

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ.  
МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ) «МАИ»

---

*На правах рукописи*



**Нгуен Дак Куанг**

**ВЛИЯНИЕ ТЕРМОЦИКЛИЧЕСКИХ НАГРУЗОК  
НА МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРИАЛА  
КОМПОЗИТНЫХ ПАНЕЛЕЙ**

Специальность 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени кандидата  
технических наук

Научный руководитель  
д.т.н. проф. А. А. Дудченко

Москва – 2015

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
Глава 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ.....	10
1.1. Современное состояние проблем механики деформирования композиционных материалов (КМ).....	10
1.2. Краткий обзор о задаче термоупругости в рамках градиентной теории для многослойных композиционных конструкций.....	13
1.3. Деградация механических характеристик в процессе эксплуатации композиционных материалов.....	16
1.4. Некоторые сведения об усталостном поведении слоистых композитов при термоциклировании.....	19
Глава 2. ГРАДИЕНТНАЯ МОДЕЛЬ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНОЙ КОМПОЗИТНОЙ ПАНЕЛИ.....	22
2.1. Общая постановка градиентной модели термоупругости.....	22
2.2. Расчетная модель многослойной среды, в которой каждый слой изотропный.....	26
2.2.1. Случай нагрева в направлении одной из координат.....	28
2.2.2. Примеры тестового расчета.....	33
2.2.3. НДС двухслойной изотропной структуры, неравномерно-нагретой в направлении нормали к поверхности.....	36
2.3. Расчетная модель многослойной композитной панели под действием температуры.....	41
2.3.1. НДС многослойной композитной панели под действием постоянного температурного поля.....	54
2.3.2. НДС многослойной композитной панели под действием переменного температурного поля.....	59
2.4. Выводы к второй главе.....	63
Глава 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ С УЧЕТОМ ВОЗДЕЙСТВИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ.....	64

3.1. Краткая характеристика процессов накопления повреждений в слоистых композитных панелях .....	64
3.2. Микромеханическая модель накопления повреждений .....	67
3.3. Модели деградации механических характеристик при повреждении в слоях .....	74
3.4. Моделирование процесса деградации механических характеристик слоистого композита при циклическом нагружении по данным испытаний .....	78
3.5. Определение параметров модели .....	84
3.6. Моделирование процесса деградации свойств с учетом воздействия температуры.....	89
3.7. Выводы к третьей главе.....	93
Глава 4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДЕГРАДАЦИИ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ОБРАЗЦОВ УГЛЕПЛАСТИКА ПРИ ТЕРМОЦИКЛИРОВАНИИ.....	94
4.1. Об испытательной машине для проведения испытания .....	94
4.2. Описание процесса испытания .....	95
4.2.1 Подготовка образцов .....	95
4.2.2. Испытание образцов на термоциклирование.....	96
4.2.3. Испытание образцов на растяжение .....	97
4.3. Результат испытания.....	98
4.4. Идентификация свойств материала с помощью программы «DIGIMAT».....	105
4.5. Расчет деградации механических характеристик образца при термоциклировании .....	108
4.6. Выводы к четвёртой главе.....	112
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	113
ЛИТЕРАТУРА.....	114

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность работы.** Широкое применение нашли композиционные материалы в авиационной и космической технике, где используются такие их свойства, как высокие удельные характеристики прочности и жесткости, стойкость к воздействию температур и к вибрационным нагрузкам, малый удельный вес и др. Из этих материалов изготавливаются элементы планера самолета, отсеки ракет и космических аппаратов. При эксплуатации летательные аппараты и космические объекты, которые находятся на околоземной орбите и в затененных областях космоса, подвергаются неоднократным воздействием нестабильных температурных режимов (диапазон изменения температур лежит в пределах  $113\text{ K} - 393\text{ K}$ ) [59]. В результате конструкции из композиционных материалов за срок службы испытывают в полете многократные циклические температурные перепады, которые воздействуют как нагрузки от температурного поля. Из-за разницы между коэффициентом линейного температурного расширения волокна и матрицы на порядок и более композит будет испытывать переменные термические воздействия, что в результате приводит к значительному изменению его механических характеристик (модулей упругости) и разрушению конструкций. К исследованию температурных воздействий и исследованию поведения разрушения композитов под действием циклических механических и температурных нагрузок приступили сравнительно недавно. Однако все, известные нам работы ограничивались, как правило, изучением закономерностей термоусталостного разрушения в условиях стационарных режимов циклических термических напряжений. В связи с этим исследования процессов накопления и деградации механических характеристик композиционных материалов при термоциклировании имеют важное значение для обеспечения безопасного полета летательных аппаратов и увеличения их надежности и ресурса. Поэтому, тема диссертации, посвященная исследованием влияния термоциклических

нагрузок на механические характеристики материала композитных панелей является актуальной.

### **Степень разработанности диссертации**

Степень разработанности диссертации полностью соответствует названию диссертации и поставленной цели работы.

**Цель работы.** Целью диссертационной работы является исследование влияния циклического воздействия температуры на характер накопления дефектов и изменение величин механических характеристик материала. Поставленная цель достигается на основании решения следующих задач:

1. Построение градиентной модели термоупругости многослойной композитной панели для определения НДС.
2. Построение моделей деградации механических характеристик (модулей упругости) слоев и эффективных характеристик многослойных композиционных материалов при циклическом нагружении с учетом воздействия температуры.
3. Проведение экспериментальных исследований по определению изменения величин механических характеристик при термоциклировании и сравнение полученных опытных данных испытания с теоретическими результатами для проверки адекватности разработанного метода.

### **Научная новизна работы** заключается в следующем:

1. Разработана методика расчета НДС для многослойной композитной панели в рамках градиентной модели термоупругости.
2. Построена модель деградации механических характеристик слоистого композита при циклическом нагружении.
3. Проведено исследование влияния воздействия температуры на изменение свойств механических характеристик.
4. Проведено сравнение влияния циклических нагрузок без учета температуры и с учетом температуры на изменение значений механических характеристик композиционного материала.
5. Проведенные автором экспериментальные исследования подтвердили правильность выбора модели деградации для решения задачи определения

накопления дефектов, влияющих на свойства материала композитных панелей при термоциклировании.

**Теоретическая и практическая значимость работы** заключается в разработке расчетного метода, основанного на использовании градиентной модели термоупругости, позволяющего получить изменение НДС и механических характеристик в многослойном композиционном материале и оценить влияние температурного воздействия на свойства композиционного материала при эксплуатации авиационной техники.

#### **Методы исследования.**

При решении поставленных задач использовались вариационный принцип и аналитические методы моделирования процессов деградации механических характеристик композиционного материала. Для идентификации свойств монослоя композита привлекалась система компьютерного моделирования свойств композиционных материалов «DIGIMAT». Для проведения конечно-элементных расчетов был использован программный комплекс «ANSYS». Для аналитических расчетов привлекалась система символьных вычислений «MATHEMATICA». Экспериментальное исследование процессов деградации свойств композитов при термоциклировании проводилось на испытательной машине «INSTRON» с применением программы обеспечения «BLUEHILL 3» для измерений и регистрации параметров.

**Достоверность результатов** обосновывается использованием строгих подходов градиентной модели теории упругости, механики слоистых композитов и математических методов, а также совпадением результатов аналитических и численных расчетов, полученных автором, с экспериментальными данными, приведенными в литературе, с результатами расчетов других авторов, а также с результатами экспериментальных исследований, проведенных самим автором.

**На защиту выносятся** результаты проведенных автором исследований по вопросам теории расчета НДС многослойного композита, методики моделирования процессов деградации механических свойств с учетом

циклического воздействия температуры, результаты экспериментальных исследований влияния термоциклирования на механические характеристики образцов из ПКМ, сравнение результатов испытаний с результатами моделирования.

Материалы диссертации **внедрены** в читаемый курс «Термоупругость композиционных материалов» на кафедре «Прочность авиационных и ракетно-космических конструкций».

**Апробация работы.** Основные результаты диссертационной работы доложены на международных конференциях, семинарах и симпозиумах, в том числе:

1. Московская молодежная научно-практическая конференция «Инновация в авиации и космонавтике-2013», 16-18 апреля 2013 г., Москва, Российская Федерация.

2. XIX международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкции и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова, 18-22 февраля 2013 г., Кременки, Калужская область, Российская Федерация.

3. Московская молодежная научно-практическая конференция «Инновация в авиации и космонавтике-2014», 22-24 апреля 2014 г., Москва, Российская Федерация.

4. Международная конференция «Деформирование и разрушение композиционных материалов и конструкций», 10-13 ноября 2014 г., Москва, Российская Федерация.

5. Международный научный семинар «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы», 8-10 декабря 2014 г., Москва, Российская Федерация.

**Публикации.** По результатам научных исследований в рамках диссертационной работы опубликовано 7 работ, в том числе 3 статьи в периодических изданиях, включенных в перечень ВАК РФ [26, 28, 31]; 4

публикации в тезисах докладов международных конференций, семинаров и симпозиумов [27, 29, 30, 32].

**Личный вклад.** Постановка задач исследования; расчет НДС многослойного композита с учетом межслоевых прослоек при температурном воздействии; постановка задачи для среды, состоящей из ортотропных слоев, с использованием модели градиентной теории термоупругости; тестирование аналитической модели на основе сопоставления с результатами конечно-элементного моделирования; результаты разработки метода выбора параметров модели деградации механических характеристик слоистых композитов; программная реализация используемых математических моделей; проведенные расчеты и сравнение расчетных данных с известными экспериментальными данными; проведение испытания, обработка и сравнение теоретического расчета с данными испытания в диссертационной работе выполнены лично соискателем.

**Объем и структура работы.** Диссертационная работа состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы. Она содержит 121 страницу, из них 8 занимает список использованных источников. Список используемой литературы включает 72 наименований (из них 26 на иностранном языке).

Во введении обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи исследования, отражены научная новизна, практическая значимость, приведены положения, выносимые на защиту, сведения об апробации результатов работы.

В первой главе представлен обзор научных литератур по поставленным в диссертационной работе задачам.

Во второй главе излагается расчетная модель для определения НДС многослойной композитной структуре с учетом перепада температуры по толщине панели.

В третьей главе решается задача циклического воздействия нагрузки на многослойный материал панели с учетом и без учета воздействия температуры.

В четвертой главе описана экспериментальная машина, дается описание последовательности проведения экспериментов, а также представлены результаты экспериментальных данных и сравнение их с теоретическими расчетами.

Заключение содержит основные результаты и выводы диссертационной работы.

## Глава 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

### 1.1. Современное состояние проблем механики деформирования композиционных материалов (КМ)

Широкое применение композиционных материалов в силовых конструкциях с использованием постоянно совершенствующимися свойствами волокон требует непрерывного совершенствования расчетных методов и изучения поведения материалов в разных условиях нагружения для повышения трещиностойкости, долговечности и надежности в работе материала в условиях эксплуатации. В последние годы интенсивное развитие получили направления исследований, позволяющие изучить и уточнить свойства как однослойных, так и многослойных с различной укладкой волокон в структуре на микроуровне материала. По мере изучения свойств композиты все шире находят применение в различных областях машиностроения. Интерес к широкому использованию волокнистых материалов в различных изделиях современной техники связан с такими свойствами этих материалов, как высокая удельная прочность и жесткость, звуко- и теплоизоляционные свойства, демпфирующие и вибропоглощающие характеристики и другие свойства. Поскольку современными основными элементами силовой конструкции являются тонкостенные изделия в виде панелей, стержней и оболочек, то они и являются объектом многочисленных и разнообразных теоретических и экспериментальных исследований. Успешное применение волокнистых многослойных материалов требует постоянного совершенствования методов проектирования и расчета, учитывающих новые свойства композитов и их поведение при эксплуатации. Особое внимание следует обратить на многообразие форм разрушения, основными из которых являются разрыв волокон, разрушение связующего в слое, расслоение многослойной структуры. В процессе эксплуатации композиционных материалов, как правило, наблюдается падение их основных механических свойств, а именно их

жесткости и прочности. Снижение жесткости и прочности зависит от целого ряда процессов разрушения, протекающих в КМ. Механизм разрушения композитов зависит от множества параметров: свойств волокон и матрицы, схемы укладки слоев, особенностей отверждения, воздействия температуры, содержания влаги и т.д. К тому же, КМ разрушаются по-разному под действием статических или циклических нагрузок. Одна из актуальных проблем механики композитов связана с достоверным описанием механических характеристик композиционных материалов в реальном конструктивном элементе, ибо для этих материалов характер напряженного состояния может внести существенные поправки в реализуемые свойства материала. Следовательно, создание современных композитных конструкций с заданным комплексом эксплуатационных характеристик невозможно осуществить без достаточно полного описания механических параметров композиционного материала конструкции. Эти факторы вносят существенные изменения в методы расчета и проектирование композитных конструкций. Необходимо отметить, что при создании конструкций из композитов одновременно создается и материал этой конструкции, так как материал представляет сложную многослойную структуру, где каждый слой имеет свое необходимое направление, то появляется широкая возможность целенаправленно управлять как свойствами создаваемой конструкции, так и долговечностью работы конструкции. В широком диапазоне можно регулировать жесткостные и прочностные характеристики, а также динамические свойства. С появлением современных высокопрочных и высококомодульных композитов возникли новые возможности в создании рациональных и оптимальных конструкциях минимальной массы, тем более, что изготовление осуществляется, чаще всего, оптимальным технологическим процессом. Это позволяет уменьшить количество соединений в изделии, создавать интегральные конструкции и, тем самым, существенно снизить массу и повысить работоспособность и надежность конструкций. Композиционные материалы на основе современных высокопрочных и высококомодульных типов армирующих волокон являются важным, неиспользованным пока полностью

резервом повышения прочности, эффективности, снижения массы и совершенства современных конструкций различного назначения, что подтверждается многочисленными публикациями по различным направлениям использования композиционных конструкций во многих отраслях машиностроения. Использование композиционного материала в изделиях позволяет даже при простой замене металла на композит снизить массу элемента на 20-30% и его стоимость [11, 56]. Их рациональное использование всегда массы и стоимости конструкции. Таким образом, имеющийся положительный опыт применения волокнистых материалов дает основание считать, что они и в дальнейшем найдут широкое использование в несущих конструкциях. К настоящему времени основные результаты развития механики композиционных материалов изложены в монографиях [5, 7, 8, 9, 14, 20, 23, 24, 37, 38, 40, 41]. В них подробно представлены различные по сложности расчетные модели материалов. Рассмотрены особенности поведения материалов при их нагружении, в том числе, особенность поведения многослойных волокнистых композитов, которые составляют основу силовых конструкций. Проведен анализ работы многослойной структуры при растяжении и изгибе. При растяжении на свободных поверхностях возникают кромочные эффекты [22] в виде межслойных напряжений из-за разных жесткостных характеристик слоев. Эти напряжения обеспечивают поддержание в слоистом композите состояние кинематической совместности. В реальных конструктивных элементах эти эффекты само уравновешены и имеют местное значение, но могут иметь важное значение в механике разрушения многослойных композитов. Для тонкостенных многослойных конструкций в виде пластин и оболочек дана оценка соотношения геометрических параметров тонкостенных элементов при статическом нагружении. При отношении толщины элемента  $h$  к его наименьшему размеру  $l$  меньше 10 межслоевой податливостью можно пренебрегать [9]. Там же дан подробный анализ поведения многослойной структуры материала в пластинах и оболочках и построение соответствующих теорий расчета и строится замкнутая система соответствующих разрешающих уравнений. Для тонких пластин и

оболочек ( $h/l \leq 0,02$ ) используются обычные соотношения классической теории. Для многослойных структур, когда ( $h/l \geq 0,02$ ), строится теория с приближенным (осредненным по толщине) учетом деформации сдвига. Результаты по расчету тонкостенных элементов конструкций из анизотропных материалов приведены в монографиях [1, 2, 13, 15, 16, 20, 24, 41, 42, 43]. В этих работах проанализирована и установлена правомочность использования классической теории расчета тонких многослойных пластин и оболочек. А также рассмотрены вопросы построения уточненных вариантов теорий неоднородных пластин и оболочек, позволяющих учесть такие особенности слоистых материалов, как низкая жесткость по отношению к касательным и трансверсальным нормальным напряжениям. Все эти теории строятся или на основе гипотез, или аналитическими методами сведения трехмерной задачи теории упругости к двумерной. Подробно этот вопрос освещен в обзоре [11]. Там же отражено содержание основных работ, а также работ за 1978–1981 гг. по прикладным теориям расчета и проектирования анизотропных пластин и оболочек.

Достижения в развитии расчетных методов и получении различных конструкций из композитов даны в обзорных и проблемных работах [2, 6, 7, 13, 35, 37, 38, 42, 43, 45, 55, 56]. Рассмотренные работы позволяют оценить достижения в практическом использовании волокнистых материалов в конструкциях и в развитии методов расчета этих конструкций.

## **1.2. Краткий обзор о задаче термоупругости в рамках градиентной теории для многослойных композиционных конструкций**

Известно, что классические модели теории упругости, методы механики композитов не позволяют реалистично описывать эффективные механические и физические свойства микро/нано– структурированных материалов, когда плотность внутренних границ в исследуемом материале весьма высока. Так, например, не удастся адекватно описать зависимость эффективных жесткостей

от размера включений, даже если использовать модели трех фаз. В связи с этим, применение градиентных теорий к подобным задачам становится весьма перспективным, т.к. градиентные («моментные») взаимодействия, обеспечивающие большую гладкость сопряжения на границах контакта фаз, являются естественными для подобных задач, ибо описывают локализованные около границ раздела фаз (компонент композита) поля напряжений, характеризуемые масштабным параметром, имеющим смысл протяженности этих локальных взаимодействий. С другой стороны, градиентные эффекты могут быть существенными при уточнении полей напряжений в составных слоистых системах, что важно для оценки прочности таких систем, для объяснения экспериментально обнаруженных особенностей разрушения различного рода тонкослойных структур. Поэтому в диссертации, для уточненного анализа напряжений многослойных композитных панелей будут применяться неклассические модели механики композитных материалов – градиентные модели. Ниже приводится краткий обзор исследований, относящихся к градиентным теориям.

Модели градиентной теории упругости исследуются более 40 лет в работах российских и зарубежных авторов [10, 44, 47-49, 52, 54, 70, 71]. Основной особенностью градиентных теорий является определение напряжений с учетом повышенных порядков производных от перемещений. Таким образом, градиентные модели позволяют учитывать локальные эффекты в распределении напряжений и деформаций в области границ сред. Градиентные модели при решении практических задач оказываются эффективными для учета масштабных эффектов в материалах с характерным размером структуры, сопоставимым с протяженностью локальных градиентных полей. Примерами таких сред, являются тонко-многослойные композиты, композиты с микро/нано- включениями, ультратонкие пластины и т.д.

Для построения математических моделей часто используется вариационный подход. Вариационные методы являются весьма эффективным инструментом моделирования сред различной сложности, позволяя получать

энергетически согласованные математические модели для сред различной сложности. Так, в соответствии с вариационным методом Л. И. Седова [36] определение списка обобщенных кинематических переменных (что эквивалентно определению кинематической модели) и вида объемной плотности лагранжиана, позволяет получить определяющие соотношения модели систему уравнений равновесия (движения), записанную в кинематических переменных. В работах [4, 17, 18, 33, 36] используется «кинематический» вариационный принцип, первоначально развитый в работах [25, 62, 64]. В соответствии с этим принципом общий вид функционала энергии для исследуемой среды находится по заданным кинематическим связям. Спектр внутренних взаимодействий полностью определяется системой кинематических связей, реализующихся в среде. В результате предложены варианты теории сред с сохраняющимися дислокациями, которые обобщают известные модели Коссера [50], Миндлина [65, 66], Тупина [71], и Аэро-Кувшинского [3]. Приводится описание актуальных с прикладной точки зрения частных вариантов теории: теории Тупина, теории сред Коссера и Аэро-Кувшинского, пористых сред. Из перечисленных расчетных моделей, модель Тупина является наиболее простой с меньшим количеством параметров и, в тоже время, дает необходимую точность при определении изменений характеристик материала.

В настоящей работе для моделирования привлекается градиентная теория термоупругости, которая построена, как частный случай среды с сохраняющимися дислокациями (предложена в работах Лурье С. А., Белова П. А, Волкова-Богородского Д. Б. и др.). В диссертации используется однопараметрический вариант модели градиентной теории упругости – прикладная модель межфазного слоя, содержащая единственный дополнительный масштабный параметр материала. Эта модель может также рассматриваться, как вариант теории Тупина, обладающей при этом несколько отличной и более корректной, с точки зрения авторов, вариационной постановкой. Привлекаемая градиентная модель термоупругости построена с привлечением классической гипотезы Дюамеля–Неймана. Модель учитывает

при оценке напряжений более высокие градиенты температурного поля по сравнению с классической теорией [26]. Учитываются и масштабные эффекты, т.е. зависимость напряженного–деформированного состояния от характерных размерных параметров исследуемой структуры, (дополнительный параметр модели). Благодаря этому, появляется возможность уточненной оценки прочности и локализации напряжений на границах слоев, толщины которых могут быть сопоставимы с масштабными параметрами материалов. Масштабный параметр материала – это размер, характеризующий микроструктурное строение материала (для поликристаллических материалов – это размер зерна, для полимеров – характерная длина молекулы или длина зоны изменения морфологии в области включений, для идеальных кристаллических тел – это параметр атомарной решетки).

### **1.3. Деградация механических характеристик в процессе эксплуатации композиционных материалов**

В процессе эксплуатации композиционных материалов как при статическом нагружении с относительно высокой амплитудой, так и при циклическом нагружении наблюдается явление уменьшения механических и прочностных свойств, иногда называемое явлением дегградации механических и прочностных свойств. Причину этого явления связывают с процессом накопления рассеянных повреждений в композиционных материалах. В свою очередь процесс роста поврежденности материала определяется как механическими явлениями, обусловленными образованием и ростом различного рода микродефектов, так и вязким сопротивлением, диффузией, химическими процессами и другими явлениями немеханического порядка, сопровождающими процессами поврежденности. В целом процесс роста рассеянных повреждений предшествует появлению макротрещин, которые, как правило, требуют специальных методов экспериментального обнаружения. Имеющиеся экспериментальные данные позволяют утверждать, что этот процесс, проявляясь

в уменьшении жесткостных и прочностных свойств композита, играет часто определяющую роль при разрушении композита.

Механизмы накопления повреждений в КМ значительно более разнообразны, чем в металлах и существенно зависят от масштабных параметров структуры композитов, которые определяют и последовательность различных сценариев микроразрушений на различных стадиях процесса накопления повреждений и характер самих механизмов накопления повреждений на каждой стадии. Масштабные параметры также определяют вклад различных механизмов разрушения в процесс деградации механических свойств композитов на различных стадиях роста поврежденности композитов и в целом на всем этапе накопления рассеянных повреждений, предшествующем этапу начала макро разрушения.

В целом механизмы накопления повреждений в композитах весьма разнообразны. Например, установлено, что даже при изгибе однонаправленного композита в зависимости от марки материала и предыстории процесса механизмы поврежденности могут заключаться в разрывах волокон, потере устойчивости сжатых волокон, развитии трансверсальных микротрещин в матрице поперек волокна, и микротрещин вдоль плоскости слоя и пр.

Процессы накопления повреждений существенно зависят и от характера нагружения. При статическом нагружении основную роль играют разрушения волокон, в то время как при циклическом нагружении расслоение (отслоение волокон от матрицы).

Механизм накопления повреждений зависит от вида напряженного состояния. Так было обнаружены следующие виды микродефектов при нагружении однонаправленного КМ растяжением, кручением и поперечным изгибом под различными углами к направлению нагружения: разрыв волокон, поперечное отслоение матрицы от волокна, сдвиг между матрицей и волокном вдоль волокна, потеря устойчивости волокна при сжатии. Резюмируя данные известные в литературе можно ввести следующую классификацию микродефектов, наблюдаемых при нагружении КМ на рис. 1.1



Рис. 1.1. Классификация микродефектов композитов.

Почти все перечисленные микродефекты способны развиваться. Следовательно, при нагружении КМ одновременно происходят два процесса: зарождение и развитие микродефектов. Поэтому к описанию изменения свойств КМ в процессе их нагружения может быть применен микромеханический подход, в котором описание процесса накопления повреждений в композиционных материалах являлось бы следствием законов или моделей, описывающих процессы зарождения и развития микродефектов.

Для учета накопления повреждений широко используются феноменологические модели, модели компьютерного моделирования, статистические модели.

В рамках таких подходов трудно учесть особенности процессов роста микродефектов и генерации новых дефектов, проследить вклад в рост поврежденности микродефектов различного вида, учесть взаимовлияние микродефектов и структуры композиционного материала. Для более полной формулировки модели накопления рассеянных повреждений композиционных материалов, связанных с микромеханикой разрушения, следует предварительно определить виды микродефектов, контролирующей поврежденность, и описать соответствующие локальные меры поврежденности. При описании поврежденности композиционного материала следует установить зависимость поврежденности материала в целом от локальных мер поврежденности в реальном времени протекании процесса роста поврежденности. Необходимо предварительно дать определение меры поврежденности композиционного материала, описать модель роста отдельного микродефекта и модель зарождения микродефектов. Оба эти процесса должны быть отражены при формировании модели накопления рассеянных повреждений.

#### **1.4. Некоторые сведения об усталостном поведении слоистых композитов при термоциклировании**

Оценка сопротивления материалов при действии циклических термических напряжений за последние годы вызывает повышенный интерес. Этот интерес определяется все возрастающей тенденцией повышения напряженности и увеличения рабочих температур конструктивных элементов во многих областях техники, особенно в таких, как авиационная и космическая конструкция. К настоящему времени выполнено довольно большое число исследований термической усталости. Однако все, известные нам работы ограничивались, как правило, изучением закономерностей термоусталостного

разрушения в условиях стационарных режимов циклических термических напряжений.

Под действием циклических нагрузок на материал в течение продолжительного времени при некотором числе циклов может произойти разрушение материала при напряжении, которое оказывается ниже статического предела прочности. Число циклов, соответствующее разрушению, зависит от величины напряжения. Такой характер разрушения называется усталостным. Исследованиями усталости металлов издавна занимались многие ученые, что позволило глубоко и широко изучить процесс усталостного разрушения. К исследованию усталостного разрушения композитов приступили сравнительно недавно. В 1964 г. Боллер опубликован результаты исследований на циклическое растяжение пластмасс, армированных стекловолокном. С этого времени началось интенсивное исследование усталости композитов, которое продолжается и в настоящее время.

Усталостное поведение композита зависит от его типа, т.е. от вида дисперсной фазы. Усталостное поведение материалов, армированных волокном, существенно отличается от поведения материалов, в которых для армирования использованы частицы. Тип материала также оказывает влияние на усталостное поведение: металлы отличаются от неметаллических материалов. При изучении усталостного поведения композитов обращают внимание на отрыв по границе раздела матрица-волокно, на возникновение и развитие трещин в матрице, на разрушение дисперсной фазы и др. До того как произойдет полное разрушение материала, последовательность указанных повреждений может быть самой различной. В процессе действия усталостных нагрузок могут происходить значительные изменения моделей упругости и повышение температуры.

Механизмы разрушения слоистых композитов при механической усталости были тщательно изучены во последние двадцать лет. Но изучение усталости композитов при термоциклировании появилось не давно, большие известные работы отражены в экспериментальные данные зарубежных работ [46, 51, 53, 57, 58, 60, 61, 67-69]. Эти экспериментальные результаты были

показывают, что поперечные напряжения при наступлении поперечных трещин в слоях с укладкой  $90^\circ$  слоистых композитов являются функцией толщины тонких пластин и угла ориентации волокон.

## Глава 2. ГРАДИЕНТНАЯ МОДЕЛЬ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНОЙ КОМПОЗИТНОЙ ПАНЕЛИ

### 2.1. Общая постановка градиентной модели термоупругости

В данной работе используется расчетная градиентная модель Тупина, которая, как была описана в разделе 1.2, является наиболее простой, с меньшим количеством параметров и необходимой точностью при расчетах.

Математическая постановка модели градиентной теории межфазного слоя (которую можно рассматривать, как вариант теории упругости среды Тупина) в общем виде определяется следующим функционалом Лагранжа [63]

$$L = A - U_V = A - \frac{1}{2} \iiint_V [C_{ijmn} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} \frac{\partial R_m}{\partial x_n} + C_{ijkml} \frac{\partial^2 R_i}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial^2 R_m}{\partial x_l \partial x_n}] dV; \quad (2.1)$$

где  $L$  – Лагранжиан модели,  $A = \iiint_V P_i^V R_i dV + \iint_F P_i^F R_i dF$  – работа внешних объемных  $P_i^V$  и поверхностных сил  $P_i^F$ ,  $R_i$  – вектор перемещений,  $U_V$  – потенциальная энергия деформаций среды,  $C_{ijmn}$  – тензор классических модулей упругости,  $C_{ijkml}$  – тензор градиентных модулей шестого ранга,  $x_l$  – компоненты пространственного радиус–вектора,  $V$  – рассматриваемый объём.

В среде, описываемой градиентной моделью (2.1), присутствует два типа силовых факторов:  $\sigma_{ij}$  – классические и  $m_{ijk}$  – моментные. Физические соотношения модели определяются по формулам Грина

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{\partial U_V}{\partial (\partial R_i / \partial x_j)} = C_{ijmn} \frac{\partial R_m}{\partial x_n}; \\ m_{ijk} &= \frac{\partial U_V}{\partial (\partial^2 R_i / (\partial x_j \partial x_k))} = C_{ijkml} \frac{\partial^2 R_m}{\partial x_l \partial x_n}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из факта существования плотности потенциальной энергии следует что тензоры модулей обладают следующим свойством симметрии

$$C_{ijmn} = C_{mnij}; C_{ijklmn} = C_{mnljik}. \quad (2.3)$$

Тензор классических модулей упругости для изотропной среды определяется по следующей форме

$$C_{ijmn} = \lambda \delta_{ij} \delta_{mn} + \mu (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{mj}), \quad (2.4)$$

где  $\lambda, \mu$ —коэффициенты Ламе,  $\delta_{ij}$ —дельта Кронекера.

В общем случае тензор модулей  $C_{ijklmn}$  для сред Тупина содержит пять дополнительных независимых модулей. К сожалению он не пригоден для инженерных приложений, так как предполагает большой объем экспериментальных работ по определению неклассических модулей. Поэтому, приходится идти по пути дальнейшего упрощения модели, оставляя лишь самые существенные неклассические характеристики. Мы, однако, будем использовать однопараметрический вариант градиентной теории [63]. Формулировка этой модели, которая содержит лишь один неклассический физический градиентный параметр ( $C$ ), определяющий масштабные эффекты когезионного взаимодействия в объёме

$$C_{ijklmn} = \frac{1}{C} C_{ijrk} C_{mnl}. \quad (2.5)$$

Таким образом, Лагранжиан формулируемой модели термоупругости приобретает вид

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint_V [C_{ijmn} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} \frac{\partial R_m}{\partial x_n} + \left( C_{ijrk} \frac{\partial^2 R_i}{\partial x_k \partial x_j} \right) \left( C_{mnrl} \frac{\partial^2 R_m}{\partial x_l \partial x_n} \right) \frac{1}{C}] dV. \quad (2.6)$$

Запишем вариационное уравнение

$$\begin{aligned} \delta L = & \iiint_V [C_{ijrk} \frac{\partial^2 (...)}{\partial x_j \partial x_k} \left( R_r - \frac{1}{C} C_{mnrl} \frac{\partial^2 R_m}{\partial x_l \partial x_n} \right) + P_i^V] \delta R_i + \\ & + \oint_F [P_i^F - C_{ijrk} n_j \frac{\partial}{\partial x_k} (R_r - \frac{1}{C} C_{mnrl} \frac{\partial^2 R_m}{\partial x_l \partial x_n})] \delta R_i dF - \\ & - \oint_F \frac{1}{C} C_{rqmn} \frac{\partial^2 R_m}{\partial x_q \partial x_n} \delta (C_{rpj} n_p \frac{\partial R_i}{\partial x_j}) dF = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Контактная задача: Индексами «1» и «2» определяют переменные и физические параметры контактирующих тел. В соответствии с (2.7) на поверхности контакта должны отсутствовать скачки вектора перемещений и вектора полных напряжений. При этом полная система условий контакта принимает вид

$$\begin{aligned} R_m^{(1)} &= R_m^{(2)}; \\ C_{ijmn}^{(1)} n_j \frac{\partial R_m^{(1)}}{\partial x_n} &= C_{ijmn}^{(2)} n_j \frac{\partial R_m^{(2)}}{\partial x_n}; \\ C_{ijrk}^{(1)} n_j \frac{\partial}{\partial x_k} (R_r^{(1)} - \frac{1}{C_{(1)}} C_{mnrl}^{(1)} \frac{\partial^2 R_m^{(1)}}{\partial x_l \partial x_n}) &= C_{ijrk}^{(2)} n_j \frac{\partial}{\partial x_k} (R_r^{(2)} - \frac{1}{C_{(2)}} C_{mnrl}^{(2)} \frac{\partial^2 R_m^{(2)}}{\partial x_l \partial x_n}); \\ \frac{1}{C_{(1)}} C_{rqmn}^{(1)} \frac{\partial^2 R_m^{(1)}}{\partial x_q \partial x_n} &= \frac{1}{C_{(2)}} C_{rqmn}^{(2)} \frac{\partial^2 R_m^{(2)}}{\partial x_q \partial x_n}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

### **Основные соотношения термоупругости**

Пусть задано распределение температуры  $T = T(x, y, z)$ . Полная деформация  $\varepsilon_{mn}$  есть сумма упругой  $\varepsilon_{mn}^e$  и температурной  $\varepsilon_{mn}^t$  составляющихся

$$\begin{aligned}\varepsilon_{mn} &= \varepsilon_{mn}^e + \varepsilon_{mn}^t; \\ \varepsilon_{mn}^e &= \varepsilon_{mn} - \varepsilon_{mn}^t,\end{aligned}\tag{2.9}$$

где  $\varepsilon_{mn}^t = \alpha_{mn}T$ ,  $\alpha_{mn}$ —компоненты тензора коэффициентов линейного температурного расширения для анизотропного тела.

Будем рассматривать линейные, обратимые процессы. Для заданной температуры аргументами потенциальной энергии  $U$  являются полные деформации. Определяющие соотношения имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_{ik} &= \left( \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ik}} \right)_T; \\ \sigma_{ik} &= C_{ikmn} \varepsilon_{mn}^e.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Согласно (2.9)  $\varepsilon_{mn}^e = \varepsilon_{mn} - \alpha_{mn}T$  ( $\varepsilon_{mn}$ —полные деформации). Равенство (2.10) запишем в виде

$$\left( \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ik}} \right)_T = C_{ikmn} (\varepsilon_{mn} - \alpha_{mn}T).\tag{2.11}$$

Следовательно, потенциальная энергия с точностью до постоянной определяется равенством

$$U = \frac{1}{2} C_{ikmn} (\varepsilon_{ik} \varepsilon_{mn} - 2\varepsilon_{ik} \alpha_{mn} T).\tag{2.12}$$

Полные деформации связаны с перемещениями соотношениями Коши. Для изотропного тела

$$\begin{aligned}\alpha_{ij} &= 0, \quad i \neq j; \\ \alpha_{ij} &= \alpha, \quad i = j.\end{aligned}\tag{2.13}$$

## 2.2. Расчетная модель многослойной среды, в которой каждый слой изотропный

Запишем математическую формулировку градиентной модели термоупругости (2.1) для изотропной среды [21]

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint \left[ 2\mu \gamma_{ij} \gamma_{ij} + \left( \frac{2\mu}{3} + \lambda \right) \theta^2 + 8 \frac{\mu^2}{C} \xi_{ij} \xi_{ij} + \frac{(2\mu + \lambda)^2}{C} \theta_i \theta_i \right] dV, \quad (2.14)$$

где  $\xi_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} = -\frac{1}{4} \frac{\partial^2 R_m}{\partial x_j \partial x_n} \mathcal{E}_{mni} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 R_m}{\partial x_i \partial x_n} \mathcal{E}_{mij}$ ,  $\theta_i = \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 R_j}{\partial x_i \partial x_j}$ ,  $\gamma_{ij}$  –

компоненты тензора девиатора деформаций,  $\theta$  – объёмная деформация,  $\lambda$ ,  $\mu$  – коэффициенты Ламе,  $\omega_i$  – вектор поворотов или упругих вращений,  $\mathcal{E}_{mni}$  – компоненты тензора Леви–Чивиты.

