

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. Н. Э. БАУМАНА
(МГТУ им. Н. Э. БАУМАНА)

На правах рукописи



Ай Мин Вин

**РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ РАСЧЁТА ДИНАМИКИ ТВЁРДЫХ ТЕЛ СО
СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТЬЮ**

Специальность 01.02.06 – Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель:

к.ф.-м.н., доцент

Темнов Александр Николаевич

Москва - 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | Стр. |
|---|-----------|
| ВВЕДЕНИЕ..... | 5 |
| ГЛАВА 1. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ ДИНАМИКИ КРИОГЕННЫХ И СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ЖИДКОСТЕЙ..... | 9 |
| 1.1. Космические заправочные станции..... | 9 |
| 1.2. Обзор литературы..... | 12 |
| 1.2.1. Исследования динамики твёрдых тел, имеющих полости, частично или полностью заполненные однородной жидкостью..... | 12 |
| 1.2.2. Исследование колебаний стратифицированной жидкости в подвижных резервуарах..... | 16 |
| 1.2.3. Исследования динамики стратифицированных и криогенных жидкостей, заполняющих ограниченную и открытую области | 28 |
| 1.3. Цели и задачи работы..... | 34 |
| ГЛАВА 2. МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ В НЕПОДВИЖНОМ РЕЗЕРВУАРЕ | 36 |
| 2.1. Вывод уравнений малых движений стратифицированной жидкости | 36 |
| 2.1.1. Уравнения в частных производных для одной функции и постановка краевых задач | 46 |
| 2.2. Колебания стратифицированной жидкости в частично заполненном цилиндрическом сосуде произвольного поперечного сечения (экспоненциальная стратификация)..... | 49 |
| 2.2.1. Асимптотика малой стратификации..... | 52 |
| 2.2.2. Соосные круговые цилиндры со сплошными радиальными перегородками..... | 58 |
| 2.2.3. Эллиптический цилиндр | 68 |
| 2.3. Определение собственных частот для произвольного закона распределения плотности | 77 |

| | |
|---|------------|
| 2.3.1. Метод тригонометрических рядов..... | 78 |
| 2.3.2. Метод конечных элементов для определения форм и частот собственных колебаний жидкости в круговом неподвижном цилиндрическом баке со свободной поверхности..... | 81 |
| Выводы по главе 2..... | 86 |
| ГЛАВА 3. ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ ТЕЛ, ИМЕЮЩИХ ПОЛОСТИ, ЧАСТИЧНО ИЛИ ПОЛНОСТЬЮ НАПОЛНЕННЫЕ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТЬЮ | 88 |
| 3.1. Вывод уравнений возмущенного движения | 88 |
| 3.2. Простейшие случаи движения твёрдого тела со стратифицированной жидкостью | 93 |
| 3.2.1. Постановка задачи | 94 |
| 3.2.2. Квазипотенциал скоростей неоднородной жидкости..... | 94 |
| 3.2.3. Анализ уравнений движения твердого тела с неоднородной жидкостью | 97 |
| 3.2.4. Инерционные характеристики твердого тела с цилиндрической полостью, наполненной жидкостью, совершающей квазипотенциальное движение..... | 104 |
| Выводы по главе 3..... | 112 |
| ГЛАВА 4. ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТВЁРДЫХ ТЕЛ СО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТЬЮ, СОВЕРШАЮЩИХ МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ | 114 |
| 4.1. Формулировка краевой задачи | 114 |
| 4.2. Малые колебания сферического маятника, имеющего цилиндрическую полость, частично наполненную стратифицированной жидкостью | 116 |
| 4.3. Вращающаяся эллипсоидальная полость..... | 124 |
| 4.3.1. Определение обобщенных потенциалов φ_j | 128 |
| 4.4. Собственные колебания вращающегося тела с жидкостью..... | 139 |
| 4.4.1. Случай отсутствия массы жидкости..... | 140 |
| 4.4.2. Вращение твердого тела с затвердевшей жидкостью..... | 141 |

| | |
|---|------------|
| 4.4.3. Вращение твердого тела, имеющего эллипсоидальную полость, целиком заполненную однородной жидкостью | 141 |
| 4.4.4. Вращение твердого тела со стратифицированной жидкостью | 144 |
| 4.5. Сферическая полость | 147 |
| Выводы по главе 4..... | 151 |
| ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ..... | 152 |
| ЛИТЕРАТУРА | 153 |

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность проблемы. В настоящее время в связи с развитием ракетно-космической техники в значительной степени возросло использование криогенных топливных компонент: жидких водорода, кислорода, метана, шуги. Освоение дальнего космического пространства невозможно без создания орбитальных заправочных станций. Отличительной особенностью упомянутых выше жидкостей является низкие значения температуры и различные значения плотности частиц жидкости, наблюдаемые в режимах хранения и транспортировки.

В сечениях, перпендикулярных к оси ёмкости, разница в температуре криогенной жидкости реализуется в основном в тонком пограничном слое, около стенок сосуда. В тоже время изменение плотности и температуры частиц основной массы жидкости отказывается значительным в направлении коллинеарном оси сосуда. Такое распределение температуры и плотности жидкости позволяет считать основную массу жидкости однородной в плоскости, перпендикулярной к оси сосуда и приближённо рассматривать криогенную жидкость как стратифицированную, т.е. как жидкость в которой распределение плотности и температуры в невозмущённом состояний зависит от одной координаты.

В другой стороны при разработке ряда устройств, таких как сепараторы, биологические ультрацентрифуги, а также при создании различных приборов таких как датчики конвекции, поплавковые гироскопы, приходится сталкиваться со случаями неравномерного прогрева жидкости, который оказывает значительное влияние на динамику устройства с жидкостью.

В настоящее время движения твёрдых тел, имеющих полости, наполненные неравномерно нагретой жидкостью, практически мало изучены.

Целью диссертационной работы является разработка методов расчёта динамики твёрдых тел, имеющих полости, наполненные стратифицированной жидкостью, а также исследование влияния расслоения криогенной жидкости на

динамику твёрдого тела с жидкостью. Для достижения заданной цели в качестве модели криогенной жидкости была обоснована и выбрана несжимаемая стратифицированная жидкость, поставлены и решены следующие проблемы:

- Исследованы колебания стратифицированной жидкости в частично заполненном неподвижном цилиндрическом сосуде произвольного поперечного сечения.
- Разработаны методы расчета собственных частот колебаний жидкости, стратификация которой изменяется по произвольному закону.
- Разработан метод определения динамических характеристик при действии импульсивных сил на твёрдое тело, имеющей полости, наполненные стратифицированной жидкостью, совершающей квазипотенциальное движение.
- Разработан метод определения характеристик твёрдого тела, совершающего малые вращательные движения, и имеющего цилиндрическую полость, частично или полностью заполненной криогенной жидкостью.
- Исследована устойчивость вращения вокруг неподвижной точки твердого тела, имеющего эллипсоидальную полость, целиком заполненную стратифицированной жидкостью.

Метод исследования. В работе использованы известные подходы для решений задач динамики движения твердого тела с жидкостью. При решении задач, возникших в ходе выполнения диссертационной работы, использовались различные вычислительные и математические методы: метод конечных элементов, метод тригонометрических рядов, метод разделения переменных и метод обобщенных потенциалов.

Научную новизну диссертационной работы имеют следующие результаты:

- Исследованы вопросы взаимодействия стратифицированной идеальной несжимаемой жидкости и полости подвижного твердого тела. Рассмотрены случаи, в которых движение твердого тела вызвано действием мгновенных сил или сил имеющих колебательных характер.

- Получены теоретические и численные результаты в виде уравнений движения и инерционных характеристик, которые вместе с приведёнными примерами демонстрируют отличие динамики твёрдого тела с криогенной жидкостью от случая движения тела с однородной жидкостью.
- Получены асимптотические формулы, позволяющие оценить влияние стратификации на частоты поверхностных волн.
- Разработана методика вычисления частот внутренних волн для любого закона стратификации.
- Исследована устойчивость вращения вокруг неподвижной точки твёрдого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной стратифицированной жидкостью.

Практическая ценность. Результаты, полученные в диссертации могут быть использованы при проектировании крупногабаритных ракетно-космических конструкции, а также в учебном процессе кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» (СМ-1) МГТУ им. Баумана.

Достоверность полученных результатов следует из сравнения с известными аналитическими и численными решениями, полученными для однородной жидкости.

Структура и объем диссертации. Результаты исследований изложены на 166 страницах машинописного текста, иллюстрированного 45 рисунками и 20 таблицами. Диссертация состоит из введения, 4 глав с краткими выводами по каждой главе, заключения, списка публикаций и литературы.

Апробация работы: основные результаты диссертационной работы доложены на международных научных конференциях, в том числе:

1. XIV международный симпозиум «Уникальные феномены и универсальные ценности культуры», сборник научных докладов, МГТУ им. Н. Э. Баумана, (Москва, апрель 2012г).
2. Международная конференция «Актуальные проблемы российской космонавтики: труды XXXVII академических чтений по космонавтике», МГТУ им. Н. Э. Баумана, (Москва, январь 2013г).

3. 4-ая международная научная конференция «Ракетно-космическая техника: фундаментальные и прикладные проблемы», МГТУ им. Н. Э. Баумана, (РКТ - Москва, ноябрь 2013г).
4. Международная молодежная научная конференция «XL Гагаринские чтения», МАТИ – Российский государственный технологический университет имени Н. Э. Циолковского, (Москва, апрель 2014г).
5. Международная научная конференция «Физико-математические проблемы создания новой техники», МГТУ им. Н. Э. Баумана, (PhysMathTech – Москва, ноябрь 2014).

Публикации: список научных трудов по диссертационной работе составляет 7 публикаций, в том числе 4 публикации, в рецензируемых научных изданиях и журналах.

ГЛАВА 1. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ ДИНАМИКИ КРИОГЕННЫХ И СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ЖИДКОСТЕЙ

В первой главе показана необходимость создания космических заправочных станций (КЗС) и дано краткое писание будущих КЗС. Так как создаваемые космические конструкции представляют собой крупногабаритные объекты, наполненные криогенным топливом, в главе 1 дан систематизированный обзор литературы по исследованию движения твёрдых тел с полостями, наполненными однородными несжимаемыми жидкостями и обзор литературы по исследованию динамики криогенной и стратифицированной жидкостей. Рассматриваются основные подходы, методы, расчётные модели. Формулируются цели и задачи диссертации.

1.1. Космические заправочные станции

Космические заправочные станции (КЗС) могут использоваться при осуществлении программы полета человека к Луне, для полета на Марс и к астероидам. В НАСА также не исключают, что в более далеком будущем заправочные станции будут востребованы во время колонизации человеком других планет.

Освоение Луны потребует отправку различных грузов. Для осуществления одноразовой лунной посадочной миссии потребуется около 40 пусков ракеты-носителя «Ангара-А5В», при условии, если она будет способна выводить на низкую орбиту 35 тонн. Для реализации аналогичной миссии 75-тоннами носителями потребуется 8 пусков [148]. Чтобы сократить финансовые затраты предлагается построить на орбите Земли заправочные топливные станции.

Во времена запусков к Луне космических аппаратов типа «Аполлон» проблема экономии топлива решалась очень просто: корабли летели с минимальным наклоном к плоскости лунного экватора, что позволяло экономить много топлива. В настоящий момент данный подход утратил актуальность, так как появилась необходимость совершать посадку в разных

областях Луны и менять курс космического аппарата в зависимости от цели, выполняемой экипажем.

Создание заправок для космических кораблей на орбите Земли поможет людям колонизировать Луну, а также станет серьезным подспорьем в конструировании новых космических станций. В то же время специалисты из NASA считают, что создание системы заправок для космических кораблей на спутнике Земли поможет и в осуществлении полета на Марс и возвращения на Землю.

Компания Shackleton Energy Company (SEC) рассматривает варианты по созданию первой оперативной базы для добычи льда на Луне, который будет использоваться для производства жидкого кислорода и жидкого водорода в качестве топлива для космических аппаратов. Компания SEC также рассматривает варианты по созданию первой КЗС в космическом пространстве и планирует её открытие в 2020 году [149].

Американское аэрокосмическое агентство (NASA) объявило очередной конкурс в рамках проекта «Вызов столетия» по разработке и созданию космических станций для хранения и перемещения топлива [150]. Ученым предлагается соревноваться в шести разработках. Самый большой приз – 5 млн. долларов – могут получить разработчики космической заправки.

На разработку космических заправочных станций выделено \$2,5 млн. Перед всеми компаниями поставлены одинаковые задачи и НАСА надеется, что они найдут разные пути для решения одной и той же проблемы. Все они должны найти недоработки в существующей программе по разработке космических заправочных станций и указать на пути их решения.

После нескольких лет планирования, исследований и разработок, канадская компания MacDonald Dettwiler and Associates (MDA) объявила во всеуслышание о том, что в настоящее время они строят первую космическую заправочную станцию (Рис. 1.1) и планируют отправить ее в космос в 2015 году [151].

Космический аппарат Space Infrastructure Servicing (SIS) займет геосинхронную орбиту, где он сможет выполнять заправку спутников топливом, а в случае необходимости и скорректировать орбиту другого спутника используя свои двигатели.



Рис. 1.1. Космическая заправочная станция компании (MDA)



Рис. 1.2. Космическая заправочная станция
компании (PR)

Американская Planetary Resources (PR) отложила планы добычи из астероидов редких металлов и решила сделать станцию заправки (Рис. 1.2) топливом для сотен стареющих спутников связи. По словам представителя компании, дозаправка поможет увеличить время работы и других спутников - научных, военных и даже шпионских.

Однако отметим, что первая космическая заправочная станция была разработана в СССР (Рис. 1.3) под руководством С. П. Королёва [152].

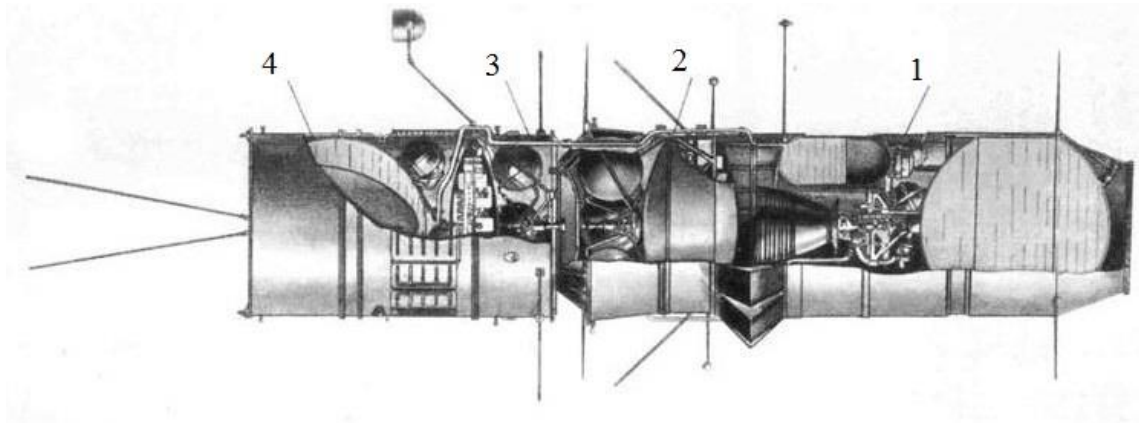


Рис. 1.3. Заправка топливом на орбите:

1 - ракетный блок; 2, 3 - навесные отсеки; 4 - емкость

1.2. Обзор литературы

Имеющиеся работы, посвященные криогенной и стратифицированной жидкостям, условно разделим на три группы. К первой группе отнесём работы по динамике твёрдых тел, имеющих полости, частично или полностью заполненные однородной жидкостью. Ко второй группе отнесём работы по криогенной жидкости, связанные с исследованием колебаний криогенной жидкости в подвижных резервуарах. К третьей группе – работы, связанные с колебаниями стратифицированных и криогенных жидкостей, заполняющих ограниченную область и работы, в которых изучались колебания жидкости и тел в стратифицированной жидкости, заполняющей открытую области.

1.2.1. Исследования динамики твёрдых тел, имеющих полости, частично или полностью заполненные однородной жидкостью

Первое обстоятельное изучение динамики твёрдого тела, имеющего полости, полностью наполненные однородной идеальной несжимаемой жидкостью, было проведено Н. Е. Жуковским [50], который показал что в случае односвязных полостей однородная несжимаемая жидкость может быть заменена

эквивалентным твёрдым телом, масса которого равна массе жидкости, а момент инерции отличается от момента инерции затвердевшей жидкости.

В начале 50-х годов прошлого столетия в связи с бурным развитием ракетной техники, появилось большое количество работ, посвященных изучению динамики тел, имеющих полости, частично наполненные идеальной или вязкой однородной жидкостью.

В СССР целый ряд исследований, относящихся к этой проблеме, связан с именами Д. Е. Охоцимского, К. С. Колесникова, Г. Н. Микишева, Г. С. Нариманова, Б. И. Рабиновича, Н. Н. Моисеева, Л. В. Докучаева, В. В. Румянцева, Ф. Л. Черноусько и др. Среди работ иностранных авторов следует отметить работы Абрамсона, Бауэра, Майлса.

Д. Е. Охоцимский в статье [96] получил, что при частичном заполнении полости, твёрдое тело, заменяющее жидкость ввести нельзя, однако для некоторых видов движения твёрдого тела (действие импульсивых сил, гармонические колебания) можно ввести динамические характеристики, аналогичные массе и моменту инерции, и использовать их для составления уравнения движения.

В работах Б. И. Рабиновича [100], В. И. Рабиновича и Г. Н. Микишева [86] основное внимание уделено учёту влияния подвижности жидких компонентов топлива в баках и магистралях на динамическую устойчивость замкнутой системы твердое тело-жидкость-автомат стабилизации, двигательная установка.

В монографиях Н. Н. Моисеева, В. В. Румянцева [90] приведена постановка динамических задач, возникающих при движении твердого тела с полостями, заполненными жидкостью, даны методы решения и для некоторых из них приведено обоснование их применения в численных расчетах.

Монография [130] Ф. Л. Черноусько посвящена динамике твёрдого тела с полостями, содержащими вязкую несжимаемую жидкость. В монографии разработан метод обобщенных потенциалов, позволяющий проводить исследование и расчёт различных конкретных задач движения тела с жидким наполнением.

Монография [44] Л. В. Докучаева посвящена задачам нелинейной динамики летательного аппарата с деформируемыми элементами в виде гибких стержней. Рассмотрены вопросы устойчивости движения таких систем с учетом колебаний жидкости в жестких полостях, являющихся элементами конструкции системы.

В учебнике К. С. Колесникова [70] рассмотрены дифференциальные уравнения возмущенного движения твердого тела с жидкостью как объекта управления и исследована устойчивость движения рассматриваемой механической системы.

В работе [45] Л. В. Докучаева, Р. В. Рвалов рассмотрена задача об устойчивости стационарного вращения твердого тела с полостью, содержащей жидкость.

В книге [93] Г. С. Нариманова, Л. В. Докучаева, И. А. Луковского рассмотрены вопросы нелинейной динамики летательного аппарата с жидкостью.

В книге Н. Н. Моисеева, А. А. Петрова [89] рассмотрены численные методы расчета свободных колебаний жидкости, заполняющей частично полость твёрдого тела. Задачи рассмотрены в вариационной постановке с дальнейшим использованием метода Ритца.

Задачи о движении твёрдых тел, имеющих полости наполненные жидкостью остаются актуальными и в настоящее время.

Т. В. Руденко в работе [102] исследовал устойчивость движения тела с полостью в форме эллипсоида вращения, полностью заполненной идеальной жидкостью, на абсолютно шероховатой плоскости. А. В. Карапетян и О. В. Проконина провели исследование устойчивости перманентных вращений сферы с эллипсоидальной полостью, полностью заполненной идеальной жидкостью, на плоскости с трением [59].

В работе [60] А. В. Карапетян, Т. С. Сумин рассмотрели задачу устойчивости стационарного вращения твердого тела с эллипсоидальной полостью, полностью заполненной вязкой жидкостью, и закрепленного на стержне. При этом использовалась феноменологическая модель «внутреннего трения», предложенная В. А. Самсоновым [49]. Согласно этой модели трение

жидкости учитывается путем введения в уравнения движения коэффициента внутреннего трения, который определяется из экспериментов. В работе [60] найдены все тривиальные и нетривиальные перманентные вращения системы, исследована их устойчивость и бифуркации.

В работе [98] было проведено исследование затухающих колебаний твердого тела с полостью тороидальной формы, заполненной жидкостью произвольной вязкости, в предположении, что момент инерции жидкости много меньше момента инерции твердого тела.

В работе И. Б. Богоряд, Н. П. Лаврова [18] численно рассмотрено вращательное движение цилиндрического сосуда с радиальными ребрами под действием постоянного внешнего раскручивающего момента. Численно определены силы, действующие на ребра со стороны жидкости. В работе [17] теми же авторами рассмотрены синусоидальные колебания цилиндрического сосуда с упругими радиальными ребрами.

В работах А. Ю. Боталова [19-21] приведено численное исследование задачи о движении твёрдого тела с полостями наполненными жидкостью.

В работе [21] рассмотрена задача о колебаниях маятника с полостью, полностью заполненной вязкой несжимаемой жидкостью, а в статье [19] рассмотрено движение полости, заполненной вязкой жидкостью, вокруг неподвижной точки.

В работе [20] исследовано влияние жидкого наполнителя на движение вокруг неподвижной оси или неподвижной точки тела с полостями различной формы действием силы тяжести и проведен анализ влияния полости, частично заполненной жидкостью, на диссипацию энергии колебаний твёрдого тела.

Из современных работ иностранных авторов отметим работы Ф. Т. Dodge [135], Н. Akyildiz, М. S. Celebi [131-132]. J. R. Cho, Н. W. Lee [134], С. Н. Wu, О. М. Faltinsen, В. F. Chen [147].

В монографии [135] рассмотрено несколько вопросов динамики тел с жидкостью в полости: движение волн на поверхности жидкости для полостей различной формы: сферической, цилиндрической, прямоугольной и др. в

линейной постановке при прямолинейном колебании полостей. Проведено исследование некоторых нелинейных эффектов.

В работах [131-132] была рассмотрена задача о плоском колебании вязкой несжимаемой жидкости в прямоугольном сосуде, имеющем вертикальные и/или горизонтальные перегородки. Было показано, что влияние вертикальных перегородок более выражено при малой глубине жидкости, а влияние горизонтальных перегородок, которые вносят эффекты малой глубины жидкости (гидравлический прыжок, обрушение волн) заметнее при большей глубине.

В работе [134] при помощи Эйлера-Лагранжева (ALE) метода совместно с методом конечных элементов, исследовано влияние горизонтальных перегородок на форму свободной поверхности и величину горизонтальной составляющей силы и момента сил, с которой жидкость действует на прямоугольный сосуд. Показано, что наличие перегородок приводит к уменьшению величины силы и момента.

В работе [147] представлены результаты численного и экспериментального моделирования движения жидкости со свободной поверхностью в движущемся по гармоническому закону прямоугольном сосуде, имеющим вертикальные перегородки и исследовано влияние количества перегородок на затухание волн.

1.2.2. Исследование колебаний стратифицированной жидкости в подвижных резервуарах

К этой группе, в первую очередь, следует отнести книгу [101]. Книга является первым в мировой литературе трудом, в котором предпринята попытка всестороннего анализа всех основных систем двигательной установки ракеты в жидком криогенном топливе. Исследуются проблемы, возникающие при проектировании и отработка этих систем, содержащих криогенные жидкости. Подробно рассматриваются особенности криогенных топлив, таких, как «гейзерный эффект» и расслоение, и описываются методы управления этими процессами.

Исследование влияния колебаний резервуара на тепломассообменные процессы, происходящие в криогенной жидкости, было начато в СССР в 70^{ых} годах прошлого столетия.

В работе [33] изучается задача о влиянии колебаний бака с криогенной жидкостью на процессы тепломассообмена. Схема установки показана на Рис. 1.4

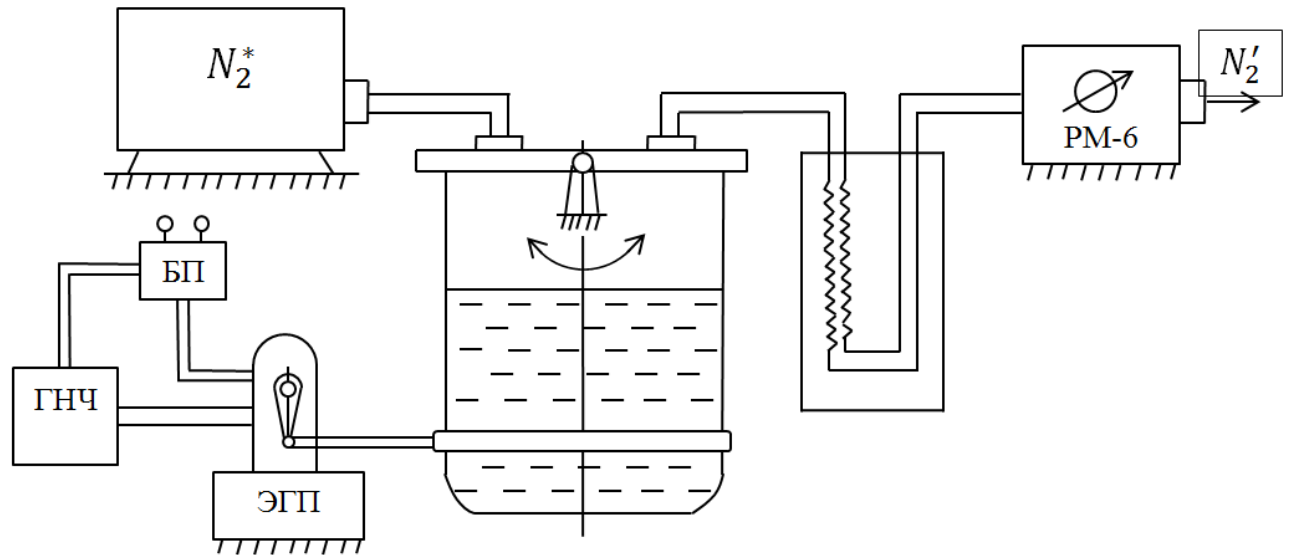


Рис. 1.4. Схема установки. БП – блок питания; ГНЧ – генератор низкой частоты; ЭГП – электрогидравлический привод; РМ-6 – ротаметр.

Приводятся результаты экспериментального исследования влияния колебаний криогенного бака на интенсивность испарения жидкого азота. На Рис. 1.5. (а) два зависимости интенсивности испарения \mathcal{Q} от частоты колебаний бака f при различном уровне заливки. Кривые 1, 2, 3 построены при значениях уровня. Колебания бака с безразмерной частотой $\bar{f} = 0 \div 0.93$ ($\bar{f} = f/f_c$) практически не влияют на интенсивность испарения. При увеличении \bar{f} от 0.93 до 0.965 происходит резкое увеличение интенсивности испарения.

Графики изменения \mathcal{Q} от амплитуды колебаний бака A (Рис. 1.5. (б)) показывают, что чем сильнее частота колебаний бака отличается от частоты f_c - резонансной частоты колебаний свободной поверхности жидкости, тем меньше интенсивность испарения зависит от амплитуды.

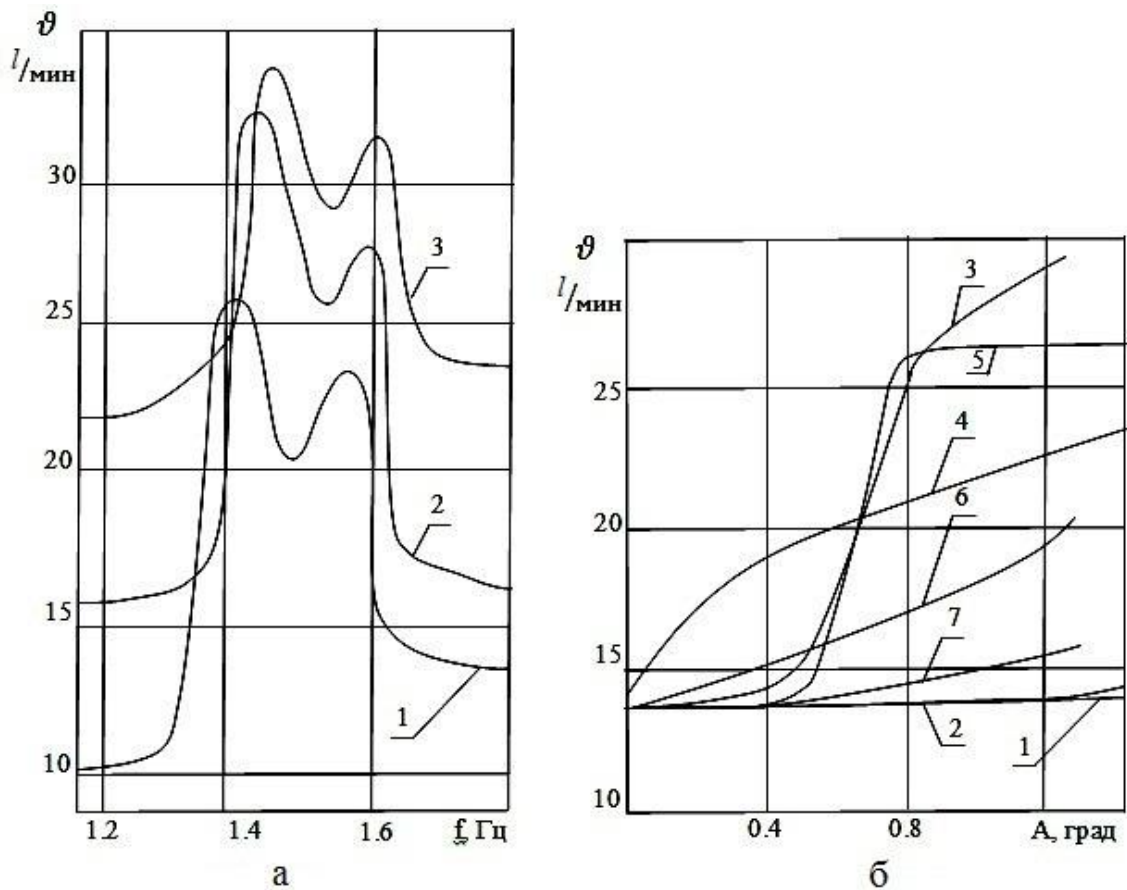


Рис. 1.5. Зависимость интенсивности испарения ϑ от частоты колебания бака f (а): 1 – 240 мм; 2 – 440 мм; 3 – 640 мм. Изменение интенсивности испарения ϑ от амплитуды колебаний бака (б): 1 – 0.4 Гц; 2 – 1.2 Гц; 3 – 1.4 Гц; 4 – 1.5 Гц; 5 – 1.6 Гц; 6 – 1.7 Гц; 7 – 1.8 Гц

В работе [140] представлены экспериментальные результаты шугообразного водорода в баке объемом 62 м^3 . В представленном баке было проведено обширное исследование колебаний жидкого и шугообразного водорода для того, чтобы охарактеризовать термодинамическую чувствительность (отклик) системы в условиях нормальной гравитации. Параметрически варьировали (меняли) частоту колебаний и амплитуду, тип газа наддува, давление ramпы и объем свободного пространства для оценки влияния каждого из этих параметров на давление в баке и температуру жидкости/стенки. В общей сложности было проведено 91 тестирование с жидким водородом и 62 теста с шугообразным. Были выполнены испытания, как в закрытых баках, так и в баках с истечением во время колебаний. В этом отчете представлены и рассмотрены подробно основные

результаты испытаний при колебаниях жидкого водорода в закрытом баке, а также представлены некоторые общие тенденции для испытаний шугообразного водорода. Также представлены общие (суммарные) сравнения между колебаниями жидкого и шугообразного водорода.

В работе [30] рассматривалась задача об изменении температурного профиля криогенной жидкости, находящейся в теплоизолированном баке, совершающим вынужденные колебания на нерезонансных частотах. Приведено общее решение задач, решение задачи о вынужденных колебаниях стратифицированной жидкости и дана оценка энергии диссипации жидкости, заполняющей прямоугольный бак.

Работа [46] посвящена исследованию влияния низкочастотных вынужденных и параметрических колебаний на теплообменные процессы в криогенных резервуарах. Теоретически определены и экспериментально подтверждены пороговые амплитуды начала параметрических колебаний поверхности жидкости при вертикальном возбуждении и режимы колебаний при горизонтальном возбуждении, при которых возникают волны максимальной амплитуды. Установлено, что при превышении пороговых вибрационных нагрузок происходит разрушение поверхностного слоя, сопровождающееся резким возрастанием теплового потока к свободной поверхности жидкости.

В статье [15] описываются решения задач надежного и безопасного функционирования систем питания энергоустановок с криогенными компонентами топлива. Применительно к режимам эксплуатации двигательных установок летательных аппаратов исследованы интенсивность тепломассообмена в топливных баках с криогенными компонентами, влияние температуры и скорости газа на входе в бак, а также колебаний поверхности жидкости на границе раздела газовой и жидкой фаз в баке.

Экспериментальные исследования влияния низкочастотных колебаний поверхности криогенной жидкости на интенсивность тепломассообмена проводились на экспериментальных установках (ЭУ) с модельными

цилиндрическими баками со сферическими днищами, заполненных жидким водородом или кислородом (см. Рис. 1.6).

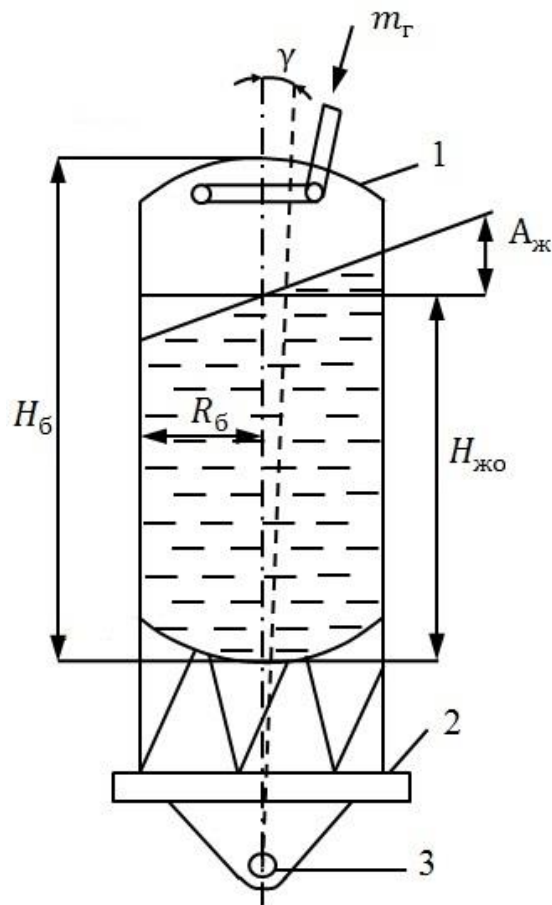


Рис. 1.6. Схема возбуждения линейных колебаний свободной поверхности жидкости в области частот $f \leq 0.4 \text{ Гц}$.

1 – бак с жидким водородом; 2 – подвижная платформа; 3 – ось качания; $A_{жс}$ – амплитуда колебаний поверхности жидкости, m_2 – массовый расход газа наддува.

Усовершенствован метод отработки внутри баковых процессов на экспериментальной установке с моделью создаваемого бака и имитацией натуральных режимов эксплуатации. Получены в безразмерной форме зависимости для определения основного влияния температуры (Рис. 1.7) и скорости газа наддува (Рис. 1.8), а также колебаний поверхности раздела газовой и жидкой фаз на интенсивность процессов тепломассообмена в баке, которые были апробированы при экспериментальной отработке систем питания ДУ блоков «Ц» и «КРБ» ракет-носителей «Энергия» и «GSLV».

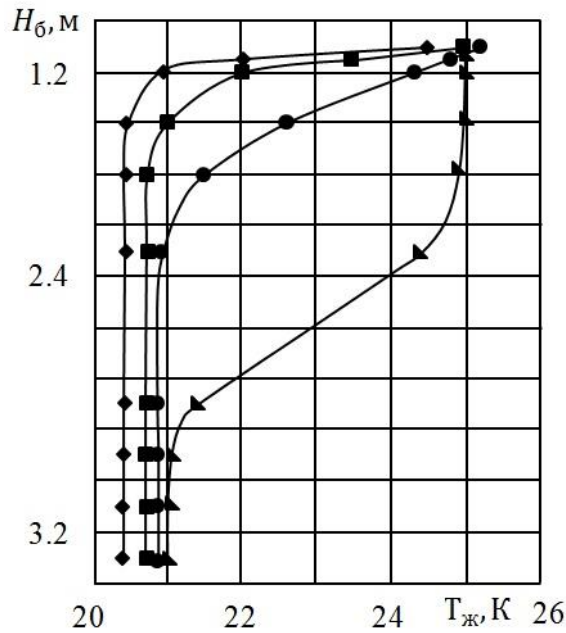


Рис. 1.7. Экспериментальные данные по влиянию на прогрев верхнего слоя жидкого водорода в модели с $R_0 = 1 \text{ м}$, при колебаниях свободной поверхности в течение 600 с и изменениях $A_{жс}$ в диапазоне от 0 до 0.8 м . $f_{жс}$ - частота колебаний жидкости

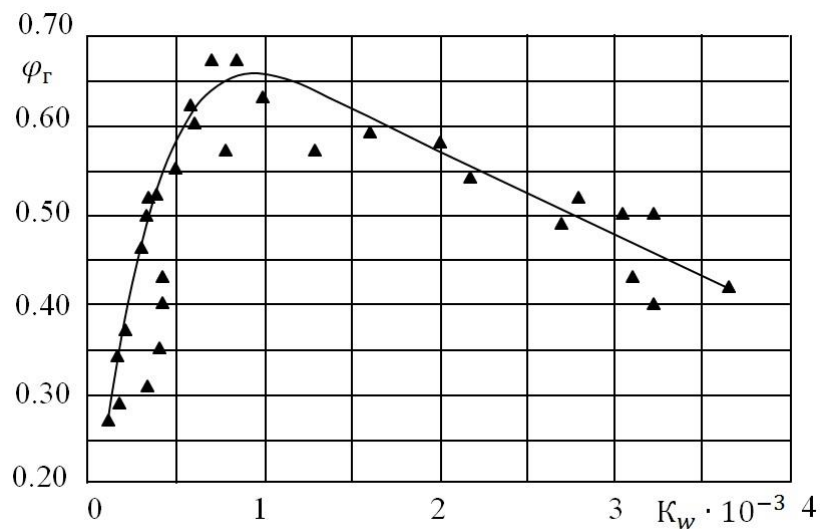


Рис. 1.8. Влияние скорости ввода газа наддува на его работоспособность в баке: φ_2 - доля теплосодержания газа наддува, расходуемого на совершение работы подачи топлива из бака в двигатель и изменение внутренней энергии газового объема в баке, K_w - безразмерная скорость газа.

В статье [48] теоретически и экспериментально исследованы процессы тепломассообмена и гидродинамики при хранении криотоплив в статических и

динамических условиях эксплуатации. На Рис. 1.9 представлена характерная расчетная зависимость безразмерного давления \bar{p} (равновесный и реальный процесс) от времени при постоянных степенях заполнения φ и относительном тепловом потоке \bar{q} .

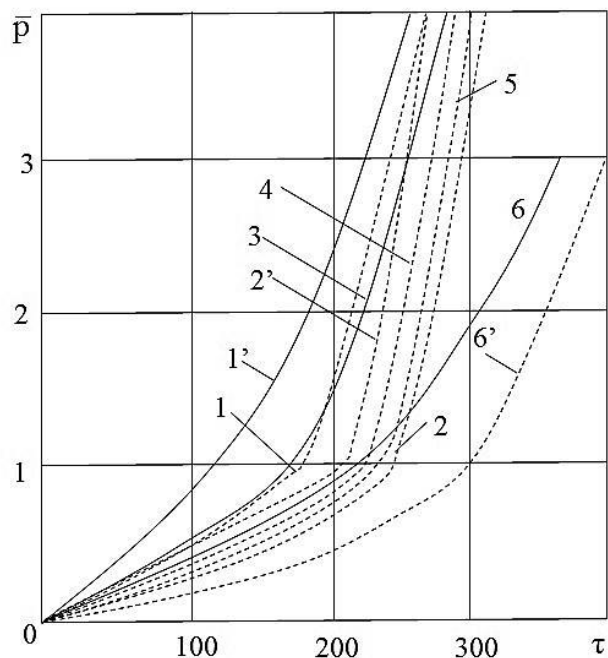


Рис. 1.9. Зависимость безразмерного давления от времени τ хранения жидких продуктов при $\varphi = 0.9$, $q = 0.0108$: Сплошная кривая - равновесные давления (1 - CH_4 , 2 - Kr , 3 - N_2 , 4 - Ar , 5 - O_2 , 6 - H_2); штриховая - расчет (1' - CH_4 , 2' - Kr , 3' - N_2 , 4' - Ar , 5' - O_2 , 6' - H_2); $\bar{p} = 1$ - переход в однофазное жидкостное состояние

В случаях аварийного газосброса при опорожнении резервуаров исследованы процессы теплообмена и гидродинамики, в том числе и при разгерметизации теплоизоляционного пространства и истечении криогенных продуктов в воду. Разработаны методики расчета времени бездренажного хранения, расходных характеристик систем газосброса с учетом особенностей термодинамического состояния криотоплив, дополнительного теплового потока к криотопливу за счет диссипативных явлений при динамическом воздействии колебаний и вибрации.

Экспериментальные исследования динамики колебаний криогенной жидкостей и связанного с этими процессами теплообмена проводились на стенде

(Рис. 1.10), включающем в себя криогенные резервуары объемом 0.1 м^3 и 0.2 м^3 , которые приводились в колебательные движения с помощью электромеханических систем, позволяющих сосудам совершать плоскопараллельные и угловые гармонические колебания путем реализации кинематического способа колебания жидкости. Системы контроля стенда позволяли измерять параметры колебаний сосудов и гидродинамических и теплообменных процессов в жидкости, подвергающейся динамическим воздействиям.

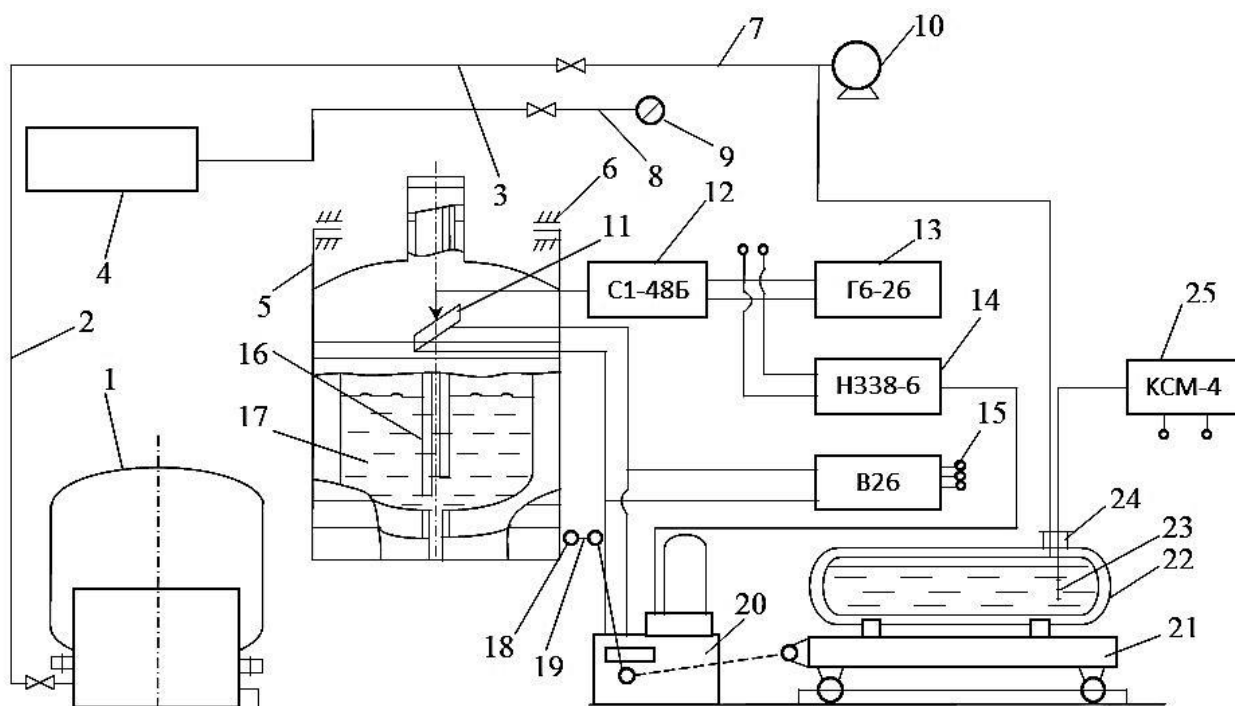


Рис. 1.10. Схема стенда вынужденных колебаний: 1 – резервуар ТРЖК-3; 2 – металлорукав; 3 – линия заправки; 4 – измерительный комплекс; 5 – рама; 6 – серьга; 7 – линия газосброса; 8 – линия контроля давления; 9 – манометр; 10 – газовый счетчик ГСБ-400; 11 – датчик перемещений; 12 – осциллограф С1-48Б; 13 – генератор Г6-26; 14 – шестиканальный самописец Н338-6; 15 – усилитель В26; 16 – шланг; 17 – экспериментальный резервуар; 18 – шарнир; 19 – водило; 20 – рулевая машина; 21 – платформа; 22 – экспериментальный резервуар; 23 – штанга; 24 – горловина; 25 – потенциометр

В статьях [29, 32, 47] исследуется влияние низкочастотных вынужденных и параметрических колебаний на теплообменные процессы в криогенных

резервуарах. Проведено теоретическое и экспериментальное исследование параметрических колебаний поверхности жидкости при вертикальных вибрациях сосудов различной формы. Теоретические зависимости экспериментально подтверждены на модельной и криогенной жидкостях. На основе условия полученных данных о динамике жидкости проведены экспериментальные исследования процессов хранения жидкого азота в промышленном криогенном резервуаре. На Рис. 1.11 представлены расчетные значения дополнительных тепловых потоков для азота, водорода и кислорода.

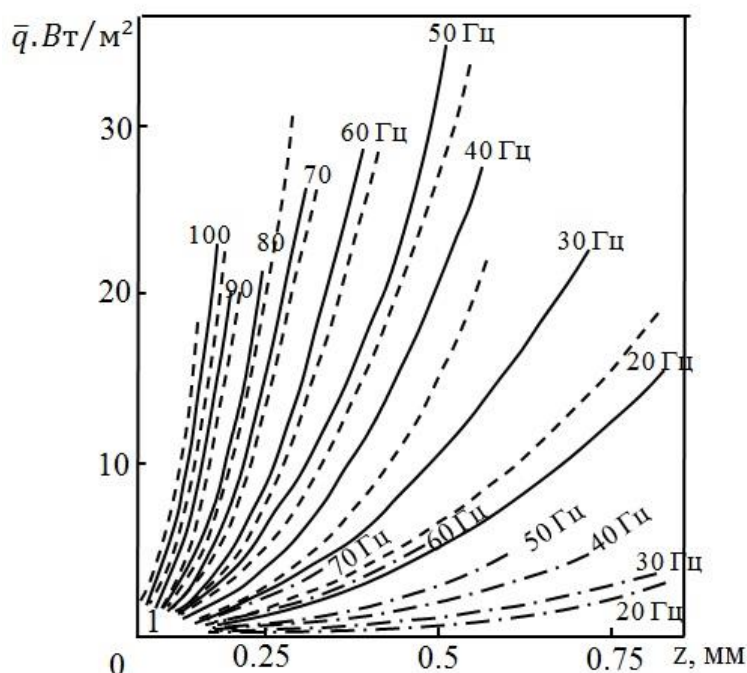


Рис. 1.11. Номограмма удельных тепловых потоков, связанных с диссипацией энергии колебаний:

Сплошная кривая – азот; штриховая – кислород; штрих-пунктирная – водород; 1 – начало разрушения поверхности жидкости

Теоретические и экспериментальные исследования позволяют установить критические уровни динамических транспортных нагрузок, при которых возникает параметрическая неустойчивость и происходит разрушение свободной поверхности, как при вертикальных, так и поперечных колебаниях в низкочастотном диапазоне, что, в свою очередь, позволяет определять границы начала интенсивного роста теплового потока, связанного с диссипацией энергии. Результаты исследований используются при проектировании транспортных

резервуаров и баков топливных систем на криогенных компонентах и при оценке потерь за счет диссипативных явлений в процессе транспортировки.

В статье В. И. Фёдорова [121] изложены подходы к экспериментальной отработке параметров газа в баках при работе средств наддува, основные результаты отработки процессов тепломассообмена в баках ракет-носителей в процессе их наддува газом во время работы двигательной установки. В статье применяются два способа переноса данных экспериментальной отработки на изделие. Первый способ предусматривает моделирование на маломасштабных модельных баках, конкретных режимов работы средств наддува штатных баков. Во втором способе по результатам исследования и обобщения опытных данных получают зависимости для расчета коэффициентов тепломассообмена в газовом объеме и на границе раздела фаз. Задачами экспериментальной обработки было подтверждение принятых решений и изучение процессов тепломассообмена в баках при различных конструкциях газовводов, наличии перегородок в баках, также оценивалось влияние колебаний на процессы тепломассообмена. Полученные результаты были использованы в методиках расчета параметров в топливных баках при работе средств наддува и позволили выбрать оптимальную конструкцию газовводов и параметры газа наддува.

В работе [14, 16] рассматривается задача о влиянии вынужденных колебаний жидкого топлива на тепломассообмен в топливном баке. Приводятся эмпирические зависимости для определения нагрева жидкого водорода и потребного расхода газа наддува при вынужденных колебаниях топлива в баке. Схема размещения бака в экспериментальной установке, позволяющая осуществлять его угловые качания относительно вертикальной оси, приведена на Рис. 1.6.

На Рис. 1.12 показано изменение Δm_s массы конденсируемого газа, которая определялась на основе расчёта с применением уравнения энергобаланса, составляющие уравнения рассчитывались на основе результатов измерений параметров в процессе экспериментов.

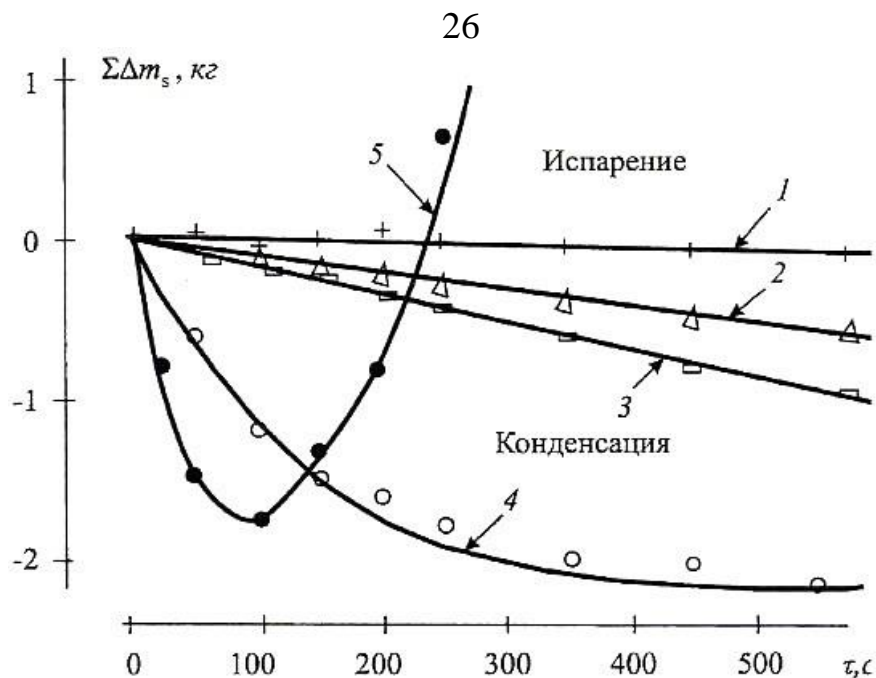


Рис. 1.12. Изменение массы конденсируемого газа в зависимости от продолжительности колебаний и их амплитуды $A_{ж}$:

1 – $1.5 \cdot 10^{-2} м$; 2 – $2.6 \cdot 10^{-2} м$; 3 – $5.3 \cdot 10^{-2} м$; 4 – $1.5 \cdot 10^{-1} м$; 5 – $9 \cdot 10^{-1} м$

Полученные эмпирические зависимости могут быть использованы для оценки влияния вынужденных колебаний криогенных компонентов топлива на тепломассообмен в топливных баках двигательной установки.

