенными относительно базовых (3.11) в  $\kappa$  раз. На рисунке 20 приведены результаты данных экспериментов. Жирными линиями на рисунке изображены окружности, с усреднёнными по результатам пяти экспериментов в каждой серии радиусами.



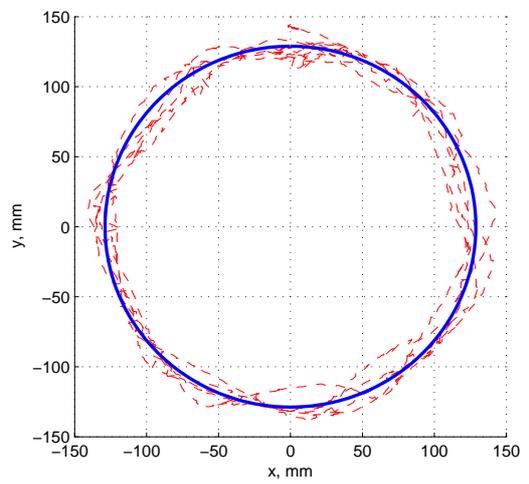
$\kappa = 1$



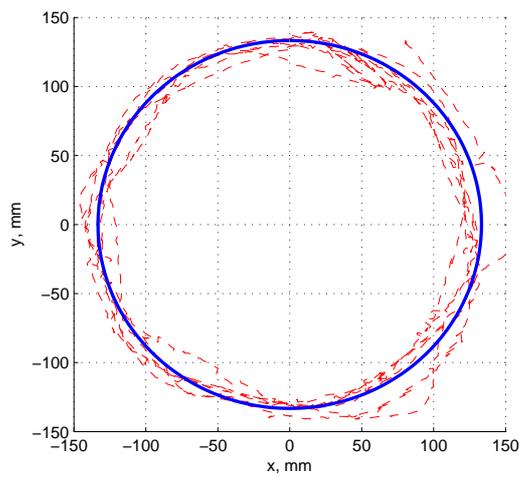
$\kappa = 2$



$\kappa = 3$



$\kappa = 4$



$\kappa = 5$

Рис. 20. Траектории движения сфероробота при постоянных управляющих воздействиях

На рисунке 21 приведена зависимость радиуса траектории от коэффициента  $\kappa$  с доверительными интервалами для средних величин полученных радиусов. Горизонтальная прямая соответствует теоретическому значению радиуса окружности (3.12) при движении с постоянными управляющими воздействиями, с которыми проводились эксперименты. Областью, выделенной серым цветом, показаны доверительные интервалы для экспериментальных данных с вероятностью 95%.

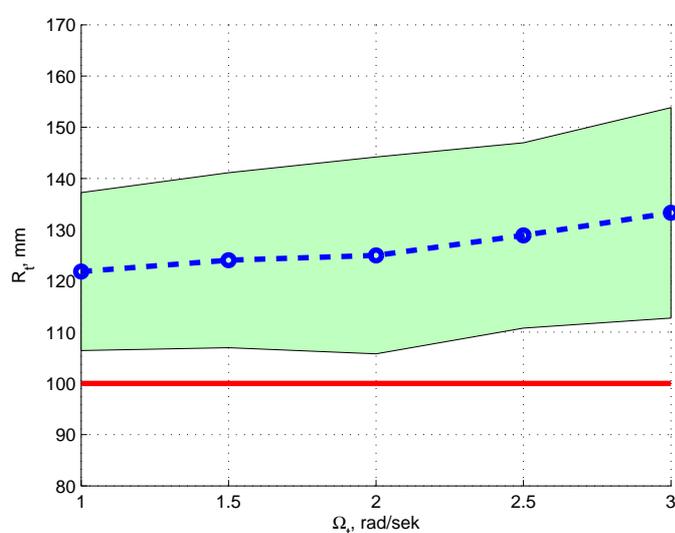


Рис. 21. Зависимость радиуса кривизны траектории от угловой скорости движения по траектории в виде окружности.

Как видно из рисунка 21, с увеличением скорости движения отклонение от теоретической кинематической модели возрастает, что ограничивает возможности её применения. Для реализации более скоростного режима движения необходимо исследование динамической модели.

### 3.2.5. Движение по окружности с сохранением ориентации подвижной платформы

Уникальная маневренность предложенной конструкции сфероробота, позволяет осуществлять движение по сложным траекториям, сохраняя при этом ориентацию подвижной платформы. В данном разделе представлены результаты экспериментальных исследований движения сфероробота по окружности

при сохранении омниколесной платформой начальной ориентации. В данном случае, управляющие воздействия будут непостоянными, а их расчёт с учётом смещения центра масс подвижной платформы по уравнениям (1.17), будет проводиться для траекторий:

$$x = R_t \cos(\Omega_t t), \quad y = R_t \sin(\Omega_t t), \quad \psi = 0, \quad \omega_\gamma = 0, \quad (3.13)$$

где  $R_t$  и  $\Omega_t$  задают радиус и угловую скорость движения по окружности соответственно.

Для примера рассмотрим движение сфероробота по окружности радиусом 100 мм с угловой скоростью 1 рад/сек. Полученные управляющие воздействия для первых семи секунд движения представлены на рисунке 22.

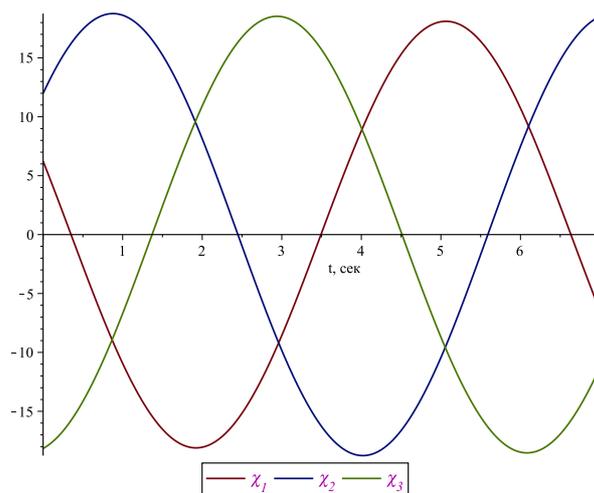


Рис. 22. Угловые скорости вращения омниколес для движения по окружности ( $R_t = 0.1, \Omega_t = 1$ ) с сохранением ориентации.

Для определения зависимости характера траектории движения от скорости проводились эксперименты для значений  $\Omega_t = 1, \Omega_t = 2, \Omega_t = 3$ . Результаты экспериментов представлены на рисунках 23, 24.

Как и ранее тонкой пунктирной линией показаны реальные траектории движения, а жирной линией средняя траектория по пяти опытам. Увеличение скорости движения также оказывает влияние на траекторию движения, так радиус окружности при движении со скоростью  $\Omega_t = 1$  рад/сек составил  $R_t =$

