

**Министерство образования и науки Российской Федерации**  
**МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ**  
(национальный исследовательский университет)

*На правах рукописи*



**ДАО НГОК ТХАЙ**

**УПРАВЛЕНИЕ ПРОМЫШЛЕННЫМ ПРОИЗВОДСТВОМ  
АВИАЦИОННОЙ ТЕХНИКИ В КРИЗИСНЫХ СИТУАЦИЯХ С  
УЧЕТОМ ПОВЫШЕНИЯ ЕЁ КАЧЕСТВА**

Специальность 05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации (информатика, управление и вычислительная техника)

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель:  
доктор технических наук, профессор,  
заслуженный деятель науки РФ  
**Лебедев Георгий Николаевич**

**Москва - 2014**

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ.....</b>	<b>5</b>
<b>ГЛАВА I. АНАЛИЗ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ИЗВЕСТНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ПРОМЫШЛЕННЫМ ПРОИЗВОДСТВОМ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.....</b>	<b>10</b>
1.1 Анализ известных методов экономической кибернетики .....	10
1.1.1 Линейные динамические модели производства с инерционным звеном апериодического типа .....	12
1.1.2 Нелинейные динамические модели расширения производства.....	18
1.2 Анализ известных методов управления производством с использованием динамических моделей производственного и технологического звеньев предприятия .....	27
1.2.1 Синтез субоптимального управления производственным звеном с помощью метода АКОР.....	30
1.2.2 Формирование математической модели технологического звена .....	33
1.3 Общая постановка задачи управления производством продукции при повышении её качества в кризисных ситуациях .....	35
1.4 Выводы по главе 1.....	38
<b>ГЛАВА II. ФОРМИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ КОНСТРУКТОРСКОГО ЗВЕНА И СПРОСА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ КАЧЕСТВА ПРОДУКЦИИ.....</b>	<b>39</b>
2.1 Формирование одномерной динамической модели конструкторского звена.....	39
2.2 Формирование динамической модели конструкторского звена на примере создания новой авиационного техника, имеющего несколько отделов .....	50
2.2.1 Предварительная оценка повышения качества создаваемой авиационной техники при проведении опытно-конструкторских работ.....	50
2.2.2 Формирование многомерной модели конструкторского звена, состоящий из нескольких отделов .....	54

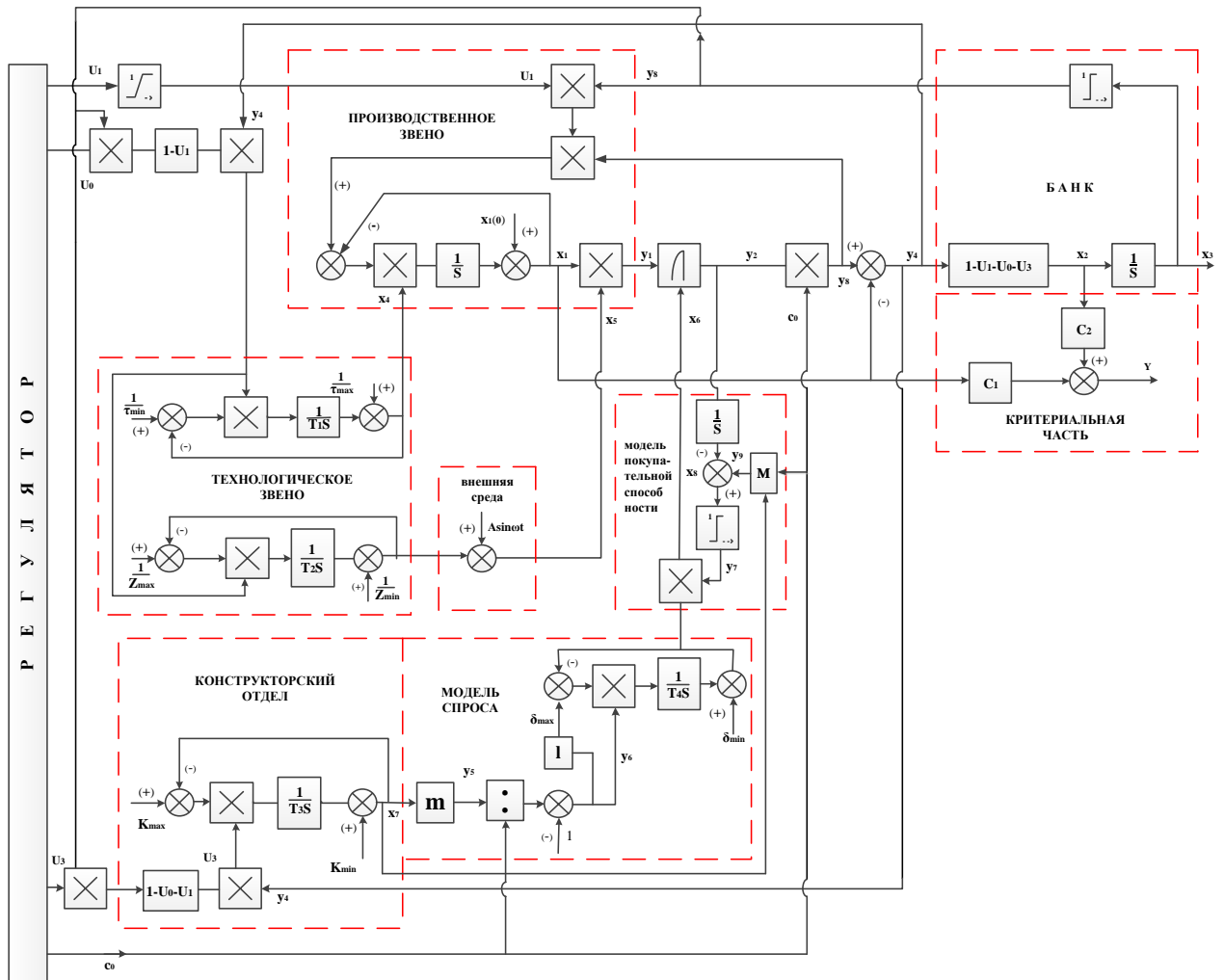
2.3	Формирование критерия оценки качества продукции, оценивающего в нелинейной свертке группу технико-экономических показателей, на примере проектирования авиационной техники. ....	55
2.3.1	Формирование мультипликативного параметрического критерия эффективности управления производством .....	55
2.3.2	Оценка эффективности работы предприятия, имеющего два производственных звена.....	57
2.4	Формирование модели спроса на продукцию в зависимости от её качества.....	59
2.5	Выводы по главе 2.....	62
<b>ГЛАВА III. СИНТЕЗ СУБОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОНСТРУКТОРСКИМ ЗВЕНОМ ПРЕДПРИЯТИЯ В КРИЗИСНЫХ СИТУАЦИЯХ. ....</b>		<b>63</b>
3.1	Постановка задачи синтеза.....	63
3.2	Анализ известных методов оптимального управления.....	66
3.2.1	Анализ известных аналитических методов параметрической оптимизации. ..	66
3.2.2	Динамическое программирование .....	72
3.2.3	Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов (АКОР).....	82
3.3	Формирование закона управления производственным и конструкторским звеном с помощью динамического программирования .....	86
3.3.1	Синтез оптимального управления с помощью динамического программирования .....	86
3.3.2	Представление оптимального управления в квазилинейной форме и пояснение её физического смысла .....	90
3.4	Первые результаты моделирования на ЭВМ системы управления, содержащей одно производственное и одно конструкторское звено.....	92
3.5	Выводы по главе 3.....	95
<b>ГЛАВА IV. ИССЛЕДОВАНИЕ МНОГОЗВЕННОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫМИ И КОНСТРУКТОРСКИМИ ЗВЕНЬЯМИ ПРЕДПРИЯТИЯ В КРИЗИСНЫХ СИТУАЦИЯХ.....</b>		<b>97</b>

4.1 Формирование способа управления несколькими конструкторскими отделами при одном производственном звене.....	97
4.2 Формирование способа управления одним конструкторским звеном в целом, состоящим из нескольких отделов.....	101
4.3 Обобщение предложенного подхода на многозвенную систему управления производством в условиях конкуренции .....	104
4.4 Выводы по главе 4.....	1079
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>	<b>110</b>
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....</b>	<b>111</b>

## **ВВЕДЕНИЕ**

Существующие кризисные ситуации в мировой и отечественной экономике и промышленном производстве возникают по ряду внешних причин: нехватки сырья и рынков сбыта, финансов на перепрофилирование производства, а также из-за внутренних причин, к которым относятся стихийные рыночные методы управления в угоду частных интересов, недостатки существующих методов централизованного государственного управления. Сложность синтеза технико-экономических систем в том числе определяется необходимостью сформировать такую математическую модель, которая учла бы в критерии эффективности производства показатель “качества продукции на единицу затрат”, что в настоящее время неизвестно. Кроме того, в этой модели обязательной компонентой является модель спроса, который в свою очередь зависит как от цены, так и от множества технических характеристик вновь создаваемой продукции. Таким образом, предлагаемый подход должен привести к формированию нелинейной динамической модели эффективности производства, учитывающей как количество выпускаемой продукции, так и её качество, от которого зависит спрос и темп продаж.

Основное положение предлагаемого подхода состоит в том что объектом исследования являются процессы производства, спроса на продукцию и обновления её качества, объединенные в единую динамическую модель. В роли объекта производства могут выступать предприятие, отрасль народного хозяйства, например авиационная, или национальная экономика в целом. В данной работе в дальнейшем используется термин “предприятие”, а его блок-схема показана на рис. 1.1



**Рис.1.1** Общая схема моделирования производственного , технологического и конструкторского звена предприятия с переменной рентабельностью

При формировании единого критерия эффективности предприятия в работе предлагается свертка количественных характеристик производственной мощности, качества продукции и накопления прибыли к концу контролируемого периода. При синтезе законов управления процессом предлагается приближенный метод динамического программирования использующий функцию Беллмана в виде степенного полинома не второго порядка, а третьего порядка.

**Объектом исследования** является промышленное предприятие, выпускающие продукцию при обосновании её качества. Неблагоприятное воздействие внешней среды моделируется в данной работе с помощью переменной рентабельности, которая будучи отрицательной, соответствует опасной ситуации спада производства.

**Предметом исследования** является система управления производственным и конструкторским звеном предприятия.

**Целью диссертационной работы** является повышение эффективности управления промышленным производством за счет использования методов оптимального управления при выбранном критерии в виде свертки производственной мощности, качества продукции и накопленной прибыли к концу контролируемого периода.

На защиту выносятся следующие основные научные положения

1. Динамическая модель конструкторского звена, предназначенного для обновления качества выпускаемой продукции;
2. Математическая модель критерия эффективности производства, учитывающая в свертке количественные и качественные технические показатели продукции;
3. Методика синтеза субоптимального управления конструкторским звеном при переменной рентабельности;
4. Способ управления многозвенным предприятием в условиях конкуренции при постепенном внедрении в производство вновь выпускаемой техники.

**Научная новизна** полученных результатов состоит в следующем:

1. Предложена многомерная модель конструкторского звена, состоящего из нескольких отделов, каждый из которых описывается линейным дифференциальным управлением первого порядка. При этом на экспоненциальное повышение отдельного качества управления, определяющие долю средств из общего дохода, влияет мультипликативно.
2. Параметрический критерий эффективности представлен в виде суммы аддитивной и мультипликативной форм, учитывающих скорость выпуска продукции, её качество и получаемую прибыль. Показано, что применение в свертке мультипликативной формы позволяет получить сбалансированную

оценку и обеспечить более высокую эффективность предприятия без сильного снижения отдельных технических показателей.

3. На базе динамического программирования получено в квадратурах субоптимальное управление конструкторским звеном в квазилинейной форме. Доказано, что доля средств на конструкторские разработки растет при увеличении прибыли и снижается при повышении технического качества новой продукции.

4. Получена линейная модель распределения средств между конструкторскими отделами пропорционально ожидаемой скорости повышения качества в каждом из них, а общая доля средств на конструкторские разработки в целом учитывает суммарную скорость повышения качества.

5. При анализе деятельности производственных звеньев предприятия установлено, что максимальная эффективность достигается в условиях конкуренции, когда сначала только одно звено постепенно внедряет отдельные новые компоненты, а второе звено полностью переходит на новую продукцию после того, как темп её продаж станет выше старой.

**Практическая значимость диссертационной работы** состоит в том, что с помощью предложенного подхода можно наиболее рационально определить часть средств на повышение качества продукции, а не на расширение производства старой, что позволяет согласно результатам моделирования на ЭВМ повысить эффективность производства в 1.5-2 раза

**Достоверность полученных результатов** подтверждается применением для синтеза управления научно обоснованных методов параметрической оптимизации и динамического программирования. Полученные алгоритмы управления конструкторским и производственным звеном уточнены и проведены с помощью моделирования на ЭВМ в среде Matlab при учете динамики производства и спроса на продукцию растущего качества.

**Личный вклад** автора состоит в проведении анализа существующих методов управления технико-экономических систем, создании моделей



конструкторского звена и спроса на новую авиационную технику, разработке алгоритма квазилинейного управления конструкторским звеном, личном участии в формировании схемы моделирования системы в среде Matlab, подготовке основных публикаций по выполненной работе

**Ценность для науки и практики** диссертационной работы определяется тем, что несмотря на сложность нелинейной динамической технико-экономической системы управления предприятием, удалось показать, что для её синтеза можно с успехом применить методы теории оптимального управления и получить ценные практические рекомендации.

**Апробация работы и публикации** по теме диссертации опубликовано 6 работ, из них 4 - в изданиях, рекомендованных ВАК. Научные и прикладные результаты докладывались и обсуждались на международном научно - техническом семинаре «Современные технологии в задачах управления, автоматизации и обработки информации» г. Алушта в 2012 и 2013 годах.

## **ГЛАВА I. АНАЛИЗ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ИЗВЕСТНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ПРОМЫШЛЕННЫМ ПРОИЗВОДСТВОМ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ**

### **1.1 Анализ известных методов экономической кибернетики**

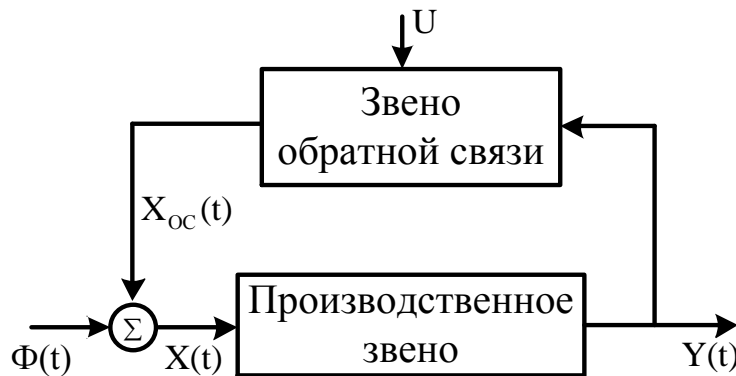
В последнее время в экономической кибернетике все большее внимание уделяется методам автоматического регулирования, что открывает перспективу эффективного управления промышленным производством [1,2]. Особую важность этот подход приобретает в случае внедрения новой техники в кризисных ситуациях, которые негативно влияют на устойчивое развитие производства [47, 49].

Как правило, в обычных технических системах автоматического регулирования основной задачей является использование отрицательных обратных связей с целью обеспечения стабилизации процесса. Соответственно этому, разработана методология построения структура систем регулирования. Она основана на применении корректирующей отрицательной обратной связи и звеньев прямого канала с весьма высоким коэффициентом усиления. Использование того и другого позволяет обеспечить высокую степень стабилизации регулируемого параметра и нечувствительность системы к внешним помехам [21, 22, 35-39].

Процесс воспроизводства имеет принципиально иную природу с точки зрения теории обратных связей. В процессах общественного воспроизводства наличие положительной обратной связи является главным свойством, имманентно присущим им [9, 15, 26]. Это следует из экономической (физической) сущности любого процесса производства. Вторым специфическим признаком является весьма малый “коэффициент усиления” прямого канала, как правило не намного больше единицы.