В работе [142] представлено экспериментальное исследование влияния плесканий жидкости на термическую стратификацию при малых числах Бонда. Для выяснения влияния плесканий при малых числах B_0 (число B_0 есть отношение гравитационных сил к силам поверхностного натяжения) на термическую стратификацию жидкости в цилиндрическом сосуде проведена серия экспериментов. Основная цель исследования заключалась в выявлении тех из трёх мод плескания, возникающих на основной резонансной частоте, которые разрушают стратифицированный слой и смешивают его с остальной массой жидкости. Как известно [86], при колебаниях свободной поверхности жидкости вблизи основного резонанса возникают следующие моды плескания:

- 1) Устойчивая плоская (SP),
- 2) Неустойчивая пространственная (UNP),
- 3) Устойчивая пространственная (SNP).

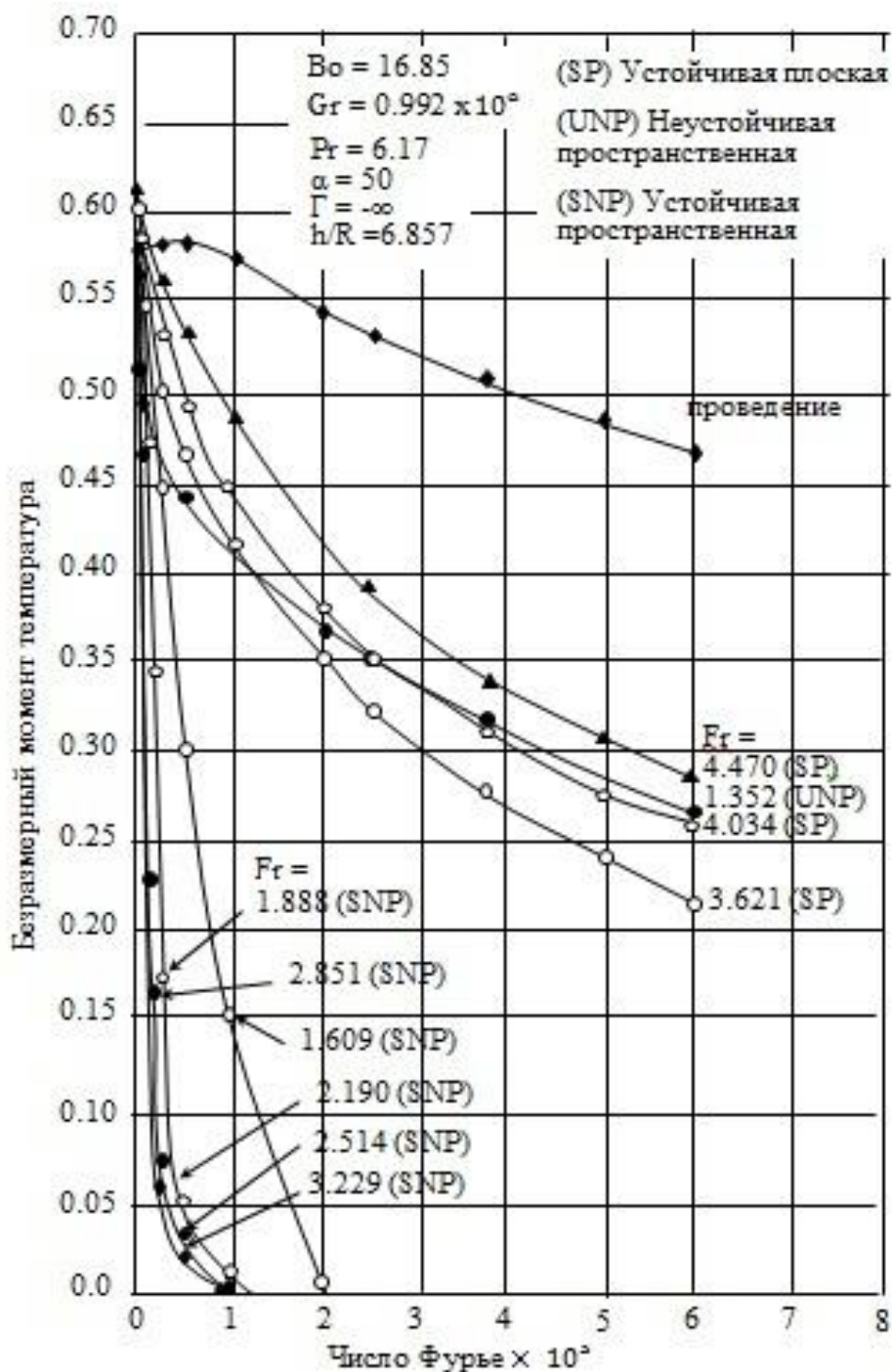


Рис. 1.13. Результаты испытаний - возбуждения амплитудно радиуса соотношение 0.2286

При плескании жидкости при малом числе Bo степень дестратификации изменялась от едва-заметной до полной дестратификации. На Рис. 1.13 в безразмерной форме приведены типичные результаты экспериментов, охватывающие весь интервал изменения степени дестратификации. Наличие ярко выраженных семейства кривых указывает на сильную зависимость степени дестратификации (при заданном отношении амплитуды колебания сосуда к его

радиусу) от числа Фруда Fr , значение которого определяет моду плескания. Эти результаты указывают также на то, что максимальная степень дестратификации достигается при тех значениях числа Fr , при которых мода плескания является устойчивой пространственной.

1.2.3. Исследования динамики стратифицированных и криогенных жидкостей, заполняющих ограниченную и открытую области

Развитие техники и промышленности в прошлом веке привело к образованию нового приложения в изучении динамики стратифицированных жидкостей. Появились работы о колебаниях несмешивающихся жидкостей, заполняющих частично или полностью неподвижный или подвижный резервуар замкнутой формы [31, 36, 72]. В этих исследованиях было получено, что колебания несмешивающихся жидкостей в неподвижном сосуде обладают дискретным спектром частот и получены уравнения движения твёрдого тела, имеющего полости, заполненные жидкостями разных плотностей. В работе [72] установлена применимость вариационных методов для решения задачи о колебаниях несмешивающихся жидкостей в произвольном сосуде.

Работы В. А. Калиниченко, С. Я. Секерж-Зеньковича [55-57] и В. А. Калиниченко [54] посвящены экспериментальному исследованию волн Фарадея, под которыми в гидродинамике понимаются стоячие волны, возбуждаемые при параметрическом резонансе в жидкости, подверженной вертикальным колебаниям. В этих работах методами экспериментальной гидродинамики исследованы гравитационные волны Фарадея на свободной поверхности однородной жидкости и на границе раздела двухслойной жидкости. Изучены механизмы разрушения поверхностных и внутренних волн, а также эффекты критической глубины для поверхностных волн, эффекты срыва параметрических колебаний жидкости.

В работе [53] проведено экспериментальное исследование новых и малоизученных эффектов в стоячих волнах, возбуждаемых при параметрическом резонансе в однородной и двухслойной жидкости.

Колебания непрерывно-стратифицированной жидкости имеющей постоянное значение частоты плавучести рассмотрены в работе [116].

Математические вопросы колебаний непрерывно-стратифицированной жидкости, заполняющей неподвижный сосуд произвольной формы, впервые рассмотрены в работах [74-76, 113]. Дальнейшее исследование математических проблем колебаний стратифицированных жидкостей рассмотрено в работах Н. Д. Копачевского и его учеников, Т. П. Темченко, Д. О. Цветкова [77, 117, 124-127].

В работе [113] рассмотрены некоторые особенности спектра оператора, соответствующего второй краевой задаче для уравнения типа С. Л. Соболева. К такой задаче можно привести систему дифференциальных уравнений, описывающие малые колебания непрерывно-стратифицированной несжимаемой идеальной жидкости.

В статье [116] рассматривается задача об устойчивости стационарных вращений жидкости с линейным распределением плотности, когда уравнения однородного вихревого движения жидкости по форме записи одинаковы с уравнениями движения твердого тела в случаях Лагранжа и Ковалевской. При решении с помощью прямого метода Ляпунова показано, что достаточные условия устойчивости стационарных вращений неоднородной жидкости совпадают с достаточными условиями устойчивости движения твердого тела. По аналогии с движением твердого тела утверждается, что полученные условия являются также необходимыми и достаточными условиями стационарных вращений неоднородной жидкости в эллипсоидальной полости.

В работе [41] предложен способ решения плоской задачи об устойчивости в малом стационарного вращения цилиндра, целиком заполненного стратифицированной вязкой несжимаемой жидкостью. Предполагается, что угловая скорость вращения цилиндра поддерживается постоянной, а его ось находится в осесимметричном вязкоупругом закреплении. Приведен пример решения задачи об устойчивости предлагаемым способом. Установлено, что резонансное возбуждение внутренних волн во вращающейся жидкости,

заполняющей цилиндр, является важным фактором возникновения неустойчивости.

В статье [12] исследуется задача о колебаниях двухслойной тяжелой жидкости, целиком заполняющей прямоугольный сосуд. Методом разделения переменных построено решение задачи Коши-Пуассона и исследованы его свойства. Поставлена и приближенно решена задача об управлении движением сосуда с финальным условием гашения внутренних волн жидкости.

В статье [10] исследуется задача об одномерных колебаниях твердого тела, имеющего прямоугольную полость и упруго связанного с неподвижным основанием. Полость целиком заполнена тяжелой двухслойной жидкостью, которая может совершать плоское движение. Асимптотическими методами построено приближенное решение задачи о взаимодействии колебаний такого сосуда и жидкости при различных предположениях относительно частот, обусловленные упругой связью и собственными колебаниями двухслойной жидкости.

В работе [42] изучается задача об устойчивости стационарного вращения ротора, заполненного стратифицированной вязкой несжимаемой жидкостью. Установлено, что при построении границы области устойчивости, определяющую роль играют условия резонансного возбуждения внутренних волн, распространяющихся во вращающейся стратифицированной вязкой жидкости, заполняющей ротор.

В статье [11] исследуются одномерные горизонтальные колебания твердого тела, имеющего прямоугольную полость, целиком заполненную тяжелой двухслойной жидкостью.

В статье [43] рассматривается плоская задача об устойчивости, а малом стационарного вращения вертикального осесимметричного ротора на гидродинамических подшипниках (ГДП). При решении гидродинамические задачи учитываются наиболее существенные инерционные члены в уравнениях движения жидкости в смазочном слое. Построено разбиение плоскости параметров внешней вязкоупругой силы на области с различной степенью

неустойчивости. Выделена область устойчивости стационарного вращения ротора на ГДП.

В статье [9] исследуются внутренние волновые движения устойчиво стратифицированной жидкости в подвижном сосуде и способы управления этими колебаниями. Рассматриваются случаи экспоненциальной стратификации, отличающиеся рядом существенных особенностей по сравнению со случаем дискретной стратификации.

В работе [115] исследована устойчивость вращения твердого тела с криогенной идеальной жидкостью, совершающей однородное вихревое движение. Под однородным вихревым движением криогенной жидкости понимается движение, при котором не только скорости, но и плотность частиц жидкости являются линейными функциями координат. Для осесимметричного твердого тела с эллипсоидальной полостью вращений полученные условия устойчивости могут быть интерпретированы как достаточные условия устойчивости, равномерных вращений двух связанных гироскопов, один из которых (нижний) является гироскопом Эйлера-Лагранжа, а другой – гироскопом Лагранжа.

В работе [126] сформулирована и качественно исследована задача о малых, движениях стратифицированной жидкости во вращающемся сосуде. Основным новым результатом является теорема о существовании и единственности сильного решения изучаемой начально-краевой задачи.

В работе [125] изучается задача о малых движениях системы из двух тяжелых вязких стратифицированных жидкостей, полностью заполняющих неподвижный сосуд, плотности, которых в состоянии равновесия имеют устойчивую стратификацию. Используя теорию дифференциально-операторных уравнений в гильбертовом пространстве, теорию краевых задач математической физики, получены условия, при которых существует сильное по времени решение начально-краевой задачи, описывающей эволюцию данной гидросистемы.

В работе [77] изучается задача о малых движениях и нормальных колебаниях системы из двух тяжелых несмешивающихся стратифицированных жидкостей, частично заполняющих неподвижный сосуд. Получены условия, при

которых, существует сильное по времени решение начально-краевой задачи, описывающей эволюцию данной гидросистемы. Для соответствующей спектральной задачи получены утверждения о локализации спектра, асимптотическом поведении ветвей собственных значений, утверждение о наличии существенного спектра задачи.

В статье [127] о нормальных колебаниях системы вязких стратифицированных жидкостей, полностью заполняющих неподвижный сосуд, доказано существование диссипативных волн, обусловленных наличием сил вязкости, и внутренних волн, появляющихся из-за действия сил плавучести, а также поверхностных волн вблизи границ раздела.

В работах [123-124] рассмотрены задачи о малых движениях вязкой стратифицированной жидкости и малых движениях идеальной стратифицированной жидкости в сосуде.

После начала прошлого столетия количество публикаций, посвященных колебаниям стратифицированной жидкости, связанных изучением внутренних волн в океане и атмосфере, сильно возросло. Ограничимся обсуждением наиболее крупных монографий и книг, в которых обобщены исследования по данной тематике и имеется обширная библиография.

Среди работ этой группы, в первую очередь, следует отметить монографию немецкого океанолога В. Крауса [79]. В этой монографии освещены вопросы условий возникновения линейных внутренних волн с параметрами среды и геометрией водоема. В этой же книге приведены способы сбора, обработки и интерпретации экспериментальных данных по внутренним волнам. В монографиях В. М. Каменковича [58] и Ю. З. Миропольского [87] дано описание теоретических методов исследования линейных внутренних волн в океане, а также приведён анализ нелинейных эффектов.

Внутренним волнам в океане посвящена небольшая глава в книге [122], в которой кратко рассмотрены вопросы резонансного взаимодействия и вырождения внутренних волн. Отметим здесь также книгу [35], сыгравшую большое значение в популяризации знаний о внутренних волнах.

Измерениям внутренних волн, играющим важную роль в динамике и генерации турбулентности в морской среде, посвящено большое число оригинальных работ и обзоров, среди которых можно выделить сборники статей [136] и монографию [71]. Моделированию внутренних волн в лаборатории посвящены работы Стивенсона [133, 139, 141, 143-146], Лайтхилла [80], Ю. Д. Чашечкина [51, 84-85, 94, 129]. Определение собственных частот внутренних волн посвящены работы Нестерова [8, 95]. В работах В. А. Городцова, Э. В. Теодоровича [7, 37-40] рассмотрены задачи связанные с излучением внутренних волн движущимся источником. Задачи генерации монохроматических внутренних волн рассмотрены в работах Ю. В. Кистовича, Ю. Д. Чашечкина [62-63, 65, 67-68, 128].

Математические вопросы колебаний стратифицированных жидкостей в открытых областях рассматривались в работах С. А. Габова, А. Г. Свешникова и их учеников [22-28].

В работе [69] рассмотрена задача о стационарных волнах на поверхности раздела однородной и экспоненциально стратифицированной жидкостей. В предположении, что перепад плотности на границе раздела слоев и градиент плотности жидкости внутри стратифицированного слоя имеют одинаковый порядок малости, выведено уравнение второго приближения теории мелкой воды, описывающее распространение уединенных волн конечного амплитуда.

В работе [107] изучались гидродинамические нагрузки, действующие на колеблющийся цилиндр. В линейной постановке с использованием приближения Буссинеска рассмотрена двумерная задача об установившихся колебаниях горизонтально расположенного цилиндра, погруженного в слой линейно стратифицированной жидкости, верхняя граница которого является единым покровом. В режиме генерации внутренних волн использован метод распределенных по контуру тела массовых источников, а в режиме отсутствия внутренних волн интегральное уравнение для возмущенного давления в жидкости. Для случая сплошного ледяного покрова, а также для частных случаев (битого льда, свободной поверхности и твердой крышки) выполнены, расчеты

гидродинамической нагрузки, действующей на тело, в зависимости от частоты его колебаний.

Многочисленные данные наблюдений внутренних волн в морях и озерах суммированы в ряде книг и обзорах, таких как В. Краусс, (Ю. З. Миропольский [87], Е. Г. Морозов [91], К. В. Коняев, К. Д. Сабинин [71]); здесь же можно найти основы теории распространения, генерации и затухания внутренних волн. Существует также большое количество работ по лабораторному и численному моделированию процессов генерации внутренних волн различными источниками, упомянем здесь только часть работ (Степанянц, Стурова [106], Стурова [108], Мотыгин, Стурова [92], Кистович, Чашечкин [61, 64, 66]).

Во всех перечисленных выше исследованиях, за исключением некоторых отдельных примеров, изучены вопросы распространения внутренних волн в открытых областях (океан, атмосфера).

1.3. Цели и задачи работы

Из приведенного обзора исследований по динамике стратифицированной жидкости вытекает, что к настоящему времени в достаточной мере проработаны вопросы динамики стратифицированной жидкости в открытых областях (морях, океанах), а также разработаны проблемы касающиеся движения тел в стратифицированной жидкости. В тоже время обзор исследований по криогенной жидкости показывает, что наибольшее внимание уделено вопросам тепломассобмена и влиянию колебаний на тепломассобменные процессы. Было получено, что при колебаниях резервуаров, содержащих криогенную жидкость, в определённом диапазоне частот и амплитуд колебаний, физические параметры (плотность, температура), характеризующие состояние основной массы жидкости остаются постоянными, и могут резко измениться только при определённом воздействии.

В современных жидкостных ракетах-носителях и космических аппаратах жидкое топливо может составлять 80% и более от всей массы объекта. Для будущего освоения космического пространства требуется новая концепция

организации космических перелётов. Одной из таких концепций может являться проект создания заправочных станций на околоземной орбите или на других подходящих орбитах. Поэтому для таких объектов становятся актуальными вопросы динамики тел, содержащих жидкую массу. Из приведенного обзора литературы по динамике твёрдых тел, имеющих полости с однородной жидкостью и многочисленных исследований, посвященных ракетно-космической тематике, следует что, вопросы динамики тел, содержащих однородную жидкость, разработаны в достаточной мере. Однако вопросы, связанные с динамикой тел, содержащих жидкость, частицы которой могут иметь неодинаковую плотность, температуру, почти не исследованы.

При решении задач динамики базовыми понятиями, являются такие величины как масса, моменты инерции, значения которых непосредственно зависят от распределения плотности вещества в исследуемом объекте, и динамика самого объекта.

Поэтому исследование динамики тел, содержащих неоднородную жидкую массу, в частности криогенную жидкость, является современной актуальной проблемой и целью настоящей диссертационной работы.

ГЛАВА 2. МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ В НЕПОДВИЖНОМ РЕЗЕРВУАРЕ

В главе 2 приведены уравнения движения идеальной криогенной жидкости частично или полностью, заполняющей неподвижной резервуар [4]. Рассмотрены задачи об определении собственных частот колебаний жидкости и свободной поверхности жидкости. Получены приближенные формулы для определения собственных частот колебаний поверхностных и внутренних волн в случае постоянной частоты плавучести для случая произвольного закона изменения плотности разработан алгоритм, позволяющий оценить частоты внутренних волн.

2.1. Вывод уравнений малых движений стратифицированной жидкости

Основные уравнения

Введем правую систему координат $Ox_1x_2x_3$ с осью Ox_3 , направленной противоположно направлению вектора \vec{g} . При самых общих предположениях макроскопические движения рассматриваемой жидкости могут быть описаны общей системой уравнений гидродинамики, включающей в себя:

Уравнение движения Навье-Стокса [80, с.73]

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) = -\nabla \rho + \rho \vec{g} + \mu \Delta \vec{V} + \left(\xi + \frac{\mu}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \vec{V}), \quad (2.1)$$

Уравнение непрерывности [80, с.15]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0, \quad (2.2)$$

Здесь p, ρ, \vec{V} – давление, плотность и вектор скорости частиц жидкости, μ, ξ – коэффициенты вязкости. Написанные уравнения необходимо дополнить соотношениями, учитывающими приток тепла из твердого тела и изменения состояния. [80, с.273]

$$\rho T \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla S \right) = \nabla \cdot (\chi \nabla T) + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial V_l}{\partial x_l} \right)^2 + \xi (\nabla \cdot \vec{V})^2. \quad (2.3)$$

где T, S - температура и энтропия, δ_{ik} - символ Кронекера, χ - коэффициент теплопроводности

В уравнении (2.3) выражение в левой части – количество тепла, отнесённое к единице объёма, первое слагаемое в правой части – количество тепла, приносимое в объём жидкости посредством теплопроводности, второе слагаемое – количество энергии, диссипируемое в виде тепла благодаря вязкости.

Система уравнений гидродинамики (2.1)-(2.3) будет замкнута, если её дополнить уравнением состояния

$$\rho = \rho(T, p). \quad (2.4)$$

и необходимыми граничными и начальными условиями.

Уравнение возмущённого движения

Имеющиеся экспериментальные исследования температурного расслоения показывают, что в полости с жидким криопродуктом первоначально реализуется свободно-конвективное движение, зависящее от времени, геометрических размеров резервуара, распределения притока теплоты по его поверхности, теплофизических свойств жидкого криопродукта и его паров, а также от материалов и степени заполнения резервуара и начального распределения температуры жидкости в нем.

В данной работе рассмотрены только малые движения жидкости [2]. Под малыми движениями будем понимать малые возмущения некоторого невозмущенного основного состояния жидкости, которое в общем случае может не удовлетворять условиям механического равновесия и отвечать некоторому конвективному движению среды с характерной скоростью \vec{V}_0 . В соответствии с концепцией малых возмущений функции T, p, ρ, S, \vec{V} представим в виде

$$\begin{aligned} T &= T_0(\vec{x}) + T'(\vec{x}, t), & p &= p_0(\vec{x}) + p'(\vec{x}, t), & \rho &= \rho_0(\vec{x}) + \rho'(\vec{x}, t), \\ S &= S_0(x) + S'(x, t), & \vec{V} &= \vec{V}_0 + \vec{V}'(x, t). & \vec{x} &= \{x_1, x_2, x_3\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Рассматривая малые отклонения жидкости от невозмущенного состояния, можно считать коэффициенты вязкости μ, ξ , теплопроводности χ постоянными величинами. После подстановки соотношений (2.5) в уравнениях (2.1)-(2.3)

получаем следующую систему линеаризованных уравнений движения неоднородной среды

$$\frac{\partial \vec{V}'}{\partial t} + \vec{V}_0 \cdot \nabla \vec{V}' + \vec{V}' \cdot \nabla \vec{V}_0 = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' + \frac{\mu}{\rho_0} \Delta \vec{V}' + \frac{1}{\rho_0} \left(\xi + \frac{\mu}{3} \right) \nabla (\nabla \vec{V}') + \frac{\rho'}{\rho_0} \vec{G}, \quad (2.6)$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla \rho_0 \cdot \vec{V}' + \operatorname{div} \vec{V}' = 0, \quad (2.7)$$

$$\rho_0 T_0 \left(\frac{\partial S'}{\partial t} + \vec{V}' \cdot \nabla S_0 \right) = \chi \Delta T', \quad (2.8)$$

к которым надлежит добавить уравнения состояния жидкости в возмущенном движении

$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p T' + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T p' \quad (2.9)$$

Для описания невозмущенного состояния при дополнительном предположении механического равновесия криогенной жидкости получаются уравнения

$$\nabla p_0 = \rho_0 \vec{G} \quad (2.10)$$

$$\Delta T_0 = 0 \quad (2.11)$$

Уравнения (2.10), (2.11) описывают состояние механического равновесия системы, которому отвечает некоторое распределение невозмущенной плотности $\rho_0(\vec{x})$ и, если жидкость теплопроводна, некоторое распределение температуры. Из вида уравнения (2.11) следует известный результат [34], что жидкость будет находиться в механическом равновесии только при линейном законе изменения температуры в направлении главного вектора массовых сил.

Градиент плотности жидкости в невозмущенном состоянии будет

$$\nabla \rho_0 = \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial T} \right)_p \nabla T_0 + \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial p} \right)_T \nabla p_0 \quad (2.12)$$

или

$$\frac{1}{\rho_0} \nabla \rho_0 = -\alpha \nabla T_0 + \frac{\vec{G}}{c_T^2} \quad (2.13)$$

Для большинства жидкостей изотермическая скорость звука c_T имеет порядок 10^5 см/сек. Первый член в правой части уравнения (2.13) оказывается превалирующим над вторым при выполнении условия

$$\alpha |\nabla T_0| \gg 10^{-5} [1/м]. \quad (2.14)$$

Выполнение условия (2.14) означает, что в невозмущенном состоянии с большой степенью точности жидкость можно считать несжимаемой. Для градиента плотности в невозмущенном состоянии имеем формулу

$$\frac{1}{\rho_0} \nabla \rho_0 = -\alpha \nabla T_0 \quad (2.15)$$

В уравнении (2.15) коэффициент теплового расширения α может зависеть от температуры, так что линейному закону изменения температуры может отвечать другой закон изменения плотности. Величина

$$-g \frac{1}{\rho_0} \nabla \rho_0 = N_1^2 \vec{e}_1 + N_2^2 \vec{e}_2 + N_3^2 \vec{e}_3 \quad (2.16)$$

является фундаментальной характеристикой неоднородной среды. В выражении (2.16) приняты обозначения

$$N_i^2 = -g \frac{d\rho_0}{\rho_0 dx_i} = -\alpha g \frac{dT_0}{dx_i} \quad (2.17)$$

Вектор \vec{N}^2 удобно назвать главным вектором сил плавучести, а модуль вектора \vec{N}^2 - частотой плавучести. В динамике океана, в метеорологии величина N_3^2 обычно называется частотой Вайсяля, Вайсяля-Брендта или частотой плавучести [58]. Физический смысл частоты плавучести состоит в том, что она есть собственная частота колебаний отдельной частицы жидкости постоянной плотности.

Во многих практически важных задачах, связанных с криогенной жидкостью, наиболее заметное изменение плотности жидкости происходит в направлении действия поля массовых сил. Величины N_1^2 и N_2^2 в этих случаях отличны от нуля в очень малой зоне, прилегающей к границе области,

занимаемой жидкостью, и можно допустить, что в основной массе жидкости будут выполняться соотношения

$$|N_1^2| \ll |N_3^2|, \quad |N_2^2| \ll |N_3^2|.$$

Такую криогенную жидкость, плотность которой зависит только от одной координаты, в литературе [58, 79, 118] обычно называют стратифицированной жидкостью. Далее в тексте диссертации термины криогенная и стратифицированная жидкость будут использоваться как синонимы.

В криогенной жидкости, заполняющей цилиндрический бак, при разнице температур $\Delta T_0 = 10^\circ$ в слое толщиной $\Delta x_3 = 1\text{м}$, квадрат частоты плавучести имеет оценку

$$\text{для жидкого водорода} \quad N^2 = \frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dx_3} \approx \alpha g \frac{\Delta T_0}{\Delta x_3} = 0.0126 \cdot 10 \cdot 10 = 1.26 \text{сек}^{-2}$$

$$\text{для жидкого кислорода} \quad N^2 = \frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dx_3} \approx \alpha g \frac{\Delta T_0}{\Delta x_3} = 0.00385 \cdot 10 \cdot 10 = 0.385 \text{сек}^{-2}$$

$$\text{для жидкого азота} \quad N^2 = \frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dx_3} \approx \alpha g \frac{\Delta T_0}{\Delta x_3} = 0.005 \cdot 10 \cdot 10 = 0.5 \text{сек}^{-2}$$

В данной работе рассмотрены малые возмущения жидкости от устойчивого положения механического равновесия, при котором $N_1^2 = N_2^2 = 0$, $\vec{G} = -g\vec{e}_3$. В этом случае под устойчивым механическим равновесием понимается равновесие жидкости (при выбранном направлении оси Ox_3), для которого выполняется условие

$$\frac{d\rho_0}{dx_3} < 0. \quad (2.18)$$

Для исследования многих физических задач, связанных с неоднородностью жидкости, уравнения малых движений (2.6)-(2.9) могут быть значительно упрощены. Пусть a - характерная амплитуда малых движений жидкости, τ - характерное время, ℓ - характерное расстояние, на котором амплитуда a претерпевает заметное изменение. Очевидно, расстояние ℓ имеет порядок характерного размера полости.

Прежде всего, отметим, что линеаризованные уравнения будут справедливы при выполнении неравенства [80, с.54]

$$\ell \gg a,$$

т.е. амплитуда движений частиц жидкости должна быть мала по сравнению с характерным размером полости. Сравнивая член $\partial \vec{V}' / \partial t$ с другими членами уравнения (2.6), приходим к следующей оценке слагаемых уравнения движения

$$\frac{\rho}{\rho_0} \approx \frac{a}{\tau^2 g}, \quad \frac{p}{\rho_0} \approx \frac{a\ell}{\tau^2}, \quad \Delta V \approx \frac{a}{\tau \ell^2}. \quad (2.19)$$

(штрих в соотношения (2.19) и далее писать не будем).

Рассмотрим далее уравнение (2.7). Распределение скорости жидкости можно считать приближенно соленоидальным при выполнении неравенства [80]

$$|\operatorname{div} \vec{V}| \ll \frac{a}{\tau \ell} \quad (2.20)$$

или

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \vec{V} \cdot \nabla \rho_0 \ll \frac{a}{\tau \ell}. \quad (2.21)$$

Члены $\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}$ и $\frac{1}{\rho_0} \vec{V} \cdot \nabla \rho_0$ должны быть тогда одного порядка малости.

Используя (2.19), получаем следующую оценку для характерного времени

$$\frac{1}{\tau^2} = |\vec{N}^2| \quad (2.22)$$

Из неравенств (2.20), (2.21) с использованием (2.22) можно получить оценку безразмерной частоты плавучести через характерный размер полости

$$\frac{1}{\vec{N}^2} \gg 1, \quad (2.23)$$

где $\vec{N}^2 = \left| \frac{\ell}{\rho_0} \nabla \rho_0 \right|$ - модуль безразмерной частоты плавучести.

Таким образом, при выполнении неравенства (2.23) векторное поле скоростей возмущенного движения жидкости можно считать соленоидальным.

Рассмотрим теперь, при каких условиях возмущенное движение криогенной жидкости можно считать несжимаемым по давлению.

Действительно:

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} &= \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T \frac{dp}{dt} + \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p \frac{dT}{dt} \\ \frac{d\rho}{dt} &= \left(\frac{\partial\rho}{\partial S}\right)_T \frac{dS}{dt} + \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_S \frac{dT}{dt} \\ \frac{d\rho}{dt} &= \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_S \frac{dp}{dt} + \left(\frac{\partial\rho}{\partial S}\right)_p \frac{dS}{dt}\end{aligned}\tag{2.24}$$

или преобразуя первое из уравнений

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \vec{V} \cdot \nabla \rho_0 = \frac{1}{c_T^2} \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{G} \cdot \vec{V} \right) - \alpha \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla T_0 \right).\tag{2.25}$$

Используя оценки для ρ/ρ_0 и p/ρ_0 , находим условие, при выполнении которого изменение плотности частицы жидкости можно считать независимым от давления

$$\bar{N}^2 \gg \frac{\ell g}{c_T^2}\tag{2.26}$$

и, следовательно, $\frac{\partial\rho}{\partial p} = 0$. Легко видеть, что выполнение условия (2.26)

эквивалентно требованию (2.14). Таким образом, при $\bar{N}^2 \gg 10^{-5}$ ($\ell = 1\text{м}$) как невозмущенное, так и возмущенное движения криогенной жидкости можно рассматривать как несжимаемое по давлению. Это означает, что изменение плотности обуславливается только изменением температуры, т.е. справедливы уравнения

$$\frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p \frac{dT}{dt}; \quad \rho = -\alpha\rho_0 T.$$

Следовательно, возмущенное давление будет представлять собой независимую величину и не будет больше являться термодинамической переменной [103, с.96]. Для несжимаемой вязкой криогенной жидкости,

обладающей соленоидальным полем скоростей, система уравнений (2.6)-(2.9) упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} \nabla p + \frac{\mu}{\rho_0} \Delta \vec{V} + \frac{\rho}{\rho_0} \vec{G}, \quad (2.27)$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} W \cdot \frac{d\rho_0}{dx_3} = 0, \quad (2.28)$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0, \quad (2.29)$$

$$\rho_0 c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + W \frac{dT_0}{dx_3} \right) = \chi \Delta T, \quad (2.30)$$

$$\rho = -\alpha \rho_0 T. \quad (2.31)$$

где χ - коэффициент теплопроводности, W - амплитудная функция вертикальной компоненты скорости.

Система (2.27)-(2.31) содержит 5 уравнений для определения 4-х неизвестных \vec{V}, p, ρ, T . Условие выполнения соленоидальности поля скоростей “расщепило” уравнение непрерывности на два самостоятельных уравнения (2.28), (2.29).

Если одновременно считать криогенную жидкость несжимаемой по давлению, то правая часть уравнения (2.30) должна равняться нулю. Действительно, из соотношений (2.24) видно, что уравнение несжимаемости (2.28) и независимость ρ от p требует, чтобы выполнялись соотношения

$$\frac{dT}{dt} = 0; \quad \frac{dS}{dt} = 0, \quad (2.32)$$

т.е. движение должно быть адиабатическим.

В этом случае непротиворечивой системой уравнений может являться система

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0(x_3)} \nabla p + \frac{\mu}{\rho_0} \Delta \vec{V} + \frac{\rho}{\rho_0(x_3)} \vec{G}; \quad (2.33)$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0, \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{d\rho_0}{dx_3} W; \quad (2.35)$$

$$\rho = -\alpha \rho_0 T. \quad (2.36)$$

Вместо уравнения несжимаемости (2.35) может быть использовано любое из уравнений (2.32). Частицы жидкости тогда будут перемещаться таким образом, что каждая частица сохраняет при движении значения температуры, плотности, энтропии, коэффициента линейного расширения и пр.

Рассмотрим, при каких значениях физических параметров движение криогенной вязкой жидкости можно считать адиабатическим. Член, отвечающий за теплопроводность, в правой части уравнения (2.30) имеет порядок $\chi T / \ell^2$. Каждое слагаемое в левой части уравнения (2.30) имеет порядок $\rho_0 c_p T / \tau$. Условие адиабатичности движения принимает вид

$$\frac{\chi^*}{N \ell^2} \ll 1,$$

где $\chi^* = \chi / \rho_0 c_p$ - коэффициент температуропроводности.

Для средних значений $|N_3^2| = 1 \cdot 10^{-3} c^{-2}$ из диапазона $|N_3^2|$ удовлетворяющего условиям (2.23), (2.26) значения χ^* , при которых движение жидкости можно считать адиабатическим, должны удовлетворять неравенствам

$$\chi^{*2} \ll |\vec{N}^2| \ell^3 g = 1 \cdot 10^{-2}; \quad \chi^* \ll 1 \cdot 10^{-1} \left[\frac{M^2}{c} \right]. \quad (2.37)$$

Дальнейшее упрощение уравнений (2.33)-(2.36) может быть проведено, если пренебречь слагаемым $\mu \rho_0^{-1} \Delta \vec{V}$ в уравнении (2.33). Из оценок (2.19) следует, что криогенную несжимаемую жидкость можно считать идеальной, если кинематическая вязкость μ / ρ_0 удовлетворяет соотношению

$$\left(\frac{\mu}{\rho_{0\min}} \right)^2 \ll |\vec{N}^2| \ell^3 g \quad \text{или} \quad \frac{\mu}{\rho_{0\min}} \ll 1 \cdot 10^{-1} \left[\frac{M^2}{c} \right] \quad (2.38)$$

При выполнении всех условий (2.23), (2.26), (2.37), (2.38) получаем следующие уравнения малых движений криогенной несжимаемой идеальной жидкости

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0(x_3)} \nabla p + \frac{\rho}{\rho_0(x_3)} \vec{G}, \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + W \frac{d\rho_0}{dx_3} = 0, \quad (2.40)$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0. \quad (2.41)$$

Систему уравнений (2.40)-(2.41) в литературе, посвященной изучению стратифицированных жидкостей, называют уравнениями для невязкой жидкости в приближении Буссинеска

В случае теплопроводной жидкости уравнения (2.40)-(2.41) могут быть записаны также в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} + W \frac{dT_0}{dx_3} = 0, \quad (2.42)$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0. \quad (2.43)$$

Уравнения движения (2.33)-(2.36), (2.39)-(2.43) были получены путем линеаризации общей системы уравнений гидродинамики с использованием дополнительных неравенств. Однако часто при решении задач гидродинамики стратифицированной жидкости используют приближение, считая постоянными величинами не только коэффициенты вязкости, но и плотность жидкости $\rho_0(x_3)$ в уравнениях движения (2.33), (2.39), (2.42). В уравнении несжимаемости пространственное изменение плотности учитывают, так как это слагаемое обуславливает основной эффект рассматриваемых гидродинамических задач. Вследствие замены $\rho_0(x_3)$ на некоторое постоянное значение ρ_0^* изменяется, и определение частоты плавучести

$$N_*^2(x_3) = -\frac{g}{\rho_0^*} \frac{d\rho_0}{dx_3} \quad (2.44)$$

Этот вид приближения (замена $\rho_0(x_3)$ на $\rho_0^* = const$) в уравнениях движения и учет вариации плотности только при векторе \vec{G} в работе [111] называется двойным приближением Буссинеска. Замена $\rho_0(x_3)$ на некоторое постоянное значение несколько облегчает исследование рассматриваемых линейных задач, не нанося значительного ущерба результату самого исследования [58]. При использовании двойного приближения Буссинеска уравнения малых движений идеальной несжимаемой криогенной жидкости принимают вид

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0^*} \nabla p + \frac{\rho}{\rho_0^*} \vec{G}, \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + W \frac{d\rho_0}{dx_3} = 0, \quad (2.46)$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0. \quad (2.47)$$

2.1.1. Уравнения в частных производных для одной функции и постановка краевых задач

Система уравнений (2.39)-(2.41), (2.45)-(2.47) может быть сведена к одному дифференциальному уравнению в частных производных для функции $p(\vec{x}, t)$.

Продифференцируем по переменным x_1 и x_2 соответственно выражения для проекций уравнения (2.39) по оси Ox_1, Ox_2 . Используя уравнения неразрывности, после несложных преобразований, получим

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4} \Delta p - \frac{1}{g} N_3^2 \frac{\partial^5 p}{\partial x_3 \partial t^4} - \left(\frac{\partial N_3^2}{\partial x_3} + \frac{1}{g} N_3^4 \right) \frac{\partial^3 p}{\partial x_3 \partial t^2} + N_3^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta_h p + N_3^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta p + N_3^4 \Delta_h p = 0. \quad (2.48)$$

Отметим здесь, что при использовании двойного приближения Буссинеска уравнение (2.48) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4} \Delta p - \frac{\partial N_{3*}^2}{\partial x_3} \frac{\partial^3 p}{\partial x_3 \partial t^2} + N_{3*}^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta_h p + N_{3*}^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta p + N_{3*}^4 \Delta_h p = 0. \quad (2.49)$$

В случае экспоненциального распределения плотности $\rho_0(x_3) = \rho_0(0)\exp[-\beta_0 x_3]$ квадрат частоты плавучести $N_3^2(x_3)$ становится постоянной величиной равной $N_0^2 = \beta_0 g$ и уравнение (2.49) приобретает вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\Delta p + \frac{1}{g} N_0^2 \frac{\partial p}{\partial x_3} \right] + N_0^2 \Delta_h p = 0. \quad (2.50)$$

Уравнение для функции $p(\bar{x}, t)$ при постоянной частоте плавучести при использовании двойного приближения Буссинеска упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta p + N_0^2 \Delta_h p = 0. \quad (2.51)$$

Рассмотрение малых движений стратифицированной жидкости при постоянной частоте плавучести фактически означает переход от уравнения (2.49) в частных производных с переменными коэффициентами к уравнению с постоянными коэффициентами. Это позволяет несколько облегчить исследование рассматриваемой проблемы, не нанося существенного урона качеству получаемых результатов.

С физической точки зрения предположение о постоянстве частоты плавучести при использовании двойного приближения Буссинеска означает, что плотность жидкости может изменяться по линейному закону

$$\rho_0(x_3) = \rho_0^* (1 - \beta_0 x_3). \quad (2.52)$$

где ρ_0^* - некоторая осредненная постоянная плотность жидкости, определяемая, например, соотношением

$$\rho_0^* = \frac{1}{\tau} \int_{\tau} \rho_0(x_3) d\tau,$$

$d\tau$ - элемент области, занимаемой жидкостью.

Если пренебречь производной $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial p}{\partial x_3}$ в уравнении (2.50), то получим уравнение (2.51), т.е. двойное приближение Буссинеска в случае

экспоненциального закона изменения плотности равносильно отбрасыванию среднего слагаемого в (2.50).

Начально-краевая задача в рассматриваемом случае запишется в виде: уравнения действующего в области, занимаемой жидкостью

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta p + N_0^2 \Delta_h p = 0; \quad (2.53)$$

граничных условий на смачиваемой поверхности S

$$\frac{\partial^2}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial n} + N^2 \frac{\partial p}{\partial n_h} = 0 \text{ на } S, \left(\frac{\partial}{\partial n_h} = n_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad (2.54)$$

условия на свободной поверхности Γ

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + g \frac{\partial p}{\partial x_3} - N^2 p = 0; \quad (2.55)$$

а также начальных условий для функций $p(x, t)$

$$p(x, 0) = p^\circ(x),$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}(x, 0) = \dot{p}^\circ(x).$$

Система уравнений (2.39)-(2.41), (2.45)-(2.47) для стратифицированной жидкости замечательна тем, что она может быть сведена к одному дифференциальному уравнению в частных производных не только относительно функции $p(\vec{x}, t)$, но также к уравнению относительно переменной $W(\vec{x}, t)$.

Исключая переменные ρ, p и проекции скорости жидкости на оси Ox_1, Ox_2 из системы (2.39)-(2.41) или (2.45)-(2.47), можно получить уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\Delta W + \frac{1}{g} N_3^2 \frac{\partial W}{\partial x_3} \right] + N_3^2 \Delta_h W = 0. \quad (2.57)$$

Для решения задачи уравнение (2.57) необходимо дополнить граничными и начальными условиями.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial W}{\partial x_3} \right) = g \Delta_2 W, \quad (x_3 = H); \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial W}{\partial n_h} \right) + N^2 \frac{\partial W}{\partial n_h} + W n_3 = 0, \text{ на } S; \quad (2.58)$$

$$W(x, 0) = W^0(x); \quad \dot{W}(x, 0) = W_1^0(x).$$

Уравнение (2.57) в двумерной постановке впервые было получено Лявом [139] и использовалось многими авторами для изучения внутренних волн в морях и океанах [58, 79, 118]. Уравнение (2.57) имеет примечательную особенность. Вид этого уравнения не зависит от закона распределения плотности.

2.2. Колебания стратифицированной жидкости в частично заполненном цилиндрическом сосуде произвольного поперечного сечения (экспоненциальная стратификация)

При исследовании колебаний стратифицированной жидкости в цилиндрическом резервуаре введем систему координат Ox_1x_2z , с началом на дне бака (Рис. 2.1, $x_3 = z$).

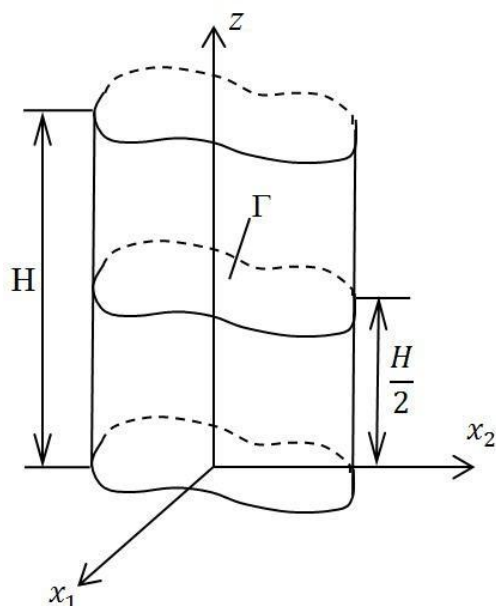


Рис. 2.1. Колебания криогенной жидкости в частично заполненном цилиндрическом сосуде произвольного поперечного сечения

Рассмотрим малые колебания криогенной жидкости в случае стратификации, соответствующей постоянной частоте плавучести, которая отвечает экспоненциальному закону распределения плотности

$$\rho_0(z) = \rho_0(0) \exp\left[-\frac{N_0^2}{g} z\right]. \quad (2.59)$$

Определим собственные малые колебания стратифицированной жидкости, частично заполняющей цилиндрический сосуд. Обозначим через Ω область, занимаемой жидкостью, ограниченной горизонтальной невозмущённой свободной поверхностью Γ , произвольной боковой поверхностью S , и дном, поверхность Σ которого определяется уравнением $z = 0$. Полагая, что все переменные, описывающие движение жидкости, зависят от времени по закону $\exp(i\omega t)$, в частности $p = \varphi e^{i\omega t}$, получаем следующую спектральную задачу.

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho_0(z)} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] + \frac{\mu-1}{\mu} \frac{1}{\rho_0(z)} \Delta_2 \varphi = 0 \quad (x \in \Omega),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (z = 0), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n_h} = 0 \quad (x \in S),$$
(2.60)

с условием на свободной поверхности Γ

$$\varphi(x_1, x_2, H) = g \rho_0(H) \frac{1}{(\mu-1) N_0^2 \rho_0(H)} \frac{d\varphi}{dz}(x_1, x_2, H),$$

где $\mu = \omega^2 / N_0^2$, n_h - внешняя нормаль к поверхности S .

Применяя метод разделения переменных, будем искать решение в виде

$$\varphi(x_1, x_2, z) = Y(x_1, x_2) Z(z).$$

Разделяя переменные, находим, что функция $Y(x_1, x_2)$ является решением задачи Неймана:

$$\Delta_2 Y(x_1, x_2) + k^2 Y(x_1, x_2) = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial n_h} = 0, \quad (2.61)$$

причём нетривиальным решениям задачи (2.61) отвечает дискретный положительный спектр $\{k_n^2\}$, $n = 1, 2, \dots, \infty$, с единственной предельной точкой на бесконечности и собственные функции $Y_n(x_1, x_2)$ [111]. Значения чисел k_n^2 и вид собственных функций $Y_n(x_1, x_2)$ определяются формой областей поперечного сечения полости и для некоторых областей будут получены ниже.

Уравнение для функции $Z(z)$ и граничные условия принимают вид

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{1}{\rho_0(z)} \frac{dZ}{dz} \right] + \frac{\mu-1}{\mu} \frac{1}{\rho_0(z)} (-k^2) Z = 0; \quad 0 < z < H \quad (2.62)$$

$$Z'(0) = 0$$

$$Z(H) = g \rho_0(H) \frac{1}{(\mu-1) N_0^2 \rho_0(H)} \frac{dZ}{dz}(H) \quad (2.63)$$

Здесь спектральный параметр μ входит в уравнение (2.62) и граничные условия (2.63) на Γ . Выполнив дифференцирование, перепишем задачу (2.62), (2.63) в виде:

$$Z'' + \frac{N_0^2}{g} Z' + \lambda Z = 0; \quad (0 < z < H) \quad (2.64)$$

$$Z'(0) = 0; \quad \frac{N_0^2}{g} \lambda Z(H) + (k^2 + \lambda) Z'(H) = 0 \quad (2.65)$$

где

$$\lambda = \frac{k^2(1-\mu)}{\mu}; \quad \mu = \frac{k^2}{k^2 + \lambda}; \quad (2.66)$$

Ищем решения уравнения (2.64) в виде

$$Z(z) = \exp\left(-\frac{\beta_0}{2} z\right) [C_1 \operatorname{sh}(pz) + C_2 \operatorname{ch}(pz)]; \quad (2.67)$$

где $p = \sqrt{\left(\frac{\beta_0}{2}\right)^2 - \lambda} > 0$.

Заметим, что в силу соотношения $\mu = \omega^2 / N_0^2$ число μ вещественное и положительное, оно может быть < 1 и > 1 ; поэтому λ может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Так как $k^2 > 0$ имеем два случая

$$a) \quad 0 < \mu < 1 \Rightarrow \lambda > 0, \quad б) \quad \mu > 1 \Rightarrow \lambda < 0. \quad (2.68)$$

Используя теорию операторов в гильбертовом пространстве с индефинитной метрикой в работе [111] доказано, что $\lambda > 0$ соответствует счётное множество положительных собственных значений, отвечающих внутренним

волнам, а $\lambda < 0$ отвечает одно отрицательное собственное значение, соответствующее поверхностным волнам.

После подстановки функции $Z(z)$ в граничные условия (2.65) получим основное характеристическое уравнение для определения частот поверхностных волн

$$\frac{\text{ch}(pH)}{\text{sh}(pH)} = \frac{H}{\beta_0} \left[-\left(\frac{\beta_0}{2}\right)^2 + k^2 - p^2 \right] \quad (2.69)$$

где

$$p = \sqrt{\left(\frac{\beta_0}{2}\right)^2 - \frac{k^2(N^2 - \omega^2)}{\omega^2}}. \quad (2.70)$$

2.2.1. Асимптотика малой стратификации

Рассмотрим здесь асимптотику малой стратификации и получим приближённую формулу для оценки поверхностных волн с учётом расслоения.