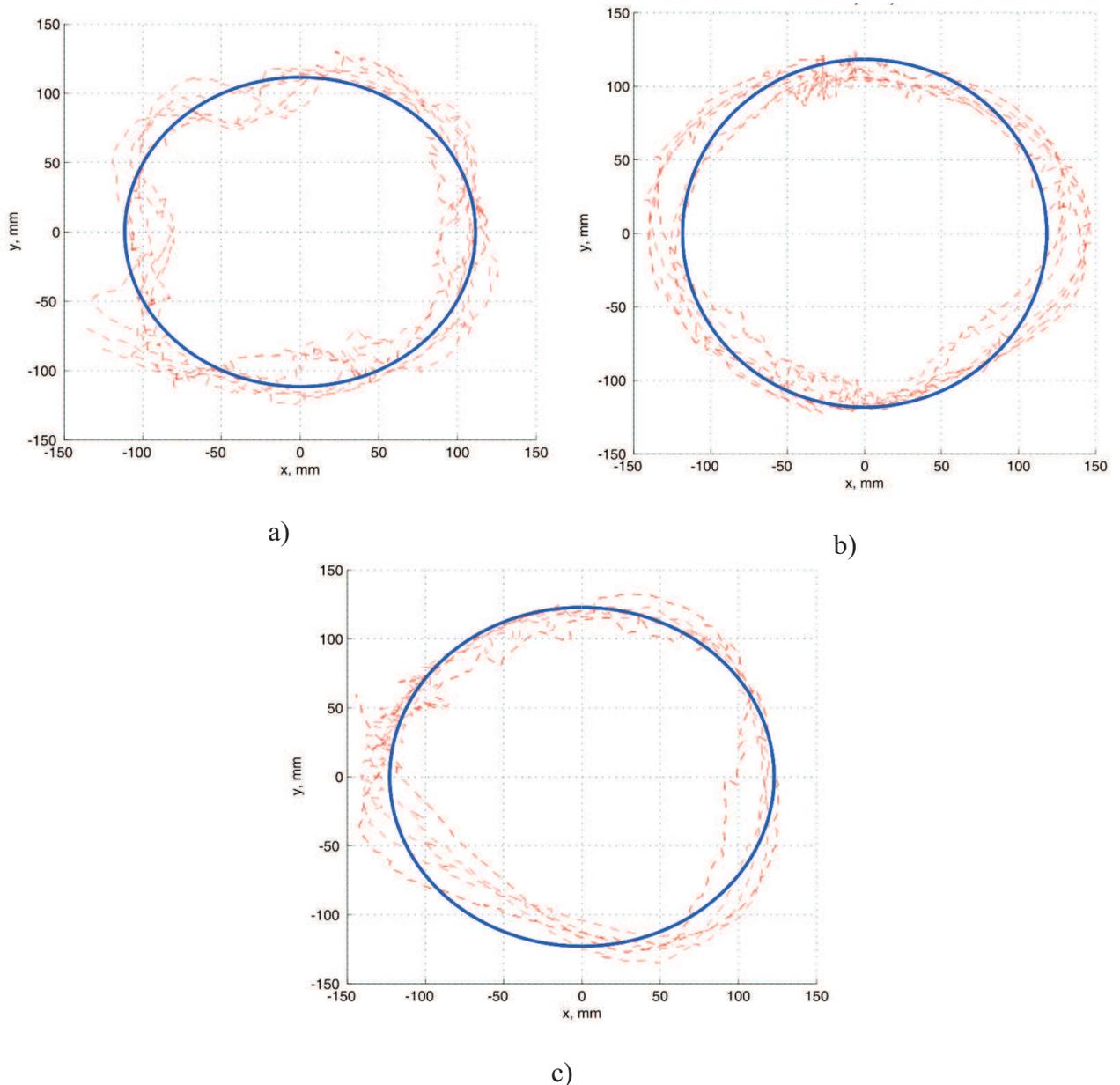


Рис. 23. Траектории движения сфероробота с сохранением ориентации при угловой скорости а)  $\Omega_t = 1$  сек<sup>-1</sup>, б)  $\Omega_t = 2$  сек<sup>-1</sup>, в)  $\Omega_t = 3$  сек<sup>-1</sup>

$= 111.5$ мм, а при увеличении скорости в три раза  $\Omega_t = 3$ , радиус увеличился до  $R_t = 128.9$ мм.

Доверительный интервал для серии экспериментов на скоростях  $\Omega_t = 1$  рад/сек,  $\Omega_t = 2$  рад/сек шире чем, при движении с постоянными управляющими воздействиями, но это объясняется тем, что одно из омниколес во время движения сфероробота вращается со скоростями близкими или равными нулю, в то время как два других осуществляют вращение на достаточно

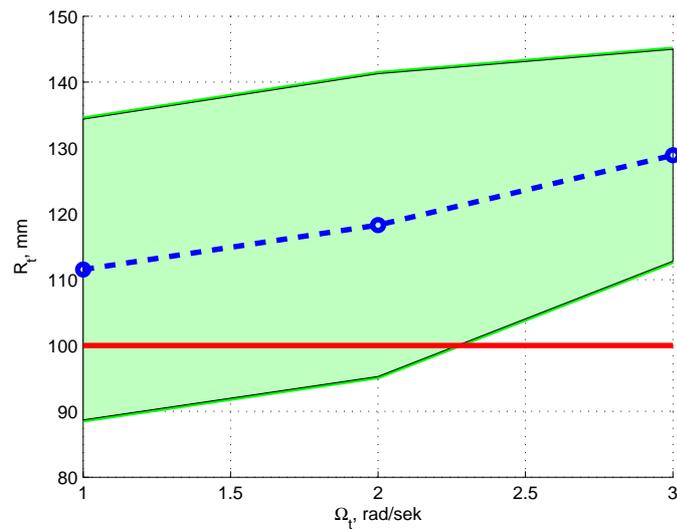


Рис. 24. Зависимость радиуса кривизны траектории от угловой скорости движения по траектории в виде окружности.

высоких скоростях. В подобные моменты особенно очевидно проявляются эффекты неидеальности конструкции как омниколеса, так и всего сфероробота. Наличие незначительных (и неучтённых в рассмотренных моделях) сил трения, вызывает постепенное отклонение сфероробота от заданной траектории. На более высоких скоростях движения продолжительность подобных участков сокращается, но в большей степени начинают проявляться динамические эффекты, что приводит к существенному увеличению радиуса кривизны траектории.

## ГЛАВА 4

# Экспериментальные исследования качения однородного диска по горизонтальной плоскости

В четвертой главе представлены результаты экспериментальных исследований катящегося круглого однородного диска по горизонтальной поверхности. Предложены два способа экспериментального определения отрыва катящегося диска от горизонтальной поверхности перед его остановкой. Представлены результаты экспериментов исследований качения дисков различной массы и изготовленных из различных материалов. Обсуждаются причины обнаруженных в процессе движения диска «микроотрывов».

### 4.1. Постановка задачи.

Данная глава посвящена экспериментальному исследованию движения круглого однородного диска по шероховатой плоскости, в особенности его финальной стадии. Такой диск в последнее время называют диском Эйлера [88] (в силу не совсем ясных причин), хотя в неголономной механике (т.е. когда диск движется по абсолютно шероховатой плоскости) задача о качении диска рассматривалась существенно позже Appelлем [89], Кортевегом [90], Чаплыгиным [91] и другими. Обзор по современному состоянию проблемы имеется в работе [92]. Несмотря на большое количество работ, в том числе и в неголономной постановке, которые доказывают интегрируемость данной задачи, они не могут объяснить ряд экспериментальных эффектов: возрастание частоты звука, сопровождающего движение диска и внезапная остановка

движения, очевидно, связанных с наличием диссипативных сил трения и, возможно, вязкости воздуха.

Стоит отметить, что все модели, описывающие процесс качения тела по поверхности являются нелинейными и, как правило, оказываются достаточно сложными. Так в работах [92–94] было показано, что в приближении негोलомного качения поведение тела в зависимости от его параметров и свойств поверхности может быть как регулярным, так и хаотическим. В таких системах возникает так называемая иерархия динамики в зависимости от сохраняющихся тензорных инвариантов.

В значительной степени современный интерес к движению диска был инициирован крайне спорной работой К. Моффатта [95], в которой прекращение движения диска Эйлера объясняется наличием силы вязкого сопротивления воздуха. Ван ден Энг с соавторами [97], проведя эксперименты с диском Эйлера в сосуде, в который закачивался сжатый воздух или создавался вакуум, достаточно строго показали незначительность силы вязкого сопротивления воздуха. С их точки зрения характер движения диска Эйлера объясняется наличием силы трения скольжения, причем ее "импульсный" характер приводит к отрыву диска от поверхности в процессе движения и последующей остановке.

Авторы последующих работ проводили исследования влияния трения качения и трения скольжения на различных этапах движения диска [98]- [106]. Для степенного закона изменения угла наклона  $\theta$  и скорости прецессии  $\dot{\alpha}$  диска Эйлера, в зависимости рассматриваемого механизма диссипации исследователями определялись значения показателя  $n$ :

$$\theta(t) \propto (t_f - t)^n, \quad \dot{\alpha}(t) \propto (t_f - t)^{-\frac{1}{2}n}. \quad (4.1)$$

Подробный анализ данных работ представлен в работах Р. Ляйне (R. Leine) [107], [108], в которых он структурирует и сравнивает различные ме-

ханизмы диссипации. В заключении он делает выводы, что в начале стадии стационарного качения превалирует сухое трение, а в последние одну, две секунды перед остановкой - вязкое трение. Данные выводы хорошо коррелируют с результатами экспериментальных исследований, представленных также в работах [107], [108], однако, как утверждает сам Р. Ляйне, другие механизмы диссипации могут приводить к аналогичным значениям показателей степени в выражении (4.1).

Похожие результаты получены в работе [96], где проведено не только моделирование, но и экспериментальные исследования, причем упор был сделан на исключение случайных воздействий при запуске, и предложен способ запуска диска с одинаковыми начальными условиями.

В работе [109] авторы рассматривают уравнения движения с учетом скольжения диска и сопротивления воздуха, пренебрегая моментом трения и деформацией диска и поверхности. Ими получены также условия перехода от скольжения к качению и проведено моделирование, результатом которого является положительность реакции, т.е. безотрывность диска в процессе движения.

Все экспериментальные работы, результаты которых также обобщены в [107], [108], условно можно разделить на две группы. В первую отнесем исследования эволюции динамических переменных диска Эйлера: угла наклона, скорости прецессии, угловой скорости и т.п., с помощью высокоскоростных видеокамер [103], [107], [108], [110]. В зависимости от выбранной методики для определения рассматриваемых величин съемка движущегося диска проводилась либо сбоку [107], [108] (оптическая ось объектива лежала в плоскости поверхности, по которой двигался диск), либо сверху [110] (оптическая ось объектива перпендикулярна плоскости поверхности), либо комбинированные съемки, для определения каждого параметра в отдельности [103]. К этой группе можно отнести также работу А. Макдональда и К. Макдональда [102], которые фиксировали с помощью фототранзистора отраженный от поверх-

ности диска световой луч. Работы второй группы посвящены исследованию звуковых колебаний, сопровождающих движение диска Эйлера [105], [109]. В результате данной работы авторы указывают на нелинейность колебаний звука.