Инерционность процессы, обусловленную затратами времени в сфере производства и обращения, учитывается введением динамического звена, например, звена с чистым запаздыванием или апериодического типа, с постоянной времени  $\tau$ . В реальной действительности выходной поток продукции реализуется в виде товара. На вырученные денежные средства

приобретаются материальные и трудовые ресурсы, которые в свою очередь в процессе производства преобразуются в новый продукт, стоимость которого будет выше стоимости производственных затрат. Обобщенная схема воспроизводства показана на рис. 1.2



**Рис.1.2. Обобщенная схема процесса воспроизводства**

Как видно из [1-2], три показателя определяют темпы экономического роста: доля прибыли или управление  $U$  как переменная функция, направленная на расширенное воспроизводство, прежде всего зависящая от количества и качества выпускаемой продукции рентабельность  $\rho$  и время  $\tau$  запаздывания, или другими словами, время оборачиваемости капитальных ресурсов. Каждый из этих показателей вносит свой вклад в общий показатель экономического роста, среди них параметры относятся к техническим показателям. Влияющее на рентабельность множество показателей качества также является техническими, от которых в значительной степени зависит спрос на выпускаемой продукции [37].

Вместе с тем очень важно понимать мультипликативный характер влияния всех трех показателей на величину темпов роста. При уменьшении до нуля любого из показателей: расширенное воспроизводство становится нереализуемым. С другой стороны возможны разнообразные стратегии достижения необходимых темпов роста: малая рентабельность, зато высокая оборачиваемость, при малой оборачиваемости - увеличение накоплений и рентабельности производства и т.д.

### 1.1.1 Линейные динамические модели производства с инерционным звеном аperiodического типа

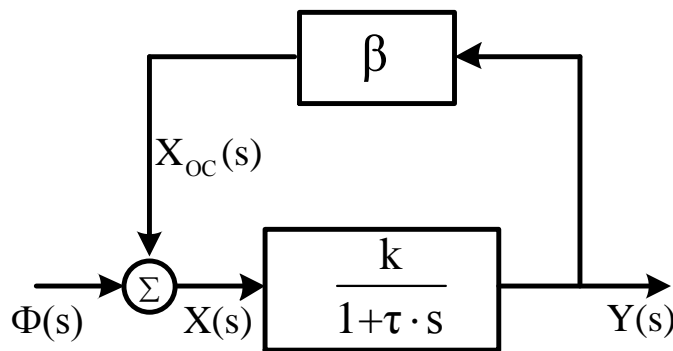
Передаточная функция инерционного звена имеет вид:

$$W(s) = \frac{k}{1+\tau \cdot s} \quad (1.1)$$

где  $k$  - статический коэффициент передачи,  $\tau$  - постоянная переменная инерционного звена.

Как и в случае схемы с чистым запаздыванием  $\beta(s)=\beta$  - это коэффициент обратной связи, показывающий долю стоимости выходного продукта, возвращенную на вход системы, как показано на рис. 1.3 . Подача на вход системы начальных капиталовложений  $\Phi_0$  вызывает саморазвивающийся процесс, при котором выходной продукт  $Y(t)$  изменяется в соответствии с уравнением [1,2]:

$$Y(t) = \frac{\Phi_0 k}{\tau} e^{(k\beta-1)t \cdot \tau}$$



**Рис. 1.3. Модель воспроизводства с инерционным звеном аperiodического запаздывания (схема I)**

Относительное изменение выходного продукта описывается уравнением:

$$Y^0(t) = \frac{Y(t)}{Y(t_0)} e^{\frac{(k\beta-1)(t-t_0)}{\tau}} \quad (1.2)$$

Свойство саморазвития позволяет системе обеспечивать непрерывное возрастание траекторий  $Y(t)$  при отсутствии на входе непрерывного воздей-

ствия в виде функции  $\Phi(t)$ . Для возникновения движения достаточно подать на вход системы в момент  $t=0$  начальный капитал  $\Phi_0$ . С формальной математической точки зрения это означает:

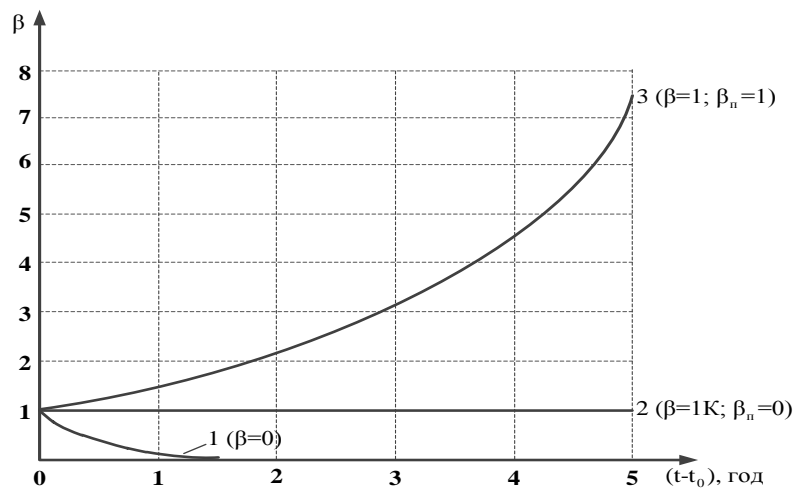
$$\Phi(t) = \Phi_0 \delta \quad \text{где } \delta(t) - \text{импульсная функция.}$$

Темп роста в модели  $\omega = \frac{Y(t)}{Y(t_0)}$  определяется из равенства:

$$\omega = \frac{k\beta - 1}{\tau}$$

Возможны три вида траекторий развития: при  $\omega > 0$ ;  $\omega = 0$  и  $\omega < 0$  (см. рис.1.4). При  $\omega > 0$  имеет место процесс расширенного воспроизводства. В этом случае должно выполняться условие  $1 \geq \beta > \frac{1}{k}$ .

$$Y^0(t) = \frac{Y(t)}{Y(t_0)}$$



**Рис. 1.4** Траектория изменения потока продукции в системе с аperiodическим звеном при  $\rho=0.2$ ;  $\tau_3 = 0.5$  года и различных значениях  $\beta(\beta_{II})$

Если  $k$  и  $\tau$  неизменны во времени, то воспроизводство будет экстенсивным за счет возрастания потока затрат  $x_{oc}(t) = \beta * y(t)$

При  $\omega = 0$  должно выполняться условие  $\beta = \frac{1}{k}$ . Этот случай соответ-

ствуется простому воспроизводству с неизменным уровнем потока продукции, равным

$$Y(t) = Y_3 + Y_{\Pi} = \frac{\Phi_0}{\tau} + \frac{\Phi_0 p}{\tau} \quad (1.3)$$

где  $Y_3 = \frac{\Phi_0}{\tau}$  - поток себестоимости продукции, включающий стоимость трудовых, материальных, в том числе и амортизационных затрат;  $Y_{\Pi} = \Phi_0 \frac{p}{\tau}$  - поток прибыли (стоимости прибавочного продукта).

При выполнении неравенства  $0 < \beta < \frac{1}{k}$ , получим убывающие траектории с  $\omega < 0$ .

Таким образом, необходимым условием саморазвития экономической системы, или, другими словами, условием существования процесса воспроизводства должно быть выполнение неравенства  $1 < \beta < \frac{1}{k}$

Введем обозначение  $f = \frac{1}{\tau}$  [1/год]. В результате будем иметь:

$$Y(t) = f\Phi_0 + fp\Phi_0$$

Как видим, для простого воспроизводства  $f$  является частотой оборачиваемости капитальных вложений  $\Phi_0$ , а  $\tau$  - периодом оборачиваемости.

Показано, что  $\tau$  равен периоду оборачиваемости фондов кап- вложений и для расширенного воспроизводства.

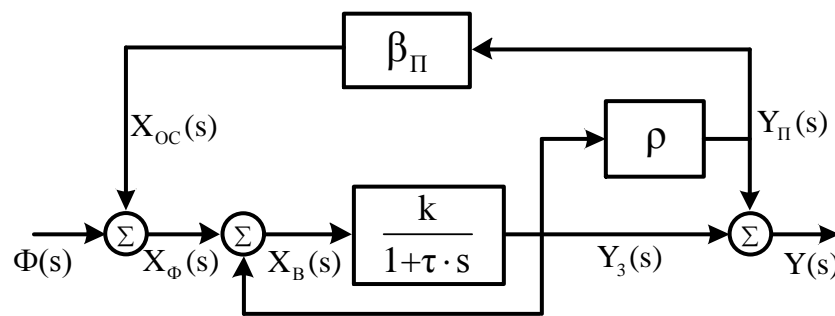
На рис.1.4 показаны кривые изменения выходного потока при разных граничных значениях глубины обратной связи:  $\beta=0$  (кривая 1),  $\beta=\frac{1}{k}$  (кривая 2) и  $\beta=1$  (кривая 3).

**Схема модели с выделением звена формирования прибыли и себестоимости (схема II)**

Поскольку параметры  $K$  и  $\beta$ , применяемые в теории автоматического регулирования, в экономической литературе не применяются, преобразуем формулы, используя показатели рентабельности продукции  $\rho$  и доли (норматива) отчислений от прибыли  $\beta_{\Pi}$  направляемой на расширение воспроизводства. В результате получим уравнения:

$$Y(t) = \frac{\Phi_0(1-\rho)}{\tau} e^{\frac{\beta_{\Pi} p t}{\tau}}; \quad (1.4)$$

$$y^0(t) = \frac{Y(t)}{Y(t_0)} e^{(\beta_{\Pi} p t)(t-t_0)}$$



**Рис. 1.5. Схема модели с выделением звеньев формирования прибыли и себестоимости (схема II)**

Этим уравнениям соответствует другая схема модели, содержащая два динамических звена в прямом канале - "звено себестоимости" и "звено прибыли" (рис. 1.5). "Звено себестоимости" охвачено стопроцентной обратной положительной связью, обеспечивающей покрытие затрат трудовых и материальных ресурсов. С выхода "звена прибыли" часть стоимости прибавочного продукта направляется ко входу системы, образуя поток накопления, увеличивающий величину производственных фондов.

Вектор  $X_{\phi}(s)$  является суммарным вектором потока капитальных вложений на входе системы. Проинтегрировав этот поток в интервале от 0 до  $t$ , получим текущую величину производственных фондов  $\Phi(t)$  - опуская промежуточные вычисления, запишем конечный результат, принимая

начальные капиталовложения равными  $\Phi_0$  :

$$\Phi(t) = \int_0^t x_{\Phi}(t) dt = \Phi_0 e^{(\frac{\beta_{\Pi} p}{\tau})t} \quad (1.5)$$

Векторы прибыли и затрат  $Y_{\Pi}, Y_3$  могут быть вычислены из следующих уравнений:

$$Y_{\Pi}(t) = \frac{\Phi_0 p}{\tau} e^{(\frac{\beta_{\Pi} p}{\tau})t};$$

$$Y_3(t) = \frac{\Phi_0}{\tau} e^{(\frac{\beta_{\Pi} p}{\tau})t}$$

Уравнение темпа роста в этом случае имеет вид:

$$\omega = \frac{\beta_{\Pi} p}{\tau} \quad (1.6)$$

Динамика развития системы зависит от величины  $\beta_{\Pi}$ . При  $\beta_{\Pi} > 0$  имеет место расширенное воспроизводство, что соответствует  $\beta_{\Pi} > \frac{1}{k}$ . При  $\beta_{\Pi} = 0$  имеет место простое воспроизводство.

Убывающий темп развития в схеме II может иметь место при условии  $\beta_{\Pi} = 0$  и не стопроцентной обратной связи с выхода "звена себестоимости".

Траектория развития, изображенная кривой 3 на рис.1.3 соответствует  $\beta_{\Pi} = 1$ . При  $\beta_{\Pi} = 0$  имеем траекторию  $Y^0 = 1$ .

Период оборачиваемости  $\tau_{об}$  определим, разделив  $\Phi(t)$  на  $Y_3(t)$ . В результате получаем:

$$\tau_{об} = \frac{\Phi(t)}{Y_3(t)} = \tau \quad (1.7)$$

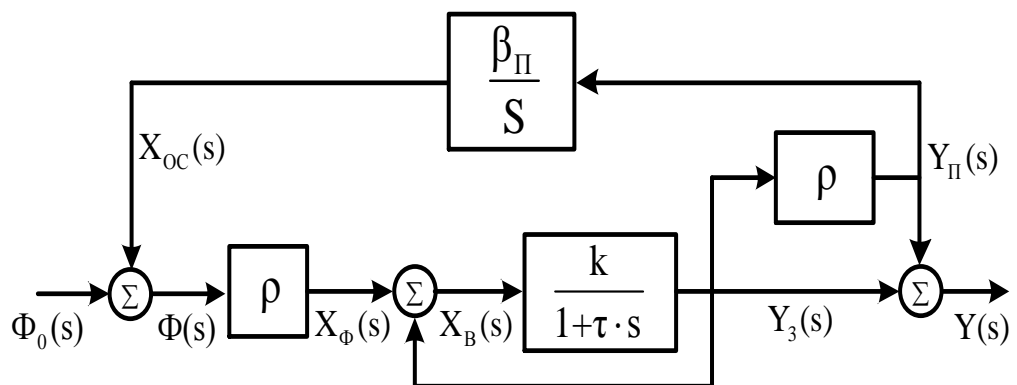
Таким образом, период оборачиваемости производстве иных фондов равен постоянной времени аperiodического звена.



Равенство помогает по новому осмыслить роль и значение применения апериодического звена при математическом описании динамики экономического развития производства в условиях хозрасчетного механизма самоокупаемости. Постоянная времени  $\tau$ , учитывающая инерционность производственных процессов экономики, приобретает четкий экономический смысл, привычный для всех экономистов, т.к. она характеризует время оборачиваемости производственных фондов в процессе расширенного воспроизводства.

Схема воспроизводства на рис.1.5 оперирует векторами потоков с размерностью [руб./год] как на входе, так и на выходе системы. Однако, если продукцию на выходе экономической системы естественно представлять в виде потока ее стоимости с размерностью [руб./год], то капитал (производственные фонды) оценивается в виде интегральной величины с размерностью [руб.]

Чтобы отразить интегральную величину вектора капитала на блок-схеме, схему II на рис. 1.5 можно преобразовать, используя оператор интегрирования, как это показано на рис. 1.6



**Рис. 1.6. Модель воспроизводства с интегрирующим звеном в цепи обратной связи**

В цепи обратной связи в блок схеме на рис.1.6 присутствует интегрирующее звено со статическим коэффициентом передачи  $\beta_{\Pi}$ , в виде оператора обратной связи  $\omega_{oc} = \frac{\beta_{\Pi}}{S}$ , а на входе - дифференцирующее звено с

передаточной функцией  $\omega_\Phi(s)=s$ . Вектор  $\Phi(s)$  в этой схеме является операторным отображением интегральной величины производственных фондов (капитала)  $\Phi(t)$  [руб.]

Вектор  $x_\Phi(s)$  отображает поток капитала с размерностью [руб./год] поступающего на вход производственного звена, охваченного стопроцентной обратной связью в виде потока, учитывающего движение оборотных средств.

Математические соотношения, полученные для схемы II на рис. 1.5 будут справедливы и для схемы на рис. 1.6

Следует однако заметить, что хотя динамические звенья являются удачной математической моделью процессов, **полученные в результаты аналитических расчетов справедливы лишь для режима расширенного производства при постоянной рентабельности.**

### ***1.1.2 Нелинейные динамические модели расширения производства***

Динамика Ферхюльста [2, 9] описывает изменение численности популяции  $X_n$  в году  $n$  при нелинейном коэффициенте прироста  $R$ :

$$R = \frac{X_{n+1} + X_n}{X_n} \quad (1.8)$$

Если прирост равен константе  $r$ , то закон, управляющий динамикой роста популяции, определяется уравнением:

$$X_{n+1} = f(X_n) = (1+r)X_n \quad (1.9)$$

а численность  $x_n$  вычисляется по формуле

$$X_n = (1+r)^n X_0 \quad (1.10)$$

где  $x_0$  - начальная численность при  $n = 0$ .