Запишем постановку задачи градиентной термоупругости [28] для плоской деформации  $u = u(x, z)$ ,  $w = w(x, z)$ . Деформации связаны с перемещениями классическими соотношениями Коши. Обобщенный закон Гука также сохраняет классический вид, и напряжения с учетом влияния температуры могут быть записаны в следующей форме

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda e - 3K\alpha T; \\ \sigma_z &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda e - 3K\alpha T; \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (2.15)$$

где  $e$  – постоянная деформация в направлении оси  $y$ ,  $\alpha$  – коэффициент температурного расширения,  $K$  – объёмный модуль,  $T = T(x, z)$  – функция, определяющая изменение температурного поля относительно температуры  $T_0$ , при которой в среде не возникает температурных деформаций.

Уравнения равновесия, полученные на основе вариационного принципа Лагранжа для функционала (2.1), в перемещениях имеют неклассический вид и обладают повышенным порядком, по сравнению с классической. В отсутствие действия внешних объемных сил получаем

$$\begin{aligned}
& (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} - \frac{(\lambda + 2\mu)^2}{C} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\mu^2}{C} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - \\
& - \frac{(\lambda + 2\mu)^2 + \mu^2}{C} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial z^2} - \frac{(\lambda + 2\mu)^2 - \mu^2}{C} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial z} + \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial z^3} \right) + \\
& + \left( \frac{(\lambda + 2\mu)^2}{C} \alpha \left( \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 T}{\partial x \partial z^2} \right) - 3K\alpha \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0; \\
& (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \frac{(\lambda + 2\mu)^2}{C} \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} - \frac{\mu^2}{C} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \\
& - \frac{(\lambda + 2\mu)^2 + \mu^2}{C} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial z^2} - \frac{(\lambda + 2\mu)^2 - \mu^2}{C} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial z} + \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial z^3} \right) + \\
& + \left( \frac{(\lambda + 2\mu)^2}{C} \alpha \left( \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 T}{\partial z^3} \right) - 3K\alpha \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0,
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Граничные и контактные условия в модели градиентной теории упругости в перемещениях также непосредственно следуют из вариационного принципа Лагранжа (2.14), записанного для плоской задачи. При этом, в силу повышенного порядка разрешающих уравнений для градиентной теории, здесь имеется двойной набор краевых условий. Граничные условия на горизонтальной поверхности слоев с нормалью в направлении оси  $z$  для напряжений, записанные в перемещениях имеют вид (предполагается наличие только температурного воздействия)

$$\begin{aligned}
\sigma_z^* &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + e \right) - \frac{(\lambda + 2\mu)^2}{C} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} \right) - \\
&\quad - \frac{(\lambda + 2\mu)^2 + \mu^2}{C} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial z} - \frac{(\lambda + 2\mu)^2 - \mu^2}{C} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2} - \\
&\quad - \left( 3K\alpha T - \frac{(\lambda + 2\mu)^2}{C} \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) \right); \tag{2.17} \\
\tau_{zx}^* &= \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\mu^2}{C} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) - \frac{(\lambda + 2\mu)^2 + \mu^2}{C} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} - \\
&\quad - \frac{(\lambda + 2\mu)^2 - \mu^2}{C} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial z^2} + \frac{(\lambda + 2\mu)^2}{C} \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial z},
\end{aligned}$$

где  $\sigma_z^*$ ,  $\tau_{zx}^*$  – это нормальные и сдвиговые напряжения, которые входят в естественные граничные условия градиентной модели. Эти напряжения записываются в виде комбинации «классических» и «моментных» напряжений, действующих на поверхности среды, и имеют в общем случае следующую структуру:  $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij} - m_{ijk,k}$ . Дополнительные условия по неклассическим (моментным) напряжениям имеют, соответственно, вид

$$\begin{aligned}
m_{xzz} &= \frac{\mu^2}{C} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right); \\
m_{zzz} &= \frac{(\lambda + 2\mu)^2}{C} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right) + \frac{(\lambda + 2\mu)^2}{C} \alpha \frac{\partial T}{\partial z}. \tag{2.18}
\end{aligned}$$

Если принять в приведенной постановке задачи (2.16)–(2.18), что градиентный параметр стремится к бесконечности ( $C \rightarrow \infty$ ), то постановка сводится к классической задаче плоской деформации.

### 2.2.1. Случай нагрева в направлении одной из координат

Рассмотрим в дальнейшем однородное поле температур в направлении координаты  $x$ , т.е. функция температуры зависит от только  $z$  ( $T = T(z)$ ). В таком

случае следует принять, что  $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = e_x = const$ ;  $w = w(z)$ . Соотношения закона

Гука для изотропной среды записываются в следующей форме

$$\begin{aligned}\sigma_x(z) &= (2\mu + \lambda)e_x + \lambda e + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} - 3K\alpha T; \\ \sigma_y(z) &= \lambda e_x + (2\mu + \lambda)e + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} - 3K\alpha T; \\ \sigma_z(z) &= (2\mu + \lambda) \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda e + \lambda e_x - 3K\alpha T,\end{aligned}\tag{2.19}$$

где  $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$  – объёмный модуль,  $\lambda$  и  $\mu$  – коэффициенты Ламе,  $\alpha$  – коэффициент температурного расширения.

Для случая равномерного нагрева в направлении координаты  $x$  первое уравнение равновесия в (2.16) удовлетворяется автоматически, а второе уравнение равновесия в направлении оси  $z$  (нормали к поверхности слоя) преобразуется к следующему виду

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{(\lambda + 2\mu)^2}{C} \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \alpha \left( \frac{(\lambda + 2\mu)^2}{C} \frac{\partial^3 T}{\partial z^3} - 3K \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0.\tag{2.20}$$

Граничные условия (2.17) по напряжениям преобразуются к виду

$$\begin{aligned}\sigma_z &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_z + \lambda e_x + \lambda e - \frac{(\lambda + 2\mu)^2}{C} \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} + \\ &+ \alpha \left( \frac{(\lambda + 2\mu)^2}{C} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} (-3KT) \right).\end{aligned}\tag{2.21}$$

Граничные условия (2.18) по моментным напряжениям преобразуются к виду

$$m_{zz} = \frac{(\lambda + 2\mu)^2}{C} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \alpha \frac{\partial T}{\partial z} \right). \quad (2.22)$$

Далее запишем постановку задачи для многослойной изотропной системы, образованной из  $n$ -слоев, состоящих из различных изотропных материалов.

Разрешающее уравнение при этом имеет вид

$$(\lambda_i + 2\mu_i) \frac{\partial^2 w_i}{\partial z^2} - \frac{(\lambda_i + 2\mu_i)^2}{C_i} \frac{\partial^4 w_i}{\partial z^4} + \alpha_i \left( \frac{(\lambda_i + 2\mu_i)^2}{C_i} \frac{\partial^3 T_i}{\partial z^3} - 3K_i \frac{\partial T_i}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.23)$$

В этом случае краевая задача ставится на поперечные перемещения  $w_i(z)$ , которые удовлетворяют контактными условиям на границах слоев, обеспечивающих равенство напряжений, моментных напряжений, перемещений и нормальных производных от перемещений

при  $z = 0$

$$w_1 = 0; \quad \frac{(\lambda_1 + 2\mu_1)^2}{C_1} \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} - \alpha_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} \right) = 0; \quad (2.24)$$

при  $z = z_i$

$$\begin{aligned}
w_i &= w_{i+1}; \\
\frac{\partial w_i}{\partial z} &= \frac{\partial w_{i+1}}{\partial z}; \\
\frac{(\lambda_i + 2\mu_i)^2}{C_i} \left( \frac{\partial^2 w_i}{\partial z^2} - \alpha_i \frac{\partial T_i}{\partial z} \right) &= \frac{(\lambda_{i+1} + 2\mu_{i+1})^2}{C_{i+1}} \left( \frac{\partial^2 w_{i+1}}{\partial z^2} - \alpha_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial z} \right); \\
(\lambda_i + 2\mu_i) \varepsilon_{zi} + \lambda_i e_x + \lambda_i e - \frac{(\lambda_i + 2\mu_i)^2}{C_i} \frac{\partial^3 w_i}{\partial z^3} &+ \\
+ \alpha_i \left( \frac{(\lambda_i + 2\mu_i)^2}{C_i} \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} (-3K_i T_i) \right) &= (\lambda_{i+1} + 2\mu_{i+1}) \varepsilon_{z(i+1)} + \lambda_{i+1} e_x + \lambda_{i+1} e - \\
- \frac{(\lambda_{i+1} + 2\mu_{i+1})^2}{C_{i+1}} \frac{\partial^3 w_{i+1}}{\partial z^3} + \alpha_{i+1} \left( \frac{(\lambda_{i+1} + 2\mu_{i+1})^2}{C_{i+1}} \frac{\partial^2 T_{i+1}}{\partial z^2} (-3K_{i+1} T_{i+1}) \right); &
\end{aligned} \tag{2.25}$$

при  $z = H$

$$\begin{aligned}
(\lambda_n + 2\mu_n) \varepsilon_{zn} + \lambda_n e_x + \lambda_n e - \frac{(\lambda_n + 2\mu_n)^2}{C_n} \frac{\partial^3 w_n}{\partial z^3} &+ \\
+ \alpha_n \left( \frac{(\lambda_n + 2\mu_n)^2}{C_n} \frac{\partial^2 T_n}{\partial z^2} (-3K_n T_n) \right) &= 0; \\
\frac{(\lambda_n + 2\mu_n)^2}{C_n} \left( \frac{\partial^2 w_n}{\partial z^2} - \alpha_n \frac{\partial T_n}{\partial z} \right) &= 0,
\end{aligned} \tag{2.26}$$

где индекс  $i = 1 \dots n$ , обозначает номер слоя,  $z_i$  – координаты границ слоев, при этом  $z_0 = 0$  и  $z_n = H$  на верхней границе задаются условия закрепления, на нижней границе – условия свободного края, выражения для напряжений и моментных напряжений представлены формулами (2.21) и (2.22).

Краевая задача (2.23)–(2.26) решается с учетом совместности деформаций в отношении координат  $x$  и  $y$ . Поэтому, так же, как и для одного слоя, решение строится с точностью до двух постоянных  $e_x$ ,  $e$  определяющих однородные деформации в направлении осей  $x$  и  $y$ .

Выражения для нормальных напряжений в каждом  $i$ -ом слое имеют вид  
(2.19)

$$\begin{aligned}\sigma_x^i &= (\lambda_i + 2\mu_i)e_x + \lambda_i e + \lambda_i \frac{\partial w_i}{\partial z} - 3K_i \alpha_i T_i; \\ \sigma_y^i &= (\lambda_i + 2\mu_i)e + \lambda_i e_x + \lambda_i \frac{\partial w_i}{\partial z} - 3K_i \alpha_i T_i; \\ \sigma_z^i &= (\lambda_i + 2\mu_i) \frac{\partial w_i}{\partial z} + \lambda_i e + \lambda_i e_x - 3K_i \alpha_i T_i.\end{aligned}\quad (2.27)$$

Уравнениями для определения параметров  $e_x$ ,  $e$  являются интегральные уравнения равновесия в направлении осей  $x$  и  $y$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \int_{ih}^{(i+1)h} \sigma_x^i(z) dz &= 0; \\ \sum_{i=1}^n \int_{ih}^{(i+1)h} \sigma_y^i(z) dz &= 0,\end{aligned}\quad (2.28)$$

где  $h$ —толщина слоя.

Таким образом, сформулированная постановка задачи (2.23)–(2.28) является замкнутой.

Предполагается, что температурное поле ( $T(z)$ ) является заданным или находится из решения задачи теплопроводности. В частности, для рассматриваемой задачи может быть использована классическая модель теплопроводности в одномерной постановке.

Для  $n$ -слоистой структуры постановка контактной задачи теплопроводности записывается следующим образом

$$\begin{aligned}
\underline{z_{i-1} < z < z_i} \quad k_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} &= 0, \\
\underline{z=0} \quad T_1 = T_1^0 \left( k_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} = q_1 \right); \\
\underline{z = z_i} \quad T_i = T_{i+1}; \quad k_i \frac{\partial T_i}{\partial z} &= k_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial z}; \\
\underline{z = H} \quad T_n = T_2^0 \left( k_n \frac{\partial T_n}{\partial z} = q_2 \right),
\end{aligned} \tag{2.29}$$

где  $T_i$ —изменение температуры в  $i$ -ом слое,  $k_i$ —коэффициент теплопроводности  $i$ -го слоя.

В результате решения системы (2.29) распределение температуры определяется в виде непрерывной линейной функции с кусочно-непрерывной первой производной.

### 2.2.2. Примеры тестового расчета

Рассмотрим сначала задачу для одного слоя, который подвергается нагреву с заданным перепадом температуры на границах. На верхней границе слой полностью закреплен. В данном случае температура в слое распределена по линейному закону  $T=A \cdot z+B$ . Запишем уравнение равновесия в направлении оси  $z$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{(\lambda + 2\mu)^2}{C} \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} - 3\alpha K A = 0. \tag{2.30}$$

Решение этого однородного уравнения имеет вид

$$w = C_1 + C_2 z + C_3 e^{\sqrt{\frac{C}{\lambda+2\mu}} z} + C_4 e^{-\sqrt{\frac{C}{\lambda+2\mu}} z} + \frac{3BK\alpha z^2}{2h(\lambda + 2\mu)} \tag{2.31}$$

Неизвестные константы  $-C_i$  определяются из граничных условий (см. систему (2.24) и (2.26)), деформации в направлении осей  $x$  и  $y$  определяются на основе интегрального уравнения равновесия (2.28).

Положим, что слой изготовлен из поликристаллического материала и имеет следующие характеристики:  $E = 200$  ГПа – модуль упругости,  $\nu = 0,3$  – коэффициент Пуассона,  $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}$   $^{\circ}\text{C}^{-1}$  – коэффициент температурного расширения,  $h = (5; 0,1; 0,5)$  мм – толщина слоя может быть различной. Значение градиентного параметра  $C$  следует выбирать исходя из данных о микроструктурном строении материала. Для оценки этого параметра может быть использовано равенство [63]:

$$\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{C}} = l [\text{мм}], \quad (2.32)$$

Здесь  $l$  – масштабный параметр материала, который для поликристаллического материала приближенно может быть принят равным половине среднего размера зерна. Будем рассматривать структуру со средним размером зерна 0,01 мм, тогда масштабный параметр материала  $l$  равен 0,005 мм, а градиентный параметр  $C$  оценивается величиной  $10^7$  ГПа/мм<sup>2</sup>.

Для заданного распределения температуры  $T(z) = 10 - 20 \frac{z}{h}$ , получаем распределения деформаций, компонент нормальных напряжений и интенсивности напряжений по Мизесу

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad \text{в слое (рис. 2.1).}$$

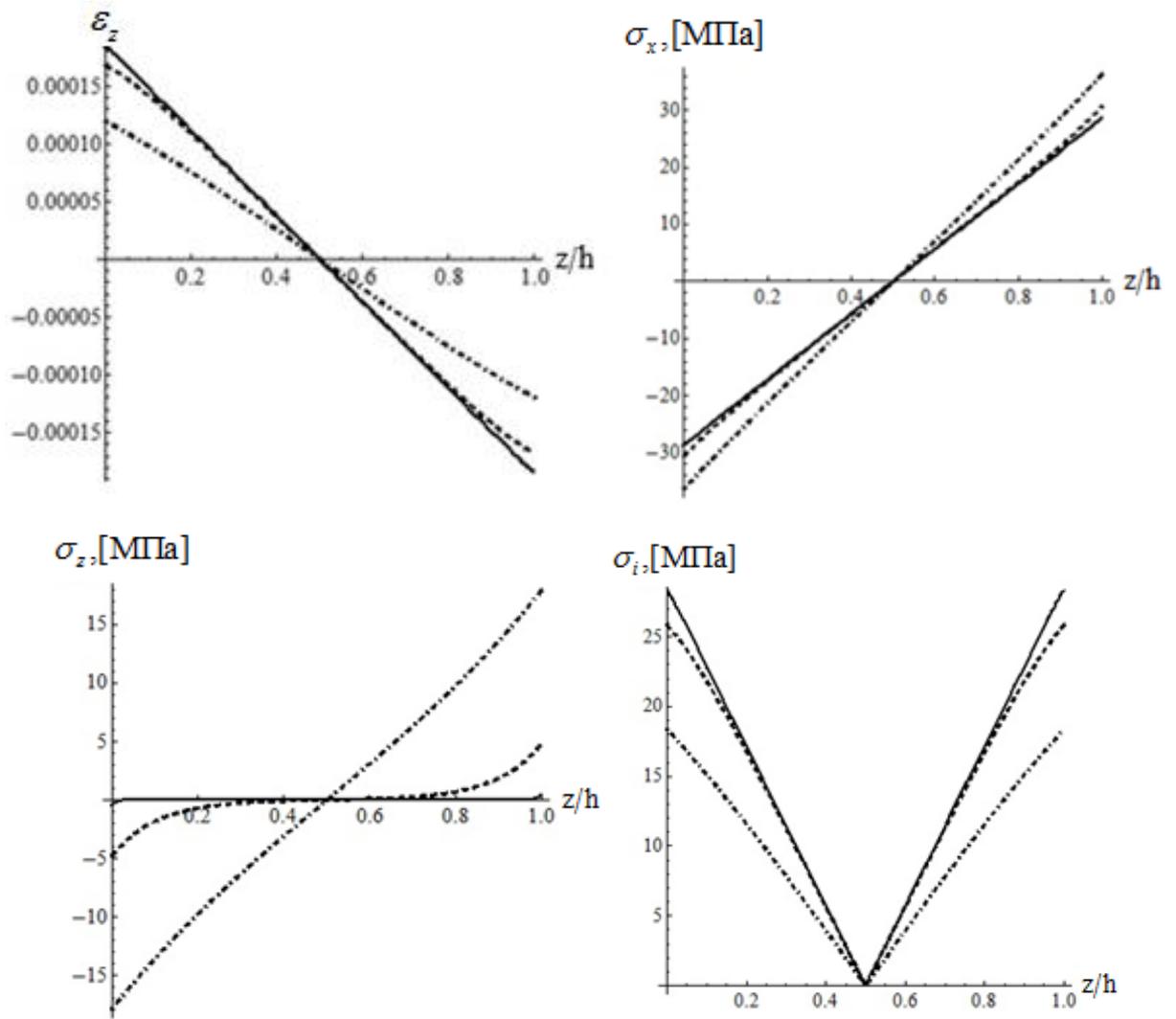


Рис. 2.1. Распределение деформаций, напряжений и интенсивности напряжений по Мизесу в слое при действии температурного поля

$$T(z) = 10 - 20 \frac{z}{h}, \quad h = 5 \text{ мм} \text{—сплошная линия (классическое решение),}$$

$$h = 0,5 \text{ мм} \text{—пунктир, } h = 0,1 \text{ мм} \text{—штрих-пунктир.}$$

Как видно из рис. 2.1, для слоя толщиной 5 мм реализуется напряжённо-деформированное состояние близкое к классическому. Напомним, что для классической постановки в слое имеет место линейное распределение напряжений  $\sigma_x$  и деформаций  $\varepsilon_z$ , а напряжения  $\sigma_z$  равны нулю. Масштабные эффекты проявляются для тонких слоев, в которых, при том же заданном градиенте температурного поля, напряженно-деформированное состояние будет иным. Так существенными могут оказаться напряжения  $\sigma_z$  (для слоя толщиной 0,5 мм максимальные напряжения достигают 5 МПа). Для слоя толщиной 0,1 мм

максимальные напряжения  $\sigma_z$  достигают 17 МПа. По сравнению с классическим решением деформации  $\varepsilon_z$  уменьшаются на 40%, а напряжения в плоскости слоя  $\sigma_x$  возрастают с максимальных 25 МПа до 35 МПа. В то же время, происходит снижение интенсивности напряжений (на 30% слоя толщиной 0,1 мм). Следовательно, можно прогнозировать повышение прочности материала.

Тонкие слои оказываются более нагруженными, и в то же время, они проявляют себя как структуры, выполненные из более жесткого и прочного материала. Возникает масштабный эффект усиления: свойства материала не изменяются, но деформации слоя и интенсивность напряжений уменьшаются с уменьшением толщины слоя при одной и той же нагрузке (при одинаковом градиенте температурного поля). В модели классической термоупругости этот эффект не возникает – для слоев различной толщины деформации  $\varepsilon_z$  и интенсивность напряжений  $\sigma_i$  будут одинаковыми, если в этих слоях реализуется один и тот же градиент температурного поля.

### 2.2.3. НДС двухслойной изотропной структуры, неравномерно-нагретой в направлении нормали к поверхности

Далее рассмотрим двухслойную структуру, представленную на рис. 2. 2. Считаем, что на поверхностях слоев задана температура:  $T_1 = 1000$  °С,  $T_2 = 100$  °С. Характеристики первого слоя соответствуют свойствам керамики на основе оксида циркония:  $E_1 = 210$  ГПа,  $\nu_1 = 0,23$ ,  $\alpha_1 = 1,2 \cdot 10^{-5}$  °С<sup>-1</sup>,  $l_1 = 0,005$  мм,  $C_1 = 10^7$  ГПа/мм<sup>2</sup>. Второй слой выполнен из стали (см. характеристики в расчете для одного слоя).

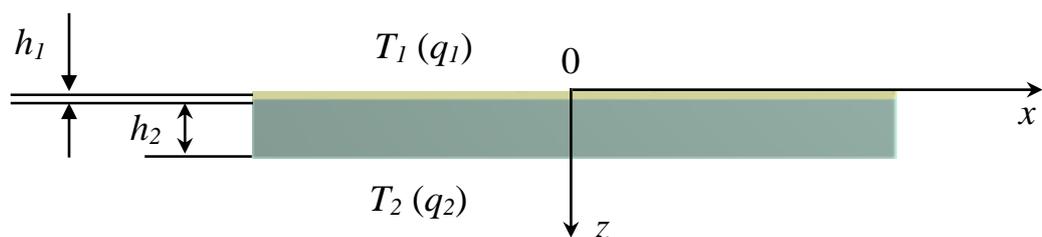
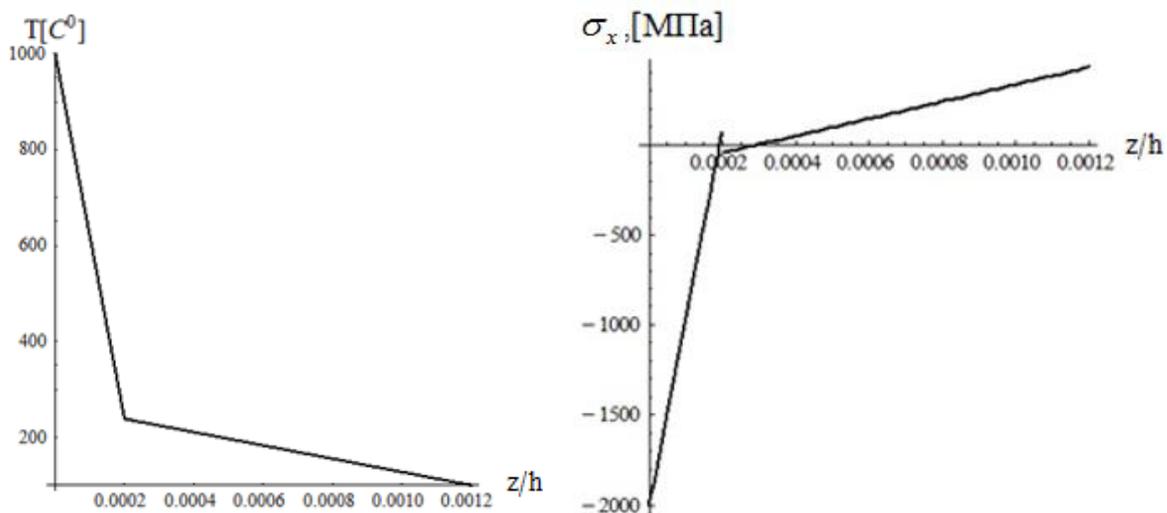
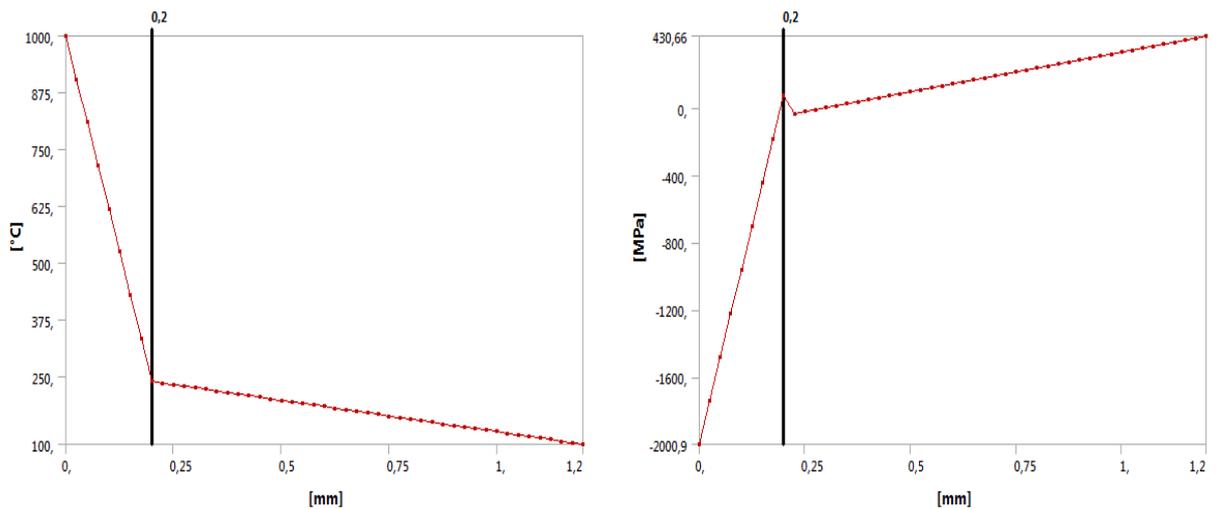


Рис. 2.2. Двухслойная структура

На рис. 2.3 представлено тестовое сравнение по напряжениям полученного аналитического решения задачи (2.23)-(2.26) в рамках классической термоупругости ( $C_1 \rightarrow \infty$ ,  $C_2 \rightarrow \infty$ ) с расчетами, проведенными в системе «ANSYS» для аналогичной задачи в осесимметричной постановке для двухслойной пластины. Рассматривались слои толщиной 0,1 мм и 1 мм, длина пластины в конечно-элементном решении составляла 10 мм. Для заданного перепада температуры получено полное совпадение решений практически на всей длине пластины (на краю пластины, противоположном оси симметрии, возникает краевой эффект). Возникают значительные напряжения, которые в реальной структуре могут привести к разрушению как в слое керамики, так и в стальном слое. Полученные значения напряжений можно считать завышенными (или оценкой «сверху»), так как в качестве характеристик тонкого керамического слоя мы подставляли характерные значения свойств для объемного керамического материала, а характеристики тонкого покрытия могут быть значительно ниже —  $\sigma_x$ , [МПа] вследствие наличия дефектов пор, микровключений, трещин и т.д.  $\sigma_x$



3а



3b

Рис. 2.3. Аналитическое (3а) и конечно-элементное (3б) моделирование термоупругих напряжений в двухслойной композитной структуре. Конечно-элементное решение приведено для центра осесимметричной пластины. Рисунки слева – распределение температуры  $T(z)$  по толщине, справа – распределение напряжений  $\sigma_x(z)$  по толщине.

Построенные решения в рамках классической теории термоупругости не зависят от фактической толщины слоев, а зависят только от соотношения толщин слоев и от заданного перепада температуры. В решении градиентной теории упругости возникает дополнительный масштабный параметр – соотношение толщины слоев и масштабных параметров материалов. Именно это соотношение определяет уровень локальных эффектов, возникающих в напряжениях. Для поликристаллических материалов это означает, что если значение среднего размера зерен и толщины слоя являются величинами одного порядка, то в среде будут проявляться масштабные эффекты. На рис. 2.4 представлено распределение напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$  и интенсивности напряжений  $\sigma_i$  для двух различных слоистых структур: с толщинами слоев 0,1 и 1 мм и с толщинами слоев 0,01 и 0,1 мм при заданном постоянном значении градиентного параметра  $C_1 = 10^7 \text{ ГПа/мм}^2$ .

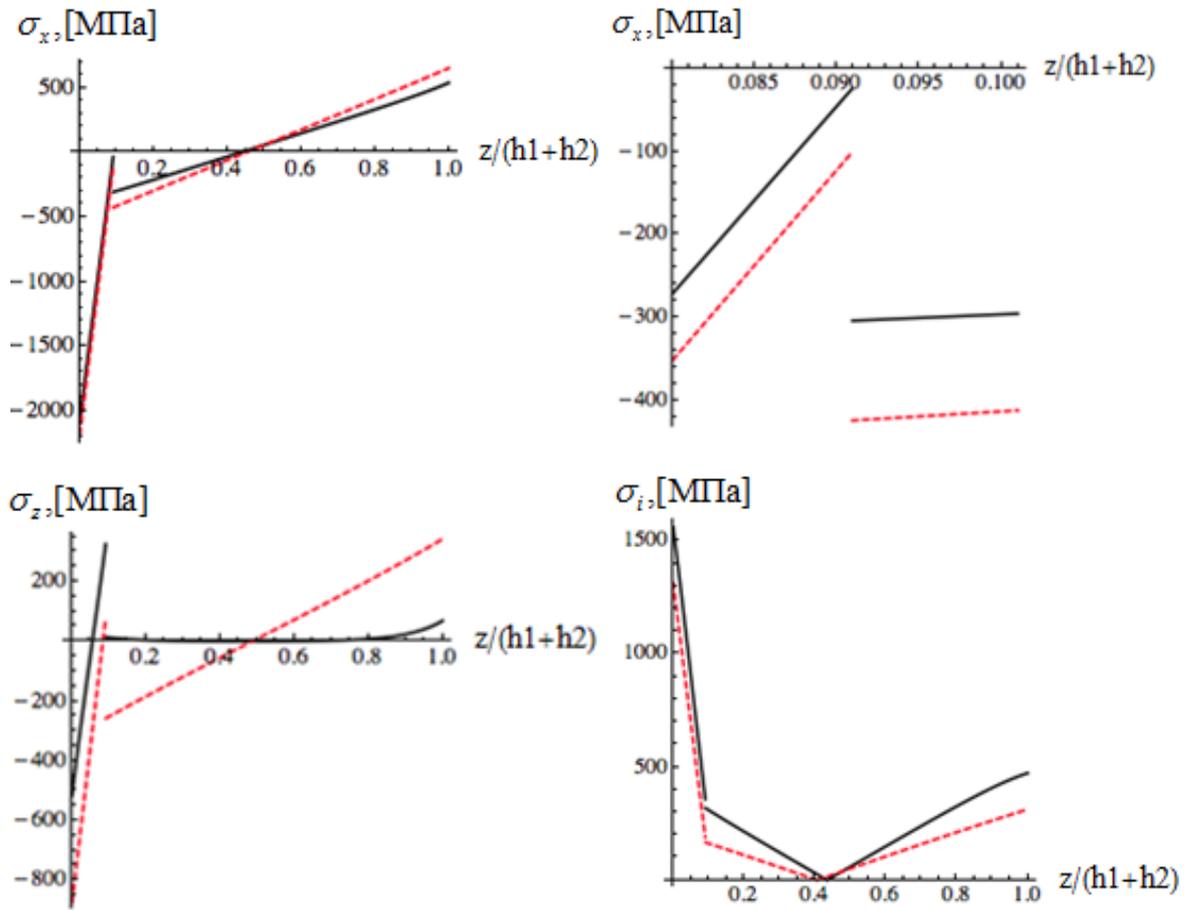


Рис. 2.4. Влияние толщины композитной слоистой структуры на распределение напряжений-решение в рамках градиентной теории упругости. Сплошная линия-решение для слоев толщиной 1 мм и 0,1 мм, пунктир-решение для слоев толщиной 0,1 мм и 0,01 мм.

Как видно из полученного решения влияние толщины структуры оказывается значительным. В более тонкой структуре повышаются как сжимающие напряжения, так и растягивающие напряжения в слоях керамики и металла. В то же время, происходит снижение интенсивности напряжений, и на границе контакта слоев (в области, где наиболее часто происходит разрушение) интенсивность напряжений снижается. В целом, возникающие локальные эффекты могут неоднозначно влиять на напряженно-деформированное состояние слоев. Снижение интенсивности напряжений говорит о том, что наступление пластических деформаций в таких структурах будет происходить позже, по сравнению с прогнозом, который может быть получен по классической модели термоупругости. Однако, наиболее опасными напряжениями, которые не

учитываются в рамках классической термоупругости, могут стать положительные растягивающие напряжения в направлении, перпендикулярном поверхности слоев, в слое керамики (рис. 2.4). Для хрупких керамических материалов эти напряжения могут приводить к разрушению.

В настоящем разделе рассмотрена стационарная задача о температурных деформациях слоистых композиционных структур в рамках градиентной теории термоупругости. Приведена постановка задачи плоской деформации градиентной теории упругости. Указан алгоритм решения задачи при равномерном нагружении в плоскости слоя (равномерный температурный нагрев). Получена постановка контактной задачи градиентной термоупругости для многослойных композитных структур. Решены тестовые задачи для случая градиентного нагрева однослойной и двухслойной структуры. Распределение температурного поля в слоях определялось на основе классической модели теплопроводности. Показано, что модель градиентной термоупругости позволяет учесть неклассическую зависимость напряжений и деформаций в слоях различной толщины при заданном одинаковом градиенте температурного поля. Показано, что возникающий эффект является эффектом «усиления»: при уменьшении толщины слоя деформации и интенсивность напряжений в нем уменьшаются, поэтому материал будет проявлять себя, как материал с более высоким «эффективным» модулем упругости и пределом текучести. При этом для слоев, толщина которых много больше масштабного параметра материала, справедлива классическая модель термоупругости, но для более тонких слоев возникают локальные напряжения вблизи границ, которые могут приводить к значительному изменению напряженно-деформированного состояния, и, в частности, могут возникать повышенные напряжения в плоскости слоев.

Показано, что для двухслойной структуры градиентная теория упругости прогнозирует возникновение дополнительных локальных растягивающих напряжений в слое с меньшим коэффициентом температурного расширения. На основе сравнения с решением аналогичной задачи в системе «ANSYS» и классического аналитического решения, показано, что полученное градиентное

решение является обобщающим для классической задачи термоупругости и позволяет учесть влияние толщины слоев и масштабных параметров материалов на напряженно-деформированное состояние слоистой структуры.

### 2.3. Расчетная модель многослойной композитной панели под действием температуры

Рассмотрим многослойную композитную панель с прослойкой при произвольной укладке волокон по слоям (рис. 2.5). Запишем математическую формулировку градиентной модели термоупругости (2.1) для анизотропной среды (упрощенная модель)

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint \left[ C_{ijnm} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{nm} + 8 \frac{\mu^2}{C} \xi_{ij} \xi_{ij} + \frac{(2\mu + \lambda)^2}{C} \theta_i \theta_i \right] dV. \quad (2.33)$$

Получим выражения для компонент тензора  $C_{ijnm}$  для рассматриваемой модели.