Похожие технические средства использовались Й. Шимомурой и его коллегами [111], [112], при экспериментальном исследовании движения сфероида по плоскому основанию. С помощью акустического, оптического (с помощью высокоскоростной камеры) и электрического (измерялась емкость системы стол - сфероид) способов авторам удалось зафиксировать отрывы вращающегося сфероида от плоского основания во время его движения. Однако, скорость вращения сфероида, при которой удалось обнаружить отрывы, составляет более 1000 об/мин. Результаты экспериментов хорошо коррелируют с результатами моделирования для случая малого коэффициента сухого трения и большого начального кинетического момента сфероида.

Проблема потери контакта катящегося диска во время движения обсуждалась в теоретических работах М. Батисты [113], [114] и А.П. Иванова [115]. Так в статье А.П.Иванова аналитически получены условия отрыва при качении тонкого диска для различных законов трения [114], при рассмотрении диска ненулевой толщины данные условия не выполняются. М. Батиста получил условия отрыва как для катящегося диска, так и для сфероида в начале движения при отсутствии трения [114]. П. Кесслер и О. О'Рейли в работе [100] определили нормальную силу (реакцию) строго положительной, что исключает отрывы катящегося диска во время движения, хотя в заключении ими выдвинута гипотеза о резкой остановке диска, происходящей в результате потери контакта между диском и поверхностью в процессе вибраций при малом угле наклона.

Несмотря на вышеупомянутые исследования, вопрос об отрывах диска Эйлера в процессе движения остаётся открытым. Поэтому для построения со-

ответствующей модели, наиболее точно описывающей динамику диска, необходимо иметь чёткое экспериментальное заключение об отрывах. В связи с этим целью данной главы является экспериментальные исследования момента остановки диска Эйлера, и экспериментальное подтверждение отрыва с соответствующим ударом.

#### **4.2. Разработка экспериментальной установки и методики проведения экспериментальных исследований**

Для достижения поставленной цели разработаны две методики позволяющие исследовать наличие контакта, как во время движения, так и в момент остановки диска.

Схема первого эксперимента, представленная на рисунке 25, не требует сложных технических средств, но позволяет с помощью использования доступных материалов подтвердить наличие отрыва диска от поверхности перед остановкой. Для проведения эксперимента необходимо к листу бумаги 1 закрепить один из концов канцелярской резинки 2. Второй конец резинки 2 прижимается тяжелым предметом 4 к поверхности стола 5 (масса предмета 4 должна быть больше массы диска Эйлера 3). После этого лист бумаги по поверхности стола перемещается рукой на некоторое расстояние, обеспечивающее натяжение резинки (см. рис. 25b). Величина натяжения подбирается экспериментально в зависимости от массы диска Эйлера. В положении, когда резинка 2 натянута (лист бумаги можно удерживать рукой) на листе 1 запускается диск 3. На последних секундах движения диска следует освободить лист бумаги. При движении диска по листу резинка сохраняется в натянутом состоянии, а в момент остановки - при отрыве диска, резинка вырывает лист бумаги из под диска.

Диск на поверхности листа запускается вручную, причём параметры его

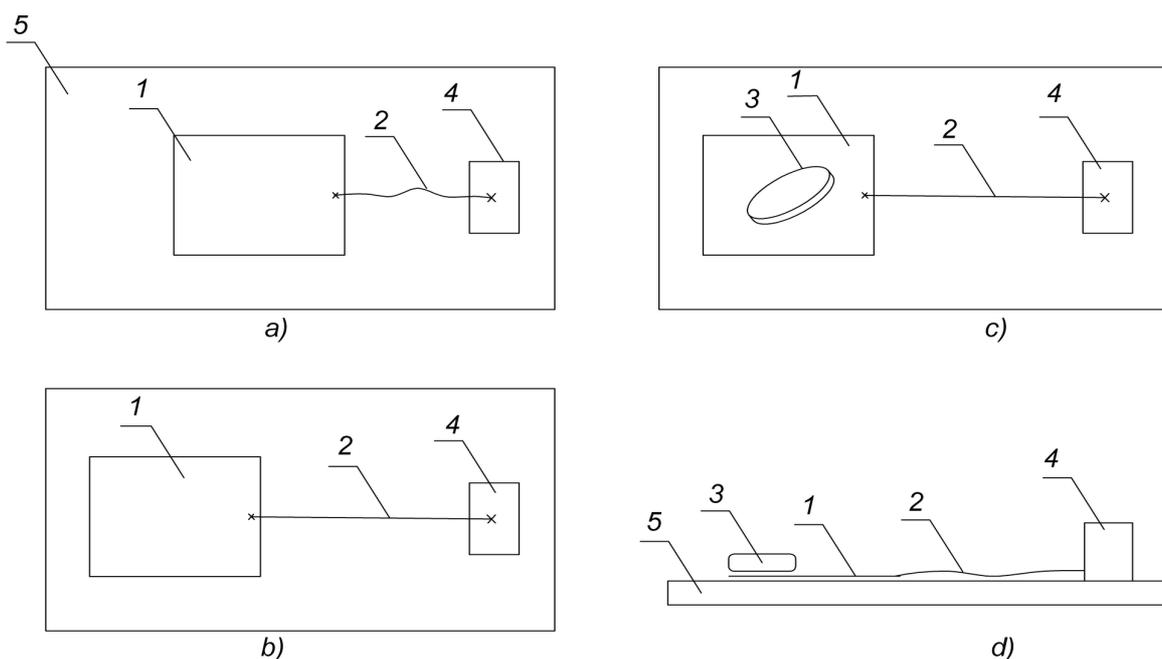


Рис. 25. Схема простого эксперимента: а) лист бумаги в исходном положении, б) лист бумаги отведен в сторону для обеспечения натяжения резинки и удерживается в таком положении, с) на листе запускается диск Эйлера, в конце движения лист освобождается, д) лист под действием натяжения резинки вырывается из под диска в момент его отрыва.

движения (начальная скорость, начальный угол отклонения), а также параметры самого диска (масса, шероховатость поверхности, материал диска, радиусы скругления) не оказывают влияния на проявлении данного эффекта. Лист может незначительно дергаться во время движения по нему диска Эйлера, но "рывок" листа из-под диска перед его остановкой остаётся очевидным и существеннее предыдущих движений.

Для проведения более продвинутого экспериментального исследования движения диска, а также определения факторов, влияющих на отрыв диска в момент его остановки, разработана экспериментальная установка, представленная на рисунке 26. Данная установка позволяет подтвердить наличие отрыва диска в момент его остановки, зафиксировать время отрыва, а также более подробно исследовать финальные движения.

Диск - 1 запускался по листу нержавеющей стали 2, толщиной 1,2 мм. Для плотного прилегания листа к столу 3, он закреплялся струбцинами - 4. Стол 3

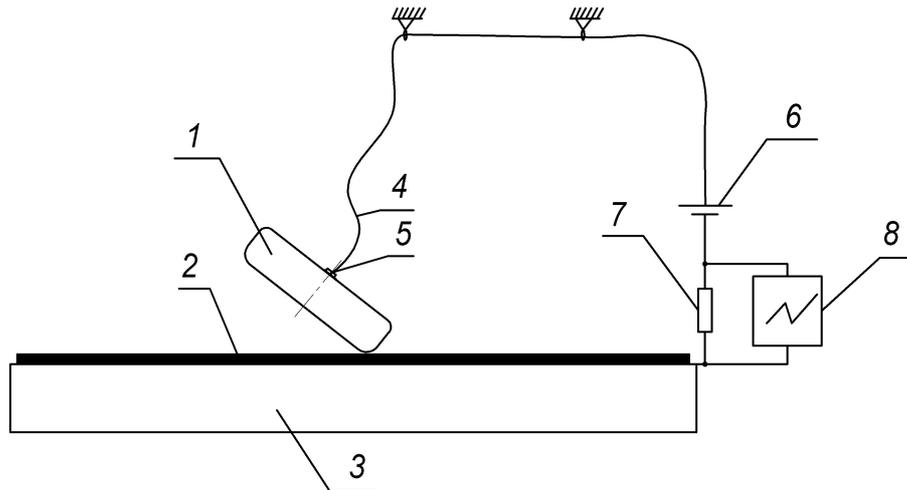


Рис. 26. Схема экспериментальной установки по определению времени отрыва диска Эйлера

устанавливался по цифровому уровню строго горизонтально, с погрешностью  $0.050^0$ . В центре диска просверлено глухое отверстие и нарезана резьба М3 для крепления винтом 6 (М3х10) провода 5 - МГТФ 0.05 (сечение  $0.05 \text{ мм}^2$ ). Винтовое соединение обеспечивает надежный контакт в процессе движения диска, не зависящий от натяжения провода. Сечения провода подбирались таким образом, что бы он не оказывал влияния на движение диска. Так эксперименты с высокоскоростной видеосъемкой для диска с и без прикрепленного провода показали, что наличие провода не влияет на время и характер движения (для одинаковых начальных условий углы прецессии на равных интервалах от момента остановки одинаковы). Поэтому выбран технически простой и более надежный способ крепления провода к диску.