Введём малый параметр $\varepsilon = \frac{N_0^2 H}{g}$ и перепишем характеристическое уравнение

(2.69) в виде

$$\frac{\text{ch}(pH)}{\text{sh}(pH)} p = \frac{H}{\varepsilon} \left[k^2 - p^2 - \frac{\varepsilon^2}{4H^2} \right], \quad (2.71)$$

и преобразуем его. Правая часть в (2.71) приобретает вид

$$\frac{H}{\varepsilon} \left[k^2 - p^2 - \frac{\varepsilon^2}{4H^2} \right] = \frac{k^2 g}{\omega^2} - \frac{\varepsilon}{2H} = \Pi(\omega), (\varepsilon \rightarrow 0). \quad (2.72)$$

Будем искать разложение для $\omega^2(\varepsilon)$ в виде

$$\omega^2(\varepsilon) = \omega_0^2 + \varepsilon \omega_1^2 + \varepsilon^2 \omega_2^2 + \varepsilon^3 \omega_3^2 + 0(\varepsilon^4) \quad (2.73)$$

где

$$\omega_0^2 = kg \text{ th}(\alpha H) \quad (2.74)$$

Получим первое приближения для $\omega^2(\varepsilon)$, т.е. число ω_1^2 заметив, что

$$p^2 = k^2 - \frac{k^2 g}{\omega^2 H} \varepsilon + \frac{1}{4} \frac{\varepsilon^2}{H^2} = 0(1) \quad (\varepsilon \rightarrow 0) \quad (2.75)$$

Поэтому достаточно ограничиться разложением $p(\omega)$ и функции $\text{cth}(pH)$ лишь членами $0(\varepsilon^2)$. Из (2.75) имеем

$$\begin{aligned} p &= k \sqrt{1 - \frac{g}{\omega^2 H} \varepsilon + \frac{1}{4k^2 H^2} \varepsilon^2} = \\ &= k \left[1 - \frac{g}{2\omega^2 H} \varepsilon + \frac{1}{8k^2 H^2} \varepsilon^2 - \frac{1}{8} \frac{g^2 \varepsilon^2}{\omega^4 H^2} + 0(\varepsilon^3) \right] = \\ &= k \left[1 - \frac{g\varepsilon}{2H} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 + \varepsilon\omega_1^2 + \dots)} + \frac{1}{8} \frac{\varepsilon^2}{H^2} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{g^2}{\omega_0^4} \right) + 0(\varepsilon^3) \right] = \\ &= k \left[1 - \frac{g\varepsilon}{2H} \cdot \frac{1}{\omega_0^2} \left(1 - \varepsilon \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} \right) + \dots + \frac{1}{8} \frac{\varepsilon^2}{H^2} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{g^2}{\omega_0^4} \right) \right] + 0(\varepsilon^3) = \\ &= k \left[1 - \frac{g\varepsilon}{2H\omega_0^2} + \varepsilon^2 \left\langle \frac{g\omega_1^2}{2H\omega_0^4} + \frac{1}{8H^2 k^2} - \frac{g^2}{2H^2 \omega_0^4} \right\rangle + 0(\varepsilon^3) \right] = \\ &= k \left[1 - C_1 \varepsilon + C_2 \varepsilon^2 + 0(\varepsilon^3) \right]. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Воспользуемся также разложением

$$\text{cth}(x) = \text{cth}(x_0) + \left(-\frac{1}{\text{sh}^2(x_0)} \right) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2i} \cdot 2 \cdot \frac{\text{ch}(x_0)}{\text{sh}^3(x_0)} (x - x_0)^2 + 0[(x - x_0)^3], \quad (2.77)$$

где

$$\begin{aligned} x = pH &= kH \left[1 - C_1 \varepsilon + C_2 \varepsilon^2 + 0(\varepsilon^3) \right], \quad x_0 = kH, \\ x - x_0 &= -kH \left[C_1 \varepsilon - C_2 \varepsilon^2 \right] + 0(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (2.78)$$

В результате получаем

$$\text{cth}(pH) = \text{cth}(Hk) + \left(-\frac{1}{\text{sh}^2(Hk)} \right) (-kH) \left[C_1 \varepsilon - C_2 \varepsilon^2 \right] + \quad (2.79)$$

$$+\operatorname{cth}(Hk) \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}^2(Hk)} \cdot \left[k^2 H^2 (C_1^2 \varepsilon^2) \right] + 0(\varepsilon^3).$$

$$\operatorname{th}(Hk) = \frac{\omega_0^2}{kg}, \quad \operatorname{cth}(kH) = \frac{kg}{\omega_0^2}$$

(2.80)

$$\frac{1}{\operatorname{sh}^2(kH)} = \frac{\operatorname{ch}^2(kH) - \operatorname{sh}^2(kH)}{\operatorname{sh}^2(kH)} = \operatorname{cth}^2(kH) - 1 = \left(\frac{kg}{\omega_0^2} \right)^2 - 1;$$

Теперь из (2.79) получаем:

$$\operatorname{cth}(pH) = \operatorname{cth}(kH) + (kH) \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}^2(kH)} \left[C_1 \varepsilon - C_2 \varepsilon^2 \right] +$$

$$+\operatorname{cth}(kH) \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}^2(kH)} \cdot k^2 H^2 C_1^2 \varepsilon^2 + 0(\varepsilon^3) =$$

(2.81)

$$= \frac{kg}{\omega_0^2} + kH \left[\left(\frac{kg}{\omega_0^2} \right)^2 - 1 \right] (C_1 \varepsilon - C_2 \varepsilon^2) + \frac{kg}{\omega_0^2} \cdot \left[\left(\frac{kg}{\omega_0^2} \right)^2 - 1 \right] k^2 H^2 C_1^2 \varepsilon^2 + 0(\varepsilon^3) =$$

$$= \frac{kg}{\omega_0^2} + d_1 \varepsilon + d_2 \varepsilon^2 + 0(\varepsilon^3);$$

Разлагаем в ряд по ε правую часть в (2.72) с учётом (2.73):

$$\frac{1}{\omega^2(\varepsilon)} = \frac{1}{\omega_0^2 + \varepsilon \omega_1^2 + \varepsilon^2 \omega_2^2 + \dots} = \frac{1}{\omega_0^2} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} + \varepsilon^2 \frac{\omega_2^2}{\omega_0^2} + \dots} =$$

(2.82)

$$= \frac{1}{\omega_0^2} \cdot \left[1 - \varepsilon \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} + \varepsilon^2 \frac{\omega_2^4}{\omega_0^4} - \varepsilon^2 \frac{\omega_2^2}{\omega_0^2} \right] = \frac{1}{\omega_0^2} - \varepsilon \frac{\omega_1^2}{\omega_0^4} + \varepsilon^2 \frac{\omega_1^4 - \omega_0^2 \omega_2^2}{\omega_0^6} + 0(\varepsilon^3)$$

Отсюда имеем

$$\Pi(\omega) = k^2 g \frac{1}{\omega^2} - \frac{\varepsilon}{2H} = \frac{k^2 g}{\omega_0^2} - \varepsilon k^2 g \frac{\omega_1^2}{\omega_0^4} - \varepsilon \frac{1}{2H} + \varepsilon^2 k^2 g \frac{\omega_1^4 - \omega_0^2 \omega_2^2}{\omega_0^6} + 0(\varepsilon^3) \quad (2.83)$$

Решаем характеристное уравнение (2.71):

$$\left[\frac{kg}{\omega_0^2} + d_1 \varepsilon + d_2 \varepsilon^2 + \dots \right] \left[1 - C_1 \varepsilon + C_2 \varepsilon^2 + \dots \right] k = \Pi(\omega) = \quad (2.84)$$

$$= \frac{k^2 g}{\omega_0^2} - \frac{\varepsilon k}{2Hk} - \varepsilon \frac{k^2 g \omega_1^2}{\omega_0^4} + \varepsilon^2 k^2 g \frac{\omega_1^4 - \omega_0^2 \omega_2^2}{\omega_0^6} + 0(\varepsilon^3)$$

Из (2.84) имеем при ε в нулевой степени - нулевое приближение:

$$\left(\frac{kg}{\omega_0^2} \right) \cdot k = \frac{k^2 g}{\omega_0^2}, \text{ при } \varepsilon \text{ в первой степени - первое приближение:}$$

$$k \left[d_1 - C_1 \frac{kg}{\omega_0^2} \right] = -\frac{1}{2Hk} - \frac{k^2 g \omega_1^2}{\omega_0^2}. \quad (2.85)$$

Из полученного соотношения, заменив C_1 , находим

$$\begin{aligned} \frac{k^2 g \omega_1^2}{\omega_0^2} &= -\frac{1}{2Hk} + \frac{k^2 g}{\omega_0^2} C_1 - kd_1 = -\frac{1}{2Hk} + \frac{k^2 g}{\omega_0^2} \frac{g}{2H\omega_0^2} - k \cdot kH \left[\left(\frac{kg}{\omega_0^2} \right)^2 - 1 \right] \frac{g}{2H\omega_0^2} = \\ &= -\frac{1}{2Hk} + \frac{k^2 g^2}{2H\omega_0^4} - \frac{k^2 g}{2\omega_0^2} \left[\left(\frac{kg}{\omega_0^2} \right)^2 - 1 \right] = -\frac{1}{2Hk} + \frac{k^2 g^2}{2H\omega_0^4} - \frac{k^4 g^3}{2\omega_0^6} + \frac{k^2 g}{2\omega_0^2} \end{aligned} \quad (2.86)$$

Из (2.86) получаем ω_1^2

$$\omega_1^2 = -\frac{\omega_0^4}{2Hk^2 g} + \frac{g}{2H} - \frac{k^2 g^2}{2\omega_0^2} + \frac{\omega_0^2}{2} = \frac{1}{2} \left[\omega_0^2 - \frac{k^2 g^2}{\omega_0^2} + \frac{g}{H} - \frac{\omega_0^4}{Hk^2 g} \right] \quad (2.87)$$

Заменив $\omega_0^2 = kg \operatorname{th}(kH)$, приходим к результату

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{1}{2} \omega_0^2 \left\{ 1 - \frac{k^2 g^2}{k^2 g^2} \operatorname{cth}^2(kH) + \frac{g}{Hkg} \operatorname{cth}(kH) - \frac{kg \operatorname{th}(kH)}{Hkg^2} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \omega_0^2 \left\{ [1 - \operatorname{cth}^2(kH)] + \frac{1}{kH} [\operatorname{cth}(kH) - \operatorname{th}(kH)] \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \omega_0^2 \left\{ \frac{(-1)}{\operatorname{sh}^2(kH)} + \frac{1}{kH} \left[\frac{\operatorname{ch}^2(kH) - \operatorname{sh}^2(kH)}{\operatorname{ch}(kH) \operatorname{sh}(kH)} \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \omega_0^2 \left\{ -\frac{1}{\operatorname{sh}^2(kH)} + \frac{1}{kH} \left[\frac{1}{\operatorname{ch}(kH) \operatorname{sh}(kH)} \right] \right\} = \\ &= -\frac{1}{2} \omega_0^2 \frac{kH \operatorname{ch}(kH) - \operatorname{sh}(kH)}{kH \operatorname{ch}(kH) \operatorname{sh}(kH)} = -\frac{1}{2} \omega_0^2 \frac{kH - \operatorname{th}(kH)}{kH \operatorname{sh}^2(kH)} < 0, \end{aligned}$$

$$\omega_1^2 = -\frac{1}{2}\omega_0^2 \frac{kH - \text{th}(kH)}{kH \text{sh}^2(kH)}.$$

Ограничиваясь первым приближением, получаем окончательную формулу для частоты колебаний поверхностных волн стратифицированной жидкости

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_0^2 + \omega_1^2 \varepsilon = \omega_0^2 - \frac{N_0^2 H}{g} \frac{1}{2} k g \frac{\text{sh}(kH)}{\text{ch}(kH)} \cdot \frac{[kH - \text{th}(kH)]}{kH \text{sh}^2(kH)} = \\ &= \omega_0^2 - \frac{1}{2} N_0^2 \frac{1}{\text{ch}(kH) \text{sh}(kH)} [kH - \text{th}(kH)] = \omega_0^2 - \frac{N_0^2 [kH - \text{th}(kH)]}{\text{sh}(2kH)}. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Внутренние волны

В характеристическом уравнении (2.69) можно сделать формальную замену $p = i\hat{p}$; $\hat{p} > 0$. В результате получим

$$\frac{\text{ch}(i\hat{p}H)}{\text{sh}(i\hat{p}H)} i\hat{p} = \frac{g}{N_0^2} \left[k^2 + \hat{p}^2 - \left(\frac{N_0^2}{2g} \right)^2 \right]. \quad (2.89)$$

Вспомнив, что

$$\text{ch}(i\hat{p}) = \frac{e^{i\hat{p}} + e^{-i\hat{p}}}{2} = \cos(\hat{p}), \quad \text{sh}(i\hat{p}) = \frac{e^{i\hat{p}} - e^{-i\hat{p}}}{2} = i \sin(\hat{p}),$$

из (2.89) имеем

$$\frac{\cos(\hat{p}H)}{i \sin(\hat{p}H)} i\hat{p} = \frac{g}{N_0^2} \left[k^2 + \hat{p}^2 - \left(\frac{N_0^2}{2g} \right)^2 \right], \quad \omega^2 = \frac{k^2 N_0^2}{k^2 + \beta_0^2 / 4 + \hat{p}^2}, \quad (2.90)$$

или окончательное характеристическое уравнение

$$\frac{\cos(\hat{p}H)}{\sin(\hat{p}H)} = \frac{gH}{N_0^2} \left[k^2 + \hat{p}^2 - \left(\frac{N_0^2}{2g} \right)^2 \right]. \quad (2.91)$$

Пользуясь (2.91), можно исследовать графически спектр колебаний внутренних волн. Пусть $\hat{p}H = x$; тогда (2.91) приобретает вид

$$\frac{\cos(x)}{\frac{\sin(x)}{x}} = \frac{g}{N_0^2 H} \left[x^2 + (kH)^2 - \left(\frac{N_0^2 H}{2g} \right)^2 \right]; \quad (2.92)$$

Введём обозначения:

$$\frac{N_0^2 H}{g} = \varepsilon; \quad \hat{p}H = x; \quad kH = \gamma; \quad (2.93)$$

Тогда имеем

$$\frac{\cos x}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{\varepsilon} \left[x^2 + \gamma^2 - \frac{1}{4} \varepsilon^2 \right] \quad (2.94)$$

При больших x получим

$$\frac{\cos x}{\sin x} x = \frac{x^2}{\varepsilon}, \text{ т.е. } \operatorname{tg}(x) = \frac{\varepsilon}{x}$$

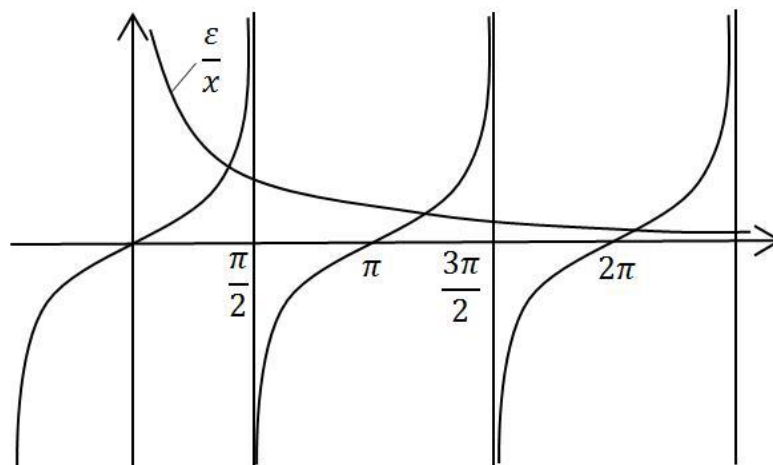


Рис. 2.2. Приближенное графическое решение для внутренних волн, $\operatorname{tg}(x) = \frac{\varepsilon}{x}$

Получаем в грубом приближении (для больших l)

$$x_l \sin x_l - \varepsilon \cos x_l = 0,$$

$$\sin(\pi l + \delta_l) \cdot (\pi l + \delta_l) - \varepsilon \cos(\pi l + \delta_l) = 0,$$

$$\left[\sin(\pi l) \cos \delta_l + \cos(\pi l) \sin \delta_l \right] [\pi l + \delta_l] - \varepsilon \left[\cos(\pi l) \cos \delta_l - \sin(\pi l) \sin \delta_l \right] = 0,$$

$$(-1)^l \cdot \delta_l [\pi l + \delta_l] - \varepsilon (-1)^l \cdot 1 = 0, \quad \delta_l = \frac{\varepsilon}{\pi l}; \quad x_l = \pi l + \frac{\varepsilon}{\pi l} + 0 \left(\frac{1}{\pi l} \right).$$

Последующее приближение можно искать в виде:

$$x_l = \pi l + \frac{\varepsilon}{\pi l} + \xi_l, \quad \xi_l = O(l^{-3}),$$

Ограничимся первым приближением, и используя формулу (2.4) для квадрата частот внутренних волн при экспоненциальном распределении плотности жидкости в отсутствие свободной поверхности, получим асимптотическую формулу для квадрата частоты внутренних волн при наличии свободной поверхности

$$\bar{\omega}_{mnl}^2 = \frac{\xi_{mn}^2 \bar{\beta}_0 \bar{H}^2}{\xi_{mn}^2 \bar{H}^2 + \frac{\bar{\beta}_0^2}{4} \bar{H}^2 + \pi^2 l^2 \left(1 + \frac{\bar{\beta}_0 \bar{H}}{\pi^2 l^2}\right)^2} \quad (2.95)$$

Вывод: Расслоение в криогенной жидкости приводит к уменьшению частоты колебаний поверхностных волн, а наличие свободной поверхности к уменьшению частоты колебаний внутренних волн.

2.2.2. Соосные круговые цилиндры со сплошными радиальными перегородками

Рассмотрим решения задачи Неймана (2.61) для некоторых конкретных областей поперечного сечения цилиндрической ёмкости и определим собственные частоты колебаний стратифицированной жидкости в цилиндрической ёмкости, поперечное сечение которой образовано коаксиальными цилиндрами, связанных M сплошными равноотстоящими радиальными перегородками ($M > 2$) (см. Рис. 2.3, где $M = 4$) и введём угол между двумя соседними перегородками - 2γ , таким образом, что

$$2\gamma = 2\pi\alpha; \quad \alpha = \frac{1}{M}; \quad (2.96)$$

Обозначим через r_0 радиус внешнего цилиндра, а внутреннего через e , причём $e = r_0 \bar{e}$. За характерный размер примем r_0 и положим $r_0 = 1$, $\bar{e} = e$, $\bar{H} = H / r_0$. Введем систему координат: $Ox_1 x_2 z$, ориентированную вполне определенным образом относительно полости, т. е. осью Ox_1 , параллельной оси

симметрии одного из секторов (Рис. 2.3). Начало координат поместим, как обычно, в центре нижнего днаща.

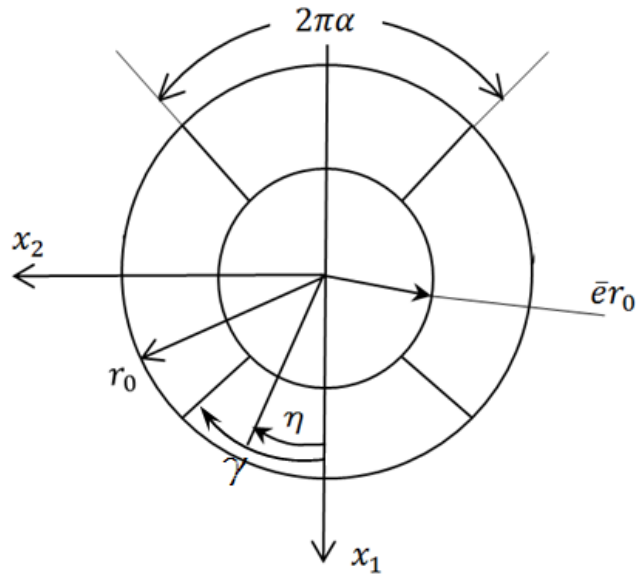


Рис. 2.3. Геометрические характеристики поперечного сечения соосных цилиндров с радиальными перегородками

Будем далее рассматривать один из секторов.

Введем полярные координаты r, η ,

$$x_1 = r \cos \eta, \quad x_2 = r \sin \eta$$

и воспользуемся методом разделения переменных, положив

$$Y_n(x_1, x_2) = R(r)H(\eta). \quad (2.97)$$

При этом уравнение (2.61), записанное в полярных координатах распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнения, первое из которых представляет собой уравнение Бесселя:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k_n^2 - \frac{v_m^2}{r^2} \right) R = 0; \quad (2.98)$$

$$\frac{d^2 H}{d\eta^2} + v_m^2 H = 0, \quad (2.99)$$

где v_m - некоторый не определенный пока параметр. Граничное условие и условие нормировки принимают теперь форму

$$\left. \frac{dR}{dr} \right|_{r=e; r=1} = 0; \quad \left. \frac{dH}{d\eta} \right|_{\eta=\pm\gamma} = 0. \quad (2.100)$$

$$R|_{r=1} = 1; \quad H|_{\eta=-\gamma} = 1. \quad (2.101)$$

Функции R и H , являющиеся собственными функциями краевых задач (2.98)-(2.100), имеют следующий вид:

$$H = H_{v_m}(\eta) = \cos v_m(\eta + \gamma). \quad (2.102)$$

$$R = R_{v_m}(\xi_{\mu}^{(v_m)} r) = \frac{J_{v_m}(\xi_{\mu}^{(v_m)} r) N'_{v_m}(\xi_{\mu}^{(v_m)}) - N_{v_m}(\xi_{\mu}^{(v_m)} r) J'_{v_m}(\xi_{\mu}^{(v_m)})}{J_{v_m}(\xi_{\mu}^{(v_m)}) N'_{v_m}(\xi_{\mu}^{(v_m)}) - N_{v_m}(\xi_{\mu}^{(v_m)}) J'_{v_m}(\xi_{\mu}^{(v_m)})}, \quad (2.103)$$

где

$$v_m = \frac{km}{2} (m = 0, 1, 2, \dots); \quad (2.104)$$

$\xi_{\mu}^{(v_m)}$ - корни уравнения.

$$J'_{v_m}(e\xi) N'_{v_m}(\xi) - J'_{v_m}(\xi) N'_{v_m}(e\xi) = 0. \quad (2.105)$$

Функции Y_{np} - четные относительно аргумента η и Y_{ns} - нечетные относительно η определяются формулами

$$Y_{np} = Y_{np}^{(v_m)} = R_{v_m}(\xi_{\mu}^{(v_m)} r) \cos v_m(\eta + \gamma), \quad (m = 0, 2, 4, \dots); \quad (2.106)$$

$$Y_{ns} = Y_{ns}^{(v_m)} = R_{v_m}(\xi_{\mu}^{(v_m)} r) \sin v_m(\eta + \gamma), \quad (m = 1, 3, 5, \dots); \quad (2.107)$$

Для норм функций Y_{np} и Y_{ns} имеем выражение [86]

$$N_n^2 = \int_{\Sigma} Y_n^2 dS = \frac{\pi \sigma_0^m \left[\xi_{\mu}^{(v_m)^2} - v_m^2 - \left(e^2 \xi_{\mu}^{(v_m)^2} - v_m^2 \right) Z_{v_m}^2 \left(e \xi_{\mu}^{(v_m)} \right) \right]}{2k \xi_{\mu}^{(v_m)^2}}. \quad (2.109)$$

где

$$N_n = \begin{cases} N_{\mu p}^{(v_m)} & (m = 0, 2, 4, \dots) \\ N_{\mu s}^{(v_m)} & (m = 1, 3, 5, \dots) \end{cases}; \quad \sigma_0^{(m)} = \begin{cases} 1 & (m \neq 0) \\ 2 & (m = 0) \end{cases};$$

В частном случае отсутствия внутреннего цилиндра, т.е. для цилиндра со сплошными радиальными перегородками ($\bar{e} = 0$), имеем следующие формулы для определения чисел $\xi_{\mu}^{(v_m)}$ и функций $R_{v_m}(\xi_{\mu}^{(v_m)} r)$

$$R_{v_m}(\xi_{\mu}^{(v_m)} r) = \frac{J_{v_m}(\xi_{\mu}^{(v_m)} r)}{J_{v_m}(\xi_{\mu}^{(v_m)})};$$

$$N_n^2 = \frac{\pi \sigma_0^{(m)} (\xi_{\mu}^{(v_m)^2} - v^2)}{2k \xi_{\mu}^{(v_m)^2}} = \begin{cases} N_{\mu p}^{(v_m)^2} & (m = 0, 2, 4, \dots); \\ N_{\mu S}^{(v_m)^2} & (m = 1, 3, 5, \dots); \end{cases} \quad (2.110)$$

где $\xi_{\mu}^{(v_m)}$ ($\mu = 1, 2, \dots$) - корни уравнения

$$J'_{v_m}(\xi) = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.111)$$

Используя решения трансцендентных уравнений (2.105), (2.111) и асимптотические формулы (2.88), (2.95) определим собственные частоты поверхностных и внутренних волн. Результаты расчётов приведены в таблице 2.1 ÷ 2.6.

Таблица 2.1. Результаты расчётов собственных частот поверхностных волн в цилиндрическом баке с радиальными перегородками $\left(\alpha = \frac{1}{4}\right)$

$$\bar{\omega}_{vn}^2 = \xi_{vn} \operatorname{th} \xi_{vn} \bar{H} - \frac{\bar{\beta}_0 (\xi_{vn} \bar{H} - \operatorname{th} \xi_{vn} \bar{H})}{\operatorname{sh} 2 \xi_{vn} \bar{H}};$$

$$\bar{\beta}_0 = 0.1;$$

| n | \bar{H} | \bar{e} | $\nu=0$ | | $\nu=1$ | | $\nu=2$ | |
|---|-----------|-----------|------------|-----------------------|------------|-----------------------|------------|-----------------------|
| | | | ξ_{0n} | $\bar{\omega}_{0n}^2$ | ξ_{1n} | $\bar{\omega}_{1n}^2$ | ξ_{2n} | $\bar{\omega}_{2n}^2$ |
| 1 | 0.5 | 0 | 3.832 | 3.66531 | 3.054 | 2.77303 | 5.317 | 5.26343 |
| | | 0.3 | 4.706 | 4.61919 | 2.968 | 2.67177 | 5.313 | 5.25925 |
| | | 0.5 | 6.393 | 6.37090 | 2.681 | 2.33082 | 5.175 | 5.11497 |
| | 1 | 0 | 3.832 | 3.82813 | 3.054 | 3.03952 | 5.317 | 5.31672 |
| | | 0.3 | 4.706 | 4.70517 | 2.968 | 2.95131 | 5.313 | 5.31272 |
| | | 0.5 | 6.393 | 6.39296 | 2.681 | 2.65437 | 5.175 | 5.17464 |
| | 3 | 0 | 3.832 | 3.832 | 3.054 | 3.054 | 5.317 | 5.317 |
| | | 0.3 | 4.706 | 4.706 | 2.968 | 2.968 | 5.313 | 5.313 |
| | | 0.5 | 6.393 | 6.393 | 2.681 | 2.68099 | 5.175 | 5.175 |
| 2 | 0.5 | 0 | 7.016 | 7.00296 | 6.706 | 6.68903 | 9.282 | 9.28020 |
| | | 0.3 | 9.104 | 9.10189 | 6.274 | 6.24958 | 9.152 | 9.14998 |
| | | 0.5 | 12.62 | 12.61991 | 7.0628 | 7.05028 | 8.836 | 8.83333 |
| | 1 | 0 | 7.016 | 7.01598 | 6.706 | 6.70597 | 9.282 | 9.282 |
| | | 0.3 | 9.104 | 9.104 | 6.274 | 6.27395 | 9.152 | 9.152 |
| | | 0.5 | 12.62 | 12.62 | 7.0628 | 7.06278 | 8.836 | 8.836 |
| | 3 | 0 | 7.016 | 7.016 | 6.706 | 6.706 | 9.282 | 9.282 |
| | | 0.3 | 9.104 | 9.104 | 6.274 | 6.274 | 9.152 | 9.152 |
| | | 0.5 | 12.62 | 12.62 | 7.0628 | 7.0628 | 8.836 | 8.836 |
| 3 | 0.5 | 0 | 10.17 | 10.16919 | 9.969 | 9.96802 | 12.68 | 12.67992 |
| | | 0.3 | 13.55 | 13.54996 | 9.918 | 9.91698 | 12.24 | 12.23988 |
| | | 0.5 | 18.89 | 18.89 | 12.95 | 12.94994 | 13.89 | 13.88997 |
| | 1 | 0 | 10.17 | 10.17 | 9.969 | 9.969 | 12.68 | 12.68 |
| | | 0.3 | 13.55 | 13.55 | 9.918 | 9.918 | 12.24 | 12.24 |
| | | 0.5 | 18.89 | 18.89 | 12.95 | 12.95 | 13.89 | 13.89 |
| | 3 | 0 | 10.17 | 10.17 | 9.969 | 9.969 | 12.68 | 12.68 |
| | | 0.3 | 13.55 | 13.55 | 9.918 | 9.918 | 12.24 | 12.24 |
| | | 0.5 | 18.89 | 18.89 | 12.95 | 12.95 | 13.89 | 13.89 |

Таблица 2.2. Результаты расчётов собственных частот внутренних волн в цилиндрическом баке с радиальными перегородками $\left(\alpha = \frac{1}{4}\right)$

| \bar{e} | | l | | ξ_{mn} | | | | |
|-----------|------------|--------|----------|------------|----------|----------|----------|---|
| | | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0 | ξ_{01} | 3.832 | 0.059313 | 0.02701 | 0.014158 | 0.008498 | 0.005613 | |
| 0.3 | | 4.706 | 0.068736 | 0.03582 | 0.01992 | 0.012286 | 0.00823 | |
| 0.5 | | 6.393 | 0.080227 | 0.050738 | 0.031463 | 0.020539 | 0.0142 | |
| 0 | ξ_{02} | 7.016 | 0.083013 | 0.055367 | 0.035604 | 0.023741 | 0.01662 | |
| 0.3 | | 9.104 | 0.089164 | 0.067624 | 0.048212 | 0.034391 | 0.025129 | |
| 0.5 | | 12.62 | 0.094051 | 0.080054 | 0.064144 | 0.050181 | 0.039208 | |
| 0 | ξ_{03} | 10.17 | 0.091125 | 0.072272 | 0.053741 | 0.039545 | 0.02952 | |
| 0.3 | | 13.55 | 0.094799 | 0.082228 | 0.067345 | 0.053729 | 0.042644 | |
| 0.5 | | 18.89 | 0.097255 | 0.089992 | 0.080032 | 0.069295 | 0.0591 | |
| 0 | ξ_{11} | 3.054 | 0.048077 | 0.019031 | 0.009483 | 0.00557 | 0.003639 | |
| 0.3 | | 2.968 | 0.046653 | 0.018167 | 0.009004 | 0.005277 | 0.003444 | |
| 0.5 | | 2.681 | 0.041642 | 0.015336 | 0.00747 | 0.004348 | 0.002828 | |
| 0 | ξ_{12} | 6.706 | 0.0817 | 0.053124 | 0.03356 | 0.022143 | 0.015405 | |
| 0.3 | | 6.274 | 0.079624 | 0.049799 | 0.030658 | 0.019933 | 0.013749 | |
| 0.5 | | 7.0628 | 0.083199 | 0.055695 | 0.03591 | 0.023982 | 0.016806 | |
| 0 | ξ_{13} | 9.969 | 0.090797 | 0.071465 | 0.052747 | 0.038595 | 0.028696 | |
| 0.3 | | 9.918 | 0.090711 | 0.071256 | 0.052491 | 0.038352 | 0.028487 | |
| 0.5 | | 12.95 | 0.094334 | 0.080866 | 0.065322 | 0.051471 | 0.040445 | |
| 0 | ξ_{21} | 5.317 | 0.073729 | 0.041604 | 0.024101 | 0.015168 | 0.010272 | |
| 0.3 | | 5.313 | 0.0737 | 0.041567 | 0.024074 | 0.015148 | 0.010258 | |
| 0.5 | | 5.175 | 0.072667 | 0.040295 | 0.023125 | 0.014484 | 0.009784 | |
| 0 | ξ_{22} | 9.282 | 0.089532 | 0.068466 | 0.04918 | 0.03527 | 0.025865 | |
| 0.3 | | 9.152 | 0.089265 | 0.067854 | 0.048475 | 0.034629 | 0.025328 | |
| 0.5 | | 8.836 | 0.088572 | 0.066302 | 0.046722 | 0.033056 | 0.024022 | |
| 0 | ξ_{23} | 12.68 | 0.094104 | 0.080205 | 0.064362 | 0.050418 | 0.039434 | |
| 0.3 | | 12.24 | 0.0937 | 0.07906 | 0.062725 | 0.048653 | 0.03776 | |
| 0.5 | | 13.89 | 0.095038 | 0.082941 | 0.068425 | 0.054959 | 0.043861 | |

$$\bar{\omega}_{mnl}^2 = \frac{\xi_{mn}^2 \bar{\beta}_0 \bar{H}^2}{\xi_{mn}^2 \bar{H}^2 + \frac{\bar{\beta}_0^2}{4} \bar{H}^2 + \pi^2 l^2 \left(1 + \frac{\bar{\beta}_0 \bar{H}}{\pi^2 l^2}\right)^2};$$

$$\bar{H} = 1, \bar{\beta}_0 = 0.1.$$

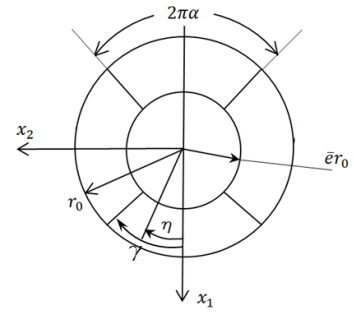


Таблица 2.3. Результаты расчётов собственных частот поверхностных волн в цилиндрическом баке с радиальными перегородками $\left(\alpha = \frac{1}{4}, \bar{\beta}_0 = 0.1\right)$

| \bar{H} | \bar{e} | 0 | 0.3 | 0.5 | 0 | 0.3 | 0.5 |
|-----------|-----------|-----------------------|---------|---------|-----------------------|---------|----------|
| | | $\bar{\omega}_{01}^2$ | | | $\bar{\omega}_{02}^2$ | | |
| 0.5 | | 3.66531 | 4.61919 | 6.3709 | 7.00296 | 9.10189 | 12.61991 |
| 1 | | 3.82813 | 4.70517 | 6.39296 | 7.01598 | 9.104 | 12.62 |
| 3 | | 3.832 | 4.706 | 6.393 | 7.016 | 9.104 | 12.62 |
| | | $\bar{\omega}_{11}^2$ | | | $\bar{\omega}_{12}^2$ | | |
| 0.5 | | 2.77303 | 2.67177 | 2.33082 | 6.68903 | 6.24958 | 7.05028 |
| 1 | | 3.03952 | 2.95131 | 2.65437 | 6.70597 | 6.27395 | 7.06278 |
| 3 | | 3.054 | 2.968 | 2.68099 | 6.706 | 6.274 | 7.0628 |

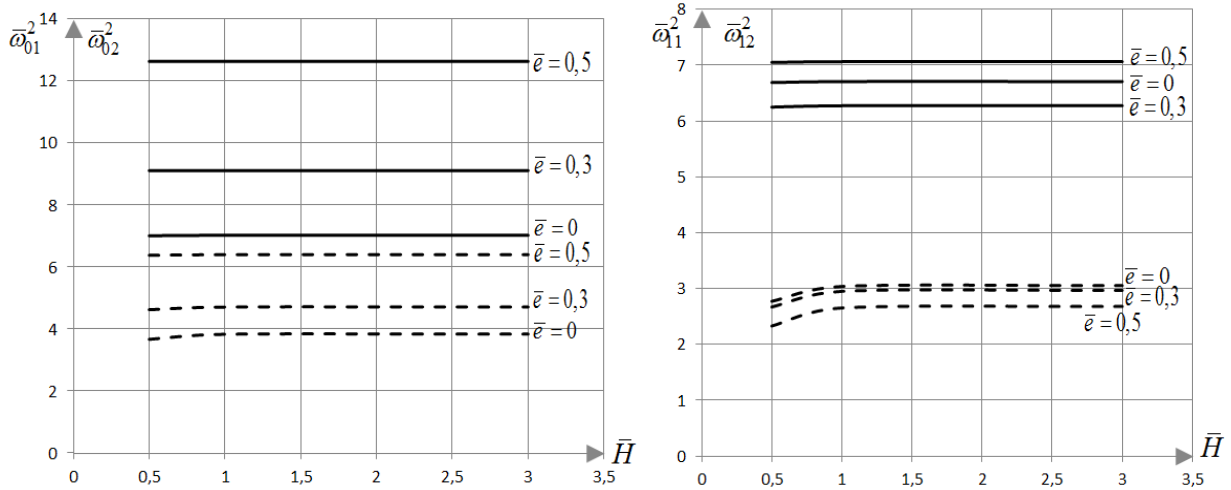


Рис. 2.4. Зависимость собственных частот поверхностных волн в цилиндрическом

баке с радиальными перегородками от глубины заполнения \bar{H} : пунктирная -

$\bar{\omega}_{01}^2, \bar{\omega}_{11}^2$; сплошная - $\bar{\omega}_{02}^2, \bar{\omega}_{12}^2$.

Таблица 2.4. Результаты расчётов собственных частот внутренних волн в цилиндрическом баке с радиальными перегородками ($\alpha = \frac{1}{4}, \bar{H} = 1, \bar{\beta}_0 = 0.1$)

| l | \bar{e} | 0 | 0.3 | 0.5 | 0 | 0.3 | 0.5 |
|-----|-----------|------------------------|----------|----------|------------------------|----------|----------|
| | | $\bar{\omega}_{01l}^2$ | | | $\bar{\omega}_{02l}^2$ | | |
| 1 | | 0.059313 | 0.068736 | 0.080227 | 0.083013 | 0.089164 | 0.094051 |
| 2 | | 0.02701 | 0.03582 | 0.050738 | 0.055367 | 0.067624 | 0.080054 |
| 3 | | 0.014158 | 0.01992 | 0.031463 | 0.035604 | 0.048212 | 0.064144 |
| 4 | | 0.008498 | 0.012286 | 0.020539 | 0.023741 | 0.034391 | 0.050181 |
| 5 | | 0.005613 | 0.00823 | 0.0142 | 0.01662 | 0.025129 | 0.039208 |
| | | $\bar{\omega}_{11l}^2$ | | | $\bar{\omega}_{12l}^2$ | | |
| 1 | | 0.048077 | 0.046653 | 0.041642 | 0.0817 | 0.079624 | 0.083199 |
| 2 | | 0.019031 | 0.018167 | 0.015336 | 0.053124 | 0.049799 | 0.055695 |
| 3 | | 0.009483 | 0.009004 | 0.00747 | 0.03356 | 0.030658 | 0.03591 |
| 4 | | 0.00557 | 0.005277 | 0.004348 | 0.022143 | 0.019933 | 0.023982 |
| 5 | | 0.003639 | 0.003444 | 0.002828 | 0.015405 | 0.013749 | 0.016806 |

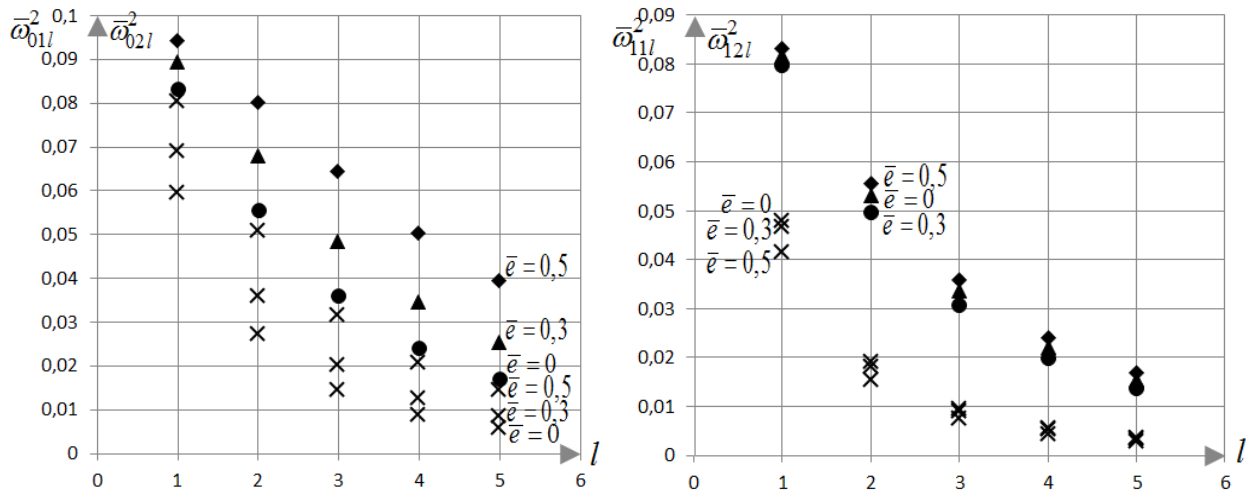


Рис. 2.5. Зависимость собственных частот внутренних волн в цилиндрическом баке с радиальными перегородками от номера тонна l : $\times\times\times\times\times$ - $\bar{\omega}_{01l}^2, \bar{\omega}_{11l}^2$;

$\Delta\Delta, \diamond\diamond, \circ\circ$ - $\bar{\omega}_{02l}^2, \bar{\omega}_{12l}^2$;

Таблица 2.5. Результаты расчётов собственных частот внутренних волн в цилиндрическом баке с радиальными перегородками ($\alpha = \frac{1}{4}, \bar{\beta}_0 = 0.1$)

| \bar{H} \ \bar{e} | 0 | 0.3 | 0.5 | 0 | 0.3 | 0.5 |
|-----------------------|------------------------|----------|----------|------------------------|----------|----------|
| | $\bar{\omega}_{011}^2$ | | | $\bar{\omega}_{021}^2$ | | |
| 0.5 | 0.026911 | 0.035704 | 0.050612 | 0.055242 | 0.067514 | 0.079974 |
| 1 | 0.059313 | 0.068736 | 0.080227 | 0.083013 | 0.089164 | 0.094051 |
| 3 | 0.092639 | 0.094995 | 0.097224 | 0.097685 | 0.098612 | 0.099273 |
| \bar{H} \ \bar{e} | $\bar{\omega}_{111}^2$ | | | $\bar{\omega}_{121}^2$ | | |
| | 0 | 0.3 | 0.5 | 0 | 0.3 | 0.5 |
| 0.5 | 0.018954 | 0.018092 | 0.01527 | 0.052998 | 0.049673 | 0.055571 |
| 1 | 0.048077 | 0.046653 | 0.041642 | 0.0817 | 0.079624 | 0.083199 |
| 3 | 0.088881 | 0.088304 | 0.086034 | 0.097471 | 0.097121 | 0.097714 |

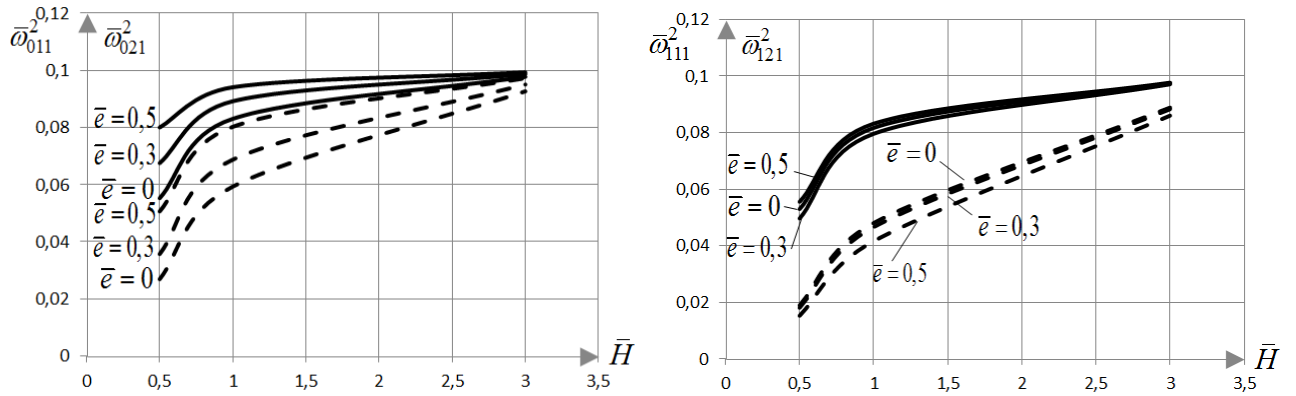


Рис. 2.6. Зависимость собственных частот внутренних волн в цилиндрическом баке с радиальными перегородками от глубины заполнения \bar{H} : пунктирная -

$\bar{\omega}_{011}^2, \bar{\omega}_{111}^2$; сплошная - $\bar{\omega}_{021}^2, \bar{\omega}_{121}^2$.

Таблица 2.6. Результаты расчётов собственных частот внутренних волн в цилиндрическом баке с радиальными перегородками ($\alpha = \frac{1}{4}, \bar{H} = 1$)

| $\bar{\beta}_0$ \ \bar{e} | 0 | 0.3 | 0.5 | 0 | 0.3 | 0.5 |
|-----------------------------|------------------------|----------|----------|------------------------|----------|----------|
| | $\bar{\omega}_{011}^2$ | | | $\bar{\omega}_{021}^2$ | | |
| 0.1 | 0.059313 | 0.068736 | 0.080227 | 0.083013 | 0.089164 | 0.094051 |
| 0.2 | 0.117625 | 0.13658 | 0.159793 | 0.165438 | 0.177924 | 0.187869 |
| 0.3 | 0.174913 | 0.203504 | 0.238675 | 0.247253 | 0.266264 | 0.281443 |
| 0.4 | 0.231156 | 0.269485 | 0.316848 | 0.328435 | 0.354167 | 0.374761 |
| 0.5 | 0.286335 | 0.334499 | 0.39429 | 0.408964 | 0.441617 | 0.467814 |
| $\bar{\beta}_0$ \ \bar{e} | $\bar{\omega}_{111}^2$ | | | $\bar{\omega}_{121}^2$ | | |
| | 0 | 0.3 | 0.5 | 0 | 0.3 | 0.5 |
| 0.1 | 0.048077 | 0.046653 | 0.041642 | 0.0817 | 0.079624 | 0.083199 |
| 0.2 | 0.095121 | 0.092276 | 0.08228 | 0.162777 | 0.158573 | 0.165816 |
| 0.3 | 0.141116 | 0.136855 | 0.121902 | 0.243208 | 0.236821 | 0.247828 |
| 0.4 | 0.186048 | 0.180376 | 0.160499 | 0.322969 | 0.314346 | 0.329213 |
| 0.5 | 0.229904 | 0.222828 | 0.198062 | 0.40204 | 0.391124 | 0.40995 |

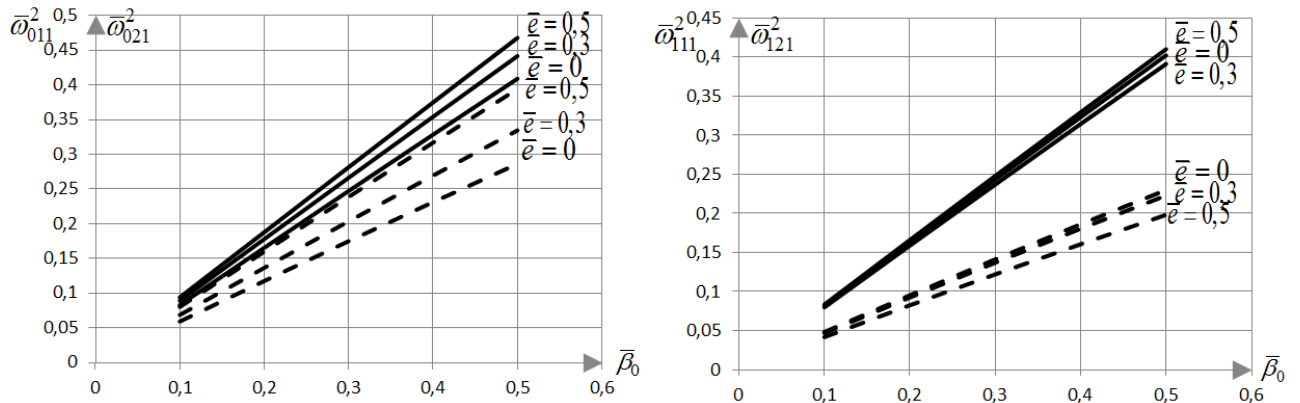


Рис. 2.7. Зависимость собственных частот внутренних волн в цилиндрическом баке с радиальными перегородками от $\bar{\beta}_0$. пунктирная - $\bar{\omega}_{011}^2, \bar{\omega}_{111}^2$; сплошная - $\bar{\omega}_{021}^2, \bar{\omega}_{121}^2$.

2.2.3. Эллиптический цилиндр

В этом пункте получим числа k_n и собственные функции $Y_n(x_1, x_2)$ задачи (2.61) для цилиндра с поперечным сечением в виде эллиптического контура, вытянутого в направлении оси Oz (Рис. 2.8). Для решения этой задачи удобно перейти к эллиптическим координатам η и ζ , $\{0 \leq \eta \leq 2\pi; 0 \leq \zeta \leq \zeta_0\}$.

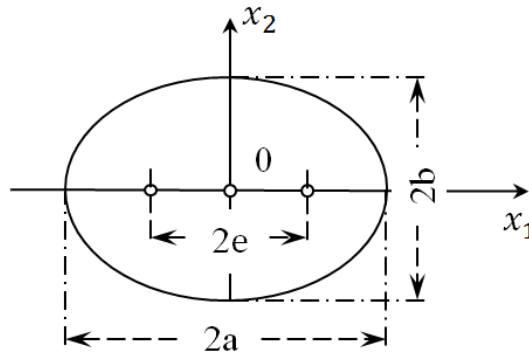


Рис. 2.8. Геометрические характеристики поперечного сечения эллиптического цилиндра

$$\begin{aligned}x_1 &= e \operatorname{ch}(\zeta) \cos(\eta), \\x_2 &= e \operatorname{sh}(\zeta) \sin(\eta),\end{aligned}$$

где $2e$ - линейный эксцентриситет эллипса.

В эллиптических координатах задача (2.61) запишется в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 Y}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial \eta^2} + 2q(\operatorname{ch} 2\zeta - \cos 2\eta)Y &= 0, \\ \frac{\partial Y}{\partial \zeta} &= 0, \quad \text{при } \zeta = \zeta_0\end{aligned}\tag{2.112}$$

где

$$2q = \frac{k^2 e^2}{2}.\tag{2.113}$$

Решение задачи (2.112) имеется в работах [86, с.140]. Следуя выше упомянутым работам, воспользуемся методом разделения переменных, представив функцию $Y(\zeta, \eta)$ в виде

$$Y(\eta, \zeta) = H(\eta)Z(\zeta)$$

После разделения переменных получим два дифференциальных уравнения - уравнения Матье.

$$\frac{d^2 H}{d\eta^2} + (\alpha - 2q \cos 2\eta) H = 0; \quad (2.114)$$

$$\frac{d^2 Z}{d\zeta^2} + (-\alpha + 2q \operatorname{ch} 2\zeta) Z = 0. \quad (2.115)$$

Периодическими решениями уравнений (2.114) и (2.115) являются функции Матье порядка m типа тригонометрического или гиперболического косинуса и синуса ce_m , se_m , Ce_m и Se_m , которые при $m=1$ могут быть записаны в виде следующих рядов.

$$ce_1(\eta, q) = \cos \eta - \frac{1}{8} q \cos 3\eta + \frac{1}{64} q^2 \left(-\cos 3\eta + \frac{1}{3} \cos 5\eta \right) - \\ - \frac{1}{512} q^3 \left(\frac{1}{3} \cos 3\eta - \frac{4}{9} \cos 5\eta + \frac{1}{18} \cos 7\eta \right) + O(q^4).$$

$$se_1(\eta, q) = \sin \eta - \frac{1}{8} q \sin 3\eta + \frac{1}{64} q^2 \left(\sin 3\eta + \frac{1}{3} \sin 5\eta \right) - \\ - \frac{1}{512} q^3 \left(\frac{1}{3} \sin 3\eta + \frac{4}{9} \sin 5\eta + \frac{1}{18} \sin 7\eta \right) + O(q^4).$$

$$Ce_1(\zeta, q) = \operatorname{ch} \zeta - \frac{1}{8} q \operatorname{ch} 3\zeta + \frac{1}{64} q^2 \left(-\operatorname{ch} 3\zeta + \frac{1}{3} \operatorname{ch} 5\zeta \right) - \\ - \frac{1}{512} q^3 \left(\frac{1}{3} \operatorname{ch} 3\zeta - \frac{4}{9} \operatorname{ch} 5\zeta + \frac{1}{18} \operatorname{ch} 7\zeta \right) + O(q^4).$$

$$Se_1(\zeta, q) = I \operatorname{sh} \zeta - \frac{1}{8} q I \operatorname{sh} 3\zeta + \frac{1}{64} q^2 I \left(\operatorname{sh} 3\zeta + \frac{1}{3} \operatorname{sh} 5\zeta \right) - \\ - \frac{1}{512} q^3 I \left(\frac{1}{3} \operatorname{sh} 3\zeta + \frac{4}{9} \operatorname{sh} 5\zeta + \frac{1}{18} \operatorname{sh} 7\zeta \right) + O(q^4).$$

Функция $Y(\zeta, \eta)$ далее может быть записана в виде

$$Y(\zeta, \eta) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m Ce_m(\zeta, q) ce_m(\eta, q) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m Se_m(\zeta, q) se_m(\eta, q).$$

Если выбрать соответствующие значения A_m , B_m то функция $p(\zeta, \eta, x, t)$ представит распределение давления в любой момент времени $t \geq 0$.

В произведениях функций $Ce_m ce_m$, $Se_m se_m$ функции ce_m и se_m не зависят от ζ . Поэтому из формулы для $Y(\zeta, \eta)$ и из граничного условия в (2.61) следует

$$\frac{dCe_m}{d\zeta}(\zeta, q) = 0, \quad \zeta = \zeta_0 \quad (2.116)$$

$$\frac{dSe_m}{d\zeta}(\zeta, q) = 0, \quad \zeta = \zeta_0 \quad (2.117)$$

Положительные параметрические корни уравнений (2.116) и (2.117) обозначим соответственно через $q_{m,p}$, $q_{m,s}$. Для определения чисел $q_{m,p}$, $q_{m,s}$ при известных размерах полуосей эллипса и эксцентриситете определяем параметр ζ_0 из формулы

$$\operatorname{ch} \zeta_0 = \frac{a}{e} \quad (2.118)$$

Затем подставим значение ζ_0 в граничное условие (2.117), записанное в виде ряда из гиперболических функций

$$\begin{aligned} & \operatorname{sh} \zeta_0 - \frac{3q}{8} \operatorname{sh} 3\zeta_0 + \frac{q^2}{64} \left(-3 \operatorname{sh} 3\zeta_0 + \frac{5}{3} \operatorname{sh} 5\zeta_0 \right) - \\ & - \frac{q^3}{512} \left(\operatorname{sh} 3\zeta_0 - \frac{20}{9} \operatorname{sh} 5\zeta_0 + \frac{7}{18} \operatorname{sh} 7\zeta_0 \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.119)$$

Из трансцендентного уравнения (2.119) определяем числа $q_{m,p}$, $q_{m,s}$. Волновые числа $k_{m,p}$ и $k_{m,s}$, а также квадраты собственных частот, отвечающие поверхностным волнам, распространяющимся вдоль большой и малой полуосей эллипса определяться из формул

$$\begin{aligned} k_{m,p} &= \frac{2\sqrt{q_{m,p}}}{e} & (m = 1, 3, 5, \dots; x_1 = p = 1, 2, 3, \dots) \\ k_{m,s} &= \frac{2\sqrt{q_{m,s}}}{e} & (m = 1, 3, 5, \dots; x_2 = s = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

$$\omega_{mp}^2 = g \left[k_{mp} \operatorname{th} k_{mp} H - \frac{\beta_0 (k_{mp} H - \operatorname{th} k_{mp} H)}{\operatorname{sh} 2k_{mp} H} \right]$$

$$\omega_{ms}^2 = g \left[k_{ms} \operatorname{th} k_{ms} H - \frac{\beta_0 (k_{ms} H - \operatorname{th} k_{ms} H)}{\operatorname{sh} 2k_{ms} H} \right]$$

Результаты расчётов приведены в таблицах 2.7 ÷ 2.13.