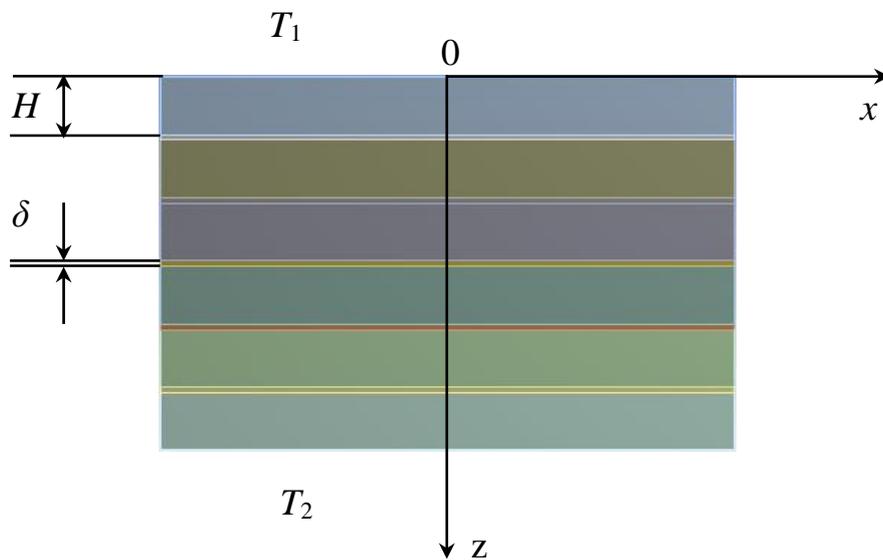


Рис. 2.5. многослойный композит

Запишем физические соотношения закона Гука, определяющие связь между напряжениями и деформациями в  $i$ -ом слое в локальной системе координат  $(1, 2, 3)$  для ортотропного слоя

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1^i &= \frac{1}{E_1^i} \sigma_1^i - \frac{\mu_{21}^i}{E_2^i} \sigma_2^i - \frac{\mu_{31}^i}{E_3^i} \sigma_3^i + \alpha_1^i T_i; \\
\varepsilon_2^i &= -\frac{\mu_{12}^i}{E_1^i} \sigma_1^i + \frac{1}{E_2^i} \sigma_2^i - \frac{\mu_{32}^i}{E_3^i} \sigma_3^i + \alpha_2^i T_i; \\
\varepsilon_3^i &= -\frac{\mu_{13}^i}{E_1^i} \sigma_1^i - \frac{\mu_{23}^i}{E_2^i} \sigma_2^i + \frac{1}{E_3^i} \sigma_3^i + \alpha_3^i T_i; \\
\gamma_{23}^i &= \frac{1}{G_{23}^i} \tau_{23}^i; \\
\gamma_{31}^i &= \frac{1}{G_{31}^i} \tau_{31}^i; \\
\gamma_{12}^i &= \frac{1}{G_{12}^i} \tau_{12}^i.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Эти отношения записывают в матричном виде

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1^i \\ \varepsilon_2^i \\ \varepsilon_3^i \\ \gamma_{23}^i \\ \gamma_{31}^i \\ \gamma_{12}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1^i} & -\frac{\mu_{21}^i}{E_2^i} & -\frac{\mu_{31}^i}{E_3^i} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{12}^i}{E_1^i} & \frac{1}{E_2^i} & -\frac{\mu_{32}^i}{E_3^i} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{13}^i}{E_1^i} & -\frac{\mu_{23}^i}{E_2^i} & \frac{1}{E_3^i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}^i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}^i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1^i \\ \sigma_2^i \\ \sigma_3^i \\ \tau_{23}^i \\ \tau_{31}^i \\ \tau_{12}^i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha_1^i \\ \alpha_2^i \\ \alpha_3^i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} T_i \tag{2.35}$$

где  $E_1^i, E_2^i, E_3^i$  – модули упругости в направлениях соответственно армирующих волокон (направление 1), в плоскости перпендикулярно волокнам (направление 2) и по толщине слоя (направление 3);  $G_{23}^i, G_{31}^i, G_{12}^i$  – модули сдвига соответственно в плоскости (2, 3), (3, 1), (1, 2);  $\nu_{pq}^i$  – коэффициенты Пуассона;

первый индекс указывает направление действующего напряжения, а второй – направление возникающей при поперечной деформации;  $\alpha_1^i$ ,  $\alpha_2^i$ ,  $\alpha_3^i$  – температурные коэффициенты линейного расширения;  $T_i$  – приращение температуры.

Вследствие симметрии матрицы коэффициентов податливости выполняются равенства

$$E_1^i \nu_{21}^i = E_2^i \nu_{12}^i; E_2^i \nu_{32}^i = E_3^i \nu_{23}^i; E_3^i \nu_{13}^i = E_1^i \nu_{31}^i. \quad (2.36)$$

Закон Гука в виде, разрешенном относительно напряжений, имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_1^i &= \bar{E}_1^i (1 - \nu_{23}^i \nu_{32}^i) \varepsilon_1^i + \bar{E}_1^i (\nu_{21}^i + \nu_{23}^i \nu_{31}^i) \varepsilon_2^i + \bar{E}_1^i (\nu_{31}^i + \nu_{21}^i \nu_{32}^i) \varepsilon_3^i - \\ &\quad - \bar{E}_1^i \left[ (1 - \nu_{23}^i \nu_{32}^i) \alpha_1^i + (\nu_{21}^i + \nu_{23}^i \nu_{31}^i) \alpha_2^i + (\nu_{31}^i + \nu_{21}^i \nu_{32}^i) \alpha_3^i \right] T_i; \\ \sigma_2^i &= \bar{E}_2^i (\nu_{12}^i + \nu_{13}^i \nu_{32}^i) \varepsilon_1^i + \bar{E}_2^i (1 - \nu_{13}^i \nu_{31}^i) \varepsilon_2^i + \bar{E}_2^i (\nu_{32}^i + \nu_{12}^i \nu_{31}^i) \varepsilon_3^i - \\ &\quad - \bar{E}_2^i \left[ (\nu_{12}^i + \nu_{13}^i \nu_{32}^i) \alpha_1^i + (1 - \nu_{13}^i \nu_{31}^i) \alpha_2^i + (\nu_{32}^i + \nu_{12}^i \nu_{31}^i) \alpha_3^i \right] T_i; \\ \sigma_3^i &= \bar{E}_3^i (\nu_{13}^i + \nu_{12}^i \nu_{23}^i) \varepsilon_1^i + \bar{E}_3^i (\nu_{23}^i + \nu_{21}^i \nu_{31}^i) \varepsilon_2^i + \bar{E}_3^i (1 - \nu_{12}^i \nu_{21}^i) \varepsilon_3^i - \\ &\quad - \bar{E}_3^i \left[ (\nu_{13}^i + \nu_{12}^i \nu_{23}^i) \alpha_1^i + (\nu_{23}^i + \nu_{21}^i \nu_{31}^i) \alpha_2^i + (1 - \nu_{12}^i \nu_{21}^i) \alpha_3^i \right] T_i; \\ \tau_{23}^i &= G_{23}^i \gamma_{23}^i; \\ \tau_{31}^i &= G_{31}^i \gamma_{31}^i; \\ \tau_{12}^i &= G_{12}^i \gamma_{12}^i, \end{aligned} \quad (2.37)$$

где  $\bar{E}_{1,2,3}^i = \frac{E_{1,2,3}^i}{A^i}$ ;

$$A^i = \det \begin{bmatrix} 1 & -\mu_{12}^i & -\mu_{13}^i \\ -\mu_{21}^i & 1 & -\mu_{23}^i \\ -\mu_{31}^i & -\mu_{32}^i & 1 \end{bmatrix} = 1 - \mu_{12}^i \mu_{21}^i - \mu_{23}^i \mu_{32}^i - \mu_{31}^i \mu_{13}^i - 2\mu_{12}^i \mu_{23}^i \mu_{31}^i.$$

Статические соотношения, связывающие напряжения в координатах  $(x, y, z)$  и  $(1, 2, 3)$  следующие

$$\begin{aligned}
\sigma_x^i &= \sigma_1^i \cos^2 \varphi_i - 2\tau_{12}^i \sin \varphi_i \cos \varphi_i + \sigma_2^i \sin^2 \varphi_i; \\
\sigma_y^i &= \sigma_2^i \cos^2 \varphi_i + 2\tau_{12}^i \sin \varphi_i \cos \varphi_i + \sigma_1^i \sin^2 \varphi_i; \\
\sigma_z^i &= \sigma_3^i; \\
\tau_{yz}^i &= \tau_{23}^i \cos \varphi_i + \tau_{31}^i \sin \varphi_i; \\
\tau_{zx}^i &= \tau_{31}^i \cos \varphi_i - \tau_{23}^i \sin \varphi_i; \\
\tau_{xy}^i &= (\sigma_1^i - \sigma_2^i) \sin \varphi_i \cos \varphi_i + \tau_{12}^i \cos 2\varphi_i.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Геометрические соотношения, связывающие деформации в осях (1, 2, 3) с деформациями в осях (x, y, z) можно записать следующим образом

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1^i &= \varepsilon_x \cos^2 \varphi_i + \varepsilon_y \sin^2 \varphi_i + \gamma_{xy} \sin \varphi_i \cos \varphi_i; \\
\varepsilon_2^i &= \varepsilon_x \sin^2 \varphi_i + \varepsilon_y \cos^2 \varphi_i - \gamma_{xy} \sin \varphi_i \cos \varphi_i; \\
\varepsilon_3^i &= \varepsilon_z; \\
\gamma_{23}^i &= \gamma_{yz} \cos \varphi_i - \gamma_{xz} \sin \varphi_i; \\
\gamma_{31}^i &= \gamma_{xz} \cos \varphi_i + \gamma_{yz} \sin \varphi_i; \\
\gamma_{12}^i &= (\varepsilon_y - \varepsilon_x) \sin 2\varphi_i + \gamma_{xy} \cos 2\varphi_i.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Получим соотношения, определяющие связь между напряжениями и деформациями в системе координат (x, y, z). Для этого в (2.37) подставим (2.39), а затем с помощью полученных выражений исключим из статических соотношений (2.38)

$$\begin{aligned}
\sigma_x^i &= b_{11}^i \varepsilon_x + b_{12}^i \varepsilon_y + b_{13}^i \varepsilon_z + b_{16}^i \gamma_{xy} - b_{T1}^i T_i; \\
\sigma_y^i &= b_{12}^i \varepsilon_x + b_{22}^i \varepsilon_y + b_{23}^i \varepsilon_z + b_{26}^i \gamma_{xy} - b_{T2}^i T_i; \\
\sigma_z^i &= b_{13}^i \varepsilon_x + b_{23}^i \varepsilon_y + b_{33}^i \varepsilon_z + b_{36}^i \gamma_{xy} - b_{T3}^i T_i; \\
\tau_{yz}^i &= b_{44}^i \gamma_{yz} + b_{45}^i \gamma_{xz}; \\
\tau_{zx}^i &= b_{45}^i \gamma_{yz} + b_{55}^i \gamma_{xz}; \\
\tau_{xy}^i &= b_{16}^i \varepsilon_x + b_{26}^i \varepsilon_y + b_{36}^i \varepsilon_z + b_{66}^i \gamma_{xy} - b_{T6}^i T_i.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Матричная формула записи имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x^i \\ \sigma_y^i \\ \sigma_z^i \\ \tau_{yz}^i \\ \tau_{zx}^i \\ \tau_{xy}^i \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cccccc} b_{11}^i & b_{12}^i & b_{13}^i & 0 & 0 & b_{16}^i \\ b_{12}^i & b_{22}^i & b_{23}^i & 0 & 0 & b_{26}^i \\ b_{13}^i & b_{23}^i & b_{33}^i & 0 & 0 & b_{36}^i \\ 0 & 0 & 0 & b_{44}^i & b_{45}^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{45}^i & b_{55}^i & 0 \\ b_{16}^i & b_{26}^i & b_{36}^i & 0 & 0 & b_{66}^i \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} b_{T1}^i \\ b_{T2}^i \\ b_{T3}^i \\ 0 \\ 0 \\ b_{T6}^i \end{array} \right\} T_i \quad (2.41)$$

где  $b_{pq}^i$  – коэффициенты преобразования характеристик для ортотропного материала в осях  $(1, 2, 3)$  к осям  $(x, y, z)$  представлены ниже

$$\begin{aligned}
b_{11}^i &= \bar{E}_1^i(1 - \mu_{23}^i \mu_{32}^i) \cos^4 \varphi_i + \bar{E}_1^i(\mu_{21}^i + \mu_{23}^i \mu_{31}^i) \cos^2 \varphi_i \sin^2 \varphi_i + \\
&\quad + \bar{E}_2^i(\mu_{12}^i + \mu_{13}^i \mu_{32}^i) \cos^2 \varphi_i \sin^2 \varphi_i + \bar{E}_2^i(1 - \mu_{13}^i \mu_{31}^i) \sin^4 \varphi_i + G_{12}^i \sin^2 2\varphi_i; \\
b_{12}^i &= b_{21}^i = \bar{E}_1^i(\mu_{21}^i + \mu_{23}^i \mu_{31}^i) \cos^4 \varphi_i + \bar{E}_2^i(1 - \mu_{13}^i \mu_{31}^i) \cos^2 \varphi_i \sin^2 \varphi_i + \\
&\quad + \bar{E}_1^i(1 - \mu_{23}^i \mu_{32}^i) \cos^2 \varphi_i \sin^2 \varphi_i + \bar{E}_2^i(\mu_{12}^i + \mu_{13}^i \mu_{32}^i) \sin^4 \varphi_i - G_{12}^i \sin^2 2\varphi_i; \\
b_{13}^i &= b_{31}^i = \bar{E}_1^i(\mu_{31}^i + \mu_{21}^i \mu_{32}^i) \cos^2 \varphi_i + \bar{E}_2^i(\mu_{32}^i + \mu_{12}^i \mu_{31}^i) \sin^2 \varphi_i; \\
b_{16}^i &= b_{61}^i = \bar{E}_1^i(1 - \mu_{23}^i \mu_{32}^i) \cos^3 \varphi_i \sin \varphi_i - \bar{E}_1^i(\mu_{21}^i + \mu_{23}^i \mu_{31}^i) \cos^3 \varphi_i \sin \varphi_i + \\
&\quad + \bar{E}_2^i(1 - \mu_{13}^i \mu_{31}^i) \cos \varphi_i \sin^3 \varphi_i + \bar{E}_1^i(\mu_{12}^i + \mu_{13}^i \mu_{32}^i) \cos \varphi_i \sin^3 \varphi_i - G_{12}^i \sin^2 2\varphi_i; \\
b_{T1}^i &= \bar{E}_1^i \left[ (1 - \mu_{23}^i \mu_{32}^i) \alpha_1^i + (\mu_{21}^i + \mu_{23}^i \mu_{31}^i) \alpha_2^i + (\mu_{31}^i + \mu_{21}^i \mu_{32}^i) \alpha_3^i \right] \cos^2 \varphi_i + \\
&\quad + \bar{E}_2^i \left[ (\mu_{12}^i + \mu_{13}^i \mu_{32}^i) \alpha_1^i + (1 - \mu_{13}^i \mu_{31}^i) \alpha_2^i + (\mu_{32}^i + \mu_{12}^i \mu_{31}^i) \alpha_3^i \right] \sin^2 \varphi_i; \\
b_{22}^i &= \bar{E}_1^i(1 - \mu_{23}^i \mu_{32}^i) \sin^4 \varphi_i + \bar{E}_2^i(1 - \mu_{13}^i \mu_{31}^i) \cos^4 \varphi_i + \\
&\quad + \bar{E}_1^i(\mu_{21}^i + \mu_{23}^i \mu_{31}^i) \cos^2 \varphi_i \sin^2 \varphi_i + \bar{E}_2^i(\mu_{12}^i + \mu_{13}^i \mu_{32}^i) \cos^2 \varphi_i \sin^2 \varphi_i + G_{12}^i \sin^2 2\varphi_i; \\
b_{23}^i &= b_{32}^i = \bar{E}_1^i(\mu_{31}^i + \mu_{21}^i \mu_{32}^i) \sin^2 \varphi_i + \bar{E}_2^i(\mu_{32}^i + \mu_{12}^i \mu_{31}^i) \cos^2 \varphi_i; \\
b_{26}^i &= b_{62}^i = \bar{E}_1^i(1 - \mu_{23}^i \mu_{32}^i) \cos \varphi_i \sin^3 \varphi_i - \bar{E}_2^i(1 - \mu_{13}^i \mu_{31}^i) \cos^3 \varphi_i \sin \varphi_i - \\
&\quad - \bar{E}_1^i(\mu_{21}^i + \mu_{23}^i \mu_{31}^i) \cos \varphi_i \sin^3 \varphi_i + \bar{E}_2^i(\mu_{12}^i + \mu_{13}^i \mu_{32}^i) \cos^3 \varphi_i \sin \varphi_i + G_{12}^i \sin^2 2\varphi_i; \\
b_{T2}^i &= \bar{E}_1^i \left[ (1 - \mu_{23}^i \mu_{32}^i) \alpha_1^i + (\mu_{21}^i + \mu_{23}^i \mu_{31}^i) \alpha_2^i + (\mu_{31}^i + \mu_{21}^i \mu_{32}^i) \alpha_3^i \right] \sin^2 \varphi_i + \\
&\quad + \bar{E}_2^i \left[ (\mu_{12}^i + \mu_{13}^i \mu_{32}^i) \alpha_1^i + (1 - \mu_{13}^i \mu_{31}^i) \alpha_2^i + (\mu_{32}^i + \mu_{12}^i \mu_{31}^i) \alpha_3^i \right] \cos^2 \varphi_i; \\
b_{33}^i &= \bar{E}_3^i(1 - \mu_{12}^i \mu_{21}^i); \\
b_{36}^i &= b_{63}^i = \bar{E}_3^i(\mu_{13}^i + \mu_{12}^i \mu_{23}^i) \sin \varphi_i \cos \varphi_i - \bar{E}_3^i(\mu_{23}^i + \mu_{13}^i \mu_{21}^i) \sin \varphi_i \cos \varphi_i; \\
b_{T3}^i &= \bar{E}_3^i \left[ (\mu_{13}^i + \mu_{12}^i \mu_{23}^i) \alpha_1^i + (\mu_{23}^i + \mu_{13}^i \mu_{21}^i) \alpha_2^i + (1 - \mu_{12}^i \mu_{21}^i) \alpha_3^i \right]; \\
b_{44}^i &= G_{23}^i \cos^2 \varphi_i + G_{31}^i \sin^2 \varphi_i; \\
b_{45}^i &= b_{54}^i = G_{31}^i \sin \varphi_i \cos \varphi_i - G_{23}^i \sin \varphi_i \cos \varphi_i; \\
b_{55}^i &= G_{31}^i \cos^2 \varphi_i + G_{23}^i \sin^2 \varphi_i; \\
b_{66}^i &= \bar{E}_1^i(1 - \mu_{23}^i \mu_{32}^i) \cos^2 \varphi_i \sin^2 \varphi_i - \bar{E}_1^i(\mu_{21}^i + \mu_{23}^i \mu_{31}^i) \cos^2 \varphi_i \sin^2 \varphi_i + \\
&\quad + \bar{E}_2^i(1 - \mu_{13}^i \mu_{31}^i) \cos^2 \varphi_i \sin^2 \varphi_i - \bar{E}_2^i(\mu_{21}^i + \mu_{13}^i \mu_{32}^i) \cos^2 \varphi_i \sin^2 \varphi_i + G_{12}^i \sin^2 2\varphi_i; \\
b_{T6}^i &= \bar{E}_1^i \left[ (\mu_{12}^i + \mu_{13}^i \mu_{32}^i) \alpha_1^i + (1 - \mu_{13}^i \mu_{31}^i) \alpha_2^i + (\mu_{32}^i + \mu_{12}^i \mu_{31}^i) \alpha_3^i \right] \cos \varphi_i \sin \varphi_i - \\
&\quad - \bar{E}_2^i \left[ (1 - \mu_{23}^i \mu_{32}^i) \alpha_1^i + (\mu_{21}^i + \mu_{23}^i \mu_{31}^i) \alpha_2^i + (\mu_{31}^i + \mu_{21}^i \mu_{32}^i) \alpha_3^i \right] \cos \varphi_i \sin \varphi_i.
\end{aligned}$$

Запишем уравнения равновесия в отсутствии силовых воздействий

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x^i}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^i}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^i}{\partial z} &= 0; \\
\frac{\partial \tau_{yx}^i}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^i}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}^i}{\partial z} &= 0; \\
\frac{\partial \tau_{zx}^i}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^i}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^i}{\partial z} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Поставляя выражения из (2.41) в (2.42) и продифференцируем с учетом геометрических отношений  $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ ,  $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$ ,  $\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$ ,

$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$ ,  $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$  получим

$$\begin{aligned}
&b_{11}^i \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_{66}^i \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_{55}^i \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + b_{16}^i \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b_{26}^i \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + b_{45}^i \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2b_{16}^i \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \\
&+ (b_{12}^i + b_{66}^i) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (b_{13}^i + b_{55}^i) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + (b_{36}^i + b_{45}^i) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} - b_{T1}^i \frac{\partial T_i}{\partial x} - b_{T6}^i \frac{\partial T_i}{\partial y} = 0; \\
&b_{16}^i \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_{16}^i \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_{45}^i \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + b_{66}^i \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b_{22}^i \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + b_{44}^i \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (b_{12}^i + b_{66}^i) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \\
&+ 2b_{26}^i \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (b_{36}^i + b_{45}^i) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + (b_{23}^i + b_{44}^i) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} - b_{T6}^i \frac{\partial T_i}{\partial x} - b_{T2}^i \frac{\partial T_i}{\partial y} = 0; \\
&b_{55}^i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b_{44}^i \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + b_{33}^i \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2b_{45}^i \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + (b_{13}^i + b_{55}^i) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + (b_{45}^i + b_{36}^i) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \\
&+ (b_{36}^i + b_{45}^i) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + (b_{23}^i + b_{44}^i) \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} - b_{T3}^i \frac{\partial T_i}{\partial z} = 0.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Уравнения (2.43) составляют полную систему дифференциальных уравнений относительно трех искомым функций  $u$ ,  $v$  и  $w$ . Предполагаем что,

деформации постоянные по толщине и принимаем в виде  $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = e_x = const$ ,

$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = e_y = const$  и  $\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = g_{xy} = const$ . Тогда из уравнений (2.43)

получим

$$\begin{aligned} b_{55}^i \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + b_{54}^i \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (b_{63}^i + b_{54}^i) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + (b_{13}^i + b_{55}^i) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} - b_{T1}^i \frac{\partial T_i}{\partial x} - b_{T6}^i \frac{\partial T_i}{\partial y} &= 0; \\ b_{45}^i \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + b_{44}^i \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (b_{23}^i + b_{44}^i) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + (b_{63}^i + b_{45}^i) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} - b_{T2}^i \frac{\partial T_i}{\partial y} - b_{T6}^i \frac{\partial T_i}{\partial x} &= 0; \\ b_{33}^i \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + b_{55}^i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b_{44}^i \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (b_{45}^i + b_{54}^i) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - b_{T3}^i \frac{\partial T_i}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (2.44)$$

В первой приближенности нашей модели расчета, мы считаем, что перемещение по  $z$  не зависит от  $x$  и  $y$ . Тогда из последнего уравнения получим

$$b_{33}^i \frac{\partial^2 w_i}{\partial z^2} - b_{T3}^i \frac{\partial T_i}{\partial z} = 0 \quad (2.45)$$

Запишем постановку задачи градиентной термоупругости для плоской деформации. Деформации связаны с перемещениями классическими соотношениями Коши. Обобщенный закон Гука также сохраняет классический вид, и напряжения с учетом влияния температуры могут быть записаны в следующей форме

$$\begin{aligned} \sigma_x^i &= b_{11}^i e_x + b_{12}^i e_y + b_{13}^i \frac{\partial w_i}{\partial z} + b_{16}^i g_{xy} - b_{T1}^i T_i; \\ \sigma_y^i &= b_{12}^i e_x + b_{22}^i e_y + b_{23}^i \frac{\partial w_i}{\partial z} + b_{26}^i g_{xy} - b_{T2}^i T_i; \\ \sigma_z^i &= b_{13}^i e_x + b_{23}^i e_y + b_{33}^i \frac{\partial w_i}{\partial z} + b_{36}^i g_{xy} - b_{T3}^i T_i; \\ \tau_{xy}^i &= b_{16}^i e_x + b_{26}^i e_y + b_{36}^i \frac{\partial w_i}{\partial z} + b_{66}^i g_{xy} - b_{T6}^i T_i, \end{aligned} \quad (2.46)$$

где  $e_x$  и  $e_y$ —постоянные деформации в направлениях осей  $x$  и  $y$ ,  $g_{xy}$ —постоянная деформация сдвига в плоскости  $(x, y)$ ,  $T_i = T_i(z)$ —функция, определяющая изменение температурного поля относительно температуры  $T_0$ , при которой в среде не возникает температурных деформаций.

Уравнения равновесия в перемещениях могут быть получены на основе вариационного принципа Лагранжа с учетом однопараметрического варианта градиентной теории и имеют неклассический вид и обладают повышенным порядком, по сравнению с классической постановкой. Для случая равномерного нагрева в направлении координаты  $x$  и  $y$  первые два уравнения равновесия в (2.44) удовлетворяются автоматически, а третье уравнение равновесия в направлении оси  $z$  (нормали к поверхности слоя) с добавлением градиентных составляющих преобразуется к следующему виду

$$b_{33}^i \frac{\partial^2 w_i}{\partial z^2} - \frac{(b_{33}^i)^2}{C_i} \frac{\partial^4 w_i}{\partial z^4} + \alpha_3^i \frac{(b_{33}^i)^2}{C_i} \frac{\partial^3 T_i}{\partial z^3} - b_{T3}^i \frac{\partial T_i}{\partial z} = 0. \quad (2.47)$$

Граничные условия по напряжениям

$$\sigma_z^i = b_{33}^i \frac{\partial w_i}{\partial z} + b_{13}^i e_x + b_{23}^i e_y + b_{36}^i g_{xy} - \frac{(b_{33}^i)^2}{C_i} \frac{\partial^3 w_i}{\partial z^3} + \alpha_3^i \frac{(b_{33}^i)^2}{C_i} \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} - b_{T3}^i T_i. \quad (2.48)$$

Граничные условия по моментным напряжениям

$$m_{zz}^i = \frac{(b_{33}^i)^2}{C_i} \frac{\partial^2 w_i}{\partial z^2} - \alpha_3^i \frac{(b_{33}^i)^2}{C_i} \frac{\partial T_i}{\partial z}. \quad (2.49)$$

Модели расчета (рис. 2.5) представляют симметричные слоистые композиты из  $n$ —х слоев с прослойкой между слоями.

Разрешающие уравнения для  $n$  слоев и  $n-1$  прослоек

$$b_{33}^i \frac{\partial^2 w_i^c}{\partial z^2} - \frac{(b_{33}^i)^2}{C_i^c} \frac{\partial^4 w_i^c}{\partial z^4} + \alpha_3 \frac{(b_{33}^i)^2}{C_i^c} \frac{\partial^3 T_i^c}{\partial z^3} - b_{T3}^i \frac{\partial T_i^c}{\partial z} = 0; \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} & (2\mu_j + \lambda_j) \frac{\partial^2 w_j^{np}}{\partial z^2} - \frac{(2\mu_j + \lambda_j)^2}{C_j^{np}} \frac{\partial^4 w_j^{np}}{\partial z^4} + \\ & + \alpha_j \left( \frac{(2\mu_j + \lambda_j)^2}{C_j^{np}} \frac{\partial^3 T_j^{np}}{\partial z^3} - 3K_j \frac{\partial T_j^{np}}{\partial z} \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.51)$$

где  $i = 1 \dots n, j = 1 \dots (n-1)$ .

Граничные условия

при  $z = 0$

$$w_1^c = 0;$$

$$\frac{(b_{33}^1)^2}{C_1^c} \frac{\partial^2 w_1^c}{\partial z^2} - \alpha_3^1 \frac{(b_{33}^1)^2}{C_1^c} \frac{\partial T_1^c}{\partial z} = 0. \quad (2.52)$$

при  $z = nH + (n-1)\delta$

$$\frac{(b_{33}^n)^2}{C_n^c} \frac{\partial^2 w_n^c}{\partial z^2} - \alpha_3^n \frac{(b_{33}^n)^2}{C_n^c} \frac{\partial T_n^c}{\partial z} = 0; \quad (2.53)$$

$$b_{33}^n \frac{\partial w_n^c}{\partial z} + b_{13}^n e_x + b_{23}^n e_y + b_{36}^n t_{xy} - \frac{(b_{33}^n)^2}{C_n^c} \frac{\partial^3 w_n^c}{\partial z^3} + \alpha_3^n \frac{(b_{33}^n)^2}{C_n^c} \frac{\partial^2 T_n^c}{\partial z^2} - b_{T3}^n T_n^c = 0.$$

Контактные условия между слоем и прослойкой

при  $z = iH + (i-1)\delta$  и  $z = i(H+\delta), i = 1 \dots (n-1)$

$$\begin{aligned}
w_i^c &= w_i^{np}; \\
\frac{\partial w_i^c}{\partial z} &= \frac{\partial w_i^{np}}{\partial z}; \\
\frac{(b_{33}^i)^2}{C_i^c} \frac{\partial^2 w_i^c}{\partial z^2} - \alpha_3^i \frac{(b_{33}^i)^2}{C_i^c} \frac{\partial T_i^c}{\partial z} &= \frac{(\lambda_i + 2\mu_i)^2}{C_i^{np}} \left( \frac{\partial^2 w_i^{np}}{\partial z^2} - \alpha_i \frac{\partial T_i^{np}}{\partial z} \right); \\
b_{33}^i \frac{\partial w_i^c}{\partial z} + b_{13}^i e_x + b_{23}^i e_y + b_{36}^i t_{xy} - \frac{(b_{33}^i)^2}{C_i^c} \frac{\partial^3 w_i^c}{\partial z^3} + \alpha_3^i \frac{(b_{33}^i)^2}{C_i^c} \frac{\partial^2 T_i^c}{\partial z^2} - \\
-b_{T3}^i T_i^c &= (2\mu_i + \lambda_i) \frac{\partial w_i^{np}}{\partial z} + \lambda_i e_y + \lambda_i e_x - 3K_i \alpha_i T_i^{np}.
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Выражения для нормальных и касательных напряжений в плоскости  $(x, y)$  для каждого слоя и прослойки имеют вид

$$\begin{aligned}
\sigma_{xi}^c &= b_{11}^i e_x + b_{12}^i e_y + b_{13}^i \frac{\partial w_i^c}{\partial z} + b_{16}^i g_{xy} - b_{T1}^i T_i^c; \\
\sigma_{yi}^c &= b_{12}^i e_x + b_{22}^i e_y + b_{23}^i \frac{\partial w_i^c}{\partial z} + b_{26}^i g_{xy} - b_{T2}^i T_i^c; \\
\tau_{xyi}^c &= b_{16}^i e_x + b_{26}^i e_y + b_{36}^i \frac{\partial w_i^c}{\partial z} + b_{66}^i g_{xy} - b_{T6}^i T_i^c; \\
\sigma_{xj}^{np} &= (2\mu_j + \lambda_j) e_x + \lambda_j e_y + \lambda_j \frac{\partial w_j^{np}}{\partial z} - 3K_j \alpha_j T_j^{np}; \\
\sigma_{yj}^{np} &= (2\mu_j + \lambda_j) e_y + \lambda_j e_x + \lambda_j \frac{\partial w_j^{np}}{\partial z} - 3K_j \alpha_j T_j^{np}; \\
\tau_{xyj}^{np} &= G \cdot g_{xy}.
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Замыкающими уравнениями для определения параметров  $e_x$ ,  $e_y$  и  $g_{xy}$  являются интегральные уравнения равновесия в направлении осей  $x$  и  $y$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \left( \int_{(i-1)(H+h)}^{H+(i-1)(H+h)} \sigma_{xi}^c dz + \int_{H+(i-1)(H+h)}^{i(H+h)} \sigma_{xi}^{np} dz + \int_{n(H+h)}^{H+n(H+h)} \sigma_{xn}^{np} dz \right) = 0; \\
& \sum_{i=1}^n \left( \int_{(i-1)(H+h)}^{H+(i-1)(H+h)} \sigma_{yi}^c dz + \int_{H+(i-1)(H+h)}^{i(H+h)} \sigma_{yi}^{np} dz + \int_{n(H+h)}^{H+n(H+h)} \sigma_{yn}^{np} dz \right) = 0; \\
& \sum_{i=1}^n \left( \int_{(i-1)(H+h)}^{H+(i-1)(H+h)} \tau_{xyi}^c dz + \int_{H+(i-1)(H+h)}^{i(H+h)} \tau_{xyi}^{np} dz + \int_{n(H+h)}^{H+n(H+h)} \tau_{xyn}^{np} dz \right) = 0,
\end{aligned} \tag{2.56}$$

где  $i = 1 \dots (n-1)$ .

Из решения этой системы найдем постоянные деформации  $e_x$ ,  $e_y$  и сдвиг  $g_{xy}$  в плоскости.

Температурное поле по толщине исследуемой многослойной композитной среды задается или находится с помощью градиентной модели теплопроводности, предложенная в работах [19]. Для одномерной задачи разрешающее уравнение градиентной теплопроводности имеет вид

$$k_i (T_i'' - \lambda_i^2 T_i''') = 0; \quad i = 1 \dots (2n-1), \tag{2.57}$$

где  $k_i$  – коэффициент теплопроводности,  $\lambda_i^2 = \frac{k_i}{C_i^T}$  – градиентный параметр.

Общее решение для каждого слоя имеет вид

$$\begin{aligned}
T_i(z) = & \frac{k_i}{C_i^T} e^{\sqrt{\frac{C_i^T}{k_i}}(z-(i-1)(H+\delta)-H)} A_i + \frac{k_i}{C_i^T} e^{\sqrt{\frac{C_i^T}{k_i}}((i-1)(H+\delta)-z)} B_i + \\
& + D_i z + E_i,
\end{aligned} \tag{2.58}$$

где  $i = 1 \dots (2n-1)$ .

Краевые условия на поверхностях контакта для градиентной модели теплопроводности [19] определяются для температуры, полного теплового

потока  $\frac{\partial T}{\partial z} = q$ , обобщенного теплового потока  $q = -k \frac{d}{dz} (T - \frac{1}{C^T} \frac{d}{dz} (T))$  и скорости изменения полного теплового потока  $k \frac{1}{C^T} \frac{d^2 T}{dz^2}$ , записанного с учетом термосопротивления  $R_s \frac{dT}{dz}$ . Параметр  $R_s$  является характеристикой теплопроводности границы тела. В результате имеем следующие краевые условия

$$\begin{aligned}
 T_i(z) &= T_{i+1}(z); \\
 \frac{dT_i(z)}{dz} &= \frac{dT_{i+1}(z)}{dz}; \\
 k_i \frac{dT_i(z)}{dz} - \frac{k_i^2}{C_i^T} \frac{d^3 T_i(z)}{dz^3} &= k_{i+1} \frac{dT_{i+1}(z)}{dz} - \frac{k_{i+1}^2}{C_{i+1}^T} \frac{d^3 T_{i+1}(z)}{dz^3}, \\
 \frac{k_i^2}{C_i^T} \frac{d^2 T_i(z)}{dz^2} - R_s \frac{dT_i(z)}{dz} &= \frac{k_{i+1}^2}{C_{i+1}^T} \frac{d^2 T_{i+1}(z)}{dz^2},
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

где  $i = 1 \dots (2n-2)$ .