Через неподвижные опоры, как показано на рисунке 26, провод подключен к источнику питания постоянного тока 7, настроенного на напряжение 10В. В случае отрыва диска происходил обрыв электрической цепи: диск Эйлера 1 - провод 5 - источник питания 7 - лист нержавеющей стали 2 - резистор 8 (22кОм), который включен в цепь для ограничения тока, так как все элементы цепи обладают низким омическим сопротивлением. Наличие или отсутствие электрического тока фиксировалось на резисторе 8 осциллографом 9. Частота дискретизации осциллографа 9 фирмы Agilent DSO-X 3024A



Рис. 27. Фотография реальной установки по определению времени отрыва диска от поверхности)

- 100МГц. Захват сигнала осциллографом осуществлялся автоматически по триггеру, настроенному на задний фронт сигнала напряжением 2В. При нахождении диска на поверхности в рассматриваемой цепи протекает электрический ток, фиксируемый осциллографом - напряжение на резисторе +10В или -10В в зависимости от полярности подключения приборов. В случае отрыва диска от поверхности электрическая цепь размыкается, и напряжение на резисторе составляет 0В. После каждого опыта незначительное закручивание провода ликвидировалось его отсоединением от приборов и приведением в исходное состояние. Изображение реальной установки в ходе проведения эксперимента представлено на рисунке 27.

Минимальное расстояние между диском и плоскостью, которое можно обнаружить используя данный метод, теоретически определяется законом Пашена и не превышает 10 мкм [118]. Экспериментальные исследования зависимости напряжения пробоя от расстояния между проводниками в воздухе проводились для значительно больших напряжений (не менее 100 Вольт). В работе [119] представлены результаты исследования напряжения пробоя для

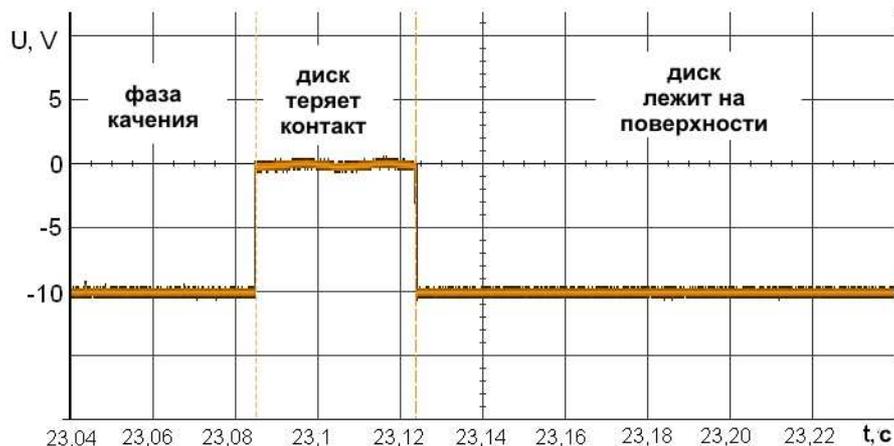


Рис. 28. Типовая осциллограмма отрыва диска (масштаб по оси абсцисс 1 деление - 20 мс, по оси ординат 1 деление - 5 Вольт)

Таблица 4.2. Экспериментальные образцы

| Обозначение диска | Диаметр, мм | Высота, мм | Масса, кг | Материал    |
|-------------------|-------------|------------|-----------|-------------|
| Диск 1            | 100         | 20         | 0,435     | дюралюминий |
| Диск 2            | 100         | 40         | 0,868     | дюралюминий |
| Диск 3            | 100         | 20         | 1,215     | нерж. сталь |

стальных проводников, из которых следует, что пробой происходит при напряжении 150 Вольт на расстоянии 0.9 мкм. При меньших напряжениях пробоя зафиксировать не удалось, даже на меньших расстояниях.

Одновременно производилась запись звука, сопровождающего качение диска. Типовая осциллограмма отрыва диска представлена на рисунке 28.

Для поведения экспериментов выбраны три диска с характеристиками, представленными в таблице 4.2 (радиусы закруглений дисков - 2 мм, поверхности дисков обработаны шлифованием).

С каждым диском проводилось по 3 эксперимента. Перед каждым экспериментом поверхность листа и диска протирались новой смоченной в дистиллированной воде хлопчатобумажной тканью для удаления частичек пыли. Перед проведением экспериментов лист нержавеющей стали обработан слабым раствором серной кислоты для удаления возможных технологических масле-

Таблица 4.3. Результаты экспериментов

|                        | Время отрыва диска перед его остановкой, мс |        |        |
|------------------------|---|--------|--------|
|                        | Диск 1                                      | Диск 2 | Диск 3 |
| Опыт 1                 | 38,4  | 23,8   | 13,0   |
| Опыт 2                 | 38,6  | 21,6   | 13,0   |
| Опыт 3                 | 42  | 21,6   | 12,6   |
| Среднее по трем опытам | 39,67                                       | 23,33  | 12,87  |

ных пленок и промыт дистиллированной водой. Результаты экспериментов представлены в таблице 4.3.

Из таблицы видно, что чем больше масса диска Эйлера, тем менее длительный отрыв от поверхности перед остановкой. Все диски запускались «от руки» с разными начальными условиями, что не повлияло на характер движения, а также на время отрыва диска.

Короткие импульсы (см. рисунок 29) амплитудой больше 5В, но меньше 10В на рисунке 4 на временном интервале с 22.255 по 24.25 секунду - это участок соответствующий микроотрыву, но по продолжительности очень незначительный и в данном масштабе ширина его графического представления менее 1 пикселя. Менее 5В сигнал включает время нарастания и убывания, поэтому его ширина больше, что уже позволяет представить его графически на данном разрешении дисплея осциллографа. Сигналы менее 5В -это помехи которые сопровождают любой процесс измерения на таких частотах дискретизации.

Для оценки влияния жесткости поверхности и коэффициентов трения эксперименты были проведены также на дюралюминиевой плите размера 310x310x30 мм. Время отрыва диска в момент остановки для диска №1 составило в среднем для пяти опытов 102 мс., что подтверждает влияние рассматриваемых факторов на характер движения диска. Несмотря на то, что лист

нержавеющей стали прижимался к столу струбцинами, при движении по нему диска, происходила его деформация, что уменьшало время отрыва диска.

В ходе проведения экспериментальных исследований обнаружен ряд особенностей, характеризующих движение диска, и имеющих неожиданный характер:

- 1) Чистота поверхности, по которой движется диск, а также качество обработки поверхностей вносят существенный вклад в характер движения диска, хотя время отрыва диска в момент его остановки остается прежним.
- 2) При проведении опытов обнаружено также, что диск отрывается не только в момент остановки, но и во время движения, однако, время отрыва существенно меньше (до 0,7 мс) (рисунок 29). Частота и длительность «микроотрывов» малопредсказуемы и имеют вероятностный характер. Однако за данный промежуток времени точка контакта для рассматриваемых дисков перемещается на расстояние до 3 мм.
- 3) Чем выше качество обработки поверхностей, тем отрывы во время движения менее продолжительны, и количество их меньше. Поэтому можно сделать вывод, что основная причина отрывов диска во время движения это микронеровности и шероховатости взаимодействующих поверхностей.
- 4) Анализ звуковых колебаний сопровождающих качение диска с помощью Фурье и вейвлет - преобразований показал наличие в сигнале большого количества гармоник, характерных ударным импульсам. На отдельных участках всплески амплитуды колебаний, как и в работах [105], [109], коррелируют с колебаниями скорости движения точки контакта, что позволяет отнести их к числу основных гармоник. Зашумленность спектра акустического сигнала можно объяснить наличием «микроотрывов».