Таблица 2.7. Результаты расчётов собственных частот внутренних волн в эллиптическом цилиндре

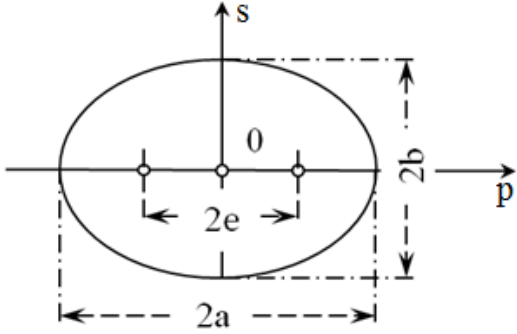
| $\bar{\omega}_{mnl}^2 = \frac{\xi_{mn}^2 \bar{\beta}_0 \bar{H}^2}{\xi_{mn}^2 \bar{H}^2 + \frac{\bar{\beta}_0^2}{4} \bar{H}^2 + \pi^2 l^2 \left(1 + \frac{\bar{\beta}_0 \bar{H}}{\pi^2 l^2} \right)^2};$ $\bar{H} = 1, \bar{\beta}_0 = 0.1,$ $\xi_{mn} = k_{mn} a; n = p, s = 1.$ | |  | | | | |
|---|-------------------------|--|----------|----------|----------|----------|
| e | $\xi_{mn} \backslash l$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0.99009 | $\xi_{mp} = 1.84110$ | 0.025178 | 0.00787 | 0.003668 | 0.002099 | 0.001354 |
| | $\xi_{ms} = 1.87452$ | 0.025862 | 0.008135 | 0.003797 | 0.002174 | 0.001403 |
| 2.12958 | $\xi_{mp} = 1.84758$ | 0.025311 | 0.007921 | 0.003693 | 0.002113 | 0.001363 |
| | $\xi_{ms} = 2.02133$ | 0.028857 | 0.009335 | 0.004388 | 0.002519 | 0.001628 |
| 4 | $\xi_{mp} = 1.86816$ | 0.025732 | 0.008084 | 0.003772 | 0.00216 | 0.001394 |
| | $\xi_{ms} = 2.88665$ | 0.045272 | 0.017355 | 0.008559 | 0.005006 | 0.003264 |
| 3 | $\xi_{mp} = 1.85561$ | 0.025475 | 0.007985 | 0.003724 | 0.002131 | 0.001375 |
| | $\xi_{ms} = 2.26438$ | 0.033732 | 0.011443 | 0.005446 | 0.003141 | 0.002034 |
| 2.17944 | $\xi_{mp} = 1.84798$ | 0.025319 | 0.007924 | 0.003694 | 0.002114 | 0.001364 |
| | $\xi_{ms} = 2.03133$ | 0.02906 | 0.009419 | 0.004429 | 0.002543 | 0.001643 |

Таблица 2.8. Результаты расчётов собственных частот поверхностных волн в эллиптическом цилиндре

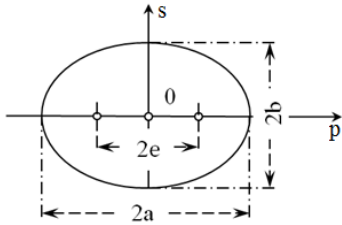
| $a = 5; H = 2h; \bar{\beta}_0 = 0.1; \bar{e} = \frac{e}{a}; \bar{H} = \frac{H}{a};$ $\xi_{mp} = \frac{2}{\bar{e}} \sqrt{q_{mp}}; \bar{\omega}_{mp}^2 = \xi_{mp} \operatorname{th} \xi_{mp} \bar{H} - \frac{\bar{\beta}_0 (\xi_{mp} \bar{H} - \operatorname{th} \xi_{mp} \bar{H})}{\operatorname{sh} 2\xi_{mp} \bar{H}};$ $\xi_{ms} = \frac{2}{\bar{e}} \sqrt{q_{ms}}; \bar{\omega}_{ms}^2 = \xi_{ms} \operatorname{th} \xi_{ms} \bar{H} - \frac{\bar{\beta}_0 (\xi_{ms} \bar{H} - \operatorname{th} \xi_{ms} \bar{H})}{\operatorname{sh} 2\xi_{ms} \bar{H}};$ | | | | | |  | |
|---|-----------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|--|
| h | \bar{H} | $b = 4.900990;$ | | $b = 4.523809;$ | | | |
| | | $e = 0.990099; \frac{a-b}{a+b} = 0.01;$ | | $e = 2.129588; \frac{a-b}{a+b} = 0.05;$ | | | |
| | | $\zeta_0 = 2.302585;$ | | $\zeta_0 = 1.497866;$ | | | |
| | | $q_{mp} = 0.03323;$ | $q_{ms} = 0.03445;$ | $q_{mp} = 0.15481;$ | $q_{ms} = 0.18529;$ | | |
| | | $\xi_{mp} = 1.84111;$ | $\xi_{ms} = 1.87452;$ | $\xi_{mp} = 1.84759;$ | $\xi_{ms} = 2.02133;$ | | |
| | | $\bar{\omega}_{mp}^2$ | $\bar{\omega}_{ms}^2$ | $\bar{\omega}_{mp}^2$ | $\bar{\omega}_{ms}^2$ | | |
| 0.25 | 0.1 | 0.334644 | 0.346761 | 0.336977 | 0.402450 | | |
| 0.5 | 0.2 | 0.646910 | 0.669571 | 0.651276 | 0.773069 | | |
| 1 | 0.4 | 1.149063 | 1.184979 | 1.156006 | 1.346048 | | |
| 3 | 1.2 | 1.794293 | 1.830459 | 1.801315 | 1.987710 | | |
| 5 | 2 | 1.838438 | 1.872143 | 1.844974 | 2.019896 | | |
| 7 | 2.8 | 1.840959 | 1.874379 | 1.847441 | 2.021268 | | |
| Однородная жидкость $\bar{\omega}_{mp}^2 = \bar{\omega}_0^2 = \xi_{mp} \operatorname{th} \xi_{mp} \bar{H}; \bar{\omega}_{ms}^2 = \bar{\omega}_0^2 = \xi_{ms} \operatorname{th} \xi_{ms} \bar{H};$ | | | | | | | |
| 0.25 | 0.1 | 0.335189 | 0.347325 | 0.337525 | 0.403102 | | |
| 0.5 | 0.2 | 0.648872 | 0.671594 | 0.653250 | 0.775367 | | |
| 1 | 0.4 | 1.154360 | 1.190387 | 1.161322 | 1.351832 | | |
| 3 | 1.2 | 1.797265 | 1.833287 | 1.804259 | 1.989964 | | |
| 5 | 2 | 1.838778 | 1.872448 | 1.845307 | 2.020084 | | |
| 7 | 2.8 | 1.840986 | 1.874421 | 1.847468 | 2.021280 | | |

Таблица 2.9. Результаты расчётов собственных частот поверхностных волн в эллиптическом цилиндре

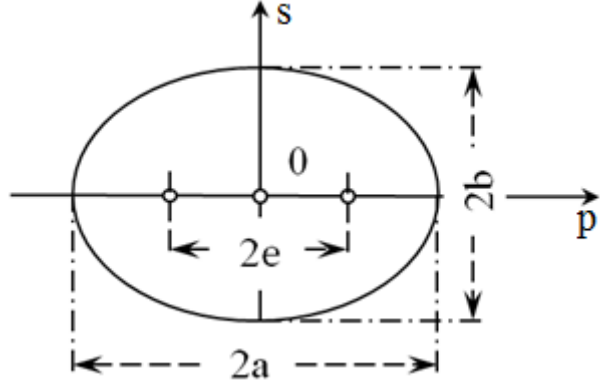
| $a = 5; H = 2h; \bar{\beta}_0 = 0.1; \bar{e} = \frac{e}{a}; \bar{H} = \frac{H}{a};$ $\xi_{mp} = \frac{2}{e} \sqrt{q_{mp}}; \quad \bar{\omega}_{mp}^2 = \xi_{mp} \operatorname{th} \xi_{mp} \bar{H} - \frac{\bar{\beta}_0 (\xi_{mp} \bar{H} - \operatorname{th} \xi_{mp} \bar{H})}{\operatorname{sh} 2\xi_{mp} \bar{H}};$ $\xi_{ms} = \frac{2}{e} \sqrt{q_{ms}}; \quad \bar{\omega}_{ms}^2 = \xi_{ms} \operatorname{th} \xi_{ms} \bar{H} - \frac{\bar{\beta}_0 (\xi_{ms} \bar{H} - \operatorname{th} \xi_{ms} \bar{H})}{\operatorname{sh} 2\xi_{ms} \bar{H}};$ | | | | | | |  | | <p>Круговой цилиндр $r = 5;$ $\bar{\beta}_0 = 0.1;$ $H = 2h;$ $\bar{H} = \frac{H}{r};$</p> |
|---|-----------------------------------|-----------------------|-----------------------------------|-----------------------|--|-----------------------|---|--|--|
| \bar{H} | $b = 3;$ | | $b = 4;$ | | $b = 4.5;$ | | | | |
| | $e = 4; \quad \frac{b}{a} = 0.6;$ | | $e = 3; \quad \frac{b}{a} = 0.8;$ | | $e = 2.179449; \quad \frac{b}{a} = 0.9;$ | | | | |
| | $\zeta_0 = 0.693147;$ | | $\zeta_0 = 1.098612;$ | | $\zeta_0 = 1.472219;$ | | | | |
| | $q_{mp} = 0.55841;$ | $q_{ms} = 1.33324;$ | $q_{mp} = 0.30989;$ | $q_{ms} = 0.46147;$ | $q_{mp} = 0.16222;$ | $q_{ms} = 0.19599;$ | | | |
| | $\xi_{mp} = 1.86816;$ | $\xi_{ms} = 2.88665;$ | $\xi_{mp} = 1.85561;$ | $\xi_{ms} = 2.26438;$ | $\xi_{mp} = 1.84798;$ | $\xi_{ms} = 2.03133;$ | $\xi_0 = 1.8412;$ | | |
| | $\bar{\omega}_{mp}^2$ | $\bar{\omega}_{ms}^2$ | $\bar{\omega}_{mp}^2$ | $\bar{\omega}_{ms}^2$ | $\bar{\omega}_{mp}^2$ | $\bar{\omega}_{ms}^2$ | $\bar{\omega}_0^2$ | | |
| 0.1 | 0.344439 | 0.809602 | 0.339876 | 0.503342 | 0.337117 | 0.406386 | 0.334677 | | |
| 0.2 | 0.665232 | 1.499178 | 0.656701 | 0.957916 | 0.651539 | 0.780345 | 0.646971 | | |
| 0.4 | 1.178136 | 2.358277 | 1.164618 | 1.622011 | 1.156422 | 1.357186 | 1.149160 | | |
| 1 | 1.776796 | 2.867573 | 1.762622 | 2.213235 | 1.753996 | 1.958950 | 1.746333 | | |
| 1.2 | 1.823587 | 2.880511 | 1.810003 | 2.243192 | 1.801736 | 1.998328 | 1.794391 | | |
| 2 | 1.865731 | 2.886582 | 1.853066 | 2.263764 | 1.845366 | 2.029941 | 1.828530 | | |
| 2.8 | 1.868033 | 2.886646 | 1.855467 | 2.264356 | 1.847829 | 2.031267 | 1.841049 | | |
| 3 | 1.868102 | 2.886647 | 1.855539 | 2.264367 | 1.847905 | 2.031299 | 1.841127 | | |

Таблица 2.10. Результаты расчётов собственных частот поверхностных волн в эллиптическом цилиндре

| \bar{H} | \bar{e} | 0.8 | 0.6 | 0.44 | 0.8 | 0.6 | 0.44 |
|-----------|-----------|------------------------|----------|----------|------------------------|----------|----------|
| | | $\bar{\omega}_{11p}^2$ | | | $\bar{\omega}_{11s}^2$ | | |
| 0.5 | | 1.362038 | 1.347438 | 1.338576 | 2.575574 | 1.831412 | 1.553641 |
| 1 | | 1.776796 | 1.762622 | 1.753996 | 2.867573 | 2.213235 | 1.958951 |
| 3 | | 1.868102 | 1.855539 | 1.847905 | 2.886647 | 2.264367 | 2.031299 |

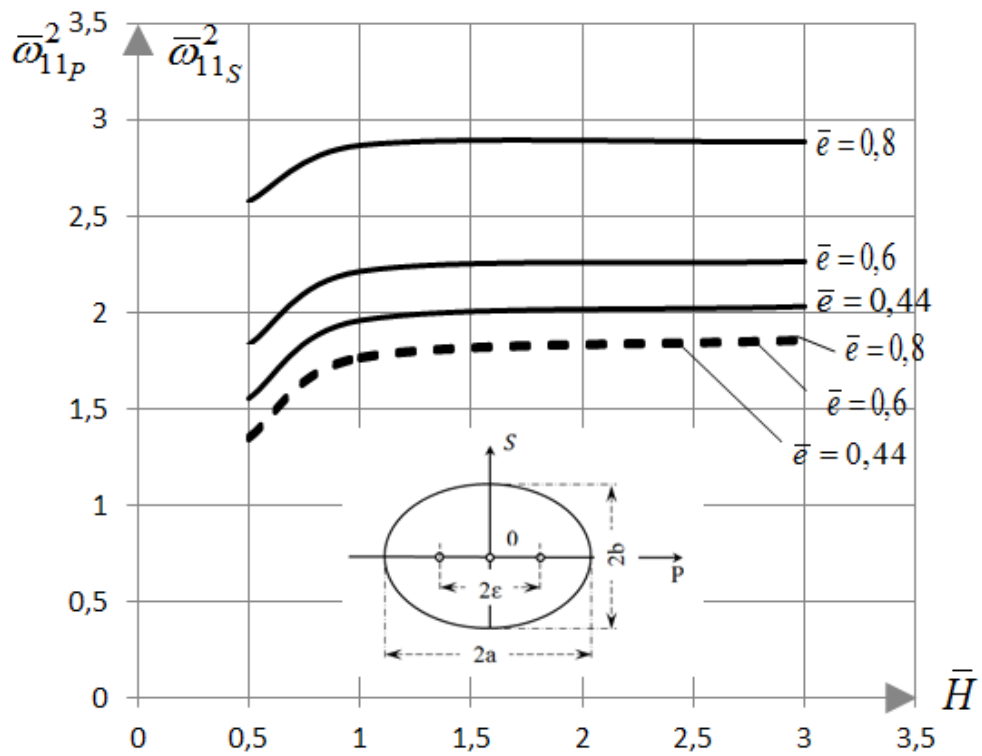


Рис. 2.9. Зависимость собственных частот поверхностных волн в эллиптическом цилиндре от глубины заполнения \bar{H} : пунктирная - $\bar{\omega}_{11p}^2$; сплошная - $\bar{\omega}_{11s}^2$.

Таблица 2.11. Результаты расчётов собственных частот внутренних волн в эллиптическом цилиндре $\bar{H} = 1, \bar{\beta}_0 = 0.1$.

| l | \bar{e} | 0.8 | 0.6 | 0.44 | 0.8 | 0.6 | 0.44 |
|-----|-----------|------------------------|----------|----------|------------------------|----------|----------|
| | | $\bar{\omega}_{11P}^2$ | | | $\bar{\omega}_{11S}^2$ | | |
| 1 | | 0.025732 | 0.025475 | 0.025319 | 0.045272 | 0.033732 | 0.02906 |
| 2 | | 0.008084 | 0.007985 | 0.007924 | 0.017355 | 0.011443 | 0.009419 |
| 3 | | 0.003772 | 0.003724 | 0.003694 | 0.008559 | 0.005446 | 0.004429 |
| 4 | | 0.00216 | 0.002131 | 0.002114 | 0.005006 | 0.003141 | 0.002543 |
| 5 | | 0.001394 | 0.001375 | 0.001364 | 0.003264 | 0.002034 | 0.001643 |

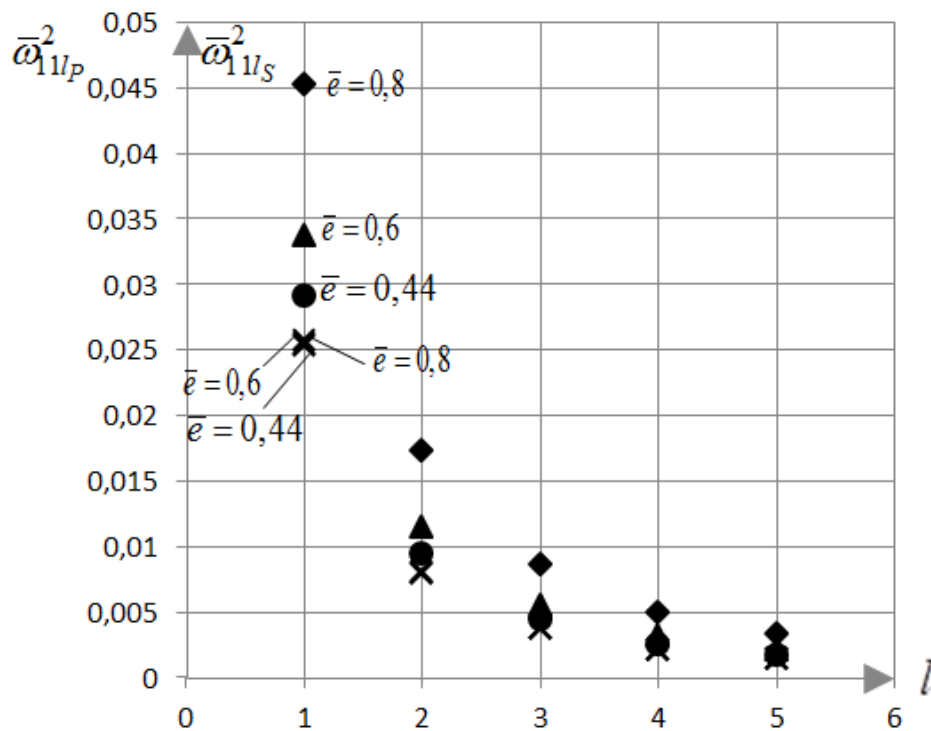


Рис. 2.10. Зависимость собственных частот внутренних волн в эллиптическом

цилиндре от номера тонна l : $\times\times\times\times\times$ - $\bar{\omega}_{11P}^2$; $\Delta\Delta, \diamond\diamond, \circ\circ$ - $\bar{\omega}_{11S}^2$.

Таблица 2.12. Результаты расчётов собственных частот внутренних волн в эллиптическом цилиндре $\bar{\beta}_0 = 0.1$.

| \bar{H} | \bar{e} | 0.8 | 0.6 | 0.44 | 0.8 | 0.6 | 0.44 |
|-----------|-----------|-------------------------|----------|----------|-------------------------|----------|----------|
| | | $\bar{\omega}_{111P}^2$ | | | $\bar{\omega}_{111S}^2$ | | |
| 0.5 | | 0.008047 | 0.007948 | 0.007887 | 0.017283 | 0.011392 | 0.009376 |
| 1 | | 0.025732 | 0.025475 | 0.025319 | 0.045272 | 0.033732 | 0.02906 |
| 3 | | 0.074944 | 0.07469 | 0.074534 | 0.087717 | 0.081462 | 0.077956 |

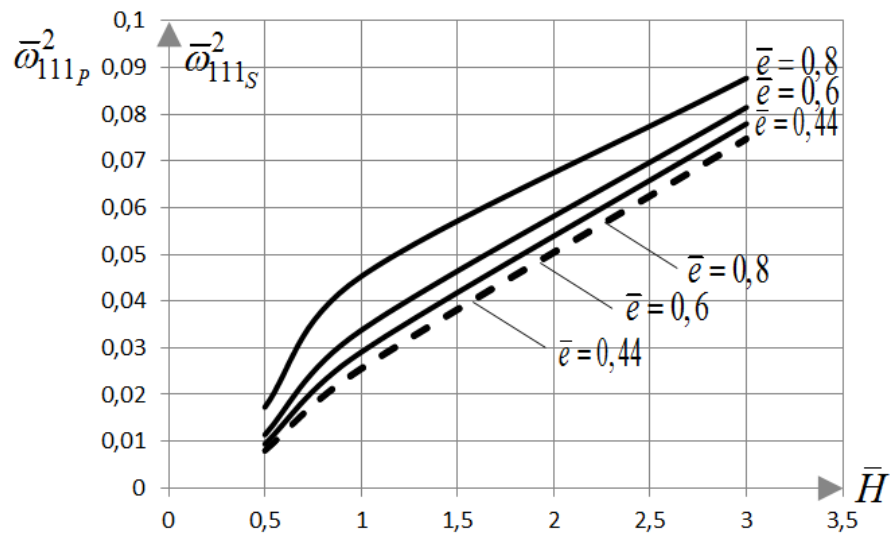


Рис. 2.11. Зависимость собственных частот внутренних волн в эллиптическом цилиндре от глубины заполнения \bar{H} : пунктирная - $\bar{\omega}_{111p}^2$; сплошная - $\bar{\omega}_{111s}^2$.

Таблица 2.13. Результаты расчётов собственных частот внутренних волн в эллиптическом цилиндре $\bar{H} = 1$.

| $\bar{\beta}_0$ \ \bar{e} | 0.8 | 0.6 | 0.44 | 0.8 | 0.6 | 0.44 |
|-----------------------------|-------------------------|----------|----------|-------------------------|----------|----------|
| | $\bar{\omega}_{111p}^2$ | | | $\bar{\omega}_{111s}^2$ | | |
| 0.1 | 0.025732 | 0.025475 | 0.025319 | 0.045272 | 0.033732 | 0.02906 |
| 0.2 | 0.050677 | 0.050168 | 0.049859 | 0.08952 | 0.066542 | 0.05727 |
| 0.3 | 0.074833 | 0.074078 | 0.073619 | 0.132729 | 0.098423 | 0.084627 |
| 0.4 | 0.098201 | 0.097205 | 0.0966 | 0.174887 | 0.129372 | 0.11113 |
| 0.5 | 0.120784 | 0.119552 | 0.118804 | 0.215984 | 0.159386 | 0.136779 |

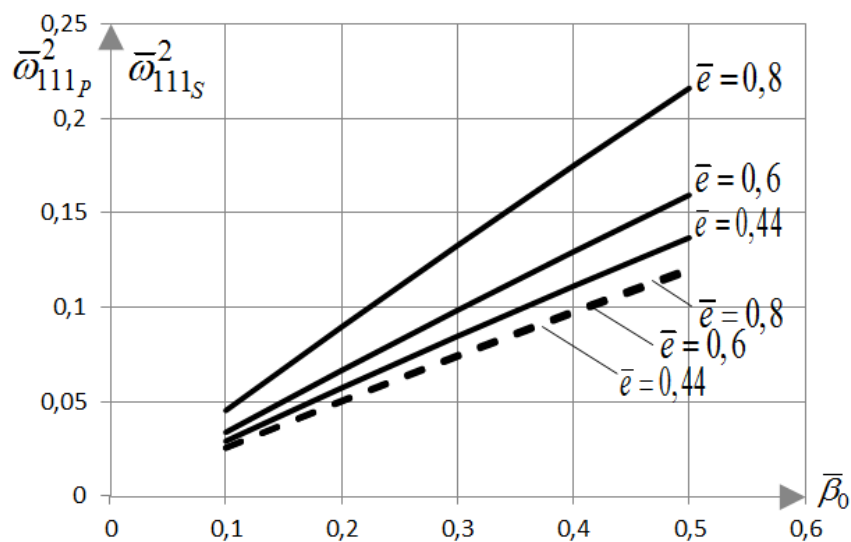


Рис. 2.12. Зависимость собственных частот внутренних волн в эллиптическом цилиндре от $\bar{\beta}_0$: пунктирная - $\bar{\omega}_{111p}^2$; сплошная - $\bar{\omega}_{111s}^2$.

2.3. Определение собственных частот для произвольного закона распределения плотности

Пусть криогенная жидкость частично или полностью заполняет неподвижный цилиндрический сосуд произвольного поперечного сечения и на жидкость действует поле массовых сил, интенсивность которых равна g .

В этом случае, удобной краевой задачей для определения собственных частот является уравнение и граничные условия (2.58) для вертикальной компоненты скорости $W(x,t)$. При использовании двойного приближения Буссинеска задача имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[\Delta W] + N^2 \Delta_2 W = 0, \quad (2.120)$$

$$W = 0, (z = 0); \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right) = g \Delta_2 W, (z = H); \quad (2.121)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \nu} = 0, (x \in S); \quad W(x, 0) = W^0(x); \quad \dot{W}(x, 0) = W_1^0(x);$$

$$\text{где } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Уравнение (2.120) имеет примечательную особенность. Структура этого уравнения не зависит от закона распределения плотности.

В работе [111] было доказано что, соответствующая (2.120), (2.121) спектральная задача о волновых движениях стратифицированной жидкости, частично заполняющей ограниченный объём, имеет два спектра колебаний: дискретный ($\omega > N$), отвечающий поверхностным волнам, и точечный, состоящий из чисел, образующих плотное множество на отрезке $(0,0 - N)$ и отвечающий внутренним волнам ($\omega < N$).

Численные результаты решения задачи о колебаниях стратифицированной жидкости в ограниченном объеме были получены в статье [110] для законов изменения плотности, приводящих дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами. Ниже рассматриваются результаты численного

решения подобной задачи для законов изменения плотности, которые приводят к дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами.

2.3.1. Метод тригонометрических рядов

Рассмотрим сначала решение задач в случае, отсутствия свободной поверхности жидкости, заполняющей цилиндр высотой H и произвольного поперечного сечения. Рассматриваемая область Ω позволяет отделить в уравнении (2.120) переменную $V(z)$

$$W(x_1, x_2, z, t) = u(x_1, x_2) V(z) e^{i\omega t}. \quad (2.122)$$

Тогда для $u(x_1, x_2)$ приходим к вспомогательной задаче

$$\Delta_2 u + \xi_n^2 u = 0, (x \in \Omega); \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, (x \in S); \quad (2.123)$$

Можно показать [111], что нетривиальным решениям задачи (2.123) отвечает дискретный положительный спектр $\{\xi_n^2\}_{n=1}^{\infty}$. Числа ξ_n , в случае круглого поперечного сечения определяются формулой $\xi_n = k_n r_0$, r_0 - радиус цилиндра, и могут быть найдены из уравнения

$$\frac{dJ_m(kr)}{dr} = 0; \quad r = r_0.$$

где k_n - константа разделения переменных, $J_m(kr)$ - функция Бесселя первого рода m -го порядка, далее принято $m = 1$.

После разделения переменных в уравнении (2.120), приходим к задаче для определения функции $V(z)$

$$\omega^2 \rho_0(z) \frac{d^2 V}{dz^2} + k_n^2 g \frac{d\rho_0(z)}{dz} V(z) - k_n^2 \omega^2 \rho_0(z) V(z) = 0; \quad (2.124)$$

$$V = 0; \quad z = 0; \quad z = H;$$

где $V(z)$ – амплитудная функция вертикальной компоненты скорости.

Получим решение задачи (2.124) в приближении Буссинеска с помощью тригонометрических рядов. Для этого представим функции $V(z)$ и $\rho_0(z), d\rho_0(z)/dz$ в следующем виде

$$V(z) = \sum_{l=1}^{\infty} c_l \sin \frac{l\pi}{H} z; \quad \rho_0(z) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l \cos \frac{l\pi}{H} z; \quad d\rho_0(z)/dz = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \cos \frac{l\pi}{H} z; \quad (2.125)$$

где c_l - амплитудные коэффициенты, подлежащие определению.

Подставив представление (2.125) в уравнении (2.124), после умножения рядов Фурье [119], получим однородную систему линейных уравнений

$$-\omega^2 \frac{l\pi}{H} \sum_{m=1}^{\infty} c_m \frac{m\pi}{H} (b_{l-m} + b_{l+m}) + k_n^2 g \sum_{m=1}^{\infty} c_m (a_{l-m} - a_{l+m}) - k_n^2 \omega^2 \sum_{l=1}^{\infty} c_m (b_{l-m} - b_{l+m}) = 0; \quad (2.126)$$

или в сокращенной записи

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m A_{lm} = 0; \quad l = 1, 2, 3, \dots;$$

где

$$A_{lm} = -\omega^2 \left[\frac{m\pi}{H} (b_{l-m} + b_{l+m}) + \frac{H}{l\pi} k_n^2 (b_{l-m} - b_{l+m}) \right] + k_n^2 g \frac{H}{l\pi} (a_{l-m} - a_{l+m});$$

$$b_{l-m} = \int_0^H \rho_0(z) \cos \frac{l-m}{H} \pi z dz; \quad b_{l+m} = \int_0^H \rho_0(z) \cos \frac{l+m}{H} \pi z dz;$$

$$a_{l-m} = \int_0^H \rho'_0(z) \cos \frac{l-m}{H} \pi z dz; \quad a_{l+m} = \int_0^H \rho'_0(z) \cos \frac{l+m}{H} \pi z dz;$$

В таблице 2.14 приведены результаты расчётов квадратов собственных частот $\bar{\omega}_{nl}^2$ внутренних волн для некоторых законов изменения плотности (см. Рис. 2.13, 2.14). Для сравнения в таблице 2.14 приведены также значения квадратов собственных частот внутренних волн в случае экспоненциального распределения плотности, полученные по точной формуле:

$$\bar{\omega}_{nl}^2 = \frac{\xi_n^2 \bar{\beta}_0}{\xi_n^2 + \frac{l^2 \pi^2}{H^2} + \frac{\bar{\beta}_0^2}{4}}; \quad (2.127)$$

где $\bar{\beta}_0 = 0.1, n = 1, \xi_1 = 1.84, \bar{H} = 1, l = 1, 2 \dots 5; \bar{\beta}_0 = \beta_0 r_0; \bar{H} = \frac{H}{r_0}; \bar{\omega}_{nl}^2 = \omega_{nl}^2 \cdot \frac{r_0}{g};$

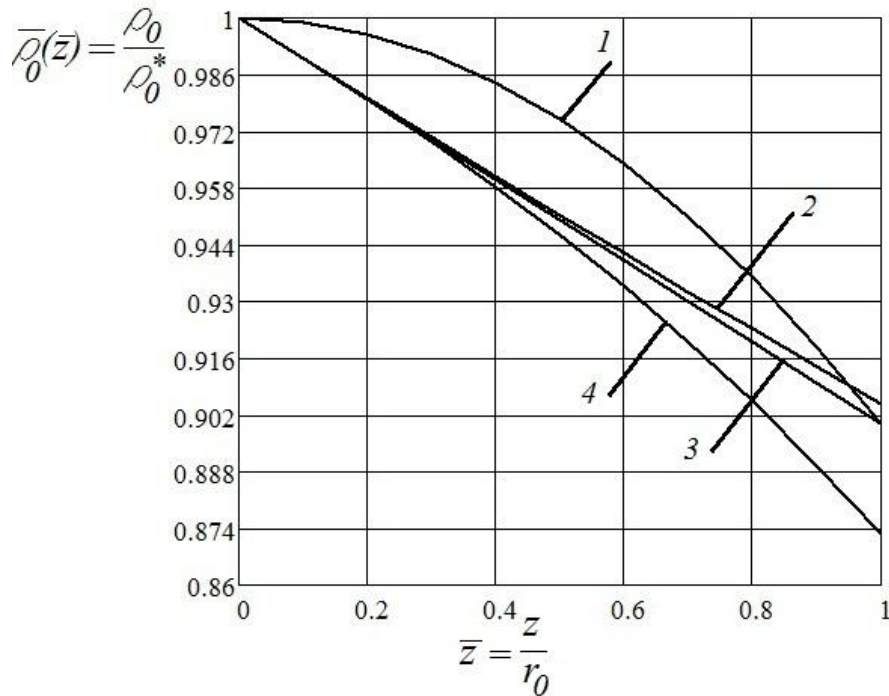


Рис. 2.13. Относительное изменение плотности:

1. $\bar{\rho}_0(z) = 1 - \beta_0 z^2$; 2. $\bar{\rho}_0(z) = e^{-\beta_0 z}$; 3. $\bar{\rho}_0(z) = 1 - \beta_0 z$; 4. $\bar{\rho}_0(z) = e^{-(A_0 z + \frac{A_1}{\alpha \pi} \sin(\alpha \pi z))}$;

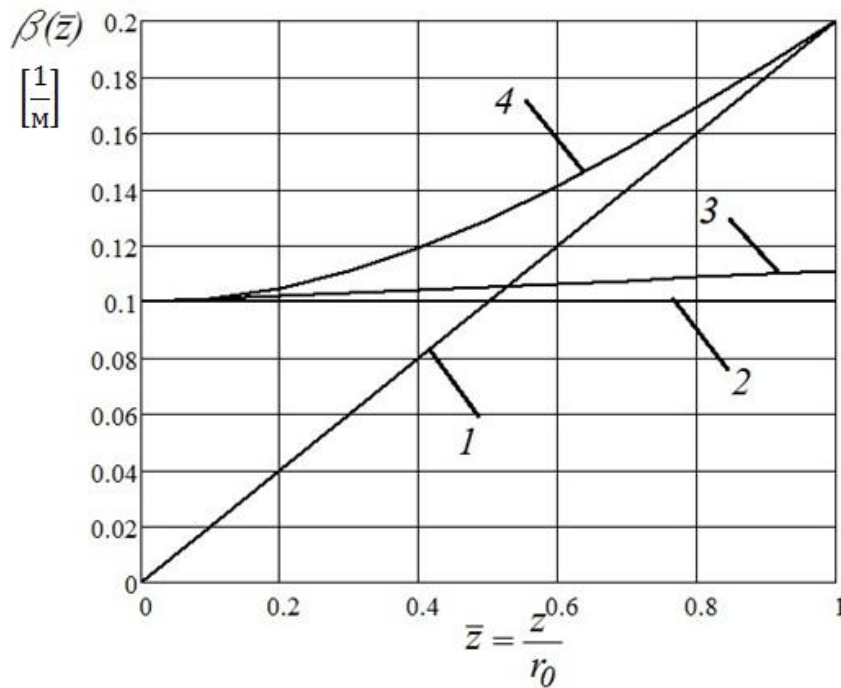


Рис. 2.14. Изменение безразмерного квадрата частоты плавучести:

1. $\beta(z) = 2\beta_0 z$; 2. $\beta(z) = \beta_0$; 3. $\beta(z) = \frac{\beta_0}{1 - \beta_0 z}$; 4. $\beta(z) = A_0 + A_1 \cos(\alpha \pi z)$;

Таблица 2.14. Квадраты собственных частот внутренних волн для разных законов изменения плотности

| l | Результат по формуле (2.127) | Численное решение с двойным приближением Буссинеска | | |
|-----|------------------------------|---|-------------------------------------|---------------------------------------|
| | | $\rho_0 = \rho_0^* e^{-\beta_0 z}$ | $\rho_0 = \rho_0^* (1 - \beta_0 z)$ | $\rho_0 = \rho_0^* (1 - \beta_0 z^2)$ |
| 1 | 0.0255368 | 0.0255368 | 0.0269056 | 0.0282841 |
| 2 | 0.0078980 | 0.0078979 | 0.0078319 | 0.0079655 |
| 3 | 0.0036714 | 0.0036714 | 0.0038674 | 0.0035855 |
| 4 | 0.0020989 | 0.0020989 | 0.0022109 | 0.0019024 |
| 5 | 0.0013535 | 0.0013534 | 0.0014235 | 0.0007456 |

2.3.2. Метод конечных элементов для определения форм и частот собственных колебаний жидкости в круговом неподвижном цилиндрическом баке со свободной поверхностью.

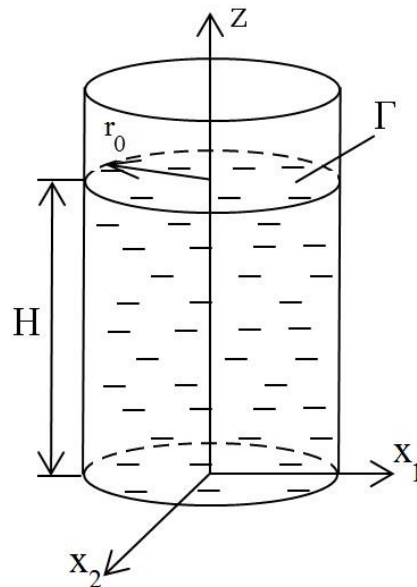


Рис. 2.15. Цилиндрический бак со свободной поверхностью

Рассмотрим реализацию метода конечных элементов на примере задачи о собственных колебаниях жидкости со свободной поверхностью в неподвижном цилиндрическом баке.

В этом случае, исследуемую задачу (2.124) запишем в виде

$$\omega^2 \left(\frac{d^2 V}{dz^2} \right) + k_n^2 V(z) (g \beta(z) - \omega^2) = 0; \quad (2.128)$$

$$V = 0; \quad z = 0;$$

$$\frac{dV}{dz} - \frac{gk_n^2}{\omega^2} V(z) = 0, \quad z = H;$$

Согласно методу Бубнова-Галёркина в задаче (2.128) заменим исходную функцию $V(z)$ аппроксимирующей функции $U_m(z)$

$$V = U_m(z) = \sum U_k \varphi_k^m(z),$$

где U_k - узловые перемещения, а $U_m(z)$ - функция перемещения на элементе, $\varphi_k^m(z)$ - функция формы. Затем помножим полученное выражение поочерёдно на функцию формы $\varphi_k^m(z)$ и проинтегрируем по безразмерной длине h каждого элемента, учитывая граничные условия. В результате получим интегральное соотношение для каждого элемента [120], кроме элемента, примыкающего к свободной поверхности.

$$-\bar{\omega}^2 \int_0^h \left(\frac{dU_m}{dz} \frac{d\varphi_k^m}{dz} + \xi^2 U_m \varphi_k^m \right) d\bar{z} + \xi^2 \int_0^h \beta(\bar{z}) U_m \varphi_k^m d\bar{z} = 0 \quad (2.129)$$

В формуле (2.129) функции формы имеют вид:

$$\begin{aligned} \varphi_k^m &= 1 - \frac{z_m}{h}; \quad \varphi_{k+1}^m = \frac{z_m}{h}; \\ m &= 0, 1, 2, \dots; \quad k = 1, 2, \dots; \end{aligned}$$

После взятия интегралов образуем локальные матрицы жесткости и масс:

$$\begin{aligned} [K_e] = [K_{e+1}] &= \begin{bmatrix} \xi^2 \beta \frac{h}{3} & \xi^2 \beta \frac{h}{6} \\ \xi^2 \beta \frac{h}{6} & \xi^2 \beta \frac{h}{3} \end{bmatrix}, \\ [M_e] = [M_{e+1}] &= \begin{bmatrix} \frac{1}{h} + \xi^2 \frac{h}{3} & -\frac{1}{h} + \xi^2 \frac{h}{6} \\ -\frac{1}{h} + \xi^2 \frac{h}{6} & \frac{1}{h} + \xi^2 \frac{h}{3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Затем составляем глобальные матрицы $[K]$ и $[M]$, которые в случае разбиения всей высоты \bar{H} на три элемента длиной h имеют вид

$$[K] = \begin{bmatrix} \xi^2 \beta \frac{h}{3} & \xi^2 \beta \frac{h}{6} & 0 & 0 \\ \xi^2 \beta \frac{h}{6} & \xi^2 \beta \frac{h}{3} + \xi^2 \beta \frac{h}{3} & \xi^2 \beta \frac{h}{6} & 0 \\ 0 & \xi^2 \beta \frac{h}{6} & \xi^2 \beta \frac{2h}{3} & \xi^2 \beta \frac{h}{6} \\ 0 & 0 & \xi^2 \beta \frac{h}{6} & \xi^2 \beta \frac{h}{3} - \xi^2 \end{bmatrix},$$

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} + \xi^2 \frac{h}{3} & -\left(\frac{1}{h} - \xi^2 \frac{h}{6}\right) & 0 & 0 \\ -\left(\frac{1}{h} - \xi^2 \frac{h}{6}\right) & \frac{2}{h} + \xi^2 \frac{h}{3} + \xi^2 \frac{h}{3} & -\left(\frac{1}{h} - \xi^2 \frac{h}{6}\right) & 0 \\ 0 & -\left(\frac{1}{h} - \xi^2 \frac{h}{6}\right) & \frac{2}{h} + \xi^2 \frac{h}{3} + \xi^2 \frac{h}{3} & -\left(\frac{1}{h} - \xi^2 \frac{h}{6}\right) \\ 0 & 0 & -\left(\frac{1}{h} - \xi^2 \frac{h}{6}\right) & \frac{1}{h} + \xi^2 \frac{h}{3} \end{bmatrix}.$$

В результате получаем задачу на собственные значения

$$-\lambda[M]\{U\} + [K]\{U\} = 0,$$

где $\{U\} = \{U_1, U_2, U_3, \dots, U_k, \dots\}^T$, $\lambda = \bar{\omega}^2$

Аналитические выражения для определения собственных чисел $\lambda_{nl} = \bar{\omega}_{nl}^2$, в случае изменения плотности $\rho_0 = \rho_0^*(1 - \beta_0 z)$ имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \tan(\bar{\mu}\bar{H}) &= \frac{\bar{\mu}\bar{\beta}_0}{\bar{\mu}^2 + \xi_n^2}; & \omega^2 \leq N_0^2; \\ \bar{\omega}_{nl}^2 &= \frac{\xi_n^2 \bar{\beta}_0}{\bar{\mu}^2 + \xi_n^2}; \end{aligned} \right\} \quad (2.130)$$

где $\xi_n^2 = 3.39$, $\bar{N}_0^2 = \bar{\beta}_0 = 0.1$,

При $\bar{\mu} = i\bar{\gamma}$, уравнения (2.130) преобразуются к виду

$$\text{th}(\bar{\gamma}\bar{H}) = \frac{\bar{\gamma}\bar{\beta}_0}{\xi_n^2 - \bar{\gamma}^2}; \quad \bar{\omega}^2 = \frac{\xi_n^2 \bar{\beta}_0}{\xi_n^2 - \bar{\gamma}^2};$$

Из решений, которого получаем значения для собственных чисел поверхностных волн.

Результаты расчётов тестовой задачи определения собственных частот внутренних и поверхностных волн для закона изменения плотности $\rho_0 = \rho_0^*(1 - \bar{\beta}_0 z)$, представлены в таблице 2.15.

Таблица 2.15. Собственные числа тестовой задачи (17) для закона изменения плотности жидкости $\rho_0 = \rho_0^*(1 - \bar{\beta}_0 z)$, $\beta(z) = \bar{\beta}_0$

| Результат из формул (2.130) | Численное решение с двойным приближением Буссинеска | | | |
|-----------------------------|--|------------|------------|------------|
| | $\rho_0 = \rho_0^*(1 - \bar{\beta}_0 z)$, $\bar{\beta}_0 = 0.1$; | | | |
| | N=10 | N=50 | N=100 | N=500 |
| 1.791870 | 1.8416782 | 1.8401665 | 1.8395678 | 1.8390347 |
| 0.02528270 | 0.02472216 | 0.02489052 | 0.02489671 | 0.02489970 |
| 0.00787416 | 0.00755148 | 0.00781786 | 0.00782524 | 0.00782767 |
| 0.00366849 | 0.00335844 | 0.00364718 | 0.00365525 | 0.00365780 |
| 0.00209909 | 0.00179909 | 0.00208444 | 0.00209282 | 0.00209545 |
| 0.00135423 | 0.00107313 | 0.00134145 | 0.00134996 | 0.00135264 |
| 0.00094457 | 0.00069253 | 0.00093245 | 0.00094104 | 0.00094373 |
| 0.00069581 | 0.00048497 | 0.00068398 | 0.00069259 | 0.00069531 |

где N – количество элементов.

Когда функции квадратов частоты плавучести имеют вид $\beta(z) = \bar{\beta}_0 / (1 - \bar{\beta}_0 z)$ и $\beta(z) = A_0 + A_1 \cos(\alpha \pi z)$, получим следующие результаты расчётов собственных частот, приведенные в таблицах 2.16 и 2.17.

Таблица 2.16. Результаты расчётов собственных частот для законов изменения квадрата частоты плавучести $\beta(z) = \bar{\beta}_0 / (1 - \bar{\beta}_0 z)$

| Численное решение без двойного приближения Буссинеска | | | |
|---|------------|------------|------------|
| $\rho_0 = \rho_0^*(1 - \bar{\beta}_0 z)$, $\beta(z) = \bar{\beta}_0 / (1 - \bar{\beta}_0 z)$; | | | |
| N=10 | N=50 | N=100 | N=500 |
| 1.8413939 | 1.8401125 | 1.8395410 | 1.8390294 |
| 0.02485686 | 0.02491528 | 0.02490896 | 0.02490213 |
| 0.00759337 | 0.00782577 | 0.00782915 | 0.00782845 |
| 0.00337717 | 0.00365088 | 0.00365709 | 0.00365816 |
| 0.00180915 | 0.00208657 | 0.00209387 | 0.00209566 |
| 0.00107914 | 0.00134282 | 0.00135065 | 0.00135277 |
| 0.00069641 | 0.00093349 | 0.00094151 | 0.00094383 |
| 0.00048769 | 0.00068468 | 0.00069294 | 0.00069538 |

Таблица 2.17. Результаты расчётов собственных частот для законов изменения квадрата частоты плавучести $\beta(z) = A_0 + A_1 \cos(\alpha\pi z)$

| Численное решение без двойного приближения Буссинеска | | | |
|---|------------|------------|------------|
| $\rho_0 = \rho_0^* e^{-\left(A_0 z + \frac{A_1}{\alpha\pi} \sin(\alpha\pi z)\right)}, \quad \beta(z) = A_0 + A_1 \cos(\alpha\pi z);$ $A_0 = 0.2, A_1 = -0.1, \alpha = 0.5;$ | | | |
| N=10 | N=50 | N=100 | N=500 |
| 1.8414086 | 1.8401574 | 1.8395656 | 1.8390247 |
| 0.02484441 | 0.02489467 | 0.02489773 | 0.02489974 |
| 0.00758974 | 0.00781919 | 0.00782556 | 0.00782768 |
| 0.00337574 | 0.00364780 | 0.00365540 | 0.00365781 |
| 0.00180854 | 0.00208480 | 0.00209291 | 0.00209545 |
| 0.00107892 | 0.00134168 | 0.00135002 | 0.00135264 |
| 0.00069639 | 0.00093261 | 0.00094108 | 0.00094374 |
| 0.00048778 | 0.00068410 | 0.00069262 | 0.00069531 |

Формы колебаний первого и второго тонов, полученные методом конечных элементов, приведены на Рис. 2.16, 2.17.

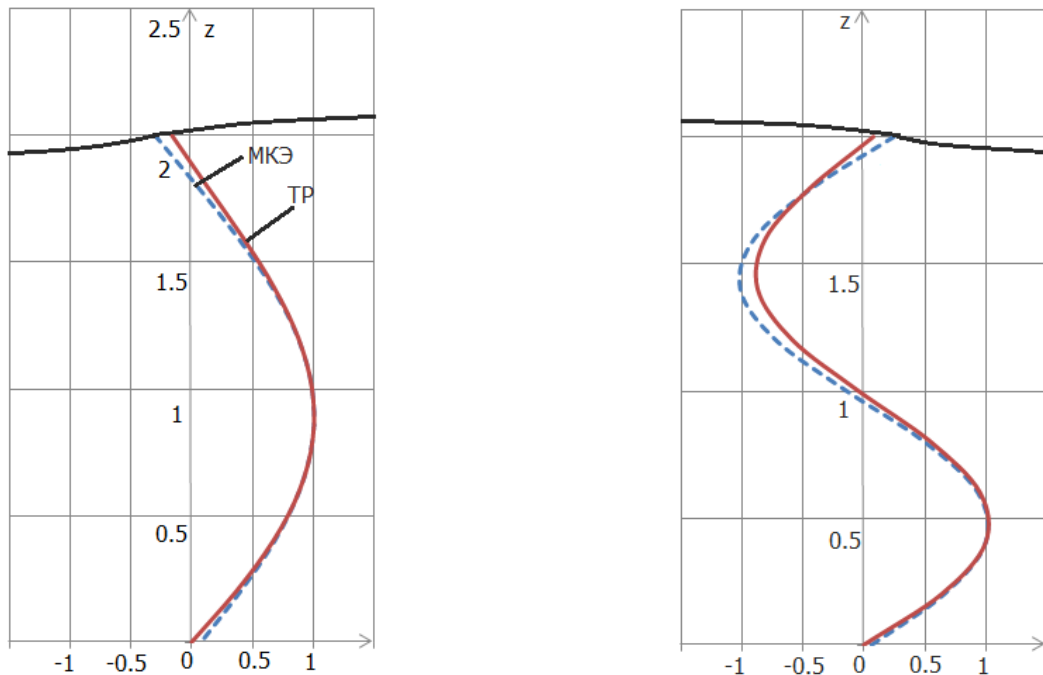


Рис. 2.16. Формы колебаний первого и второго тонов ($N = 100$) для законов изменения квадрата частоты плавучести $\beta(z) = \beta_0 / (1 - \beta_0 z)$: сплошная линия – точное решение, пунктирная линия – МКЭ.

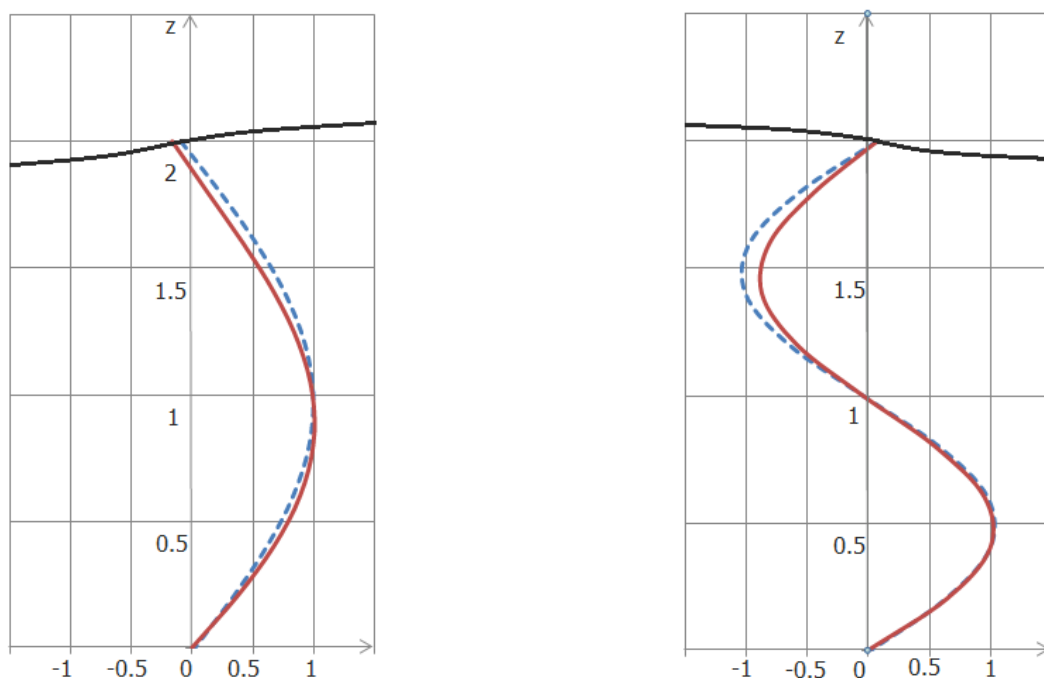


Рис. 2.17. Формы колебаний первого и второго тонов ($N = 100$) для закона изменения квадрата частоты плавучести $\beta(z) = A_0 + A_1 \cos(\alpha\pi z)$.

Выводы по главе 2

В главе 2 получены и проанализированы уравнения движения криогенной жидкости в неподвижном резервуаре [6]. Сформулированы условия, при выполнении которых, движения жидкости можно считать малыми, несжимаемыми и подчиняющиеся законам движения идеальной жидкости.

В главе 2 получены также приближенные формулы для оценки частот колебаний поверхностных и внутренних волн криогенной жидкости, заполняющей частично неподвижный цилиндрический резервуар произвольного поперечного сечения. Приведенные примеры определения собственных частот поверхностных волн позволяют сделать следующие выводы:

- А) При постоянной величине стратификации ($\beta_0 = const$), увеличение глубины жидкости приводит к уменьшению влияния стратификация на частоты поверхностных волн.
- Б) Для неглубокой жидкости отличие частот поверхностных волн однородной и стратифицированной жидкости составляют $4 \div 10\%$.

