

Тепловые процессы в технике. 2025. Т. 17. № 10. С. 460–466
Thermal processes in engineering, 2025, vol. 17, no. 10, pp. 460–466

Научная статья
УДК 66.021.4
URL: <https://tptmai.ru/publications.php?ID=186294>
EDN: <https://www.elibrary.ru/GOYAFH>

Разработка и верификация математической модели трехмерного ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости и сопряженного теплообмена применительно к микроканальным теплообменникам

С.В. Разваляев¹✉, А.В. Болдырев²

^{1,2}Набережночелнинский институт (филиал) ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет», Набережные Челны, Российская Федерация

¹Ssergei.1991@mail.ru✉

Аннотация. В статье верифицирована математическая модель трехмерного ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости и сопряженного теплообмена применительно к микроканальным теплообменникам, а также исследовано влияние некоторых геометрических параметров этих аппаратов на теплогидравлическую эффективность. Рассмотрена конструкция теплообменника, включающего в себя десять параллельных микроканалов поперечным сечением шириной 0,1 мм и высотой 0,2 мм. Выполнено сравнение расчетных значений: гидравлического сопротивления, числа Нуссельта, с экспериментальными данными на различных режимах по числу Рейнольдса. Подтверждена возможность использования численного моделирования в рамках математической модели трехмерного ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости и сопряженного теплообмена для качественной оценки влияния на гидравлическое сопротивление и число Нуссельта различных геометрических и режимных параметров микроканальных теплообменников. На основе верифицированной математической модели трехмерного ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости и сопряженного теплообмена исследовано влияние некоторых геометрических параметров микроканальных теплообменников на теплогидравлическую эффективность.

Ключевые слова: численное моделирование, верификация математической модели, микроканальный теплообменник, число Рейнольдса, число Нуссельта

Для цитирования. Разваляев С.В., Болдырев А.В. Разработка и верификация математической модели трехмерного ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости и сопряженного теплообмена применительно к микроканальным теплообменникам // Термовые процессы в технике. 2025. Т. 17. № 10. С. 460–466. URL: <https://tptmai.ru/publications.php?ID=186294>

Original article

Development and verification of a mathematical model of three-dimensional laminar flow of viscous incompressible liquid and conjugate heat transfer applied to microchannel heat exchangers

S.V. Razvalyaev¹✉, A.V. Boldyrev²

^{1,2}*Naberezhnye Chelny Institute of Kazan Federal University, Naberezhnye Chelny, Russian Federation*

¹*Ssergei.1991@mail.ru*✉

Abstract. Microchannel technology has gained widespread adoption in microelectronic cooling systems. Today's electronic chips emit heat fluxes on the order of 100 W/cm². With advances in microprocessor technology, heat fluxes at equipment "hot spots" are approaching 1000 W/cm² [1]. Traditional cooling methods using a combination of heat pipes and fans provide approximately 200 W/cm², which is clearly insufficient [2]. The performance of electronic systems significantly decreases when temperature thresholds are exceeded. Furthermore, it has been found that accumulation of excess temperatures within devices leads to degradation of material properties used for device fabrication, such as structural integrity and chemical stability. These factors contribute to reduced service life of equipment.

Therefore, microchannel heat exchangers with flow channel dimensions less than 1 mm are gaining increasing popularity [3–5].

To improve microchannel heat exchangers, besides costly experimental methods, three-dimensional numerical simulation of hydrodynamics and heat transfer can be employed using specialized software packages provided that the mathematical model is adequate.

Thus, this article focuses on verifying a mathematical model of three-dimensional laminar flow of viscous incompressible fluid and conjugate heat transfer applied to microchannel heat exchangers, as well as investigating the influence of some geometric parameters of these devices on thermohydraulic efficiency.