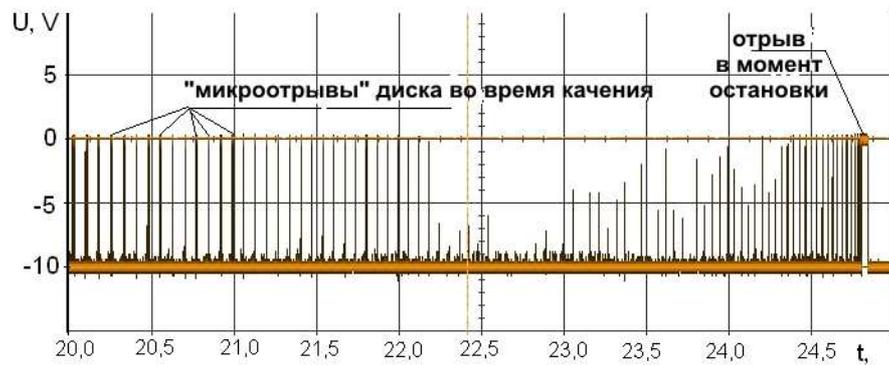


Рис. 29. Отрыв диска во время движения (последние 5 с движения)

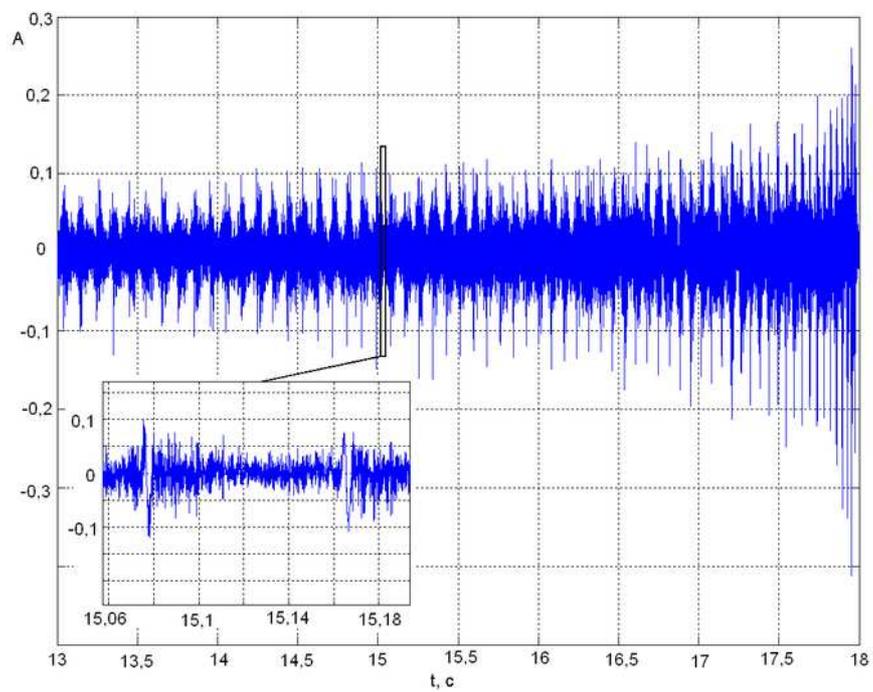


Рис. 30. Амплитуда характерных звуковых колебаний сопровождающих качение диска (последние 5 с движения)

На рисунке 30 представлен характерный звуковой сигнал последних 5 секунд движения диска Эйлера. На рисунке 31 результат вейвлет-преобразования, которое позволяет проследить изменение частоты, звуковых колебаний, сопровождающих движение диска, представленных на рисунке 30. В качестве функции, с которой производилась свертка, выбран вейвлет Гуасса, как наиболее подходящий для использования с сигналами, подобными исследуемому акустическому сигналу [116, 117]:

$$f(t) = e^{-t^2} \quad (4.2)$$

Рассмотрим результаты спектральных преобразований для характерных участков: чистое качение, «микроотрыв», и отрыв диска от поверхности перед остановкой. На рисунке 32 представлены результаты быстрого преобразования Фурье для интервалов, включающих данные участки в отдельности, продолжительностью 0.1 секунды. В качестве характерных участков, для сигнала представленного на рисунке 30, выбраны

- участок от 13.23 с. до 13.33 с., что соответствует чистому качению;
- участок от 14.53 с. до 14.63 с., содержащему один «микроотрыв», не превышающий по продолжительности 5 мкс.;
- участок от 17.9 с. до 18 с., содержащий отрыв диска от поверхности, перед остановкой.

На спектре первого участка (рис. 32а) явно выделяются две несущие частоты, примерно 10Гц и 30Гц (вероятно частота связанная с угловой скоростью вращения диска Эйлера, так как чем ближе рассматриваемый характерный участок к моменту остановки тем больше данные значения), сигналы на других частотах имеют существенно меньшую амплитуду и их можно отнести к шуму. Несущая частота в процессе движения изменяется в среднем от 5Гц до 15Гц (зависит от начальных условий и параметров диска).

Спектр звуковых колебаний участка, содержащего характерный отрыв диска от поверхности (рис. 32с) имеет большую плотность и амплитуду и качественно похож на спектр звуковых колебаний после «идеального» ударного импульса (например, падение диска на поверхность с некоторой высоты).

Спектр участка с «микроотрывом» (рис. 32b) отличается меньшей амплитудой и плотностью, но его характер также близок к спектру «идеального» ударного импульса.

Ударные импульсы являются источниками колебаний в широком диапазоне частот. Каждому «микроотрыву» соответствует локальная расплывчатость спектра по частоте, но эти колебания быстро затухают. Отрыв диска перед его остановкой характеризуется большей спектральной плотностью, что качественно походит на спектр «идеального» удара.

С помощью разработанных методик и экспериментальных установок удалось обнаружить наличие отрыва диска в момент его остановки и зафиксировать время отрыва, а также обнаружены «микроотрывы» катящегося диска от поверхности сопровождающие движение диска от самого старта до остановки, сильно зависящие от качества взаимодействующих поверхностей.

Наиболее вероятным представляется, что «микроотрывы» объясняются «микрореформациями» поверхности и возможно самого диска. В то же время значительный отрыв (непосредственно перед остановкой) пока не имеет общепринятого теоретического объяснения, в частности не совсем понятно может ли он наблюдаться в моделях не учитывающих деформации.

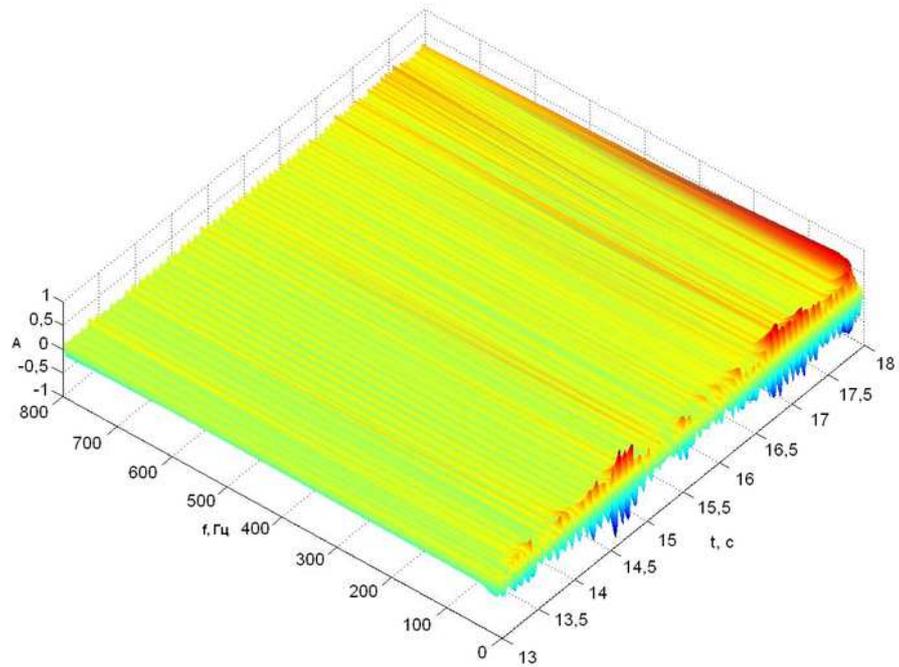


Рис. 31. Результат вейвлет преобразования (последние 5 с движения)

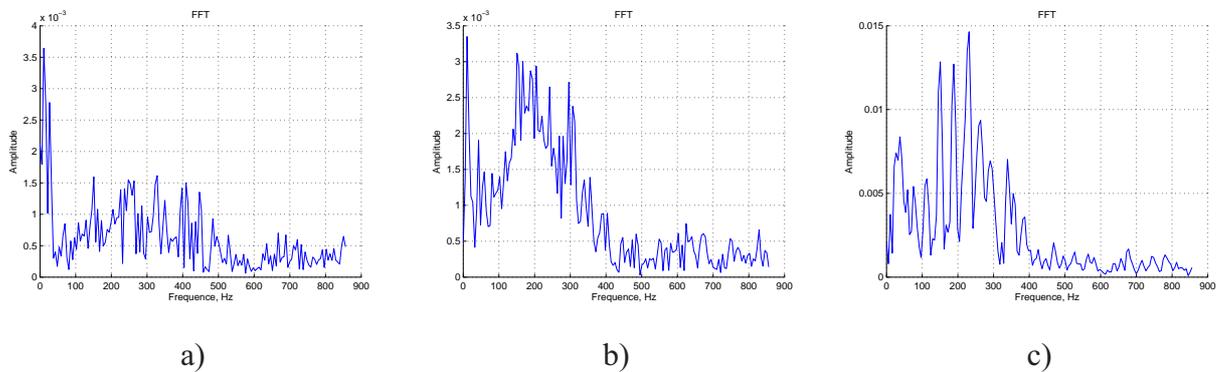


Рис. 32. Спектр звуковых колебаний участков, содержащих: а) чистое качение (с 13.1с. по 13.2с.), б) «микроотрыв» (с 13.4с. по 13.5с.), в) отрыв диска перед остановкой (с 17.9с. по 18с.).

## Заключение

Опишем кратко результаты полученные в диссертации.