В главе 2 рассмотрены приближенные методы определения собственных частот колебаний криогенной жидкости, стратификация которой изменяется по произвольному закону. Достоверность полученных численных результатов подтверждается совпадением с результатом вычисления частот по аналитическим формулам, которых получается из решений дифференциальных уравнений с постоянной частотой плавучести.

ГЛАВА 3. ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ ТЕЛ, ИМЕЮЩИХ ПОЛОСТИ, ЧАСТИЧНО ИЛИ ПОЛНОСТЬЮ НАПОЛНЕННЫЕ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В предлагаемой главе изучаются динамические свойства твердых тел с полостями, полностью или частично заполненными неравномерно нагретой криогенной жидкостью. Рассмотрена общая постановка исходной задачи, допущения и получены уравнения возмущенного движения твердого тела, имеющего полость, заполненную неравномерно нагретой жидкостью. Сделана оценка некоторых величин, входящих в уравнение возмущенного движения, позволяющая без потерь общности постановки исходной задачи, получить более простые уравнения возмущенного движения. Получены уравнения возмущенного движения для некоторых частных видов движения твердого тела (начало движения, действия импульсивных сил) при произвольном объемном градиенте плотности и приведен пример, иллюстрирующий некоторые общие динамические свойства твердых тел, имеющих полости, наполненные криогенной жидкостью.

3.1. Вывод уравнений возмущенного движения

Рассмотрим движущееся твердое тело с полостью произвольной конфигурации, полностью заполненной несжимаемой жидкостью. Пусть к жидкости через теплопроводную, твердую стенку, из окружающей среды подводится некоторый поток тепла. Движение жидкости, а также тепловые процессы, происходящие в жидкости, будем рассматривать относительно связанной системы координат $Ox_1x_2x_3$, начало которой совпадает с центром масс твердого тела.

Кроме этой системы координат введем в рассмотрение систему координат $O^*y_1y_2y_3$, с началом в произвольной точке O^* (Рис. 3.1). Определим движение системы координат $Ox_1x_2x_3$, а следовательно, и твердого тела относительно

системы $O^* y_1 y_2 y_3$ при помощи вектора скорости \vec{V}_0 точки O и вектора угловой скорости вращения $\vec{\omega}$, проходящего через точки O .

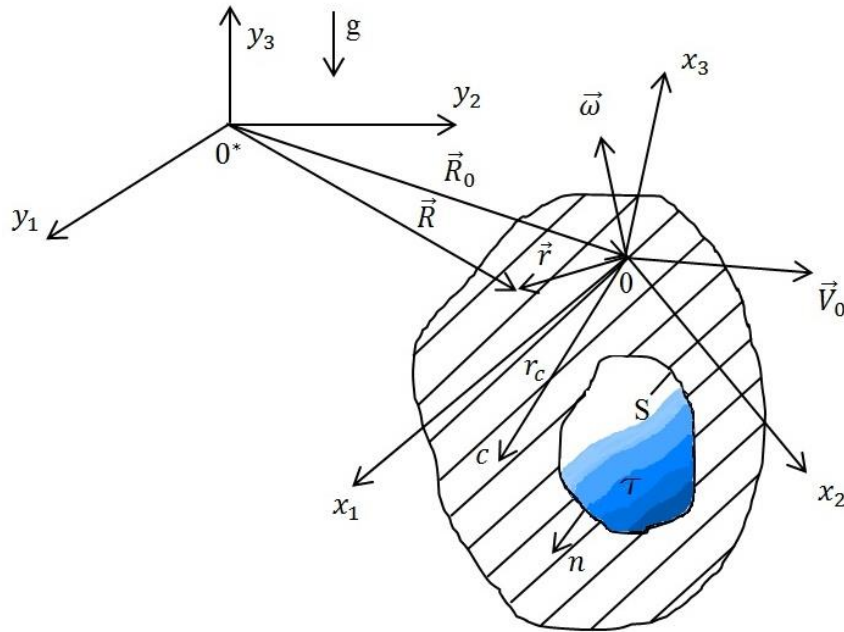


Рис. 3.1. Движение твердого тела с полостью произвольной конфигурации, заполненной несжимаемой жидкостью

Введенные системы координат позволяют нам рассматривать движение жидкости по отношению к системе координат $Ox_1 x_2 x_3$, как относительное, а по отношению к системе $O^* y_1 y_2 y_3$ как абсолютное. Обозначим через $\vec{R} = \sum_{j=1}^3 y_j \vec{e}'_j$ радиус-вектор произвольной точки, отложенный от точки O^* , через $\vec{r} = \sum_{j=1}^3 x_j \vec{e}_j$ радиус-вектор в связанной системе координат $Ox_1 x_2 x_3$. Векторы \vec{e}'_j и \vec{e}_j есть единичные векторы направлений осей y_i и x_i соответственно. Тогда уравнения движения твердого тела с жидкостью в системе координат $Ox_1 x_2 x_3$ примут вид [90]:

$$\frac{d\vec{Q}_T}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{Q}_T = \vec{K}_T + \vec{P}, \quad (3.1)$$

$$\frac{d\vec{M}_T}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{M}_T + \vec{V}_0 \times \vec{Q}_T = \vec{L}_T + \vec{N}, \quad (3.2)$$

где \vec{Q}_T и \vec{M}_T – количество движения и кинетический момент твердого тела относительно точки O ; \vec{K}_T , \vec{P} , \vec{L}_T и \vec{N} – главные векторы и главные моменты относительно точки O активных сил, приложенных к точкам твердого тела, и сил давлений жидкости.

Выражение для \vec{P} и \vec{N} получим, используя уравнения гидродинамики несжимаемой жидкости, записанные в подвижной системе координат

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{V} + \vec{f}, \quad (3.3)$$

где \vec{V} – вектор абсолютной скорости частиц жидкости

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{u},$$

\vec{u} – вектор относительной скорости частиц жидкости, \vec{r} – радиус вектор, какой либо точки системы относительно точки O , $\rho(\vec{r}, t)$, $p(\vec{r}, t)$ – плотность и давление частиц жидкости, \vec{f} – вектор интенсивности поля внешних сил, ν – коэффициент кинематической вязкости.

Во введенных обозначениях выражения для \vec{P} , \vec{N} примут вид:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= -\int_{\tau} \rho_0 \frac{d\vec{V}}{dt} d\tau - \int_{\tau} \rho_0 \vec{\omega} \times \vec{V} d\tau + \int_{\tau} \mu \Delta \vec{V} d\tau, \\ \vec{N} &= -\int_{\tau} \rho_0 \vec{r} \times \frac{d\vec{V}}{dt} d\tau - \int_{\tau} \rho_0 \vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{V} d\tau + \int_{\tau} \vec{r} \times \mu \Delta \vec{V} d\tau. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь τ – область, занимаемая жидкостью.

Из выражений (3.3), (3.4) видно, что для определения векторов \vec{P} и \vec{N} необходимо знать движение жидкости в полости твердого тела, то есть решить гидродинамическую задачу – найти поле скоростей жидкости – $\vec{V}(\vec{r}, t)$.

Для получения решения гидродинамической задачи и задачи о движении твердого тела при действии теплового потока уравнения движения твердого тела и жидкости необходимо дополнить соотношениям и уравнениями, учитывающими приток тепла из твердого тела, уравнениями состояния и неразрывности, которые приведены в предыдущей главе (уравнения (2.2), (2.4)).

За невозмущенное движение твердого тела примем заданное движение системы координат $Ox_1x_2x_3$, при котором, поле инерционных сил и сил тяжести имеет в ней потенциальную функцию U .

Система уравнений гидродинамики, описывающая невозмущенное движение жидкости, при определенных допущениях может быть сведена к уравнениям тепловой конвекции, которые в последние годы достаточно подробно исследованы. Решения этих уравнений дают информацию о начальном состоянии жидкости к моменту возникновения возмущенного движения твердого тела.

Предположим, что при невозмущенном движении твердого тела, благодаря наличию теплопритока плотности \mathcal{E} , в жидкости сформировалось некоторое начальное поле скоростей, характеризуемое вектором $\vec{u}_0(\vec{r})$ и, соответствующие ему поле давлений, плотностей и температур, характеризуемых функциями $p_0(\vec{r})$, $\rho_0(\vec{r})$, $T_0(\vec{r})$ соответственно.

При возмущенном движении твердого тела на начальное состояние жидкости наложатся дополнительные возмущения, которые разовьют в жидкости добавочные силы инерции, влияющие на движение рассматриваемой механической системы тело-жидкость.

Возмущенное движение твердого тела и жидкости представим как малые отклонения от начального в общем случае нестационарного состояния:

$$\begin{aligned}\vec{V}_0(t) &= \vec{V}_{00}(t) + \vec{V}'_0(t); & \vec{\omega}(t) &= \vec{\omega}_0(t) + \vec{\Omega}(t); \\ \rho(\vec{r}, t) &= \rho_0(\vec{r}) + \rho'(\vec{r}, t); & T(\vec{r}, t) &= T_0(\vec{r}) + T'(\vec{r}, t); \\ p(\vec{r}, t) &= p_0(\vec{r}) + p'(\vec{r}, t);\end{aligned}\tag{3.5}$$

При выводе уравнений возмущенного движения рассматриваемой системы сделаем следующие допущения:

- 1) Перемещения и скорости всех частиц жидкости и твердого тела, а также $\vec{V}'_0, \vec{R}_0, \vec{u}, \Omega, p', \rho', T'$ являются малыми величинами.
- 2) В возмущенном движении действием сил вязкости пренебрегаем.
- 3) Стенки полости теплоизолированы, т.е. в возмущенном движении отсутствует теплоприток в жидкость из твердого массива.

4) Положим, что вектор $\vec{j} = \nabla U$ в каждый момент времени возмущенного движения составляет малый угол с направлением оси Ox_3 и величины проекций ∇U на оси Ox_1 и Ox_2 являются малыми.

Таким образом, общее решение задачи (3.1)-(3.5) о движении твердого теплопроводного тела, имеющего полости, заполненные несжимаемой жидкостью, при сделанных допущениях относительно возмущенного движения, может быть получено на основе отдельного решения тепловой задачи и последующего решения задачи динамики возмущенного движения рассматриваемой механической системы.

В данной работе исследуются только задачи о возмущенном движении твердого тела с жидкостью, а решение системы уравнений невозмущенного движения предполагается известным, т.е. функции $\vec{V}_{00}(t), \vec{\omega}_0, \rho_0(\vec{r}), T_0(\vec{r})$ заданы.

Подставим представление (3.5) в уравнения (3.1)-(3.4), после несложных преобразований для изучения возмущенного движения твердого тела со стратифицированной жидкостью имеем уравнения:

Уравнение изменения количества движения

$$\begin{aligned} M(\dot{\vec{V}}_0' + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}_c) + M\vec{\Omega} \times \vec{\omega}_0 \times \vec{r}_c + M\vec{\omega}_0 \times (\vec{V}_0' + \vec{\Omega} \times \vec{r}_c) + \int_{\tau} \rho_0 \dot{u} d\tau + \vec{\omega}_0 \times \int_{\tau} \rho_0 \vec{u} d\tau + \\ + \vec{\omega}_0 \times \vec{\omega}_0 \times \int_{\tau} \rho' \vec{r} d\tau + \vec{\omega}_0 \times \int_{\tau} \dot{\rho}' \vec{r} d\tau + \vec{V}_{00} \int_{\tau} \dot{\rho}' d\tau = M \delta \vec{j} + \int_{\tau} \rho' \vec{j} d\tau; \end{aligned} \quad (3.6)$$

Уравнение изменения кинетического момента

$$\begin{aligned} (J_0^0 + J_0') \cdot \dot{\vec{\Omega}} + M\vec{r}_c \times \dot{\vec{V}}_0' + \vec{\omega}_0 \times (J_0^0 + J_0') \cdot \vec{\Omega} + \vec{\omega}_0 \times M\vec{r}_c \times \vec{V}_0' + \\ + \int_{\tau} \rho_0 \vec{r} \times \dot{u} d\tau + \int_{\tau} \dot{\rho}' \vec{r} \times \vec{\omega}_0 \times \vec{r} d\tau + \vec{\omega}_0 \times \int_{\tau} \rho_0 \vec{r} \times \vec{u} d\tau + \\ + \vec{\omega}_0 \times \int_{\tau} \rho' \vec{r} \times \vec{\omega}_0 \times \vec{r} d\tau + \vec{\Omega} \times (J_0^0 + J_0') \cdot \vec{\omega}_0 + \int_{\tau} \dot{\rho}' \vec{r} \times \vec{V}_{00} d\tau + \\ + \vec{V}_0' \times M\vec{\omega}_0 \times \vec{r}_c + \vec{V}_{00} \times \vec{\Omega} \times M\vec{r}_c + \int_{\tau} \rho_0 \vec{V}_{00} \times \vec{u} d\tau = M\vec{r}_c \times \delta \vec{j} + \int_{\tau} \rho' (\vec{r} \times \vec{j}) d\tau. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Уравнения движения жидкости в подвижной системе координат $Ox_1x_2x_3$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + 2\vec{\omega}_0 \times \vec{u} + \nabla p - \frac{\rho'}{\rho_0} \nabla \Pi_0 &= -\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} \times \vec{r}, \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \rho_0 \cdot \vec{u} &= 0, \quad \nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad \vec{u} \cdot \vec{n} = 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $\Pi_0 = U_0 + \frac{1}{2} \omega_0^2 (x_1^2 + x_2^2)$,

p – приведенное давление жидкости, определяемой формулой:

$$\nabla p = \frac{1}{\rho_0} \nabla p' - \nabla S_1 - \nabla U', \quad S_1 = \omega_0 \Omega_0 (x_1^2 + x_2^2) - \omega_0 \Omega_1 x_3 x_1 - \omega_0 \Omega_2 x_3 x_2 \quad (3.9)$$

где U' – изменение потенциала массовых сил, выраженное в системе координат $Ox_1x_2x_3$, M_T – масса твёрдого тела и затвердевшей жидкости, J_0^0, J_0' – тензоры моментов инерции твёрдого тела и затвердевшей жидкости.

При вращении твёрдого тела с жидкостью вокруг неподвижной точки, совпадающей с центром масс твёрдого тела и затвердевшей жидкости, уравнение изменения кинетического момента возмущенного движения запишется в виде

$$\begin{aligned} (J_0^0 + J_0') \cdot \dot{\vec{\Omega}} + \vec{\omega}_0 \times (J_0^0 + J_0') \cdot \vec{\Omega} + \int_{\tau} \rho_0 \vec{r} \times \dot{\vec{u}} d\tau + \int_{\tau} \rho' \vec{r} \times \vec{\omega}_0 \times \vec{r} d\tau + \\ + \vec{\omega}_0 \times \int_{\tau} \rho_0 \vec{r} \times \vec{u} d\tau + \vec{\omega}_0 \times \int_{\tau} \rho' \vec{r} \times \vec{\omega}_0 \times \vec{r} d\tau + \vec{\Omega} \times (J_0^0 + J_0') \cdot \vec{\omega}_0 = \int_{\tau} \rho' (\vec{r} \times \vec{j}) d\tau. \end{aligned} \quad (3.10)$$

3.2. Простейшие случаи движения твёрдого тела со стратифицированной жидкостью

Полученные уравнения возмущённого движения твёрдого тела с криогенной жидкостью является достаточно сложными для исследования, так как содержат уравнение движения жидкости в частных производных. Однако при некоторых предположениях о движении твёрдого тела и стратифицированной жидкости движения рассматриваемой гидромеханической системы можно характеризовать конечным числом переменных. Очевидно, это возможно, как и для однородной жидкости, в случаях, когда можно пренебречь массовыми силами, действующими на твёрдое тело и жидкость и описать движение все системы обыкновенными дифференциальными уравнениями. Исследования

динамики системы в этих случаях значительно упрощается. Такие движения твёрдого тела с полостями, наполненными стратифицированной жидкостью, и представляют собой простейшие случаи движения. Одним из таких случаев является движение твёрдого тела, имеющего полость с криогенной жидкостью, совершающей квазипотенциальное движение.

3.2.1. Постановка задачи

Рассмотрим движение твёрдого тела с полостью произвольной конфигурации, полностью или частично заполненной идеальной неоднородной несжимаемой жидкостью. Пусть твёрдое тело мгновенно приводится в движение в результате действия импульсивных сил. Уравнения движения твёрдого тела с жидкостью в этом случае могут быть записаны в виде (3.1)-(3.4), в которых будем пренебрегать действием конечных массовых сил ($g = 0$) и сил трения ($\mu = 0$)

$$\frac{d\vec{Q}_T}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{Q}_T = \vec{K}_T + \vec{P}, \quad \frac{d\vec{M}_T}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{M}_T = \vec{L}_T + \vec{N}, \quad (3.11)$$

$$\vec{P} = -\int_{\tau} \rho_0 \frac{d\vec{V}}{dt} d\tau - \int_{\tau} \rho_0 \vec{\omega} \times \vec{V} d\tau, \quad \vec{N} = -\int_{\tau} \rho_0 \vec{r} \times \frac{d\vec{V}}{dt} d\tau - \int_{\tau} \rho_0 \vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{V} d\tau \quad (3.12)$$

где \vec{V} - вектор абсолютной скорости частиц жидкости; $\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{u}$.

Как следует из уравнения (3.12) для определения гидродинамического воздействия жидкости на движении твёрдого тела необходимо решить гидродинамическую задачу, найти вектор абсолютной скорости - \vec{V} . С этой целью предположим, что жидкость может совершать квазипотенциальные движения.

3.2.2. Квазипотенциал скоростей неоднородной жидкости

Под квазипотенциальным движением будем понимать такое движение неоднородной жидкости, при котором $rot\vec{V} \neq 0$, но выполняется условие

$$\vec{V} \cdot rot\vec{V} = 0, \quad (3.13)$$

где \vec{V} - скорость частиц жидкости.

Равенство (3.13) является необходимым и достаточным условием [104] существования скалярной функции $F(\vec{r}, t)$, называемой в дальнейшем квазипотенциалом скоростей неоднородной жидкости. Скорость частиц жидкости тогда может быть выражена формулой

$$\vec{V} = \frac{1}{\rho_0(\vec{r})} \text{grad} F, \quad (3.14)$$

где $\rho_0(\vec{r})$ – известное поле плотностей жидкости.

Сделанные предложения позволяют значительно упростить исследование динамики твердого тела с жидкостью, сохраняя особенности движения, присущие неоднородной жидкой массе.

Поясним физический смысл квазипотенциала. С этой целью рассмотрим уравнение движения и уравнение неразрывности неоднородной жидкости

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{f}, \quad \frac{d\rho}{dt} = 0, \quad \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0.$$

Пусть к жидкости приложены мгновенные силы с интенсивностью \vec{f}' , действующие в течение очень малого времени τ и порождающие большие градиенты давления p' [78]. Уравнение движения жидкости тогда приобретёт вид

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{f} + \vec{f}' - \frac{1}{\rho} \nabla p'.$$

Приняв за момента t_0 начало действия мгновенных сил, проинтегрируем сначала уравнение неразрывности от $t = t_0$ до $t = \tau$. Учитывая, что за малый промежуток времени плотность частиц жидкости не успевает измениться, имеем

$$\int_{t_0}^{\tau} \frac{d\rho}{dt} dt = \rho_0(\vec{r}), \nabla \cdot \vec{V} = 0.$$

Далее проинтегрируем по малому промежутку τ_0 уравнение движения, принимая во внимание малости импульса обычных сил по сравнению с импульсом мгновенных сил

$$\vec{V}' - \vec{V} = J - \frac{1}{\rho_0} \nabla \pi,$$

где \vec{V} , \vec{V}' – скорости одной и той же частицы до начала и после действия мгновенных сил, $J = \int_{t_0}^{\tau} \vec{F}' dt$ – импульс мгновенных сил, $\pi = \int_{t_0}^t p' d\tau$ – импульс мгновенных давлений.

Если мгновенные силы отсутствуют, то движения могут возникать при изменении состояния жидкости. В частном случае, если неоднородная жидкость находилась в состоянии покоя $\vec{V} = \vec{0}$, то при мгновенном изменении этого состояния получим

$$\vec{V}' = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \pi,$$

причем кинематическое состояние жидкости будет вихревым:

$$\nabla \times \vec{V}' = \vec{\Omega}' = \frac{1}{\rho_0^2} \nabla \rho_0 \times \nabla \pi.$$

Из приведённых соотношений следует, что с точностью до константы квазипотенциал скоростей неоднородной жидкости можно отождествить с импульсом мгновенных давлений

$$F(x, t) = \pi(x, t) + C(t),$$

приводящим к возникновению вихревого движения неоднородной жидкости.

Сформулируем краевую задачу для нахождения функции $F(\vec{r}, t)$ в случае, когда жидкость заполняет полость твёрдого тела, внезапно пришедшего в движение:

$$\nabla \cdot \frac{1}{\rho_0} \nabla F = 0, \quad (3.15)$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial F}{\partial n} = \vec{V}_0 \cdot \vec{n} + \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{n}). \quad (3.16)$$

Здесь \vec{n} – орт внешней нормали к границе S области G , ∇ – оператор Гамильтона.

Функции $F(x, t)$ будем искать в виде [88, 93, 96-97]

$$F(\vec{r}, t) = \vec{\Phi} \cdot \vec{V}_0 + \vec{\Psi} \cdot \vec{\omega}, \quad (3.17)$$

где $\vec{\Phi}(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$; $\vec{\Psi}(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$ – векторные функции, компоненты которых Φ_i и Ψ_i являются единичными квазипотенциалами абсолютных скоростей жидкости при поступательном движении тела вдоль i -ой оси и вращения вокруг i -ой оси.

Используя представление (3.17) и уравнение (3.15), получим следующие краевые задачи Неймана для функций Φ_i и Ψ_i :

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla \Phi_i \right) = 0, \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = \vec{n} \cdot \vec{e}_i, \quad (3.18)$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla \Psi_i \right) = 0, \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Psi_i}{\partial n} = (\vec{r} \times \vec{n}) \cdot \vec{e}_i. \quad (3.19)$$

Сделаем несколько предположений относительно характера величин, входящих в задачи (3.18), (3.19). Будем считать область односвязной, с достаточной гладкой границей S . Из физических соображений функцию $\rho_0(\vec{r})$ подчиним условиям

$$0 < m \leq \rho_0(\vec{r}) \leq M < \infty. \quad (3.20)$$

3.2.3. Анализ уравнений движения твердого тела с неоднородной жидкостью

Считая функции Φ_i и Ψ_i найденными, составим уравнения движения твердого тела с неоднородной жидкостью, совершающей квазипотенциальное движение. Удобной формой уравнений движения будет являться такая форма, в которой инерционные характеристики системы могут быть рассмотрены в виде суммы инерционных характеристик твердого тела, «затвердевшей» жидкости и добавки, происходящей за счет подвижности жидкости относительно твердого тела [69]. Представим с этой целью вектор $\vec{\Phi}$ в виде

$$\vec{\Phi} = \vec{\Phi}^* + \rho_0(\vec{r})\vec{r} \quad (3.21)$$

и заменим в формулах (3.3), (3.4) вектор скорости \vec{V} формулой (3.12), где функция F определена формулой (3.17), в которой функция $\vec{\Phi}$ представляется формулой (3.21).

Используя формулу Гаусса-Остроградского, граничные условия (3.18), (3.21) и формулу Грина

$$\int_{\tau} (\mathcal{G}L[u] - uL[v])d\tau = \oint_s \frac{1}{\rho_0} \left(\mathcal{G} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds \quad (3.22)$$

(L – линейный оператор), выполним следующие громоздкие, но несложные преобразования:

$$\begin{aligned} & \int_{\tau} \nabla(\vec{\Phi} \cdot \vec{V}_0) d\tau = \int_{\tau} \nabla(\vec{\Phi}^* \cdot \vec{V}_0) d\tau + \int_{\tau} \vec{r} \cdot \vec{V}_0 \nabla \rho_0 d\tau + \vec{V}_0 \int_{\tau} \rho_0 d\tau = \\ & = \sum_{j=1}^3 V_{0j} \sum_{k=1}^3 \vec{e}_k \oint_s \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} \Phi_j^* ds + \sum_{j=1}^3 V_{0j} \sum_{k=1}^3 \vec{e}_k \int_{\tau} x_j \frac{\partial \rho_0}{\partial x_k} d\tau + m \vec{V}_0 = \\ & = V_{01} \oint_s \Phi_1^* \frac{1}{\rho_0} \left(\vec{e}_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} + \vec{e}_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} + \vec{e}_3 \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} \right) ds + V_{02} \oint_s \Phi_2^* \frac{1}{\rho_0} \left(\vec{e}_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} + \vec{e}_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} + \vec{e}_3 \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} \right) ds + \\ & + V_{03} \oint_s \Phi_3^* \frac{1}{\rho_0} \left(\vec{e}_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} + \vec{e}_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} + \vec{e}_3 \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} \right) ds + V_{01} \int_{\tau} x_1 \left(\vec{e}_1 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} \right) d\tau + \\ & + V_{02} \int_{\tau} x_2 \left(\vec{e}_1 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} \right) d\tau + V_{03} \int_{\tau} x_3 \left(\vec{e}_1 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} \right) d\tau + m \vec{V}_0 = \\ & = \begin{vmatrix} \oint_s \Phi_1^* \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} ds & \oint_s \Phi_2^* \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} ds & \oint_s \Phi_3^* \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} ds \\ \oint_s \Phi_1^* \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} ds & \oint_s \Phi_2^* \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} ds & \oint_s \Phi_3^* \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} ds \\ \oint_s \Phi_1^* \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} ds & \oint_s \Phi_2^* \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} ds & \oint_s \Phi_3^* \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} ds \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_{01} \\ V_{02} \\ V_{03} \end{vmatrix} + \\ & + \begin{vmatrix} \int_{\tau} x_1 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_1} d\tau & \int_{\tau} x_2 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_1} d\tau & \int_{\tau} x_3 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_1} d\tau \\ \int_{\tau} x_1 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_2} d\tau & \int_{\tau} x_2 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_2} d\tau & \int_{\tau} x_3 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_2} d\tau \\ \int_{\tau} x_1 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} d\tau & \int_{\tau} x_2 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} d\tau & \int_{\tau} x_3 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} d\tau \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_{01} \\ V_{02} \\ V_{03} \end{vmatrix} + m \vec{V}_0 = \\ & = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \vec{e}_j \vec{e}_k \mu_{jk} \vec{V}_0 + m \vec{V}_0 = \mathfrak{M} \cdot \vec{V}_0 + m \vec{V}_0, \end{aligned}$$

$$\text{где } \mathfrak{M} = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \vec{e}_k \vec{e}_j \mu_{jk}, \quad m = \int_{\tau} \rho_0 d\tau;$$

$$\begin{aligned} & \int_{\tau} r \times \nabla (\vec{\Phi} \cdot \vec{V}_0) d\tau = \int_{\tau} r \times \nabla (\vec{\Phi}^* \cdot \vec{V}_0) d\tau + \int_{\tau} \vec{r} \times \nabla \rho_0 (\vec{r} \cdot \vec{V}_0) d\tau + \int_{\tau} \vec{r} \times \vec{V}_0 \rho_0 d\tau = \\ & = \sum_{j=1}^3 V_{0j} \sum_{k=1}^3 \vec{e}_k \oint_s \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi_k}{\partial n} \Phi_j^* ds + \sum_{j=1}^3 V_{0j} \sum_{k=1}^3 \vec{e}_k \int_{\tau} r_j (r \times \nabla \rho_0)_k d\tau + \vec{L}_0 \times \vec{V}_0 = \\ & = V_{01} \oint_s \Phi_1^* \frac{1}{\rho_0} \left(\vec{e}_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial n} + \vec{e}_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial n} + \vec{e}_3 \frac{\partial \psi_3}{\partial n} \right) ds + V_{02} \oint_s \Phi_2^* \frac{1}{\rho_0} \left(\vec{e}_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial n} + \vec{e}_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial n} + \vec{e}_3 \frac{\partial \psi_3}{\partial n} \right) ds + \\ & + V_{03} \oint_s \Phi_3^* \frac{1}{\rho_0} \left(\vec{e}_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial n} + \vec{e}_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial n} + \vec{e}_3 \frac{\partial \psi_3}{\partial n} \right) ds + \\ & + V_{01} \int_{\tau} \left(x_2 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_2} \right) (x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3) d\tau + V_{02} \int_{\tau} \left(x_3 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} \right) (x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3) d\tau + \\ & + V_{03} \int_{\tau} \left(x_1 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_1} \right) (x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3) d\tau + \vec{L}_0 \times \vec{V}_0 = \\ & = \begin{vmatrix} \oint_s \Phi_1^* \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi_1}{\partial n} ds & \oint_s \Phi_2^* \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi_1}{\partial n} ds & \oint_s \Phi_3^* \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi_1}{\partial n} ds \\ \oint_s \Phi_1^* \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi_2}{\partial n} ds & \oint_s \Phi_2^* \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi_2}{\partial n} ds & \oint_s \Phi_3^* \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi_2}{\partial n} ds \\ \oint_s \Phi_1^* \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi_3}{\partial n} ds & \oint_s \Phi_2^* \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi_3}{\partial n} ds & \oint_s \Phi_3^* \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi_3}{\partial n} ds \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_{01} \\ V_{02} \\ V_{03} \end{vmatrix} + \\ & + \begin{vmatrix} \int_{\tau} \left(x_2 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_2} \right) x_1 d\tau & \int_{\tau} \left(x_3 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} \right) x_1 d\tau & \int_{\tau} \left(x_1 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_1} \right) x_1 d\tau \\ \int_{\tau} \left(x_2 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_2} \right) x_2 d\tau & \int_{\tau} \left(x_3 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} \right) x_2 d\tau & \int_{\tau} \left(x_1 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_1} \right) x_2 d\tau \\ \int_{\tau} \left(x_2 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_2} \right) x_3 d\tau & \int_{\tau} \left(x_3 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} \right) x_3 d\tau & \int_{\tau} \left(x_1 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_1} \right) x_3 d\tau \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_{01} \\ V_{02} \\ V_{03} \end{vmatrix} + \vec{L}_0 \times \vec{V}_0 = \\ & = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \vec{e}_j \vec{e}_k l_{jk} \cdot \vec{V}_0 + \vec{L}_0 \times \vec{V}_0 = L \cdot \vec{V}_0 + \vec{L}_0 \times \vec{V}_0, \end{aligned}$$

$$\text{где } L = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \vec{e}_j \vec{e}_k l_{jk}, \quad \vec{L}_0 = \int_{\tau} \rho_0 \vec{r} d\tau = m \vec{r}_c;$$

$$\begin{aligned} \int_{\tau} \nabla(\vec{\psi} \cdot \vec{\omega}) d\tau &= \oint_s \vec{\omega} \cdot \vec{\psi} \vec{n} ds = \oint_s \vec{\omega} \cdot \vec{\psi} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial n} ds = \\ &= \sum_{j=1}^3 \omega_j \sum_{k=1}^3 \vec{e}_k \oint_s \psi_j \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} ds = \sum_{j=1}^3 \omega_j \sum_{k=1}^3 \vec{e}_k \oint_s \Phi_k \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi_j}{\partial n} ds = \\ &= \sum_{j=1}^3 \omega_j \sum_{k=1}^3 \vec{e}_k \oint_s \Phi_k (\vec{r} \times \vec{n})_j ds = \sum_{j=1}^3 \omega_j \sum_{k=1}^3 \vec{e}_k \int_{\tau} (\vec{r} \times \nabla)_j \Phi_k d\tau = \\ &= \sum_{j=1}^3 \omega_j \sum_{k=1}^3 \vec{e}_k \int_{\tau} (\vec{r} \times \nabla)_j (\Phi_k^* + \rho_0 r_k) d\tau = \\ &= \sum_{j=1}^3 \omega_j \sum_{k=1}^3 \vec{e}_k \int_{\tau} (\vec{r} \times \nabla)_j \Phi_k^* d\tau + \sum_{j=1}^3 \omega_j \sum_{k=1}^3 \vec{e}_k \int_{\tau} r_k (\vec{r} \times \nabla \rho_0)_j d\tau + \sum_{j=1}^3 \omega_j \sum_{k=1}^3 \vec{e}_k \int_{\tau} \rho_0 (\vec{r} \times \nabla)_j r_k d\tau = \\ &= \int_{\tau} \omega_1 \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) (\Phi_1^* \vec{e}_1 + \Phi_2^* \vec{e}_2 + \Phi_3^* \vec{e}_3) d\tau + \int_{\tau} \omega_2 \left(x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) (\Phi_1^* \vec{e}_1 + \Phi_2^* \vec{e}_2 + \Phi_3^* \vec{e}_3) d\tau + \\ &+ \int_{\tau} \omega_3 \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) (\Phi_1^* \vec{e}_1 + \Phi_2^* \vec{e}_2 + \Phi_3^* \vec{e}_3) d\tau + \\ &+ \int_{\tau} \omega_1 \left(x_2 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_2} \right) (x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3) d\tau + \int_{\tau} \omega_2 \left(x_3 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} \right) (x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3) d\tau + \\ &+ \int_{\tau} \omega_3 \left(x_1 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_1} \right) (x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3) d\tau + \\ &+ \rho_0 \int_{\tau} \omega_1 \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) (x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3) d\tau + \rho_0 \int_{\tau} \omega_2 \left(x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) (x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3) d\tau + \\ &+ \rho_0 \int_{\tau} \omega_3 \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) (x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3) d\tau = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\tau} \left(x_2 \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial x_2} \right) d\tau \quad \int_{\tau} \left(x_3 \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial x_3} \right) d\tau \quad \int_{\tau} \left(x_1 \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial x_1} \right) d\tau \right| \\
& = \left| \int_{\tau} \left(x_2 \frac{\partial \Phi_2^*}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial \Phi_2^*}{\partial x_2} \right) d\tau \quad \int_{\tau} \left(x_3 \frac{\partial \Phi_2^*}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial \Phi_2^*}{\partial x_3} \right) d\tau \quad \int_{\tau} \left(x_1 \frac{\partial \Phi_2^*}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial \Phi_2^*}{\partial x_1} \right) d\tau \right| \cdot \begin{vmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{vmatrix} + \\
& \left| \int_{\tau} \left(x_2 \frac{\partial \Phi_3^*}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial \Phi_3^*}{\partial x_2} \right) d\tau \quad \int_{\tau} \left(x_3 \frac{\partial \Phi_3^*}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial \Phi_3^*}{\partial x_3} \right) d\tau \quad \int_{\tau} \left(x_1 \frac{\partial \Phi_3^*}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial \Phi_3^*}{\partial x_1} \right) d\tau \right| \\
& + \left| \int_{\tau} \left(x_2 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_2} \right) x_1 d\tau \quad \int_{\tau} \left(x_2 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_2} \right) x_2 d\tau \quad \int_{\tau} \left(x_2 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_2} \right) x_3 d\tau \right| \\
& + \left| \int_{\tau} \left(x_3 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} \right) x_1 d\tau \quad \int_{\tau} \left(x_3 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} \right) x_2 d\tau \quad \int_{\tau} \left(x_3 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} \right) x_3 d\tau \right| \cdot \begin{vmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{vmatrix} + \\
& \left| \int_{\tau} \left(x_1 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_1} \right) x_1 d\tau \quad \int_{\tau} \left(x_1 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_1} \right) x_2 d\tau \quad \int_{\tau} \left(x_1 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_1} \right) x_3 d\tau \right| \\
& + \int_{\tau} \rho_0 [x_2 \omega_1 \vec{e}_3 - x_3 \omega_1 \vec{e}_2 + x_3 \omega_2 \vec{e}_1 - x_1 \omega_2 \vec{e}_3 + x_1 \omega_3 \vec{e}_2 - x_2 \omega_3 \vec{e}_1] d\tau = \\
& = L^* \cdot \vec{\omega} - \vec{L}_0 \times \vec{\omega},
\end{aligned}$$

где L^* - тензор сопряжённой к тензору L ;

$$\begin{aligned}
& \int_{\tau} \vec{r} \times \nabla (\vec{\psi} \cdot \vec{\omega}) d\tau = \sum_{j=1} \omega_j \sum_{k=1} \vec{e}_k \int_{\tau} (\vec{r} \times \nabla)_k \psi_0 d\tau = \\
& = \sum_{j=1} \omega_j \sum_{k=1} \vec{e}_k \oint_s (\vec{r} \times \vec{v})_k \psi_j ds = \sum_{j=1} \omega_j \sum_{k=1} \vec{e}_k \oint_s \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi_k}{\partial n} \psi_j ds = \\
& \left| \oint_s \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi_1}{\partial n} \psi_1 ds \quad \oint_s \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi_2}{\partial n} \psi_1 ds \quad \oint_s \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi_3}{\partial n} \psi_1 ds \right| \\
& = \left| \oint_s \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi_1}{\partial n} \psi_2 ds \quad \oint_s \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi_2}{\partial n} \psi_2 ds \quad \oint_s \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi_2}{\partial n} \psi_2 ds \right| \cdot \begin{vmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{vmatrix} = \\
& \left| \oint_s \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi_1}{\partial n} \psi_3 ds \quad \oint_s \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi_2}{\partial n} \psi_3 ds \quad \oint_s \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi_3}{\partial n} \psi_3 ds \right| \\
& = \sum_{j=1}^3 \vec{e}_j \sum_{k=1}^3 \vec{e}_k i_{jk} \cdot \vec{\omega} = J \cdot \vec{\omega}.
\end{aligned}$$

После преобразования всех объёмных интегралов определим главный вектор \vec{P} и главный момент \vec{N} гидродинамических сил давлений жидкости,

используя формулы (3.3),(3.4), в которых будем пренебрегать интегралами, учитывающими вязкость жидкости.

В результате уравнения движения (3.1), (3.2) запишутся в виде

$$\frac{d}{dt}(\vec{Q} + \vec{Q}') + \vec{\omega} \times (\vec{Q} + \vec{Q}') = \vec{K}_T, \quad (3.23)$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{M} + \vec{M}') + \vec{\omega} \times (\vec{M} + \vec{M}') + \vec{V}_0 \times \vec{Q}' = \vec{L}_T, \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \vec{Q} &= \vec{Q}_T + \vec{Q}_{з.жс.}, & \vec{Q}' &= \mathfrak{M} \cdot \vec{V}_0 - L \cdot \vec{\omega} - \vec{L}_0 \times \vec{\omega}, \\ \vec{M} &= \vec{M}_T + \vec{M}_{з.жс.}, & \vec{M}' &= L \cdot \vec{V}_0 + \vec{L}_0 \times \vec{V}_0 + J \cdot \vec{\omega}. \end{aligned}$$

Здесь $\vec{Q}_{з.жс.} = \int_{\tau} \rho_0 \vec{V}_0 d\tau$, $\vec{M}_{з.жс.} = \int_{\tau} \rho_0 \vec{r} \times \vec{V}_0 d\tau$ – количество и момент количества «затвердевшей» неоднородной жидкости; \mathfrak{M}, L, J – тензоры, характеризующие подвижность жидкой массы, причем \mathfrak{M}, J – тензоры присоединенной массы и присоединенных моментов инерции жидкости [116]:

$$\mathfrak{M} = \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 \vec{e}_k \vec{e}_j \mu_{kj}, \quad L = \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 \vec{e}_k \vec{e}_j l_{kj}; \quad (3.25)$$

$$J = \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 \vec{e}_k \vec{e}_j i_{kj}, \quad \vec{L}_0 = \int_{\tau} \rho_0 \vec{r} d\tau = m \vec{r}_c; \quad (3.26)$$

$$\mu_{kj} = \int_{\tau} x_j \frac{d\rho_0}{dx_k} d\tau + \oint_s \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} \Phi_j^* dS; \quad (3.27)$$

$$l_{kj} = \int_{\tau} x_j (\vec{r} \times \nabla \rho_0)_k d\tau + \oint_s \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Psi_k}{\partial n} \cdot \Phi_j^* dS; \quad (3.28)$$

$$i_{kj} = \oint_s \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Psi_k}{\partial n} \Psi_j^* dS; \quad (3.29)$$

где \vec{L}_0 – статический момент «затвердевшей» неоднородной жидкости массой m , \vec{r}_c – радиус-вектор центра масс «затвердевшей» неоднородной жидкой массы.

Формулы (3.25)-(3.29) позволяют рассмотреть и частный случай, когда плотность частиц постоянна и движение жидкости безвихревое. При этом краевые задачи для функций Ψ_j переходят при $\rho_0(t)=1$ в задачи Неймана для

гармонических функций, называемых потенциалами Жуковского для данной полости. Как видно из выражений (3.25)-(3.29) компоненты тензоров \mathfrak{M}, L , состоят из двух, качественно разных, слагаемых. Первое слагаемое учитывает влияние изменения плотности жидкости на инерционные характеристики системы, последние же слагаемые, как и в случае однородной жидкости, характеризуют воздействие движения жидкости, возникающего вследствие движения твердого тела.

Из уравнений движения (3.23)-(3.24) также следует, что при приложении силы в центре масс системы к твердому телу система не будет совершать поступательное движение коллинеарное вектору действия силы. Допустим, что к твердому телу с неоднородной жидкостью приложена такая система сил, при действии которой рассматриваемая механическая система будет совершать только поступательное движение. Тогда отличие от соответствующего движения твердого тела с однородной жидкостью будет состоять в том, что инерционные характеристики системы при приложении совокупности сил, компланарной одной из плоскостей $Ox_i x_j$ ($i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$), оказываются разными.

Указания анизотропность инерционных характеристик системы тело – неоднородная жидкость, а также существование тензоров \mathfrak{M} и L можно объяснить возникновением вихревого движения жидкости. Так для относительной скорости частиц жидкости при наличии только поступательного движения полости имеем

$$\vec{u} = \vec{V} - \vec{V}_0 = \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot (\vec{\Phi} \cdot \vec{V}_0) - \vec{V}_0. \quad (3.30)$$

Применим к обеим частям равенства (3.30) операцию *rot*

$$\vec{\Omega}_r = \text{rot} \vec{u} = -\frac{1}{\rho_0^2} \nabla \rho_0 \times \nabla (\vec{\Phi} \cdot \vec{V}_0) = \vec{\Omega}_V. \quad (3.31)$$

Отсюда следует, что вихрь относительной скорости жидкости оказывается отличен от нуля при поступательном движении твердого тела; Ω_V – вихрь абсолютных скоростей частиц жидкости.

Пусть теперь к твердому телу с жидкостью приложена система сил, в результате действия которой твердое тело получает только вращательное движение вокруг некоторой точки, остающейся неподвижной в пространстве. Относительный вихрь скоростей частиц жидкости выразится формулой

$$\vec{\Omega}_r = \text{rot } \vec{u} = -\frac{1}{\rho_0^2} \nabla \rho_0 \times \nabla (\vec{\Psi} \cdot \vec{\omega}) - 2\vec{\omega} \quad (3.32)$$

или

$$\vec{\Omega}_r = \vec{\Omega}_v - 2\vec{\omega}, \quad \vec{\Omega}_v \neq \vec{0}, \quad (3.33)$$

В то время как частицы однородной жидкости в их относительном движении имеют вихрь $\vec{\Omega}_r = -2\vec{\omega}$.

Таким образом, различная плотность частиц жидкости порождает отличное от нуля поле абсолютных угловых скоростей частиц, что в сумме и приводит к анизотропии инерционных характеристик твердого тела с неоднородной жидкой массой. Причиной образования вихревого движения жидкости, как следует из равенства (3.31), (3.32), является пересечение поверхностей равной плотности с поверхностями квазипотенциала скоростей.

Если форма полости твердого тела, изменение плотности жидкости $\rho_0(x_1, x_2, x_3)$ и направление движения тела таковы, что векторное произведение в выражениях (3.31), (3.32) равно нулю, то вихревые движения криогенной жидкости не будут создавать неодинаковые инерционные массы при поступательных движениях твёрдого тела в разных направлениях.

3.2.4. Инерционные характеристики твердого тела с цилиндрической полостью, наполненной жидкостью, совершающей квазипотенциальное движение

В качестве примера рассмотрим движение твердого тела, имеющего цилиндрическую полость радиуса r_0 , заполненную криогенной жидкостью глубиной H с экспоненциальным распределением плотности вдоль оси

$Ox_3(\rho_0 = \rho_0(x_3))$ (Рис. 3.2). Ограничимся рассмотрением движения твердого тела в плоскости x_1Ox_3 , так что $\bar{\Phi}_1(\Phi_1, 0, 0)$ и $\bar{\Psi}_1(0, \Psi_2, 0)$.

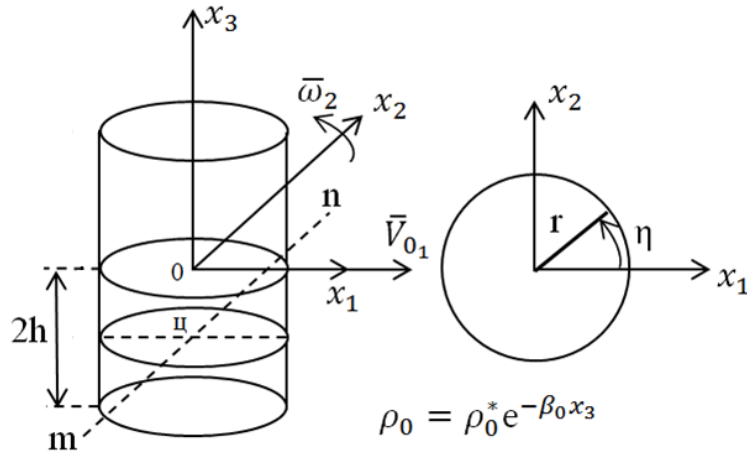


Рис. 3.2. Цилиндрический бак с полостью, целиком наполненной криогенной жидкостью

Начало связанной системы координат поместим в центре свободной поверхности, при частичном заполнении сосуда, и в центре верхней крышки, если полость целиком заполнена жидкостью.

Для функций Φ_1 , Ψ_2 имеем следующие краевые задачи, записанные в цилиндрической системе координат (r, η, x_3) .

1) Для твердого тела с полностью заполненной полостью:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla \Phi_1 \right) &= 0, \quad \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla \Psi_2 \right) = 0, \\ \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \Big|_{r=r_0} &= \sin \eta, \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = x_3 \sin \eta, \\ \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0, H} &= \sin \eta, \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0, H} = -r \sin \eta. \end{aligned} \quad (3.34)$$

2) Для твердого тела, имеющего полость, частично заполненную жидкостью:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla \Phi_1 \right) &= 0, \quad \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla \Psi_2 \right) = 0, \\ \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \Big|_{r=r_0} &= \sin \eta, \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = x_3 \sin \eta, \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} \Big|_{x_3=H} = \sin \eta, \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_3} \Big|_{x_3=H} = -r \sin \eta,$$

$$\Phi_1 \Big|_{x_3=0} = 0, \quad \Psi_2 \Big|_{x_3=0} = 0.$$

Решение обеих задач отыскиваем в виде

$$\Phi_1 = \Phi_1^* + \rho_0(x_3) \cdot r \cdot \sin \eta; \quad \Psi_2 = \Psi_2^* + \rho_0(x_3) \cdot r \cdot x_3 \cdot \sin \eta.$$

Функции Φ_1^* и Ψ_2^* находим из краевых задач (3.34)-(3.35), используя метод разделения переменных. Найденные решения запишем как

$$\Phi_1^* = 2r_0 \sin \eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\xi_n \frac{r}{r_0}\right)}{(\xi_n^2 - 1)J_1(\xi_n)} \begin{cases} Z_{nw}^{(\Sigma)}(x_3) \\ Z_{nw}(x_3) \end{cases}, \quad (3.36)$$

$$\Psi_2^* = 2r_0 \sin \eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\xi_n \frac{r}{r_0}\right)}{(\xi_n^2 - 1)J_1(\xi_n)} \begin{cases} Z_{n\vartheta}^{(\Sigma)}(x_3) \\ Z_{n\vartheta}(x_3) \end{cases}. \quad (3.37)$$

Здесь $J_1(\xi_n r/r_0)/J_1(\xi_n)$ – нормированные решения уравнения Бесселя первого порядка [109], причем ξ_n – корень уравнения $J_1(\xi_n) = 0$; $Z_{nw}^{(\Sigma)}$, Z_{nw} , $Z_{n\vartheta}^{(\Sigma)}$, $Z_{n\vartheta}$ – есть сопутствующие функции, полученные при решении краевых задач (3.34)-(3.35) методом разделения переменных (значок (Σ) означает, что функция получена при наличии свободной поверхности жидкости);

$$Z_{n\vartheta}^{(\Sigma)}(x_3) = -\frac{e^{\beta_0 x_3/2}}{\frac{1}{2}\beta_0 \operatorname{sh} \mu_n H + \mu_n \operatorname{ch} \mu_n H} \left[\frac{\beta_0 \cdot r_0^2}{\xi_n^2} \left[\frac{\beta_0}{2} \operatorname{sh} \mu_n (H - Z) + \mu_n \operatorname{ch} \mu_n (H - Z) \right] + C \operatorname{sh} \mu_n Z \right] + e^{\beta_0 Z} \frac{\beta_0 \cdot r_0^2}{\xi_n^2}, \quad (3.38)$$

$$Z_{nw}^{(\Sigma)}(x_3) = -\frac{e^{\beta_0 x_3/2}}{\frac{1}{2}\beta_0 \operatorname{sh} \mu_n H + \mu_n \operatorname{ch} \mu_n H} \left[\frac{\beta_0}{2} \operatorname{sh} \mu_n (H - x_3) + \mu_n \operatorname{ch} \mu_n (H - x_3) + \beta_0 e^{\beta_0 H/2} \operatorname{sh} \mu_n x_3 \right], \quad (3.39)$$

$$Z_{n\vartheta} = \frac{e^{\beta_0 x_3/2} \cdot r_0^2}{\xi_n^2 \operatorname{sh} \mu_n H} \left[A \left[\frac{\beta_0}{2} \operatorname{sh} \mu_n (H - x_3) + \mu_n \operatorname{ch} \mu_n (H - x_3) \right] + C \left[\frac{\beta_0}{2} \operatorname{sh} \mu_n x_3 - \mu_n \operatorname{ch} \mu_n x_3 \right] \right] + e^{\beta_0 x_3} \frac{\beta_0 \cdot r_0^2}{\xi_n^2}, \quad (3.40)$$

$$Z_{nw} = \beta_0 \frac{e^{\beta_0 x_3/2} \cdot r_0^2}{\xi_n^2 \operatorname{sh} \mu_n H} \left[\frac{\beta_0}{2} \operatorname{sh} \mu_n (H - x_3) + \mu_n \operatorname{ch} \mu_n (H - x_3) + e^{\beta_0 H/2} \left[\frac{\beta_0}{2} \operatorname{sh} \mu_n x_3 - \mu_n \operatorname{ch} \mu_n x_3 \right] \right]. \quad (3.41)$$

Теперь воспользуемся полученными выше выражениями для величин L, μ, m, J и оценим влияние подвижности жидкости на "сопротивление" движению тела в плоскости $x_1 O x_3$.

Введем безразмерные тензоры

$$\bar{L} = 1 + \frac{L}{L_0}; \quad \bar{\mu} = 1 + \frac{\mu}{m}; \quad \bar{J} = 1 + \frac{J}{m r_0^2}, \quad (3.42)$$

где r_0 – характерный размер полости, m - масса затвердевшей жидкости.

При движении твердого тела с цилиндрической полостью только в плоскости $x_1 O x_3$ вместо тензоров (3.42) будем иметь

$$\bar{l}_{12} = 1 + \frac{l_{12}}{m \cdot z_c}; \quad \bar{\mu}_{11} = 1 + \frac{\mu_{11}}{m}; \quad \bar{J}_{22} = 1 + \frac{J_{22}}{m \cdot r_0^2}. \quad (3.43)$$

где z_c - координата центра масс затвердевшей жидкости.