Ферхюльст считал, что численность популяции, заполняющей экологическую нишу, не может быть больше некоторого максимального

значения (которое можно положить равным единице). Он предположил, что коэффициент прироста должен уменьшаться с ростом  $x_n$  пропорционально разности  $(1-x_n)$ , т. е.

$$R=r(1-X_n) \quad (1.11)$$

Таким образом, закон, определяющий динамику изменения популяции, теперь будет выглядеть так:

$$X_{n+1}=f(X_n)=(1+r)X_n-rX_n^2 \quad (1.12)$$

Динамику роста с постоянным коэффициентом прироста  $R=r$  принято называть экспоненциальной. Она носит возрастающий характер независимо от величины параметра  $r$ .

Совсем иначе обстоит дело с нелинейной динамикой Ферхюльста. Нелинейная динамика Ферхюльста зависит от величины параметра  $r$ . Эта зависимость оказалась необычайно сложной [36]. Увеличение  $r$  приводило сначала к периодическим колебаниям популяции с определенным периодом. При дальнейшем увеличении параметра  $r$  период колебаний численности популяции начинал последовательно удваиваться. Наконец, увеличение  $r$  нарушает периодичность колебаний и численность популяции начинает прыгать около бесконечного числа значений. Процесс изменения численности популяции становится непредсказуемым, несмотря на его изначальную детерминированность [29, 45].

Исследования последних лет показывают, что динамика экономических систем различного уровня (отрасли, производственные и торговые предприятия, кредитные организации и другие объекты экономики) адекватно описывается многозвенными операторными звеньями, охваченными положительными и отрицательными обратными связями [8, 12, 53].

Долгое время непреодолимым препятствием для восприятия экономистами динамических моделей являлось отсутствие экономической интерпретации динамической характеристики: постоянной времени

инерционного звена  $\tau$ . Автору неоднократно приходилось сталкиваться с возражениями типа: “Рассматриваемые модели не могут применяться в экономике, так как в них используется постоянная времени  $\tau$ , не имеющая экономического смысла”.

В настоящее время можно утверждать, что постоянная времени инерционного звена  $\tau$  "приобрела экономический смысл". В экономической системе, описывающей динамику процесса непрерывного расширенного воспроизводства, она тождественна времени оборачиваемости капитала  $\tau = \tau_{об}$  [2].

Рост капитала  $K(t)$  в экономической системе воспроизводства с непрерывными потоками денежных поступлений и платежей описывается экспоненциальным уравнением:

$$K(t) = K_0 e^{\frac{\beta p t}{\tau}} \quad (1.13)$$

где  $K_0$  - начальный объем капитала в момент времени  $t=0$ ;  $p$  - рентабельность, т.е. отношение прибыли к затратам;  $\beta$  - коэффициент капитализации прибыли, показывающий, какая доля прибыли направляется на увеличение капитала.

Эффективность воспроизводства капитала  $E$ , равная отношению прибыли  $Y_n(t)$  к текущей величине капитала  $K(t)$ , определяется соотношением:

$$E = \frac{Y_n(t)}{K(t)} = \frac{p}{t} \quad (1.14)$$

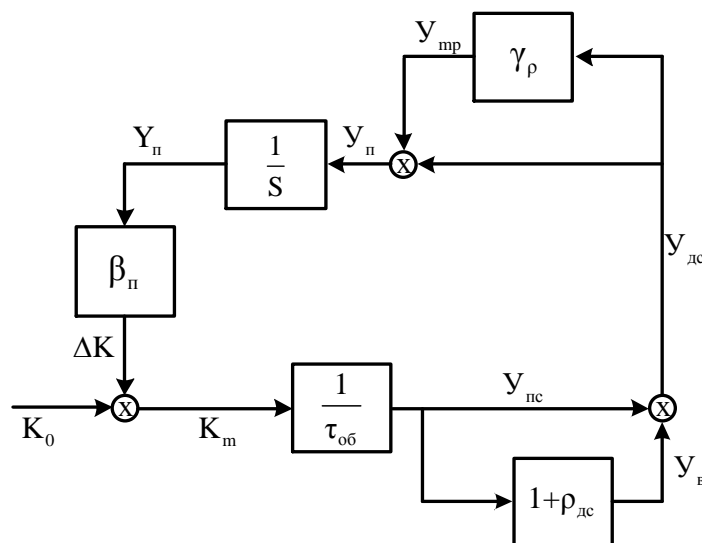
Уравнения (1.13) и (1.14) являются фундаментальными, определяющими динамику роста экономической системы.

Однако с переходом к рыночной экономике все шире начинает применяться в практике экономических расчетов такая категория, как добавленная стоимость. Добавленная стоимость служит исходным показателем как для расчета цены продукции, доходности капитала, так и для формирования рентабельности. В связи с этим в данной статье разработана обобщенная модель с использованием этого показателя. Это вносит определенную новизну, а также необходимость разработки иной

нетрадиционной системы показателей эффективности использования ресурсов предприятия, адекватных рыночной экономике. Последнее обстоятельство не означает отрицания показателей эффективности, основанных на рентабельности предприятия, тем более, все показатели оказываются взаимосвязанными.

Исходным допущением при конструировании блок-схемы динамической модели является непрерывный характер потоков денежных поступлений на счета и платежей предприятия (в дальнейшем слово лоток иногда будет опускаться). Такое допущение справедливо, если имеет место достаточно большой ежедневный объем финансовых операций, а средние показатели вычисляются на достаточно большом промежутке времени, например равном одному месяцу.

Интегральные характеристики предприятия (ежемесячный доход, расходы, средняя величина собственного основного и оборотного капитала, привлеченные ресурсы и др.) являются общепринятыми агрегированными экономическими показателями их деятельности, характерными для детерминированной системы. Очевидно, правомерно рассматривать предприятие как детерминированную систему, параметры которой структурно взаимосвязаны, могут измеряться, имеют свою динамику и свою траекторию изменения во времени, которую можно прогнозировать и планировать.



**Рис.1.7. Обобщенная пятизвенная модель предприятия**

На рис.1.7 представлена обобщенная 5-звенная блок-схема динамической модели воспроизводства производственного капитала предприятия (основного и оборотного), построенная на основе методов, применяемых в теории автоматики.

Модель, представленная на рис.1.7, содержит минимальный набор агрегированных показателей, определяющих динамику роста (убывания) производственного капитала предприятия [28].

Она содержит следующие звенья (операторы):

- звено себестоимости с коэффициентом передачи  $W = \frac{1}{\tau_{об}}$ , преобразующее вектор производственных активов  $K_t$  в вектор потока перенесенной себестоимости  $Y_{пс}$ ;
- звено себестоимости с коэффициентом передачи  $W = 1 + p_{дс}$ , преобразующее вектор перенесенной стоимости в вектор потока выручки (операционного дохода)  $Y_{в}$ ;
- звено текущих расходов с коэффициентом передачи  $\gamma_p$ , преобразующее вектор потока добавленной стоимости  $Y_{дс}$  в вектор текущих расходов  $Y_{тр}$  (расходы на зарплату, амортизацию, налоги, отчисления в различные фонды)
- интегрирующее звено в цепи обратной связи с коэффициентом передачи  $W = \frac{1}{s}$ , преобразующее вектор потока  $Y_{п}$  в вектор прибыли  $Y_{п}$  нарастающим итогом (прибыль накопленная за период);
- звено капитализации чистой прибыли с коэффициентом передачи  $W = \beta_{п}$ , преобразующее чистую прибыль  $Y_{п}$  в прирост производственного капитала предприятия  $\Delta K$ .

Особенностью модели является свойство ее саморазвития после подачи вектора собственного начального капитала  $K_0$ . При выполнении равенства  $K_0 = 0$ , система остается в режиме покоя, все другие векторы равны нулю. После подачи на вход модели  $K_0 > 0$ , система переходит из состояния

покоя в состоянии динамического развития. Величина каждого вектора будет изменяться со временем. Характер траектории изменения векторов будет зависеть от параметров операторов, входящих в блок-схему модели.

Для любого вектора из блок - схемы можно вычислить аналитические выражения траектории их изменения во времени.

Введем следующие обозначения:

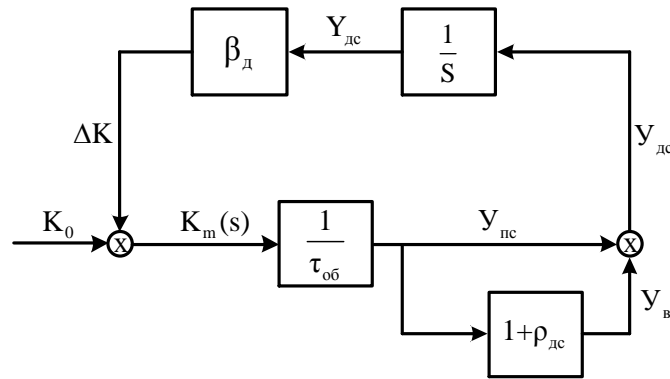
$$\beta_d = \beta_n (1 - \gamma_p) \quad (1.15)$$

$\beta_d$  - это коэффициент капитализации добавленной стоимости, показывающий долю добавленной стоимости, направляемую на увеличение капитала. Капитал  $K_m$  генерирует поток перенесенной стоимости продукции  $Y_{pc} = \frac{K_m}{\tau_{об}}$ .

Поток выручки связан с потоком себестоимости оператором с коэффициентом передачи. Коэффициент  $\rho_{дс}$  - это, по существу, маргинальная рентабельность, равная

$$\rho_{дс} = \frac{(Y_v - Y_{pc})}{Y_{pc}} \quad (1.16)$$

Поток добавленной стоимости  $Y_{дс}$  преобразуется интегрирующим звеном с коэффициентом передачи  $W = \frac{1}{sB}$  пространстве изображений по Лапласу в добавленную стоимость  $Y_{дс}$  полученную за период  $[0; t]$ . Другими словами, поток преобразуется в объем стоимости, получаемой за период  $[0; t]$  нарастающим итогом. Часть этого объема, равная доле  $\beta_d Y_{дс} = \Delta K$ , суммируется с начальным капиталом, увеличивая текущий капитал.



**Рис.1.8. Обобщенная 4-звенная модель предприятия**

Запишем уравнение роста капитала в зависимости от времени:

$$K_T(t) = K_0 e^{\frac{\beta_d \rho_{дс} t}{\tau_{об}}} \quad (1.17)$$

Обозначим моменты времени, кратные периодам времени оборачиваемости капитала  $\tau_{об}$ , через

$$t = n \cdot \tau_{об} \quad (1.18)$$

Подставим (1.18) в (1.17) и получим уравнение для расчета капитала во временных  $n$  точках, кратных времени оборачиваемости капитала

$$K_T(t) = K_0 e^{\beta_d \rho_{дс} n} = K_0 (e^{\beta_d \rho_{дс} n})^n \quad (1.19)$$

В уравнении (1.17) выражение в скобках заменим первыми двумя членами разложения в ряд Маклорена

$$e^{\beta_d \rho_{дс}} \cong 1 + \beta_d \rho_{дс} \quad (1.20)$$

Таким образом, уравнение (1.19) примет вид

$$K_T(n) = K_0 (1 + \beta_d \rho_{дс})^n \quad (1.21)$$

Запишем коэффициент прироста  $R$  для капитала, вычисляемого по формуле (1.21):

$$R = \frac{K_T(n+1) - K_T(n)}{K_T(n)} = \beta_d \rho_{дс} \quad (1.22)$$

Введем обозначение

$$r = \beta_d \rho_{дс} \quad (1.23)$$



В линейной системе доля капитализируемой прибыли  $\beta_d = \text{const}$  и рентабельность  $\beta_d = \text{const}$ , следовательно,  $r = \beta_d \rho_{\text{дс}} = \text{const}$ . Таким образом, закон, управляющий динамикой роста капитала, будет определяться уравнением:

$$K_T(n+1) = f(n) = (1+r)K_T(n) \quad (1.24)$$

Данное уравнение совпадает с уравнением численности популяции с экспоненциальным ростом.

Очевидно, что для экономической системы, функционирующей в рамках капиталистического рынка, как и для популяции в природе, имеется своя ниша и свой потолок роста. В связи с этим будем исходить из гипотезы, что с ростом выпуска доля капитализируемой прибыли, направляемая на расширение воспроизводства, будет уменьшаться. Предположим, что доля капитализируемой прибыли будет уменьшаться пропорционально росту капитала, пока капитал не достигнет максимума  $K_{\text{макс}}$  при котором  $\beta_d = 0$ :

$$\beta_d = \frac{K_{\text{макс}} - K_T(n)}{K_{\text{макс}}} \quad (1.25)$$

Подставив (1.18) в правую часть (1.15), после преобразования получим

$$K_T(n+1) = (1 + \rho_{\text{дс}})K_T(n) - \rho_{\text{дс}} \frac{[K_T(n)]^2}{K_{\text{макс}}} \quad (1.26)$$

Разделим левую и правую часть уравнения (1.26) на  $K_{\text{макс}}$ , тогда

$$\frac{K_T(n+1)}{K_{\text{макс}}} = (1 + \rho_{\text{дс}}) \frac{K_T(n)}{K_{\text{макс}}} - \left[ \frac{K_T(n)}{K_{\text{макс}}} \right]^2 \quad (1.27)$$

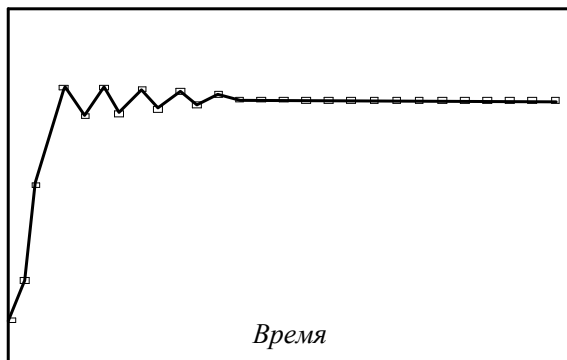
Введем новую переменную  $X_n = \frac{K_T(n)}{K_{\text{макс}}}$ , тогда  $X_{n+1} = \frac{K_T(n+1)}{K_{\text{макс}}}$ , после чего

уравнение (1.27) можно записать в виде

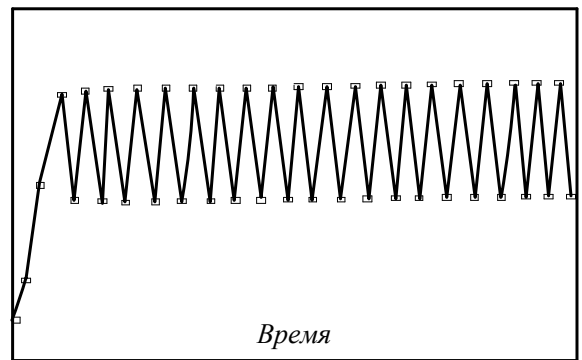
$$X_{n+1} = (1 + \rho_{dc})X_n - (X_n)^2 \rho_{dc} \quad (1.28)$$

Сравнивая уравнение (1.28) с (1.21), замечаем, что оба уравнения идентичны. Следовательно, нелинейная динамика роста относительной величины  $X_n$  капитала будет аналогична нелинейной динамике Ферхюльста.

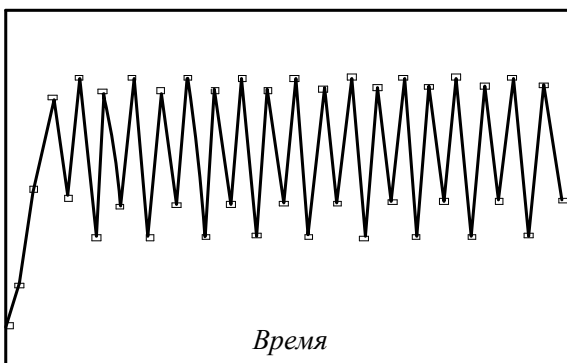
Характер динамики роста капитала будет зависеть от величины маржинальной рентабельности  $\rho_{dc}$  воспроизводственного процесса, также как и динамика роста численности популяции от параметра роста  $r$ . По существу маржинальная рентабельность  $\rho_{dc}$  является параметром роста для капитала в экономике. В зависимости от ее величины нелинейная динамика капитала будет претерпевать последовательно все качественные изменения, свойственные процессу для нелинейной динамики Ферхюльста, как показано на рис. 1.9 - 1.12.