The article presents verification of a mathematical model of three-dimensional laminar flow of viscous incompressible fluid and conjugate heat transfer applicable to microchannel heat exchangers, along with investigation into how certain geometric parameters affect their thermohydraulic efficiency. A heat exchanger design consisting of ten parallel microchannels with cross-sectional width of 0,1 mm and height of 0,2 mm was considered. Experimental data presented in the paper were compared with modeling results:

- For hydraulic friction multiplied by Reynolds number ($f_{app} \times Re$), maximum deviation was 12 % at $Re = 150$, while minimum deviation was 1 % at $Re = 450$;
- For Nusselt number (Nu), maximum deviation was 11 % at $Re = 650$, whereas minimum deviation was 1 % at $Re = 550$.

Based on the verified mathematical model of three-dimensional laminar flow of viscous incompressible fluid and conjugate heat transfer, an analysis was conducted on the impact of several geometric parameters of microchannel heat exchangers on thermohydraulic efficiency.

It was confirmed that numerical simulations based on the mathematical model of three-dimensional laminar flow of viscous incompressible fluid and conjugate heat transfer could be utilized for qualitative assessment of various geometric and operational parameters' effects on hydraulic resistance and Nusselt number of microchannel heat exchangers. This information, in turn, may facilitate subsequent optimization of the design of these heat exchange apparatuses.

Keywords: numerical modeling, verification of a mathematical model, microchannel heat exchanger, Reynolds number, Nusselt number

For citation. Razvalyaev S.V., Boldyrev A.V. Development and verification of a mathematical model of three-dimensional laminar flow of viscous incompressible liquid and conjugate heat transfer applied

to microchannel heat exchangers. *Thermal processes in engineering*. 2025, vol. 17, no. 10, pp. 460–466. (In Russ.). URL: <https://tptmai.ru/publications.php?ID=186294>

Введение

Микроканальная технология получила широкое распространение в микроэлектронных системах охлаждения. Сегодня электронные микросхемы излучают тепловой поток на уровне 100 Вт/см². С развитием микропроцессорной техники тепловой поток в «горячих точках» оборудования приближается к 1000 Вт/см² [1]. Традиционный теплоотвод с помощью комбинации тепловых трубок и вентиляторов составляет около 200 Вт/см², что явно недостаточно [2]. Производительность электронных систем значительно снижается при превышении температурного порога системы. Кроме того, было обнаружено, что накопление избыточных температур в устройстве приводит к ухудшению свойств материалов, используемых для изготовления устройства, таких как структурная целостность и химическая стабильность. Эти факторы способствуют сокращению срока службы оборудования.

В связи с этим все большую популярность приобретают микроканальные теплообменники с размерами проточных каналов менее 1 мм [3–5].

Основными достоинствами микроканальных технологий являются: высокое значение отношения площади поверхности к объему устройств, связанные с этим высокие значения скорости химических реакций и интенсивности теплообмена; возможность работать с микроскопическими количествами жидкостей и микрообъектами (капли, клетки, частицы); высокая воспроизводимость и точность дозирования; ламинарные потоки, обеспечивающие отсутствие пульсаций и возможность точного контроля параметров потока (температуры, скорости, давления, перемешивания); масштабируемость процесса; уменьшение размеров устройств и экономия материалов; безопасность проведения процесса из-за малых объемов и многое другое.

Для совершенствования микроканальных теплообменников, помимо материально затратных экспериментальных методов можно использовать трехмерное численное моделирование гидродинамики, теплообмена с помощью специализированных программных пакетов при условии адекватности математической модели.

Поэтому настоящая статья посвящена верификации математической модели трехмерного ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости и сопряженного теплообмена применительно к микроканальным теплообменникам, а также исследованию влияния некоторых геометрических параметров этих аппаратов на теплогидравлическую эффективность.