Вычисляя входящие в (3.43) величины по формулам (3.27)-(3.29), получим

$$\bar{\mu}_{11} = 1 + \frac{2\beta_0}{e^{\beta_0 H} - 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_n^2 - 1} I_1, \quad (3.44)$$

$$\bar{l}_{12} = 1 + \frac{2\beta_0}{e^{\beta_0 H} - 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z_c (\xi_n^2 - 1)} I_2, \quad (3.45)$$

$$\bar{J}_{22} = H e^{\beta_0 H} \frac{H - 2/\beta_0}{e^{\beta_0 H} - 1} + \frac{2}{\beta_0^2} - \frac{\beta_0 H e^{\beta_0 H}}{(e^{\beta_0 H} - 1) \cdot 4} + \frac{2\beta_0}{e^{\beta_0 H} - 1} \sum_{n=1}^{\infty} I_0, \quad (3.46)$$

где

$$I_1 = \int_0^H Z_{nw}(x_3) dx_3, \quad I_2 = \int_0^H x_3 Z_{nw}(x_3) dx_3,$$

$$I_0 = \frac{1}{\xi_n^2 - 1} \left[\int_0^H x_3 \cdot Z_{n\vartheta}(x_3) dx_3 + \frac{1}{\xi_n} [Z_{n\vartheta}(H) - Z_{n\vartheta}(0)] \right].$$

Для твердого тела, имеющего полость, частично заполненную жидкостью, интегралы I_1, I_2, I_0 вычисляются по тем же формулам, с заменой $Z_{nw}, Z_{n\vartheta}$ на функции $Z_{nw}^{(\Sigma)}, Z_{n\vartheta}^{(\Sigma)}$. Зависимости величин $\bar{\mu}_{11}(\beta_0, H), \bar{l}_{12}(\beta_0, H), \bar{J}_{22}(\beta_0, H)$

даны на Рис. 3.3-3.7 как для случая полости, целиком заполненной жидкостью, так и при частичном заполнении сосуда.

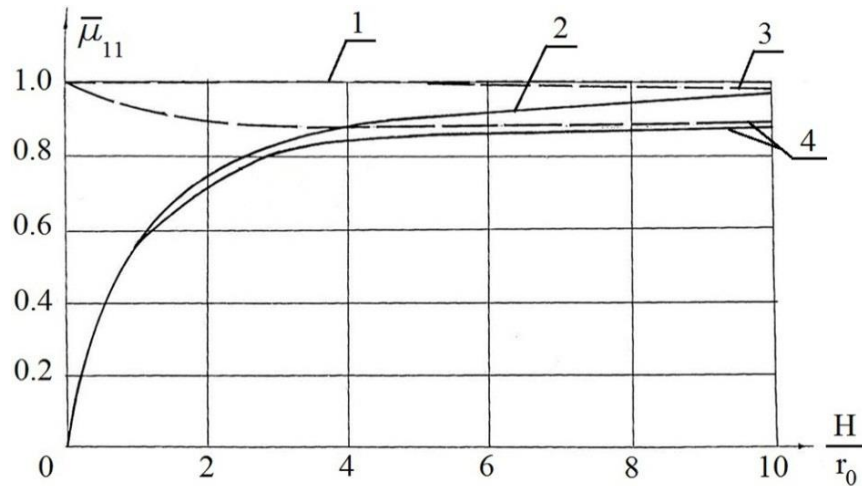


Рис. 3.3. Изменение $\bar{\mu}_{11}$ от глубины заполнения бака: пунктирная - полное заполнение, сплошная - со свободной поверхностью; 1 - $\beta_0 = 0$; 2 - $\beta_0 = 0.1$; 3 - $\beta_0 = 0.3$; 4 - $\beta_0 = 0.9$

Из Рис. 3.3 для величины $\bar{\mu}_{11}$ видно, что поступательное движение твердого тела оказывает заметное влияние на внутреннее движение жидкости при экспоненциальном распределении плотности и значении параметра $\bar{\beta}_0 \geq 0.3$, ($\beta_0 = \bar{\beta}_0 \cdot r_0$). До этого значения инерционность системы при движении твердого тела вдоль осей Ox_3 и Ox_1 практически оказывается одинаковой, как и для твердых тел, имеющих полости, целиком заполненные однородной жидкостью. При постоянной высоте сосуда увеличение числа $\bar{\beta}_0$ увеличивает угловые скорости частиц жидкости и, как следствие, приводит к уменьшению величины $\bar{\mu}_{11}$.

При наличии у жидкости свободной поверхности увеличение глубины заполнения приводит наоборот к увеличению величины $\bar{\mu}_{11}$, стремящейся к некоторой постоянной величине. При малой высоте H боковые стенки мало стесняют движение жидкости, а при большой, наоборот, – сильно ограничивают движение жидкости, и последняя будет вовлекаться в движение почти целиком. Влияние эффекта пересечения изопикнических поверхностей с поверхностями

равного давления, также как и в случае полости, целиком заполненной жидкостью, здесь сказывается на уменьшении величины $\bar{\mu}_{11}$ с ростом параметра $\bar{\beta}_0$.

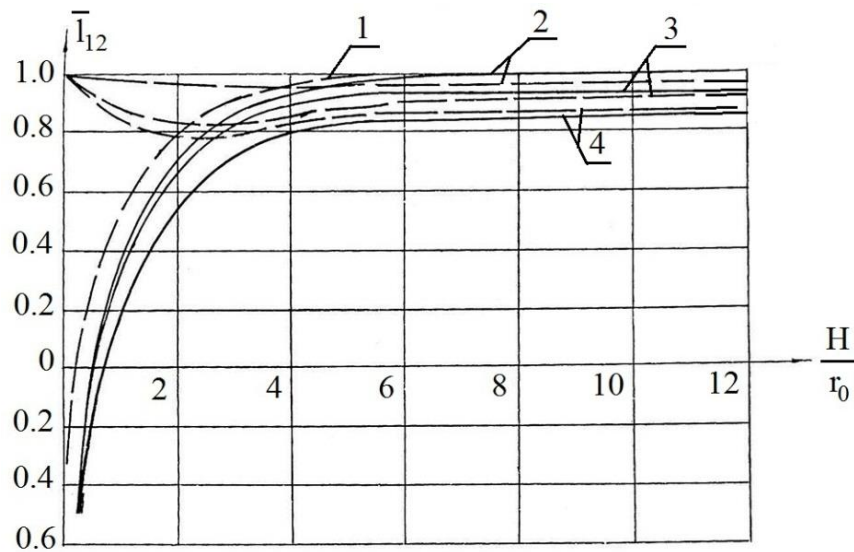


Рис. 3.4. Изменение \bar{l}_{12} от глубины заполнения бака: пунктирная - полное заполнение; сплошная - со свободной поверхностью; 1 - $\beta_0 = 0$; 2 - $\beta_0 = 0.1$; 3 - $\beta_0 = 0.5$; 4 - $\beta_0 = 0.9$

На Рис. 3.4 дан график величины \bar{l}_{12} для обоих случаев заполнения полости. Величина \bar{l}_{12} не имеет такого явного физического смысла как величины $\bar{\mu}_{11}$ и \bar{J}_{22} и служит, в основном, для определения положения центра инерции жидкости [96].

Под центром инерции жидкости здесь понимается такая точка области занимаемой жидкостью, при приложении в которой некоторой силы F твердое тело будет совершать поступательное движение в направлении действия приложенной силы, а при действии момента твердое тело будет совершать вращательное движение вокруг оси, проходящей через эту точку.

Из характера распределения \bar{l}_{12} для полости целиком заполненной жидкостью, следует, что центр инерции жидкости при любой высоте сосуда и при любом значении параметра β_0 находится выше положения центра масс "затвердевшей" жидкости. График величины $\bar{d} = L_y - z_c$ ($\bar{d} = d/r_0$, L_y - расстояние от оси вращения до места положения центра инерции жидкости)

подтверждает это предположение (см. Рис. 3.5). Такое поведение положения центра инерции можно объяснить тем, что в невозмущенном состоянии центр масс жидкости находится ниже середины высоты заполнения.

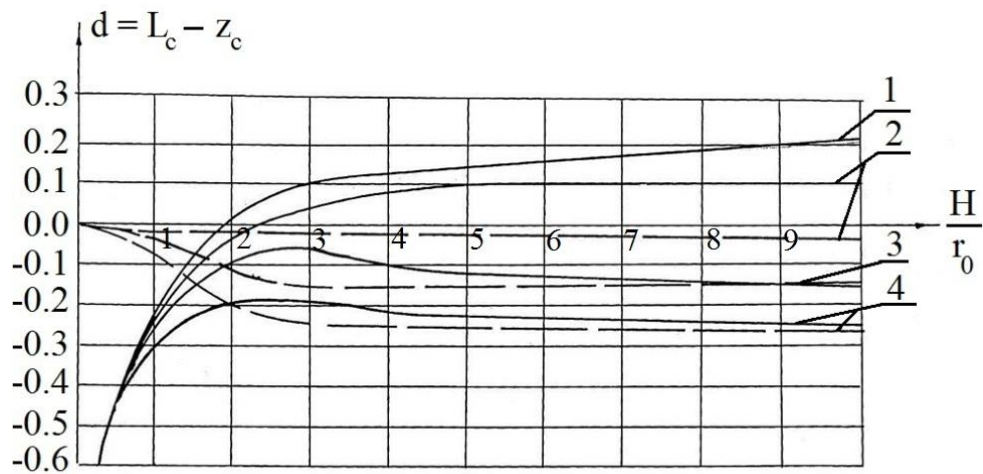


Рис. 3.5. Изменение d от глубины заполнения бака: пунктирная - полное заполнение; сплошная - со свободной поверхностью; 1 - $\beta_0 = 0$; 2 - $\beta_0 = 0.1$; 3 - $\beta_0 = 0.5$; 4 - $\beta_0 = 0.9$

Наличие свободной поверхности и изменение параметра β_0 довольно сильно сказывается на поведении величины \bar{l}_{12} и \bar{d} . При увеличении глубины заполнения жидкости, имеющей свободную поверхность, положение центра инерции может оказаться даже ниже положения центра масс "затвердевшей" жидкости. Однако при увеличении параметра β_0 , характеризующего степень неоднородности жидкости, влияние свободной поверхности становится меньше и центр масс "затвердевшей" жидкости остается ниже положения центра инерции при любой глубине.

Зависимости $\bar{J}_{22}(\beta_0, H)$ для полостей, целиком или частично заполненных жидкостью, располагаются довольно близко (см. Рис. 3.6). Так как ось вращения в рассматриваемом примере, совпадает с осью Ox_1 , то такое поведение зависимостей $\bar{J}_{22}(\beta_0, H)$ не требует дополнительных пояснений.

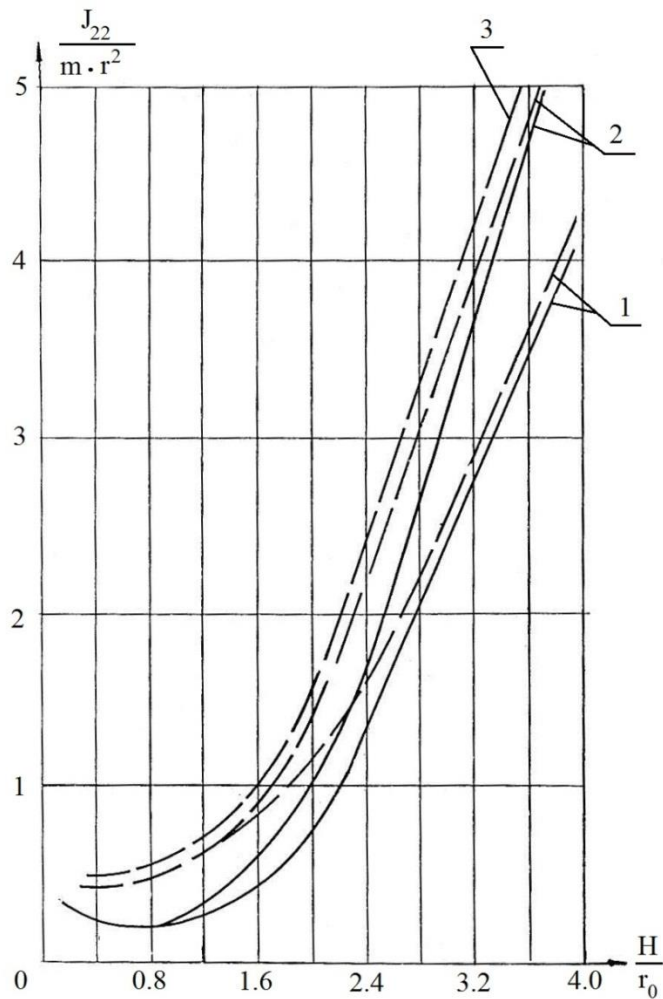


Рис. 3.6. Изменение $\frac{J_{22}}{m \cdot r^2}$ от глубины заполнения бака: пунктирная - полное
заполнение; сплошная - со свободной поверхностью;
1 - $\beta_0 = 0$; 2 - $\beta_0 = 0.5$; 3 - $\beta_0 = 0.9$

На Рис. 3.7 представлен график относительного момента инерции жидкости при вращении вокруг оси, проходящей через центр инерции жидкости, отнесённый к моменту инерции затвердевшей жидкости, при вращении вокруг оси Ox_1 . Роль свободной поверхности здесь также невелика и не вносит качественных изменений в поведении момента инерции \bar{J}_0 при увеличении глубины заполнения. Из этого же графика видно, что изменение степени неоднородности жидкости меняет поведение момента инерции \bar{J}_0 и приводит к его дальнейшему уменьшению с ростом глубины жидкости.

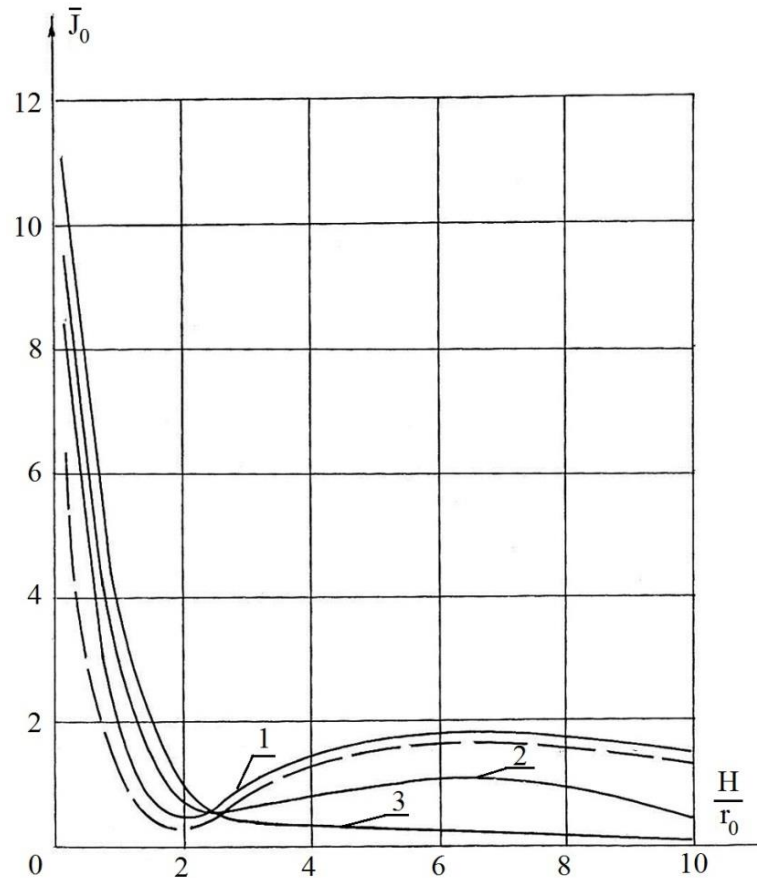


Рис. 3.7. Изменение \bar{J}_0 от глубины заполнения бака: пунктирная - полное заполнение; сплошная - со свободной поверхностью; 1 - $\beta_0 = 0$; 2 - $\beta_0 = 0.7$; 3 - $\beta_0 = 0.9$

Выводы по главе 3

Из изложенного видно, что движение твердого тела с полостью, целиком заполненной неоднородной жидкостью, отличается от случая, рассмотренного Жуковским Н. Е. в работе [50] о движении твердого тела с однородной жидкостью. Механический эффект неоднородной жидкой массы, совершающей квазипотенциальное движение в полностью наполненном сосуде, будет эквивалентен действию «затвердевшей» жидкой массы и твердого тела, обладающего количеством движения и моментом количества движения, присоединенных к несущему твердому телу и образующих в совокупности систему твердых тел.

Полученные теоретические результаты в виде уравнений движения и численный пример наглядно показывают отличие инерционных характеристик твёрдого тела с криогенной жидкостью от случая движения тела с однородной жидкостью [3].

ГЛАВА 4. ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТВЁРДЫХ ТЕЛ СО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТЬЮ, СОВЕРШАЮЩИХ МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ

В главе 4 рассмотрены вопросы взаимодействия стратифицированной идеальной несжимаемой жидкости и полости подвижного твердого тела, совершающего малые движения вокруг неподвижной точки [1, 5]. Уравнения возмущённого движения твёрдого тела с криогенной жидкостью были получены в главе 3 и имеют вид уравнения (3.6) и (3.8). Рассмотрена задача о малых колебаниях сферического маятника, имеющего полость частично или полностью заполненной стратифицированной жидкостью, а также задача об устойчивости вращения вокруг неподвижной точки твёрдого тела, имеющего эллипсоидальную полость вращения полностью заполненной стратифицированной жидкостью.

4.1. Формулировка краевой задачи

Для описания вихревого движения вращающейся однородной жидкости обычно используется либо метод функций состояния С. Л. Соболева [73, 105], либо метод обобщенных потенциалов, предложенный Ф. Л. Черноуьско [130]. Однако развитие метода С. Л. Соболева на случай неоднородной жидкости с произвольным изменением плотности наталкивается на значительные трудности. Метод обобщенных потенциалов, использующий некоторое ограничение на изменения переменных от времени, в этом смысле является более приемлемым. Метод Ф. Л. Черноуьско позволяет наиболее полным образом выделить гидродинамическую задачу из общей задачи механики системы тело-жидкость. Рассмотрим распространение этого метода на случай неоднородной жидкости.

Для изучения волновых движений жидкости предположим, что все величины Ω, p, u, ρ зависят от времени пропорционально множителю $e^{\lambda t}$. Уравнения гидродинамики тогда могут быть переписаны в виде

$$\begin{aligned} \lambda \vec{u} + 2\vec{\omega}_0 \times \vec{u} + \lambda \vec{\Omega} \times r &= -\nabla p + \frac{\rho}{\rho_0^*} \nabla \Pi_0; \\ \lambda \rho + \rho'_0 \vec{u} \cdot \vec{e}_3 &= 0; \quad \nabla \cdot \vec{u} = 0; \quad \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{на } S. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Введём линейное преобразование [12]:

$$L \cdot \vec{a} = \vec{a} + (\vec{a} \times \vec{e}_3) \chi - \frac{N^2 - 4\omega_0^2}{N^2 + \lambda^2} \vec{e}_3 (\vec{e}_3 \cdot \vec{a}); \quad (4.2)$$

где $\chi = \frac{2\omega_0}{\lambda}$, $N^2 = -\frac{g}{\rho_0^*} \frac{d\rho_0}{dx_3}$, N^2 - частота плавучести, \vec{a} - произвольный вектор

и тензор L запишется в виде

$$L = \begin{vmatrix} 1 & \chi & 0 \\ -\chi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+\chi^2}{N^2+\lambda^2} \lambda^2 \end{vmatrix}$$

Тогда вектор относительной скорости запишется в виде

$$\vec{u} = -\frac{1}{(1+\chi^2)\lambda} L \cdot \vec{g}; \quad (4.3)$$

где $\vec{g} = \lambda \vec{\Omega} \times \vec{r} + \nabla p$;

используя уравнение неразрывности и граничные условия, получаем краевую задачу для определения функции $p(x)$

$$\nabla \cdot (L \cdot \vec{g}) = 0; \quad \vec{n} \cdot (L \cdot \vec{g}) = 0 \quad \text{на } S. \quad (4.4)$$

Таким образом, в рассматриваемом общем случае удастся свести гидродинамическую задачу к краевой задаче математической физики для функции p . Имея решение задачи (4.4), поле скоростей неоднородной жидкости легко находится по формуле (4.3). Следуя [16], решение задачи (4.4) будем искать в виде:

$$p = -\lambda \sum_{j=1}^3 \Omega_j \varphi_j; \quad \vec{u} = \frac{\lambda^2}{1+\chi^2} \sum_{j=1}^3 \Omega_j L \cdot (\nabla \varphi_j - \vec{e}_j \times \vec{r}) \quad (4.5)$$

Тогда краевая задача (4.4) приводится к виду:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} [L \cdot (\nabla \varphi_j - \vec{e}_j \times \vec{r})] &= 0 \text{ в } \tau, \quad j=1,2,3\dots \\ \vec{n} \cdot [L \cdot (\nabla \varphi_j - \vec{e}_j \times \vec{r})] &= 0 \text{ на } S. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Сформулируем краевые задачи для определения обобщенных потенциалов φ_j в случае, когда эллипсоидальная полость целиком заполнена неоднородной вращающейся жидкостью, плотность которой в невозмущенном движении изменяется по закону $\rho_0 = \rho_0^*(1 - \beta x_3)$. Краевые задачи для определения функций φ_j в условиях двойного приближения Буссинеска принимают вид:

$$\Delta \varphi_j + \sigma^2 \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_3^2} = 2\chi \delta_{j3}; \quad j = 1, 2, 3; \quad (4.7)$$

$$\vec{n} \cdot \left[L \cdot (\nabla \varphi_j - \vec{e}_j \times \vec{r}) \right] = 0 \text{ на } S.$$

где $\sigma^2 = \frac{4\omega_0^2 - N^2}{N^2 + \lambda^2}$, δ_{j3} – символ Кронекера.

Непосредственной проверкой можно установить, что при $N^2 = 0$ краевая задача совпадает с краевой задачей для однородной вращающейся жидкости, а функции φ_j превращаются в обобщенные потенциалы Ф. Л. Черноусько. При $N = \omega_0 = 0$ оператор A становится единичным и функции φ_j будут являться потенциалами Жуковского [50]. Соблюдая терминологию, сложившуюся в работах по вращающейся жидкости, будем называть функции φ_j задачи обобщенными потенциалами движения неоднородной ($\omega_0 = 0$) или вращающейся неоднородной ($\omega_0 \neq 0$) жидкости.

Определим обобщенные потенциалы движения и оценим влияние неоднородной жидкости на движение системы тело-жидкость.

4.2. Малые колебания сферического маятника, имеющего цилиндрическую полость, частично наполненную стратифицированной жидкостью

Пусть твердое тело закреплено в точке O с помощью сферического шарнира и имеет коаксиальную цилиндрическую полость, частично заполненную на глубину $2h$ стратифицированной жидкостью (см. Рис. 4.1). Введём систему координат $Ox_1x_2x_3$, и пусть массовые силы обладают потенциальной функцией

$U_0 = gx_3$. В невозмущенном состоянии свободная поверхность жидкости перпендикулярна вектору ∇U_0 , а сферический маятник с жидкостью занимает вертикальное положение. Предположим также, что плотность жидкости в невозмущенном состоянии меняется по закону $\rho_0 = \rho_0^*(1 - \beta x_3)$. Определим сначала движение жидкости в цилиндрической полости при возмущенном движении твердого тела. Затем оценим влияние подвижной жидкости на инерционные характеристики системы тело-жидкость.

Пусть в возмущенном движении сферический маятник вращается с угловой скоростью $\vec{\Omega}$ вокруг неподвижной точки "O", и находящейся на расстоянии "c" от середины столба невозмущенной жидкости в цилиндре.

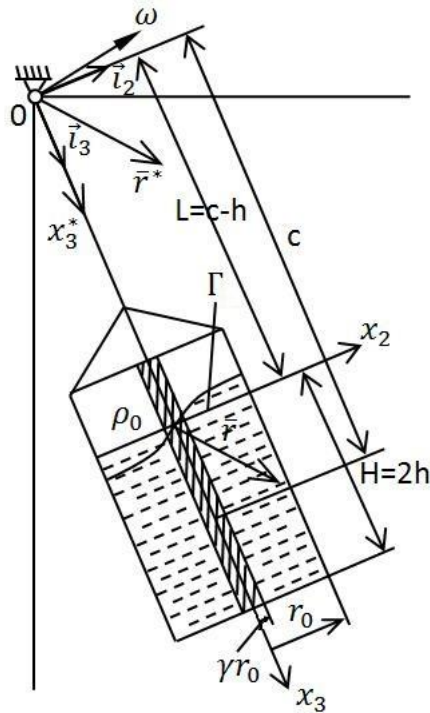


Рис. 4.1. Движение стратифицированной жидкости цилиндрической полости подвижного твердого тела совершающего малые вращательные движения

Краевые задачи для определения обобщенных потенциалов неоднородной жидкости для рассматриваемой задачи в системе координат $Ox_1x_2x_3$ имеют вид:

$$\Delta_2 \varphi_j + s^2 \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_1^2} = 0, \text{ в } \tau \quad (4.8)$$

$$\vec{n} \cdot \left(L \cdot \left(\Delta \varphi_j - \vec{e}_j \times \vec{r} \right) \right) = 0, \text{ на } S$$

где оператор L имеет структуру:

$$L = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s^2 \end{Bmatrix}, \quad s^2 = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + N^2}, \quad N^2 = \frac{1}{\rho_0^*} \frac{d\rho_0}{dx_3} g, \quad (4.9)$$

а граничное условие на свободной невозмущенной поверхности Σ , т.е. при $x_3 = c - h$, таково:

$$\frac{N^2 + \lambda^2}{g} \varphi_j + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_3} - \vec{e}_3 \cdot (\vec{e}_j \times \vec{r}) = 0. \quad (4.10)$$

Найдем функцию φ_1 . Обобщенный потенциал φ_1 удобно искать в виде:

$\varphi_1 = F_1(r, \eta, x_3) - x_3 r \sin \eta$, где функция $F_1(r, \eta, x_3)$ – есть решение задачи

$$\Delta F_1 - \frac{N^2}{N^2 + \lambda^2} \frac{\partial F_1}{\partial x_3} = 0,$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial r} = 0 \text{ при } r = r_0; r = \gamma r_0; \left. \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \right|_{x_3=c+h} = 2r \sin \eta,$$

$$\frac{N^2 + \lambda^2}{g} F_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_3} = \frac{N^2 + \lambda^2}{g} x_3 r \sin \eta + 2r \sin \eta \text{ на } \Sigma.$$

Определив функцию $F_1(r, \eta, x_3)$, запишем обобщенный потенциал $\varphi_1 = (x_3, r, \eta, \lambda)$ в виде:

$$\varphi_1 = ie^{inr_0} \sum_{n=1}^{\infty} d_n R(r) \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{N^2 + \lambda^2}{g} \left[\frac{2}{\mu} \operatorname{sh} \mu_n (c + h - x_3) - \right. \right. \\ \left. \left. - (h + c) \operatorname{ch} \mu_n (c - h - x_3) \right] + 4 \operatorname{sh} \mu_n h \operatorname{sh} \mu_n (c - x_3) \right\} - x_3 r \sin \eta,$$

где $\Delta = \frac{N^2 + \lambda^2}{g} \operatorname{ch} \mu_n 2h + \mu_n \operatorname{sh} \mu_n 2h$, $\mu_n^2 = \frac{K_n^2}{s^2}$, $K_n = \frac{\xi_n}{r_0}$.

Перейдем к определению обобщенного потенциала φ_2 .

Функцию φ_2 ищем в виде:

$$\varphi_2 = F_2(x_3, r, \eta, \lambda) + x_3 r \sin \eta. \quad (4.11)$$

Нахождение функции $F_2(x_3, r, \eta, \lambda)$ вполне идентично определению функции

F_1 . Найденная функция F_2 может быть записана в виде:

$$F_2(x_3, r, \eta, \lambda) = -iF_1(x_3, r, \eta, \lambda)$$

Обобщенный потенциал φ_3 для рассматриваемой полости оказывается равным нулю. Это означает, что при вращении твердого тела вокруг оси, совпадающей с осью симметрии полости, неоднородная идеальная жидкость с рассматриваемым законом плотности не будет вовлекаться в движение.

При вращении твердого тела вокруг осей, перпендикулярных к оси симметрии полости, жидкость придет в движение, которое может быть описано с помощью обобщенных потенциалов φ_1, φ_2 .

Из вида функций φ_1, φ_2 следует, что при таком движении твердого тела в жидкости будут возбуждаться также парциальные движения, которым будут соответствовать все формы колебаний жидкости в неподвижной полости, за исключением форм колебаний, соответствующих числам $m = 2, 3, 4$ и т.д.

Определим теперь качественное влияние движения жидкости на инерционные характеристики системы тело-жидкость. Для этого достаточно определить момент инерции жидкости I_1 при вращении твердого тела вокруг оси, совпадающей с осью x_1 . Расчёт проведем в одном частном случае, когда $j = 1$ и ось вращения твердого тела лежит в плоскости невозмущенной свободной поверхности $s = -h$. Чтобы получить результат, сравнимый с известным для однородной жидкости, воспользуемся многозначностью разложения движения жидкости со свободной поверхностью на элементарные составляющие. Это означает, что можно подобрать бесконечное множество комбинаций из гиперболических функций удовлетворяющих граничным условиям и уравнению (4.10).

Определим момент инерции I_1 по формуле:

$$I_1 = I_{11} + iI_{12} \quad (4.12)$$

Для вычисления моментов инерции I_{jk} воспользуемся формулой [130]:

$$I_{jk} = \int_{\tau} \rho_0(x_3) (\vec{e}_j \times \vec{r}) \cdot [L(\nabla \varphi_k - \vec{e}_k \times \vec{r})] d\tau \quad (4.13)$$

Вычисляя интегралы и воспользовавшись соотношениями для чисел ξ_n , имеем:

$$I_1 = mr_0^2 \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + N^2} \times \left(\frac{8r_0}{h} \sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + N^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{th } \mu_n h}{\xi_n^3 (\xi_n^2 - 1)} - 1 + \frac{2r_0}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{ch } \mu_n 2h - 1}{\xi_n^3 (\xi_n^2 - 1) \text{ch } \mu_n 2h} \frac{\dot{\chi}_n}{\Omega_1} \right)$$

где $m = \pi r_0^2 2h \rho_0^H$, $\dot{\chi}_n$ – обобщенная скорость волновых движений свободной поверхности жидкости в связанной системе координат.

С учетом высоты заполнения при $N^2 = 0$ значение для I_1 совпадает по виду с соответствующим выражением для разности между эффективным моментом инерции [96] и моментом инерции «затвердевшей» жидкости из работы [69, с.89]. Однако в рассматриваемом случае смысл параметра χ_n будет отличен от смысла соответствующего параметра χ_n^k , взятого из работы [69]. При данном подходе к решению подобной задачи для однородной жидкости это различие обусловлено разными системами координат, выбранными для описания движения жидкости. В работе [69] использовалась абсолютная система координат, в настоящей – связанная система. Для движений однородной жидкости количественное различие между обобщенными координатами χ_n и χ_n^k может быть выражено формулой:

$$\chi_n^k = \chi_n + a\mathcal{G}, \quad a = r_0 \left(\lambda^2 r g^{-1} + \xi_n \text{th } k_n 2h \right)^{-1}.$$

Получим теперь формулы, пригодные для вычисления значений l_1 . Для этого положим $\lambda = j\sigma$. Тогда при $\sigma^2 > N^2$ имеем:

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 = \frac{I_1}{mr_0^2} = & \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - N^2} \left(8 \frac{r_0}{h} \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sigma^2 - N^2}} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{th} \left(\xi_n \frac{h}{r_0} \sqrt{\frac{\sigma^2 - N^2}{\sigma^2}} \right)}{\xi_n^2 (\xi_n^2 - 1)} - \\ & - 1 + \frac{2r_0}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{ch} \left(\xi_n \frac{2h}{r_0} \sqrt{\frac{\sigma^2 - N^2}{\sigma^2}} - 1 \right)}{\xi_n^2 (\xi_n^2 - 1) \text{ch} \left(\xi_n \frac{2h}{r_0} \sqrt{\frac{\sigma^2 - N^2}{\sigma^2}} \right)} \cdot \frac{\chi_n}{\Omega_1}; \end{aligned} \quad (4.14)$$

где

$$\frac{\chi_n}{\Omega_1} = \frac{\frac{(N^2 - \sigma^2)}{g} r_0 \frac{2}{\xi_n} \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sigma^2 - N^2}} \operatorname{th} \left(\frac{\xi_n}{r_0} \frac{h}{\sqrt{\frac{\sigma^2 - N^2}{\sigma^2}}} \right)}{\frac{(N^2 - \sigma^2)}{g} r_0 + \frac{\xi_n \sqrt{\sigma^2 - N^2}}{\sigma} \operatorname{th} \left(\frac{\xi_n}{r_0} \frac{2h}{\sqrt{\frac{\sigma^2 - N^2}{\sigma^2}}} \right)};$$

$$\sigma^2 < N^2$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 = \frac{I_1}{mr_0^2} = & \frac{\sigma^2}{N^2 - \sigma^2} \left(8 \frac{r_0}{h} \sqrt{\frac{\sigma^2}{N^2 - \sigma^2}} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \left(\frac{\xi_n}{r_0} \frac{h}{\sqrt{\frac{N^2 - \sigma^2}{\sigma^2}}} \right)}{\xi_n^2 (\xi_n^2 - 1)} + \\ & + 1 + \frac{2r_0}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \left(\frac{\xi_n}{r_0} \frac{2h}{\sqrt{\frac{N^2 - \sigma^2}{\sigma^2}}} - 1 \right)}{\xi_n^2 (\xi_n^2 - 1) \cos \left(\frac{\xi_n}{r_0} \frac{2h}{\sqrt{\frac{N^2 - \sigma^2}{\sigma^2}}} \right)} \cdot \frac{\chi_n}{\Omega_1}; \end{aligned} \quad (4.15)$$

где

$$\frac{\chi_n}{\Omega_1} = \frac{\frac{(N^2 - \sigma^2)}{g} r_0 \frac{2}{\xi_n} \sqrt{\frac{\sigma^2}{N^2 - \sigma^2}} \operatorname{tg} \left(\frac{\xi_n}{r_0} \frac{h}{\sqrt{\frac{N^2 - \sigma^2}{\sigma^2}}} \right)}{\frac{(N^2 - \sigma^2)}{g} r_0 - \frac{\xi_n \sqrt{N^2 - \sigma^2}}{\sigma} \operatorname{tg} \left(\frac{\xi_n}{r_0} \frac{2h}{\sqrt{\frac{N^2 - \sigma^2}{\sigma^2}}} \right)}.$$

Из формулы (4.14) следует, что при $\sigma^2 > N^2$, особенно для значений h , при которых $\operatorname{th}(k_n h) \approx 1$, значение \bar{I}_1 будет мало отличаться от значения \bar{I}_1 для однородной жидкости. График изменения \bar{I}_1 при увеличении числа $r_0 \sigma^2 g^{-1}$ качественно будет совпадать с графиком для однородной жидкости (см. Рис 4.2).

Из Рис. 4.2 видно, что значительное отличие имеется на частотах, близких к частоте N^2 . При $\sigma^2 < N^2$ (см. Рис. 4.3) мероморфная функция \bar{I}_1 не имеет графического изображения, т.к. принимает значения, равные бесконечности в точках сегмента $[0, N^2]$, совпадающих с собственными частотами внутренних волн в неподвижной цилиндрической полости. В работе [112] доказано, что спектр внутренних волн, стратифицированной по произвольному закону жидкости и заполняющей цилиндрическую полость, образуют плотное множество

на отрезке $[0, N^2]$.

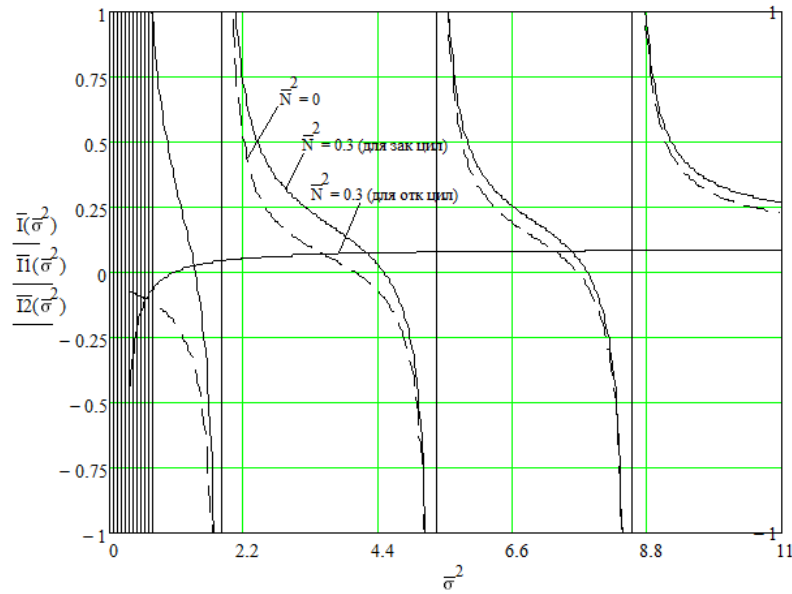


Рис. 4.2. График изменения \bar{I}_1 при увеличении числа $\bar{\sigma}^2 = r_0 \sigma^2 g^{-1}$: пунктирная - $\bar{N}^2 = 0$, сплошная - $\bar{N}^2 = 0.3$, $\bar{\sigma}^2 = 0.0001, 0.001 \dots 0.3$; $\sigma^2 > N^2$

С другой стороны такое поведение функции (4.15) на частотах $\sigma^2 < N^2$ означает, что в стратифицированной жидкости, частично или полностью заполняющей цилиндрическую полость, на низких частотах $\sigma^2 < N^2$ возникает бесконечное счетное множество парциальных движений с отличным от нуля моментом гидродинамического воздействия. Отметим, что в однородной жидкости, полностью заполняющей цилиндрическую полость, число таких движений равно нулю.

На Рис. 4.3 (а, б, в, г) приведены значения моментов инерции \bar{I}_1 в диапазоне квадратов частот $0 - N^2$, вычисленные с разным шагом квадрата частоты σ^2 . Из приведенных рисунков видно, что с уменьшением шага появляются новые точки, в которых момент инерции \bar{I}_1 стремится к бесконечности. Подобное поведение величины \bar{I}_1 можно объяснить только плотностью частот внутренних волн, расположение которых подобно плотности расположения рациональных чисел на множестве иррациональных.

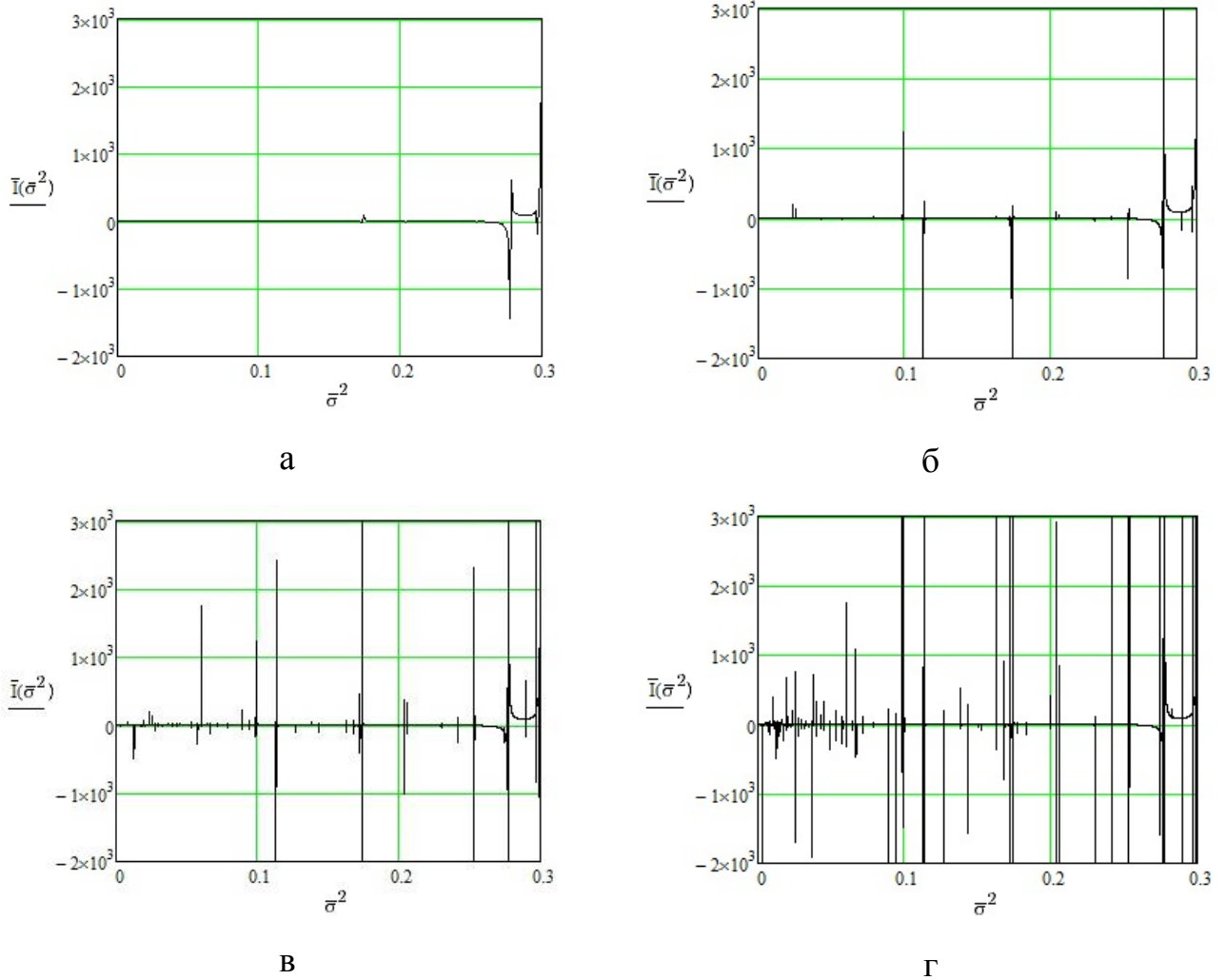


Рис. 4.3. Момент инерции \bar{I}_1 , вычисленные с разным шагом квадрата частоты $\bar{\sigma}^2$:

а - $\bar{\sigma}^2 = 0.0001, 0.001 \dots 0.3$; б - $\bar{\sigma}^2 = 0.00001, 0.0001 \dots 0.3$; в -
 $\bar{\sigma}^2 = 0.000001, 0.00001 \dots 0.3$; г - $\bar{\sigma}^2 = 0.0000001, 0.000001 \dots 0.3$; $\sigma^2 < N^2$, $\bar{N}^2 = 0.3$

При равенстве частот σ^2 и N^2 дифференциальное уравнение (4.8) в частных производных для обобщенного потенциала становится параболическим, и формулы (4.14), (4.15) для этого случая не пригодны.

Пусть жидкость не имеет свободной поверхности. Тогда в формулах (4.14), (4.15) следует положить $\chi_n = 0$, чтобы получить моменты инерции стратифицированной жидкости, полностью заполняющей цилиндрическую емкость. В частном случае при $\bar{h} = 1$ и $\sigma \rightarrow \infty$ имеем:

$$\lim_{mr_0^2} \frac{I_1}{mr_0^2} = \lim \left[\frac{1}{1 - \frac{N^2}{\sigma^2}} \left(8 \frac{r_0}{h} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{N^2}{\sigma^2}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \left(\frac{\xi}{r_0} \frac{h}{\sigma} \sqrt{1 - \frac{N^2}{\sigma^2}} \right)}{\xi^3 (\xi^2 - 1)} - 1 \right) \right] = \quad (4.16)$$

$$= 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th}(\xi_n)}{\xi_n^3 (\xi_n^2 - 1)} - 1 = -0.48803$$

К результату (4.16) прибавим безразмерный момент инерции затвердевшей однородной жидкости, который равен $\frac{7}{12}$. Мы получим момент инерции эквивалентного тела: $\bar{I}_1 = 0.0953$, что совпадает со значением, полученным Н. Е. Жуковским [50].

4.3. Вращающаяся эллипсоидальная полость

Пусть твердое тело с эллипсоидальной полостью равномерно вращается вокруг неподвижной точки O , находящейся на расстоянии l_0 от геометрического центра полости, расположенным на оси Ox_3 .

Предположим, что угловая скорость вращения ($\omega_0 = \text{const}$) в невозмущенном движении удовлетворяет условию $\omega_0^2 \frac{\ell}{g} \ll 1$, (ℓ – характерный размер) и, следовательно, можно считать $\Pi_0 = U_0 = gx_3$, т.е. будем пренебрегать центробежными силами инерции, действующими на частицы жидкости.

С учетом сделанных допущений уравнение возмущённого движения твёрдого тела с криогенной жидкости запишется в виде уравнения (3.8):

$$J \dot{\vec{\Omega}} + \int_{\tau} \rho_0 \vec{r} \times \dot{\vec{u}} d\tau + \vec{\omega}_0 \times J \cdot \vec{\Omega} + \int_{\tau} \dot{\rho} (\vec{r} \times \vec{\omega}_0 \times \vec{r}) d\tau + \vec{\Omega} \times J \cdot \vec{\omega}_0 + \int_{\tau} \rho_0 \vec{\omega}_0 \times \vec{r} \times \vec{u} d\tau = \int_{\tau} \rho \vec{r} \times \vec{j} d\tau, \quad (4.17)$$

а уравнения возмущённого движения жидкости приобретают вид (3.6):

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + 2\vec{\omega}_0 \times \vec{u} + \vec{\Omega} \times \vec{r} = -\nabla p + \frac{\rho}{\rho_0^*} \nabla \Pi_0; \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{d\rho_0}{dx_3} \vec{u} \cdot \vec{e}_3 = 0; \quad \nabla \cdot \vec{u} = 0; \quad \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \text{ на } S \quad (4.19)$$

где $p = \rho_0^{*-1} \delta p + S - U'$

Для изучения волновых движений жидкости предположим, что все величины Ω, p, u, ρ зависит от времени пропорционально множителю $e^{\lambda t}$ ($\Omega = \Omega e^{\lambda t}, p = p e^{\lambda t}, \rho = \rho e^{\lambda t}, u = u e^{\lambda t}$). Уравнения гидродинамики тогда могут быть переписаны в виде

$$\lambda \vec{u} + 2\vec{\omega}_0 \times \vec{u} + \lambda \vec{\Omega} \times \vec{r} = -\nabla p + \frac{\rho}{\rho_0^*} \nabla \Pi_0;$$

$$\lambda \rho + \rho_0' \vec{u} \cdot \vec{e}_3 = 0; \quad \nabla \cdot \vec{u} = 0; \quad \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \text{ на } S.$$

Линейное преобразование (4.3) запишем в виде:

$$\vec{u} = -A^{-1}(\lambda) \cdot \lambda \vec{g} = -\frac{1}{(1 + \chi^2)\lambda} L \cdot \vec{g};$$

где $\vec{g} = \lambda \vec{\Omega} \times \vec{r} - \nabla p$, а тензор-оператор L действует по формуле

$$L \cdot \vec{a} = \vec{a} + (\vec{a} \times \vec{e}_3) \chi - \frac{N^2 - 4\omega_0^2}{N^2 + \lambda^2} \vec{e}_3 (\vec{e}_3 \cdot \vec{a});$$

и запишется в виде

$$L = \begin{vmatrix} 1 & \chi & 0 \\ -\chi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 + \chi^2}{N^2 + \lambda^2} \lambda^2 \end{vmatrix},$$

где \vec{a} - произвольный вектор,

$$\nabla \cdot (L \cdot \vec{g}) = 0; \quad \vec{n} \cdot (L \cdot \vec{g}) = 0 \text{ на } S$$

Используя формулы (4.3), преобразуем в уравнении (4.17) слагаемые с интегралами по области, занимаемой жидкостью

$$\int_{\tau} \rho_0 \vec{r} \times \vec{u} d\tau = \int_{\tau} \left\{ \rho_0 \vec{r} \times \frac{1}{1 + \chi^2} \sum_{j=1}^3 \Omega_j \cdot \vec{L} \cdot (\nabla \varphi_j - \vec{e}_j \times \vec{r}) \right\} d\tau = I^{(1)} \cdot \vec{\Omega} = \sum_{j,k=1}^3 \vec{e}_j I_{jk}^{(1)} \Omega_k; \quad (4.20)$$

где

$$I_{jk}^{(1)} = \frac{1}{1 + \chi^2} \int_{\tau} \rho_0 (\vec{r} \times \vec{e}_j) \cdot [\vec{L} \cdot (\nabla \varphi_k - \vec{e}_k \times \vec{r})] d\tau. \quad (4.21)$$

Далее преобразуем интеграл $\int_{\tau} \dot{\rho} (\vec{r} \times \vec{\omega}_0 \times \vec{r}) d\tau$

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -\rho'_0 \vec{u} \cdot \vec{e}_3 = -\rho'_0 \frac{\vec{e}_3}{1 + \chi^2} \sum_{j=1}^3 \Omega_j \cdot \vec{L} \cdot (\nabla \varphi_j - \vec{e}_j \times \vec{r}) = -\rho'_0 \frac{\lambda^2 \vec{e}_3}{N^2 + \lambda^2} \sum_{j=1}^3 \Omega_j \cdot \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_3} \vec{e}_3 - \vec{e}_j \times \vec{r} \right); \\ \int_{\tau} \dot{\rho} (\vec{r} \times \vec{\omega}_0 \times \vec{r}) d\tau &= -\int_{\tau} \rho'_0 \frac{\lambda^2 \vec{e}_3}{N^2 + \lambda^2} \sum_{j=1}^3 \Omega_j \cdot \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_3} \vec{e}_3 - \vec{e}_j \times \vec{r} \right) (\vec{r} \times \vec{\omega}_0 \times \vec{r}) d\tau = \\ &= -\omega_0 \int_{\tau} \rho'_0 \frac{\lambda^2}{N^2 + \lambda^2} \sum_{j=1}^3 \Omega_j \vec{e}_3 \cdot \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_3} \vec{e}_3 - \vec{e}_j \times \vec{r} \right) (\vec{r} \times \vec{e}_3 \times \vec{r}) d\tau = \\ &= -\omega_0 \int_{\tau} \rho'_0 \frac{\lambda^2}{N^2 + \lambda^2} \sum_{j=k=1}^3 \Omega_j \vec{e}_3 \cdot \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_3} \vec{e}_3 - \vec{e}_j \times \vec{r} \right) (\vec{r} \times \vec{e}_3 \times \vec{r})_k \vec{e}_k d\tau; \\ \int_{\tau} \dot{\rho} (\vec{r} \times \vec{\omega}_0 \times \vec{r}) d\tau &= I^{(2)} \cdot \vec{\Omega} \cdot \omega_0 = \omega_0 \sum_{j=k=1}^3 \vec{e}_k I_{jk}^{(2)} \Omega_j \end{aligned} \quad (4.22)$$

где

$$I_{kj}^{(2)} = -\int_{\tau} \rho'_0 \frac{\lambda^2}{N^2 + \lambda^2} \vec{e}_3 \cdot \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_3} \vec{e}_3 - \vec{e}_j \times \vec{r} \right) (\vec{r} \times \vec{e}_3 \times \vec{r})_k d\tau; \quad (4.23)$$

или

$$I_{kj}^{(2)} = -\int_{\tau} \rho'_0 \frac{1}{1 + \chi^2} (\vec{r} \times \vec{e}_3 \times \vec{r})_k \cdot \vec{e}_3 \left[\vec{e}_3 \cdot \vec{L} \cdot (\nabla \varphi_j - \vec{e}_j \times \vec{r}) \right] d\tau. \quad (4.24)$$

Преобразуем интеграл $\int_{\tau} \rho (r \times j) d\tau$

$$\begin{aligned} \int_{\tau} \rho (\vec{r} \times \vec{j}) d\tau &= -\int_0^t \left\{ \int_{\tau} \rho'_0 \frac{\lambda^2}{N^2 + \lambda^2} \vec{e}_3 \cdot \sum_{j=1}^3 \Omega_j \cdot \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_3} \vec{e}_3 - \vec{e}_j \times \vec{r} \right) (\vec{r} \times \vec{j}) d\tau \right\} dt = \\ &= -\int_{\tau} \rho'_0 g \frac{\lambda^2}{N^2 + \lambda^2} \sum_{j=1}^3 \left(\int_0^t \Omega_j dt \right) \vec{e}_3 \cdot \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_3} \vec{e}_3 - \vec{e}_j \times \vec{r} \right) (\vec{r} \times \vec{\varphi}_3) d\tau = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\int_{\tau} \rho'_0 N^2 \frac{\lambda^2}{N^2 + \lambda^2} \sum_{j=k=1}^3 \vec{e}_k \left(\int_0^t \Omega_j dt \right) \vec{e}_3 \cdot \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_3} \vec{e}_3 - \vec{e}_j \times r \right) (\vec{r} \times \vec{e}_3)_k d\tau = \\
&= -4\omega_0^2 \int_{\tau} \rho_0^* \frac{N^2}{4\omega_0^2} \frac{\lambda^2}{N^2 + \lambda^2} \sum_{j=k=1}^3 \vec{e}_k \left(\int_0^t \Omega_j dt \right) \vec{e}_3 \cdot \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_3} \vec{e}_3 - \vec{e}_j \times r \right) (\vec{r} \times \vec{e}_3)_k d\tau;
\end{aligned}$$

В результате преобразования получим формулу,

$$\int_{\tau} \rho (\vec{r} \times \vec{j}) d\tau = 4\omega_0^2 I_3^{(3)} \int_0^t \vec{\Omega} dt = 4\omega_0^2 \sum_{j=k=1}^3 \vec{e}_k I_{kj}^{(3)} \left(\int_0^t \Omega_j dt \right), \quad (4.25)$$

которая также может быть записана в виде

$$\int_{\tau} \rho (\vec{r} \times \vec{j}) d\tau = g I_3^{(3)} \int_0^t \vec{\Omega} dt = g \sum_{j=k=1}^3 \vec{e}_k I_{kj}^{(3)} \left(\int_0^t \Omega_j dt \right) \quad (4.26)$$

или

$$\int_{\tau} \rho (\vec{r} \times \vec{j}) d\tau = N^2 I_3^{(3)} \int_0^t \vec{\Omega} dt = N^2 \sum_{j=k=1}^3 \vec{e}_k I_{kj}^{(3)} \left(\int_0^t \Omega_j dt \right) \quad (4.27)$$

В формулах (4.25)-(4.27) приняты соответственно обозначения:

$$I_{kj}^{(3)} = \int_{\tau} \rho_0^* \frac{N^2}{4\omega_0^2} \frac{\lambda^2}{N^2 + \lambda^2} \vec{e}_3 \cdot \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_3} \vec{e}_3 - \vec{e}_j \times r \right) (\vec{r} \times \vec{e}_3)_k d\tau \quad (4.28)$$

$$I_{kj}^{(3)} = \int_{\tau} \rho_0' \frac{\lambda^2}{N^2 + \lambda^2} \vec{e}_3 \cdot \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_3} \vec{e}_3 - \vec{e}_j \times r \right) (\vec{r} \times \vec{e}_3)_k d\tau \quad (4.29)$$

$$I_{kj}^{(3)} = \int_{\tau} \rho_0^* \frac{\lambda^2}{N^2 + \lambda^2} \vec{e}_3 \cdot \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_3} \vec{e}_3 - \vec{e}_j \times r \right) (\vec{r} \times \vec{e}_3)_k d\tau \quad (4.30)$$

будем использовать 2-ую формулу:

$$\int_{\tau} \rho (r \times j) d\tau = g I^{(3)} \cdot \int_0^t \vec{\omega} dt;$$

Сформулируем краевые задачи для определения обобщенных потенциалов φ_j в случае, когда эллипсоидальная полость целиком заполнена неоднородной вращающейся жидкостью, плотность которой в невозмущенном движении

изменяется по закону $\rho_0 = \rho_0^*(1 - \beta x_3)$. Краевые задачи для определения функций φ_j в условиях двойного приближения Буссинеска [130] принимают вид:

$$\Delta \varphi_j + \sigma^2 \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_3^2} = 2\chi \delta_{j3}; \quad j=1,2,3; \quad (4.31)$$

$$L(\nabla \varphi_j - \vec{e}_j \times \vec{r}) = 0 \text{ на } S. \quad (4.32)$$

где

$$L = \begin{vmatrix} 1 & \chi & 0 \\ -\chi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+\chi^2}{N^2 + \lambda^2} \end{vmatrix}; \quad \sigma^2 = \frac{4\omega_0^2 - N^2}{N^2 + \lambda^2}, \quad \chi = \frac{2\omega_0}{\lambda}, \quad N^2 = -\frac{g}{\rho_0^*} \frac{d\rho_0}{dx_3}, \quad (4.33)$$

δ_{j3} – символ Кронекера.