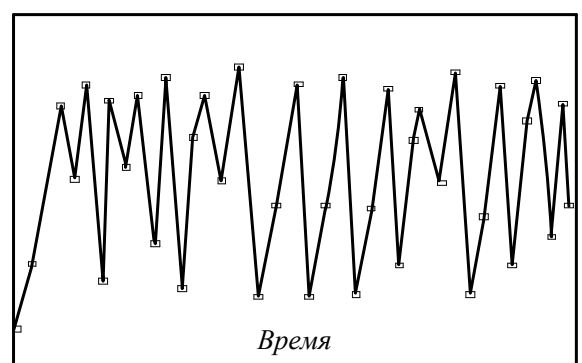
**Рис.1.9. Динамика изменения капитала**



**Рис.1.10. Пример колебательного характера экономического процесса**



**Рис.1.11. Пример процесса с нелинейной динамикой**



**Рис.1.12. Поведение процесса при нарушении саморегулирования**

Подобные процессы с нелинейной динамикой относятся к математической теории фракталов. По аналогии назовем изложенные результаты гипотезой фрактальной экономики. Как следует из этой гипотезы, динамика роста капитала во фрактальной экономике существенно меняется с увеличением величины маржинальной рентабельности  $\rho_{дс}$ . В пределах изменения  $\rho_{дс}$  до 200% в экономике наблюдаются процессы саморегулирования. Однако при увеличении  $\rho_{дс}$  этого не происходит [54, 55].

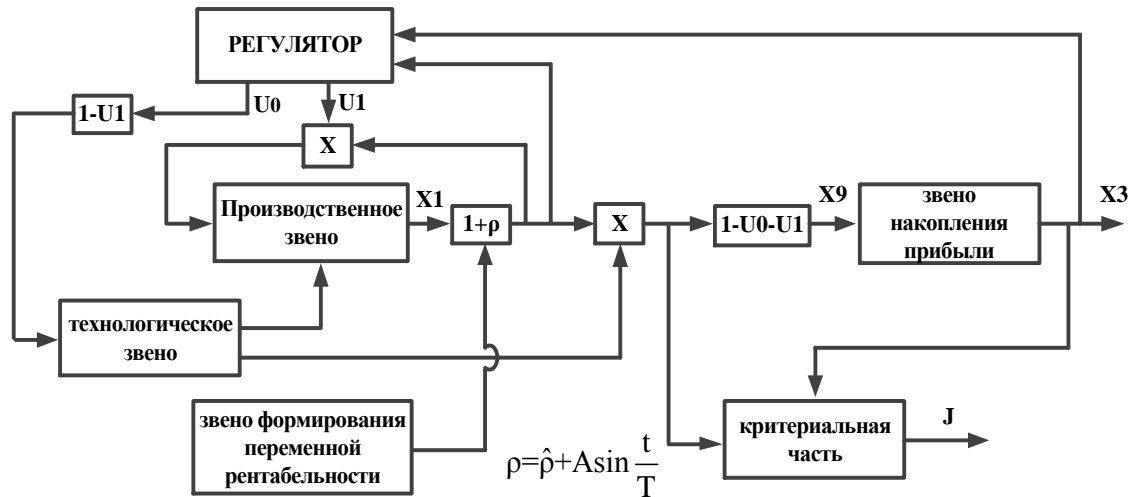
Гипотеза фрактальной экономики может существенно изменить сложившиеся представления о причинах и закономерностях циклических колебаний в экономическом развитии. Для полноценного развития гипотезы фрактальной экономики необходимо преодолеть барьер одномерного измерения капитала и потоков ресурсов, что потребует представления капитала в форме комплексного числа на комплексной плоскости. Капитал при этом должен иметь действительную часть, которая, возможно, отражала бы фактическую стоимость и мнимую. Это позволит в полной мере использовать теорию комплексных динамических систем, описать с более общих позиций переход от порядка к хаосу и исследовать роль множества Мальденброта в экономической динамике.

**Однако следует заметить, что в общем случае парадигма саморегулируемой экономики не работает.**

## **1.2 Анализ известных методов управления производством с использованием динамических моделей производственного и технологического звеньев предприятия**

В [18, 19] рассмотрена задача управления промышленным производством при следующих допущениях и ограничениях:

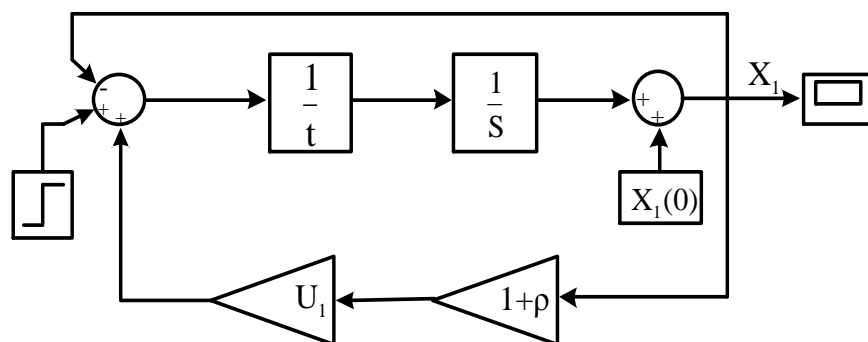
1. Промышленное предприятие представляет совокупность следующих взаимодействующих динамических звеньев, показано на рис.1.13



**Рис.1.13. Структурная схема системы управления промышленным производством**

- производственное звено, отвечающее за изготовление неизменной продукции одного типа;
- технологическое звено, решающее задачу совершенствования технологии производства с целью повышения его скорости;
- звено формирования переменной рентабельности, определяемой из затрат и изменяющегося по внешним причинам дохода после сбыта продукции;
- звено накопления прибыли;
- регулятор, формирующий при распределении части дохода сигналы управления  $U_1$  на воспроизводство и  $U_0$  на разработку более совершенной технологии.

2. Производственное звено описывается дифференциальным уравнением первого порядка, а его структура содержит отрицательную и положительную связь, как показано на рис. 1.14



**Рис.1.14. Математическая модель производственного звена**

$$\dot{X} = \frac{X_1}{\tau} [(1+\rho)U_1 - 1] \quad (1.29)$$

где  $\tau$  - время оборота капитала,  $\rho$  - рентабельность производства,  $X_1(0)$  - начальный капитал,  $X_1$  - стоимость выходной продукции в единицу времени;  $U_1$  - доля стоимости выходной продукции, направляемой для возобновления производства. Если сигнал  $U_1$  непрерывный, то при отсутствии накопленной прибыли он ограничен  $0 \leq U_1 \leq 1$ . При альтернативном управлении возможны характерные варианты - при  $U_1 > 1$ , имеет место расширение производства, при  $U_1 = \frac{1}{1+\rho}$  - простое воспроизводство, при  $U_1 < \frac{1}{1+\rho}$  - убыточное производство.

3. В звене формирования рентабельности в общем случае рентабельность  $\rho$  производства является переменной [20].

$$\rho = \hat{\rho} + A \sin \frac{t}{T_0} \quad (1.30)$$

где  $\hat{\rho} > 0$  - средняя рентабельность,  $A > \hat{\rho}$  - амплитуда колебаний,  $T_0$  - период возникновения кризисных ситуаций. При  $\rho < 0$  возникает опасная ситуация спада производства. С учётом вышесказанного принципа декомпозиции движения на данном этапе считается, что в течение некоторого ограниченного периода рентабельность  $\rho$  есть постоянная величина, либо положительная, либо отрицательная.

4. Динамическая модель технологического звена подлежит определению. Процесс создания новой техники не рассматривается.

5. Звено накопления прибыли  $X_3$  является интегрирующим и описывается дифференциальным уравнением первого порядка.

$$\dot{X}_3 = (1 - U_0 - U_1)X_1 \quad (1.31)$$

6. Другие экономические звенья, связанные с описанием процессов ценообразования, спроса и сбыта продукции, в данной работе не учитываются, а скорость получения прибыли  $X_3$  является алгебраической функцией от  $X_1$ ,

при этом брать займы средства после первоначального капитала нельзя. Считается, что цена неизменна, а спрос превышает предложение.

7. Объединение перечисленных звеньев в общую структуру позволяет промоделировать её на ЭВМ. Видно, что искомые значения  $U_1$  и  $U_0$  влияют на работу звеньев мультипликативно, играя роль либо катализаторов, либо замедлителей процессов развития производства, что в корне отличает систему от классической, в которой управляющий сигнал поступает на вход звеньев. С учетом этой особенности в [19] был синтезировано кусочно-постоянное управления производственным и технологическим звеном предприятия.

### ***1.2.1 Синтез субоптимального управления производственным звеном с помощью метода АКОР***

Для использования классического метода АКОР [14,16] нужно иметь в распоряжении линейные дифференциальные уравнения объекта и квадратичную форму подынтегрального выражения  $f_0$  минимизируемого интегрального функционала  $J$  за заданный период  $T$ :

$$J = \int_0^T f_0(\bar{X}_1, u) dt$$

Попробуем приспособить этот метод применительно к исследуемой задаче с учётом её особенностей. Во-первых, текущее состояние производства описывается двумя координатами  $X_1$  и  $X_3$  и мультипликативным управлением  $U_1$ , а скорость накопления средств в банке - координатой  $X_9$ .

Помня об ограниченной и выбираемой доле  $U_1$ , в [19] была выбрана следующая форма  $f_0$

$$f_0 = \frac{c_0}{2(1+kX_3)} U_1^2 + \frac{c_1}{2} (X_1 - m)^2 - c_2 [X_1 - m(t)] \quad (1.32)$$

Первое слагаемое определяет квадратичный штраф за увеличение доли  $U_1$ , вкладываемой в развитие производства, имеющий весовой коэффициент  $c_0$  и снижающийся при увеличении накопленной прибыли  $X_3$  в банке. Второе

слагаемое соответствует стремлению соблюсти расширение производства в виде  $X_1$ , в соответствии с некоторым планируемым показателем

$$X_1 \rightarrow m(t) = m_0 + m_1 t \quad (1.33)$$

где параметры  $m_0$  и  $m_1$  заданы, а значит задана и функция роста  $m(t)$ .

Третье слагаемое по-разному штрафует отклонение  $X_1$  от плана  $m(t)$  - превышение плана более благоприятно, чем нежелательное от него отставание.

Тогда, используя метод динамического программирования [16], можно записать условие оптимальности управления в виде

$$\begin{aligned} -\frac{\delta \varepsilon}{\delta t} &= \min \left( f_0 + \frac{\delta \varepsilon}{\delta X_1} X_1 + \frac{\delta \varepsilon}{\delta X_3} \dot{X}_3 \right) = \\ &= \left\{ \frac{c_0}{2(1+kX_1)} U_1^2 + \frac{c_1}{2} (X_1 - m)^2 - N_3 (X_1 - m) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\delta \varepsilon}{\delta X_3} X_1 (1 - U_1 - \Delta) + \frac{\delta \varepsilon}{\delta X_1} \frac{X_1}{\tau} [(1+\rho)U_1 - 1] \right\} \end{aligned} \quad (1.34)$$

где  $\varepsilon(X_1, X_3, t)$  искомая функция Беллмана.

Предварительные попытки синтеза уравнения Беллмана (1.34) показали, что с учётом мультипликативности управления не существует строгого однозначного аналитического решения задачи, а представление функции Беллмана степенным полиномом второго порядка недостаточно. Поэтому функция Беллмана была представлена в новом виде, имеющем форму степенного полинома третьего порядка.

$$\varepsilon = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_3 + \gamma_1 \frac{X_1^2}{2} + \gamma_2 \frac{X_3^2}{2} + \psi X_1 X_3 + \varphi X_1^2 X_3 \quad (1.35)$$

Учитывая неоднозначность искомого решения, в виду малости коэффициента  $\beta_1$ , обнаруженной в частных случаях расчёта, этим коэффициентом можно пренебречь. Тогда, следуя принятому порядку синтеза в АКОР, были получаемы вначале частные производные

$$\frac{\delta \varepsilon}{\delta X_1} = \beta_1 + \gamma_1 X_1 + \psi X_3 + 2\varphi X_1 X_3;$$

$$\frac{\delta \varepsilon}{\delta X_3} \cong \beta_2 + \gamma_2 X_3 + \psi X_1 + \varphi X_1^2$$

Подставляя эти производные в уравнение Беллмана(1.34), можно найти с помощью условия экстремума правой части этого уравнения было найдено субоптимальное оптимальное управление  $U_1$ :

$$U_1 = -\frac{X_1(1+kX_3)}{c_0} (A+BX_3+DX_1+2\varphi X_1X_3-\rho\varphi X_1^2) \quad (1.36)$$

где  $A = -\beta_1$ ;  $B = \frac{\varphi}{\tau}(1+\rho) - \gamma_1$ ;  $D = \frac{\gamma_1}{\tau}(1+\rho) - \psi$

Приравнивая левые и правые части уравнения (1.34) при одинаковых степенях  $X_1$ ,  $X_1^2$ ,  $X_1X_3$ ,  $X_1^3$ ,  $X_1^2X_3$ , можно составить дифференциальные уравнения Риккати относительно искомым коэффициентов  $\beta_3$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ . Это позволило записать в классе однородных стратегий для стационарного состояния 5 нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \beta_1\rho(1-\Delta) - m\tau_1 - N_3 &= 0; \\ \frac{2}{\tau}\gamma_2 - \tau_1 - 2(1-\Delta)\psi + \frac{A^2}{c_0} &= 0; \\ \frac{\psi}{\tau} - \gamma_1(1-\Delta) &= 0; \\ \varphi(1-\Delta) - \frac{AD}{c_0} &= 0; \\ \frac{2\varphi}{\tau} - A(B + 0,5KA) &= 0 \end{aligned} \quad (1.37)$$

Решение этих уравнений дало следующие результаты

$$\begin{aligned} A &\cong -\frac{m\tau_1 + N_2}{1-\Delta}; \quad B \cong -\frac{(1+\rho)\tau_1}{3\tau(1-\Delta)} - \frac{KA}{6}; \\ D &\cong \frac{(1+\rho)\tau_1}{6} - \frac{KA\tau(1-\Delta)}{6}; \\ \varphi &= \frac{A}{6c_0} \left[ \frac{(1+\rho)\tau_2}{(1-\Delta)} - K\tau \right] \end{aligned}$$

Наконец подставив полученные значения в формулу (1.36), после ряда

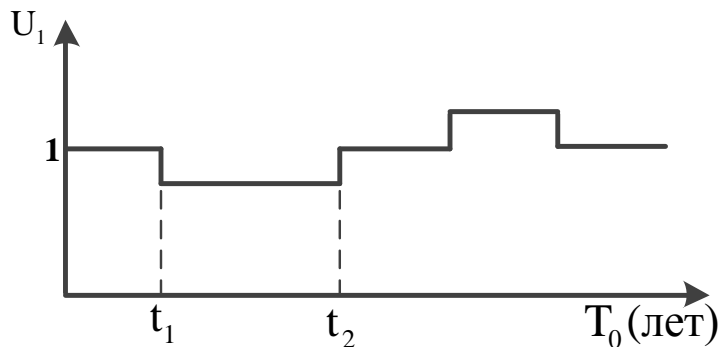


упрощений было найдено квазилинейное управление  $U_1$  как функцию координат  $X_1$  и  $X_3$  в виде

$$U_1 = M_1(1+\rho)X_1(1+kX_3) \left[ M_2 m(t) - X_1 + M_3 \frac{X_3}{\tau} \right], \quad (1.38)$$

$$(0 \leq U_1 \leq 1)$$

где  $M_1 < 1$ ;  $M_2 > 1$ ;  $M_3 < 1$  - дополнительные коэффициенты. Полученная формула (1.38) указывает, что чем больше накопленных средств  $X_3$  в банке и чем меньше мощность производства  $X_1$ , тем большую часть  $U_1$  получаемого дохода нужно вкладывать в производство. При отрицательной рентабельности  $\rho$  эта доля должна быть уменьшена, что отвечает физическому смыслу решаемой задачи.