Для верификации использованы материалы следующей статьи:

Чай и др. (2013) [8] экспериментально и численно исследовали коэффициенты теплопередачи микроканальных радиаторов. Каждый радиатор состоит из входного и выходного коллекторов и десяти параллельных микроканалов поперечного сечения шириной 0,1 мм и высотой 0,2 мм (рис. 1). Трехмерное численное моделирование ламинарного потока на основе уравнений Навье–Стокса и уравнения энергии было использовано для определения перепада давления и теплопередачи в этих микроканальных радиаторах при тех же экспериментальных условиях. Расчетные значения коэффициента трения и числа Нуссельта хорошо согласуются с экспериментальными данными. Обсуждается влияние участков сжатия–расширения на перепад давления, теплопередачу и термическое сопротивление. Обсуждается влияние зон входного и выходного разрежения и краев кремниевой пластины на течение жидкости и теплообмен.

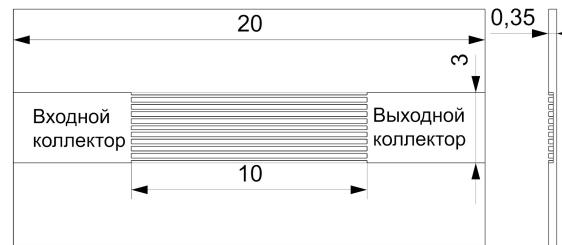


Рис. 1. Конструкция микроканального теплообменника [8], (размеры указаны в мм)

Методы

В большинстве современных программных пакетов, связанных с моделированием гидродинамики и теплообмена для математического описания течения и баланса энергии, используется система уравнений следующего вида:

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \oint_A \rho \mathbf{v} \times d\mathbf{a} = \int_V S_u dV; \quad (1)$$

Уравнение импульса:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \oint_A \rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \times d\mathbf{a} = \\ & = - \oint_A \mathbf{P} \mathbf{I} \times d\mathbf{a} + \oint_A \mathbf{T} \times d\mathbf{a} + \int_V f_b dV + \int_V S_v dV; \end{aligned} \quad (2)$$

\mathbf{T} – тензор вязких напряжений:

$$\mathbf{T} = 2\mu D - \frac{2}{3}\mu(\nabla \times \mathbf{v}) \times I; \quad (3)$$

D – тензор относительных скоростей деформации:

$$D = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T); \quad (4)$$

Уравнение энергии:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho E dV + \oint_A \rho H \mathbf{v} \times d\mathbf{a} = \\ & = - \oint_A q \times d\mathbf{a} + \oint_A \mathbf{T} \times \mathbf{v} d\mathbf{a} + \int_V f_b \mathbf{v} dV + \int_V S_E dV; \end{aligned} \quad (5)$$

где E – удельная полная энергия:

$$E = H - \frac{P}{\rho}; \quad (6)$$

H – удельная полная энталпия:

$$H = h + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2}; \quad (7)$$

h – удельная статическая энталпия

$$h = c_p \times T; \quad (8)$$

t – время;

ρ – плотность, то есть масса на единицу объема;

\mathbf{v} – скорость сплошной среды;

a – вектор площади (произведение площади на вектор нормали);

S_u – плотность распределения источников массы;

S_v – плотность распределения источников импульса;

S_E – плотность распределения источников энергии;

V – объем жидкости;

\otimes – векторное произведение;

f_b – плотность ускорения равнодействующих массовых сил (таких как сила тяжести и центробежные силы);

I – единичный тензор;

μ – динамическая вязкость жидкости;

T – температура;

C_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении;

q – плотность теплового потока;

P – давление.

С учетом ламинарного режима, стационарности течения, несжимаемости жидкости и допущения о малом влиянии массовых сил в данной работе уравнения математической модели трехмерного ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости и сопряженного теплообмена применительно к микроканальным теплообменникам принимают вид:

Уравнение неразрывности:

$$\oint_A \rho \mathbf{v} \times d\mathbf{a} = 0; \quad (9)$$

Уравнение импульса:

$$\oint_A \rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \times d\mathbf{a} = - \oint_A \mathbf{P} \mathbf{I} \times d\mathbf{a} + \oint_A \mathbf{T} \times d\mathbf{a}; \quad (10)$$