- 1) Разработана конструкция сферического робота с внутренней омниколесной платформой. Изготовлен экспериментальный образец.
- 2) Разработана кинематическая модель движения сферического робота с внутренней омниколесной платформой и алгоритм планирования траектории на её основе.
- 3) Доказано, что траекторией движения сфероробота с внутренней омниколесной платформой при постоянных неравных угловых скоростях вращения омниколес является окружность.
- 4) Исследовано влияние смещения центра масс подвижной платформы на траекторию движения сферического робота.
- 5) Разработана методика определения положения центра масс внутренней омниколесной платформы сферического робота на основе экспериментальных данных и определено положение центра масс для натурального образца.
- 6) Получены уравнения динамики движения сферического робота с внутренней омниколесной платформой.
- 7) Найдены неподвижные точки и проведен анализ устойчивости стационарных решений приведенной системы, описывающей движение сфероробота

с внутренней омниколесной платформой. Показано, что отсутствует экспоненциальная неустойчивость при равномерном движении по прямой, при сохранении подвижной платформой горизонтального положения.

- 8) На основе динамической модели движения сфероробота разработан алгоритм расчёта управляющих воздействий (моментов, приложенных к омниколесам), реализующих движение по заданной траектории. Результаты численного моделирования показали, что недостатком данного алгоритма является то, что после завершения качения вдоль заданной траектории (и отключения управления) сфероробот продолжает свободное движение, которое в общем случае является хаотическим.
- 9) Для исключения указанного недостатка разработан численный алгоритм построения элементарных маневров (гейтов), позволяющих переходить с одного стационарного движения на другое. Данный алгоритм проиллюстрирован на примере разгона сфероробота и поворота при начальном движении по прямой.
- 10) Проведены экспериментальные исследования движения сфероробота с внутренней омниколесной платформой по траекториям заданным в виде прямой и окружности, подтверждающие разработанные теоретические модели.
- 11) Проведены экспериментальные исследования качения однородного диска по горизонтальной плоскости на специально разработанных экспериментальных установках, позволивших подтвердить наличие отрыва диска от поверхности перед его остановкой.
- 12) Продолжительность отрыва катящегося диска от горизонтальной поверхности перед его остановкой зависит от массы диска, и не зависит от параметров его движения.

13) В процессе проведения экспериментальных исследований обнаружены «микроотрывы» диска от горизонтальной поверхности во время движения. Их характер и количество определяется качеством обработки взаимодействующих поверхностей. Зафиксированы продолжительности «микроотрывов».

## Литература

- [1] Фантони И., Лозано Р. Нелинейное управление механическими системами с дефицитом управляющих воздействий. М - Ижевск: ООО «Компьютерная динамика», 2012, 312 с.
- [2] Борисов А. В., Мамаев И. С. (ред.). Неголономные динамические системы. Москва - Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, 328 с.
- [3] Борисов А. В., Мамаев И. С., Килин А.А. Избранные задачи неголономной механики, Институт компьютерных исследований, 2005, препринт: <http://ics.org.ru/>
- [4] Неймарк Ю. И, Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. — М.: Наука, 1967, 520с.
- [5] Каленова В. И., Карапетян А.В., Морозов В.М., Салмина М.А. Неголономные механические системы и стабилизация движения. Фундаментальная и прикладная математика, 11 (7). 2005, с. 117-158
- [6] Karapetyan A. V., Kuleshov A. S. Steady motions of nonholonomic systems. Regular Chaotic Dynamics.—2002.—Vol. 7, no. 1.
- [7] A.M. Bloch. Nonholonomic Mechanics and Control. Springer Science and Business Media, 2003, p. 483
- [8] Ю. Г. Мартыненко. Управление движением мобильных колёсных роботов. Фундаментальная и прикладная математика. 11(8). 2005, 29–80
- [9] Охоцимский Д. Е., Мартыненко Ю. Г. Новые задачи динамики и управления движением мобильных колёсных роботов. Успехи механики. — 2003. — Т. 2, № 1. 3—47.

- [10] Бурдаков С.Ф., Мирошник И.В., Стельмаков Р.Э. Системы управления движением колесных роботов. СПб: «Наука», 2001. 227с.
- [11] Woojin Chung. Nonholonomic Manipulators. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004, 114p.
- [12] David M. Ball, Chris F. Lehnert, Gordon F. Wyeth. A Practical Implementation of a Continuous Isotropic Spherical Omnidirectional Drive. 2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation Anchorage Convention District. May 2010, Anchorage, Alaska, USA. p.3775-3780
- [13] R. Chase, A. Pandya. A Review of Active Mechanical Driving Principles of Spherical Robots. Robotics 2012, 1, p. 3-23. doi:10.3390/robotics1010003
- [14] H. Ghariblu, A. Moharrami and B. Ghalamchi. Design and Prototyping of Autonomous Ball Wheel Mobile Robots, Mobile Robots - Current Trends, (2011), ISBN: 978-953-307-716-1, InTech, Электронный ресурс <http://www.intechopen.com/books/mobile-robots-current-trends/design-and-prototyping-ofautonomous-ball-wheel-mobile-robots> [Дата обращения 11.05.2014]
- [15] K. Masuda, K. Uchiyama. Development of Three-Dimensional Reaction Wheel Using Spherical Rotor. American Institute of Aeronautics and Astronautics Guidance, Navigation, and Control Conference 2012. doi:10.2514/6.2012-4708.
- [16] A. De Luca, G. Oriolo, P. R. Giordano. Kinematic Modeling and Redundancy Resolution for Nonholonomic Mobile Manipulators. Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Orlando, Florida - May 2006. p.1867-1873
- [17] Мартыненко Ю. Г., Кобрин А. И., Ленский А. В. Декомпозиция задачи управления мобильным одноколёсным роботом с невозмущаемой гиростабилизированной платформой // Докл. РАН. 2002. Т. 386, № 6. С. 767-769.

- [18] Xu Y., Ou Y. Control of Single Wheel Robots. Springer-Verlag, 2005, 188 p.
- [19] К. Halvorsen. Spherical hexapod robot МорпHex. Электронный ре-  
сурс <http://www.engadget.com/2011/12/12/spherical-hexapod-robot-walks-like-a-crab-dances-like-the-bogle/> [Дата обращения 26.11.2014]
- [20] Борисов А.В., Мамаев И.С., Караваев Ю.Л. (под.ред.) Мобильные ро-  
боты: робот-колесо и робот-шар. «Институт компьютерных исследова-  
ний», 2013. 532стр.
- [21] Tomi Ylikorpi and Jussi Suomela (2007). Ball-Shaped Robots, Climbing and  
Walking Robots: towards New Applications, Houxiang Zhang (Ed.), ISBN:  
978-3-902613-16-5, InTech, DOI: 10.5772/5083.
- [22] Rhodri H. Armour, Julian F. V. Vincent. Rolling in Nature and Robotics: A  
Review. Journal of Bionic Engineering 3 (2006). 195-208.
- [23] Halme A., Schonberg T. and Wang Y. Motion control of a spherical mobile  
robot, in Advanced Motion Control, 1996. AMC '96-MIE. Proceedings.,  
1996 4th International Workshop on, 1996, vol. 1, pp. 259-264.
- [24] Bicchi A., Balluchi A., Prattichizzo D. and Gorelli A. Introducing the  
"SPHERICLE": an experimental testbed for research and teaching in  
nonholonomy, in Robotics and Automation, 1997. Proceedings. IEEE  
International Conference on, 1997, vol. 3, pp. 2620-2625
- [25] J.-C. Yoon, S.-S. Ahn and Y.-J. Lee, "Spherical Robot with New Type  
of Two-Pendulum Driving Mechanism," Proc. 15th Int. Conf. on Intelligent  
Engineering Systems, pp.275-279, 2011
- [26] A. Ghanbari, S. Mahboubi, and M. M. S. Fakhrabadi, "Design, dynamic  
modeling and simulation of a spherical mobile robot with a novel motion  
mechanism", 2010 IEEE/ASME Int. Conf. on Mechatronics and Embedded  
Systems and Applications (MESA), Qingdao, China, pp. 434-439, Jul. 2010.
- [27] Michaud F. and Caron S. Roball, the rolling robot, Autonomous Robots,  
2002, vol. 12, pp. 211-222.