**Рис.1.15. Кусочно-постоянное управление производственным звеном**

Найденная форма управления  $U_1$  несомненно является полезным результатом для решения задачи, рассматриваемой в данной диссертаций.

### **1.2.2 Формирование математической модели технологического звена**

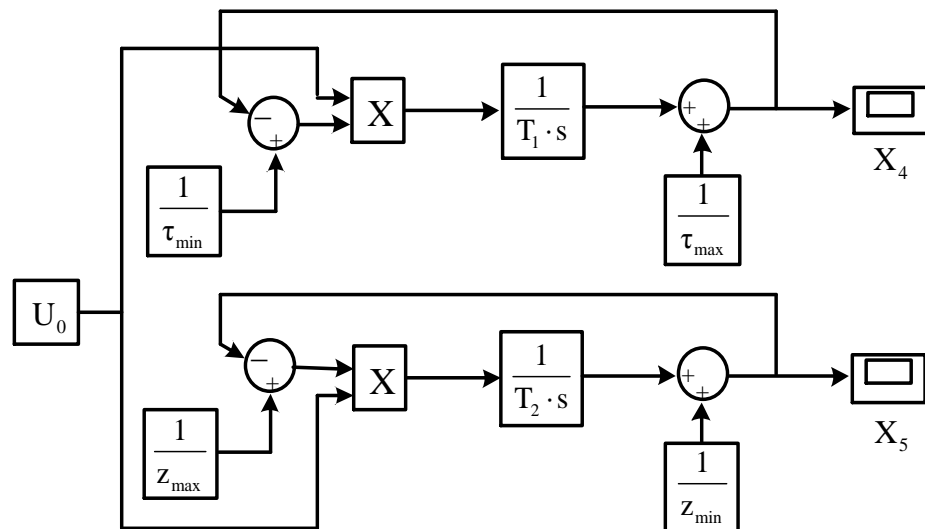
Технологическое звено в [18] описывается двумя дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{X}_4 &= \frac{U_0}{T_1} \left( \frac{1}{\tau_{\min}} - X_4 \right); & X_4(0) &= \frac{1}{\tau_{\max}}; \\ \dot{X}_5 &= \frac{U_0}{T_2} \left( \frac{1}{Z_{\max}} - X_5 \right); & X_5(0) &= \frac{1}{Z_{\min}} \end{aligned} \quad (1.39)$$

где  $[\tau_{\min}, \tau_{\max}]$ ,  $[Z_{\min}, Z_{\max}]$  - интервалы возможного повышения производи-

тельности  $\frac{1}{\tau}$  при соответствующем увеличении затрат  $Z$  для  $T_1$  и  $T_2 \approx T_1$ - постоянные времени аperiodических звеньев, мультипликативно зависящие от управления  $U_2$  использования более совершенной технологии. Первое уравнение в (1.39) воспроизводит процесс желаемого снижения времени  $\tau$  оборота капитала, целиком зависящий от вложенных средств  $U_2$  в совершенствование технологии производства, естественно за счёт дополнительных затрат, что отражается с помощью второго уравнения, описывающего снижение рентабельности.

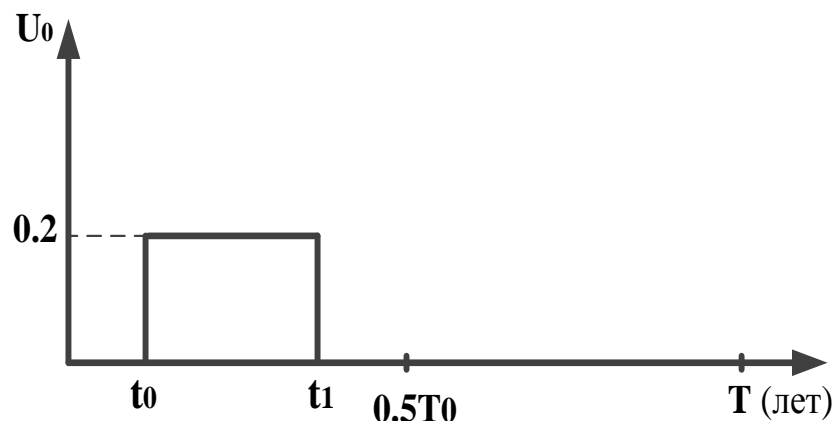
Структура технологического звена представлена на рис. 1.16.



**Рис.1.16. Математическая модель технологического звена**

Закон управления  $U_0$  был найден в [19] экспериментально с помощью моделирования системы совместного управления производственным и технологическим звеном в среде Matlab.

При этом оказалось, что управление  $U_0$  технологическим звеном также как и  $U_1$  является кусочно-постоянным, как показано на рис.1.17, а его активная часть приходится в благоприятный период  $[0; 0.5T_0]$ , когда рентабельность предприятия положительна.



**Рис.1.17. График субоптимального управления технологическим звеном**

В заключение нужно подчеркнуть, что экономические звенья, связанные с описанием процессов ценообразования, спроса и сбыта продукции, в [3] не учитывались. В конце исследуемого периода  $T_0$  система выходит на ограничение, когда предложение продукции неизменного качества превышает спрос, а процесс повышения качества продукции и создания новой техники не рассматривался.

### **1.3 Общая постановка задачи управления производством продукции при повышении её качества в кризисных ситуациях**

Рассмотрим задачу управления промышленным производством продукции при повышении её качества в кризисных ситуациях, считая, что предприятие имеет конструкторское звено, проектирующее новую техническую продукцию [4].

1. Рассматривается система управления предприятием, содержащая производственное и конструкторское звено, модели спроса и формирования прибыли в условиях переменной рентабельности, как показано на рис.1.18

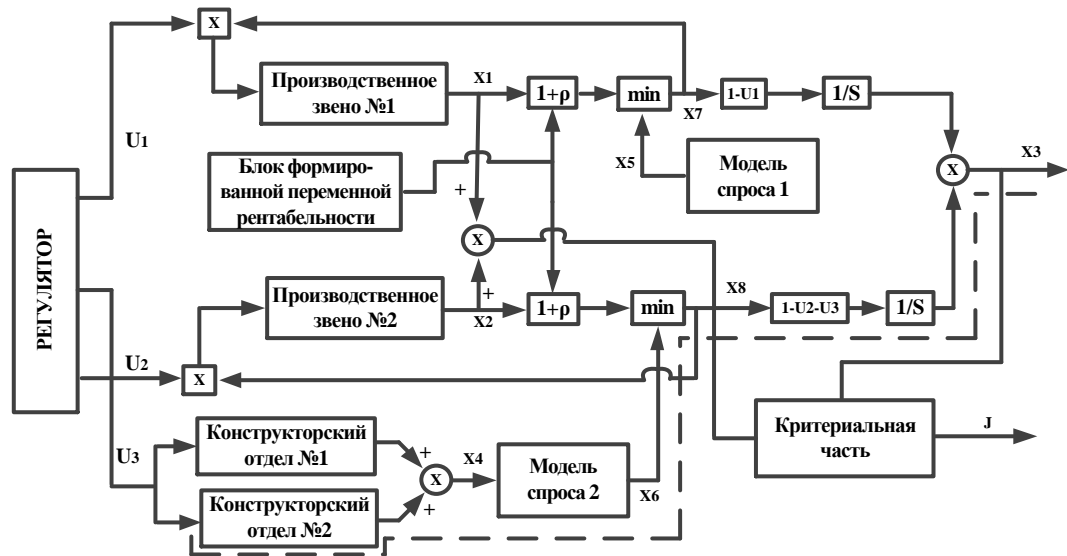


Рис.1.18 Динамические модели звеньев предприятия

2. Приняты, как заданные, следующие динамические модели звеньев:

Производственное звено описывается дифференциальным уравнением первого порядка, а его структура содержит отрицательную и положительную связь, как это показано на рис. 1.19

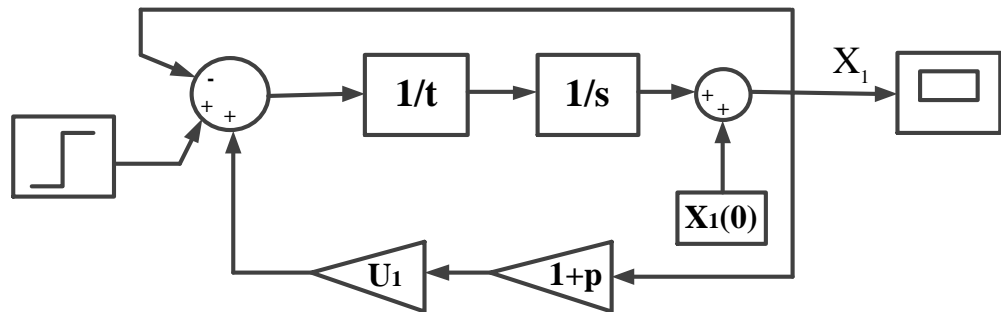


Рис.1.19 Математическая модель производственного звена

$$\dot{X}_1 = \frac{X_1}{\tau} [(1+\rho)U_1 - 1] \quad (1.40)$$

где  $\tau$  - время оборота капитала;  $\rho$  - рентабельность производства;  $X_1(0)$  - начальный капитал;  $X_1$  - стоимость выходной продукции в единицу времени;  $U_1$  - доля стоимости выходной продукции, направляемой для возобновления производства;  $\rho(t)$  - переменная рентабельность.

3. Задача совершенствования технологии производства в данной работе не

рассматривается, т.е.  $U_0=0$ .

4. Качество продукции  $K$ , учитывающее ряд технических частных показателей  $Z_l (\ell=1...l)$  в свертке  $K=\Phi(\bar{Z}_l)$ , постепенно растет, если часть средств в зависимости от выбираемой доли  $U_3$  вкладывается в конструкторский отдел предприятия, и поэтому лежит в пределах.

$$K_{\min} \leq K \leq K_{\max} \quad (1.41)$$

где  $K_{\min}$  - достигнутый в начальный период уровень качества;

-  $K_{\max}$  - ожидаемый предельный уровень качества в конце периоде  $T$ .

Динамическая модель повышения качества подлежит определению.

5. Получаемый доход  $X_7(t)$  и  $X_8(t)$  в единицу времени, или темп продаж есть функция как достигнутой развиваемой мощности  $X_1$  предприятия, так и спроса  $S(t)$  на его продукцию. Если спрос превышает предложение, то доход зависит от мощности, и наоборот - от спроса, т. е.

$$X_6 = \min[x_1(t), S(t)] \quad (1.42)$$

В свою очередь, спрос зависит от качества продукции, с одной стороны, и с другой - от покупательной способности потребителей, число которых  $m(t)$  постепенно сокращается, если качество продукции остаётся неизменным

$$S(t) = \Phi[K(t), m(t)] \quad (1.43)$$

Динамическая модель спроса также подлежит определению.

При этих условиях требуется

- разработать математическую модель совершенствования качества продукции с учетом ограничения (1.41);
- разработать динамическую модель изменения спроса  $S$  в зависимости от качества  $K$  и покупательной способности  $m$ ;
- сформулировать задачу оптимального управления работой производственного и конструкторского звена, обеспечивающего максимальную эффективность  $J(T)$  в конце планируемого периода.

## 1.4 Выводы по главе 1

1. Анализ функционирования систем управления производством и обзор литературы по экономической кибернетике показал, что типовые операторные звенья являются удачной линейной математической моделью процессов расширенного воспроизводства, но позволяют найти аналитическое решение задачи при постоянных значениях рентабельности и управления.

1 Исследование нелинейных динамических моделей показало, что в общем случае парадигма саморегулируемой экономики не работает.

2 Полученные результаты оптимального управления производственным и технологическим звеном предприятия указывают на возможность эффективного решения задачи синтеза с помощью динамического программирования, есть функцию Беллмана представить степенным полиномом третьего порядка, чтобы учесть мультипликативный характер искомого управления.

3 В предыдущих исследованиях считалось, что эффективность производства зависит прежде всего от количества выпускаемой продукции, а её качество не учитывалось, и спрос на неё считался неизменным.

4 Сформулирована новая постановка задачи, в которой считается, что темп продаж есть функция как производственной мощности предприятия, так и её спроса, зависящего прежде всего от качества вновь создаваемой техники с помощью конструкторского звена.

## **ГЛАВА II. ФОРМИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ КОНСТРУКТОРСКОГО ЗВЕНА И СПРОСА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ КАЧЕСТВА ПРОДУКЦИИ**

### **2.1 Формирование одномерной динамической модели конструкторского звена**

Конструкторское звено - это подразделение предприятия, которое осуществляет научно-исследовательские поисковые разработки (НИР), затем - опытно-конструкторские работы (ОКР) и в завершение, после необходимого цикла испытаний опытных образцов подготавливает технологическую оснастку для серийного производства новой технической продукции.

Управление проектом выполняется с помощью процессов с использованием специальных знаний, навыков, инструментов и методов по управлению проектами, которые получают сигналы на входе и создают выходы процессов.

Рекомендуется тщательно изучать каждый процесс и соответствующие входы и выходы. Процесс - это ряд взаимосвязанных действий и операций, выполняемых для достижения заранее определенных продуктов, результатов или услуг. Процессы управления проектом выполняются командой проекта и обычно бывают двух типов [56].

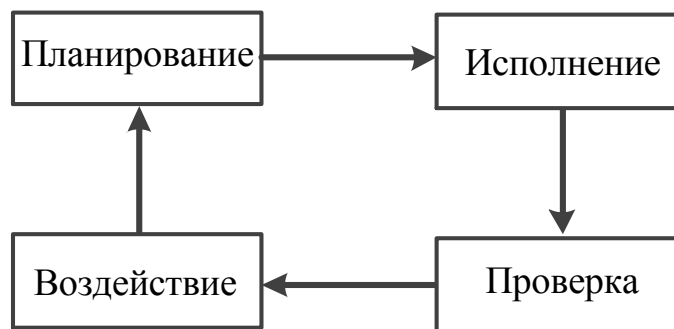
Процессы управления проектом, общие для большинства проектов, связаны между собой тем, что нацелены на выполнение общей задачи. Такой задачей может быть инициация, планирование, исполнение, мониторинг и управление, а затем и закрытие проекта. Эти процессы взаимодействуют между собой сложным образом, который нельзя полностью объяснить в документе или с помощью рисунков.

Процессы, ориентированные на продукт, определяют и создают продукт проекта. Процессы, ориентированные на продукт, обычно определяются через жизненный цикл проекта и меняются в зависимости от области приложения.

Процессы управления проектами и процессы, ориентированные на продукт, накладываются друг на друга и взаимодействуют в ходе выполнения проекта. Например, содержание проекта не может быть определено без

понимания основ того, как производить указанный продукт. Управление проектом - это интегративное действие. Интеграция управления проектом требует, чтобы все процессы проектов и продуктов были должным образом выстроены и связаны с другими процессами для облегчения их координации. Эти взаимодействия между процессами часто требуют согласования требований и целей проекта. В рамках большого и сложного проекта могут быть процессы, которые надо повторять несколько раз, чтобы определить и выполнить требования участников проекта и достичь согласия относительно результата процессов.

Исходной идеей для взаимодействия между процессами управления проектом является цикл «планирование - исполнение - проверка - воздействие», предложенный Уолтером А. Шьюартом и доработанный Уильямом Эдвардсом Демингом. Этот цикл связан результатами, результат одной части цикла становится входом другой части.



**Рис. 2.1. Цикл “планирование - исполнение - проверка - воздействие”**

Интеграционная природа групп процессов является более сложной, чем базовый цикл “планирование - исполнение - проверка – воздействие”. Однако доработанный цикл может применяться для описания взаимоотношений в группах процессов и между ними. Группа процессов планирования соответствует элементу “планирование” цикла. Группа процессов исполнения соответствует элементу “исполнение”, а группа процессов мониторинга и управления соответствует элементам “проверка” и “воздействие”. Кроме того, поскольку управление проектом - это конечное действие, группа процессов инициации начинает эти циклы, а группа



завершающих процессов закрывает их. Интеграционная природа управления проектами требует, чтобы группа процессов мониторинга и управления взаимодействовала с каждым аспектом других групп процессов.