Уравнение энергии:

$$\oint_A \rho H \mathbf{v} \times d\mathbf{a} = - \oint_A q \times d\mathbf{a} + \oint_A \mathbf{T} \times \mathbf{v} d\mathbf{a}; \quad (11)$$

В модели учтены теплофизические свойства десорбированной воды [8], зависящие от температуры. Корреляции между теплофизическими свойствами воды и температурой были разработаны и проверены в работеAnsari и Kim [9] в виде полиномиальных функций (здесь температура подставляется в $^{\circ}\text{C}$):

– для удельной теплоемкости:

$$\begin{aligned} C_p(T) = & 4217 - 3,452T + 1,155 \times 10^{-1} T^2 - \\ & - 1,862 \times 10^{-3} T^3 + 1,538 \times 10^{-5} T^4 - \\ & - 4,85 \times 10^{-8} T^5; \end{aligned} \quad (12)$$

– для плотности:

$$\begin{aligned} \rho(T) = & 999,9 + 9,561 \times 10^{-2} T - \\ & - 1,013 \times 10^{-2} T^2 + 8,459 \times 10^{-5} T^3 - \\ & - 3,496 \times 10^{-7} T^4; \end{aligned} \quad (13)$$

– для теплопроводности:

$$k(T) = 5,698 \times 10^{-1} + 1,772 \times 10^{-3} T - 4,87 \times 10^{-6} T^2 - 2,915 \times 10^{-8} T^3 - 1,094 \times 10^{-10} T^4; \quad (14)$$

– для динамической вязкости:

$$\mu(T) = 1,75 \times 10^{-3} - 5,558 \times 10^{-5} T + 1,172 \times 10^{-6} T^2 - 1,579 \times 10^{-8} T^3 + 1,169 \times 10^{-10} T^4 - 3,535 \times 10^{-13} T^5. \quad (15)$$

В качестве граничных условий выбраны: скорость охлаждающей жидкости на входе в соответствие с числом Рейнольдса (от 150 до 800), температура жидкости на входе 293 К, тепловой поток, подводимый к «горячей зоне», 60 Вт/см².

Во всех случаях на выходной границе применено условие по давлению (нулевое избыточное статическое давление жидкости), а для внешних стенок – идеальная теплоизоляция.

В рамках данной статьи использованы расчетные сетки с ячейками в форме параллелепипеда, а при необходимости вблизи стенок – призматические слои (рис. 2 и табл. 1).

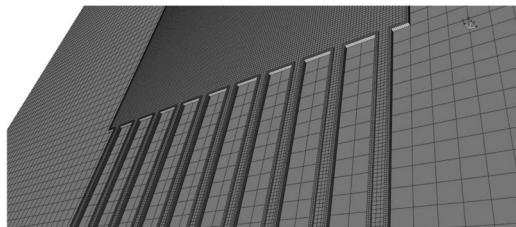


Таблица 1. Параметры расчетных сеток

Статьи, результаты которых воспроизводятся	Область модели	Количество ячеек в воспроизведимых моделях	Минимальный размер ячейки, мкм	Размер целевой ячейки, мкм
Chai, L., Xia, G., Wang, L., Zhou, M., & Cui, Z. (2013) [8]	Жидкость	2797824	2,5	10
	Металл	24632	125	500

В ходе предварительной оценки сеточной независимости решения по значениям гидравлического трения (f_{app}), помноженного на число Рейнольдса (Re), и числа Нуссельта (Nu) при числе Рейнольдса равном 800 для расчета характеристик микроканального теплообменника окончательно выбрана сетка, содержащая около 2,82 млн ячеек (рис. 3).

Приближенное решение уравнений математической модели получено с использованием метода конечных объемов, итерационного алгоритма SIMPLE, многосеточного метода, интерполяции Рхи и Чоу [10].

Критериями сходимости выбраны: стабилизация относительных среднеквадратических невязок по всем дифференциальным уравнениям на уровне не выше 0,0001, а также интегральных характеристик течения.