На верхней и нижней поверхности слоев краевые условия имеют соответственно вид

при  $z = 0$  (на верхней поверхности)

$$\begin{aligned}
 T_1(z) &= T_1; \\
 \frac{k_1^2}{C_1^T} \frac{\partial^2 T_1(z)}{\partial z^2} &= 0,
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

при  $z = nH + (n-1)\delta$  (на нижней поверхности)

$$\begin{aligned}
 T_{2n-1}(z) &= T_2; \\
 \frac{k_{2n-1}^2}{C_{2n-1}^T} \frac{\partial^2 T_{2n-1}(z)}{\partial z^2} &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

Поставляя (2.58) в (2.59)-(2.61), найдём коэффициенты  $A_i, B_i, D_i, E_i$ .

Полученные значения для полей температуры используются для решения задачи градиентной термоупругости (2.50)-(2.54) и (2.56). В результате, можно найти распределение нормальных и касательных напряжений в плоскости  $(x, y)$  в каждом  $i$ -ом слое и в каждой  $j$ -ой прослойке рассматриваемой композитной панели.

### 2.3.1. НДС многослойной композитной панели под действием постоянного температурного поля

Рассмотрим симметричные слоистые композиты с продольно-поперечной укладкой слоев типа  $[0, 90_2]_s$ , с укладкой слоев только  $0^\circ$  и  $45^\circ$  типа  $[0, \pm 45]_s$  и с квазиизотропной укладкой типа  $[0, \pm 45, 90]_s$ .

В расчете используем следующие материалы с известными свойствами: температурные коэффициенты линейного расширения  $i$ -го композитного слоя  $\alpha_1^i = 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ ,  $\alpha_2^i = 30 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ ,  $\alpha_3^i = 25 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ , градиентные параметры оценивают величиной  $C_i^c = 10^6 \text{ ГПа/мм}^2$ , температурный коэффициент линейного расширения прослойки  $\alpha = 60 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ , толщина слоя  $H = 100 \text{ мкм}$ , толщина прослойки  $\delta = 10 \text{ мкм}$ , градиентный параметр прослойки оценивает величиной  $C_i^{mp} = 10^7 \text{ ГПа/мм}^2$  приращение температуры среды  $\Delta T = -50 \text{ } ^\circ\text{C}$ .

Механические характеристики композитного материала и прослойки, использованные в расчетах представляют в таблице 2.1.

С помощью вышей разрабатываемой модели расчета получим НДС для различных структур. На рис. 2.6–2.8 показан результат расчета НДС для слоистого композита с продольно-поперечной укладкой слоев типа  $[0, 90_2]_s$  со сравнением в программе «ANSYS» (для этой структуры отсутствует сдвиг).

## Характеристики композитного материала.

Характеристики слоя композитного материала	Характеристики прослойки
$E_1 = 137 \text{ ГПа}$	$E = 1,176 \text{ ГПа}$
$E_2 = 6,86 \text{ ГПа}$	$\nu = 0,3$
$E_3 = 6,86 \text{ ГПа}$	
$G_{12} = 4,41 \text{ ГПа}$	
$G_{13} = 4,41 \text{ ГПа}$	
$G_{23} = 4,41 \text{ ГПа}$	
$\nu_{12} = 0,28$	
$\nu_{13} = 0,21$	
$\nu_{23} = 0,21$	

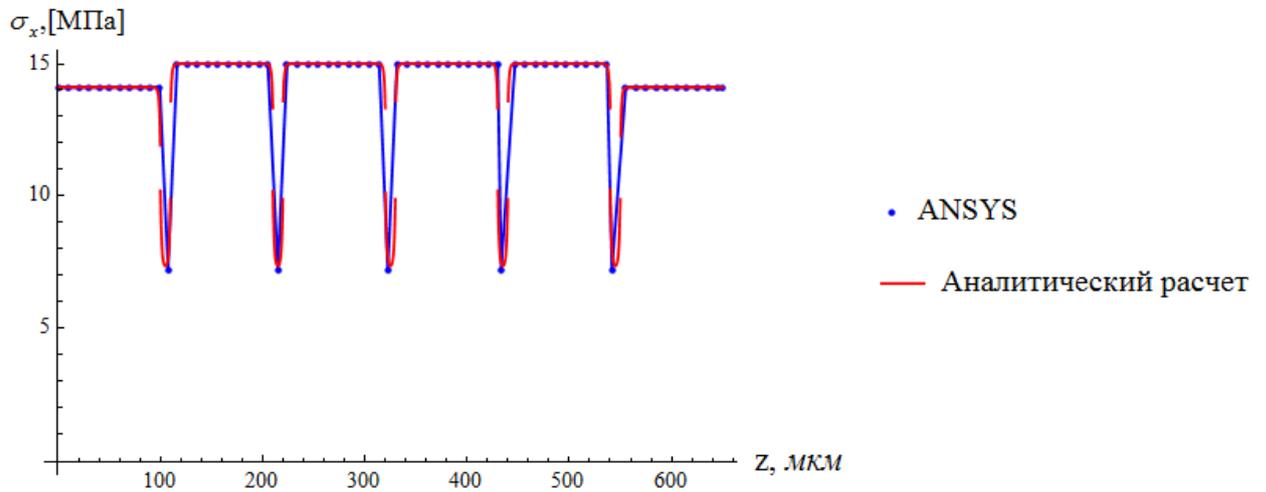


Рис. 2.6. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_x$  по толщине слоистого композита с продольно-поперечной укладкой слоев типа  $[0, 90_2]_s$ .

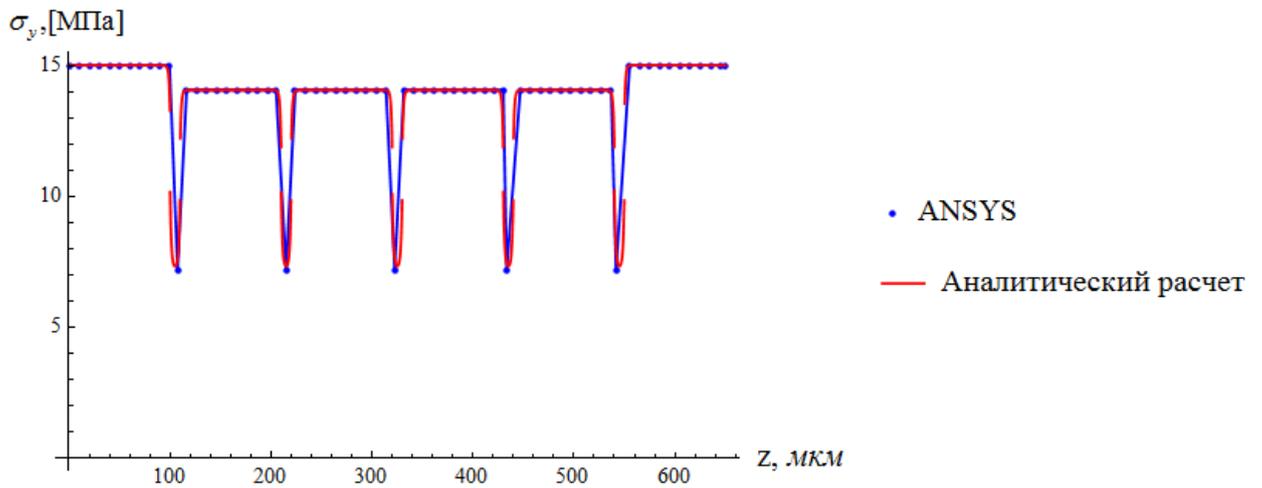


Рис. 2.7. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_y$  по толщине слоистого композита с продольно-поперечной укладкой слоев типа  $[0, 90_2]_s$ .

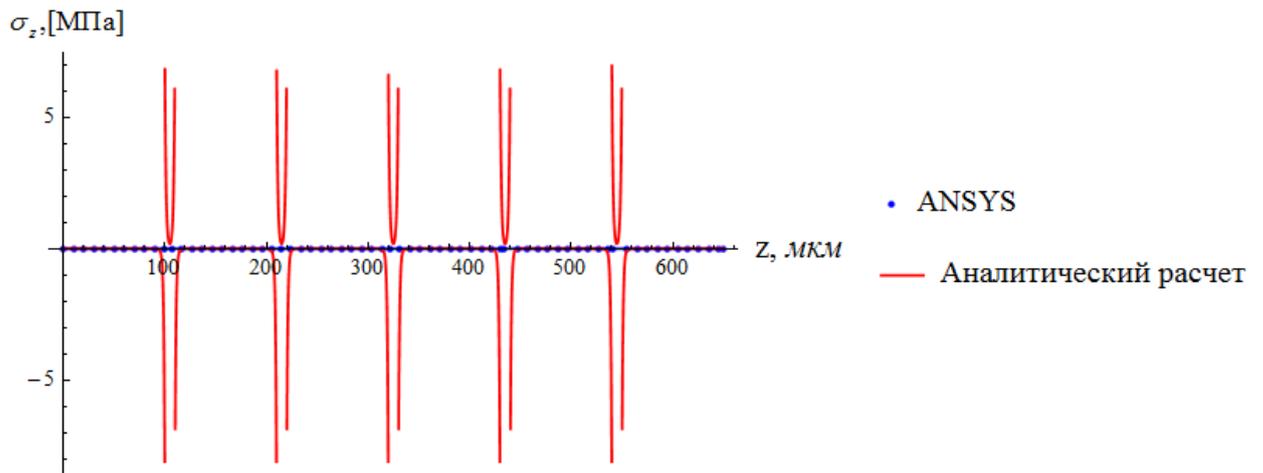


Рис. 2.8. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_z$  по толщине слоистого композита с продольно-поперечной укладкой слоев типа  $[0, 90_2]_s$ .

Результат расчета слоистого композита с укладкой слоев только  $0^\circ$  и  $45^\circ$  типа  $[0, \pm 45^\circ]_s$  показан на рис. 2.9–2.11.

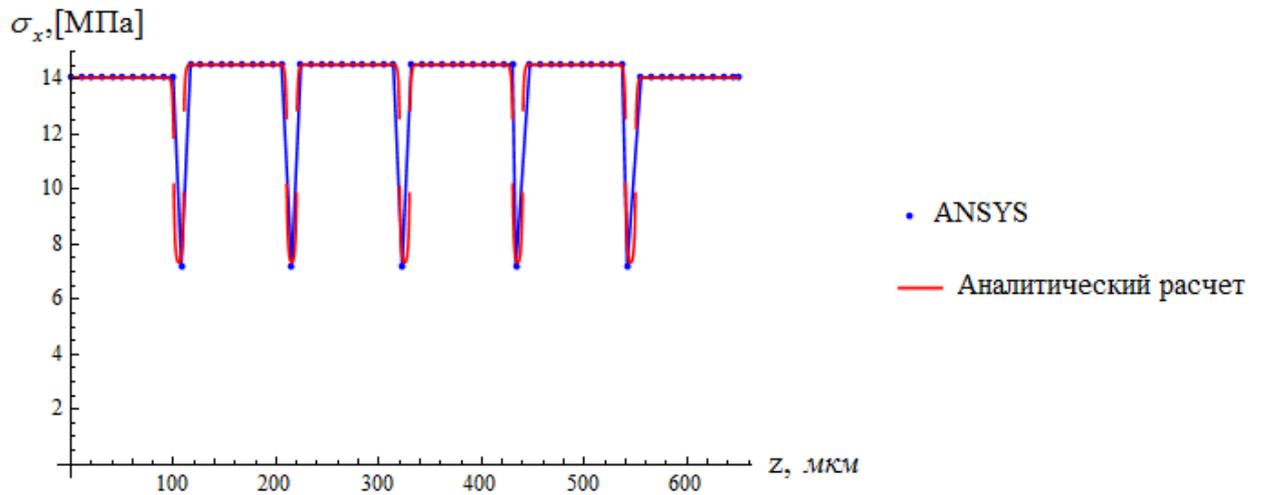


Рис. 2.9. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_x$  по толщине слоистого композита с укладкой слоев только  $0^\circ$  и  $45^\circ$  типа  $[0, \pm 45^\circ]_s$ .

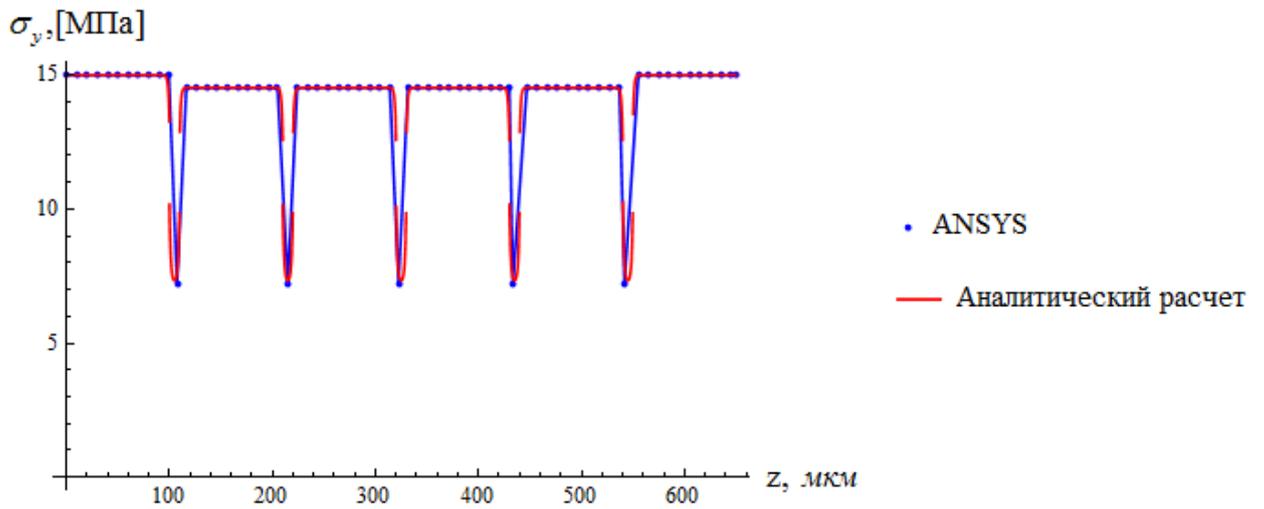


Рис. 2.10. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_y$  по толщине слоистого композита с укладкой слоев только  $0^\circ$  и  $45^\circ$  типа  $[0, \pm 45^\circ]_s$ .

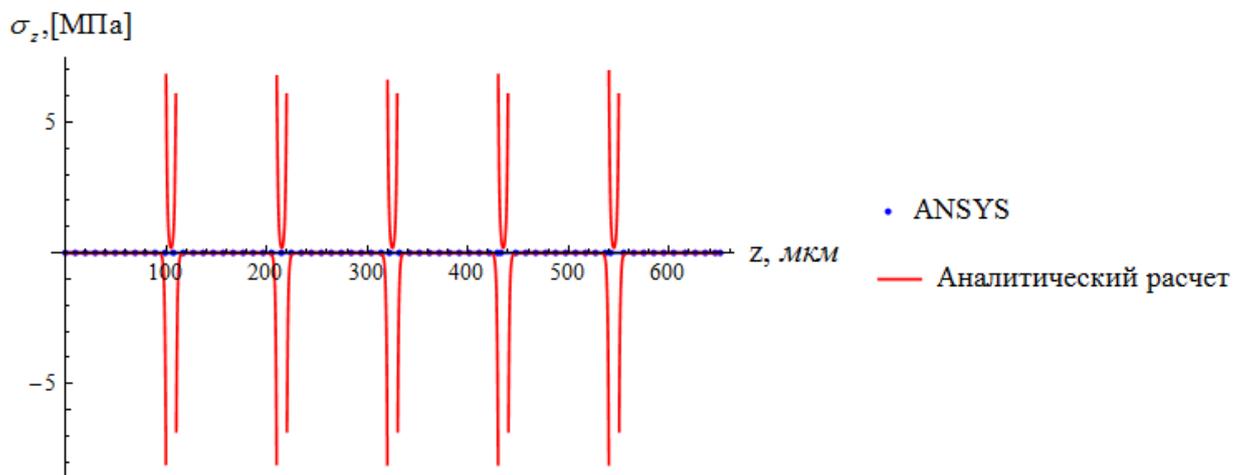


Рис. 2.11. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_z$  по толщине слоистого композита с укладкой слоев только  $0^\circ$  и  $45^\circ$  типа  $[0, \pm 45^\circ]_s$ .

Результат расчета слоистого композита с квазиизотропной укладкой типа  $[0, \pm 45^\circ, 90^\circ]_s$  при воздействии постоянной температуры показан на рис. 2.12–2.14.

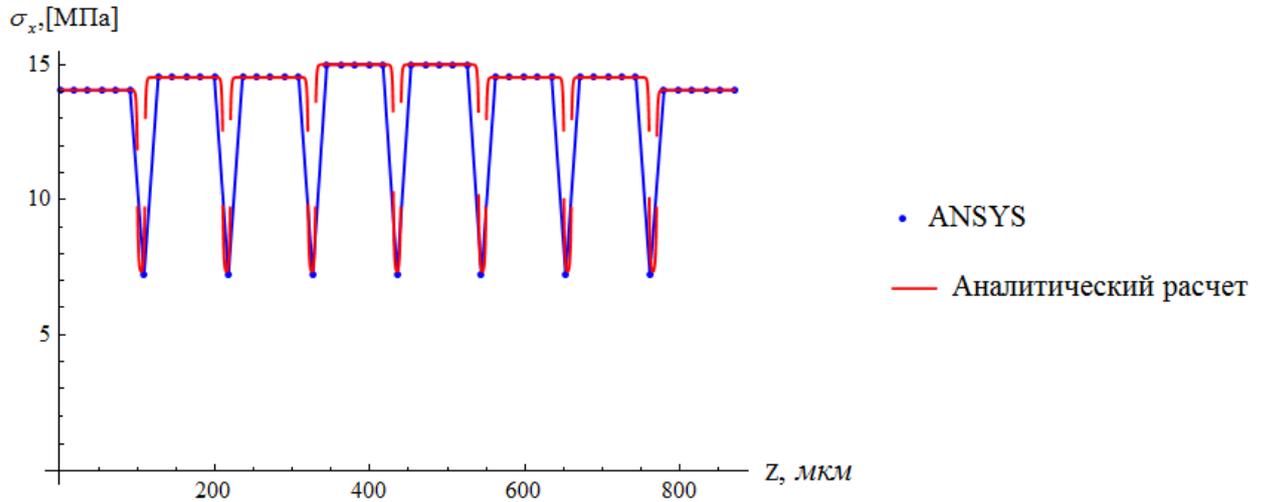


Рис. 2.12. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_x$  по толщине слоистого композита с квазиизотропной укладкой типа  $[0, \pm 45^\circ, 90^\circ]_s$ .

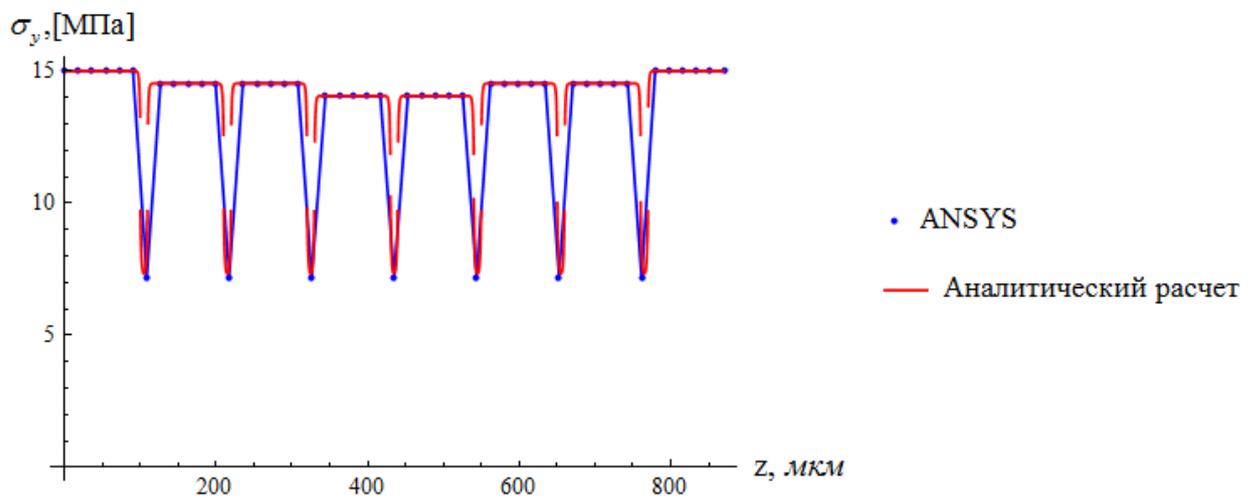


Рис. 2.13. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_y$  по толщине слоистого композита с квазиизотропной укладкой типа  $[0, \pm 45^\circ, 90^\circ]_s$ .

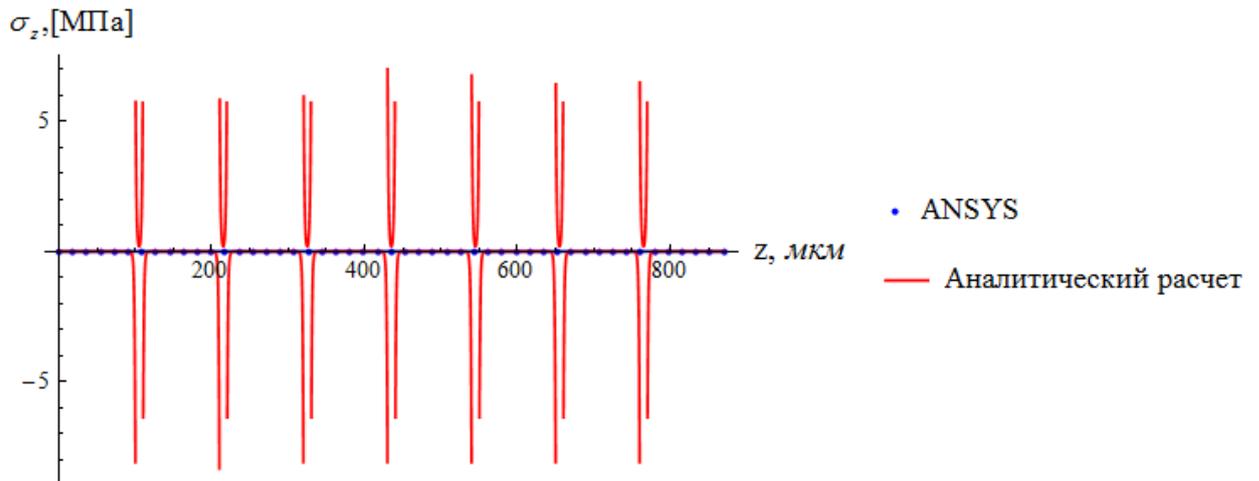


Рис. 2.14. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_z$  по толщине слоистого композита с квазиизотропной укладкой типа  $[0, \pm 45^\circ, 90^\circ]_s$ .

Как показали результаты расчетов при действии постоянной температуры на границы слоев в прослойках возникают напряжения существенно отличающиеся от напряжений в слоях.

### 2.3.2. НДС многослойной композитной панели под действием переменного температурного поля

На рис. 2.15-2.25 показаны результаты расчета для слоистого композита с продольно-поперечной укладкой слоев типа  $[0, 90^\circ]_s$ , укладкой слоев только  $0^\circ$  и  $45^\circ$  типа  $[0, \pm 45^\circ]_s$  и квазиизотропной укладкой типа  $[0, 90^\circ, \pm 45^\circ]_s$ .

Температурное поле по толщине исследуемой многослойной композитной среды находится с помощью градиентной модели теплопроводности, предложенная в работах [19] с учетом перепадом температуры. Температура на верхней границе  $T_1 = 80^\circ\text{C}$  и температура на нижней границе  $T_2 = -50^\circ\text{C}$ .

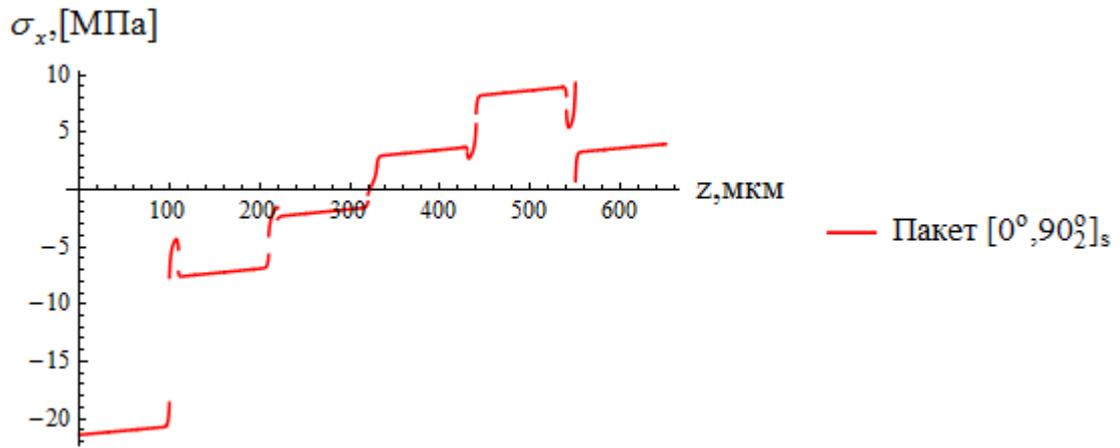


Рис. 2.15. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_x$  по толщине слоистого композита с продольно-поперечной укладкой слоев типа  $[0, 90_2^\circ]_s$ .

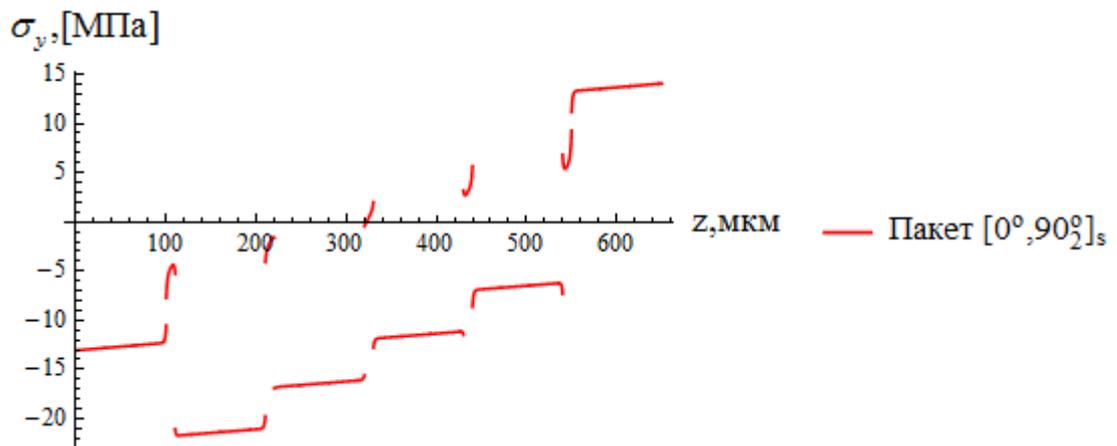


Рис. 2.16. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_y$  по толщине слоистого композита с продольно-поперечной укладкой слоев типа  $[0, 90_2^\circ]_s$ .

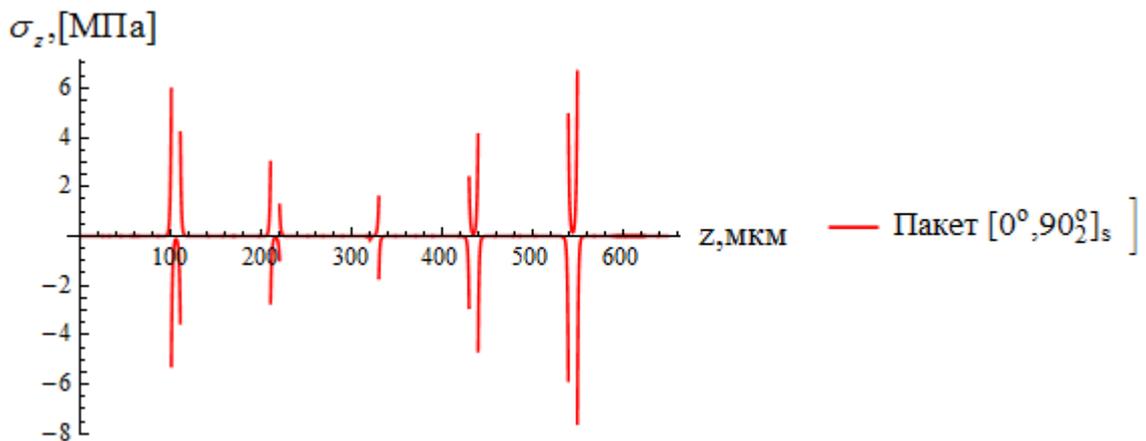


Рис. 2.17. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_z$  по толщине слоистого композита с продольно-поперечной укладкой слоев типа  $[0, 90_2^\circ]_s$ .

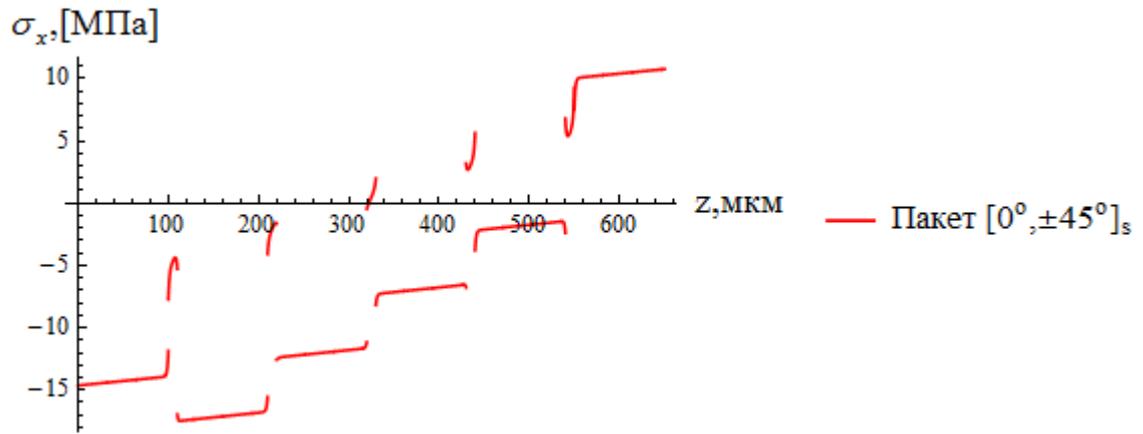


Рис. 2.18. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_x$  по толщине слоистого композита с укладкой слоев только  $0^\circ$  и  $45^\circ$  типа  $[0, \pm 45^\circ]_s$ .

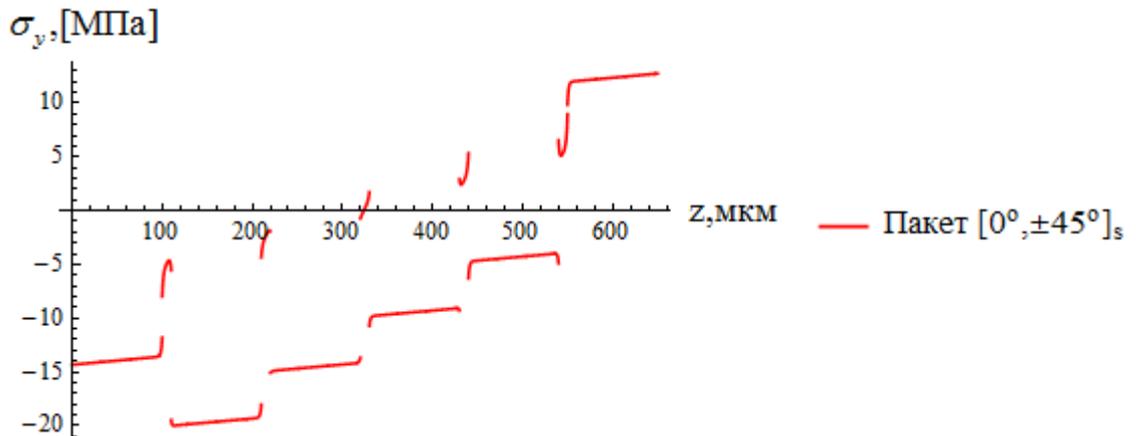


Рис. 2.19. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_y$  по толщине слоистого композита с укладкой слоев только  $0^\circ$  и  $45^\circ$  типа  $[0, \pm 45^\circ]_s$ .

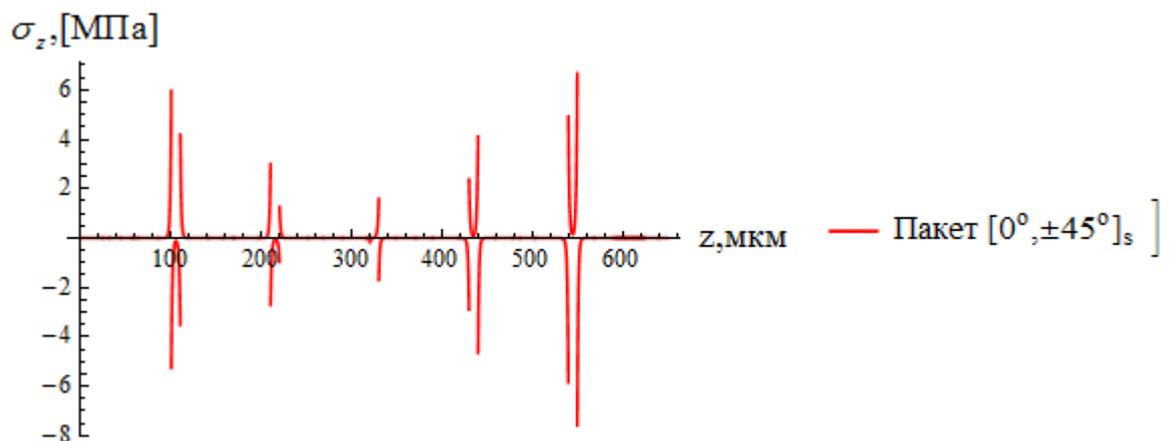


Рис. 2.20. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_z$  по толщине слоистого композита с укладкой слоев только  $0^\circ$  и  $45^\circ$  типа  $[0, \pm 45^\circ]_s$ .

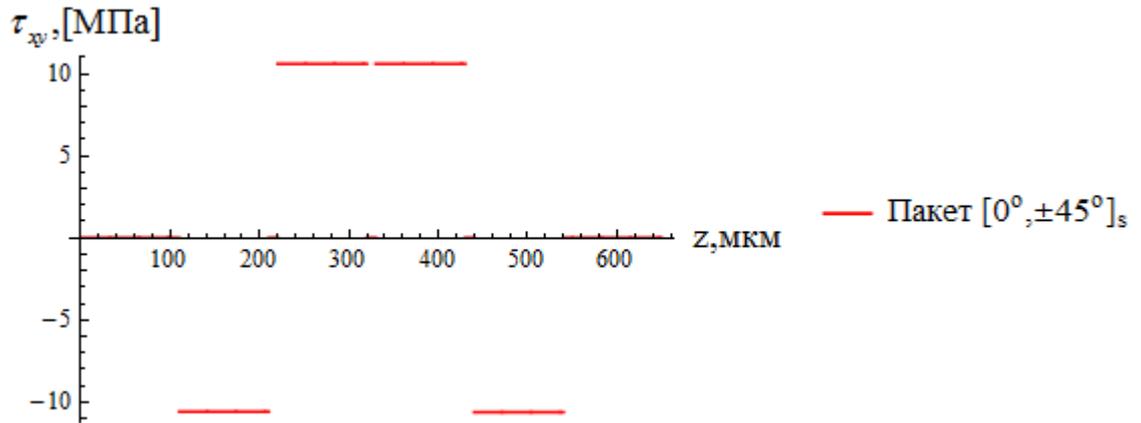


Рис. 2.21. Распределение касательных напряжений  $\tau_{xy}$  по толщине слоистого композита с укладкой слоев только  $0^\circ$  и  $45^\circ$  типа  $[0, \pm 45^\circ]_s$ .