**Рис. 2.2. Соответствие между группами процессов управления проектом и элементами цикла “планирование - исполнение - проверка - воздействие”**

### **Группы процессов управления отделами конструкторского звена**

Группа процессов включает составные процессы управления проектами, которые связаны соответствующими входами и выходами, т.е. результат одного процесса становится входом другого. Например, группа процессов мониторинга и управления не только наблюдает и управляет работами, производимыми во время группы процессов, но также наблюдает и управляет всеми действиями по проекту. Группа процессов мониторинга и управления должна также обеспечивать обратную связь для применения корректирующих или предупреждающих действий, чтобы проект не выходил за рамки плана управления проектом или чтобы план управления проектом должным образом изменялся. Также вероятны многие другие взаимодействия между группами процессов. Группы процессов - это не то же самое, что фазы проекта. Если большие или сложные проекты могут быть разбиты на отдельные фазы или подпроекты, например, анализ осуществимости, разработка идеи, проектирование, создание прототипа, производство, испытание и т.д., то все группы процессов обычно будут применяться к каждой фазе или подпроекту.

Выделяют пять групп процессов:

- Группа процессов инициации. Определяет и авторизует проект или фазу проекта. Группа процессов инициации состоит из процессов, способствующих формальной авторизации начала нового проекта или фазы проекта. Процессы инициации часто выполняются вне рамок проекта и связаны с организационными, программными или портфельными процессами, которые и обеспечивают входы для группы процессов инициации. Тем самым границы проекта могут размываться. Например, перед началом операций в рамках группы процессов инициации документируются практические нужды или требования организации. Осуществимость нового предприятия может быть установлена путем оценки альтернатив и выбора наилучшей из них. Разрабатываются четкие описания целей проекта, куда включается и указание причин, почему данный проект является лучшим вариантом, удовлетворяющим требованиям.

- Группа процессов планирования. Определяет и уточняет цели и планирует действия, не-обходимые для достижения целей и содержания, ради которых был предпринят проект. Цель группы процессов планирования - собрать информацию из нескольких источников, различных по уровню полноты и доверия. Процессы планирования разрабатывают план управления проектом. Эти процессы также обнаруживают, определяют и дорабатывают содержание и стоимость проекта и составляют расписание для операций проекта, которые будут предприняты в рамках проекта. По мере того как появляется новая информация по проекту, будут выявляться или исчезать дополнительные зависимости, требования, риски, возможности, допущения и ограничения. Из-за присущей управлению проектами многомерности, в ходе проекта неоднократно возникает необходимость в дополнительном анализе, а значит и в возвращении к уже утвержденным процессам. По мере того как выявляются и осознаются новые характеристики и информация, касающиеся проекта, может возникнуть необходимость в доработках. Значительные изменения, происходящие во время жизненного цикла проекта, приводят к необходимости пересмотреть один или несколько процессов планирования и, возможно, некоторые из процессов инициации.

- Группа процессов исполнения. Объединяет человеческие и другие ресурсы для выполнения плана управления проектом данного проекта. Группа процессов исполнения состоит из процессов, используемых для осуществления работ, означенных в плане управления проектом для выполнения требований проекта. Команда проекта должна определить, какие из процессов нужны для конкретного проекта команды. Данная группа процессов включает в себя координацию людей и ресурсов, а также интеграцию и исполнение операций проекта в соответствии с планом управления проектом. Обычно при исполнении имеют место отклонения, приводящие к корректировке планов. Эти отклонения могут затрагивать длительность операций, наличие и эффективность ресурсов, а также непредусмотренные риски. Независимо от того, повлияют такие отклонения на план управления проектом или нет, они могут потребовать анализа. Результаты этого анализа могут повлечь за собой запрос на изменение. Если этот запрос будет одобрен, то это может привести к изменению плана управления проектом и, возможно, утверждению нового базового плана.

- Группа процессов мониторинга и управления. Регулярно оценивает прогресс проекта и осуществляет мониторинг, чтобы обнаружить отклонения от плана управления проектом и, в случае необходимости, провести корректирующие действия для достижения целей проекта. Группа процессов мониторинга и управления состоит из процессов, выполняемых для правильного исполнения проекта, так, чтобы возможные проблемы были обнаружены вовремя и, в случае необходимости, могли быть предприняты корректирующие действия для управления исполнением проекта. Главное достоинство этой группы процессов в том, что ход исполнения проекта регулярно контролируется и оценивается, что позволяет выявить отклонения от плана управления проектом. В группу процессов мониторинга и управления входят также управление изменениями и рекомендации относительно предупреждающих действий в связи с возможными проблемами.

- Группа завершающих процессов. Формализует приемку продукта, услуги

или результата и подводит проект или фазу проекта к правильному завершению. В группу завершающих процессов входят процессы, используемые для формального завершения всех операций проекта или фазы проекта, передачи законченного продукта другим лицам или закрытия остановленного проекта. Когда эта группа процессов выполнена, она подтверждает, что во всех группах процессов должным образом совершены определенные процессы для закрытия проекта или фазы проекта, и формально устанавливает, что проект или фаза проекта окончены.

Группы процессов управления проектом связаны целями, которые перед ними поставлены. Выход одного процесса обычно является входом для другого процесса или является результатом поставки проекта. Группа процессов планирования предоставляет группе процессов исполнения документированный план управления проектом и описание содержания проекта, а также часто вносит изменения в план управления проектом по ходу проекта. Необходимо также отметить, что группы процессов редко являются дискретными или однократными событиями; они являются накладывающимися друг на друга действиями, осуществляемыми с той или иной интенсивностью в течение жизненного цикла проекта. Если проект разделен на фазы, группы процессов взаимодействуют в рамках фазы проекта и могут также пересекать границы фаз.

Результаты процессов связаны с другими группами процессов и воздействуют на них. Когда процесс разделяется на фазы, группы процессов обычно связаны с каждой фазой на протяжении существования проекта, чтобы способствовать успешному завершению проекта.

После того, что основные результаты процессов формирования технического проекта завершены, осуществляется технологическая подготовка к серийному выпуску продукции.

В частности, при проектировании системы управления качеством (СУК) технологического процесса сборки бортового оборудования необходимо предварительно произвести тщательный анализ объекта с целью последующего

выбора наиболее оптимальных методов и средств контроля и управления.

Построение системы управления качеством сводится к анализу технологического процесса, определению важнейших операций для контроля и управления, принятию решения о методах контроля качества на каждой из рассматриваемых операций.

Необходимо чтобы предварительное проектирование системы управления качеством проводилось по определенному алгоритму, охватывая основные цели комплексного контроля и наиболее полно исследуя полученную информацию. При анализе априорной информации необходимо применять методику, позволяющую в зависимости от объема, качества и содержания информации рационально использовать различные метрологические, логические и статистические операции, обеспечивающие проведение анализа в нескольких направлениях с минимальными затратами времени и средств.

Контроль качества, базируясь на статистических методах и развиваясь циклически, проходит через определенные этапы - цикл Деминга. Для эффективного обеспечения контроля качества необходимо участие и сотрудничество всех без исключения работников предприятия: от рабочего до руководителя.

Для построения системы управления качеством технологического процесса изготовления любого блока необходимо:

- сформулировать цель, стоящую перед системой;
- выделить части (подсистемы), которые являются самостоятельными при ряде допущений;
- определить, существует ли система, содержащая разработанную систему в качестве подсистемы.

Для сложных технологических процессов СУК представляет собой взаимосвязанную совокупность, состоящую из следующих подсистем:

- подсистема управления качеством,
- подсистема обеспечения качества,
- подсистема контроля качества.

Эти подсистемы, в свою очередь, могут также разбиваться на ряд подсистем (например, подсистема обеспечения качества разбивается на подсистемы входного, операционного и выходного контроля). Таким образом, система управления качеством практически любой сложности может быть представлена за счет многоуровневой вложенности подструктур.

Подсистема обеспечения качества должна содержать выбор технологического оборудования, режимов технологического процесса и материалов комплектующих с необходимыми характеристиками, обеспечивающими требуемое по техническому заданию (ТЗ) качество выпускаемых изделий.

В качестве входа:

- необходимую технологическую или конструкторскую документацию;
- технологическое оборудование;
- исходные материалы;
- обслуживающий персонал;
- помещение.

В качестве процесса:

- технологический процесс, который обеспечивает «промежуточное» качество в соответствии с требованиями технической документации на данном этапе;
- соответствующее (по точности и производительности) оборудование.

В качестве решения: готовое изделие с показателями качества, соответствующими ТЗ.

Подсистема контроля качества содержит выбранные параметры качества, установление важнейших операций и соответственно доминирующих параметров качества, а также выбор и определение методов контроля на данном этапе производства.

В качестве входа:

- методы контроля;
- устройства контроля;

- обслуживающий персонал.

В качестве процесса:

- процесс измерения параметров качества;
- организация процесса контроля (последовательность контрольных операций);
- разработка измерительного тракта и его отладка;
- результаты (требуемые характеристики) измерительного тракта.

В качестве решения: необходимая информация о показателях качества.

Подсистема управления качеством - совокупность квалифицированного персонала, программных и аппаратных средств, обеспечивающих такое функционирование системы (на основании информации, поступающей из подсистем), которое обеспечивало бы выпуск продукции с наилучшими показателями параметров качества.

В качестве входа:

- информация о показателях качества;
- устройства и документация, обеспечивающие требуемое значение показателей качества;
- ограничения, обусловленные технологической и конструкторской документацией;
- персонал.

В качестве процесса:

- анализ различных ситуаций, которые могут привести к отклонениям от норм показателей качества;
- процесс подготовки решения (выбор оптимального варианта из нескольких).

В качестве решения: готовое изделие с показателями качества, соответствующими ТЗ.

Перечисленные действия представляют собой последовательную цепочку операций-сигнала готовятся технические предложения, затем на обсуждение представляется технический проект. После необходимых уточнений

изготавливаются макетные образцы для технологических и натурных испытаний, в результате которых отдельные компоненты новой техники готова к внедрению, а остальные - претерпевают кропотливый процесс доработки.

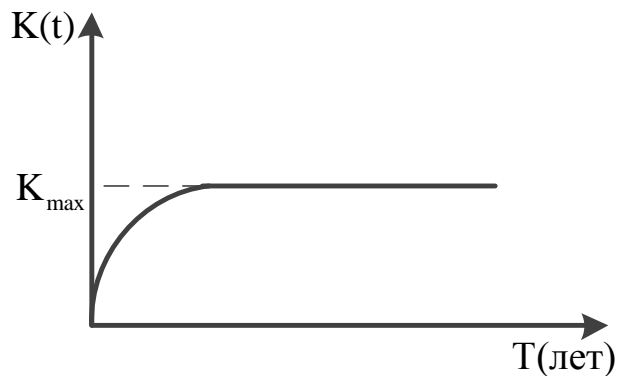
Следовательно, происходит постепенное повышение качества, сначала компонент, а затем всего технического объекта нового типа, на что требуется определенное время, причем в завершающий период скорость повышения качества заметно снижается.

Нужно заметить, что поведению системы сначала с большой скоростью, а затем с малой соответствует ряд математических моделей [5], среди которых наиболее простой является экспоненциальная модель.

$$K(t) = K_{\max} \left(1 - e^{-\frac{t}{T_k}}\right) \quad (2.1)$$

где  $K(t)$  - растущее качество вновь создаваемой продукции начиная с минимального значения  $K_{\min}$ ,  $K_{\max}$  - ожидаемое максимальное качество в конце работы конструкторского звена,

$T_k$  - постоянная времени задержки при достижении максимального уровня.



**Рис. 2.3. Экспоненциальная модель роста качества продукции при выполнении НИР и ОКР**

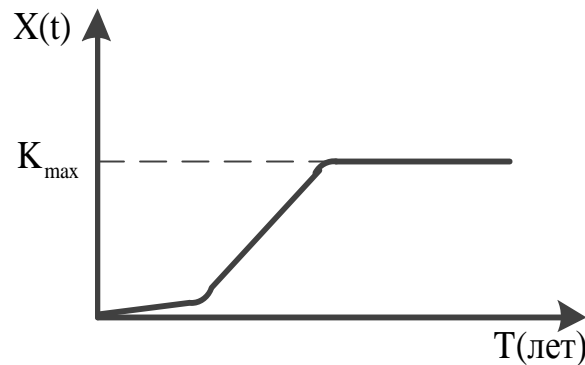
Нужно также заметить, что само значение качества определяется множеством технических показателей, и эта зависимость объяснена и расшифрована ниже.

Другой альтернативой описания действий конструкторского звена является логистическая модель



$$K(t) = K_{\max} \left(1 - e^{-\frac{t}{T_k}}\right)^n \quad (2.2)$$

Для этой модели характерна малая скорость роста качества не только в конце, но и в начале действий конструкторского звена, как это показано на рис. 2.4 для  $n \geq 2$



**Рис.2.4. Логистическая модель роста качества продукции**

В данной работе использована первая экспоненциальная модель. Как самая простая, но с одной существенной поправкой — постоянная времени  $T_k$  прежде всего зависит от тех средств, вложенных в НИР и ОКР, которые определяют долей  $U_3$  от общего дохода, получаемого от текущего выпуска продукции.

В связи с этим в данной работе предложена следующая динамическая модель конструкторского звена, отображающая рост качества  $X_4$  новой продукции

$$\dot{X}_4 = \frac{U_3}{T_k} (K_{\max} - X_4); \quad X_4(0) = K_{\min} \quad (2.3)$$

где  $T_k$  — постоянная времени задержки в появлении новых проектных разработок;  $U_3$  — доля дохода, отводимая на затраты опытно-конструкторских работ и подвергаемая в данной работе оптимальному выбору;

$K_{\max}$  и  $K_{\min}$  — заданные пределы изменения качества продукции в нормированных единицах, т.е.  $0 \leq X_4 \leq 1$  и  $K_{\max} = 1$ .

Структурная схема конструкторского звена показана на рис.2.5

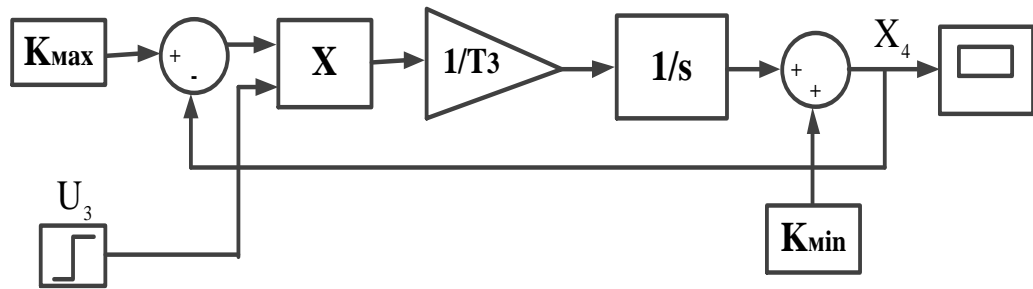


Рис.2.5. Динамическая модель конструкторского звена

При этом считается, что данная модель работает не постоянно в течение всего периода  $T_0$  функционирования системы, а в промежуток наиболее благоприятного времени положительной рентабельности работы предприятия, если эта рентабельность переменная (см. рис.2.6)

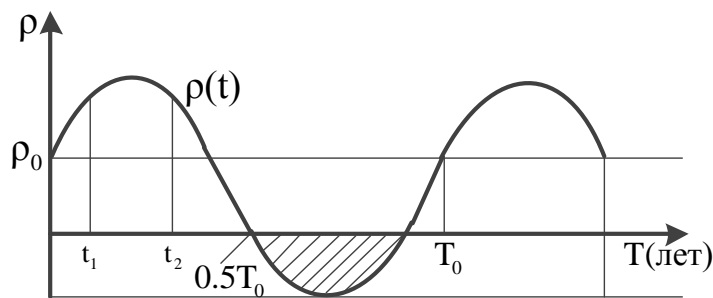


Рис. 2.6. Время  $[t_1, t_2]$  наиболее активной работы конструкторского звена при переменной рентабельности предприятия

## 2.2 Формирование динамической модели конструкторского звена на примере создания новой авиационной техники, имеющего несколько отделов

### 2.2.1 Предварительная оценка повышения качества создаваемой авиационной техники при проведении опытно-конструкторских работ

При создании новой авиационной техники важно выбрать те основные направления конструкторских разработок, которые дадут наибольший эффект и тем самым увеличат спрос на выпускаемую продукцию. В данной работе к таким направлениям относятся три разработки - создание новой конструкции самого самолета, разработка нового бортового оборудования и создание нового авиационного двигателя.