- [28] T. Ylikorpi, P. Forsman, A. Halme. 2014. Dynamic Obstacle Overcoming Capability of Pendulum-driven Ball-Shaped Robots. 17th IASTED International Conference Robotics Applications (RA 2014). P. 329-338. ISBN 978-0-88986-968-4 (electronic).
- [29] Kabala M. and Wnuk M. Design and construction of RoBall, a spherical, nonholonomic mobile robot, 2004. <http://rab.ict.pwr.wroc.pl/mw/Proj/RoBall/rapball.pdf>
- [30] Mukherjee R., Minor M.A. and Pukrushpan J. T. Simple motion planning strategies for spherobot: a spherical mobile robot, in Decision and Control, 1999. Proceedings of the 38th IEEE Conference on, 1999, vol. 3, pp. 2132-2137.
- [31] Amir Homayoun Javadi A. and Puyan Mojabi. Introducing Glory: A Novel Strategy for an Omnidirectional Spherical Rolling Robot, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 2004, vol. 126, p. 678.
- [32] Bhattacharya S. and Agrawal S.K. Spherical rolling robot: A design and motion planning studies, IEEE Transactions on Robotics and Automation, 2000, vol. 16, pp. 835-839.
- [33] Jia Q., Zheng Y., Sun H., Cao H., and Li H. Motion control of a novel spherical robot equipped with a flywheel, in Information and Automation, 2009. ICIA'09. International Conference on, 2009, pp. 893-898.
- [34] Schroll G.C. Design of a spherical vehicle with flywheel momentum storage for high torque capabilities, bachelor of science, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts Institute of Technology, 2008.
- [35] Ишханян М.В., Карапетян А.В. Динамика однородного шара на горизонтальной плоскости с учетом трения скольжения, верчения и качения // Изв. РАН. Механика твердого тела, 2010, № 2, с. 3-14

- [36] Плотников П.К. Модель сил трения и динамика качения шара по шероховатой поверхности с учетом предварительного смещения // Изв. РАН. МТТ, 2013, № 1, с. 59-70
- [37] Зобова А. А., Татаринцов Я. В. Динамика экипажа с роликонесущими колесами // ПММ, 2009, т. 73, вып. 1, с. 13–22.
- [38] Зобова А. А. Применение лаконичных форм уравнений движения в динамике неголономных мобильных роботов // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7. № 4 (Мобильные роботы). С. 771–783.
- [39] Мартыненко Ю. Г. Устойчивость стационарных движений мобильного робота с роликонесущими колесами и смещенным центром масс // ПММ, 2010, т. 74, вып. 4, с. 610–619.
- [40] Патент - 3876255 США, В60В 19/12 (20060101). Wheels for a course stable selfpropelling vehicle movable in any desired direction on the ground or some other base/ Ilon Bengt Erland.- N 3876255; Заяв. 13.11.1972; Оpubл. 8.04.1975.
- [41] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Тележка с омниколесами на плоскости и сфере // Нелинейная динамика, 2011, т. 7, № 4, с. 785–801.
- [42] A. Borisov, A. Kilin, I. Mamaev. How to Control Chaplygin's Sphere Using Rotors. Regular and Chaotic Dynamics, 2012, 17 (3-4), pp. 258 - 272.
- [43] A. Borisov, A. Kilin, I. Mamaev. How to Control the Chaplygin Ball Using Rotors. II. Regular and Chaotic Dynamics, 2013, 18 (1-2), pp. 144 - 158.
- [44] A.V. Borisov, A.A. Kilin, I.S. Mamaev, Generalized Chaplygin's Transformation and Explicit Integration of a System with a Spherical Support, Regul. Chaotic Dyn., 2012, 17 (2), pp. 170-190.
- [45] A.V. Borisov, A.A. Kilin, I.S. Mamaev, Rolling of a Homogeneous Ball over a Dynamically Asymmetric Sphere, Regul. Chaotic Dyn., 2011, 16 (5), pp. 465-483.

- [46] Vrunda A. Joshi and Ravi N. Banavar, Motion analysis of a spherical mobile robot, *Robotica* (2009) volume 27, pp. 343-353. © 2008 Cambridge University Press.
- [47] Чаплыгин С. А. О катании шара по горизонтальной плоскости // Матем. сб., 1903, т. 24, с. 139-168; см. также: Собр. Соч.: В 4-х тт. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. Т. 1, с.76-101.
- [48] Sugiyama Y., Hirai S. Crawling and jumping by a deformable robot // *Int. J. Robot. Res.*, 2006, vol. 25, pp. 603-620.
- [49] Иванова, Т.Б., Пивоварова, Е.Н., Динамика и управление сферическим роботом с осесимметричным маятниковым приводом, *Нелинейная динамика*, 2013, 9 (3), с. 507-520.
- [50] Koshiyama A., Yamafuji K. Design and Control of an All-Direction Steering Type Mobile Robot, *International Journal of Robotics Research*. 1993. Vol. 12. pp. 411-419.
- [51] Баландин Д.В., Комаров М.А., Осипов Г.В. Управление движением сферического робота с маятниковым приводом, *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2013. № 4. С. 150-163.
- [52] Kayacan, E., Bayraktaroglu, Z. Y., and Saeys, W., Modeling and Control of a Spherical Rolling Robot: A Decoupled Dynamics Approach, *Robotica*, 2012, vol. 30, no. 12, pp. 671–680.
- [53] Yoon J. C., Ahn S. S., Lee Y. J. Spherical robot with new type of two-pendulum driving mechanism. *Intelligent Engineering Systems (INES)*, 2011 15th IEEE International Conference on. – IEEE, 2011. – pp. 275-279.
- [54] Zhao, B., Li, M., Yu, H., Hu, H., Sun, L.. Dynamics and motion control of a two pendulums driven spherical robot. *Intelligent Robots and Systems (IROS)*, 2010 IEEE/RSJ International Conference on. – IEEE, 2010. – pp. 147-153.

- [55] A. Bolsinov, A. Borisov, I. Mamaev Rolling of a Ball without Spinning on a Plane: the Absence of an Invariant Measure in a System with a Complete Set of Integrals. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2012, 17 (6), pp. 571 - 579.
- [56] Borisov A. V., Fedorov Y. N., Mamaev I. S. Chaplygin ball over a fixed sphere: an explicit integration. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2008, 13(6), pp. 557-571.
- [57] Borisov A. V., Mamaev I. S. Rolling of a non-homogeneous ball over a sphere without slipping and twisting. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2007, 12(2), pp. 153-159.
- [58] Борисов, А.В., Мамаев, И.С., Изоморфизм и гамильтоново представление некоторых неголономных систем., *Сибирский математический журнал*, 2007, Том 48, No 1, с. 33-45.
- [59] Kilin, A.A., The Dynamics of Chaplygin Ball: the Qualitative and Computer Analysis. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2001, 6 (3), pp. 291 - 306
- [60] Wei-Hsi Chen, Ching-Pei Chen, Wei-Shun Yu, Chang-Hao Lin, and Pei-Chun Lin. Design and Implementation of an Omnidirectional Spherical Robot Omnicron. The 2012 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics July 11-14, 2012, Kaohsiung, Taiwan, pp. 719-724.
- [61] Mikhail Svinin, Akihiro Morinaga, Motoji Yamamoto. On the dynamic model and motion planning for a spherical rolling robot actuated by orthogonal internal rotors. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2013, Volume 18, Number 1-2, Page 126-143
- [62] Morinaga A., Svinin M., Yamamoto M. A Motion Planning Strategy for a Spherical Rolling Robot Driven by Two Internal Rotors. *IEEE Transactions on Robotics*, 2014, 30(4), pp. 993-1002.
- [63] Svinin M., Morinaga A., Yamamoto M. On the dynamic model and motion planning for a class of spherical rolling robots. *Robotics and Automation*

- (ICRA), 2012 IEEE International Conference on. – IEEE, 2012. – С. 3226-3231.
- [64] A.O. Kazakov On the Chaotic Dynamics of a Rubber Ball with Three Internal Rotors. *Nonlinear Dynamics & Mobile Robotics*, 2014, 2(1), pp. 73-98.
- [65] Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. Москва-Ижевск: «Институт компьютерных исследований», 2005. 576 с.
- [66] Маркеев А. П. Теоретическая механика: Учебник для высших учебных заведений. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. 592 с.
- [67] Borisov A. V., Mamaev I. S. Rolling of a non-homogeneous ball over a sphere without slipping and twisting, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2007, 12 (2), pp. 153-159
- [68] А. В. Борисов, И. С. Мамаев, И. А. Бизяев. Иерархия динамики при качении твердого тела без проскальзывания и верчения по плоскости и сфере, *Нелинейная динамика*, 2013, 9 (2), стр. 141-202
- [69] А. В. Болсинов, А. В. Борисов, И. С. Мамаев. Качение без верчения шара по плоскости: отсутствие инвариантной меры в системе с полным набором интегралов, *Нелинейная динамика*, 2012, 8 (3), стр. 605-616
- [70] Koiller J., Ehlers K. M. Rubber rolling over a sphere. *Regul. Chaotic Dyn.*, 2007, vol. 12 no. 2, pp. 127-152.
- [71] Ahn S.-S., Lee Y.-J. Novel Spherical Robot with Hybrid Pendulum Driving Mechanism // *Advances in Mechanical Engineering*, 2014, vol. 2014, 456727, 14 p.
- [72] Chica J.G., Perez Molina M., Perez Polo M.F. Path tracking and stability of a rolling controlled wheel on a horizontal plane by using the nonholonomic constraints // *International Journal of Mechanical Sciences*, 2014, vol. 89, pp. 423–438