4.3.1. Определение обобщенных потенциалов φ_j

Пусть уравнение поверхности эллипсоида в системе координат $Ox_1x_2x_3$ будет

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{(x_3 + l_0)^2}{a_3^2} = 1 \quad (4.34)$$

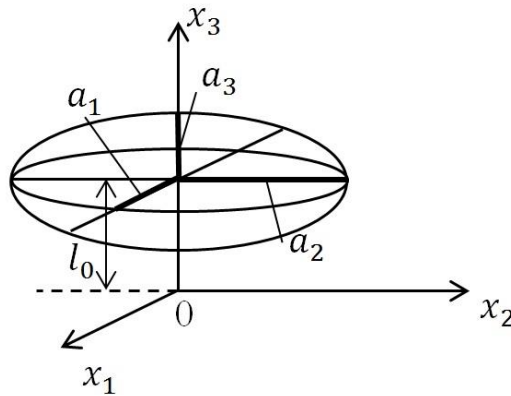


Рис. 4.4. Вращение твердого тела с эллипсоидальной полостью

Функции φ_j будем искать в виде

$$\varphi_1 = (b_{11}x_1 + b_{12}x_2)x_3 + b_{13}x_1 + b_{14}x_2, \quad j=1 \quad (4.35)$$

$$\varphi_2 = (b_{21}x_1 + b_{22}x_2)x_3 + b_{23}x_1 + b_{24}x_2, \quad j=2 \quad (4.36)$$

$$\varphi_3 = b_{31}x_1^2 + b_{32}x_2^2 + b_{33}x_1x_2, \quad j=3 \quad (4.37)$$

где b_{jk} – неизвестные пока постоянные, определяемые из граничных условий (4.32). Отметим, что уравнение (4.31) удовлетворяет при этом тождественно для $j=1,2$ при любых значениях коэффициентов b_{jk} . Подставим теперь функции φ_3 в уравнение (4.32) получим

$$b_{31} + b_{32} - \chi = 0.$$

Подставим теперь функции φ_j ($j=1,2$) в граничные условия (4.32), учитывая выражения для нормалей к поверхности (4.34). Учитывая вид оператора L , получим из (4.32) однородные многочлены второй и первой степени относительно координат x_1, x_2, x_3

При $j=1$

$$\begin{aligned} & \left(b_{11} \frac{1}{a_1^2} + \chi b_{12} \frac{1}{a_1^2} + \chi \frac{1}{a_1^2} \right) x_3 x_1 + \left(-\chi b_{11} \frac{1}{a_2^2} + \frac{b_{12}}{a_2^2} + \frac{1}{a_2^2} \right) x_3 x_2 + \Lambda^2 \frac{b_{11}}{a_3^2} x_3 x_1 + \Lambda^2 \frac{b_{12}-1}{a_3^2} x_2 x_3 + \\ & + \left(\frac{b_{13}}{a_1^2} + \chi \frac{b_{14}}{a_1^2} \right) x_1 l_0 + \left(-\chi \frac{b_{13}}{a_2^2} + \frac{b_{14}}{a_2^2} \right) x_2 l_0 + \Lambda^2 \frac{b_{11}}{a_3^2} x_1 l_0 + \Lambda^2 \frac{b_{12}-1}{a_3^2} x_2 l_0 = 0; \end{aligned}$$

При $j=2$

$$\begin{aligned} & (b_{21}(\chi b_{22} - 1)) \frac{x_3 x_1}{a_1^2} + (b_{22} + \chi - \chi b_{12}) \frac{x_3 x_2}{a_2^2} + \Lambda^2 \frac{b_{22}}{a_3^2} x_3 x_2 + \Lambda^2 \frac{b_{21}+1}{a_3^2} x_3 x_1 + \\ & + (b_{23} + \chi b_{24}) \frac{x_1 l_0}{a_1^2} + (-\chi b_{23} + b_{24}) \frac{x_2 l_0}{a_2^2} + \Lambda^2 \frac{b_{21}+1}{a_3^2} x_1 l_0 + \Lambda^2 \frac{b_{22}}{a_3^2} x_2 l_0 = 0; \end{aligned}$$

При $j=3$

$$\begin{aligned} & \frac{2b_{31}}{a_1^2} x_1^2 + \frac{b_{33}}{a_1^2} x_2 x_1 + \frac{2\chi b_{32}}{a_1^2} x_2 x_1 + \frac{\chi b_{33}}{a_1^2} x_1^2 + \frac{1}{a_1^2} x_1 x_2 - \frac{\chi}{a_1^2} x_1^2 - \\ & - \frac{2\chi b_{31}}{a_2^2} x_1 x_2 - \frac{\chi b_{33}}{a_2^2} x_2^2 + \frac{2b_{33}}{a_2^2} x_2^2 + \frac{b_{33}}{a_2^2} x_1 x_2 - \frac{\chi}{a_2^2} x_2^2 - \frac{1}{a_2^2} x_1 x_2 = 0 \end{aligned}$$

где $\Lambda^2 = (1 + \chi^2)s^2$; $s^2 = \frac{\lambda^2}{N^2 + \lambda^2}$;

Приравняв нулю выражения при произведениях координат, находим уравнения для определения коэффициентов

$$\left. \begin{aligned} \frac{b_{11} + \chi b_{12} + \chi}{a_1^2} + \Lambda^2 \frac{b_{11}}{a_3^2} &= 0 \\ \frac{b_{12} + 1 - \chi b_{11}}{a_2^2} + \Lambda^2 \frac{b_{11} \cdot 1}{a_3^2} &= 0 \\ \frac{b_{13}}{a_1^2} + \chi \frac{b_{14}}{a_1^2} + \Lambda^2 \frac{b_{11}}{a_3^2} l_0 &= 0 \\ -\chi \frac{b_{13}}{a_2^2} + \frac{b_{14}}{a_2^2} + \Lambda^2 \frac{b_{12} \cdot 1}{a_3^2} l_0 &= 0 \end{aligned} \right\} j=1$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{b_{21} + \chi b_{22} - 1}{a_1^2} + \Lambda^2 \frac{b_{21} + 1}{a_3^2} &= 0 \\ \frac{b_{22} - \chi b_{21} + \chi}{a_2^2} + \Lambda^2 \frac{b_{22}}{a_3^2} &= 0 \\ \frac{b_{23}}{a_1^2} + \chi \frac{b_{24}}{a_1^2} &= -\Lambda^2 \frac{b_{21} + 1}{a_3^2} \\ -\chi \frac{b_{23}}{a_2^2} + \frac{b_{24}}{a_2^2} &= -\Lambda^2 \frac{b_{22}}{a_3^2} \end{aligned} \right\} j=2$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{b_{33} + 2\chi b_{32} + 1}{a_1^2} + \frac{b_{33} - 1 + 2\chi b_{32} - 2\chi^2}{a_2^2} &= 0 \\ 2b_{31} + \chi b_{33} - \chi &= 0; \quad 2b_{32} - \chi b_{23} - \chi &= 0; \end{aligned} \right\} j=3$$

Найденные коэффициенты имеют вид:

$$b_{32} = \frac{\chi a_1^2}{a_1^2 + a_2^2}, \quad b_{33} = \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}, \quad b_{31} = \frac{\chi a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}; \quad (4.38)$$

$$b_{11} = -\frac{2\chi s^2}{\Delta^* a_1^2 a_3^2}; \quad b_{12} = \frac{1}{\Delta^*} \frac{a_3^2 (a_2^2 s^2 - a_3^2) + a_1^2 \Lambda^2 (a_2^2 s^2 - a_3^2)}{a_1^2 a_2^2 a_3^4};$$

$$b_{13} = -\frac{2\chi s^2}{\Delta^* a_1^2 a_3^2} l_0; \quad b_{14} = \frac{2s^2 (\Lambda^2 a_1^2 + a_3^2)}{\Delta^* a_1^2 a_3^4} l_0;$$

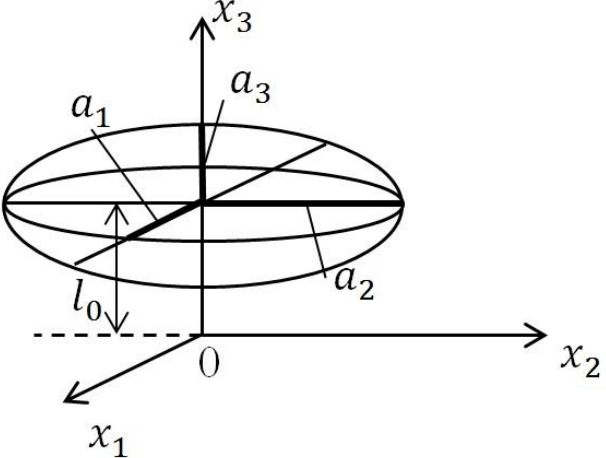
$$b_{21} = \frac{1}{\Delta^*} \frac{a_3^2 (a_2^2 s^2 + a_3^2) - a_1^2 s^2 (a_2^2 \Lambda^2 + a_3^2)}{a_1^2 a_2^2 a_3^4}; \quad b_{22} = -\frac{2\chi s^2}{\Delta^* a_2^2 a_3^2}; \quad (4.39)$$

$$b_{24} = -\frac{2\chi s^2}{\Delta^* a_2^2 a_3^2} l_0; \quad b_{23} = -\frac{2s^2 (\Lambda^2 a_2^2 + a_3^2)}{\Delta^* a_2^2 a_3^4} l_0;$$

$$\Delta^* = \frac{a_3^2 (a_3^2 + a_2^2 s^2) + a_1^2 s^2 (a_3^2 + a_2^2 \Lambda^2)}{a_1^2 a_2^2 a_3^4}; \quad s^2 = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + N^2}; \quad \Lambda^2 = (1 + \chi^2) s^2;$$

Результаты вычисления коэффициентов b_{jk} и обобщенных потенциалов φ_j в случаях безвихревого и вихревого движений жидкости приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1. Значения коэффициентов b_{jk} и обобщенных потенциалов φ_j

| | | | | | | | |
|-------------------|--|---|--|--|--|--|--|
| Характер движения | <div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> $s^2 = \frac{\lambda^2}{N^2 + \lambda^2}$ $\Lambda^2 = \frac{\lambda^2 + 4\omega_0^2}{\lambda^2 + N^2}$ $\chi = \frac{2\omega_0}{\lambda}$ </div> <div style="text-align: center;">  </div> <div style="text-align: center;"> <p>Безвихревое</p> </div> </div> | | | | | | |
| Параметр движения | $N^2 \neq 0$ $\omega_0 \neq 0$ | $N^2 \neq 0$ $\omega_0 = 0$ | $N^2 = 0$ $\omega_0 \neq 0 (l_0 \neq 0)$ | $N^2 = 0$ $\omega_0 \neq 0 (l_0 = 0)$ | $N^2 = 0$ $\omega_0 = 0$ $l_0 \neq 0$ | $N^2 = 0$ $\omega_0 = 0$ $l_0 = 0$ | |
| Δ^* | $\frac{a_3^2 (a_3^2 + a_2^2 s^2)}{a_1^2 a_2^2 a_3^4} + \frac{a_1^2 s^2 (a_3^2 + a_2^2 \Lambda^2)}{a_1^2 a_2^2 a_3^4}$ | $\frac{(a_3^2 + a_1^2 s^2)}{a_1^2 a_2^2 a_3^4} \cdot \frac{(a_3^2 + a_2^2 s^2)}{a_1^2 a_2^2 a_3^4}$ | $\frac{a_3^2 (a_3^2 + a_2^2)}{a_1^2 a_2^2 a_3^4} + \frac{a_1^2 [a_3^2 + a_2^2 (1 + \chi^2)]}{a_1^2 a_2^2 a_3^4}$ | $\frac{a_3^2 (a_3^2 + a_2^2)}{a_1^2 a_2^2 a_3^4} + \frac{a_1^2 [a_3^2 + a_2^2 (1 + \chi^2)]}{a_1^2 a_2^2 a_3^4}$ | $\frac{(a_1^2 + a_3^2)(a_3^2 + a_2^2)}{a_1^2 a_2^2 a_3^4}$ | $\frac{(a_1^2 + a_3^2)(a_3^2 + a_2^2)}{a_1^2 a_2^2 a_3^4}$ | |
| b_{11} | $-\frac{2\chi s^2}{\Delta^* a_1^2 a_3^2}$ | 0 | $-\frac{2\chi}{\Delta^* a_1^2 a_3^2}$ | $-\frac{2\chi}{\Delta^* a_1^2 a_3^2}$ | 0 | 0 | |

Продолжение таблицы 4.1

| | | | | | | |
|----------|--|--|--|--|---------------------------------------|---------------------------------------|
| b_{12} | $\frac{a_3^2(a_2^2s^2 - a_3^2)}{\Delta^* a_1^2 a_2^2 a_3^4} + \frac{a_1^2 s^2 (a_2^2 \Lambda^2 - a_3^2)}{\Delta^* a_1^2 a_2^2 a_3^4}$ | $\frac{a_2^2 s^2 - a_3^2}{a_2^2 s^2 + a_3^2}$ | $\frac{a_3^2(a_2^2 - a_3^2)}{\Delta^* a_1^2 a_2^2 a_3^4} + \frac{a_1^2 [a_2^2(1 + \chi^2) - a_3^2]}{\Delta^* a_1^2 a_2^2 a_3^4}$ | $\frac{a_3^2(a_2^2 - a_3^2)}{\Delta^* a_1^2 a_2^2 a_3^4} + \frac{a_1^2 [a_2^2(1 + \chi^2) - a_3^2]}{\Delta^* a_1^2 a_2^2 a_3^4}$ | $\frac{a_2^2 - a_3^2}{a_2^2 + a_3^2}$ | $\frac{a_2^2 - a_3^2}{a_2^2 + a_3^2}$ |
| b_{13} | $-\frac{2\chi s^2}{\Delta^* a_1^2 a_3^2} l_0$ | 0 | $-\frac{2\chi}{\Delta^* a_1^2 a_3^2} l_0$ | 0 | 0 | 0 |
| b_{14} | $\frac{2s^2(\Lambda^2 a_1^2 + a_3^2)}{\Delta^* a_1^2 a_3^4} l_0$ | $\frac{2a_2^2 s^2}{a_2^2 s^2 + a_3^2} l_0$ | $\frac{2[(1 + \chi^2)a_1^2 + a_3^2]}{\Delta^* a_1^2 a_3^4} l_0$ | 0 | $\frac{2a_2^2}{a_2^2 + a_3^2} l_0$ | 0 |
| b_{21} | $\frac{a_3^2(a_3^2 + a_2^2 s^2)}{\Delta^* a_1^2 a_2^2 a_3^4} - \frac{a_1^2 s^2 (a_3^2 + a_2^2 \Lambda^2)}{\Delta^* a_1^2 a_2^2 a_3^4}$ | $-\frac{a_1^2 s^2 - a_3^2}{a_1^2 s^2 + a_3^2}$ | $\frac{a_3^2(a_3^2 + a_2^2)}{\Delta^* a_1^2 a_2^2 a_3^4} - \frac{a_1^2 [a_3^2 + a_2^2(1 + \chi^2)]}{\Delta^* a_1^2 a_2^2 a_3^4}$ | $\frac{a_3^2(a_3^2 + a_2^2) - a_1^2 [a_3^2 + a_2^2(1 + \chi^2)]}{a_3^2(a_3^2 + a_2^2) + a_1^2 [a_3^2 + a_2^2(1 + \chi^2)]}$ | $\frac{a_3^2 - a_1^2}{a_1^2 + a_3^2}$ | $\frac{a_3^2 - a_1^2}{a_1^2 + a_3^2}$ |
| b_{22} | $-\frac{2\chi s^2}{\Delta^* a_2^2 a_3^2}$ | 0 | $-\frac{2\chi}{\Delta^* a_1^2 a_3^2}$ | $-\frac{2\chi}{\Delta^* a_1^2 a_3^2}$ | 0 | 0 |
| b_{23} | $-\frac{2s^2(\Lambda^2 a_2^2 + a_3^2)}{\Delta^* a_2^2 a_3^4} l_0$ | $-\frac{2a_1^2 s^2}{a_1^2 s^2 + a_3^2} l_0$ | $-\frac{2[(1 + \chi^2)a_2^2 + a_3^2]}{\Delta^* a_2^2 a_3^4} l_0$ | 0 | $-\frac{2a_1^2}{a_1^2 + a_3^2} l_0$ | 0 |

Продолжение таблицы 4.1

| | | | | | | |
|-------------|--|---------------------------------------|--|--|---------------------------------------|---------------------------------------|
| b_{24} | $-\frac{2\chi s^2}{\Delta^* a_2^2 a_3^2} l_0$ | 0 | $-\frac{2\chi}{\Delta^* a_2^2 a_3^2} l_0$ | 0 | 0 | 0 |
| b_{31} | $\frac{\chi a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}$ | 0 | $\frac{\chi a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}$ | $\frac{\chi a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}$ | 0 | 0 |
| b_{32} | $\frac{\chi a_1^2}{a_1^2 + a_2^2}$ | 0 | $\frac{\chi a_1^2}{a_1^2 + a_2^2}$ | $\frac{\chi a_1^2}{a_1^2 - a_2^2}$ | 0 | 0 |
| b_{33} | $\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}$ | $\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}$ | $\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}$ | $\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}$ | $\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}$ | $\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}$ |
| φ_1 | $(b_{11}x_1 + b_{12}x_2)x_3 +$ $+b_{13}x_1 + b_{14}x_2$ | $b_{12}x_2x_3 + b_{14}x_2$ | $(b_{11}x_1 + b_{12}x_2)x_3 +$ $+b_{13}x_1 + b_{14}x_2$ | $(b_{11}x_1 + b_{12}x_2)x_3$ | $b_{12}x_2x_3 + b_{14}x_2$ | $b_{12}x_2x_3$ |
| φ_2 | $(b_{21}x_1 + b_{22}x_2)x_3 +$ $+b_{23}x_1 + b_{24}x_2$ | $b_{21}x_1x_3 + b_{23}x_2$ | $(b_{21}x_1 + b_{22}x_2)x_3 +$ $+b_{23}x_1 + b_{24}x_2$ | $(b_{21}x_1 + b_{22}x_2)x_3$ | $b_{21}x_1x_3 + b_{23}x_2$ | $b_{21}x_1x_3$ |
| φ_3 | $b_{31}x_1^2 + b_{32}x_2^2 + b_{33}x_1x_2$ | $b_{33}x_1x_2$ | $b_{31}x_1^2 + b_{32}x_2^2 + b_{33}x_1x_2$ | $b_{31}x_1^2 + b_{32}x_2^2 + b_{33}x_1x_2$ | $b_{33}x_1x_2$ | $b_{33}x_1x_2$ |

Пользуясь значениями коэффициентов b_{ij} , выражениями для φ_j , p и \bar{V} , определяем давление и поле скоростей жидкости при возмущенном движении твердого тела относительно равномерного вращения. Отметим, что выражение для φ_3 совпадает с соответствующим выражением для вращающейся однородной жидкости. Это, очевидно, и стоило ожидать, так как плотность жидкости в плоскости, перпендикулярной оси вращения, в рассматриваемом примере остается постоянной. При $\omega_0 = 0$ функции φ_j будут описывать движение стратифицированной жидкости в эллипсоидальной полости подвижного твердого тела. При $\omega_0 = N = 0$ функции φ_j превращаются в потенциалы Жуковского для эллипсоидальной полости, геометрический центр которой не совпадает с началом координат $Ox_1x_2x_3$. Из вида функции φ_j видно, что коэффициенты b_{jk} обращаются в бесконечность при $\Delta^* = 0$. Последнее равенство определяет собственные частоты стратифицированной вращающейся жидкости, которым отвечают парциальные движения жидкости, возбуждаемые движением твердого тела. Используя выражение для Δ^* в формулах (4.39), получаем характеристическое уравнение для определения собственных частот для вращающейся стратифицированной жидкости полностью заполняющей эллипсоид вращения ($a_1 = a_2$).

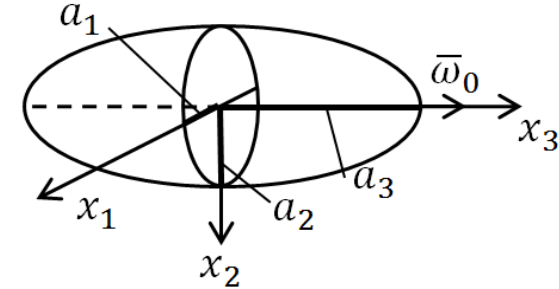
$$q^4 (\bar{a}_3^2 + 1)^2 - q^2 \left[1 + 2\bar{a}_3^2 F_r^2 (\bar{a}_3^2 + 1) \right] + \bar{a}_3^4 F_r^4 = 0; \quad (4.40)$$

Результаты вычисления собственных частот для различных значений параметров \bar{a}_3 и F_r^2 , приведены в таблице 4.2.

Таблица 4.2. Значения собственных частот, вращающейся стратифицированной жидкости полностью заполняющей эллипсоид вращения ($a_1 = a_2$)

| F_r^2 \ \bar{a}_3 | | $q = \frac{\sqrt{[2\bar{a}_3^2 F_r^2 (\bar{a}_3^2 + 1) + 1] - \sqrt{1 + 4\bar{a}_3^4 F_r^2 + 4\bar{a}_3^2 F_r^2}}}{\sqrt{2}(\bar{a}_3^2 + 1)}$; | | | | $q = \frac{\sqrt{[2\bar{a}_3^2 F_r^2 (\bar{a}_3^2 + 1) + 1] + \sqrt{1 + 4\bar{a}_3^4 F_r^2 + 4\bar{a}_3^2 F_r^2}}}{\sqrt{2}(\bar{a}_3^2 + 1)}$; | | | |
|-----------------------|--|--|----------|----------|----------|--|----------|----------|----------|
| | | 0.4 | 0.8 | 1.2 | 1.6 | 0.4 | 0.8 | 1.2 | 1.6 |
| 0 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.862069 | 0.609756 | 0.409837 | 0.280899 |
| 0.5 | | 0.073695 | 0.231847 | 0.375662 | 0.475405 | 0.935768 | 0.841602 | 0.785498 | 0.756304 |
| 1 | | 0.137931 | 0.390244 | 0.590169 | 0.719101 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1.5 | | 0.195614 | 0.518722 | 0.758014 | 0.907586 | 1.057682 | 1.128478 | 1.16785 | 1.188485 |
| 2 | | 0.248415 | 0.629701 | 0.900667 | 1.066997 | 1.110485 | 1.239457 | 1.310503 | 1.347896 |
| 2.5 | | 0.091908 | 0.728833 | 1.02691 | 1.20769 | 1.15947 | 1.33859 | 1.436746 | 1.488588 |
| 3 | | 0.343293 | 0.819258 | 1.141367 | 1.335026 | 1.205362 | 1.429014 | 1.551203 | 1.615925 |

$$q = \frac{\sqrt{[2\bar{a}_3^2 F_r^2 (\bar{a}_3^2 + 1) + 1] \pm \sqrt{1 + 4\bar{a}_3^4 F_r^2 + 4\bar{a}_3^2 F_r^2}}}{\sqrt{2}(\bar{a}_3^2 + 1)};$$



Определив движение криогенной жидкости в полости подвижного твердого тела, перейдем к вычислению компонент тензоров $I_{jk}^{(1)}, I_{jk}^{(2)}, I_{jk}^{(3)}$.

где $I_{jk}^{(1)}$ - компоненты тензора моментов инерции жидкости равные, разности компонентом тензора присоединённых масс жидкости и компонентом тензора моментов инерции затвердевшей жидкости и определяемые формулами (4.21)

$$I_{jk}^{(1)} = \frac{1}{1 + \chi^2} \int_{\tau} \rho_0 (\vec{r} \times \vec{e}_j) \cdot [L \cdot (\nabla \varphi_k - \vec{e}_k \times \vec{r})] d\tau, \quad (4.41)$$

а компоненты тензоров $I_{jk}^{(2)}, I_{jk}^{(3)}$ определяется формулами (4.23, 4.28).

Подставив в выражения (4.41) и формулы (4.23, 4.28) решения краевых задач (4.31, 4.32) для потенциалов φ_j , получим следующие формулы для вычисления компонент тензоров $I_{jk}^{(1)}, I_{jk}^{(2)}, I_{jk}^{(3)}$

$$I_{11}^{(1)} = \frac{-1}{1 + \chi^2} \int_{\tau} \rho_0^* (d + \beta x_3) \{ (\chi b_{11} - b_{12} - 1) x_3^2 + \Lambda^2 b_{11} x_1 x_2 + \Lambda^2 (b_{12} - 1) x_2^2 + (\chi b_{13} - b_{14}) l_0 x_3 \} d\tau;$$

$$I_{22}^{(1)} = \frac{-1}{1 + \chi^2} \int_{\tau} \rho_0^* (d + \beta x_3) \{ (b_{21} + \chi b_{22} - 1) x_3^2 - \Lambda^2 b_{22} x_1 x_2 - \Lambda^2 (b_{21} + 1) x_1^2 + (b_{23} + \chi b_{24}) l_0 x_3 \} d\tau;$$

$$I_{33}^{(1)} = \frac{-1}{1 + \chi^2} \int_{\tau} \rho_0^* (d + \beta x_3) \{ (-\chi 2b_{31} + b_{33} - 1) x_1^2 + (b_{32} - \chi b_{33} - b_{31}) 2x_1 x_2 - (b_{33} + \chi 2b_{32} + 1) x_2^2 \} d\tau;$$

$$I_{12}^{(1)} = \frac{-1}{1 + \chi^2} \int_{\tau} \rho_0^* (d + \beta x_3) \{ (\chi b_{21} - b_{22} - \chi) x_3^2 + \Lambda^2 (b_{21} + 1) x_1 x_2 + \Lambda^2 b_{22} x_2^2 + (\chi b_{23} + b_{24}) l_0 x_3 \} d\tau;$$

$$I_{21}^{(1)} = \frac{-1}{1 + \chi^2} \int_{\tau} \rho_0^* (d + \beta x_3) \{ (b_{11} + \chi b_{12} + \chi) x_3^2 - \Lambda^2 (b_{12} - 1) x_2 x_1 - \Lambda^2 b_{11} x_1^2 + (b_{13} + \chi b_{14}) l_0 x_3 \} d\tau;$$

$$I_{31}^{(1)} = \frac{-1}{1 + \chi^2} \int_{\tau} \rho_0^* (d + \beta x_3) \left\{ \begin{array}{l} (-\chi b_{11} + b_{12} + 1) x_3 x_1 + (b_{14} - \chi b_{13}) l_0 x_1 - (b_{13} + \chi b_{14}) l_0 x_2 - \\ -(b_{11} + \chi b_{12} + \chi) x_3 x_2 \end{array} \right\} d\tau;$$

$$I_{32}^{(1)} = \frac{-1}{1 + \chi^2} \int_{\tau} \rho_0^* (d + \beta x_3) \left\{ \begin{array}{l} (-\chi b_{21} + b_{22} + \chi) x_3 x_1 + (b_{24} - \chi b_{23}) l_0 x_1 + (1 - b_{21} - \chi b_{22}) x_3 x_2 - \\ -(b_{23} + \chi b_{22}) l_0 x_2 \end{array} \right\} d\tau;$$

$$I_{23}^{(1)} = \frac{-1}{1 + \chi^2} \int_{\tau} \rho_0^* (d + \beta x_3) \{ (2b_{31} + \chi b_{33} - \chi) x_1 x_3 + (b_{33} + \chi 2b_{32} + 1) x_2 x_3 \} d\tau;$$

$$I_{13}^{(1)} = \frac{-1}{1 + \chi^2} \int_{\tau} \rho_0^* (d + \beta x_3) \{ (\chi 2b_{31} - b_{33} + 1) x_1 x_3 + (\chi b_{33} - 2b_{32} + \chi) x_2 x_3 \} d\tau;$$

$$\chi = 0$$

$$I_3^{(1)} = -1 \int_{\tau} \rho_0^* (d + \beta x_3) \left\{ (b_3 - 1)x_1^2 + (b_{32} - b_{31})2x_1x_2 - (b_{33} + 1)x_2^2 \right\} d\tau;$$

$$I_{kj}^{(2)} = - \int_{\tau} \rho_0' \frac{\lambda^2}{N^2 + \lambda^2} \vec{e}_3 \cdot \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_3} \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_j \times \vec{r} \right) (\vec{r} \times \vec{e}_3 \times \vec{r}) d\tau;$$

$$r \times e_3 \times r = \vec{e}_3 (r \cdot r) - \vec{r} (r \vec{e}_3) = \vec{e}_3 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_3 x_1 \vec{e}_1 - x_2 x_3 \vec{e}_2 - x_3^2 \vec{e}_3;$$

$$j = 1; k = 1;$$

$$I_{11}^{(2)} = \rho_0^* \beta \frac{\lambda^2}{N^2 + \lambda^2} \int_{\tau} \left[b_{11} x_1^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 (b_{12} - 1) \right] d\tau.$$

$$I_{12}^{(2)} = \rho_0^* \beta \frac{\lambda^2}{N^2 + \lambda^2} \int_{\tau} \left[(b_{21} + 1) x_1^2 x_3 + b_{22} x_1 x_2 x_3 \right] d\tau.$$

$$I_{21}^{(2)} = \rho_0^* \beta \frac{\lambda^2}{N^2 + \lambda^2} \int_{\tau} \left[b_{11} x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3 (b_{12} - 1) \right] d\tau.$$

$$I_{22}^{(2)} = \rho_0^* \beta \frac{\lambda^2}{N^2 + \lambda^2} \int_{\tau} \left[(b_{21} + 1) x_1 x_2 x_3 + b_{22} x_2^2 x_3 \right] d\tau.$$

$$I_{31}^{(2)} = -\rho_0^* \beta \frac{\lambda^2}{N^2 + \lambda^2} \int_{\tau} \left[(b_{11} x_1 + b_{12} x_2 - x_2) (x_1^2 + x_2^2) \right] d\tau.$$

$$I_{32}^{(2)} = -\rho_0^* \beta \frac{\lambda^2}{N^2 + \lambda^2} \int_{\tau} \left[(b_{21} x_1 + b_{22} x_2 + x_1) (x_1^2 + x_2^2) \right] d\tau.$$

$$I_{kj}^{(3)} = -\rho_0^* \frac{\lambda^2}{N^2 + \lambda^2} \int_{\tau} \vec{e}_3 \cdot \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_3} \vec{e}_3 - \vec{e}_j \times \vec{r} \right) (\vec{r} \times \vec{e}_3) d\tau;$$

$$I_{11}^{(3)} = -\rho_0^* \frac{\lambda^2}{N^2 + \lambda^2} \int_{\tau} \left[b_{11} x_1 x_2 + x_2^2 (b_{12} - 1) \right] d\tau.$$

$$I_{12}^{(3)} = -\rho_0^* \frac{\lambda^2}{N^2 + \lambda^2} \int_{\tau} \left[x_1 x_2 (b_{21} + 1) + b_{22} x_2^2 \right] d\tau.$$

$$I_{21}^{(3)} = \rho_0^* \frac{\lambda^2}{N^2 + \lambda^2} \int_{\tau} \left[b_{11} x_1^2 + x_1 x_2 (b_{12} - 1) \right] d\tau.$$

$$I_{22}^{(3)} = \rho_0^* \frac{\lambda^2}{N^2 + \lambda^2} \int_{\tau} \left[x_1^2 (b_{21} + 1) + b_{22} x_1 x_2 \right] d\tau.$$

Результаты вычислений компонент тензоров для случая жидкости полностью заполняющей эллипсоидальную полость приведены в таблице 4.3.

Таблица 4.3. Значения компонент $I_{jk}^{(1)}, I_{jk}^{(2)}, I_{jk}^{(3)}$

| | | | |
|----------------|----------------|---|------------------------------------|
| $I_{jk}^{(1)}$ | $I_{11}^{(1)}$ | $\rho_0^* d s^2 \gamma \frac{a_1 s^2 + a_3^2}{\Delta^* a_1^2 a_3^2} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\beta^2 a_3^2}{d^2} \right)$ | $A \frac{A_1}{a_3} \alpha$ |
| | $I_{22}^{(1)}$ | $\rho_0^* d s^2 \gamma \frac{a_2 s^2 + a_3^2}{\Delta^* a_2^2 a_3^2} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\beta^2 a_3^2}{d^2} \right)$ | $A \frac{A_2}{A_3} \alpha$ |
| | $I_{33}^{(1)}$ | $\rho_0^* d \gamma \frac{a_1^2 a_3^2}{a_1^2 + a_2^2} \left(1 - \frac{\beta^2 a_3^2}{d^2} \right)$ | |
| | $I_{12}^{(1)}$ | $\rho_0^* d \gamma s^2 \frac{1}{\Delta^*} \frac{s^2 \chi}{a_3^2} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\beta^2 a_3^2}{d^2} \right)$ | $A \frac{s^2 \chi}{a_3^2} \alpha$ |
| | $I_{21}^{(1)}$ | $-\rho_0^* d \gamma s^2 \frac{1}{\Delta^*} \frac{s^2 \chi}{a_3^2} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\beta^2 a_3^2}{d^2} \right)$ | $-A \frac{s^2 \chi}{a_3^2} \alpha$ |
| $I_{kj}^{(2)}$ | $I_{11}^{(2)}$ | $\rho_0^* s^2 d \gamma \frac{1}{\Delta^*} \frac{s^2 \chi}{2d^2} \beta^2$ | $A \frac{s^2 \chi}{2d^2} \beta^2$ |
| | $I_{22}^{(2)}$ | $\rho_0^* s^2 d \gamma \frac{1}{\Delta^*} \frac{s^2 \chi}{2d^2} \beta^2$ | $A \frac{s^2 \chi}{2d^2} \beta^2$ |
| | $I_{22}^{(2)}$ | $-\rho_0^* d s^2 \gamma \frac{1}{\Delta^*} \frac{a_2^2 s^2 + a_3^2}{2a_2^2 d^2} \beta^2$ | $-AA_2 \frac{\beta^2}{2d^2}$ |
| | $I_{21}^{(2)}$ | $-\rho_0^* d s^2 \gamma \frac{1}{\Delta^*} \frac{a_1^2 s^2 + a_3^2}{2a_1^2 d^2} \beta^2$ | $AA_1 \frac{\beta^2}{2d^2}$ |
| $I_{kj}^{(3)}$ | $I_{11}^{(3)}$ | $\rho_0^* s^2 \gamma d \frac{1}{\Delta^*} \frac{a_3^2 + a_1^2 s^2}{a_1^2 a_3^2 2d}$ | $AA_1 \frac{1}{a_3^2 2d^2}$ |
| | $I_{22}^{(3)}$ | $\rho_0^* s^2 \gamma d \frac{1}{\Delta^*} \frac{a_3^2 + a_2^2 s^2}{a_2^2 a_3^2 2d}$ | $AA_2 \frac{1}{a_3^2 2d^2}$ |
| | $I_{12}^{(3)}$ | $\rho_0^* s^2 \gamma d \frac{1}{\Delta^*} \frac{s^2 \chi}{2a_3^2 d}$ | $A \frac{s^2 \chi}{2a_3^2 d}$ |
| | $I_{21}^{(3)}$ | $-\rho_0^* s^2 \gamma d \frac{1}{\Delta^*} \frac{s^2 \chi}{2a_3^2 d}$ | $-A \frac{s^2 \chi}{2a_3^2 d}$ |

где $\alpha = 1 - \frac{3}{2} \frac{\beta^2 a_3^2}{d^2}$; $A = \frac{\rho_0^* s^2 \gamma d}{\Delta^*}$; $A_k = \frac{a_3^2 + a_k^2 s^2}{a_k^2}$; $k = 1, 2$.

4.4. Собственные колебания вращающегося тела с жидкостью

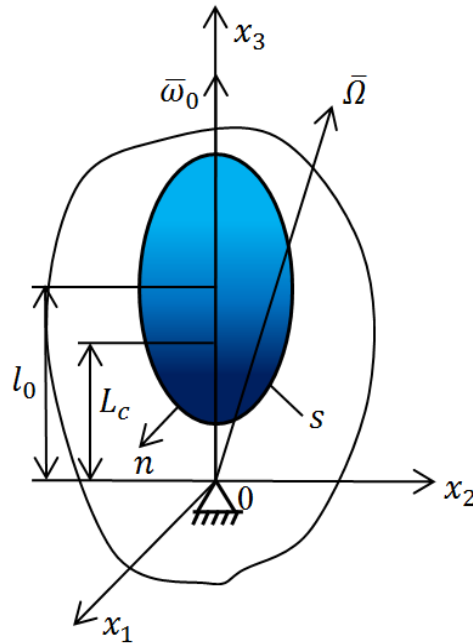


Рис. 4.5. Твёрдое тело с эллипсоидальной полостью, целиком заполненной жидкостью

Рассмотрим задачу о собственных колебаниях свободного вращающегося твёрдого тела с криогенной жидкостью около стационарного вращения (см. Рис. 4.5). Момент внешних сил относительно точки O примем равным нулю ($\bar{M} = 0$, тело свободно и точка O совпадает с центром масс твёрдого тела с затвердевшей жидкостью), и пусть ось вращения Ox_3 является главной осью инерции системы. Тогда будут выполняться равенства

$$J_{3j} = J_{j3} = 0 \quad (j=1,2); \quad \bar{J} \cdot \bar{\omega}_0 = J_{33} \omega_0 \bar{e}_3; \quad \bar{\omega}_0 \times \bar{J} \cdot \bar{\omega}_0 = 0. \quad (4.42)$$

Считая $\bar{M}_0 = 0$ получаем следующее уравнение возмущённого движения вращающегося твёрдого тела с полостью, целиком наполненной несжимаемой стратифицированной (криогенной) жидкостью, и находящегося в однородном поле массовых сил интенсивности g

$$\left(J_0 + I_0^{(1)} \right) \cdot \dot{\bar{\Omega}} + \omega_0 \bar{e}_3 \times \left[\left(J_0 + I_0^{(1)} \right) \cdot \bar{\Omega} - J_{33} \bar{\Omega} \right] + \omega_0 I_0^{(2)} \cdot \bar{\Omega} + g I_0^{(3)} \cdot \int \bar{\Omega} dt = 0. \quad (4.43)$$

Будет считать отклонения твёрдого тела от оси невозмущённого вращения твёрдого тела малыми величинами и введем вектор малых углов поворота $\bar{\Theta}(t)$

$$\vec{\Omega} = \frac{d\vec{\Theta}}{dt}$$

Тогда уравнение (4.43) запишется в виде

$$\left(J_0 + I_0^{(1)} \right) \cdot \ddot{\vec{\Theta}} + \omega_0 \vec{e}_3 \times \left[\left(J_0 + I_0^{(1)} \right) \cdot \dot{\vec{\Theta}} - J_{33} \dot{\vec{\Theta}} \right] + \omega_0 I_0^{(2)} \cdot \dot{\vec{\Theta}} + g I_0^{(3)} \cdot \vec{\Theta} = 0. \quad (4.44)$$

Положив $\vec{\Theta} = \vec{\theta} e^{\lambda t}$, запишем уравнение (4.44) в матричном виде

$$\begin{pmatrix} q^2 K_{11} - \frac{q}{2} (K_{21} + I_{11}^{(2)}) + F_r^2 I_{11}^{(3)} & q^2 K_{12} - \frac{q}{2} (K_{22} + I_{12}^{(2)} - J_{33}) + F_r^2 I_{12}^{(3)} & q^2 K_{13} - \frac{q}{2} K_{23} \\ q^2 K_{21} + \frac{q}{2} (K_{11} - I_{21}^{(2)} - J_{33}) + F_r^2 I_{21}^{(3)} & q^2 K_{22} + \frac{q}{2} (K_{12} - I_{22}^{(2)}) + F_r^2 I_{22}^{(3)} & q^2 K_{23} + \frac{q}{2} K_{13} \\ q^2 K_{31} & q^2 K_{32} & q^2 K_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.45)$$

В уравнении (4.45) приняты обозначения

$$K_{jk} = J_{jk} + I_{jk}^{(1)}; \quad J_{jk} = J_{jk}^0 + J'_{jk}; \quad F_r^2 = \frac{N^2}{4\omega_0^2}; \quad q = \frac{\lambda}{2\omega_0}; \quad (J_{jk} = J_{kj}; \quad j, k = 1, 2, 3).$$

здесь J_{jk}^0 - моменты инерции твёрдого тела, J'_{jk} - момент инерции затвердевшей жидкости.

Составив определитель линейной однородной системы (относительно компонент вектора $\vec{\theta}$) и приравнявая определитель нулю, получим характеристическое уравнение.

$$F(q, a_1, a_2, a_3, J_{jk}, \beta) = 0 \quad (4.46)$$

В полученном уравнении компоненты J_{jk} - постоянные, а $I_{jk}^{(1)}, I_{jk}^{(2)}, I_{jk}^{(3)}$ есть функции q , зависящие от формы полости. Корни q уравнения (4.46) определяют собственные числа $\lambda = 2\omega_0 q$ задачи о колебаниях вращающегося тела с жидкостью. Рассмотрим уравнение (4.46) в некоторых случаях.

4.4.1. Случай отсутствия массы жидкости

В случае твёрдого тела без жидкости, т.е. при $\rho_0(x_3) = 0$, уравнение (4.45) сводится к квадратному

$$\left[(J_{33}^0 - J_{11}^0)(J_{33}^0 - J_{22}^0) - (J_{12}^0)^2 \right] + 4q^2 (J_{11}^0 J_{22}^0 - (J_{12}^0)^2) = 0. \quad (4.47)$$

Свободный член уравнения (4.47) положителен, так как тензор инерции \bar{J} - положительно определенный тензор. Для устойчивости вращения необходимо, чтобы q было чисто мнимым, а для этого нужно

$$(J_{33}^0 - J_{11}^0)(J_{33}^0 - J_{22}^0) \geq (J_{12}^0)^2. \quad (4.48)$$

Неравенство (4.48) известное условие устойчивости стационарного вращения свободного твердого тела. Если оси y_1, y_2 являются главными центральными осями инерции, тогда $J_{12}^0 = 0$, и условие (4.48) сводится к требованию, чтобы момент инерции J_{33}^0 был либо наибольшим, либо наименьшим главным центральным моментом инерции системы. Корни уравнения (4.47) при $J_{12}^0 = 0$ равны

$$q_{1,2}^0 = \pm 0.5i (J_{11}^0 J_{22}^0)^{-1/2} \left[(J_{33}^0 - J_{11}^0)(J_{33}^0 - J_{22}^0) \right]^{1/2}. \quad (4.49)$$

4.4.2. Вращение твердого тела с затвердевшей жидкостью

В этом случае относительное движение жидкости отсутствует, центр масс жидкости относительно твердого тела не изменяет своего положения, и моменты инерции все механической системы $J_{jk} = J_{jk}^0 + J'_{jk}$ также остаются постоянными, поэтому предыдущий вывод остается справедливым: вращение твердого тела с затвердевшей жидкостью будет устойчиво вокруг оси с наибольшим или наименьшим главным центральным моментом инерции системы.

4.4.3. Вращение твердого тела, имеющего эллипсоидальную полость, целиком заполненную однородной жидкостью

В этом случае тензоры $I_0^{(2)}, I_0^{(3)}$, характеризующие влияние отклонения плотности жидкости от невозмещённого состояния равны нулю и устойчивость вращения твердого тела оказывается зависимым от кинематического состояния

самой жидкости, которое может быть безвихревым (в случае начало раскручивания жидкости, при вращательном движении твёрдого тела) или вихревым в случая вращения всей массы жидкости. Покажем, что в последнем случае характеристическое уравнение и условия устойчивости вращения твердого тела, получаемые при помощи определителя (4.45) согласуются с уравнением и условиями устойчивости, полученными ранее в других работах и иными способами [45].

Подставляя в уравнение (4.46) значения компонент тензора $I_0^{(1)}$ при $N^2 = 0$, получим после раскрытия определителя и алгебраических преобразований

$$A_1 q^4 + A_2 q^2 + A_3 = 0; \quad (4.50)$$

где $A_1 = 4(a_1^2 + a_3^2)(a_2^2 + a_3^2)a_1^{-2}a_2^{-2}(J_{11}^*J_{22}^* - J_{12}^2)$;

$$A_2 = (a_1^2 + a_3^2)(a_2^2 + a_3^2)a_1^{-2}a_2^{-2} \left[(J_{33} - J_{11}^*)(J_{33} - J_{22}^*) - J_{12}^* \right] + 4(J_{11}J_{22} - J_{12}^2) - 4\rho^* \gamma a_3^2 J_{33};$$

$$A_3 = (J_{33} - J_{11})(J_{33} - J_{22}) - J_{12}^2;$$

$$J_{11}^* = J_{11} - \frac{\rho^* V_{эл} 4a_2^2 a_3^2}{5(a_2^2 + a_3^2)}; \quad J_{22}^* = J_{22} - \frac{\rho^* V_{эл} 4a_1^2 a_3^2}{5(a_1^2 + a_3^2)}.$$

где $\gamma = 4/5 V_{эл}$ и J_{11}^* , J_{22}^* моменты инерции преобразованного тела (согласно Н. Е. Жуковскому), равные сумме моментов инерции твердого и эквивалентного тел.

$$J_{11}^* = J_{11}^0 + J_{11}^{(\ominus)}; \quad J_{22}^* = J_{22}^0 + J_{22}^{(\ominus)}.$$

$$J_{11}^{(\ominus)} = \frac{\rho^* V_{эл} (a_2^2 - a_3^2)^2}{5(a_2^2 + a_3^2)}; \quad J_{22}^{(\ominus)} = \frac{\rho^* V_{эл} (a_3^2 - a_1^2)^2}{5(a_3^2 + a_1^2)}.$$

Величина J_{11}^* (и аналогично J_{22}^*) может быть представлена также в виде

$$J_{11}^* = J_{11} - (J'_{11} - J_{11}^{(\ominus)}), \quad J_{11} = J_{11}^0 + J'_{11}$$

Из биквадратного уравнения (4.50) легко найти q

$$q_{12} = \frac{-A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - 4A_3A_1}}{2A_1}.$$

Для устойчивости движения необходимо, чтобы все корни уравнения (4.50) были чисто мнимыми (при $A_1 \geq 0$), т. е. $A_3 \geq 0$; $A_2 \geq 2\sqrt{A_1 A_3}$.

Для динамического симметричного твердого тела ($J_{11}^0 = J_{22}^0$, $J_{12}^0 = 0$), имеющего полость в виде эллипсоида вращения ($a_1 = a_2$), ось которого совпадает с осью динамической симметрии тела $O_1 y_3$, уравнения (4.50) преобразуется к виду

$$A_4 \sigma^2 - A_5 \sigma - A_6 = 0, \quad q = \pm i \sigma; \quad (4.51)$$

где $A_4 = 2(a_1^2 + a_3^2)a_1^{-2}J_{11}^0$; $A_5 = (a_1^2 + a_3^2)a_1^{-2}(J_{33} - J_{11}^0) - 2J_{21}$; $A_6 = J_{33} - J_{11}$.

Для устойчивости вращения в этом случае необходимо потребовать, чтобы корни уравнения (4.51) были действительными числами, т. е. чтобы выполнялось условие

$$A_5^2 + 4A_4 A_6 \geq 0. \quad (4.52)$$

Подставив выражения для коэффициентов A_j ($j = 4, 5, 6$) и приравняв нулю полученное уравнение, можно построить область устойчивости в плоскости двух параметров $y = J_{33} - J_{11}$, $\bar{a}_3 = a_3/a_1$ (см. Рис. 4.6), которая совпадает с результатами работы Докучаева [45]. Пунктирная линия на этом рисунке представляет собой границу на плоскости параметров y , \bar{a}_3 физически возможных значений моментов инерции тела жидкостью. Поэтому область под этой линией должно быть исключена из рассмотрения. Для случая, когда масса твёрдого тела пренебрежимо мала по сравнению с массой жидкости, точки пересечения пунктирной линии с нижней границей $\bar{a}_3 = 1$, $\bar{a}_3 = 3$ дают границы устойчивости свободного вращения, невесомой оболочки с жидкостью. Области устойчивости приведены на Рис. 4.6. (зоны неустойчивости заштрихованы).