Качество новых изделий характеризуется множеством технико-экономических показателей, задача их полного учета в работе не ставится, а решается вопрос оценки скорости их улучшения в отдельности и повышения качества в целом по каждому направлению в виде некоторой свертки. Рассмотрим следующие примеры, взяв в качестве первого оценку повышения качества бортового оборудования.

В таблице 2.1 приведены некоторые данные совершенствования бортового оборудования для гражданской авиации за последние 10 ÷ 20 лет [10].

№	параметры	повышение качества $\Delta K_1$	период $T_1$	скорость $\frac{\Delta K_1}{T_1}$	средняя скорость $\frac{\Delta K_1}{T_1}$
1	точность навигации	в 4 раз	4 года	1.00	0.4
2	быстродействие рулевых приводов	в 1.2 раза	5 лет	0.04	
3	вероятность отказа	в 1.3 раза	5 лет	0.06	
4	эргономичность	в 3 раза	6 лет	0.50	

**Таблица 2.1. Данные повышения качества бортового оборудования**

Из таблицы 2.1 видно, что главными показателями улучшения стали повышение точности из-за появления спутниковой навигации и расширение объема представляемой экипажу информации с помощью компьютеров, а при определении свертки взято среднее значение показателей улучшения качества оборудования [7, 10]

$$\frac{\Delta K_1}{T_1} = \sum_{i=1}^4 \frac{\Delta K_{1i}}{T_{1i}} = \frac{1+0.04+0.06+0.5}{4} = 0.4$$

Средняя скорость повышения качества оборудования составила  $\Delta K_1=0.4$  и при этом средний период проведения ОКР  $T_1=5$  лет. В таблице 2.2 приведены некоторые данные совершенствования авиационных двигателей [11].

№	параметры	повышение качества $\Delta K_2$	период $T_2$	скорость $\frac{\Delta K_2}{T_2}$	средняя скорость $\frac{\Delta K_2}{T_2}$
1	Тяговооруженность	в 1.5 раза	10 лет	0.15	0.2
2	КПД, удельный расход топлива	в 1.2 раза	10 лет	0.12	
3	вероятность отказа	в 2 раза	15 лет	0.13	
4	уровень шума и вредных выбросов	в 2 раза	5 лет	0.4	

**Таблица 2.2: Данные повышения качества авиационных двигателей**

Из таблицы 2.2 видно, что при определении свертки взято среднее значение отдельных показателей скорости повышения качества

$$\frac{\Delta K_2}{T_2} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \frac{\Delta K_i}{T_i} = \frac{0.15+0.12+0.13+0.4}{4} = 0.2$$

При этом главным показателем улучшения в последние годы стало снижение уровне шума, само значение свертки безразмерно, а средний период проведения ОКР составляет  $T_2=10$  лет.

Наиболее трудоемкой и в тоже время самой важной задачей является созданием новых конструкций ЛА, преимущества которых определяется повышенной грузоподъемностью, аэродинамическим качеством, управляемостью, прочностью и т. д., что можно свести к таблице 2.3 для

пассажирской авиации [57, 58].

№	параметры	повышение качества $\Delta K_3$	период $T_3$	скорость $\frac{\Delta K_3}{T_3}$	средняя скорость $\frac{\Delta K_3}{T_3}$
1	грузоподъемность	в 2 раза	10 лет	0.18	0.15
2	аэродинамическое качество	в 1.5 раза	10 лет	0.12	
3	управляемость	в 2 раза	10 лет	0.15	
4	прочность (надежность конструкции)	в 1.5 раз	10 лет	0.15	

**Таблица 2.3. Данные повышения качества конструкторский пассажирской авиации**

Полученная оценка  $\frac{\Delta K_3}{T_3} = 0,15$  является минимальный среди трёх направлений, а значение  $T_3=10$  лет также подтверждает факт наибольшей трудоемкости создания авиационных конструкций.

Полученные средние оценки не претендуют на полноту используемой статистики, но и они позволяют указать на следующие тенденции:

- ряд ОКР могут принести быстрый рост повышения качества, но сроки получения благоприятного эффекта минимальны ( $T_1 < T_2 < T_3$ );

- непрерывное длительное улучшение качества за счет поочередного создания множества новых элементов обеспечивается при минимальной скорости ( $\frac{\Delta K_3}{T_3} < \frac{\Delta K_1}{T_1} < \frac{\Delta K_2}{T_2}$ );

- суммарная средняя скорость  $\sum_{i=1}^n \frac{\Delta K_i}{T_i}$  повышения качества авиационной техники близка к единице.

Кроме того, в приведенных оценках не анализировалась стоимость затрат по каждому направлению, а также численность отдельных коллективов в конструкторском бюро предприятия. Поэтому полученные оценки можно считать приведенными на единицу затрат. Назовем эти оценки удельными скоростями  $\frac{\Delta K_i}{T_i}$  повышения качества. Эти результаты использованы ниже при проведении моделирования на ЭВМ.

### ***2.2.2 Формирование многомерной модели конструкторского звена, состоящий из нескольких отделов***

Исходя из проведенного анализа существующих конструкторских разработок авиационной техники, можно представить очевидной структуру конструкторского звена, состоящего из нескольких отделов. Их количество  $m$  определяется числом направлений конструкторских работ по проектированию отдельных компонент и общего облика новой продукции. Каждый отдел преследует цель повышения качества своей компоненты аналогии с (2.3) позволяет записать систему дифференциальных уравнений

$$\dot{X}_{4i} = \frac{U_3}{T_{Ki}} (K_{imax} - X_{4i}); \quad (i=1, \dots, m) \quad (2.4)$$

где  $T_{Ki}$  - постоянные времени задержки в появлении новых компонент,  $K_{imax} - K_{imin} = \Delta K_i$  - показатели ожидаемого повышения качества новых компонент.

Общее качество новой техники в конце разработок в первом приближении может быть оценено аддитивной суммой

$$X_4(T_0) = \sum_{i=1}^m X_{4i}(T_0) \quad (2.5)$$

Однако эта оценка не является единственно верной характеристикой. Как показали исследования многопараметрических систем в различных областях [50-53], для оценки их эффективности хорошо зарекомендовали себя нелинейные свертки отдельных технических характеристик, что и используется ниже в данной работе.

## 2.3 Формирование критерия оценки качества продукции, оценивающего в нелинейной свертке группу технико-экономических показателей, на примере проектирования авиационной техники.

### 2.3.1 Формирование мультипликативного параметрического критерия эффективности управления производством

Рассмотрим первоначальный состав показателей, определяющих качество промышленного производства в целом. К ним очевидно относится поток  $X_1$  произведенной продукции, характеризующий производительность предприятия - чем выше значение  $X_1$ , тем при прочих условиях лучше. Вторым показателем является получаемая в единицу времени прибыль  $X_3$ , зависящая от достигнутой рентабельности.

Третьим показателем является накопленная в банке сумма  $X_2$  за заданный период  $T$ . Ясно, что рост любого из перечисленных показателей повышает общую оценку эффективности, поэтому естественно предложить в качестве первой версии линейную свертку.

$$J_1 = \sum_{i=1}^n b_i X_i$$

где  $b_i$  - назначенные весовые коэффициенты, удовлетворяющие двум условиям. Первым является условие нормировки показателей, имеющих разную размерность, что означает необходимость привести их к безразмерному виду. Для этого можно воспользоваться отношениями  $Y_i = \frac{X_i}{X_{i\max}}$ , для которых значения  $X_{i\max}$  можно найти при моделировании.

Вторым условием является требование учета относительной важности каждого показателя по мнению лиц, принимающих решение об эффективности системы. В частности, если считать относительные важности одинаковым и равными  $\frac{1}{n}$ , то формула линейной свертки принимает вид

$$J_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_{\max i}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \quad (2.6)$$

Однако линейная свертка нечувствительна к случаям, когда один из показателей имеет недопустимо малую величину. В этой ситуации сбалансированный результат гарантируется при использовании мультипликативного критерия  $J_2$ , когда при любом  $Y_i=0$  система признается полностью неэффективной

$$J_2 = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n y_i} \quad (2.7)$$

В данной работе в качестве общего критерия предлагается взвешенная сумма линейной и мультипликативной сверток [6]

$$J_0 = C_1 J_1 + C_2 J_2; \quad C_1 + C_2 = 1$$

В частности, если взять  $C_1 = C_2 = 0.5$ ;  $b_i = \frac{1}{n}$ ;  $n=3$ , то получим

$$J_0 = \frac{1}{6}(Y_1 + Y_2 + Y_3) + 0.5 \sqrt[3]{Y_1 Y_2 Y_3} \quad (2.8)$$

Формула (2.3) означает что если  $Y_1 = Y_2 = Y_3 = Y_0$  и  $J_0 = Y_0$ , то при  $Y_1 = Y_2 = Y_0$  и  $Y_0 = 0$  получим  $J_0 = \frac{Y_0}{3}$  т.е при низком уровне одного из нормированных показателей общая эффективность снижается в три раза, что адекватно стремлению получить при оптимальном управлении сбалансированную систему.

Можно ввести дополнительное упрощение, используя только два показателя  $Y_1$  и  $Y_2$ . Тогда при  $C_1 = C_2 = 0.5$ ;  $n=2$ ;  $b_i = \frac{1}{2}$  получим [6]

$$J_0 = \frac{1}{4}(Y_1 + Y_2) + 0.5 \sqrt{Y_1 Y_2} \quad (2.9)$$

В случае использования формулы (2.9) терминальный критерий  $J_0$  будет учитывать в свертке только достигнутую производственную мощность  $X_1$  и накопленную прибыль  $X_3$  в банке к концу заданного периода  $T_0$ .



### 2.3.2 Оценка эффективности работы предприятия, имеющего два производственных звена

Если оценивать работу предприятия, имеющего два производственных звена, то за заданный период  $T_0$  деятельности предприятия эффективность его работы определяется главным показателем - критерием  $J$ , учитывающим в нелинейной свертке как прибыль  $X_3$ , так и скорость выпуска продукции  $X_1$  и  $X_2$  каждого звена

$$J=K_1(X_1+X_2)+K_2X_3+K_3\sqrt{(X_1+X_2)X_3} \quad (2.10)$$

Однако формула (2.10) не учитывает качества продукции  $X_4$ , которое также является важным показателем. Поэтому можно предложить следующую обобщенную оценку

$$J=K_1(X_1+X_2)+K_2X_3+K_3X_4+K_4\sqrt{(X_1+X_2)X_3X_4} \quad (2.11)$$

С помощью этого критерия можно решить задачу распределения средств между несколькими конструкторскими отделами с учетом времени проектирования новой техники, и определить порядок внедрения в производство процесса выпуска новой продукции в разные производственные звенья.

В защиту этого критерия можно привести соображения, высказанные в [6] в пользу мультикативного члена  $\sqrt{X_1X_3}$ , исключающего наличие узких мест в любой оптимизируемой системе. Эти соображения таковы.

При формировании общего критерия нужно прежде всего исходить из условия достижения максимальной суммарной свертки по всем показателям независимо от различной значимости каждого из них, т.е.

$$z=\sum_{i=1}^n X_i \quad (2.12)$$

где  $X_i$  - нормированная оценка каждого показателя, лежащая в пределах [0.1];  
 $z$  - общий интегральный критерий эффективности.

**Однако** не менее важным условием является недопустимость слишком низкой оценки хотя бы по одному показателю, поэтому критерий  $z$  неадекватен линейной свертке, а предлагается его выбрать равным сумме линейной и мультипликативной свертки

$$z = K_1 \sum_{i=1}^n X_i + K_2 \prod_{i=1}^n X_i \quad (2.13)$$

Покажем это при сравнении эффективности пары предприятий, первое из которых имеет «средние» оценки, а второе компенсирует одну плохую оценку высоким уровнем других оценок. Результативность второго предприятия, как принято обычно является недопустимой, поэтому  $z_1$  должно быть больше, чем  $z_2$ . Для простоты взято  $K_1=0.5$  и  $K_2=10$ :

*а. При использовании двух показателей*

Пусть результат работы 1-ого предприятия (0.6; 0.6), 2-ого предприятия - (1; 0.2)

$$z_1 = (0.6 + 0.6) + 0.36K_2; \quad z_2 = (0.2 + 1) + 0.2K_2;$$

$$z_1 > z_2 \text{ при } 0.36K_2 > 0.2K_2 \text{ или } K_2 > 0$$

*б. При использовании трех показателей*

Пусть результат работы 1-ого предприятия (0.6; 0.6; 0.8), 2-ого предприятия - (1; 1; 0.2)

$$z_1 = (0.6 + 0.6 + 0.8) + (0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.8)K_2 = 2 + 0.288K_2;$$

$$z_2 = (0.2 + 1 + 1) + (0.2 \cdot 1 \cdot 1)K_2 = 2.2 + 0.2K_2;$$

$$z_1 > z_2 \text{ при } (2 + 0.288K_2) > (2.2 + 0.2K_2) > \text{ или } K_2 > 2.27$$

*в. При использовании четырех показателей*

Пусть результат работы 1-ого предприятия (0.6; 0.6; 0.8; 0.8), 2-ого предприятия - (1; 1; 1; 0.2)

$$z_1 = (0.6 + 0.6 + 0.8 + 0.8) + (0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.8 \cdot 0.8)K_2 = 2.8 + 0.2304K_2;$$

$$z_2 = (0.2 + 1 + 1 + 1) + (0.2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1)K_2 = 3.2 + 0.2K_2;$$

$$z_1 > z_2 \text{ при } (2.8 + 0.2304K_2) > (3.2 + 0.2K_2) > \text{ или } K_2 > 13.15$$

Продолжая процесс увеличения числа показателей, можно убедиться, что коэффициент корреляции  $K_2$  всегда положителен, и увеличивается при увеличении числа этих показателей.

Критерий (2.13) назовем гарантийным мультипликативным критерием оценки эффективности предприятия не допускающим низкой оценки по каждому из показателей, включая производительность, прибыльность, качество продукции и зависящий от него спрос [4-6].

#### **2.4 Формирование модели спроса на продукцию в зависимости от её качества**

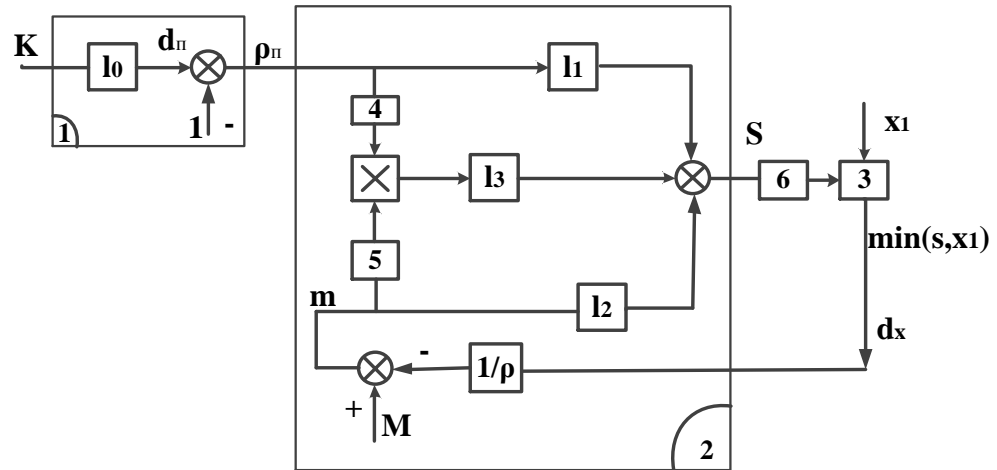
Опираясь на тот факт, что чем ниже качество продукции  $K$  и покупательная способность  $m$ , тем ниже спрос, можно предположить в статической постановке задачи первую версию модели в виде линейной свертки.

$$S = l_1K + l_2m \quad (2.14)$$

Однако этого недостаточно, т. к. при некоторых условиях и при низком качестве всё равно существует некий минимальный спрос, да и сама формула (2.14) не учитывает динамики событий. Поэтому нужно применить другую модель, по крайней мере воспользовавшись суммой линейной и мультипликативной свертки

$$S = l_1K + l_2m + l_3Km \quad (2.15)$$

Поэтому проведем дополнительные рассуждения, смысл которых можно пояснить рис. 2.7



**Рис. 2.7. Математическая модель спроса с учетом заданного качества  $K$  и динамики изменения покупательной способности  $m$ .**

-  $l_0$  - масштабный коэффициент, переводящий качество приобретенной продукции в ожидаемый доход  $d_n$  от её применения;

-  $\rho_n = 1 - d_n$  - потенциальная рентабельность новой продукции, влияющая на спрос;  $M$  - первоначальное число потребителей, покупательная способность которых позволяет приобрести продукцию заданного качества;  $P$  - оператор Лапласа; -  $l_0, l_1, l_2, l_3$  - коэффициенты, требующие специального выбора.