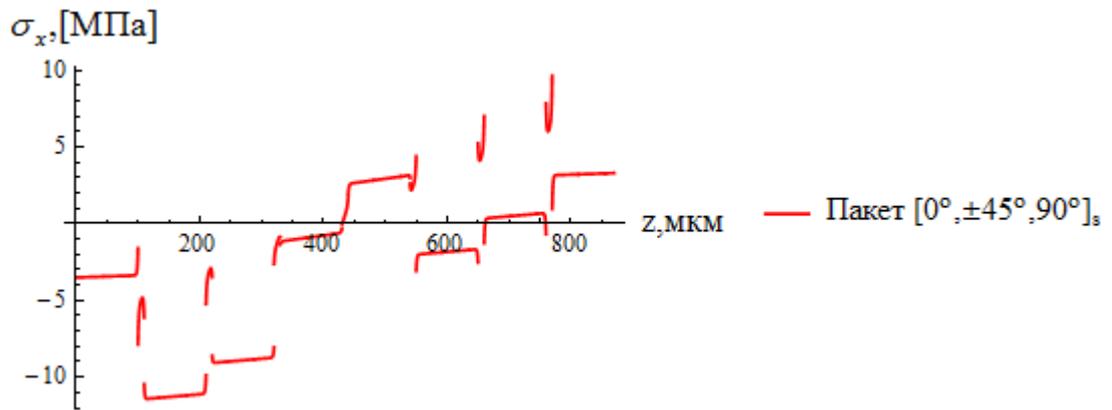


Рис. 2.22. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_x$  по толщине слоистого композита с квазиизотропной укладкой типа  $[0, \pm 45^\circ, 90^\circ]_s$ .

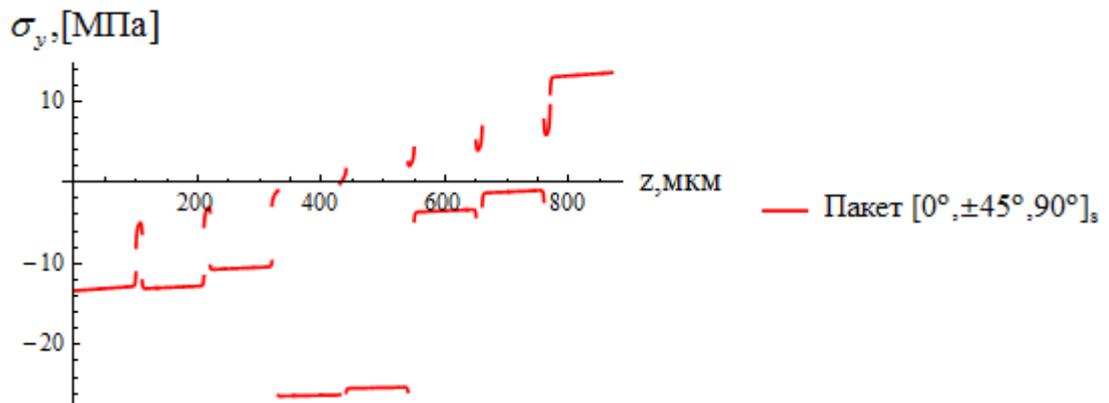


Рис. 2.23. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_y$  по толщине слоистого композита с квазиизотропной укладкой типа  $[0, \pm 45^\circ, 90^\circ]_s$ .

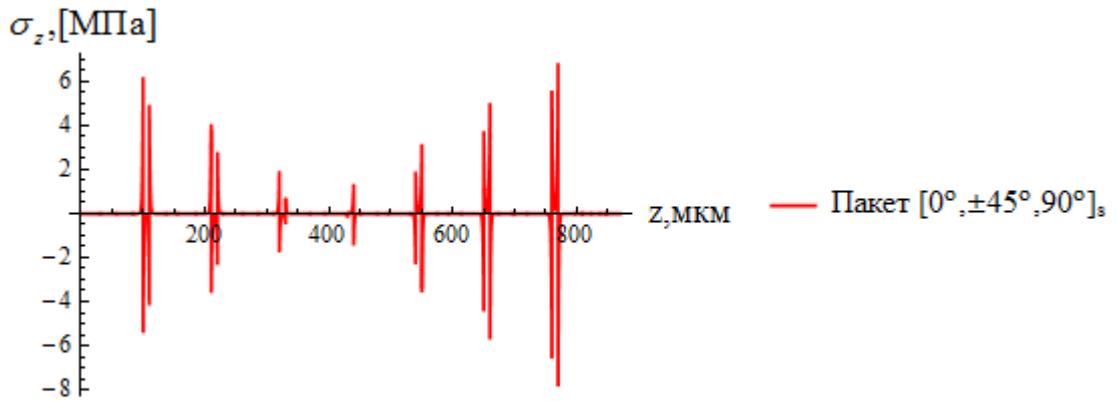


Рис. 2.24. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_z$  по толщине слоистого композита с квазиизотропной укладкой типа  $[0, \pm 45^\circ, 90^\circ]_s$ .

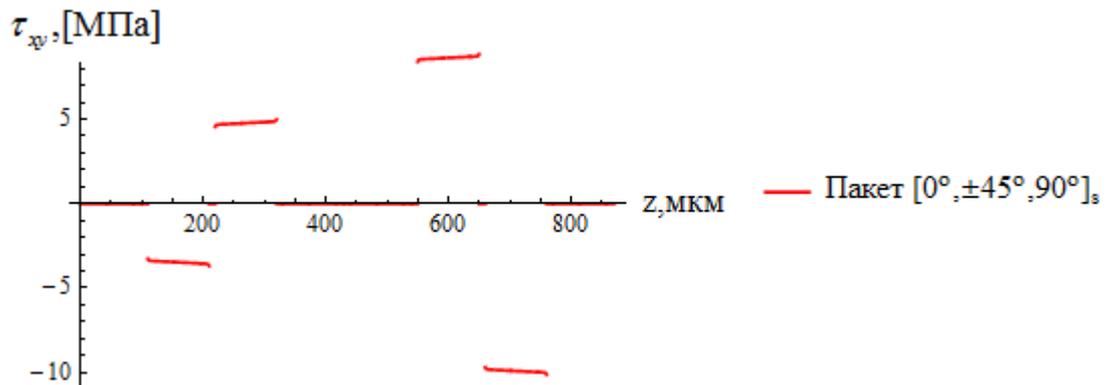


Рис. 2.25. Распределение касательных напряжений  $\tau_{xy}$  по толщине слоистого композита с квазиизотропной укладкой типа  $[0, \pm 45^\circ, 90^\circ]_s$ .

#### 2.4. Выводы к второй главе

1. Показано, что градиентная модель Тупина позволяет уточнить НДС для многослойных структур, слои которых состоят из изотропных или ортотропных композитных слоев.

2. Показано, что полученные результаты аналитических расчетов НДС и распределение температуры по толщине с учетом изотропных прослоек подтвержденных расчетом МКЭ.

3. Показано, что используемая методика справедлива для различных многослойных структур с различными углами направления волокон в слоях.

### **Глава 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ С УЧЕТОМ ВОЗДЕЙСТВИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ**

#### **3.1. Краткая характеристика процессов накопления повреждений в слоистых композитных панелях**

В процессе эксплуатации композиционных материалов как при статическом нагружении с относительно высокой амплитудой, так и при циклическом нагружении наблюдается явление уменьшения механических и прочностных свойств, иногда называемое явлением деградации механических и прочностных свойств. Причину этого явления связывают с процессом накопления рассеянных повреждений в композиционных материалах. В свою очередь процесс роста поврежденности материала определяется как механическими явлениями, обусловленными образованием и ростом различного рода микродефектов, так и вязким сопротивлением, диффузией, химическими процессами и другими явлениями немеханического порядка, сопровождающимися процессами поврежденности. В целом процесс роста рассеянных повреждений предшествует появлению макротрещин, которые, как правило, требуют специальных методов экспериментального обнаружения. Имеющиеся экспериментальные данные позволяют утверждать, что этот процесс, проявляясь в уменьшении жесткостных и прочностных свойств композита, играет часто определяющую роль при разрушении композита.

Механизмы накопления повреждений в КМ значительно более разнообразны, чем в металлах и существенно зависят от масштабных параметров структуры композитов, которые определяют и последовательность различных сценариев микроразрушений на различных стадиях процесса накопления повреждений и характер самых механизмов накопления повреждений на каждой стадии. Масштабные параметры также определяют вклад различных механизмов разрушения в процессе деградации механических

свойств композитов на различных стадиях роста поврежденности композитов и в целом на всем этапе накопления рассеянных повреждений, предшествующем этапу начала макроразрушения.

В целом механизмы накопления повреждений в композите весьма разнообразны. Например, установлено, что даже при изгибе однонаправленного композита в зависимости от марки материала и предыстории процесса механизмы поврежденности могут заключаться в разрывах волокон, потере устойчивости сжатых волокон, развитии трансверсальных микротрещин в матрице поперек волокна, и микротрещин вдоль плоскости слоя и пр.

Процессы накопления повреждений существенно зависят и от характера нагружения, при статическом нагружении основную роль играют разрушения волокон, в то время как при циклическом нагружении расслоение (отслоение волокон от матрицы).

Механизм накопления повреждений зависит от вида напряженного состояния. Существуют следующие виды микродефектов при нагружении однонаправленного КМ растяжением, кручением и поперечным изгибом под различными углами к направлению нагружения: разрыв волокон, поперечное отслоение матрицы от волокна, сдвиг между матрицей и волокном вдоль волокна, потеря устойчивости волокна при сжатии.

Резюмируя данные известные в литературе можно ввести следующую классификацию микродефектов, наблюдаемых при нагружении КМ

1. Микродефекты в волокнах;
  - 1.1. Расслоение (расщепление) волокна (органические волокна);
  - 1.2. Микротрещины на поверхности волокна (стеклянные волокна);
2. Макродефекты в волокнах;
  - 2.1. Разрыв волокна (растяжение);
  - 2.2. Потеря устойчивости волокна (сжатие);
3. Микродефекты в матрице;
  - 3.1. Объемные поры (в порошковой металлической матрице);

3.2. Микротрещина в полимерной матрице (нормального отрыва, продольного или поперечного сдвига);

3.3. Полоса адиабатического сдвига (динамическое нагружение);

4. Макродефекты в матрице;

4.1. Макротрещина в трансверсальном слое;

4.2. Псевдомикротрещина;

5. Комбинированные микродефекты (волокно-матрица);

5.1. Отслоение матрицы от конца оборванного волокна;

5.2. Микротрещина нормального отрыва в матрице у конца оборванного волокна;

5.3. Микротрещины сдвига в матрице у концов оборванных волокон, направленные под углом  $\sim 45^\circ$  к направлению нагружения;

6. Межслойные микродефекты;

6.1. Межслойный сдвиг;

6.2. Межслойная микротрещина нормального разрыва при потере устойчивости слоя.

Почти все перечисленные микродефекты за исключением 2.1, 2.2 и, возможно, 5.2, способны развиваться. Следовательно, при нагружении КМ одновременно происходят два процесса: зарождение и развитие микродефектов. Поэтому к описанию изменения свойств КМ в процессе их нагружения может быть применен микромеханический подход, в котором описание процесса накопления повреждений в композиционных материалах являлось бы следствием законов или моделей, описывающих процессы зарождения и развития микродефектов.

Для учета накопления повреждений широко используются феноменологические модели, модели компьютерного моделирования, статистические модели.

В рамках таких подходов трудно учесть особенности процессов роста микродефектов и генерации новых дефектов, проследить вклад в рост поврежденности микродефектов различного вида, учесть взаимовлияние

микродефектов и структуры композиционного материала. Для более полной формулировки модели накопления рассеянных повреждений композиционных материалов, связанных с микромеханикой разрушения, следует предварительно определить виды микродефектов, контролирующих поврежденность, и описать соответствующие локальные меры поврежденности. При описании поврежденности композиционного материала следует установить зависимость поврежденности материала в целом от локальных мер поврежденности в реальном времени протекании процесса роста поврежденности. Необходимо предварительно дать определение меры поврежденности композиционного материала, описать модель роста отдельного микродефекта и модель зарождения микродефектов. Оба эти процесса должны быть отражены при формировании модели накопления рассеянных повреждений.

Вполне конструктивным и перспективным в этом отношении является микромеханический подход, в котором описание процесса накопления повреждений в композиционных материалах являлось бы следствием законов или моделей, описывающих процессы зарождения и развития микродефектов.

Энтропийные и энергетические подходы также являются весьма привлекательными, особенно когда требуется оценить приращение поврежденности, связанное с диффузионными процессами, температурными эффектами теплопроводности, неупругим (вязким) поведением материала и т.п. Возможны комбинации энтропийного и микромеханического подходов.

### **3.2. Микромеханическая модель накопления повреждений**

Рассмотрим микромеханический метод описания накопления повреждений, учитывающий особенности микродефектов и сформулируем основные требования к микромеханической модели.

1. Параметры модели следует определять через микромеханические параметры, допускающие измерение на поврежденном композите с помощью соответствующих методик.

2. Необходимо учитывать одновременно два процесса, являющиеся причиной приращения микромеханической поврежденности: процесса зарождения новых дефектов и процесса роста имеющихся микродефектов.

Микродефект определяется с помощью микропараметра  $s$ , под которым можно понимать площадь или длину микротрещины в матрице, длину отслоения волокна от матрицы, площадь или длину трещины между слоями, объем или площадь сечения поры. Характеристикой микротрещин может быть отношение коэффициента интенсивности напряжений в ее вершине к величине действующего напряжения. Для различных видов микродефектов вводятся различные меры  $s_i$ . В качестве характеристик микродефектов могут использоваться самые разнообразные объекты: скалярные и векторные функции, тензора.

Для прикладных моделей, как правило используются скалярные меры микродефектов. Однако в общем случае мера микродефектов может быть тензорной. Например, плоский микродефект характеризуется вектором, длина которого равна площади микротрещины, а направление совпадает с направлением вектора нормали и определяется структурой композита. Общими требованиями к микропараметрам, характеризующими микродефекты являются их инвариантность при преобразовании системы координат а также то качество, что эти характеристики должны составлять линейное пространство. Иначе говоря, на множестве этих параметров должны быть определены операции сложения, умножения на число, не выводящие за пределы этого пространства.

Для описания процесса накопления повреждений следует ввести монотонно возрастающий параметр  $t$ , в качестве которого, в зависимости характера нагружения, может рассматриваться как время либо напряжение или деформация, длина дуги нагружения или дуги деформирования и пр. Для циклического нагружения с таким параметром является номер цикла  $n$ .

Общая схема микромеханического подхода. Введем характеристику общей поврежденности  $S$ , под которой понимается сумма всех характеристик микродефектов  $s = s(t, t_0)$  имеющихся в данной точке процесса в

рассматриваемом представительном объеме. Будем считать, что процессы деградации механических свойств композитов определяются величиной поврежденности  $S$ .

Для конкретных микродефектов величина  $s$  изменяется в процессе нагружения, т.е. зависит от параметра процесса  $t$  и от значения параметра  $t_0$  при котором данный микродефект зародился

$$s = s(t, t_0). \quad (3.1)$$

Зависимость (3.1) определяет процесс развития индивидуальных микродефектов зародившихся.

Процесс зарождения микродефектов в рассматриваемом представительном объеме задается величиной скорости зарождения микродефекта  $\nu(t, S)$ . Определим характеристику количества дефектов  $N$  и подсчитаем количество микродефектов, зародившихся на малом интервале времени  $dt_0$

$$dN = \nu(t_0, S)dt_0. \quad (3.2)$$

Суммарная характеристика поврежденности от дефектов, зародившимся на интервале  $dt_0$ , к моменту  $t$  находится с учетом (3.1) и (3.2)

$$\begin{aligned} dS &= s dN; \\ dS(t, t_0) &= s(t, t_0)\nu(t, S)dt_0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Учитывая последнее равенство, вычислим поврежденность от микродефектов зародившихся на различных интервалах  $dt_0$

$$S = \int_0^t s(t, t_0)\nu(t_0, S)dt_0. \quad (3.4)$$

Следовательно, параметр  $S$ , характеризующий общую поврежденность, подчиняется интегральному эволюционному уравнению типа Вольтера (3.4).

Зададим процесс развития микродефектов уравнением

$$\frac{ds}{dt} = f(t, s, S). \quad (3.5)$$

Учитывая (3.4) и (3.5), запишем

$$\frac{dS}{dt} = s(t, t_0)v(t, S) + \int_0^t f(t, s(t, t_0), S)v(t_0, S)dt_0. \quad (3.6)$$

Разложим функцию  $f(t, s, S)$  в (3.5) в ряд по малому параметру  $s$  и ограничимся двумя первыми членами. Тогда, учитывая уравнения (3.3), (3.5) и (3.6) получим следующую систему кинетических уравнений, описывающих процесс накопления повреждений

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= s_0v(t, S) + b(t, S)S + a(t, S)N; \\ \frac{ds}{dt} &\approx a(t, S) + b(t, S)s; \\ \frac{dN}{dt} &= v(t, S). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Систему кинетических уравнений (3.7) следует рассматривать вместе с начальными условиями

$$S|_{t=0} = S_0; \quad s|_{t=0} = s_0; \quad v|_{t=0} = v_0. \quad (3.8)$$

Полученная система кинетических уравнений очевидным образом обобщается и на случай когда локальная характеристика микродефектов и общие поврежденности характеризуются тензорными параметрами.

***Примеры моделей развития микродефектов, генерации дефектов и роста поврежденности***

1. Модель роста микродефекта продольных микротрещин ( $a = a_0, b = 0$ )

Рассмотрим процесс зарождения и роста с постоянной скоростью зарождения микродефекта ( $v = v_0 = const$ ). Для этой модели, скорость поврежденности микродефекта не зависит от размеров микродефектов

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= a_0; \\ b(t) &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Учитывая эту простую модель, решение системы кинематических уравнений (3.7) представляется в виде

$$S = \frac{1}{2} a_0 v_0 (t - t_0)^2 + (s_0 v_0 + a_0 N_0)(t - t_0) + S_0. \quad (3.10)$$

При условиях начальной поврежденности мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{S}{s_0 v_0} &= \frac{1}{2} m t^2 + t; \\ m &= \frac{a_0}{s_0}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

При этом все микродефекты и малые (только что зародившиеся) и большие (зародившиеся на более ранних стадиях процесса нагружения и уже успевшие развиться) растут с одинаковой скоростью, зависящей только от параметра процесса.

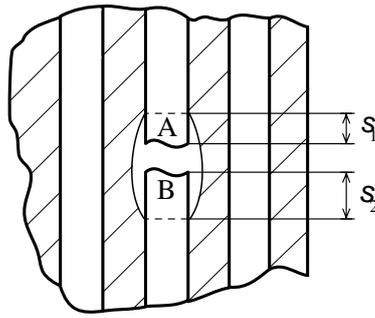


Рис. 3.1. Разрыв волокна

Такая модель роста микродефекта (рис. 3.1) характерна для продольных микротрещин в слоистом композите; микротрещин расслаивания, ориентированных вдоль направления армирования.

## 2. Модель роста микродефекта поперечного растрескивания.

Пусть далее скорость развития характеристики микродефекта пропорциональна текущему значению этой характеристики, что характерно для многих видов микродефектов. Например, скорость роста усталостных микротрещин в металлах пропорциональна их текущей длине, если последняя превосходит размер зерна. Тогда следует принять в  $\frac{ds}{dt} = b(t) \cdot s$ . Это

соотношение означает, что чем больше микродефект, тем с большей скоростью он возрастает, однако скорость роста логарифма характеристики микродефекта  $\frac{1}{s} \frac{ds}{dt} = \frac{d(\ln s)}{dt} = b(t)$  одинаково как для малых, так и для больших микродефектов

(в фиксированной точке процесса). Отсюда для процессов, происходящих в неизменных условиях ( $b(t) = const$ ) следует экспоненциальный рост характеристики микродефекта  $s = s_0 e^{b(t-\tau)}$ , который часто наблюдается в экспериментах. Так распространяются и поперечные микротрещины в матрице композита (в поперечных слоях при растяжении), если их развитие не тормозится никакими барьерами.

В случае наличия в КМ препятствий для развития микродефектов, скорость изменения  $s$  может убывать с ростом  $s$  (с приближением границы микродефекта к препятствию). Тогда следует принять

$$\frac{ds}{dt} = b(t) \cdot (s - d), \quad (3.12)$$

где  $d$ —геометрический параметр, например, расстояние между слоями

3. В более общем случае можно принять, что  $f(t) = a + b \cdot s(t)$ . Иначе говоря, ограничимся двумя первыми слагаемыми в разложении функции  $f(t, s, S)$  в ряд Тейлора по параметру процесса. Тогда модели зарождения и роста микродефектов запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= v(t); \\ \frac{ds}{dt} &= a + bs(t), \end{aligned} \quad (3.13)$$

где  $a, b$ —постоянные величины.

Следовательно, можно записать следующее равенство для приращения параметра поврежденности:

$$\Delta S = s_0 v(t, S) \Delta t + a(t, S) N(t) \Delta t + b(t, S) s'(t) N(t) \Delta t \quad (3.14)$$

Обратим внимание, что величина  $s'(t) N(t)$  определяет поврежденность  $S$  и моменту времени  $t$ . Так что можно записать

$$\frac{dS}{dt} = s_0 v(t, S) + a(t, S) N(t) + b(t, S) S(t) \quad (3.15)$$

Система уравнений (3.13) и (3.15) образует замкнутую систему кинетических уравнений, описывающих процессы зарождения микродефектов (первое уравнение системы (3.13)) и роста зародившихся дефектов (второе

уравнение системы (3.13)), а также рост поврежденности исследуемой среды. К системе уравнений (3.13) и (3.15) следует присоединить начальные условия (3.8).

Заметим, что уравнение роста микродефектов можно трактовать как описание процесса Пуассона. При этом, в частности, приращение локальной поврежденности  $s(t, \tau)$  может быть записано в форме

$$s(t, \tau) = s_0 + \Delta s (1 - e^{-b(t-\tau)}). \quad (3.16)$$

где  $s_0$ —локальное приращение поврежденности от микродефекта, зародившегося в момент  $t = \tau$ ,  $t \geq \tau$ .

Величины  $b$  и  $\Delta s$ —параметры процесса Пуассона, а уравнение для  $S$  может быть записано в форме стохастического уравнения Ланжевена.

### **3.3. Модели деградации механических характеристик при повреждении в слоях**

Основная цель описания процесса накопления повреждений в композиционных материалах связана с оценкой изменения механических характеристик материала в процессе эксплуатации. Как правило, в конструкционных композиционных материалах наблюдается явление уменьшения модулей упругости как при квазистатическом, так и при циклическом нагружении, которое называют явлением деградации механических свойств. Это явление справедливо связывают с процессом накопления повреждений в композитах, а более точно с уровнем накопленной поврежденности. Как правило, используют простые модели деградации повреждений, вводя в рассмотрение относительные величины падения жесткостей (изменения прочности, выработанный ресурс). Известно, что эти величины достигают некоторых предельных значений (равных примерно (15-25)%) к концу процесса накопления повреждений, т.е. к моменту начала

появления макротрещин (начало макроразрушения). При моделировании деградации свойств можно считать, что относительные величины падения механических характеристик и являются мерой поврежденности. Тогда можно записать следующие выражения соответственно для изменения модулей упругости, жесткости на изгиб, изменение прочности

$$S^* = 1 - \frac{E}{E_0}; S^* = 1 - \frac{EI}{E_0 I_0}; S^* = 1 - \frac{\sigma_b}{\sigma_{b_0}}, \quad (3.17)$$

где  $S^*$ —значения поврежденности, зависящие от параметра процесса  $t$ . Они изменяются от нуля до предельных значений, которые соответствуют концу процесса накопления рассеянных повреждений (или началу процесса разрушения). Если же предельные значения поврежденности нормированы,  $S^*$  следует записать в виде  $S^* = k \cdot S(t)$ . Коэффициенты находятся из предельных условий. Например, имеем

$$\frac{EI}{E_0 I_0} \approx 0,75 \dots 0,85. \text{ На практике считается, что } k \approx 0,2.$$

Далее будет использоваться следующее выражение для изменения модуля упругости в волокнистом композите  $E = E_0(1 - k_1 S)$ .

Фактически всегда эксплуатационные свойства элемента конструкции определяются механическими свойствами материала. Положим что, свойства материала, т.е. тензор модулей упругости свойств материала зависит от реального времени процесса  $t$

$$E_{ijkl}(t) = E_{ijkl}^0 - \Delta E_{ijkl}(t), \quad (3.18)$$

где  $E_{ijkl}^0$  — модуль упругости неповрежденного материала, а величина  $\Delta E_{ijkl}(t)$  зависящая от времени процесса определяет уменьшение механических свойств, и связана с явлением деградации из-за накопления повреждений.

Пусть тензор  $(\Delta E_{ijklm}(t))_{кр}$  в (3.18) есть критически допустимая тензорная величина деградации механических свойств, при которых конструкция не теряет своих эксплуатационных свойств. Тогда можно сформулировать следующий критерий работоспособности конструкции с сохранением эксплуатационных характеристик

$$\min_{ijklm} \left( \int_0^{t^*} \Delta E_{ijklm}(t)_{кр} dt = \Delta E_{кр} \right). \quad (3.19)$$

В записанном условии  $t^*$  является критическим «временем жизни», которое и определяет реальную долговечность конструкции при которой эксплуатационный характеристики сохраняются.

Как правило, величины  $(\Delta E_{ijklm}(t))_{кр}$  находятся из ограничений по прочности, жесткости, или иных условий, например, из условий того, чтобы собственные частоты не выходили из заданного диапазона и т.д.

При этом в реальности максимальное относительное уменьшение характеристик не превышает 15%. В ряде случаев удастся оценить величину  $t^*$  в явном виде, когда удастся использовать явные зависимости от времени процесса для деградирующих характеристик материала.

Для описания деградации свойств используем здесь модель роста микродефектов (3.13), в которой полагаем

$$a = 0; b \neq 0. \quad (3.20)$$

В настоящей работе мы достаточно подробно останавливаемся лишь на моделировании поврежденности, которая контролируется поперечным растрескиванием. Известно [12], что этот механизм определяет поврежденность композита на начальной стадии, занимает от 20% до 30% от общего процесса роста поврежденности, но при этом определяет едва ли не главную часть

изменения модулей упругости (уменьшение эффективных характеристик из-за микроповрежденности).

В общем случае для модели (3.13) и (3.15) в предположении, что  $v(t) = v = const$ ;  $s(t) = s_0 = const$ , то величина  $S$  имеет вид

$$S = \left[ - \left( 1 + \frac{m}{b_0} \right) e^{-b_0 t} + mt + \left( 1 + \frac{m}{b_0} \right) \right] s_0 c, \quad (3.21)$$

где  $m = \frac{a}{b}$ ,  $c = \frac{v}{b}$ ,  $m, b_0, s_0, c$  – параметры модели.

В рассматриваемом частном случае  $a = 0, b \neq 0$  (3.21) можно принять

$$S = (1 - e^{-b_0 t}) s_0 c, \quad (3.22)$$

где  $b_0, s_0, c$  – постоянные.

Предположения:

1. В волокнах накопление повреждений отсутствует. Следовательно, модуль упругости вдоль волокон в монослое не деградирует.
2. Считаем, что деградация свойств композита в целом определяется только накоплением повреждений в связующем (микрорастрескиванием).
3. Для трансверсального модуля упругости и модуля сдвига принимаются следующие упрощенные законы деградации в соответствии с формулами (3.22)

$$E_2^i = E_{2o} \left[ 1 - K_E^i S_E(t, \sigma, \tau) \right]; G_{12}^i = G_{12o} \left[ 1 - K_G^i S_G(t, \sigma, \tau) \right], \quad (3.23)$$

где  $E_{2o}, G_{12o}$  – модули упругости неповрежденного материала.

Тогда, учитывая (3.23), получим следующую модель деградации трансверсальных модулей и модулей сдвига

$$E_2^i = E_{2o} \left[ 1 - K_E^i (1 - e^{-b_E n}) \right]; G_{12}^i = G_{12o} \left[ 1 - K_G^i (1 - e^{-b_G n}) \right]. \quad (3.24)$$

Параметры  $K_E^i$ ,  $G_{12o}^i$  зависят от уровня напряжений,  $b_E$ ,  $b_G$  – микропараметры, определяемые по данным испытаний. Они, вообще говоря, различны в законах деградации для модуля упругости и модуля сдвига.

4. Параметр  $K_E^i$  определяет зависимость скорости изменения модуля от действующих в слое растягивающих поперечных напряжений, (считаем, что в случае сжатия микротрещины по крайней мере не растут). Поэтому

$$K_E^i = K_{Eo} f_{KE}(\sigma_2^i) = K_{Eo} \left\{ \frac{\sigma_2^i + |\sigma_2^i|}{2\sigma_{2b}} \right\}^{m_0}, \quad (3.25)$$

где  $m_0$  – микропараметр, определяемый из эксперимента,  $K_{Eo}$  – макропараметр, определяемый из макроэксперимента для механических свойств, например, модулей упругости.

5. Параметр  $K_G^i$  определяет зависимость скорости изменения модуля сдвига от действующих в слое растягивающих поперечных напряжений и напряжений сдвига

$$K_G^i = K_{Go} f_{KG}(\sigma_2^i, \tau_{12}^i) = K_{Go} \left\{ \left( \frac{\tau_{12}^i}{\tau_b} \right)^{m_\tau} + \alpha \left( \frac{\sigma_2^i + |\sigma_2^i|}{2\sigma_{2b}} \right)^{m_\sigma} \right\}, \quad (3.26)$$

где  $m_\tau$ ,  $m_\sigma$ ,  $\alpha$  – микропараметры, определяемые из эксперимента;  $K_{Go}$  – определяется из макроэксперимента.

**3.4. Моделирование процесса деградации механических характеристик слоистого композита при циклическом нагружении по данным испытаний**

В этом разделе укажем последовательность решения проблемы идентификации параметров по данным экспериментов. Как правило, известны эффективные характеристики композиционного материала с вполне конкретной структурой (число слоев, толщина слоев с различной укладкой). Будем также считать, что для конкретной структуры, выполненной из монослоев с известными свойствами, известны зависимости эффективных свойств от параметра процесса. Рассмотрим сейчас циклические процессы с пульсирующим циклом. При этом считается, что процесс деградации определяется максимальными напряжениями, достигнутыми в цикле. Более общие случаи циклического нагружения рассматривать не будем. Это ограничение не является принципиальным с точки зрения оценки деградации свойств слоистого композита, хотя и требует аккуратного анализа полупериода нагружения для того, чтобы описать зависимость параметров  $K_E^i$ ,  $K_G^i$  от параметров цикла нагружения (средних напряжений, максимальных напряжений, коэффициента асимметрии цикла и пр.).

Главное содержание предлагаемой методики состоит в том, чтобы сначала по данным испытаний для конкретной тестовой структуры определить параметры модели поврежденности и деградации. Затем можно анализировать характер деградации в отдельных слоях системы, исследовать характер деградации с учетом воздействия других факторов (температура), исследовать последовательность критической поврежденности отдельных монослоев и прогнозировать поведение других структур, изготовленных из тех же материалов.

Алгоритм определения параметров модели ( $K_{E0}$ ,  $K_{G0}$ ,  $m_0$ ,  $m_\tau$ ,  $m_\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $b_E$ ,  $b_G$ ) сводится к следующим шагам:

1. Для конкретной структуры рассчитываются жесткости идеального, неповрежденного материала  $B_{ij}$  по известным формулам механики композитов с выделением изменяемых предполагаемых модулей упругостей в процессе деградации (поперечные модули и модули сдвига).

Определим жесткость неповрежденного материала для слоистого композита с продольно-поперечной укладкой слоев типа  $[0, 90^\circ]_s$  (симметричный пакет из 6-х слоев). Толщины слоев считаются одинаковыми и равными  $\left(\frac{h}{6}\right)$

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= \frac{\bar{E}_1}{3} + \frac{2\bar{E}_2^{(2)}}{3}; \\
 B_{22} &= \frac{2\bar{E}_1}{3} + \frac{\bar{E}_2^{(1)}}{3}; \\
 B_{33} &= \frac{G_{12}^{(1)}}{3} + \frac{2G_{12}^{(2)}}{3}; \\
 B_{12} &= \frac{\mu_{12}\bar{E}_2^{(1)}}{3} + \frac{2\mu_{12}\bar{E}_2^{(2)}}{3}; \\
 B_{13} &= 0; \\
 B_{23} &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

где индексы (1) и (2) соответствуют слоям с углом укладки  $0^\circ$  и  $90^\circ$ .

Определим жесткость неповрежденного материала для слоистого композита с укладкой слоев только  $0^\circ$  и  $45^\circ$  типа  $[0, \pm 45^\circ]_s$  (симметричный пакет из 6-х слоев). Толщины слоев считаются одинаковыми и равными  $\left(\frac{h}{6}\right)$

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= \frac{\bar{E}_1}{2} + \frac{\bar{E}_2^{(2)}}{6} + \frac{\mu_{12}\bar{E}_2^{(2)}}{3} + \frac{2G_{12}^{(2)}}{3}; \\
 B_{22} &= \frac{\bar{E}_1}{6} + \frac{\bar{E}_2^{(1)}}{3} + \frac{\bar{E}_2^{(2)}}{6} + \frac{\mu_{12}\bar{E}_2^{(2)}}{3} + \frac{2G_{12}^{(2)}}{3}; \\
 B_{33} &= \frac{\bar{E}_1}{6} + \frac{\bar{E}_2^{(2)}}{6} - \frac{\mu_{12}\bar{E}_2^{(2)}}{3} + \frac{G_{12}^{(1)}}{3}; \\
 B_{12} &= \frac{\bar{E}_1}{6} + \frac{\bar{E}_2^{(2)}}{6} + \frac{\mu_{12}\bar{E}_2^{(1)}}{3} + \frac{\mu_{12}\bar{E}_2^{(2)}}{3} - \frac{2G_{12}^{(2)}}{3}; \\
 B_{13} &= 0; \\
 B_{23} &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

где индексы (1) и (2) соответствуют слоям с углом укладки  $0^\circ$  и  $\pm 45^\circ$ .

Определим жесткость неповрежденного материала для слоистого композита с квазиизотропной укладкой типа  $[0, \pm 45^\circ, 90^\circ]_s$  (симметричный пакет из 8-х слоев). Толщины слоев считаются одинаковыми и равными  $\left(\frac{h}{8}\right)$

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= \frac{3\bar{E}_1}{8} + \frac{\bar{E}_2^{(2)}}{8} + \frac{\mu_{12}\bar{E}_2^{(2)}}{4} + \frac{\bar{E}_2^{(3)}}{4} + \frac{G_{12}^{(2)}}{2}; \\
 B_{22} &= \frac{3\bar{E}_1}{8} + \frac{\bar{E}_2^{(1)}}{4} + \frac{\bar{E}_2^{(2)}}{8} + \frac{\mu_{12}\bar{E}_2^{(2)}}{4} + \frac{G_{12}^{(2)}}{2}; \\
 B_{33} &= \frac{\bar{E}_1}{8} + \frac{\bar{E}_2^{(2)}}{8} - \frac{\mu_{12}\bar{E}_2^{(2)}}{4} + \frac{G_{12}^{(1)}}{4} + \frac{G_{12}^{(3)}}{4}; \\
 B_{12} &= \frac{\bar{E}_1}{8} + \frac{\bar{E}_2^{(2)}}{8} + \frac{\mu_{12}\bar{E}_2^{(2)}}{4} + \frac{\mu_{12}\bar{E}_2^{(1)}}{4} + \frac{\mu_{12}\bar{E}_2^{(3)}}{4} - \frac{G_{12}^{(2)}}{2}; \\
 B_{13} &= 0; \\
 B_{23} &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

где индексы (1), (2) и (3) соответствуют слоям с углом укладки  $0^\circ$ ,  $\pm 45^\circ$  и  $90^\circ$ .