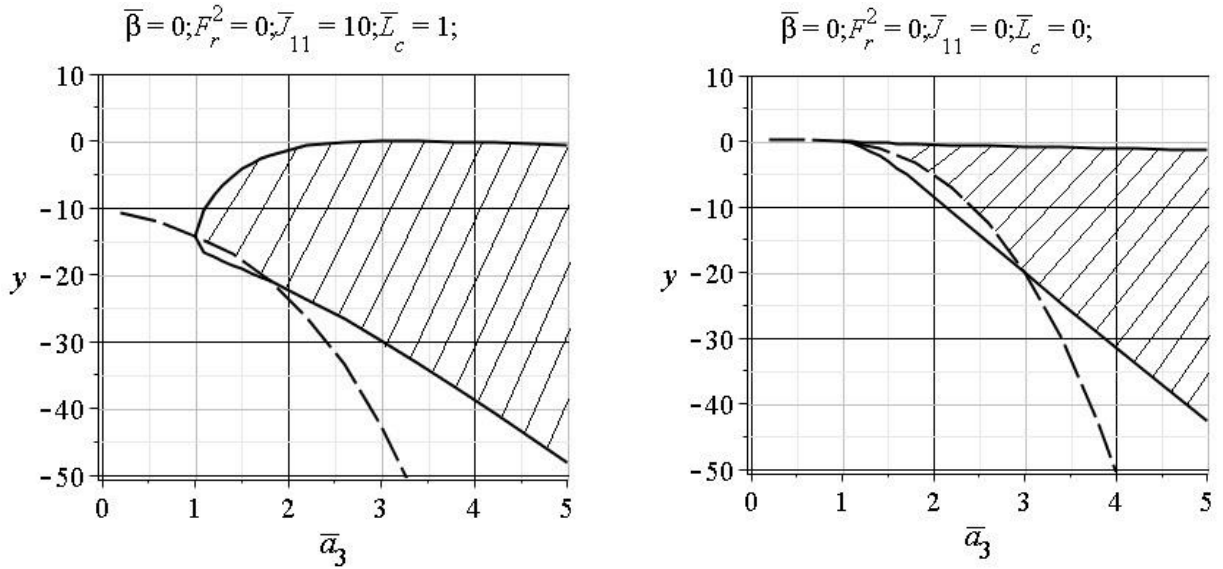


Рис. 4.6. Области устойчивости в плоскости двух параметров y, \bar{a}_3

4.4.4. Вращение твердого тела со стратифицированной жидкостью

Выясним условия устойчивости вращения динамическим симметричного тела твёрдого тела с эллипсоидальной полостью вращения. Для рассматриваемого случая положим $\lambda = i\omega$ и пусть $q = \frac{\omega}{2\omega_0}$. Тогда первые два уравнения из

матричной записи (4.45) переписывается в виде

$$\begin{pmatrix} q^2 K_{11} + i\frac{q}{2}(K_{21} + I_{11}^{(2)}) + F_r^2 I_{11}^{(3)} & q^2 K_{12} + i\frac{q}{2}(K_{22} + I_{12}^{(2)} - J_{33}) + F_r^2 I_{12}^{(3)} \\ q^2 K_{21} - i\frac{q}{2}(K_{11} - I_{21}^{(2)} - J_{33}) + F_r^2 I_{21}^{(3)} & q^2 K_{22} - i\frac{q}{2}(K_{12} - I_{22}^{(2)}) + F_r^2 I_{22}^{(3)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.53)$$

Умножим верхнее уравнение векторного равенства (4.53) на мнимую единицу и сложим со вторым уравнением системы (4.53). В результате после простых преобразований получим

$$\theta \left[q^2 (K_{11} + \bar{K}_{12}) - \frac{q}{2} (K_{11} + \bar{K}_{12} - J_{33}) + \frac{q}{2} \bar{I}_{11}^{(2)} + F_r^2 I_{22}^{(3)} + F_r^2 I_{12}^{(3)} + \frac{q}{2} \omega_0 I_{21}^{(2)} \right] = 0 \quad (4.54)$$

где $\theta = i\theta_1 + \theta_2$.

Подставив в уравнение (4.54) значения компонент тензоров $I_{jk}^{(1)}, I_{jk}^{(2)}, I_{jk}^{(3)}$, получим после громоздких несложных преобразований характеристическое уравнение, записанное в безразмерном виде

$$2q^3 \left[\bar{J}_{11} (1 + \bar{a}_3^2) - \bar{\gamma} \alpha \bar{a}_3^2 \right] + q^2 \left[\Delta (1 + \bar{a}_3^2) - 2\bar{J}_{11} + \bar{\gamma} \alpha^* \bar{a}_3^2 \right] -$$

$$-q \left[2\bar{J}_{11} \bar{a}_3^2 F_r^2 + \bar{\Delta} - \bar{\gamma} \bar{a}_3^2 F_r^2 \right] - \bar{\Delta} \bar{a}_3^2 F_r^2 = 0; \quad (4.55)$$

где $\bar{J}_{11} = \frac{J_{11}}{\rho_0^* d a_1^5}$; $\bar{\Delta} = \frac{\Delta}{\rho_0^* d a_1^5}$; $\Delta = J_{33} - J_{11}$; $\bar{\gamma} = \frac{16}{15} \pi \bar{a}_3$; $\bar{a}_3 = \frac{a_3}{a_1}$; $\alpha = 1 - \frac{3}{2} \frac{\beta}{d} l_0$;

$$\alpha^* = 1 - 2 \frac{\beta}{d} l_0; \quad d = 1 - \beta l_0.$$

Для устойчивости стационарного вращения (необходимое условие) все корни уравнения (4.55) должны быть действительными. Для кубического уравнения $b_0 q^3 + b_1 q^2 + b_2 q + b_3 = 0$ корни будут действительными, если дискриминант $D < 0$, где

$$D = -b_1^2 b_2^2 + 27 b_3^2 b_0^2 + 4 b_1^3 b_3 - 18 b_0 b_1 b_2 b_3 + 4 b_0 b_2^3.$$

Границу, разделяющую действительные и комплексные корни, получим из уравнения $D = 0$.

В выражении для дискриминанта D коэффициенты b_k , $k = 0, 1, 2, 3$ выражаются формулами

$$b_0 = 2 \left[\bar{J}_{11} (1 + \bar{a}_3^2) - \bar{\gamma} \alpha \bar{a}_3^2 \right] \quad b_1 = \Delta (1 + \bar{a}_3^2) - 2\bar{J}_{11} + \bar{\gamma} \alpha^* \bar{a}_3^2$$

$$b_2 = - \left[2\bar{J}_{11} \bar{a}_3^2 F_r^2 + \bar{\Delta} - \bar{\gamma} \bar{a}_3^2 F_r^2 \right] \quad b_4 = -\bar{\Delta} \bar{a}_3^2 F_r^2$$

Рассмотрим устойчивость вращения твёрдого тела со стратифицированной жидкостью в условиях невесомости. Положим $g = 0$, $N^2 = 0$, т. е. $F_r^2 = 0$, тогда компоненты тензора $I_0^{(1)}$ будут совпадать с компонентами тензора $I_0^{(1)}$ для однородной жидкости, а компоненты тензора $I_0^{(2)}$, учитывающего изменения плотности жидкости, выразятся формулами.

$$I_{11}^{(2)} = \frac{\rho_0^* \gamma \chi \beta^2}{2 d \Delta^*}; \quad I_{22}^{(2)} = I_{11}^{(2)};$$

$$I_{12}^{(2)} = \frac{-\rho_0^* \gamma \chi (a_2^2 + a_3^2) \beta^2}{2 d \Delta^* a_2^2}; \quad I_{21}^{(2)} = \frac{-\rho_0^* \gamma \chi (a_1^2 + a_3^2) \beta^2}{2 d \Delta^* a_1^2};$$

Дискриминант кубического уравнения оказывается равным дискриминанту с обратным знаком, соответствующего квадратного уравнения, получаемого из (4.55) при $F_r^2 = 0$.

$$D = -D_2, \quad D_2 = b_1^2 - 4b_0b_3$$

Приравняв $D_2 = 0$, также можно получить области устойчивости вращательного движения твёрдого тела с криогенной жидкостью. Для случая безмассовой оболочки твёрдого тела области устойчивости для разных β , приведены Рис. 4.7.

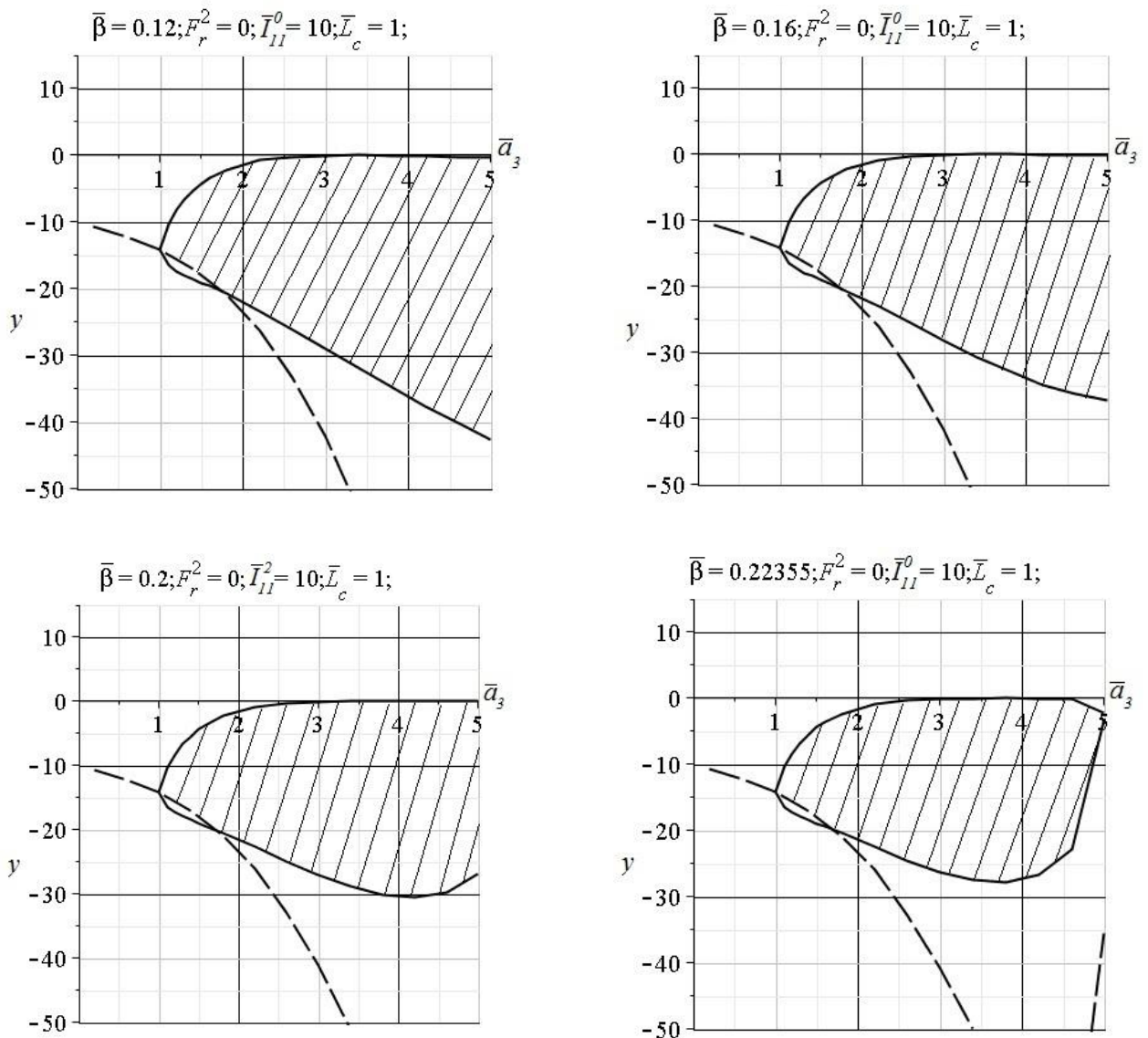


Рис. 4.7. Области устойчивости вращательного движения твёрдого тела с криогенной жидкостью ($F_r^2 = 0$)

Исследуем далее устойчивость вращения твёрдого тела с криогенной жидкостью в случае $F_r^2 \neq 0$. С этой целью положим $D_2 = 0$ и заменив коэффициенты b_k , $k = 0, 1, 2, 3$ через их значения построим области неустойчивости, которые представлены на Рис. 4.8

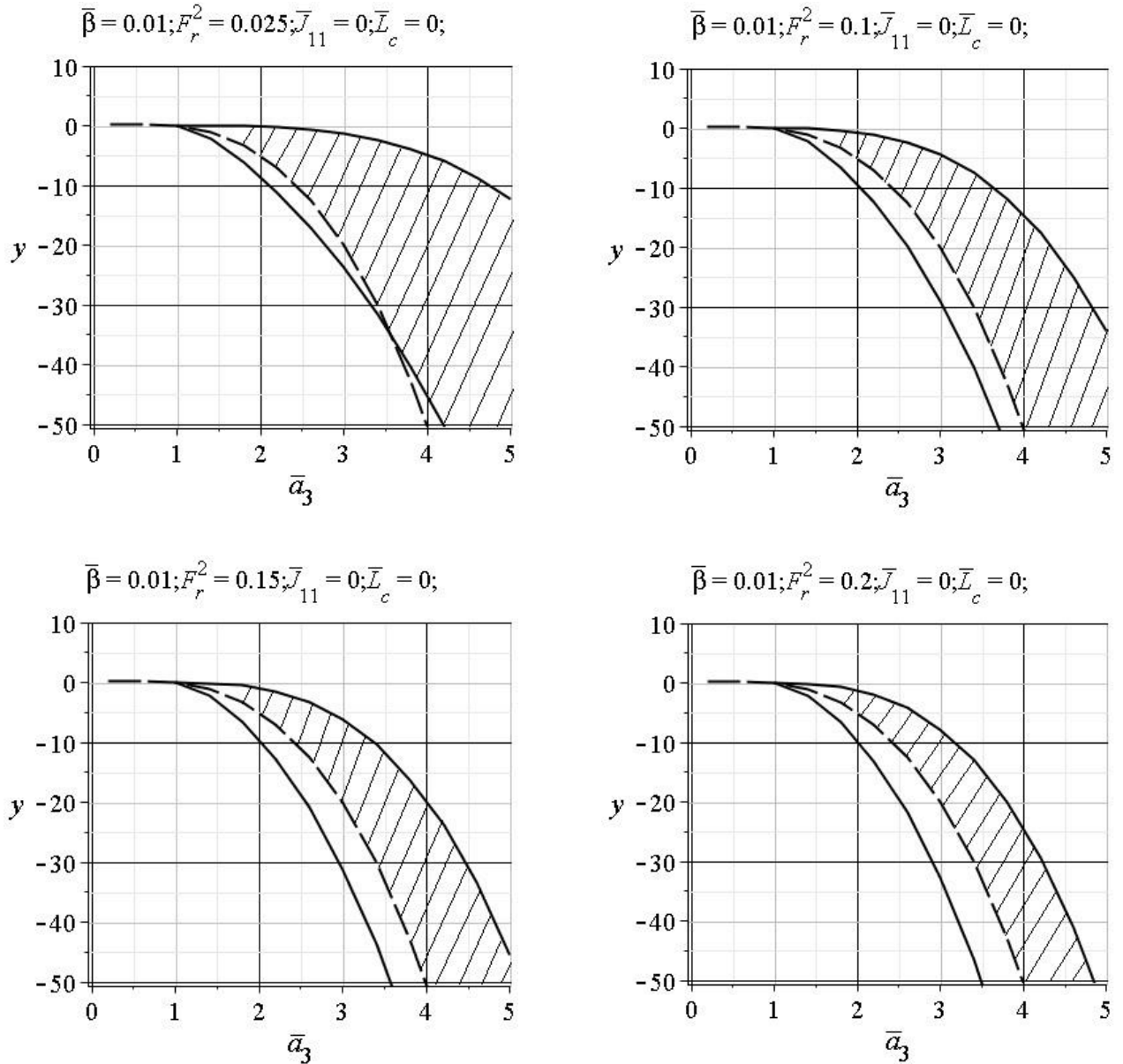


Рис. 4.8. Области устойчивости вращательного движения твёрдого тела с криогенной жидкостью ($F_r^2 \neq 0$)

4.5. Сферическая полость

Чтобы получить другие результаты, сравнимые с имеющимися для однородной жидкости, предположим что оболочка твердого тела достаточно

тонкая и можно пренебречь ее массой, а вращение всей системы происходит относительно неподвижной точки, совпадающей с центром масс неоднородной жидкости. Тогда величина l_0 может интерпретироваться как расстояние от геометрического центра полости до центра масс неоднородной жидкости в невозмущенном состоянии. С другой стороны, рассматривая полость с однородной жидкостью, под величиной l_0 можно понимать расстояние от геометрического центра полости (или центра масс однородной жидкости) до неподвижной точки, относительно которой вращается безынерционная оболочка с однородной жидкостью. При $l_0 = 0$ имеем вращение системы с неоднородной жидкостью вокруг неподвижной точки, являющейся одновременно геометрическим центром полости.

Вычислим силу и момент, действующие со стороны жидкости на оболочку по формулам:

$$\vec{F} = \rho_0^* \int_{\tau} \nabla p d\tau; \quad \vec{M} = \rho_0^* \int_{\tau} \vec{r} \times \nabla p d\tau;$$

После подстановки в p функций φ_j и элементарных вычислений получаем в проекции на оси:

$$F_1 = \bar{m}(-b_{21}l_0 + b_{23})\Omega_2, \quad \bar{m} = \frac{m}{\rho_0^*}, \quad (4.56)$$

$$F_2 = \bar{m}(-b_{12}l_0 + b_{14})\Omega_1, \quad F_3 = 0, \quad M_3 = \frac{b_{33}}{5}\Omega_3(a_1^2 - a_2^2)V_{ЭЛ},$$

$$M_1 = \left(\frac{b_{12}}{5}\Omega_1 + \frac{b_{22}}{5}\Omega_2 \right) (a_2^2 - a_3^2)V_{ЭЛ} - l_0V_{ЭЛ}(\Omega_1b_{14} + \Omega_2b_{24}), \quad (4.57)$$

$$M_2 = \left(\frac{b_{11}}{5}\Omega_1 + \frac{b_{21}}{5}\Omega_2 \right) (a_3^2 - a_1^2)V_{ЭЛ} + l_0V_{ЭЛ}(\Omega_1b_{13} + \Omega_2b_{23}),$$

Чтобы сделать сравнение с однородной жидкостью более значительным, рассмотрим случай сферической полости, положив $a_1 = a_2 = a_3 = a$.

Для шаровой полости получим

$$\vec{F} = m\vec{\dot{\Omega}} \times \vec{r}_c, \quad \vec{r}_c = l_0 \vec{e}_3, \quad M_3 = 0,$$

$$M_1 = -ml_0^2 \left(\dot{\Omega}_1 \frac{4\lambda^4 + 2\lambda^2 N^2 + 8\omega_0^2 \lambda^2}{(2\lambda^2 + N^2)^2 + 4\omega_0^2 \lambda^2} - \dot{\Omega}_2 \frac{(\lambda^2 + N^2)4\omega_0 \lambda}{(2\lambda^2 + N^2)^2 + 4\omega_0^2 \lambda^2} \right), \quad (4.58)$$

$$M_2 = -ml_0^2 \left(\dot{\Omega}_1 \frac{(\lambda^2 + N^2)4\omega_0 \lambda}{(2\lambda^2 + N^2)^2 + 4\omega_0^2 \lambda^2} + \dot{\Omega}_2 \frac{4\lambda^4 + 2\lambda^2 N^2 + 8\omega_0^2 \lambda^2}{(2\lambda^2 + N^2)^2 + 4\omega_0^2 \lambda^2} \right),$$

Положив $N = 0$, $\omega_0 = 0$, имеем случай безвихревого движения однородной жидкости в сферической полости, тогда

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r}_0, \quad M_1 = -ml_0^2 \dot{\Omega}_1, \quad M_2 = -ml_0^2 \dot{\Omega}_2,$$

т.е. движения твердого тела никак не сказываются на безвихревом движении жидкости. Влияние же жидкости в этом случае подобно влиянию добавочного твердого тела с массой, равной массе жидкости, т.е. сводится лишь к увеличению соответствующих моментов инерции твердого тела. Это совпадает с результатами [90]. При $l_0 = 0$, имеем $F = M = 0$. Пусть теперь $N = 0, \omega_0 \neq 0$ – случай вращающейся однородной жидкости. Положив $\lambda = j\sigma$ и введя комплексные величины $M = M_1 + jM_2, \dot{\Omega} = \dot{\Omega}_1 + j\dot{\Omega}_2$, получим

$$M = -ml_0^2 \left(1 + \omega_0 (\sigma + \omega_0)^{-1} \right) \dot{\Omega}. \quad (59)$$

Откуда следует, что влияние жидкости и в этом случае сводится лишь к количественному изменению моментов инерции несущего тела, хотя и зависит от числа σ . При совпадении неподвижной точки с центром масс однородной жидкости имеем снова $F = M = 0$; это также совпадает с результатами работ [52, 130]. Рассмотрим теперь случай, когда $N \neq 0, \omega_0 = 0$. Практически этот случая может быть осуществим при раскрутке больших емкостей жидкости, когда основная масса жидкости находится еще в незакрученном состоянии. Из (4.58) имеем

$$M = -ml_0^2 \left(1 + N^2 (2\sigma^2 - N^2)^{-1} \right) \dot{\Omega}. \quad (4.60)$$

Из формулы (4.60) следует, что $M \rightarrow \infty$ при $\sigma^2 \rightarrow 0.5N^2$, где $0.5N^2$ – квадрат собственной частоты колебаний стратифицированной жидкости в неподвижной сферической полости. Следовательно, движение оболочки в этом случае индуцирует единственное парциальное движение жидкости. Движение же жидкости создает совокупность сил гидродинамического воздействия, момент которых может повлиять на движение всей системы. Используя комплексные переменные $M, \dot{\Omega}$, перепишем равенства (4.58) в виде

$$M = -ml_0^2 \dot{\Omega} \left(1 + \frac{4\omega_0 \sigma^2 (\sigma - \omega_0) + N^2 (2\sigma^2 - N^2) - 4\sigma \omega_0 N^2}{(\sigma^2 - \sigma_1^2)(\sigma^2 - \sigma_2^2)} \right), \quad (4.61)$$

где σ^2, σ_2^2 – корни уравнения

$$(2\sigma^2 - N^2)^2 - 4\omega_0^2 \sigma^2 = 0, \quad (4.62)$$

определяющие собственные частоты вращающейся стратифицированной жидкости в неподвижной сферической полости, которым соответствуют парциальные движения, возбуждаемые движением твердого тела. При $N \neq 0, \omega_0 \neq 0$, из (4.62) следует, что число таких парциальных движений равно двум.

Анализируя уравнение (4.40), аналогичное (4.62) для общего случая ($a_1 \neq a_2 \neq a_3$), т.е. для эллипсоида, приходим к выводу, что число парциальных движений, возбуждаемых движением оболочки, также равно двум.

Таким образом, наличие устойчивой стратификации приводит к увеличению конечного числа рассматриваемых парциальных движений вращающейся жидкости. Для эллипсоидальной полости число движений увеличивается на единицу, для шаровой – на две единицы, по сравнению с соответствующими движениями вращающейся однородной жидкости [52].

Положим в формулах (4.61) $l_0 = 0$. Это будет означать, что неподвижная точка совпадает с геометрическим центром сферической полости, и $F = M = 0$. Движение неоднородной жидкости в этом случае не оказывает никакого влияния на движение твердого тела, и уравнения движения системы оказываются

"развязанными" [114]. Влияние жидкости в этом случае скажется только лишь на изменение реакции неподвижной точки.

Выводы по главе 4

В главе 4 показано, что гидродинамическое воздействие стратифицированной жидкости создается конечным числом парциальных движений жидкости в эллипсоидальной и сферической полости, а в случае цилиндрической полости – счетным множеством парциальных движений, определяемых стратификацией жидкости [1, 5]. В главе 4 также представлена задача об устойчивости вращения твёрдого тела с эллипсоидальной полостью, целиком наполненной стратифицированной жидкостью. Полученное характеристическое уравнение рассматривается в следующих случаях: А) вращение твёрдого тела с затвердевшей жидкостью, Б) вращение динамически симметричного твёрдого тела с однородной жидкостью, имеющего полость в виде эллипсоида вращения, В) вращение твёрдого тела со стратифицированной жидкостью. В главе 4 также представлены области неустойчивости вращения твёрдого тела с эллипсоидальной полостью, целиком наполненной стратифицированной жидкостью, при вращении вокруг неподвижной точки, совпадающей с центром масс рассматриваемой механической системы. Рассмотрены различные случаи: а) случай невесомости, но с учетом инерции твёрдого тела, б) случай с учётом действия внешних массовых сил, но когда момент инерции твёрдого тела равен нулю, либо не равняется нулю. Устойчивая стратификация жидкости приводит к уменьшению областей неустойчивости вращения твёрдого тела с эллипсоидальной полостью, целиком наполненной жидкостью.

ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- Разработаны методы определения собственных частот для произвольного закона распределения плотности. Достоверность полученных численных результатов подтверждена совпадением с результатом вычисления частот по аналитическим формулам, получаемых из решений дифференциальных уравнений с постоянной частотой плавучести.
- Результаты расчётов показали что, расслоение в криогенной жидкости приводит к уменьшению частоты колебаний поверхностных волн, а наличие свободной поверхности к уменьшению частоты колебаний внутренних волн.
- Воздействие стратифицированной жидкости на движение твёрдого тела в случае цилиндрической полости определяется счетным множеством парциальных движений, а в случае эллипсоидальной полости гидродинамическое воздействие стратифицированной жидкости создается конечным числом парциальных движений.
- Механический эффект неоднородной жидкой массы, совершающей квазипотенциальное движение в полностью наполненном сосуде, будет эквивалентен действию «затвердевшей» жидкой массы и твёрдого тела, обладающего количеством движения \bar{Q}' и моментом количества движения \bar{M}' , присоединенных к несущему твёрдому телу и образующих в совокупности систему твёрдых тел.
- Выполненные численные расчёты показывают отличие инерционных характеристик твёрдого тела с криогенной жидкостью от случая движения тела с однородной жидкостью.
- Расчёты областей неустойчивости вращения твёрдого тела с эллипсоидальной полостью, целиком наполненной стратифицированной жидкостью показали, что устойчивая стратификация жидкости приводит к уменьшению областей неустойчивости вращения твёрдого тела.

1. Ай Мин Вин, Темнов А. Н. Вращение твёрдого тела с эллипсоидальной полостью, целиком наполненной стратифицированной жидкостью // Труды МАИ. Электрон. журн., Вып. 79, 2015. Режим доступа: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=55633> (дата обращения 15.02.2015)
2. Ай Мин Вин, Темнов А. Н. О движении стратифицированной жидкости в полости подвижного твёрдого тела // Труды XXXVII академических чтений по космонавтике. 2013. С. 76.
3. Ай Мин Вин, Темнов А. Н. О движении твёрдого тела с криогенной жидкостью. // Наука и образование, МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электрон. журн., № 12, 2013. Режим доступа: <http://technomag.bmstu.ru/doc/627898.html> (дата обращения 15.02.2015)
4. Ай Мин Вин. Динамика стратифицированной жидкости и твёрдых тел с жидкостью в условиях транспортировки // Сборник научных докладов. XIV международный симпозиум «Уникальные феномены и универсальные ценности культуры». 2012. С. 290-292.
5. Ай Мин Вин. Динамика твёрдого тела с криогенной жидкостью // Международная молодежная научная конференция «XL Гагаринские чтения». 2014. С. 265-266.
6. Ай Мин Вин. Колебания криогенной жидкости в неподвижном баке. // Наука и образование, МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электрон. журн., № 9, 2014. Режим доступа: <http://technomag.bmstu.ru/doc/726215.html> (дата обращения 15.02.2015)
7. Аксенов А. В., Городцов В. А., Стурова И. В. Моделирование обтекания цилиндра стратифицированной идеальной несжимаемой жидкостью. // Препринт ИПМ АН СССР. № 282. 1986. 59 с.

8. Акуленко Л. Д., Нестеров С. В. Определение собственных частот внутренних волн в существенно неоднородной жидкости. // Известия АН. Физика атмосферы и океана. № 6. 1997. С. 112-119.
9. Акуленко Л. Д., Нестеров С. В. Колебания непрерывно стратифицированной жидкости в движущемся сосуде и управление ими. // Прикладная математика и механика. Т. 51. вып. 4. 1987. С. 585-592.
10. Акуленко Л. Д., Нестеров С. В. Колебания твердого тела с полостью, содержащей тяжелую неоднородную жидкость. // Механика твердого тела. №1. 1986. С. 27-36.
11. Акуленко Л. Д., Нестеров С. В. Нерезонансные колебания твердого тела с полостью, содержащей тяжелую двухслойную жидкость. // Механика твердого тела. №2. 1987. С. 52-58.
12. Акуленко Л. Д., Нестеров С. В. Управление колебания неоднородной тяжелой жидкости в подвижном сосуде. // Механика твердого тела. №3. 1985. С. 27-35.
13. Беляков В. П. Криогенная техника и технология. М., 1982. – 272 с.
14. Бершадский В. А. Обобщение экспериментальных данных по конвективному теплообмену в баке с криогенным топливом при вынужденных колебаниях поверхности жидкости, имитирующих условия работы ДУ. РКТ. М.: ЦНТИ «Поиск». 1993. сер. 4. вып. 1. С. 3-20.
15. Бершадский В. А., Галеев А. Г., Денисов К. П. Интенсивность теплообмена в баке системы питания энергоустановки криогенным компонентом топлива. – Альтернативная энергетика и экология. 2008. №11. С. 17-24.
16. Бершадский В. А., Петров В. И. Влияние вынужденных колебаний жидкого топлива на теплообмен в топливном баке. // Космонавтика и ракетостроение. 2013. №3 (72). С. 87-92.
17. Богоряд И. Б., Лаврова Н. П. Численная модель течения жидкости во вращающемся цилиндре с упругими радиально расположенными ребрами // ПМТФ. 2013. Т. 54(2). С. 59–64.

18. Богоряд И. Б., Лаврова Н. П. Численное моделирование вращения твердого тела с заполненной жидкостью полостью, имеющей радиальные ребра // ПМТФ. 2007. Т. 48(2). С. 135–139.
19. Боталов А. Ю. Движение полости, заполненной вязкой жидкостью, вокруг неподвижной точки // В мире научных открытий. Математика, механика, информатика. 2013. № 2.1(38). С. 9–23.
20. Боталов А. Ю. Численное исследование движения тела с полостью, частично или полностью заполненной вязкой жидкостью. Диссертация... канд. физ. мат. наук. Тюмень, 2014. 135 с.
21. Боталов А. Ю., Зубков П. Т. Колебания маятника с полостью, полностью заполненной вязкой несжимаемой жидкостью // Тепловые процессы в технике. 2012. Т. 4(10). С. 449–454.
22. Габов С. А. О решении одной задачи динамики стратифицированной жидкости и его стабилизации при $t \rightarrow \infty$. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1985. Т. 25. № 5. С. 718-730.
23. Габов С. А. Явное решение и существование предельной амплитуды для одной задачи динамики стратифицированной жидкости. // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277. № 5. С. 1039-1043.
24. Габов С. А., Плетнер Ю. Д. К задаче о колебаниях плоского диска в стратифицированной жидкости. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 28. № 1. С. 63-71.
25. Габов С. А., Плетнер Ю. Д. Об одной начально-краевой задаче для уравнения гравитационно-гироскопических волн // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1985. Т. 25. № 11. С. 1689-1696.
26. Габов С. А., Свешников А. Г. Задачи динамики стратифицированных жидкостей. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1986. 288 с.
27. Габов С. А., Свешников А. Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1990. 334 с.

28. Габов С. А., Сундукова А. В. Об одной начально-краевой задаче, возникающей в динамике сжимаемой стратифицированной жидкости. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 30. № 3. С. 457-465.
29. Ганичев А. И., Домашенко А. М., Матвеев А. В., Несмелов А. Г., Темнов А. Н. Теоретическое и экспериментальное исследование параметрических колебаний поверхности жидкости при вертикальных вибрациях сосудов различной формы: В сб. Неустановившиеся процессы в криогенных системах / Под ред. чл.-кор. АН СССР К. С. Колесникова // Тр. МВТУ № 406. –М., 1984.
30. Ганичев А. И., Домашенко А. М., Несмелов А. Г., Темнов А. Н. Колебания стратифицированной по температуре криогенной жидкости. Труды первой международной авиакосмической конференции «Человек-Землы-Космос» Т.4. 1995. С. 292-305.
31. Ганичев А. И., Качура В. П., Темнов А. Н. Малые колебания двух несмешивающихся жидкостей в подвижном цилиндрическом сосуде. – В кн.: Колебания упругих конструкций с жидкостью, Новосибирск, НЭТИ, 1974, С. 82-88.
32. Ганичев А. И., Несмелов А. Г., Домашенко А. М., Темнов А. Н. Определение порога каплеобразования и разрушения свободной поверхности криогенной жидкости при вертикальных вибрациях емкости: В сб. Динамика гидроупругих систем / Под ред. К. С. Колесникова // Тр. МВТУ № 442. –М., 1985.
33. Ганичев А. М., Домашенко А. М., Темнов А. Н., Финогенов В. В. Влияние колебаний бака с криогенной жидкостью на процессы теплообмена. Сб. Науч. Докл. 5 симпозиума. Колебания упругих конструкций с жидкостью. – ЦНТИ «Волна», 1984. С. 72-76. – Библиог.: с. 76 (4 назв.).
34. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости, – М.: Наука, 1972. 392 с.
35. Глиский Н. Т. Внутренние волны. – М.: Наука, 1973. – 126 с.
36. Гонткевича З. Ф. Собственные колебания стратифицированной жидкости в сосудах. // Известия АН. МЖГ. – 1973. – № 1. – С. 147-152.

37. Городцов В. А. Излучение внутренних волн быстро движущимися источниками. // Доклады АН. – 1981. – Т. 256. – № 6. – С. 1375-1378.
38. Городцов В. А., Теодорович Э. В. Линейные внутренние волны в экспоненциально стратифицированной идеальной несжимаемой жидкости. // Препринт ИПМ АН СССР. – 1978. – № 114. – 37 с.
39. Городцов В. А., Теодорович Э. В. Об излучении внутренних волн при равномерном прямолинейном движении локальных и нелокальных источников. // Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана. – 1980. – Т. 16. – № 9. С. 954-961.
40. Городцов В. А., Теодорович Э. В. Черепковское излучение внутренних волн равномерно движущимся источником. // Препринт ИПМ АН СССР. – 1981. – № 183. – 65 с.
41. Дерендяев Н. В. Об устойчивости стационарного вращения цилиндра, заполненного стратифицированной вязкой несжимаемой жидкостью. // Доклады АК СССР. Т. 272. №5. 1983. С. 1073-1076.
42. Дерендяев Н. В., Сандалов В. М. Устойчивость стационарного вращения ротора, заполненного стратифицированной вязкой несжимаемой жидкостью. // Машиноведение. №1. 1986. С. 19-26.
43. Дерендяев Н. В., Сеняткин В. А., Сандалов В. М. Исследования устойчивости режима стационарного вращения ротора вокруг вертикальной оси на гидродинамических подшипниках. // Прикл. Механика. 1987. Т. 23. №12. С. 95-102.
44. Докучаев Л. В. Нелинейная динамика летательного аппарата с деформируемыми элементами – М.: Машиностроение. 1987. – 231 с.
45. Докучаев Л. В., Рвалов Р. В. Об устойчивости стационарного вращения твердого тела с полостью, содержащей жидкость. // Механика твердого тела. № 2, 1973, С. 6-14.
46. Домашенко А. М., Ганичев А. И., Несмелов А. Г. Хранение криогенных жидкостей в режиме вынужденных колебаний. Труды первой международной авиакосмической конференции «Человек-Землы-Космос» Т.4. 1995. С. 306-315.

47. Домашенко А. М., Темнов А. Н. Тепловые эффекты колебаний криогенных жидкостей. Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. М: 2008. С. 201-214.
48. Домашенко В. А. Тепломассообмен и гидродинамика в криогенных топливных системах на объектах наземного и морского базирования. – Альтернативная энергетика и экология. 2009. №3. С. 12-60.
49. Досаев М. З., Самсонов В. А. Об устойчивости вращения тяжелого тела с вязким наполнителем // ПММ. 2002. Т. 66(3). С. 427–433.
50. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Собр. соч. Т. II., Гостехиздат, 1948. 143 с.
51. Ильиных Ю. С., Кистович Ю. В., Чашечкин Ю. Д. Возбуждение пучков гармонических внутренних волн в непрерывно стратифицированной жидкости: теория и эксперимент. // Известия АН. Физика атмосферы и океана. 1999. Т. 26. № 7. С. 744-754.
52. Ишлинский А. Ю., Темченко М. Е. О малых колебаниях вертикальной оси волчка, имеющего полость, целиком наполненную идеальной несжимаемой жидкостью. «Ж. прикл. мех. и техн. физ.», 1960, № 3, С. 65-75.
53. Калиниченко В. А. Нелинейные эффекты в поверхностных и внутренних волнах Фарадея. Автореферат диссертации, докт. техн. наук. Москва, 2010. 29 с.
54. Калиниченко В. А. О разрушении волн Фарадея и формировании струйного всплеска // Изв. РАН. МЖГ. 2009. № 4. С. 112-122.
55. Калиниченко В. А., Секерж-Зенькович С. Я. О срыве параметрических колебаний жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 1. С. 128-136.
56. Калиниченко В. А., Секерж-Зенькович С. Я. Экспериментальное исследование волн Фарадея максимальной высоты // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 6. С. 120-126.
57. Калиниченко В. А., Секерж-Зенькович С. Я. Экспериментальное исследование вторичных стационарных течений в поверхностных волнах Фарадея // Изв. РАН. МЖГ. 2008. № 1. С. 141-148.

58. Каменкович В. М. Основы динамики океана. – Л.: Гидрометеиздат. 1973. 240 с.
59. Карапетян А. В., Проконина О. В. Об устойчивости равномерных вращений волчка с полостью, заполненной жидкостью, на плоскости с трением // ПММ. 2000. Т. 64(1). С. 85–91.
60. Карапетян А. В., Сумин Т. С. Перманентные вращения подвешенного на стержне тела с вязким наполнителем // ПММ. 2008. Т. 72(3). С. 355–373.
61. Кистович Ю. В., Чашечкин Ю. Д. Генерация монохроматических внутренних волн в вязкой жидкости // ПМТФ. 1999. Т. 40. № 6. С. 31-40.
62. Кистович Ю. В., Чашечкин Ю. Д. Геометрия и энергетика пучков внутренних волн. // Известия АН. Физика атмосферы и океана. 1997. Т. 33. № 1. С. 41-47.
63. Кистович Ю. В., Чашечкин Ю. Д. Задача генерации монохроматических внутренних волн: точное решение и модель силовых источников // Доклады АН. 1997. Т. 355. № 1. С. 54-57.
64. Кистович Ю. В., Чашечкин Ю. Д. Некоторые точно решаемые задачи излучения трехмерных периодических внутренних волн // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 1. С. 52-61.
65. Кистович Ю. В., Чашечкин Ю. Д. Нелинейная генерация периодических внутренних волн пограничным течением на вращающемся осесимметричном теле. // Доклады АН. 1999. Т. 367. № 5. С. 636-639.
66. Кистович Ю. В., Чашечкин Ю. Д. Новый механизм нелинейной генерации внутренних волн // ДАН. 2002. Т. 382. № 6. С. 772-776.
67. Кистович Ю. В., Чашечкин Ю. Д. Отражение пучков внутренних гравитационных волн от плоской жесткой поверхности. // Известия АН Прикладная математика и механика. 1995. Т. 59. № 4. С. 607-613.
68. Кистович Ю. В., Чашечкин Ю. Д. Точное решение одной линеаризованной задачи излучения монохроматических внутренних волн в вязкой жидкости. // Известия АН. Прикладная математика и механика. 1999. Т. 63. Вып. 4. С. 611-619.
69. Колесников К. С. Динамика ракет. М., Машиностроение, 2003. 520 с.

70. Колесников К. С. Жидкостная ракета как объект регулирования. – М.: Машиностроение, 1969. 298 с.
71. Коняев К. В., Сабинин К. Д. Волны внутри океана. – Л.: Гидрометеиздат, 1992. 272 с.
72. Копачевский Н. Д. О колебаниях несмешивающихся жидкостей. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1973. Т. 13. № 5. С. 1249-1263.
73. Копачевский Н. Д. Применение метода С. Л. Соболева в задаче о колебаниях идеальной капиллярной вращающейся жидкости. Ж.В.М. и М.Ф., Т.16, № 2, 1976, С.426-439.
74. Копачевский Н. Д., Темнов А. Н. Колебания идеальной стратифицированной жидкости в цилиндрическом бассейне при переменной частоте плавучести. // Диф. Уравн. Т. 24. 1988. С. 1784-1796.
75. Копачевский Н. Д., Темнов А. Н. Колебания стратифицированной жидкости в бассейне произвольной формы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1986. Т. 26. № 5. С. 734-755.
76. Копачевский Н. Д., Темнов А. Н. Свободные колебания вязкой стратифицированной жидкости в сосуде // Деп. в ВИНТИ 16.08.1983, № 4531-83 ДЕП. – 45 с.
77. Копачевский Н. Д., Цветков Д. О. Колебания стратифицированной жидкости // Современная математика. Фундаментальные направления. 2008. Т. 29. С. 103-130.
78. Кочин Н. Е., Кибель И. Л., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, физматгиз, Т.1. 1963. 583 с.
79. Краусс В. Внутренние волны. – Л.: Гидрометеиздат, 1968. 272 с.
80. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. – М.: Мир, 1981. 600 с.
81. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошной среды. – М.: “НАУКА” 1986. 735 с.
82. Лыков А. В., Берковский Б. М. Конвекция и тепловые волны. – М.: Энергия 1974. 336 с.

83. Макаренко Н. И. Сопряженные потоки и гладкие боры в слабо стратифицированной жидкости // ПМТФ. 1999. №2. С. 69-78.
84. Макаров С. А., Неклюдов В. И., Чашечкин Ю. Д. Пространственная структура пучков двумерных монохроматических внутренних волн в экспоненциально стратифицированной жидкости. // Известия АН. Физика атмосферы и океана. 1990. Т. 26. № 7. С. 744-754.
85. Макаров С. А., Чашечкин Ю. Д. Присоединенные внутренние волны в жидкости с экспоненциальным распределением плотности. // ПМТФ. 1981. № 6. С. 47-54.
86. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М., Машиностроение, 1968, 532 с.
87. Миропольский Ю. З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. – Ленинград: Гидрометеиздат, 1981. 302 с.
88. Моисеев Н. Н. Вариационные задачи в теории колебаний ограниченного объема жидкостью // Вариационные методы в задачах колебаний жидкости и тела с жидкостью. – М.:, 1962. С. 9-118.
89. Моисеев Н. Н., Петров А. А. Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. М.: ВЦ АН СССР, 1966. 269 с.
90. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. Наука, М., 1966. 440 с.
91. Морозов Е. Г. Океанские внутренние волны. – М., Наука, 1985, 151 с.
92. Мотыгин О. В., Стурова И. В. Волновые движения в двухслойной жидкости, вызванные малыми колебаниями цилиндра, пересекающего границу раздела // Изв. РАН, МЖГ. 2002. № 4. С. 105-119.
93. Нариманов Г. С., Докучаев Л. В., Луковский И. А. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. – М.: Машиностроение, 1977. 203 с.
94. Неклюдов В. И., Чашечкин Ю. Д. Экспериментальные исследования генерации и взаимодействия двумерных монохроматических внутренних волн. // Препринт ИПМ АН СССР. 1988. № 356. 52 с.

95. Нестеров С. В. Собственные частоты внутренних волн в жидкости с произвольной частотой Брента-Вяйсяля. // Доклады АН СССР. 1983. Т. 271. № 3. С. 570-573.
96. Охоцимский Д. Е. К теории движения тела с полостями, частично заполненными жидкостью. ПММ, 1956, Т. 20, вып. I, С. 3-20.
97. Петров А. Г. Аналитическая гидродинамика, учеб. пособ.: для вузов. – М.: ФИЗИМТЛИТ, 2010. 520 с.
98. Пивоваров М. Л., Черноусько Ф. Л. Колебания твердого тела с тороидальной полостью, заполненной вязкой жидкостью // ПММ. 1990. Т. 54(2). С. 164–168.
99. Полежаев В. И., Эффект максимума температурного расслоения и его приложения, ДАН СССР, Серия Гидромеханика, Т. 218, № 4, 1974, С. 783-786.
100. Рабинович Б. И. Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. М., Мишиностроение, 1975. 416 с.
101. Ринг. Э. Двигательные установки ракет на жидком топливе. // Перевод на английского. Издат. «Мир», М: 1966. 392 с.
102. Руденко Т. В. Об устойчивости стационарных движений гиростата с жидкостью в полости // ПММ. 2002. Т. 66(2). С. 183–191.
103. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости. – М.: ИЛ, 1963. 256 с.
104. Смирнов В. И. Курс высшей математики, Т. 2, М., 1974. 656 с.
105. Соболев С. Л. О движении симметричного волчка с полостью, наполненной жидкостью "Ж. прикл. мех. и техн. физ.", 1960, № 3, С. 20-55.
106. Степанянц Ю. А., Стурова И. В., Теодорович Э. В. Линейная теория генерации поверхностных и внутренних волн // Итоги науки и техники. МЖГ. 1987. Т. 21. С. 93-179.
107. Стурова И. В. Гидродинамические нагрузки, действующие на колеблющийся цилиндр, погруженный в стратифицированную жидкость, при наличии ледяного покрова // Прикладная механика и техническая физика. 2011. Т. 52. № 3. С. 102-115.

108. Стурова И. В. Колебания кругового цилиндра в слое линейно стратифицированной жидкости // Изв. РАН, МЖГ. 2001. № 3. С. 155-164.
109. Темнов А. Н, Ай Мин Вин. О движении стратифицированной жидкости в полости подвижного твёрдого тела. Вестник МГТУ им. Баумана. Сер. Естественные науки, 2012. С. 86-101.
110. Темнов А. Н. Колебания идеальной стратифицированной жидкости в неподвижном сосуде // Известия АН СССР, Механика жидкости и газа, 1983. С. 98-106.
111. Темнов А. Н. Колебания стратифицированной жидкости в ограниченном объеме: Диссертация... канд. физ. мат. наук. Москва, 1984. 192 с.
112. Темнов А. Н. Малые колебания идеальной неоднородной самогравитирующей жидкости. Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. “Естественные науки”. 2002. № 2, С. 25-35.
113. Темнов А. Н. О спектре малых колебаний непрерывно стратифицированной жидкости. – В кн.: Нелинейные проблемы аэрогидроупругости. Труды семинара, Казань. 1979. Вып. 11. С. 183-193.
114. Темнов А. Н. Об уравнениях сферического движения твердого тела с неоднородной жидкостью. // Труды МВТУ, 1979. № 306. – С. 31-40.
115. Темнов А. Н. Устойчивость равномерных вращений твердого тела с криогенной жидкостью. // Труды первой международной авиакосмической конференции “человек-земля-космос”, 1995, С. 310-317.
116. Темнов А. Н. Устойчивость стационарных вращений неоднородной жидкости в эллипсоидальной полости. – Изв. ВУЗов, Машиностроение, 1979, № 7, С. 149-151.
117. Темченко Т. П. Спектральные и эволюционные задачи колебаний многослойных стратифицированных жидкостей: Диссертация... канд. физ. мат. наук. Симферополь, 1989. 147 с.
118. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях. – М.: Мир, 1977. – 432 с.
119. Толстов Г. П. Ряды Фурье. М.: Наука, 1980. 381 с.

120. Тэйн У. Разработка уточнённого метода расчёта продольных колебаний упругого ЛА: Диссертация... канд. тех. наук. Москва, 2008. 176 с.
121. Фёдоров В. И. Исследование тепломассообмена в баках кислородно-углеводородных и кислородно-водородных ракет-носителей во время работы двигательной установки. – Известия РАН. Энергетика. 2012. №2. С. 43-53.
122. Филлипс О. М. Динамика верхнего слоя океана. – М.: Мир, 1969. – 267 с.
123. Цветков Д. О. Малые движения вязкой стратифицированной жидкости // Межведомственный научный сборник "Динамические системы". 2007. Вып. 22. – С. 73-82.
124. Цветков Д. О. Малые движения идеальной стратифицированной жидкости // Ученые записки Таврического национального университета. Математика. Механика. Информатика и Кибернетика. 2007. Т. 20 (59). № 1. – С. 80-85.
125. Цветков Д. О. Малые движения системы вязких стратифицированных жидкостей // Межведомственный научный сборник "Динамические системы". 2007. Вып. 23. С. 63-71.
126. Цветков Д. О. Малые движения стратифицированной жидкости во вращающемся сосуде // Таврический вестник информатики и математики. 2003. Вып. 1. – С. 140-149.
127. Цветков Д. О. Нормальные колебания системы вязких стратифицированных жидкостей // Межведомственный научный сборник "Динамические системы". 2008. Вып. 24. – С. 39-48.
128. Чашечкин Ю. Д., Кистович Ю. В. Монохроматические внутренние волны в произвольно стратифицированной вязкой жидкости // Доклады АН. 1998. Т. 359. № 1. – С. 112-115.
129. Чашечкин Ю. Д., Макаров С. А., Беляев В. С. Присоединенные внутренние волны. // Препринт ИПМ АН СССР. М., 1983. № 214. – 79 с.
130. Черноусько Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М., ВЦ АН СССР, 1968.

131. Akyildiz H. A numerical study of the effects of the vertical baffle on liquid sloshing in two-dimensional rectangular tank // *Journal of Sound and Vibration*. 2012. Vol. 331. P. 41–52.
132. Akyildiz H., Celebi M. S. Numerical computation of pressure in a rigid rectangular tank due to large amplitude liquid sloshing // *Turk. J. Engin. Environ. Sci.* 2001. Vol. 25. P. 659–674.
133. Chang W. L., Stevenson T. N. Internal waves in a viscous atmosphere. // *J. Fluid Mech.*, 1975, V. 72, part 4, P. 773-786.
134. Cho J. R., Lee H. W. Numerical study on liquid sloshing in based tank by nonlinear finite element method // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2004. Vol. 193. P. 2581–2598.
135. Dodge F. T. The new ‘Dynamic behavior of liquids in moving containers’. San Antonio: Southwest Research Institute, 2000. 195 p.
136. Dynamics of Oceanic Internal Gravity Waves, II. // *Proceedings Aha Huliko'a Hawaiian Winter Workshop University of Hawaii at Manoa January 18-22, 1999*, 294 p.
137. Ekman V. W. On Dead-Water. // *The Norwegian North Polar Expedition 1893 1896. Scientific results*. Edited by F. Nansen., V.5, Leipzig, Brockhaus, 1906, 162 p.
138. Laws P., Stevenson T. N. Measurements of a laminar wake in a confined stratified fluid. // *J. Fluid Mech.*, 1972, V. 54, part 4, P. 719-744.
139. Love A. Wave motion in a Heterogeneous heave liquid. – *Proc. Lond.Math. Soc.*,* 1891, V.22, p. 307-316.
140. Matthew E. Moran, Nancy B. McNelis, and Maureen T. Kudlac. Experimental results of hydrogen slosh in a 62 cubic foot (1750 liter) tank. AIAA-94-3259, 1994.
141. Peat K. S., Stevenson T. N. The phase configuration of waves around a body moving in a rotating stratified fluid. // *J. Fluid Mech.*, 1976, V. 75, part 4, P. 647-656.
142. ROBERT J. KRANE and LEROY A. HOLMES. Experimental Study of the Effects of Low Bond Number Sloshing on Thermal Stratification, *AIAA Journal*, Vol. 11, No. 9 (1973), P. 1219-1220.
143. Stevenson T. N. Axisymmetric internal waves generated by a traveling oscillating body. // *J. Fluid Mech.*, 1969, V. 35, part 2, P. 219-224.

144. Stevenson T. N. Some two-dimensional internal waves in a stratified fluids. // J. Fluid Mech., 1968, V. 33, part 4, P. 715-720.
145. Stevenson T. N. The phase configuration of internal waves around a body moving in a density stratified fluid. // J. Fluid Mech., 1973, V. 60, part 4, P. 759-767.
146. Stevenson T. N., Thomas N. H. Two-dimensional internal waves generated by a traveling oscillating cylinder. // J. Fluid Mech., 1969, V. 36, part 3, P. 505-511.
147. Wu C. H., Faltinsen O. M., Chen B. F. Numerical study of sloshing liquid in tanks with baffles by time-independent finite difference and fictitious cell method // Computers & Fluids. 2012. Vol. 63. P. 9–26.
148. Общероссийская еженедельная газета (ВПК), №10(576), 18-24 марта 2015 г.
149. <http://www.mk.ru/science/article/2011/11/22/645484-obnarodovan-plan2020-po-sozdaniyu-pervoy-zapravochnoy-stantsii-v-kosmose.html>
150. <http://www.vokrugsveta.ru/news/12716/>
151. <http://www.dailytechinfo.org/space/2207-pervaya-kosmicheskaya-zapravochnaya-stanciya-dlya-geosinxronnyx-sputnikov-budet-zapushhena-v-2015-godu.html>
152. <http://epizodsspace.airbase.ru/bibl/tvorch-nasl-kor/02-4.html>