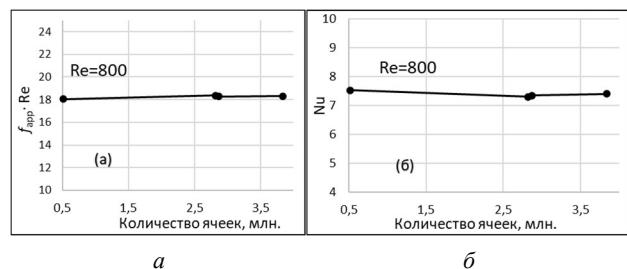


Рис. 3. Оценка сеточной независимости решения: а – значений $f_{app} \times Re$, б – значений Nu

Результаты и обсуждение

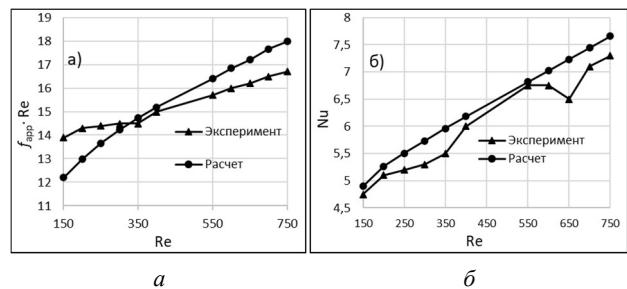


Рис. 4. Результаты верификации численной модели с экспериментом [8]: а – значений $f_{app} \times Re$, б – значений Nu

Сравнение экспериментальных данных (рис. 4), приведенных в статье [8], с результатами моделирования, полученными в данной работе, показало, что:

– для гидравлического трения, помноженного на число Рейнольдса ($f_{app} \times Re$), максимальное отклонение составило 12 % при Re = 150, а минимальное отклонение – 1 % при Re = 450;

– для числа Нуссельта (Nu) максимальное отклонение составило 11 % при Re = 650, а минимальное отклонение – 1 % при числе Re = 550.

Следует отметить, что приборная погрешность в эксперименте, приведенная в статье [8], для $f_{app} \times Re$ составляла 3,95 %, а для Nu – 7,39 %.

Возможно, к увеличению точности расчетов также может привести учет влияния температуры на теплофизические свойства материала стенок.

На основе верифицированной математической модели трехмерного ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости и сопряженного теплообмена исследовано влияние некоторых геометрических параметров микроканальных теплообменников на теплогидравлическую эффективность. За основу взята конструкция, описанная Чай и др. [8]. Разработаны следующие варианты изменения проточной полости:

1. Микроканальный теплообменник с ребрами прямоугольного сечения (рис. 5), высота которых уменьшена до 100 мкм (далее по тексту «конструкция 1»).

2. Микроканальный теплообменник с применением чередования ребер прямоугольного сечения по высоте (рис. 5) (далее по тексту «конструкция 2»). Высота выделенных ребер прямоугольного сечения равна 100 мкм, высота остальных ребер равна 200 мкм.



Рис. 5. Изображение различных чередующихся ребер

На рис. 6 и 7 приведены расчетные зависимости коэффициента гидравлического сопротивления (ζ) и числа Нуссельта (Nu) от числа Рейнольдса, полученные для разработанных конструкций микроканальных теплообменников.

Из графика (рис. 6) видно, что, с точки зрения гидравлического сопротивления, «конструкция 1» лучше «конструкции 2», в среднем, на 31 %, а относительно базовой конструкции теплообменника – на 69,5 %.

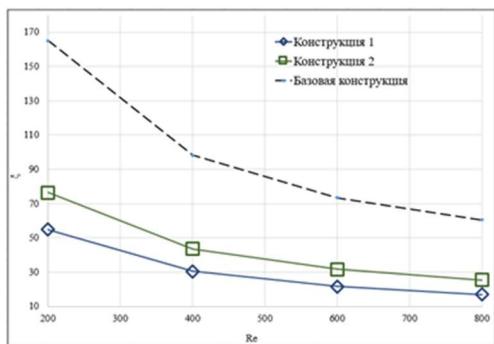


Рис. 6. Коэффициент гидравлического сопротивления от числа Рейнольдса

Из графика (рис. 7) видно, что число Нуссельта для «конструкции 2» выше, чем у «кон-

струкции 1», в среднем, на 11 %, но ниже, чем у базовой конструкции, в среднем, на 24 %.