2. Далее рассчитываются эффективные механические (технические) характеристики для всех рассматриваемых типов структур (симметричных пакетов)

$$E_{x0} = B_{11} - \frac{B_{12}^2}{B_{22}}. \tag{3.30}.$$

3. Определим напряжения в  $i$ -ом слое в локальной координате (1, 2)

- Физический закон для пакета слоев

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= B_{11}\varepsilon_x + B_{12}\varepsilon_y + B_{13}\gamma_{xy} = \sigma_{расч.}; \\
\sigma_y &= B_{12}\varepsilon_x + B_{22}\varepsilon_y + B_{23}\gamma_{xy} = 0; \\
\sigma_{xy} &= B_{13}\varepsilon_x + B_{23}\varepsilon_y + B_{33}\gamma_{xy} = 0.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Здесь  $B_{pq} = \sum_{i=1}^k \bar{h}_i b_{pq}^i$ ,  $p, q = 1, 2, 3$ .

$$\begin{aligned}
b_{11}^i &= \bar{E}_1^i \cos^4 \varphi_i + 2\bar{E}_2^i \mu_{12}^i \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i + \bar{E}_2^i \sin^4 \varphi_i + G_{12}^i \sin^2 2\varphi_i; \\
b_{12}^i &= (\bar{E}_1^i + \bar{E}_2^i - 4G_{12}^i) \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i + \bar{E}_2^i \mu_{12}^i (\sin^4 \varphi_i + \cos^4 \varphi_i); \\
b_{22}^i &= \bar{E}_1^i \sin^4 \varphi_i + 2\bar{E}_2^i \mu_{12}^i \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i + \bar{E}_2^i \cos^4 \varphi_i + G_{12}^i \sin^2 2\varphi_i; \\
b_{13}^i &= (\bar{E}_1^i \cos^2 \varphi_i - \bar{E}_2^i \sin^2 \varphi_i - (\bar{E}_2^i \mu_{12}^i + 2G_{12}^i) \cos 2\varphi_i) \sin \varphi_i \cos \varphi_i; \\
b_{23}^i &= (\bar{E}_1^i \sin^2 \varphi_i - \bar{E}_2^i \cos^2 \varphi_i - (\bar{E}_2^i \mu_{12}^i + 2G_{12}^i) \cos 2\varphi_i) \sin \varphi_i \cos \varphi_i; \\
b_{33}^i &= (\bar{E}_1^i + \bar{E}_2^i - \bar{E}_2^i \mu_{12}^i) \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i + G_{12}^i \cos^2 2\varphi_i.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

- Решая систему уравнений (3.31), получим деформации всего пакета  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ .

- По этим значениям деформаций определим напряжения в системе  $(x, y)$  для каждого  $i$ -го слоя

$$\begin{aligned}
\sigma_x^i &= b_{11}^i \varepsilon_x + b_{12}^i \varepsilon_y + b_{13}^i \gamma_{xy}; \\
\sigma_y^i &= b_{12}^i \varepsilon_x + b_{22}^i \varepsilon_y + b_{23}^i \gamma_{xy}; \\
\tau_{xy}^i &= b_{13}^i \varepsilon_x + b_{23}^i \varepsilon_y + b_{33}^i \gamma_{xy}.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

С помощью принципа суперпозиции при учете воздействия температуры запишем соотношения суммарных напряжений

$$\begin{aligned}
\sigma_x^\Sigma &= \sigma_x^i + \sigma_x^{iT}; \\
\sigma_y^\Sigma &= \sigma_y^i + \sigma_y^{iT}; \\
\tau_{xy}^\Sigma &= \tau_{xy}^i + \tau_{xy}^{iT}.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Значения температурных напряжений  $\sigma_x^{iT}$ ,  $\sigma_y^{iT}$ ,  $\tau_{xy}^{iT}$  определяются из предыдущего расчета задачи (считаются постоянными для каждого слоя).

- Определим напряжения в каждом  $i$ -ом слое в локальной координате (1, 2)

$$\begin{aligned}\sigma_1^i &= \sigma_x^\Sigma \cos^2 \varphi_i + \sigma_y^\Sigma \sin^2 \varphi_i + \tau_{xy}^\Sigma \sin 2\varphi_i; \\ \sigma_2^i &= \sigma_x^\Sigma \sin^2 \varphi_i + \sigma_y^\Sigma \cos^2 \varphi_i - \tau_{xy}^\Sigma \sin 2\varphi_i; \\ \tau_{12}^i &= (\sigma_y^\Sigma - \sigma_x^\Sigma) \sin \varphi_i \cos \varphi_i + \tau_{xy}^\Sigma \cos 2\varphi_i.\end{aligned}\quad (3.35)$$

4. Используя соотношения, учитывающие деградацию свойства слоев (3.24) находим формулы для описания деградации эффективных характеристик структуры

$$\begin{aligned}E_{x,n} &= f_E(K_{Eo}, K_{Go}, n) = \ddot{E}_{x,n}; \\ \ddot{E}_{x,n} &= E_{x,o} [1 - K_E (1 - e^{-b_E n})]; \\ G_{xy,n} &= f_G(K_{Eo}, K_{Go}, n) = \ddot{G}_{xy,n}; \\ \ddot{G}_{xy,n} &= G_{xy,o} [1 - K_G (1 - e^{-b_G n})].\end{aligned}\quad (3.36)$$

Параметры модели находятся в результате сравнения экспериментальных данных кривых деградации для эффективных свойств с теоретическими при помощи функции `FindFit[data, expr, pars, vars]` в программе «МАТЕМАТИКА». Эта функция строится для аппроксимации экспериментальных наборов значений на основе метода наименьших квадратов. При этом в результате численного анализа установлено, что параметры  $b_E$  и  $b_G$  действительно являются параметрами модели, ибо остаются примерно постоянными для различных структур.

Другие параметры  $K_{Eo}$  и  $K_{Go}$  также являются постоянными, что достигается путем соответствующего подбора параметров  $m_o$ ,  $m_t$ ,  $m_\sigma$ ,  $\alpha$ .

То, что это удастся реализовать, позволяет утверждать, что предложенная модель позволяет адекватно определять параметры деградации отдельных слоев по данным испытаний для композитной структуры.

Предложенная модель может использоваться для описания явлений деградации свойств только на начальном этапе роста поврежденности, т.е. в диапазоне времени процесса, не превышающем 20% от всего времени процесса поврежденности.

Принято считать, что процесс накопления повреждений предшествует началу макроразрушения (образование магистральной трещины) и соответствует падению эффективных характеристик приблизительно на 15%-20% по отношению к начальному неповрежденному материалу.

### 3.5. Определение параметров модели

Приводятся расчеты оценки деградации механических свойств для трех исследуемых структур: слоистый композит с продольно–поперечной укладкой слоев типа  $[0, 90_2]_s$ , слоистый композит с укладкой слоев только  $0^\circ$  и  $45^\circ$  типа  $[0, \pm 45^\circ]_s$  и слоистый композит с квазиизотропной укладкой типа  $[0, \pm 45^\circ, 90^\circ]_s$ . В расчете используем углерод-эпоксидный композит с свойствами, приведенными в таблице 2.1. Максимальная нагрузка при циклическом растяжении будет составлять около 0,7 от предельного напряжения данного слоистого композита при квазистатическом нагружении [11] ( $\sigma_b = 547$  МПа). Предельные напряжения в слоях  $\sigma_{2b} = 60$  МПа и  $\tau_b = 70$  МПа. При этом известно экспериментальное значение эффективного модуля  $E_x$  (экспериментальные точки взяты из [12]).

Используя алгоритм (без учета воздействия температуры), описанный в разделе 3.4 для слоистого композита с продольно-поперечной укладкой слоев типа  $[0, 90_2]_s$  находим параметры модели деградации:  $K_{Eo} = 0,538$ ;  $m_0 = 3,17$ ;  $b_E = 8,78$ ;  $\alpha = 0,1$ . Остальные параметры модели не влияют на результат расчета для

данного типа и они будут уточнять при расчете для слоистого типа  $[0, \pm 45^\circ]_s$ . Результаты расчета показаны на рис. 3.1, где сплошная кривая при этом отражает соответствие полученной «теоретической» кривой данного эксперимента. В результате можно найти характер деградации, определяемый трансверсальным растрескиванием в отдельных монослоях (рис. 3.2 и 3.3).

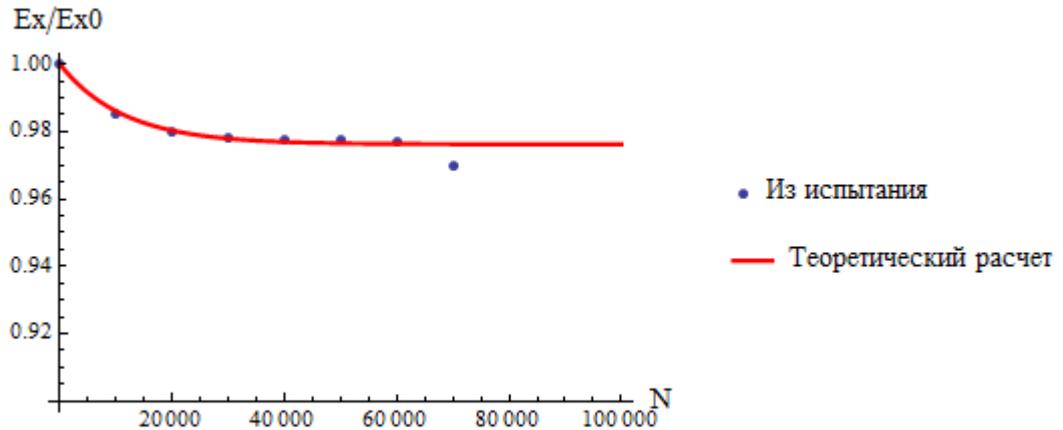


Рис. 3.1. Изменение эффективного модуля слоистого композита с продольно-поперечной укладкой слоев типа  $[0, 90^\circ_2]_s$ .

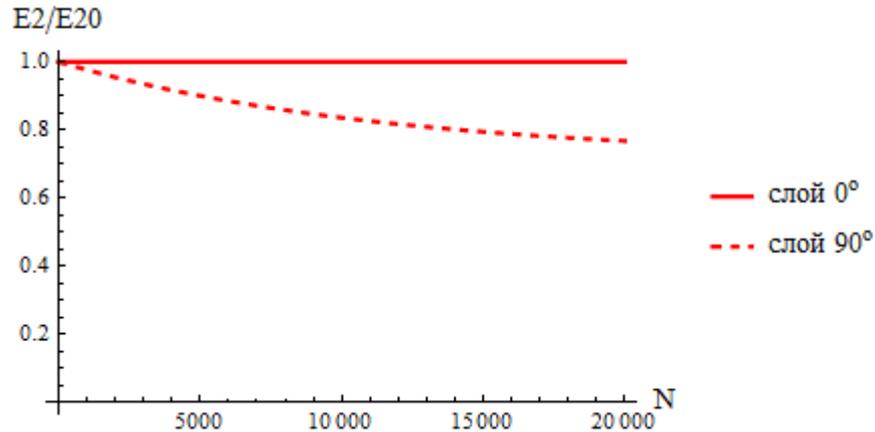


Рис. 3.2. Изменение поперечных модулей в отдельных слоях слоистого композита с продольно-поперечной укладкой слоев типа  $[0, 90^\circ_2]_s$ .

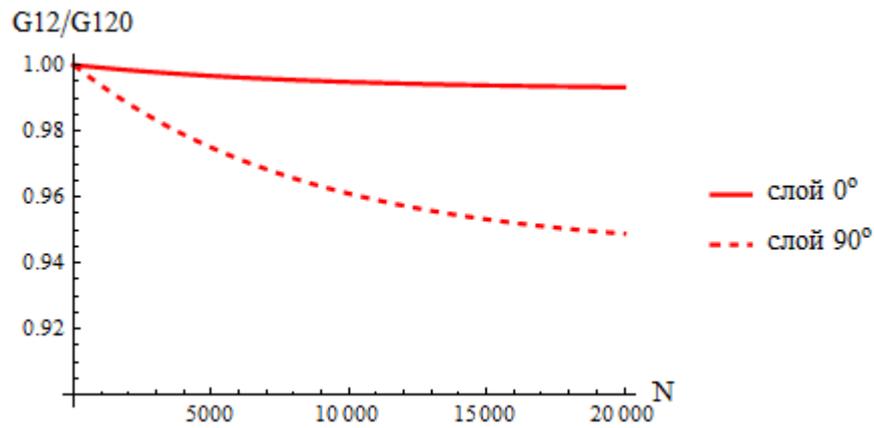


Рис. 3.3. Изменение модулей сдвига в отдельных слоях слоистого композита с продольно-поперечной укладкой слоев типа  $[0, 90_2]_s$ .

При расчете слоистого композита с укладкой слоев только  $0^\circ$  и  $45^\circ$  типа  $[0, \pm 45]_s$  находим остальные параметры модели деградации:  $K_{G_0} = 0,695$ ;  $m_\sigma = 1$ ;  $m_\tau = 1$ ,  $b_G = 11,66$ . Результаты расчета показаны на рис. 3.4-3.6.

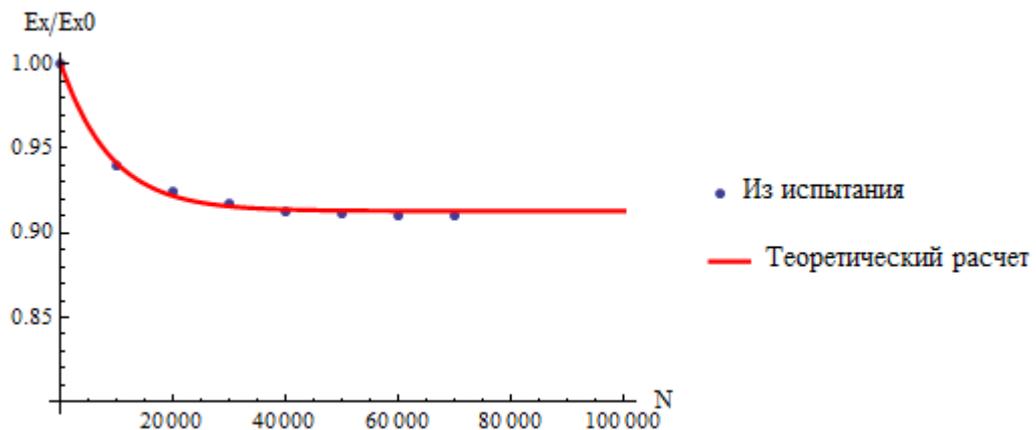


Рис. 3.4. Изменение эффективного модуля слоистого композита с укладкой слоев только  $0^\circ$  и  $45^\circ$  типа  $[0, \pm 45]_s$ .

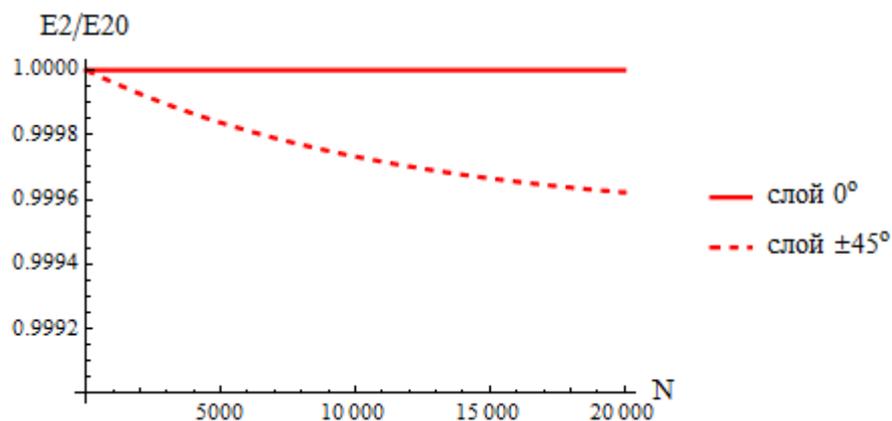


Рис. 3.5. Изменение поперечных модулей в отдельных слоях слоистого композита с укладкой слоев только  $0^\circ$  и  $45^\circ$  типа  $[0, \pm 45^\circ]_s$ .

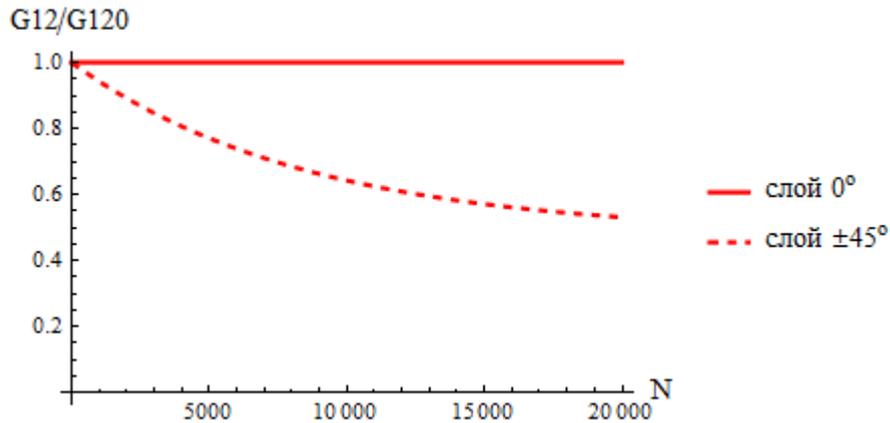


Рис. 3.6. Изменение модулей сдвига в отдельных слоях слоистого композита с укладкой слоев только  $0^\circ$  и  $45^\circ$  типа  $[0, \pm 45^\circ]_s$ .

С помощью всех полученных параметров модели проводим расчет для слоистого композита с квазиизотропной укладкой типа  $[0, \pm 45^\circ, 90^\circ]_s$ . Результаты расчета показаны на рис. 3.7-3.9.

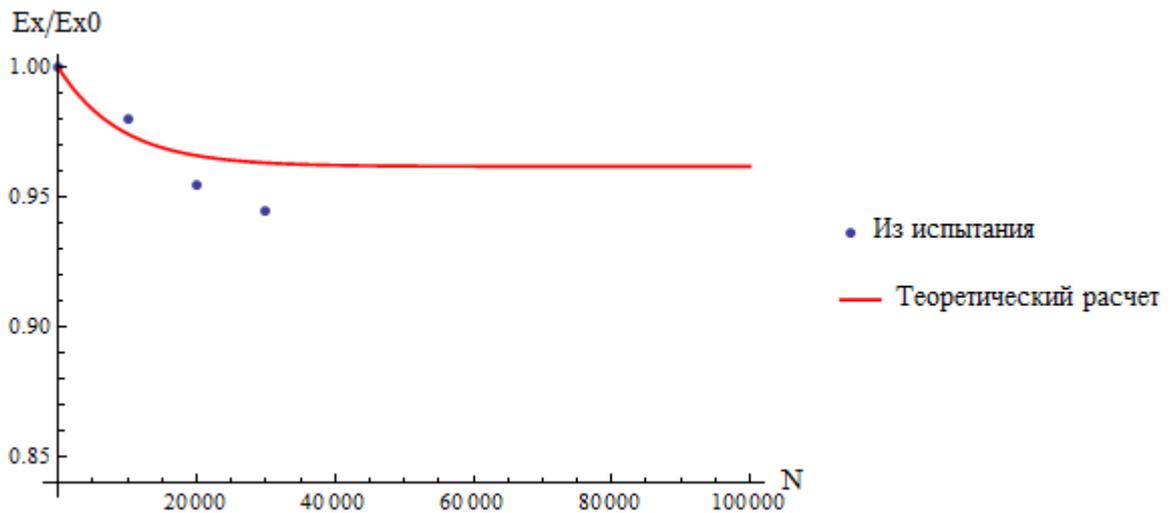


Рис. 3.7. Изменение эффективного модуля слоистого композита с квазиизотропной укладкой типа  $[0, \pm 45^\circ, 90^\circ]_s$ .

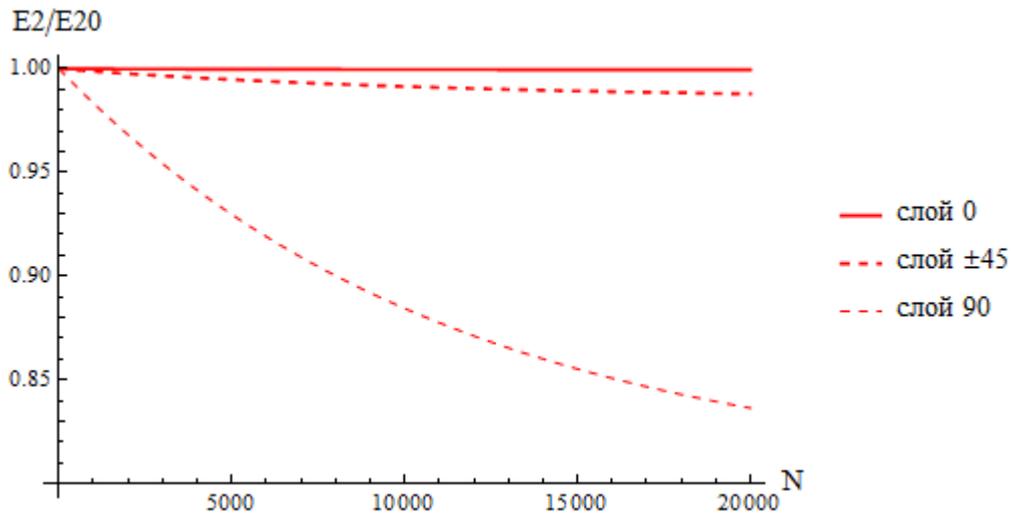


Рис. 3.8. Изменение поперечных модулей в отдельных слоях слоистого композита с квазиизотропной укладкой типа  $[0, \pm 45^\circ, 90^\circ]_s$ .

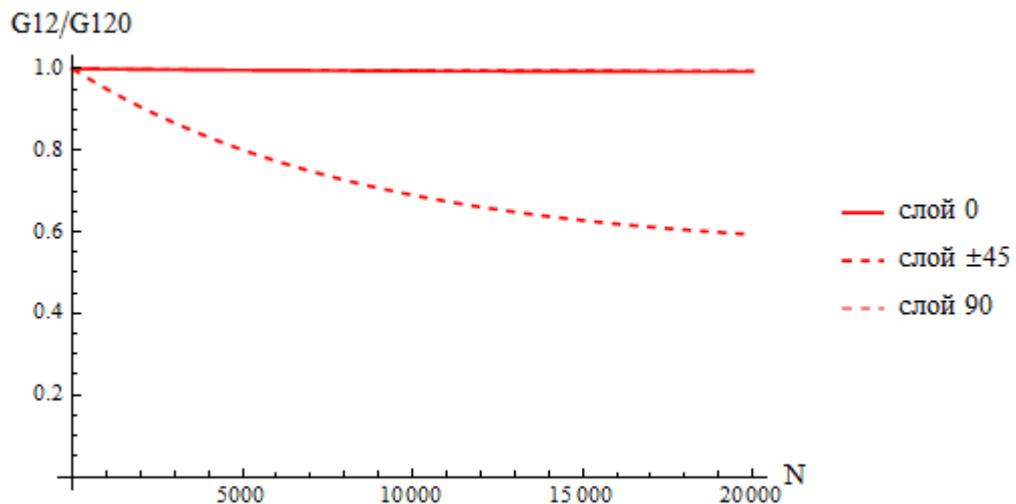


Рис. 3.9. Изменение модулей сдвига в отдельных слоях слоистого композита с квазиизотропной укладкой типа  $[0, \pm 45^\circ, 90^\circ]_s$ .

**Замечание:**

Модель деградации можно уточнить, если расширить список параметров модели, включив в него параметр  $m$  (3.21). В этом случае все параметры из расширенного спектра параметров находятся по изложенному выше алгоритму (в разделе 3.4) так, чтобы обеспечить наилучшее приближение одновременно для трех структур слоистых композитов (типа  $[0, 90^\circ]_s$ ,  $[0, \pm 45^\circ]_s$  и  $[0, \pm 45^\circ, 90^\circ]_s$ ).

### 3.6. Моделирование процесса деградации свойств с учетом воздействия температуры

Учитывая найденные параметры модели деградации, оценим влияние теплового нагружения (3.34) на процесс деградации свойств для трех рассматриваемых структур. Приведем расчет изменения модуля структуры материала с учетом воздействия температуры. На рис 3.10–3.18 показаны результаты расчета процесса деградации свойств выше рассматриваемых структур.

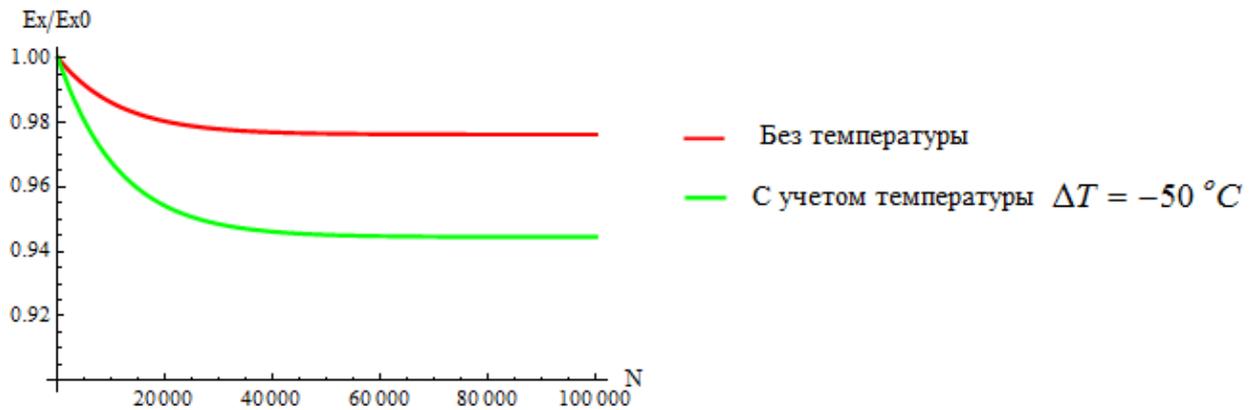


Рис. 3.10. Изменение эффективного модуля слоистого композита с продольно-поперечной укладкой слоев типа  $[0, 90_2]_s$  при воздействии постоянной температуры  $\Delta T = -50^\circ C$ .

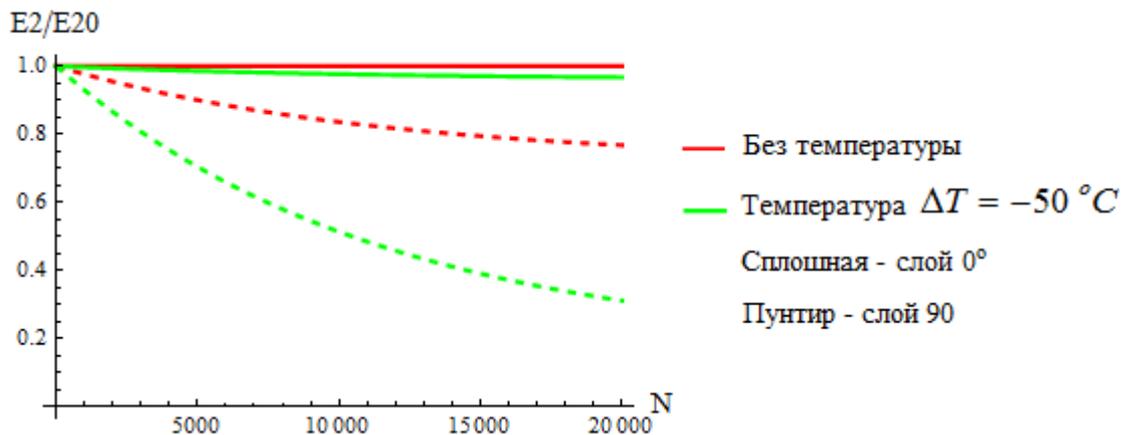


Рис. 3.11. Изменение поперечных модулей в отдельных слоях слоистого композита с продольно-поперечной укладкой слоев типа  $[0, 90_2]_s$  при воздействии постоянной температуры  $\Delta T = -50^\circ C$ .

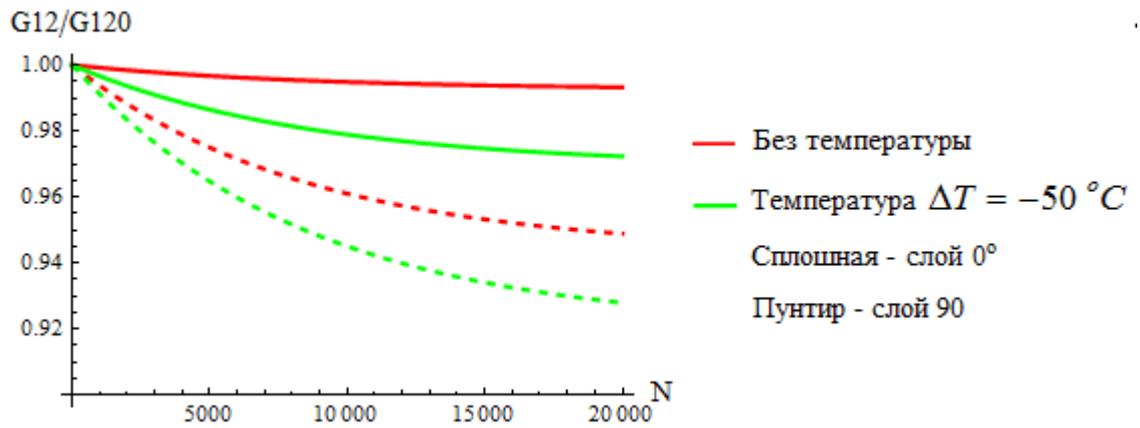


Рис. 3.12. Изменение модулей сдвига в отдельных слоях слоистого композита с продольно-поперечной укладкой слоев типа  $[0, 90_2]_s$  при воздействии постоянной температуры  $\Delta T = -50 \text{ }^\circ\text{C}$ .

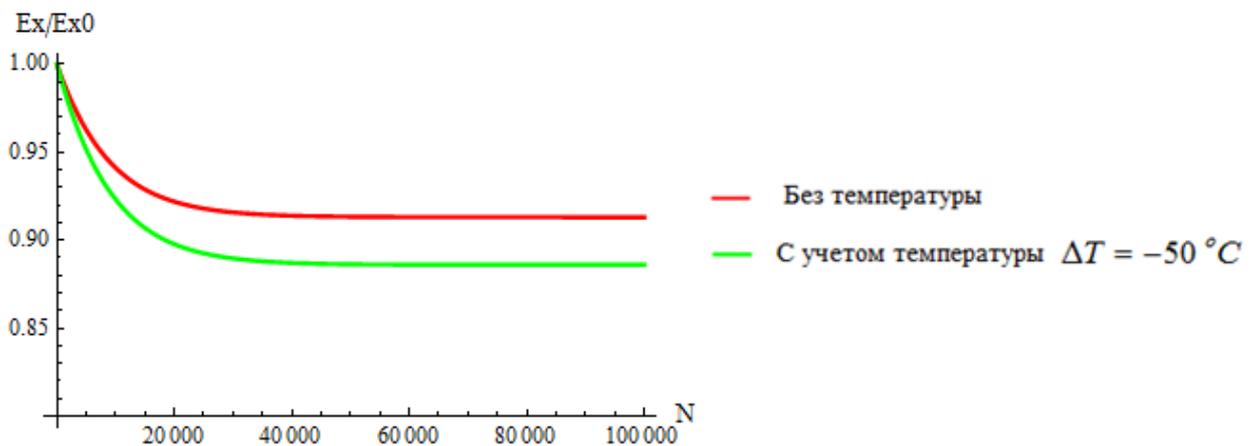


Рис. 2.13. Изменение эффективного модуля слоистого композита с укладкой слоев только  $0^\circ$  и  $45^\circ$  типа  $[0, \pm 45^\circ]_s$  при воздействии постоянной температуры  $\Delta T = -50 \text{ }^\circ\text{C}$ .

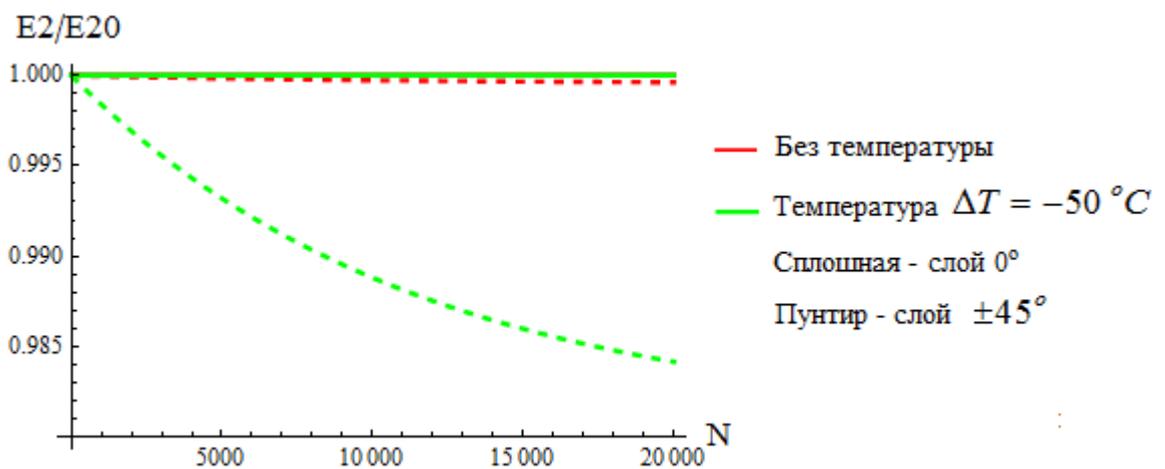


Рис. 3.14. Изменение поперечных модулей в отдельных слоях слоистого композита с укладкой слоев только  $0^\circ$  и  $45^\circ$  типа  $[0, \pm 45^\circ]_s$  при воздействии постоянной температуры  $\Delta T = -50^\circ C$ .

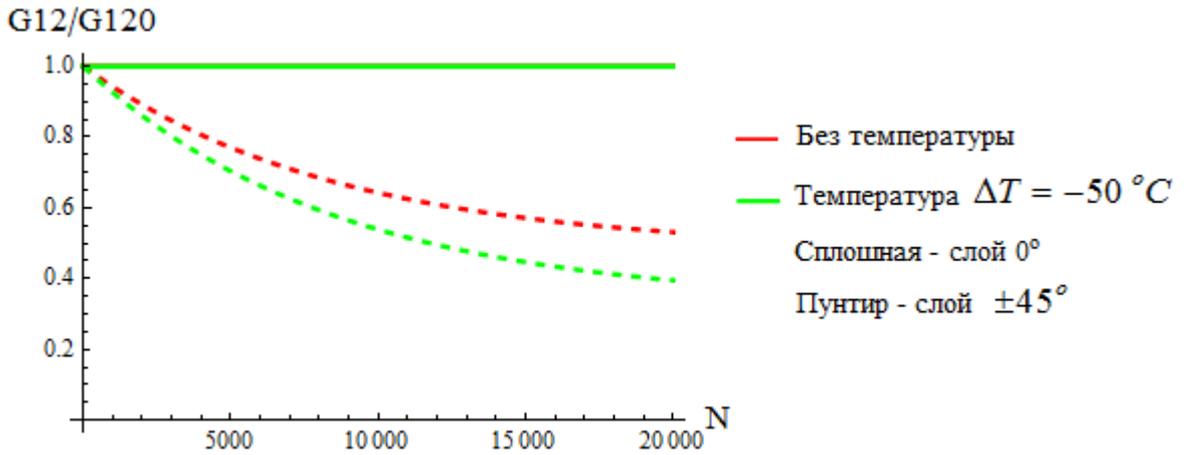


Рис. 3.15. Изменение модулей сдвига в отдельных слоях слоистого композита с укладкой слоев только  $0^\circ$  и  $45^\circ$  типа  $[0, \pm 45^\circ]_s$  при воздействии постоянной температуры  $\Delta T = -50^\circ C$ .