- [73] Forbes J.R., Barfoot T.D., Damaren C.J. Dynamic modeling and stability analysis of a power-generating tumbleweed rover // *Multibody System Dynamics*, 2010, vol. 24, pp. 413-439
- [74] Hartl A.E., Mazzoleni A.P. Dynamic Modeling of a Wind-Driven Tumbleweed Rover Including Atmospheric Effects // *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2010, vol. 47, no. 3, pp. 493-502
- [75] Hartl A.E., Mazzoleni A.P. Parametric Study of Spherical Rovers Crossing a Valley // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2008, vol. 31, no. 3, pp. 775-779
- [76] Hogan F.R., Forbes J.R. Modeling of spherical robots rolling on generic surfaces // *Multibody System Dynamics*, 2014, 19 p.
- [77] Hogan F.R., Forbes J.R., Barfoot T.D. Rolling Stability of a Power-Generating Tumbleweed Rover // *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2014, 12 p.
- [78] Lee J., Park W. Design and Path Planning for a Spherical Rolling Robot // *Proc. ASME 2013 International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, 2013, vol. 4A, IMECE2013-64994, 8 p.
- [79] Yu T., Sun H., Jia Q., Zhang Y., Zhao W. Stabilization and Control of a Spherical Robot on an Inclined Plane // *Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology*, 2013, vol. 5, no. 6, pp. 2289-2296
- [80] Borisov, A.V., Kazakov, A.O., Sataev, I.R., The Reversal and Chaotic Attractor in the Nonholonomic Model of Chaplygin's Top, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2014, 19 (6), pp. 718-733.
- [81] Borisov, A.V., Kazakov, A.O., Sataev, I.R., Regular and Chaotic Attractors in the Nonholonomic Model of Chapygin's ball, *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, 10 (3), pp. 361-380.

- [82] Borisov, A.V., Kazakov, A.O., Kuznetsov, S.P., Nonlinear dynamics of the rattleback: a nonholonomic model, *Phys. Usp.*, 2014, vol. 57, no. 5, pp. 453-460
- [83] Kazakov, A.O., Strange Attractors and Mixed Dynamics in the Problem of an Unbalanced Rubber Ball Rolling on a Plane, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2013, 18 (5), pp. 508-520.
- [84] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A., The rolling motion of a ball on a surface: New integrals and hierarchy of dynamics, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2002, vol. 7, no. 2, pp. 201–219.
- [85] Borisov A.V., Mamaev I.S., Strange Attractors in Rattleback Dynamics, *Physics-Uspeski*, 2003, Vol. 46, No 4, p. 393-403. Original Russian text: *Uspehi Fiz. Nauk*, 2003, Vol. 173, No 4, pp. 407-418.
- [86] Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S., New effects in dynamics of rattlebacks, *Doklady Physics*, 2006, Vol. 51, No 5, pp. 272-275. Original Russian text: *Doklady Akademii Nauk*, 2006, Vol. 408, No 2, pp. 192-195
- [87] А.Н. Каретин. МНК для аппроксимации данных окружностью. Электронный ресурс <http://mykaralw.narod.ru/articles/index.html> [Дата обращения 9.08.2014]
- [88] J. Bendik, The official Euler's disk website, <http://www.eulerdisk.com>, Tangent Toy Co., Sausalito, CA, <http://www.tangenttoy.com>.
- [89] P. Appell. Sur l'integration des equations du mouvement d'un corps pesant de revolution roulant par une arete circulaire sur un plan horizontal; cas particulier du cerceau. *Rendiconti del circolo matematico di Palermo*. V. 14. 1900. pp. 1-6.
- [90] С.А. Чаплыгин О движении тяжёлого тела вращения на горизонтальной плоскости, с. 57-75 // (Труды Отделения физических наук Общества любителей естествознания, т. IX, 1897)

- [91] D. Korteweg. Extrait d'une lettre a M. Appel. Rendiconti del circolo matematico di Palermo. V. 14. 1900. pp. 7-8.
- [92] A.V. Borisov, I.S. Mamaev, A.A. Kilin. Dynamic of rolling disk // Regular and Chaotic Dynamics. V. 8. Nr 2. 2003. pp. 201-212.
- [93] A. V. Borisov, I. S. Mamaev, I. A. Bizyaev. The hierarchy of dynamics of a rigid body rolling without slipping and spinning on a plane and a sphere // Regular and Chaotic Dynamics. V. 18. Issue 3. 2013. pp 277-328.
- [94] A.V. Borisov, I.S. Mamaev. The rolling motion of a rigid body on a plane and a sphere. Hierarchy of dynamics // Regular and Chaotic Dynamics. V. 7 Issue 2. 2002. pp 177-200.
- [95] H.K. Moffatt, Euler's disk and its finite-time singularity // Nature, vol. 404, April 2000, pp. 833-834.
- [96] Daolin Ma, Caishan Liu, Zhen Zhao, Hongjian Zhang, Rolling friction and energy dissipation in a spinning disc // Proc. R. Soc. A: 2014 470 20140191; DOI: 10.1098/rspa.2014.0191.
- [97] G. van den Engh, P. Nelson, J. Roach, Numismatic gyrations // Nature, vol. 408, November 2000, pp. 540.
- [98] L. Bildsten, Viscous dissipation for Euler's disk // Phys. Rev. E, vol. 66, 2002, 056309, 2 p.
- [99] Villanueva R., Epstein M. Vibrations of Euler's disk // Phys. Rev. E, vol. 71, 2005, 066609, 7 p.
- [100] Kessler P., O'Reilly O.M., The Ringing of Euler's Disk // Regular and Chaotic Dynamics, 2002, V.7, № 1, 49-60.
- [101] O'Reilly O.M. The Dynamics of Rolling Disks and Sliding Disks // Nonlinear Dynamics 10: 287-305, 1996
- [102] McDonald A.J., McDonald K.T., The rolling motion of a disk on a horizontal plane, Preprint Archive, Los Alamos National Laboratory, arXiv: physics/008227, 2000.

- [103] Saux C.Le., Leine R.L., Glocker C., Dynamics of a Rolling Disk in the Presence of Dry Friction // *J.Nonlinear Sci.*, 2005,V.15, 27-61.
- [104] Caps H. et al. Rolling and slipping motion of Euler's disk // *Phys. Rev. E*, vol. 69, 2004, 056610, 6 p.
- [105] Stanislavsky, A.A., Weron, K. Nonlinear oscillations in the rolling motion of Euler's disk // *Physica D*156(10), 247-259 (2001)
- [106] K. Easwar, F. Rouyer, and N. Menon. Speeding to a stop: The finite-time singularity of a spinning disk // *Physical Review E*, 66(045102(R)), 2002.
- [107] Leine R.L., Measurements of the finite-time singularity of the Euler disk, 7th EUROMECH Solid Mechanics Conference, 2009, Lisbon, Portugal.
- [108] Leine R.L., Experimental and theoretical investigation of the energy dissipation of a rolling disk during its final stage of motion, *Arch. Appl. Mech.*, 2009, V.79, 1063-1082.
- [109] Saje M., Zupan D., The rattling of Euler's disk // *Multidiscipline Modeling in Materials and Structures*, 2006, V.2, № 1, 49-66.
- [110] Petrie D., Hunt J.L., Gray C.G. Does the Euler Disk slip during its motion? *Am. J. Phys.*, Vol 70, No10, 2002. pp 1025-1028.
- [111] Mitsui T., Aihara K., Terayama C., Kobayashi H., Shimomura Y. Can a spinning egg really jump? // *Proc. R. Soc. A*, 2006, vol. 462, pp. 2897-2905
- [112] Branicki M., Shimomura Y. Dynamics of an axisymmetric body spinning on a horizontal surface. IV. Stability of steady spin states and the 'rising egg' phenomenon for convex axisymmetric bodies // *Proc. R. Soc. A*, 2006, vol. 462, pp. 3253-3275
- [113] Batista, M. The nearly horizontally rolling of a thick disk on a rough plane // *Regular and Chaotic Dynamics*. - 2008. - Vol. 13, iss. 4. - P. 344-354.
- [114] Batista M., Self-induced jumping of a rigid body of revolution on a smooth horizontal surface // *Non-Linear Mechanics*.- 2008.- V.43. - p. 26-35.

- [115] A.P. Ivanov, On Detachment Conditions in the Problem on the Motion of a Rigid Body on a Rough Plane // Regular and Chaotic Dynamics, 2008, 13 (4), p. 355 - 368
- [116] В.П. Дьяконов, Вейвлеты. От теории – к практике. – М.: СОЛОН-Р, 2002. – 448 с.
- [117] Torrence, Christopher, and Gilbert P. Compo. A practical guide to wavelet analysis // Bulletin of the American Meteorological society. Vol. 79, iss. 1. p. 61-78.
- [118] David B. Go, Daniel A. Pohlman, A mathematical model of the modified Paschen's curve for breakdown in microscale gaps // J. Appl. Phys. 107, 103303 (2010)
- [119] Albert J. Wallash and Larry Levit, Electrical breakdown and ESD phenomena for devices with nanometer-to-micron gaps // Proc. SPIE 4980, Reliability, Testing, and Characterization of MEMS/MOEMS II, 87 (January 25, 2003); doi:10.1117/12.478191;