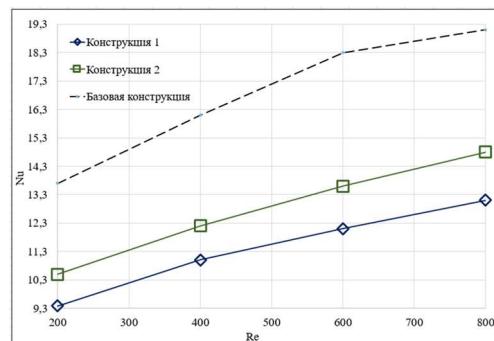


Рис. 7. Зависимость числа Нуссельта от числа Рейнольдса

Чтобы оценить теплогидравлическую эффективность предложенных конструкций микроканальных теплообменников использовался критерий, предложенный в монографии Гортышовым и др. [11]:

$$\left(\frac{Nu_i}{Nu_0} \right) / \left(\frac{\zeta_i}{\zeta_0} \right); \quad (16)$$

где Nu_i – число Нуссельта разработанной конструкции микроканального теплообменника;

Nu_0 – число Нуссельта базовой конструкции микроканального теплообменника;

ζ_i – коэффициент гидравлического сопротивления разработанной конструкции микроканального теплообменника;

ζ_0 – коэффициент гидравлического сопротивления базовой конструкции микроканального теплообменника.

По полученным данным (рис. 8) видно, что «конструкция 1» является эффективнее конструкции 2 в среднем на 22,5 %, однако этот результат достигнут за счет значительного снижения гидравлического сопротивления, а не за счет высокой теплоотдачи.

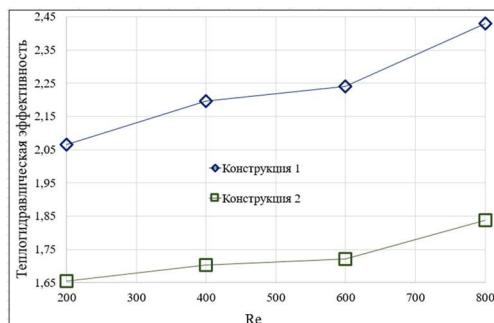


Рис. 8. Термогидравлическая эффективность от числа Рейнольдса

Заключение

Таким образом, в настоящей статье верифицирована математическая модель трехмерного ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости и сопряженного теплообмена в микроканальных теплообменниках. Выполнено исследование влияния высоты ребер, в том числе чередования ребер разной высоты, на гидравлическое сопротивление, теплоотдачу и теплогидравлическую эффективность в диапазоне чисел Рейнольдса от 200 до 800.

Установлено, что обе предложенные конструкции приводят к опережающему снижению потерь давления по сравнению с уменьшением теплоотдачи, особенно вариант с уменьшением высоты ребер до 100 мкм.