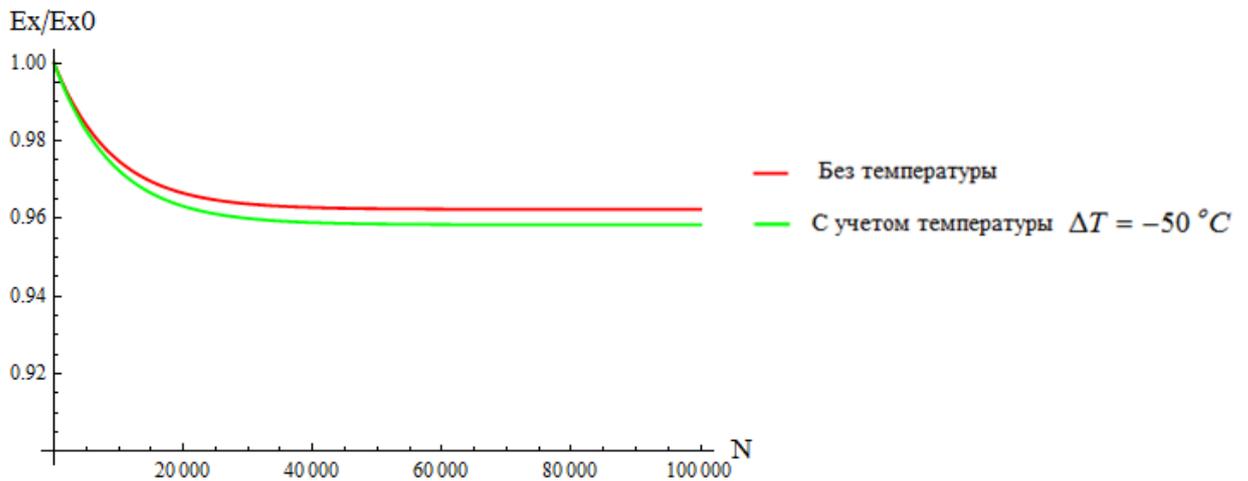


Рис. 3.16. Изменение эффективного модуля слоистого композита с квазиизотропной укладкой типа  $[0, \pm 45^\circ, 90^\circ]_s$  при воздействии постоянной температуры  $\Delta T = -50^\circ C$ .

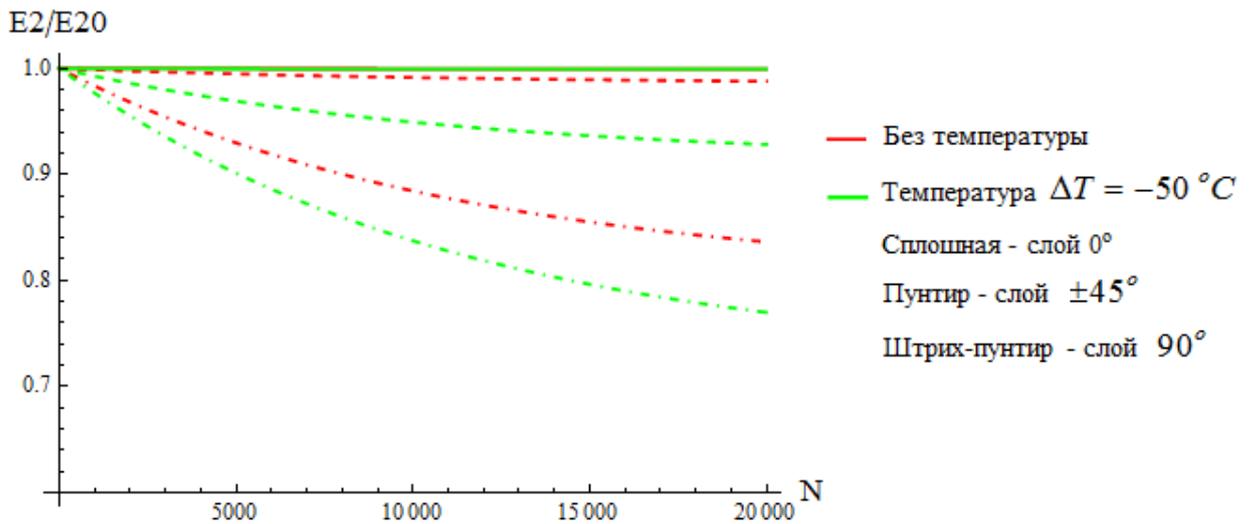


Рис. 3.17. Изменение поперечных модулей в отдельных слоях слоистого композита с квазиизотропной укладкой типа  $[0, \pm 45^\circ, 90^\circ]_s$  при воздействии постоянной температуры  $\Delta T = -50^\circ C$ .

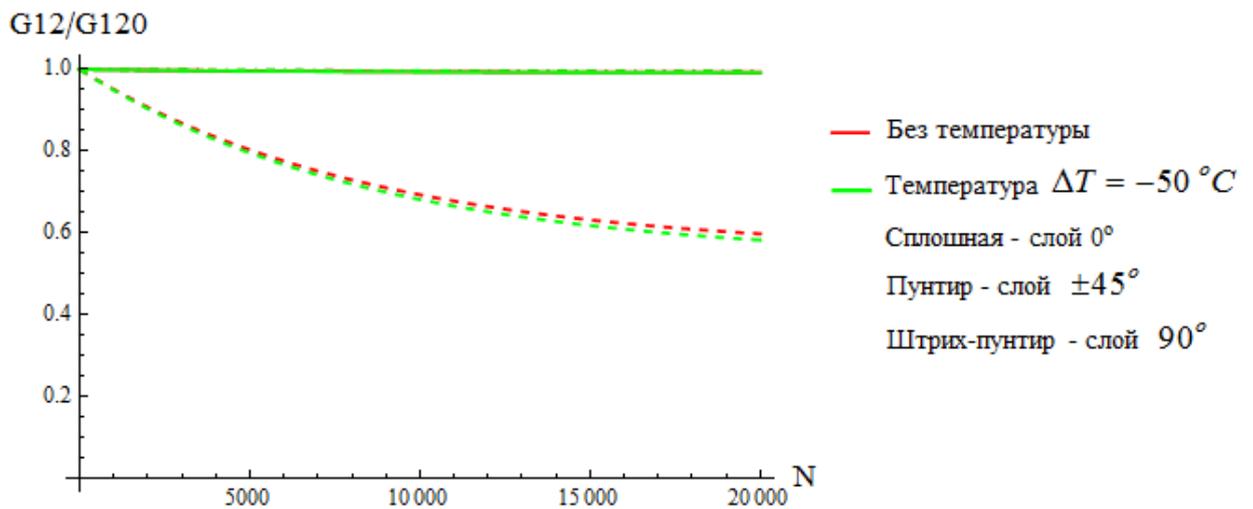


Рис. 3.18. Изменение модулей сдвига в отдельных слоях слоистого композита с квазиизотропной укладкой типа  $[0, \pm 45^\circ, 90^\circ]_s$  при воздействии постоянной температуры  $\Delta T = -50^\circ C$ .

### **3.6. Выводы к третьей главе**

1. Решена новая задача термоупругости позволяющая определить падение механических характеристик композитного материала при воздействии температуры.

2. Произведено сравнение падения механических характеристик при силовом воздействии без учета и с учетом воздействия температуры.

3. Показано, что воздействие температуры существенно уменьшает механические характеристики рассматриваемых структур, т.е. оказывает существенное влияние на процесс деградации механических свойств слоистых композитов.

## **Глава 4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДЕГРАДАЦИИ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ОБРАЗЦОВ УГЛЕПЛАСТИКА ПРИ ТЕРМОЦИКЛИРОВАНИИ**

*Цель* экспериментальных исследований состоит в экспериментальной оценке влияния теплового напряжения на процесс деградации механических характеристик слоистых композитных панелей и прочностные свойства таких панелей при термоциклировании.

### **4.1. Об испытательной машине для проведения испытания**

Универсальная испытательная машина «INSTRON» позволяет проводить испытания композитов (многослойных панелей) на растяжение, сжатие, сдвиг и изгиб при температурах от  $-80^{\circ}\text{C}$  до  $+300^{\circ}\text{C}$  и скоростях деформирования 0,001–1000 мм/мин. Машина управляется с помощью компьютера и специального программного обеспечения «BLUEHILL 3», которое включает в себя множество стандартных вычислений, например: условного предела текучести, временного сопротивления при разрыве, модуля Юнга, предельного равномерного удлинения, относительного удлинения после разрыва и др. Машина «INSTRON» обладает и другими функциональными возможностями: циклирование, регистрация петли гистерезиса, управляемые настройки режимов сервоуправления (по нагрузке, по перемещению, по деформации и т.д.), управление способом остановки испытания (возможность испытаний в нисходящей области диаграммы). Все результаты, которые полученные с помощью программного обеспечения «BLUEHILL 3» включают прочность при растяжении, деформацию при разрушении и модуль упругости, выдаются в виде отчета и экспортируются в программные продукты «MICROSOFT».

## 4.2. Описание процесса испытания

### 4.2.1 Подготовка образцов

Проводились испытания образцов из углеродных волокон НТА-40 и эпоксидной матрицы ЭДТ-10 с однонаправленной и симметричной укладкой типа  $[0^\circ, 90^\circ]_s$  (табл. 4.1-4.2). Образцы были подготовлены с выступающими концами (рис. 4.1), что позволило осуществить безопасный захват образца, а также способствовало тому, что разрушения происходили в пределах длины измерительной базы, а не на поверхности зажимных губок. Образцы изготовлены методом формования ручной укладкой.

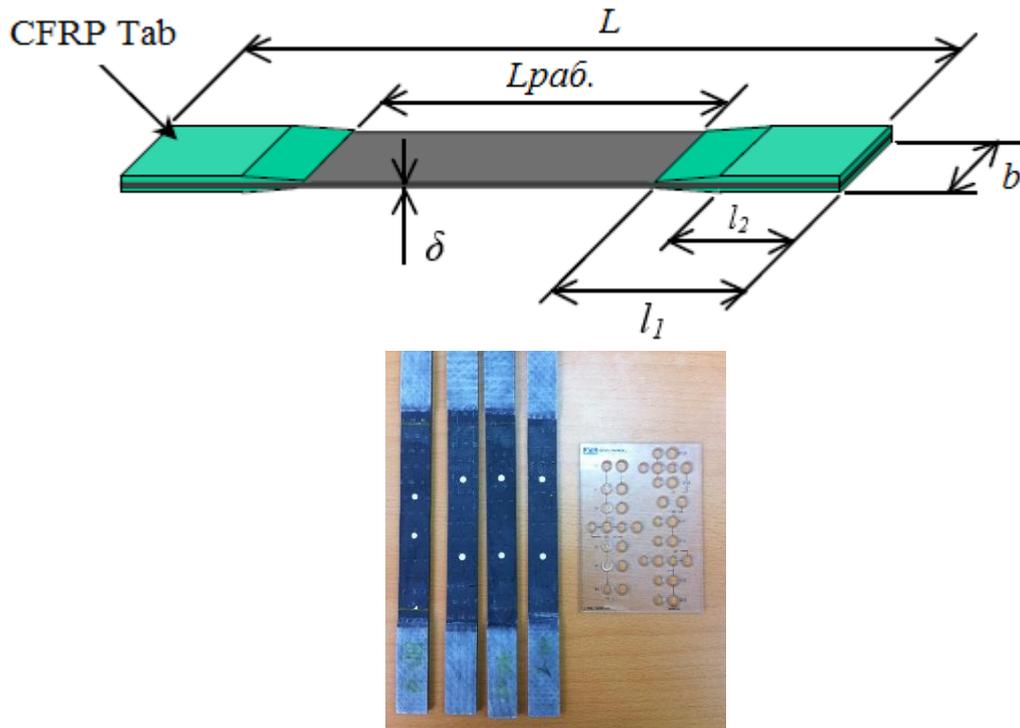


Рис. 4.1. Геометрическая форма образцов для испытаний.

Таблица 4.1

Размеры образца для испытания.

$L, \text{мм}$	$L_{\text{раб.}}, \text{мм}$	$b, \text{мм}$	$\delta, \text{мм}$	$l_1, \text{мм}$	$l_2, \text{мм}$
250	150	20	1,6	40	50

Количество образцов для испытаний.

№	Наименование	Число	Укладка	Монослой	Толщина, $\delta$
1	Однонаправленный	5 шт.	0°	4 слоя по 0,2 мм	0,8 мм
2	Ортотропный	39 шт.	$[0^\circ, 90^\circ]_s$	0°: 2 слоя по 0,2 мм 90°: 4 слоя по 0,2 мм мм 0°: 2 слоя по 0,2 мм	1,6 мм

#### 4.2.2. Испытание образцов на термоциклирование

Образцы сначала укладываются в климатической камере (рис. 4.2), которая позволила нам провести испытание при  $80^\circ\text{C}$  с помощью внутреннего нагревательного элемента в течение времени 10 мин., потом образцы охлаждаются до комнатной температуры, далее охлаждают образцы жидким азотом при температуре  $-196^\circ\text{C}$  в течение времени 3 мин., после этого образцы охлаждаются до комнатной температуры. Процесс повторяется до ожидаемого числа температурных циклов, в соответствии с условиями, приведенными на рис. 4.3. Результаты испытания на термоциклирование представлены в табл. 4.3.



Рис. 4.2. Климатическая камера машины Инстрон.

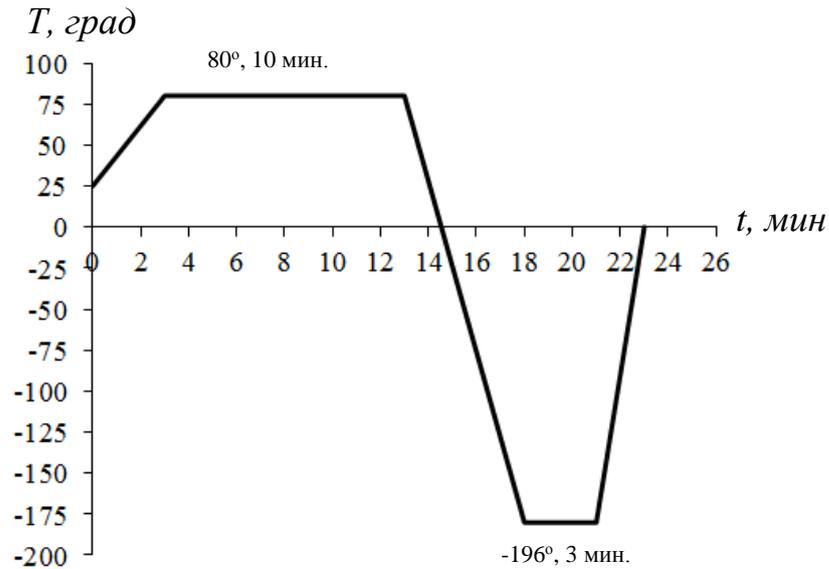


Рис. 4.3. Кривая изменения цикла термоциклирования в зависимости от времени и температуры.

Таблица 4.3

Результат испытания на термоциклировании.

№ партия	Количество образцов в партии	Обозначения образцов	Число циклов
1	3	0-1;0-2;0-3	0
2	4	3-1;3-2;3-3;3-4	3
3	4	10-1;10-2;10-3;10-4	10
4	4	20-1;20-2;20-3;20-4	20
5	4	30-1;30-2;30-3;30-4	30
6	4	40-1;40-2;40-3;40-4	40
7	4	60-1; 60-2; 60-3;60-4	60
8	4	80-1; 80-2; 80-3;80-4	80
9	4	100-1; 100-2; 100-3;100-4	100
10	4	120-1; 120-2; 120-3;120-4	120

#### 4.2.3. Испытание образцов на растяжение

Для данного испытания была применена испытательная машина «INSTRON» серии 5980 (рис. 4.4) для испытаний на растяжение. Эта система обеспечивает точность результатов, надежность и обладают гибкостью для удовлетворения изменяющихся требований. Система оснащена бесконтактным

оптическим видеоэкстензометром, который разработан для точного измерения деформации без необходимости контакта с образцом.

После термоциклирования до начала испытания на растяжение образец размещается в механических клиновых захватах, рассчитанных на нагрузку 50 кН. Системы серии 5980, работающие на программном обеспечении «BLUEHILL 3», оснащены функцией защиты образца, которая позволяет задать порог нагрузки, который не будет превышен до начала испытания. Кроме того, использовалось дополнительное устройство для оптимального выравнивания образца в зажимных губках, поскольку отклонение нагрузки может сильно повлиять на результаты испытания.

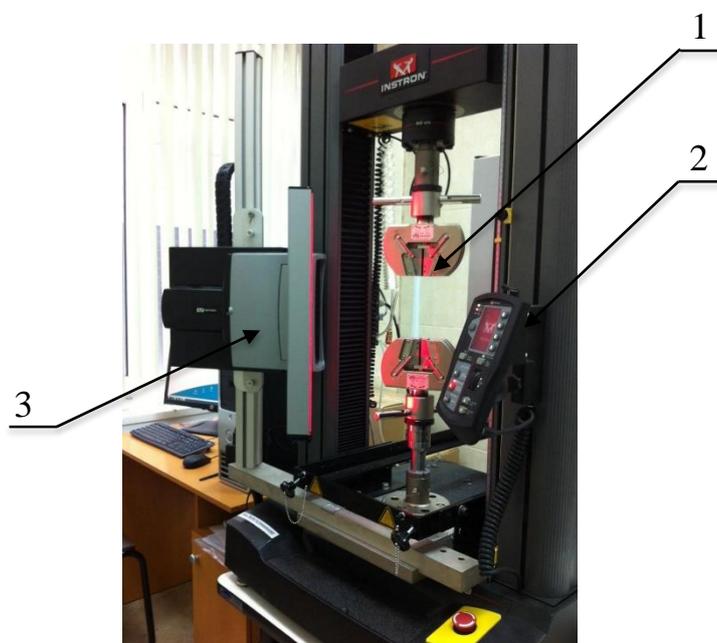


Рис. 4.4. Напольная система серии 5980 испытательной машины «INSTRON».

1. Механические клиновые захваты; 2. Пульт управления гидравлическим приводом захватов; 3. Бесконтактный оптический видеоэкстензометр.

### 4.3. Результат испытания

Все результаты полученные с помощью программного обеспечения «BLUEHILL» включают прочность при растяжении, деформацию при разрушении и модуль упругости. В табл. 4.4 представлены результаты

испытания для каждой партии испытуемого пакета, а в табл. 4.6 показаны данные при испытании однонаправленного образца.

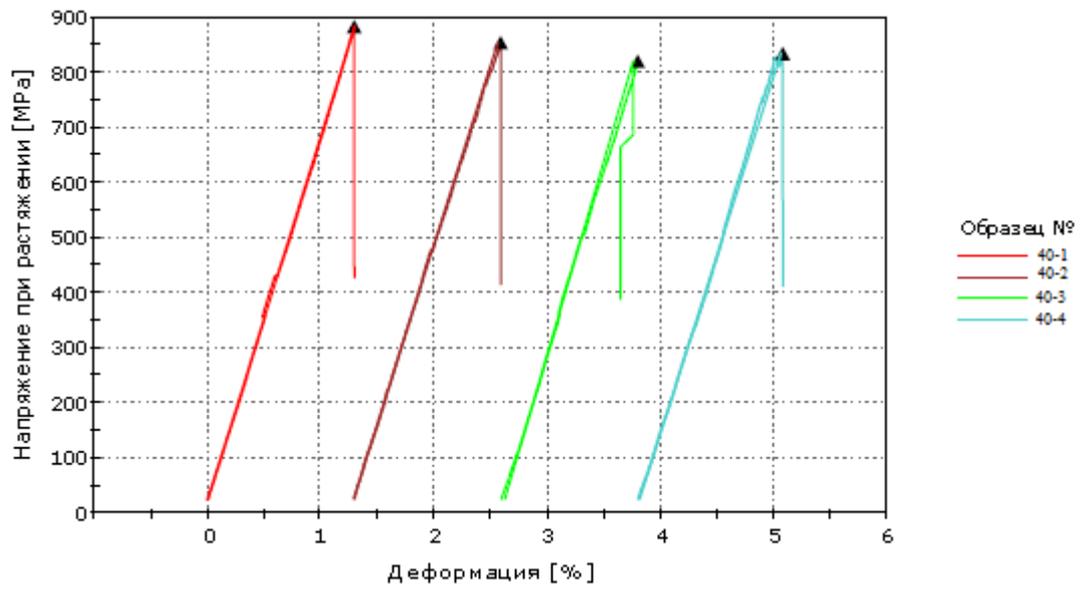
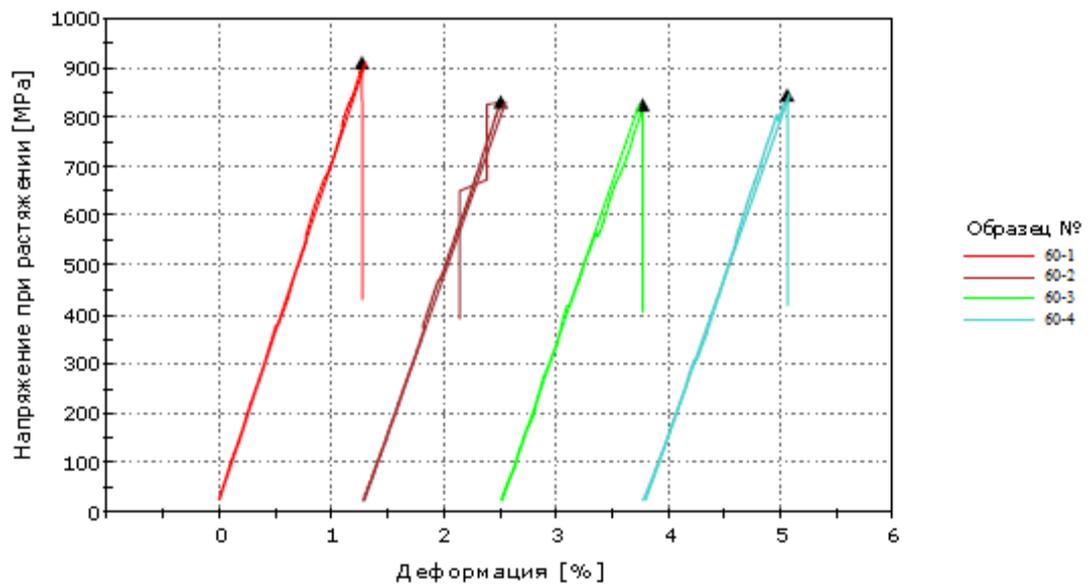
Таблица 4.4

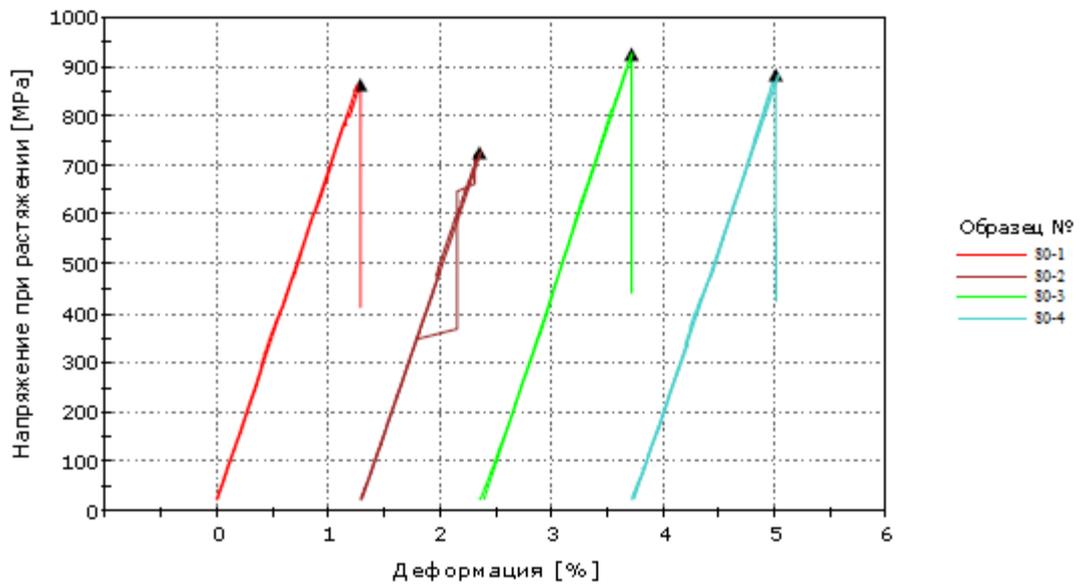
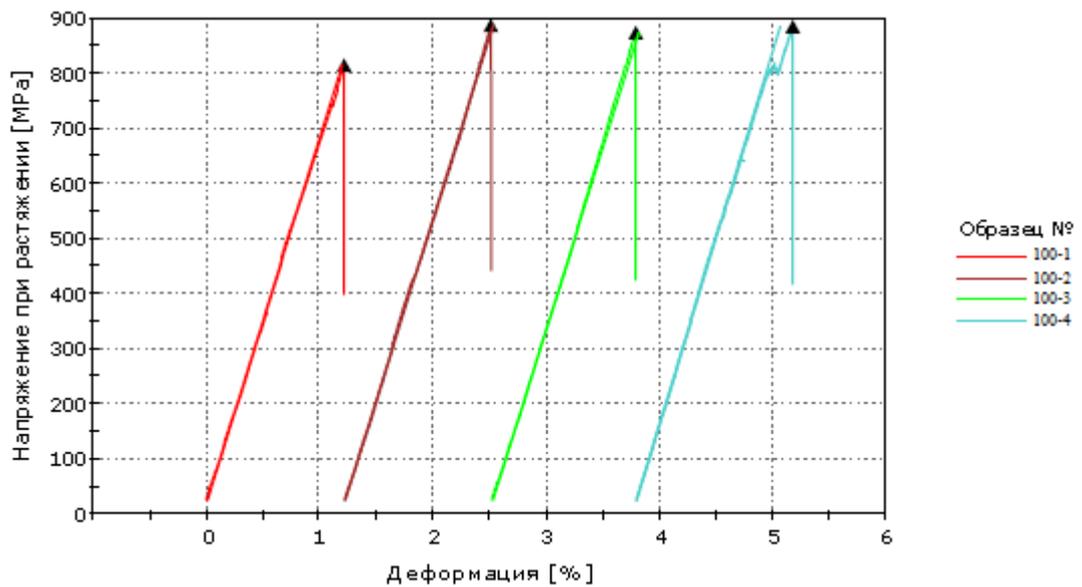
## Результаты испытания каждой партии

Партия	Метка образца	Модуль $GPa$	Предельная прочность $MПа$
№ 1	0-1	74,88	779,16
	0-2	72,08	851,21
	0-3	75,72	884,83
Среднее		74,23	838,4
Коэффициент вариации		2,57	6,44
№ 2	3-1	71,59	780,23
	3-2	71,16	902,49
	3-3	64,05	861,34
	3-4	----	757,94
Среднее		71,37	841,36
Коэффициент вариации		0,99	0,93
№ 3	10-1	69,83	872,17
	10-2	61,52	848,72
	10-3	71,72	946,38
	10-4	68,98	766,66
Среднее		70,18	861,73
Коэффициент вариации		0,97	0,91
№ 4	20-1	72,36	897,05
	20-2	72,71	906,00
	20-3	71,66	885,58
	20-4	72,06	900,56
Среднее		72,2	897,29
Коэффициент вариации		0,61	0,96
№ 5	30-1	73,69	960,69
	30-2	73,27	969,68
	30-3	69,09	719,51
	30-4	71,19	778,10
Среднее		71,81	856,99
Коэффициент вариации		0,97	0,88

№ 6	40-1	66,34	882,54
	40-2	65,04	853,71
	40-3	70,17	819,80
	40-4	64,74	833,71
Среднее		66,58	847,44
Коэффициент вариации		2,72	3,21
№ 7	60-1	67,64	910,64
	60-2	63,91	830,79
	60-3	65,60	824,25
	60-4	63,95	845,04
Среднее		66,58	852,68
Коэффициент вариации		1,95	4,64
№ 8	80-1	66,73	862,36
	80-2	65,79	725,30
	80-3	67,82	924,53
	80-4	66,10	882,57
Среднее		66,61	848,69
Коэффициент вариации		1,34	10,16
№ 9	100-1	66,48	814,81
	100-2	65,88	886,67
	100-3	65,94	873,78
	100-4	67,70	884,56
Среднее		66,50	864,95
Коэффициент вариации		3,52	3,91
№ 10	120-1	66,20	831,76
	120-2	68,07	789,68
	120-3	61,03	828,35
	120-4	66,79	900,74
Среднее		65,52	837,63
Коэффициент вариации		4,72	5,51

На рис.4.5-4.9 показаны диаграммы  $\sigma$ – $\epsilon$  при испытании нескольких партий образцов, а на рис. 4.11 показана диаграмма  $\sigma$ – $\epsilon$  при испытании однонаправленного образца.

Рис. 4.5. Диаграмма  $\sigma$ - $\epsilon$  при испытании партии № 6.Рис. 4.6. Диаграмма  $\sigma$ - $\epsilon$  при испытании партии № 7.

Рис. 4.7. Диаграмма  $\sigma$ – $\varepsilon$  при испытании партии № 8.Рис. 4.8. Диаграмма  $\sigma$ – $\varepsilon$  при испытании партии № 9.

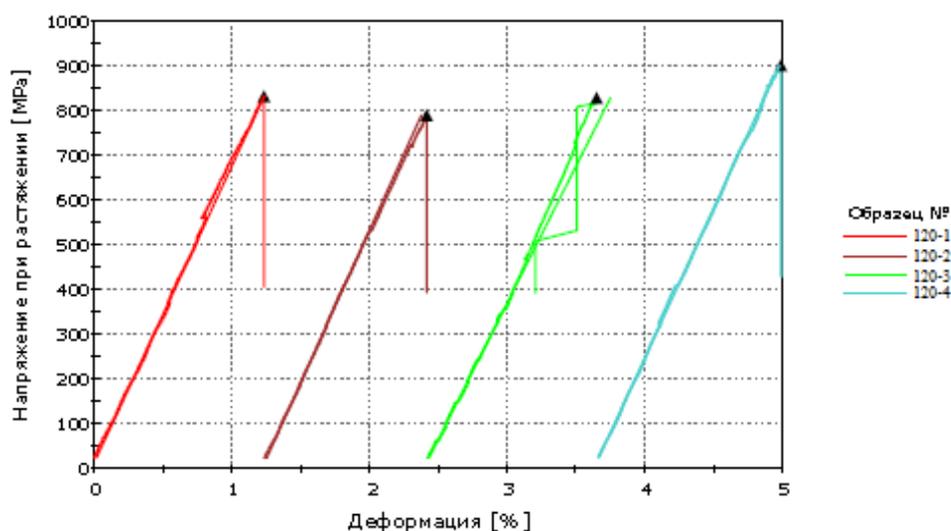


Рис. 4.9. Диаграмма  $\sigma$ – $\varepsilon$  при испытании партии № 10.

Среднее значение предельной деформации, модуля упругости и предельной прочности внесли в табл. 4.5, а на рис. 4.10 показано изменение прочности образцов с укладкой типа  $[0^\circ, 90^\circ]_s$  на разрыв при термоциклировании.

Таблица 4.5

Результат эксперимента на растяжение.

№ партии	Количество циклов	Предельная деформация	Модуль $GPa$	Предельные прочности $MPa$
1	0	0,0122	74,23	838,00
2	3	0,0126	71,37	841,36
3	10	0,0124	70,18	861,73
4	20	0,0119	72,20	897,29
5	30	0,0123	71,81	856,99
6	40	0,0127	66,58	847,44
7	60	0,0125	66,58	852,68
8	80	0,0125	66,61	848,69
9	100	0,0129	66,50	864,95
10	120	0,0124	65,52	837,63

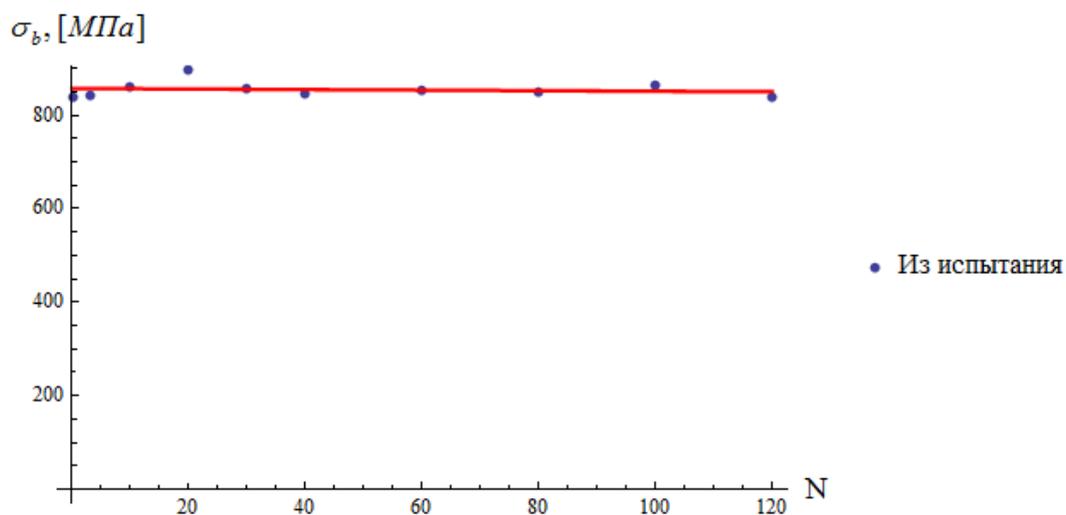


Рис. 4.10. Изменение прочности образцов с укладкой типа  $[0^\circ, 90^\circ]_s$ ,  $\sigma_b$ , [МПа] на разрыв при термоциклировании

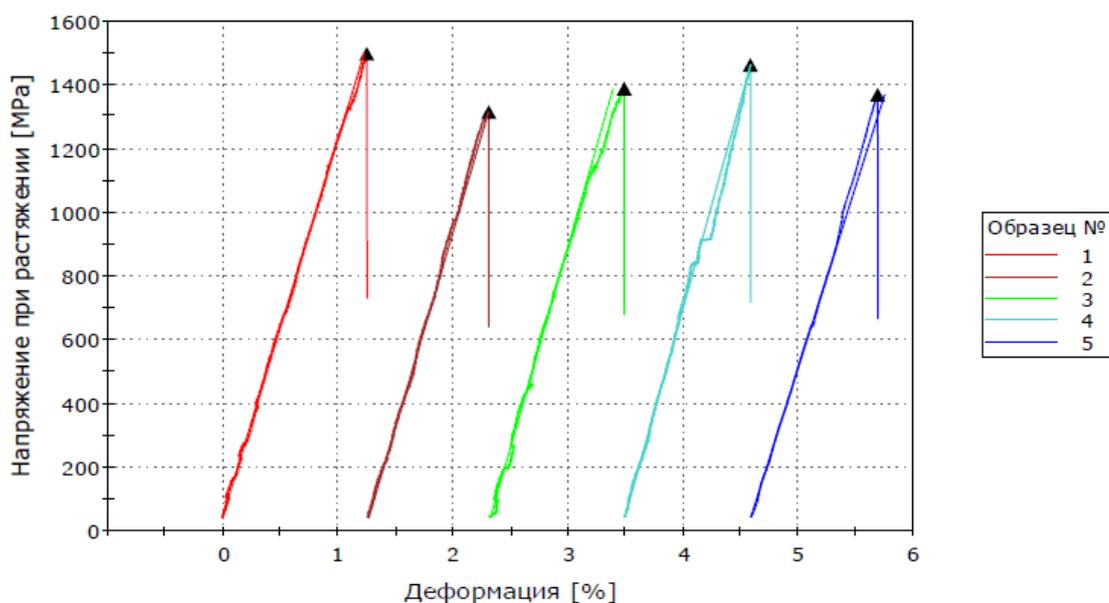


Рис. 4.11. Диаграмма  $\sigma$ - $\epsilon$  при испытании однонаправленного образца.