Список источников

1. Bar-Cohen K.A., Wang P. Thermal Management of On-Chip Hot Spots // *J. Heat Transfer*. 2012. Vol. 134.
2. Kraus A., Bar-Cohen K.A., Wative A.A. Cooling electric equipment. In: *Mechanical Engineers Handbook*. Sec. 1. Ch. 12. Vol. 4. 2015. Wiley: Chichester, pp. 451–499.
3. Минаков А.В. Изучение многофазных потоков в микроканалах и теплофизических характеристиках наножидкостей. Дис. ... д. физ.-мат. н. Красноярск. СФУ. 2021. 368 с.
4. Harris C., Despa M., Kelly K. Design and fabrication of a cross flow micro heat exchanger. *Journal of Microelectromechanical Systems*. 2000. Vol. 9. № 4. pp. 502–508. DOI: 10.1109/84.896772
5. Alkhazaleh A.M.A. Heat transfer intensification in microchannel heat sinks (MCHS) – wavy channels embedded with pin fins. Theses. 2021.
6. Garimella S.V., Persoons T., Weibel J.A. et al. Electronics thermal management in information and communications technologies: challenges and future directions // *IEEE Trans. Components, Packag. Manuf. Technol.* 2017;7(8): 1191–1205. DOI: 10.1109/TCMPMT.2016.2603600
7. Hassan I., Phutthavong P., Abdelgawad M. Microchannel heat sinks: an overview of the state-of-the-art. *Microscale Thermophys. Eng.* 2004;8(3):183–205. DOI: 10.1080/10893950490477338
8. Chai L., Xia G., Wang L. et al. Heat transfer enhancement in microchannel heat sinks with periodic expansion–constriction cross-sections. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2013;62:741–751. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer
9. Ansari D., Kim K.-Y. Performance analysis of double-layer microchannel heat sinks under non-uniform heating conditions with random hotspots. *Micromachines*. 2017; 8(2):54. DOI: 10.3390/mi8020054
10. Rhee C.M., Chow W.L. A numerical study of the turbulent flow past an isolated airfoil with trailing edge separation // *AIAA Journal*. 1983. Vol. 21. pp. 1525–1532.
11. Гортышов Ю.Ф. (ред.). Теплогидравлическая эффективность перспективных способов интенсификации теплоотдачи в каналах теплообменного оборудования. Интенсификация теплообмена: монография. Казань: Центр инновационных технологий, 2009. 49 с.

References

1. Bar-Cohen KA, Wang P. Thermal Management of On-Chip Hot Spots. *J. Heat Transfer*. 2012;134.
2. Kraus A, Bar-Cohen KA, Wative AA. *Cooling electric equipment*. In: *Mechanical Engineers Handbook*. Vol. 4. Sec. 1. Ch. 12. Wiley: Chichester; 2015. P. 451–499.
3. Minakov AV. *Study of multiphase flows in microchannels and thermophysical properties of nanofluids*. PhD. thesis. Krasnoyarsk: SFU; 2021. 368 p. (In Russ.).
4. Harris C, Despa M, Kelly K. Design and fabrication of a cross flow micro heat exchanger. *Journal of Microelectromechanical Systems*. 2000;9(4):502–508. DOI: 10.1109/84.896772
5. Alkhazaleh AMA. *Heat transfer intensification in microchannel heat sinks (MCHS) – wavy channels embedded with pin fins*. Theses. 2021.
6. Garimella SV, Persoons T, Weibel JA et al. Electronics thermal management in information and communications technologies: challenges and future directions. *IEEE Trans. Components, Packag. Manuf. Technol.* 2017;7(8): 1191–1205. DOI: 10.1109/TCMPMT.2016.2603600
7. Hassan I, Phutthavong P, Abdelgawad M. Microchannel heat sinks: an overview of the state-of-the-art. *Microscale Thermophys. Eng.* 2004;8(3):183–205. DOI: 10.1080/10893950490477338
8. Chai L, Xia G, Wang L et al. Heat transfer enhancement in microchannel heat sinks with periodic expansion–constriction cross-sections. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2013;62:741–751. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer
9. Ansari D, Kim K-Y. Performance analysis of double-layer microchannel heat sinks under non-uniform heating conditions with random hotspots. *Micromachines*. 2017; 8(2):54. DOI: 10.3390/mi8020054
10. Rhee CM, Chow WL. A numerical study of the turbulent flow past an isolated airfoil with trailing edge separation. *AIAA Journal*. 1983;21:1525–1532.
11. Gortyshov YuF (eds.). *Thermal-hydraulic efficiency of promising methods for intensifying heat transfer in heat exchanger channels. Intensification of heat exchange: monograph*. Kazan: Center for Innovative Technologies; 2009. 49 p. (In Russ.).