Таблица 4.6

Результат испытания однонаправленного образца.

	Метка образца	Модуль ГПа	Пределная прочность МПа
	01	117,69	1495,69
	02	122,03	1313,13
	03	126,02	1386,74
	04	129,59	1461,20
	05	113,4	1367,67
Среднее		121,84	1404,89

#### 4.4. Идентификация свойств материала с помощью программы «DIGIMAT»

Исходными данными для моделирования процесса деградации механических свойств испытуемых образцов являются характеристики монослоя. В испытании используем волокно маркой НТА-40 и матрицу маркой ЭДТ-10, свойства которых приведены в табл. 4.7 и 4.8.

Таблица 4.7

Свойства волокна НТА-40.

Характеристики	Единица	Значение
$E_1$	<i>МПа</i>	238000
$E_2$	<i>МПа</i>	24000
$G_{12}$	<i>МПа</i>	16000
$\mu_{21}$	----	0,279
$\mu_{23}$	----	0,49
$\alpha \cdot 10^{-6}$	$^{\circ}\text{C}^{-1}$	-0,1
$\rho$	$\text{г}/\text{см}^2$	1,7
$\sigma_b$	<i>МПа</i>	1200

Таблица 4.8

Свойства матрицы ЭДТ-10.

Характеристики	Единица	Значение
$E$	<i>МПа</i>	2600
$\mu$	----	0,4
$\alpha \cdot 10^{-6}$	$^{\circ}\text{C}^{-1}$	65
$\rho$	$\text{г}/\text{см}^2$	1,23
$\sigma_b$	<i>МПа</i>	75

Задача определения свойств монослоя, основанного на свойствах волокна НТА-40 и матрицы ЭДТ-10, решается с помощью программы «DIGIMAT». «DIGIMAT» предназначен для быстрого и высокоточного прогноза нелинейного поведения многокомпонентных материалов, таких как пластмассы, полимеры, угле- и стеклопластики, наноматериалы и т.д., для точной оценки локального и

глобального поведения многокомпонентных структур с помощью метода конечных элементов, для подготовки, хранения и конфиденциального обмена моделями материалов, для лёгкого и высокоэффективного проектирования сотовых сэндвич-панелей. Также «DIGIMAT» представляет пользователю ряд интерфейсов для конечно-элементных программных систем компьютерного инжиниринга («ANSYS», «LS-DYNA», «SIMULIA/Abaqus» и др.), предназначенных для компьютерного моделирования и исследования проблем механики деформируемого твердого тела, механики конструкций и программных систем конечно-элементного моделирования процессов литья пластмасс («MOLDEX3D», «MOLDFLOW» и др.).

### **Этапы моделирования в «DIGIMAT»:**

- Зададим свойства волокна (рис. 4.12), которые приведены в табл. 4.7

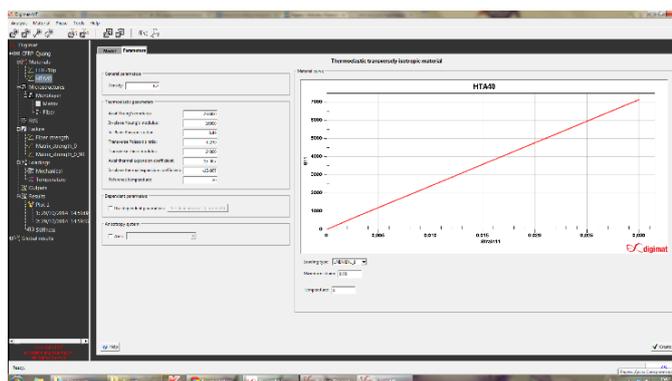


Рис. 4.12. Задание свойств волокна в «DIGIMAT».

- Зададим свойства матрицы (рис. 4.13), которые приведены в табл. 4.8

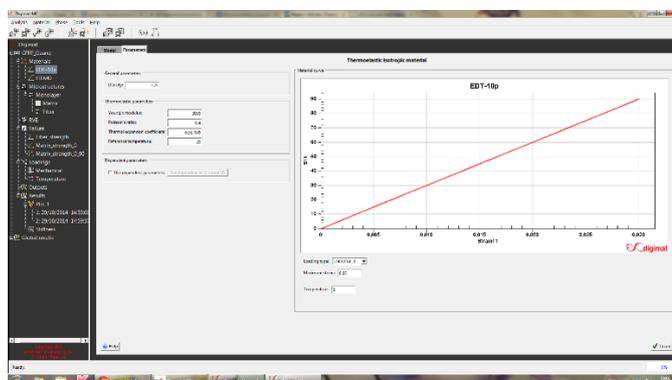


Рис. 4.13. Задание свойств матрицы в «DIGIMAT».

- Создать пакет из четырех слоев типа  $[0^{\circ}, 90^{\circ}]_s$ .

- Реализуем программу.
- Выводим результат моделирования

На рис. 4.14 показаны диаграммы  $\sigma$ – $\varepsilon$ , полученные в результате КЭ анализа в связке с «DIGIMAT». Были приведены 2 анализа: однонаправленный образец и образец с продольно-поперечной укладкой типа  $[0^\circ, 90^\circ]_s$ . Эти диаграммы точно совпадали с диаграммами, которые получили при проведении испытания этих двух типов образцов (рис. 4.10 и табл. 4.4).



Рис. 4.14. Диаграмма  $\sigma$ – $\varepsilon$  однонаправленного образца и образца с укладкой типа  $[0^\circ, 90^\circ]_s$  (в «DIGIMAT»).

По результатам моделирования свойств получим матрицу жесткостей пакета  $[0^\circ, 90^\circ]_s$ , которые представляют в табл. 4.9.

Таблица 4.9

Найденная матрица жесткостей из Digimat.

$C_{11}=67290$	$C_{12}=5557,1$	$C_{13}=5883,1$	0	0	0
$C_{21}=5557,1$	$C_{22}=67290$	$C_{23}=5883,1$	0	0	0
$C_{31}=5883,1$	$C_{32}=5883,1$	$C_{33}=10333$	0	0	0
0	0	0	$C_{44}=2876,8$	0	0
0	0	0	0	$C_{55}=2469,3$	0
0	0	0	0	0	$C_{66}=2469,3$

Найдем средний модуль по формуле

$$E_x = C_{11} - \frac{2C_{12}^2}{C_{22} + C_{23}} = 66445,9 \text{ МПа}. \quad (4.1)$$

Полученное значение среднего модуля Юнга пакета отличается от испытания. Известно, что при использовании данных испытаний для однонаправленного материала в расчете свойств слоистого пакета могут возникать погрешности, поэтому обычно необходимо использовать данные о жесткости нескольких вариантов пакетов с различными укладками слоев (см. например [39]). Если используют значения модулей, то не удадутся описать данные испытания. В данной работе для свойств монослоя будем использовать завышенное значение поперечного модуля, равное  $28 \text{ ГПа}$ , которое больше экспериментальных данных, полученных на однонаправленных образцах ( $6,5 \text{ ГПа}$ ). В этом случае удастся достоверно описать полученные экспериментальные данные по модулю Юнга образцов композита с симметричной укладкой  $[0^\circ, 90^\circ]_s$ .

В итоге моделирования получим свойства монослоя, которые представляются в табл. 4.10.

Таблица 4.10

Свойства монослоя.

Характеристики	Единица	Значение
$E_1$	$\text{МПа}$	120510
$E_2$	$\text{МПа}$	28000 <del>6500</del>
$G_{12}$	$\text{МПа}$	2870
$\mu_{12}$	-----	0,33
$\alpha_1$	$^\circ\text{C}^{-1}$	$0,796 \cdot 10^{-6}$
$\alpha_2$	$^\circ\text{C}^{-1}$	$42 \cdot 10^{-6}$
$[\sigma_2]$	$\text{МПа}$	32
$[\tau]$	$\text{МПа}$	30

#### 4.5. Расчет деградации механических характеристик образца при термоциклировании

*Алгоритм расчета накопления повреждения (см. раздел 3.4) пакета за один цикл при условии термоциклирования*

Расчет НДС пакета при действии только температуры

Определим коэффициенты преобразования характеристик для каждого слоя пакета

$$\begin{aligned}
b_{11}^i &= \bar{E}_1^i \cos^4 \varphi_i + 2\bar{E}_2^i \mu_{12}^i \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i + \bar{E}_2^i \sin^4 \varphi_i + G_{12}^i \sin^2 2\varphi_i; \\
b_{12}^i &= (\bar{E}_1^i + \bar{E}_2^i - 4G_{12}^i) \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i + \bar{E}_2^i \mu_{12}^i (\sin^4 \varphi_i + \cos^4 \varphi_i); \\
b_{22}^i &= \bar{E}_1^i \sin^4 \varphi_i + 2\bar{E}_2^i \mu_{12}^i \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i + \bar{E}_2^i \cos^4 \varphi_i + G_{12}^i \sin^2 2\varphi_i; \\
b_{t1}^i &= \bar{E}_1^i (\alpha_1^i + \mu_{12}^i \alpha_2^i) \cos^2 \varphi_i + \bar{E}_2^i (\alpha_2^i + \mu_{21}^i \alpha_1^i) \sin^2 \varphi_i; \\
b_{t2}^i &= \bar{E}_1^i (\alpha_1^i + \mu_{12}^i \alpha_2^i) \sin^2 \varphi_i + \bar{E}_2^i (\alpha_2^i + \mu_{21}^i \alpha_1^i) \cos^2 \varphi_i,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Где  $\bar{E}_{1,2} = \frac{E_{1,2}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}$ .

Составим уравнения равновесия пакета при воздействии температуры

$$\begin{aligned}
B_{11}\varepsilon_x + B_{12}\varepsilon_y &= B_{t1}t; \\
B_{12}\varepsilon_x + B_{22}\varepsilon_y &= B_{t2}t,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{B_{22}B_{t1}t - B_{12}B_{t2}t}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}; \\
\varepsilon_y &= \frac{B_{11}B_{t2}t - B_{12}B_{t1}t}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2},
\end{aligned} \tag{4.4}$$

где  $B_{pq} = \sum_{i=1}^k \bar{h}_i b_{pq}^i$ ,  $B_{tp} = \sum_{i=1}^k \bar{h}_i b_{tp}^i$ ,  $p, q = 1, 2$ .

Выводим ясный вид коэффициентов для рассматриваемого пакета типа  $[0^\circ, 90^\circ]_s$  в зависимости от поперечных модулей и модулей сдвига

$$\begin{aligned}
B_{11} &= \frac{\bar{E}_1}{2} + \frac{\bar{E}_2^{(2)}}{2}; \\
B_{12} &= \frac{\mu_{12}\bar{E}_2^{(1)}}{2} + \frac{\mu_{12}\bar{E}_2^{(2)}}{2}; \\
B_{22} &= \frac{\bar{E}_1}{2} + \frac{\bar{E}_2^{(1)}}{2},
\end{aligned} \tag{4.5}$$

где индексы (1) и (2) соответствуют слоям с углом укладки  $0^\circ$  и  $90^\circ$ .

Средний модуль пакета определяется по следующей формуле

$$E_x = B_{11} - \frac{B_{12}^2}{B_{22}}. \quad (4.6)$$

После определения деформации всего пакета по формулам (4.3) вычислим напряжения в  $i$ -ом слое в системе координат  $xOy$

$$\begin{aligned} \sigma_x^i &= b_{11}^i \varepsilon_x + b_{12}^i \varepsilon_y - b_{t1}^i t; \\ \sigma_y^i &= b_{12}^i \varepsilon_x + b_{22}^i \varepsilon_y - b_{t2}^i t. \end{aligned} \quad (4.7)$$

По этим напряжениям определим напряжения вдоль и поперек волокон  $\sigma_1^i$ ,  $\sigma_2^i$  возникают в каждом слое

$$\begin{aligned} \sigma_1^i &= \sigma_x^i \cos^2 \varphi_i + \sigma_y^i \sin^2 \varphi_i; \\ \sigma_2^i &= \sigma_x^i \sin^2 \varphi_i + \sigma_y^i \cos^2 \varphi_i; \end{aligned} \quad (4.8)$$

Определим поперечные модули и модули сдвига в каждом слое по разматываемой модели деградации после цикла температурного нагружения (см. раздел 3.3)

$$\begin{aligned} E_2^i &= E_{2o} \left[ 1 - K_{Eo} \left\{ \frac{\sigma_2^i + |\sigma_2^i|}{2[\sigma_2]} \right\}^{m_0} \left( 1 - e^{-b_E \frac{N}{N_0}} \right) \right]; \\ G_{12}^i &= G_{12o} \left[ 1 - K_{Go} \left\{ \left( \frac{\tau_{12}^i}{[\tau]} \right)^{m_\tau} + \alpha \left( \frac{\sigma_2^i + |\sigma_2^i|}{2[\sigma_2]} \right)^{m_\sigma} \right\} \left( 1 - e^{-b_G \frac{N}{N_0}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

где  $N$ —число циклов при испытании,  $N_0 = 120$ —максимальное число испытания

Параметры модели определяются из данных испытания (табл. 4.5) с помощью метода наименьших квадратов и представляют в табл. 4.11.

Таблица 4.11

## Параметры моделирования.

№	Параметр	Значение
1	$K_{E_0}$	0,18
2	$K_{G_0}$	0,15
3	$m_0$	1
4	$m_\sigma$	0,5
5	$m_\tau$	1
6	$b_E$	6,5
7	$b_G$	5
8	$\alpha$	0,1

Процесс расчета повторяется до числа циклов испытания и результаты представляются на рис. 4.15-4.17.

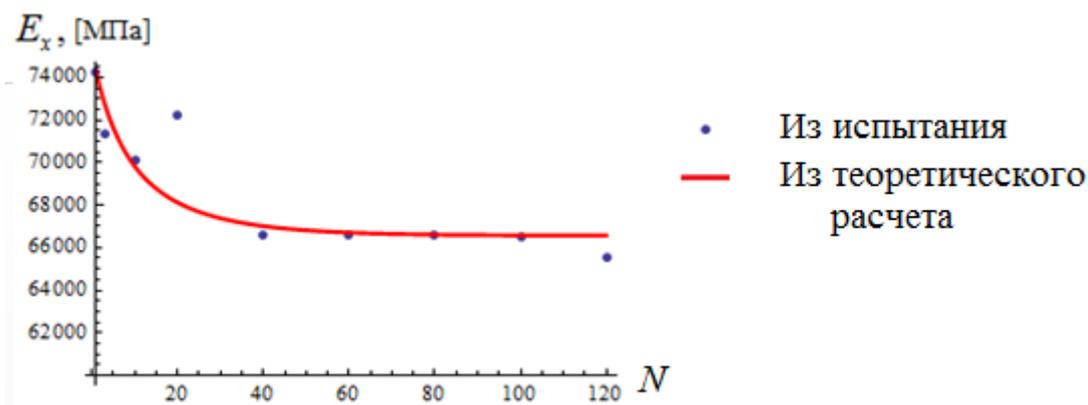


Рис. 4.15. Изменение эффективного модуля испытуемого пакета с укладкой типа  $[0^\circ, 90^\circ]_s$ .

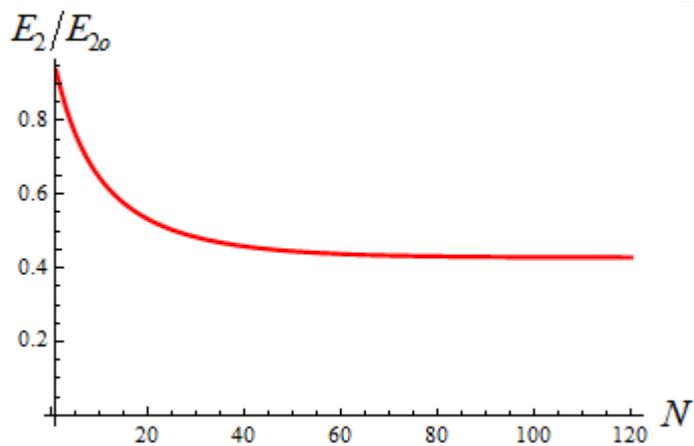


Рис. 4.16. Изменение поперечных модулей испытываемого пакета с укладкой типа  $[0^\circ, 90^\circ]_s$ .

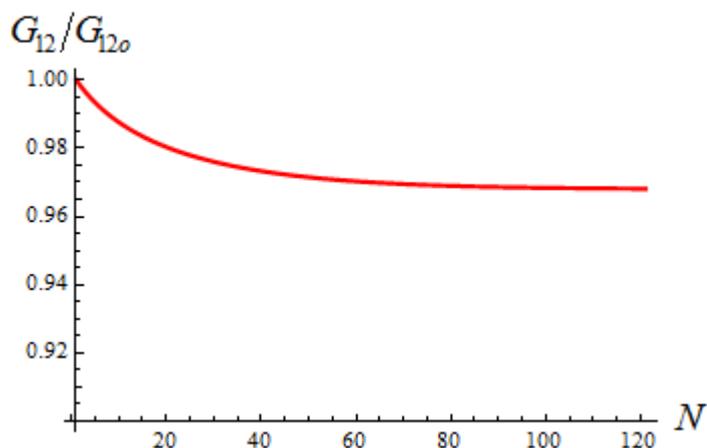


Рис. 4.17. Изменение модулей сдвига испытываемого пакета с укладкой типа  $[0^\circ, 90^\circ]_s$ .

#### 4.6. Выводы к четвертой главе

1. Проведены испытания образцов из углепластика на термоциклирование в диапазоне от  $-196^\circ\text{C}$  до  $+80^\circ\text{C}$  для изучения влияния температурной цикличности на механические характеристики материала.

2. Показано, что перепады температуры существенно сказываются на механические свойства, приводя к растрескиванию связующего в поперечном слое, что приводит к существенному уменьшению приведенного модуля материала ( $\sim 10\%$ ) при дальнейшем увеличении числа циклов до 40. Дальнейшее увеличение числа циклов термоциклирования не оказывает влияния на значение модуля материала.

3. Полученные экспериментальные данные показывают падение приведенного модуля материала по числу циклов. Расчетами, которые были выполнены на основе использованной методики в диссертации, была подтверждена корректность и эффективность разработанного теоретического подхода.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Наиболее существенные научные и выводы, полученные в диссертации заключаются в следующем

1. Показано, что градиентная модель Тупина позволяет уточнить НДС для многослойных структур, слои которых состоят из изотропных или ортотропных композитных слоев.

2. Показано, что полученные результаты аналитических расчетов НДС и распределение температуры по толщине с учетом изотропных прослоек подтвержденных расчетом МКЭ.

3. Показано, что используемая методика справедлива для различных многослойных структур с различными углами направления волокон в слоях.

4. Решена новая задача термоупругости позволяющая определить падение механических характеристик композитного материала при воздействии температуры.

5. Произведено сравнение падения механических характеристик при силовом воздействии без учета и с учетом воздействия температуры.

6. Показано, что воздействие температуры существенно уменьшает механические характеристики рассматриваемых структур, т.е. оказывает существенное влияние на процесс деградации механических свойств слоистых композитов.

7. Проведены испытания образцов из углепластика на термоциклирование в диапазоне от  $-196\text{ }^{\circ}\text{C}$  до  $+80\text{ }^{\circ}\text{C}$  для изучения влияния температурной цикличности на механические характеристики материала.

8. Показано, что перепады температуры существенно сказываются на механические свойства, приводя к растрескиванию связующего в поперечном слое, что приводит к существенному уменьшению приведенного модуля материала ( $\sim 10\%$ ) при дальнейшем увеличении числа циклов до 40. Дальнейшее увеличение числа циклов термоциклирования не оказывает влияния на значение модуля материала.

9. Полученные экспериментальные данные показывают падение приведенного модуля материала по числу циклов. Расчетами, которые были выполнены на основе использованной методики в диссертации, была подтверждена корректность и эффективность разработанного теоретического подхода.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян, С. А. Общая теория анизотропных оболочек / С. А. Амбарцумян. — М.: Наука, 1974. — 446 с.
2. Амбарцумян, С. А. Теория анизотропных пластин / С. А. Амбарцумян. — М.: Наука, 1967. — 266 с.
3. Аэро, Э. Л. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц / Э. Л. Аэро, Е. В. Кувшинский // Физика твердого тела. — 1960. — Т. 2. — С. 1399–1409.
4. Белов, П. А. Модели деформирования твердых тел и их аналоги в теории поля / П. А. Белов, С. А. Лурье // Мех. тв. тела Изв. РАН. — 1998. — № 3. — С. 157–166.
5. Белянкин, Ф. П. Прочность и деформативность слоистых пластиков / Ф. П. Белянкин, В. Ф. Яценко, Г. И. Дыбенко. — Киев: Наукова думка, 1964. — 220 с.
6. Болотин, В. В. Дефекты типа расслоений в конструкциях из композиционных материалов / В. В. Болотин // Механика композиционных материалов. — 1984. — № 2. — С. 239–255.
7. Болотин, В. В. Механика многослойных конструкций / Болотин В. В., Ю. Н. Новичков. — М.: Машиностроение, 1980. — 375 с.
8. Ванин, Г. А. Микромеханика композиционных материалов / Г. А. Ванин. — Киев: Наукова думка, 1985. — 302 с.
9. Васильев, В. В. Механика конструкций из композиционных материалов / В. В. Васильев. — М.: Машиностроение, 1988. — 272 с.
10. Волков–Богородский, Д. Б. Интегральные формулы Эшелби в градиентной теории упругости / Д. Б. Волков-Богородский, С. А. Лурье // МТТ. — Изв: РАН. — 2010. — № 4. — С. 182–192.
11. Дудченко, А. А. Анизотропные многослойные пластины и оболочки / А. А. Дудченко, С. А. Лурье, И. Ф. Образцов // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. — М.: ВИНТИ, — 1983. — Т. 15. — С. 3–68.

12. Ишлинский, А. Ю. Прикладная механика композитов // А. Ю. Ишлинский, Г. Г. Черный. — М.: Мир, 1989. — 357 с.
13. Композиционные материалы: справочник / под ред. Л. Браутмана. — М.: Машиностроение, 1978. — Т. 7. — 342 с.
14. Композиционные материалы в конструкциях летательных аппаратов: учебник / под ред. А. Л. Абибова. — М.: Машиностроение, 1975. — 272 с.
15. Королев, В. И. Слоистые и анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс / В. И. Королев. — М.: Машиностроение, 1965. — 272 с.
16. Лехницкий, С. Г. Анизотропные пластинки / С. Г. Лехницкий. — М.: Гостехиздат, 1957. — 463 с.
17. Лурье, С. А. Модели сплошных сред с обобщенной кинематикой. Свойства и некоторые обобщения / С. А. Лурье, П. А. Белов, А. П. Орлов // Механика композиционных материалов и конструкций. — 1996. — Т. 2. — № 2. — С. 84–104.
18. Лурье, С. А. Математические модели механики сплошной среды и физических полей / С. А. Лурье, П. А. Белов. — М.: Из-во ВЦ РАН, — 2000. — 151 с.
19. Лурье, С. А. Моделирование теплопроводности неоднородных материалов и структур / С.А. Лурье, М. Н. Полянский, Ю. О. Соляев // Механика композиционных материалов и конструкций. Сборник трудов IV всероссийского симпозиума. — 2012. — Т. 2, — С. 235-241.
20. Малмейстер, А. К. Сопротивление полимерных и композитных материалов / А. К. Малмейстер, В. П. Тамуж, Г. А. Тетерс. — Рига: Зинатне, 1980. — 572 с.
21. Масштабные эффекты в механике сплошных сред: монография / С. А. Лурье [и др.]; под ред. С. А. Лурье. — М.: Изд-во МАИ, 2011. — 160 с.
22. Межслойные эффекты в композитных материалах: учебник / под ред. Н. Пэйгано. — М: Мир, 1993. — 341 с.

23. Механика композиционных материалов и элементов конструкций: учебник / А. Н. Гузь [и др]; под ред. А. Н. Гузя. — Киев: Наукова думка, — 1982. — Т. 1. — 368 с.

24. Механика композиционных материалов и элементов конструкций: учебник / А. Н. Гузь [и др]; под ред. А. Н. Гузя. — Киев: Наукова думка, 1983. — Т. 2. — 464 с.

25. Некоторые классические модели тонких структур // Изв. Вузов. Северо-Кавказский регион, Естественные науки (к 80-ю академика И.И. Воровича). Ростов-на-Дону / И. Ф. Образцов [и др]; под ред. И. Ф. Образцов. — 2000. — № 3. — С. 110–118.

26. Нгуен, Д. К. Градиентная модель термоупругости для слоистой композитной структуры / С. А. Лурье, А. А. Дудченко, Д. К. Нгуен // Электронный журнал «Труды МАИ». — 2014. — № 75. — Режим доступа: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=49674>.

27. Нгуен, Д. К. Исследование влияния термоциклирования на механические свойства образцов углепластика / Д. К. Нгуен, Ю. О. Соляев, А. А. Дудченко, А. В. Артемьев // Сборник тезисов докладов международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». — М. — 2014. — С. 95.

28. Нгуен, Д. К. Исследование локальных эффектов в распределении температурных напряжений на контактных границах слоистых сред / С. А. Лурье, Ю. О. Соляев, Д. К. Нгуен, А. Л. Медведский, Л. Н. Рабинский // Электронный журнал «Труды МАИ». — 2013. — № 71. — Режим доступа: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=47084>.

29. Нгуен, Дак Куанг. Исследование напряженно-деформированного состояния композиционной панели под действием перепада температуры с использованием градиентной теории / Дак Куанг Нгуен // Сборник тезисов докладов Московской молодежной научно-практической конференции

«Инновация в авиации и космонавтике–2014». Москва, МАИ, 22–24 апреля 2014 г., — М.: ООО «Принт–салон» 2014, — С. 85–86.

30. Нгуен, Дак Куанг. Исследование распределения нестационарных температурных полей по толщине композитной панели при воздействии теплового удара / Дак Куанг Нгуен, А. А. Дудченко // Материалы XIX международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкции и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова. Т. 2. Москва, 18–22 февраля 2013 г., — М.: ООО «ТР–принт» 2013.

31. Нгуен, Д. К. Моделирование влияния параметров вискеризации волокон на остаточное напряженно-деформированное состояние слоистых композитов / А. В. Афанасьев, Д. К. Нгуен, Ю. О. Соляев, Л. Н. Рабинский, А. А. Дудченко // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2014. — Т. 20. — № 3. — С. 333–342.

32. Нгуен, Д. К. Распределение температуры по толщине слоев в композите с учетом межслоевой прослойки / Д. К. Нгуен, А. А. Дудченко // Сборник тезисов докладов Московской молодежной научно-практической конференции «Инновация в авиации и космонавтике–2013». Москва, МАИ, 16–18 апреля 2013 г., — М.: ООО «Принт–салон» 2013, — С. 63.

33. Образцов, И. Ф. Об обобщенных разложениях в прикладной теории упругости и их приложения к конструкциям из композитов. / И. Ф. Образцов, С. А. Лурье, П. А. Белов // Механика композиционных материалов и конструкций. — 1997. — Т.3. — № 3. — С. 62–79.

34. Прикладная механика композитов: сборник статей / под ред. Ю. М. Тарнопольского. — М.: Мир, 1989. — 358 с.

35. Роуландс, Р. Течение и потеря несущей способности композитов в условиях двухосного напряженного состояния: сопоставление расчета и экспериментальных данных [Текст] / Р. Роуландс // В кн.: Неупругие свойства композиционных материалов. — М.: Мир, 1978. — С. 140–179.

36. Седов, Л. И. Математические методы построения новых моделей сплошных сред / Л. И. Седов // Успехи математических наук. — 1965. — Т. XX. — Вып.5 (125). — С. 121–180.
37. Скудра, А. М. Ползучесть и статическая усталость армированных пластиков / А. М. Скудра, Ф. Я. Булаве, К. А. Роценс. — Рига: Зинатне, 1971. — 235 с.
38. Скудра, А. М. Прочность армированных пластиков / А. М. Скудра, Ф. Я. Булавс. — М.: Химия, 1982. — 214 с.
39. Смердов, А. А. Методика проектирования и экспериментальной отработки размеростабильных трубчатых стержней из углепластика / А. А. Смердов, Л. П. Таирова, А. Н. Тимофеев, В. С. Шайдуров // Конструкции из композиционных материалов. — 2006. — № 3. — С. 12–23.
40. Тарнопольский, Ю. М. Конструкционная прочность и деформативность стеклопластиков / Ю. М. Тарнопольский, А. М. Скудра. — Рига: Зинатне, 1966. — 260 с.
41. Тарнопольский, Ю. М. Особенности расчета деталей из армированных пластмасс / Ю. М. Тарнопольский, А. В. Розе. — Рига: Зинатне, 1969. — 274 с.
42. Тетерс, Г. А. Оптимизация оболочек из слоистых композитов / Г. А. Тетерс, Р. Б. Рикардс, В. Л. Нарусберг. — Рига: Зинатне, 1978. — 240 с.
43. Тетерс, Г. А. Пластины и оболочки из полимерных и композитных материалов Обзор / Г. А. Тетерс // Механика полимеров. — 1977. — № 4. — С. 486–492.
44. Тупин, Р. А. Теории упругости, учитывающие моментные напряжения / Р. А. Тупин // Механика. — 1965. — Т.91. — № 3. — С. 113–140.
45. Цай, С. Анализ разрушения композитов / С. Цай, Х. Хан // В кн.: Неупругие свойства композиционных материалов. — М.: Мир, 1978. — С. 104–139.
46. Цуй, С. Влияние вакуум-термоциклирования на механические свойства эпоксидных композиционных материалов / С. Цуй, Р. И. Гусева, Л. Чжан // Ученые записки КНАГТУ. — 2011. — № 2-1. — С. 2-11.

47. Aifantis, E. C. Gradient effects at the macro, micro and nano scales / E. C. Aifantis // *J. Mech. Behav. Mater.* — 1994. — V. 5. — P. 335–353.
48. Aifantis, E. C. On the role of gradient in the localization of deformation and fracture / E. C. Aifantis // *Int. J. Engng. Sci.* — 1992. — V.30. — P. 1279–1299.
49. Aifantis, K. E. The role of interfaces in enhancing the yield strength of composites and polycrystals / K. E. Aifantis, J. R. J. Willis // *Mech. Phys. Solids.* — 2005. — V. 53. — P. 1047–1070.
50. Cosserat, E. *Theore des corps deformables* / E. Cosserat, F. Cosserat // Paris. Hermann . — 1909.
51. Donald, L. F. Experimental determination of the In situ transverse lamina strength in graphite/epoxy laminates / L. F. Donald, H. K. Murat // *Journal of Composite Materials.* — 1982. — V. 16. — P. 103-116.
52. Fleck, N. A. A reformulation of strain gradient plasticity / N. A. Fleck // *J.W. Hutchinson J. Mech. Phys.* — 2001. — V. 9. — P. 2245–2271.
53. Gao, F. Damage accumulation in woven-fabric CFRP laminates under tensile loading / F. Gao, L. Boniface, S.L. Ogin // *Composites Science and Technology.* — 1999. — V. 59. — P. 137-145.
54. Gusev, A. A. StrainGradientElasticityforBridgingContinuumand-AtomisticEstimatesofStiffnessofBinaryLennard-JonesCrystals / A. A. Gusev, S. A. Lurie // *Adv. Eng.Mat.* — 2010. — V.12. — I.6. — P. 529 – 533.
55. Hahn, H. T. On the behavior of composite laminates after initial failures / H. T. Hahn, S. W. Tsai // *J. Composite Materials.* — 1974. — vol. 8. — N 3. — P. 288–305.
56. Heitz, E. *Verbunstruktur on Flutzenbau* // *Junstst. J.* — 1978. — V. 12. — N. 6. — P. 23–29.
57. Henaff-Gardin, C. Specificity of matrix cracking development in CFRP laminates under mechanical or thermal loadings / C. Henaff-Gardin, M. C. Lafarie-Frenot // *International Journal of Fatigue.* — 2002. — V. 24. — P. 171-177.

58. Lafarie-Frenot, M. C. Influence of free edge intralaminar stresses on damage process in CFRP laminates under thermal cycling conditions / M. C. Lafarie-Frenot, N. Q. Ho. *Composites Science and Technology*. — 2006. — V. 66. — P. 1354-1365.
59. Li chundong, YANG Dezhuang, HE Shiyu // *Chinese Journal of Materials Research*. — 2003. — № 4. — C. 112–116.
60. Lubineau, G. Durability of CFRP laminates under thermomechanical loading: A micro–meso damage model / G. Lubineau, P. Ladeveze, D. Violeau // *Composites Science and Technology*. — 2006. — V. 66. — P. 983-992.
61. Ludovico, M. D. Improved mechanical properties of CFRP laminates at elevated temperatures and freeze–thaw cycling / M. D. Ludovico, F. Piscitelli, A. Prota // *Construction and Building Materials*. — 2012.—V. 31. — P. 273–283.
62. Lurie, S. A. Multiscale Modeling in the Mechanics of Materials: Cohesion, Interfacial Interactions, Inclusions and Defects / S. Lurie, P. Belov, D. Volkov-Bogorodsky // In book *Analysis and Simulation of Multifield Problems*, Springer. — 2003. — V. 12. — P. 101–110.
63. Lurie, S. Interphase layer theory and application in the mechanics of composite materials / S Lurie., P. Belov, D. Volkov-Bogorodsky // *J. of Mat. Scs*, Springer. — 2006. — V.41, — № 20. — P. 6693-6707.
64. Lurie, S. Nanomechanical Modeling of the Nanostructures and Dispersed Composites // *Int. J. Comp Mater Scs* / S. Lurie, P. Belov, D. Volkov-Bogorodsky. — 2003. — V 28(3-4). — P. 529–539.
65. Mindlin, R. D. Effects of the couple-stress in linear elasticity / R. D. Mindlin, H. F Tiersten // *Arch. Ration. Mech. And Analysis*. —1962. — V. 11. — P. — C. 415–448.
66. Mindlin, R. D. Micro-structure in linear elasticity / R. D. Mindlin // *Arch. Ration. Mech. And Analysis*. — 1964. — V. 1. — P. 51–78.
67. Paillous, A. Degradation of multiply polymer-matrix composites induced by space environment / A. Paillous, C. Pailler // *Composites*. — 1994. — V. 25. — P. 287-295.

68. Rouquie, S. Thermal cycling of carbon/epoxy laminates in neutral and oxidative environments / S. Rouquie, M. C. Lafarie-Frenot, J. Cinquin. // *Composites Science and Technology*. — 2005. — V. 65. — P. 403-409.

69. Tong, J. On matrix crack growth in quasi-isotropic laminates-i. Experimental investigation / J. Tong, F. J. Guild, S. L. Ogin // *Composites Science and Technology*. — 1997. — V. 57. — P. 1527-1535.

70. Toupin, R. A. Elastic materials with couple-stresses / R. A. Toupin // *Arch. Ration. Mech. And Analysis*. — 1962. — V. 11.

71. Toupin, R. A. Theories of elasticity with couple-stress / R.A. Toupin // *Arch. Ration. Mech. And Analysis*. — 1964. — V. 2. — P. 85–112.

72. Voyiadjis, G. Z. Gradient plasticity theory with a variable length scale parameter / G. Z. Voyiadjis, R. K. Abu Al-Rub // *International Journal of Solids and Structures*. — 2005. — V. 42. — P. 3998–4029.