1 - блок перевода улучшаемого качества продукции в её потенциальную рентабельность;

2 - блок оценки спроса с учётом потенциальной рентабельности и динамики сокращения числа  $M$  покупателей;

3 - блок сравнения выпускаемой продукции  $x_1$ , и спроса  $S$  на неё;

4,5,6 - блоки нелинейных ограничений в пределах, учитывающих неотрицательность реальных значений  $S$ ,  $M$  и  $\rho_n$ .

Первые попытки моделирования схемы рис.2.7 показали, что без её включения в общий контур уравнения при постоянных качестве  $K$  и мощности предприятия спрос  $S$  постепенно падает, но при росте качества с учетом этой схемы спрос временно расчет, что можно проиллюстрировать рис. 2.8



## 2.5 Выводы по главе 2

1. Показано, что при создании новой авиационной техники можно выделить три основных направления конструкторских работ-создание новых авиационных двигателей, новых конструкций летательных аппаратов и нового поколения авиационного оборудования. Каждое из этих направлений имеет свои сроки выполнения работ и скорости повышения качества, и наибольший рост некоторых из этих достигается за малое время, а длительное улучшения других обеспечивается при малой скорости.

2. Предложена одномерная и многомерная динамическая модель конструкторского звена, состоящего в общем случае из нескольких отделов и учитывающего при экспоненциальном повышении качества мультипликативное влияние управления  $U_3$ , определяющего долю средств из общего дохода, отводимых на НИР и ОКР при создании новой авиационной техники.

3. Предложена нелинейная свертка различных показателей качества создаваемой продукции в виде суммы аддитивной и мультипликативной форм, что позволяет получить сбалансированную оценку эффективности работы конструкторского звена в целом.

4. Применение гарантийного мультипликативного критерия обеспечивает более высокую эффективность предприятия без сильного снижения отдельных показателей, хотя оно усложняет процесс решения поставленной задачи.

5. Предложена динамическая модель спроса на продукцию в виде дифференцирующего звена, учитывающего зависимость темпа продаж от скорости повышения качества продукции.

## ГЛАВА III. СИНТЕЗ СУБОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОНСТРУКТОРСКИМ ЗВЕНОМ ПРЕДПРИЯТИЯ В КРИЗИСНЫХ СИТУАЦИЯХ.

### 3.1 Постановка задачи синтеза

Рассмотрим задачу оптимального управления конструкторским звеном предприятия при создании новой авиационной техники в кризисных ситуациях

1. Задана динамическая модель производственного звена, в которое управление  $U_1$  входит мультипликативно. В частности, для второго производственного звена, как и для первого, имеем:

$$\dot{X}_2 = \frac{X_2}{\tau} [(1-\rho)U_1 - 1] \quad (3.1)$$

где

$X_2$  - скорость промышленного производства;  $\tau$  - время оборота капитала;  $U_1$  - доля дохода, возвращаемая на вход звена для расширения производства;  $\rho$  - переменная рентабельность предприятия, изменяющаяся следующим образом:

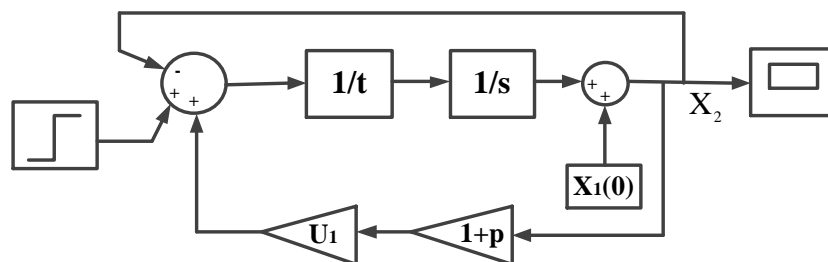
$$\rho = \hat{\rho} + A \sin \frac{t}{T_0} \quad (3.2)$$

Как показано в [1.2], для выполнения условия расширения производства доля  $U_2$  должна превышать значение  $\frac{1}{1+\hat{\rho}}$ , и в данной работе её значение таково,

что величина  $M$  равна:

$$M = 1 - U_2 = \frac{A - \hat{\rho}}{1 + \hat{\rho}}$$

Структурная схема модели производственного звена показана на рис.3.1



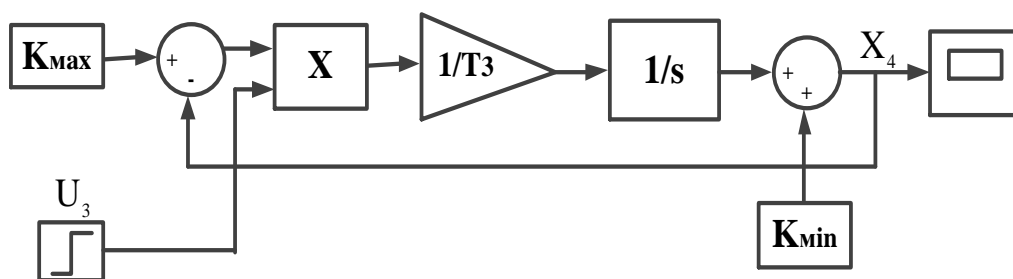
**Рис.3.1. Модель производственного звена**

2. Задана предложенная в [3] модель конструкторского звена, отображающая рост качества  $X_4$  новой продукции

$$\dot{X}_4 = \frac{U_3}{T_K} (K_{\max} - X_4); \quad X_4(0) = K_{\min} \quad (3.3)$$

где  $T_K$  - постоянная времени задержки в появлении новых проектных разработок;  $U_3$  - доля дохода, отводимая на затраты опытно-конструкторских работ и подвергаемая в данной работе оптимальному выбору;  $K_{\max}$  и  $K_{\min}$  - заданные пределы изменения качества продукции в нормированных единицах, т.е.  $0 \leq X_4 \leq 1$  и  $K_{\max} = 1$

Структурная схема конструкторского звена показана на рис.3.2



**Рис.3.2. Модель конструкторского звена**

3. Задана сформированная и описанная в [5] модель спроса продукции, особенность которой состоит в том, что темп продаж зависит в первую очередь не только от качества с коэффициентом  $C_1$ , но и от скорости его повышения с коэффициентом  $C_2 > C_1$ , при условии  $C_1 + C_2 = 1$

$$\dot{X}_6 = \frac{1}{T_C} \left[ C_2 \dot{X}_4 + \frac{C_1}{T_K} (1 - X_4) U_3 - X_2 \right] \quad (3.4)$$



где  $T_c$  - постоянная времени задержки в повышении спроса.

Структурная схема динамической модели спроса показана на рис.3.3

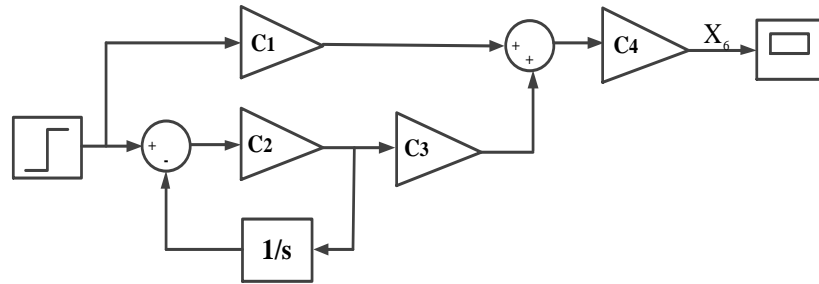


Рис.3.3. Динамическая модель спроса

4. Темп продаж продукции определяется как минимум значениями спроса  $X_6$  и предложения  $X_2$  выпускаемой продукции, и в первом приближении используется следующая оценка;

$$a = \frac{X_6 X_2}{X_6 + X_2}; \quad \frac{X_2 X_6}{X_2 + X_6} \cong X_6 - b X_6^2, \quad \text{где } b \cong \frac{1}{X_1} \quad (3.5)$$

Считается, что в среднем темпы продаж продукции первого и второго звена примерно одинаковы в период их сравнительного функционирования.

5. Часть дохода, неиспользованная на предприятия, накапливается в виде прибыли  $X_3$  в банке в результате работы двух производственных звеньев. Перечисленные условия (3.1-3.5) позволяют компактно описать динамику поведения части предприятия, занимающейся проектированием, производством и сбытом новой авиационной техники с помощью трех дифференциальных уравнений.

$$\begin{aligned} \dot{X}_3 &= a(1-U_2-U_3) + (X_6 - bX_6^2) \\ &= a(M-U_3) + M(X_6 - bX_6^2); \\ \dot{X}_6 &= \frac{1}{T_c} \left[ C_1 \dot{X}_4 + \frac{C_2}{T_k} (1-X_4) U_3 - X_6 \right]; \\ \dot{X}_4 &= \frac{U_3}{T_k} (1-X_4) \end{aligned} \quad (3.6)$$

где  $X_3$  - накапливаемая прибыль в банке;  $X_6$  - значение спроса на новую продукцию;  $X_4$  - растущее значение качества авиационной техники.

6. В конце заданного периода  $T_0$  деятельности предприятия эффективность его работы определяется минимизируемым интегральным функционалом  $\varphi$  в квадратичной форме с учетом заданных контрольных показателей  $n$  и  $m$  по прибыли и спросу:

$$\varphi = \min \int_0^{T_k} [0,5U_3^2 + 0,5r_1(X_3 - n)^2 + 0,5r_2(X_6 - m)^2] dt \quad (3.7)$$

где  $r_0 = 1$ ;  $1 > r_1 > r_2$  - заданные весовые коэффициенты значимости отдельных показателей, а первое слагаемое  $0,5U_3^2$  учитывает приближенно существующее ограничение на долю дохода, отводимого на ОКР.

$$0 < U_3 < 1 - U_1 - U_2$$

### Требуется

- выбрать метод оптимизации искомого управления  $U_3$  и найти его значение как функцию текущего состояния системы в возможно наиболее простой линейной или квазилинейной форме;

- установить первоочередные зависимости найденного управления от координат  $X_3$ ,  $X_4$ ,  $X_6$  и пояснить их физический смысл.

## 3.2 Анализ известных методов оптимального управления

### 3.2.1 Анализ известных аналитических методов параметрической оптимизации

#### *Метод Лагранжа*

Аналитические методы подразумевают, что целевая функция известна в виде любой алгебраической формы  $Z = f(\bar{X}_n)$ , переменные  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , т.е. такой числовой характеристики, меньшему или большему значению которой соответствует наилучшая система [31-34].

В ряде задач параметрического синтеза на переменные  $X_1$  накладываются

различные ограничения [17]. Классическая задача оптимизации предусматривает учет алгебраических равенств:

$$\varphi_j(X_1, \dots, X_n) = 0; \quad j=1, \dots, m; \quad m < n \quad (3.8)$$

Другим типичным случаем является введение ограничений типа неравенств, причем таких, которые исключают возможность существования пустого допустимого множества  $X$ :

$$g_l(X_1, \dots, X_n) \geq 0; \quad l=1, \dots, \rho \quad (3.9)$$

На этом этапе формулируется задача математического программирования: минимизировать вещественно значащую целевую функцию  $z$   $n$ -мерного векторного аргумента  $\bar{X}=(X_1, \dots, X_n)$ , компоненты которого удовлетворяют системе уравнений, набору неравенств, а также ограничены сверху и снизу, т.е.  $X_{i_{\min}} \leq X_i \leq X_{i_{\max}}$ . Здесь уравнения  $\varphi_j(\bar{X})=0$  называются ограничениями в виде равенств, неравенства - ограничениями в виде неравенств [24].

Задача стандартно записывается так:

$$\begin{aligned} z &= F(\bar{X}) \rightarrow \min; \\ \varphi_j(\bar{X}) &= 0; \quad j=1, \dots, m; \\ g_l(\bar{X}) &\geq 0; \quad l=1, \dots, \rho; \\ X_{i_{\min}} &\leq X_i \leq X_{i_{\max}}; \quad i=1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.10)$$

Эта задача называется задачей оптимизации с ограничениями или задачей условной оптимизации. Если  $m=\rho=0$  и  $X_{i_{\max}} = -X_{i_{\min}} = \infty$ , то задача называется задачей без ограничений или задачей безусловной оптимизации.

Вначале сформулируем задачу нахождения минимума целевой функции  $z=F(x)$ . Требуется найти такой вектор  $\bar{X}_n^*=(X_1^*, \dots, X_n^*)$  из допустимой области  $X$ , который обращает в минимум целевую функцию, т.е.

$$F(\bar{X}_n^*) \leq F(\bar{X}_n) \quad (3.11)$$

для всех  $\bar{X}_n \in X$ .

Условие (3.11) определяет слабый глобальный минимум в допустимой области  $X$  - глобальный потому, что неравенство справедливо для любого  $\bar{X}_n \in X$ , а слабый - из-за отсутствия строгого неравенства  $F(\bar{X}_n^*) < F(\bar{X}_n)$ . Минимум называют сильным при наличии строгого неравенства, а локальным - когда неравенство (3.11) имеет место в некоторой окрестности  $Q_\varepsilon(\bar{X})$  точки  $\bar{X}^*$ . При этом задача оптимизации усложняется, если целевая функция имеет в допустимой области несколько локальных экстремумов. Поэтому важно знать условия, при которых локальный минимум является в то же время абсолютным, при этом фундаментальную роль играют понятия выпуклости и вогнутости функций.

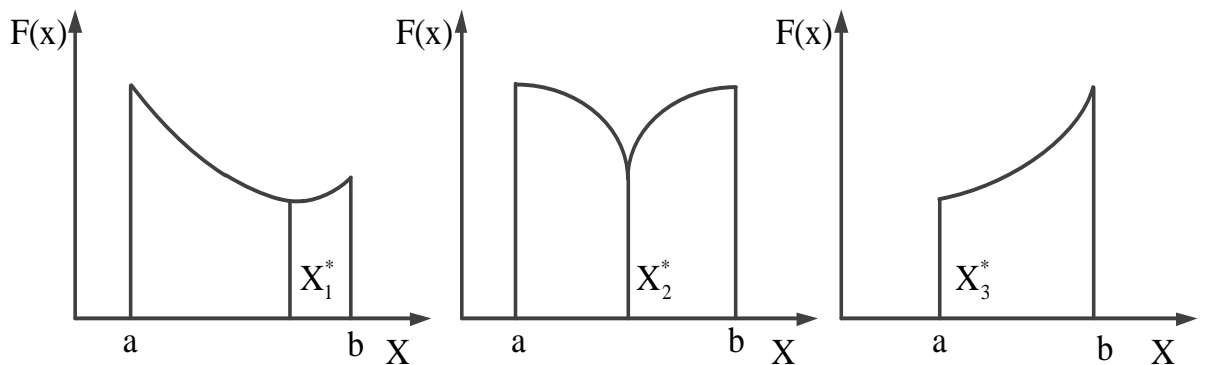
Пусть  $F(\bar{X}_n)$  - исследуемая функция,  $\bar{X}^1, \bar{X}^2$  - две произвольные точки из  $X$ , а  $\bar{X} = \lambda\bar{X}^1 + (1-\lambda)\bar{X}^2$  - произвольная точка отрезка, соединяющего  $\bar{X}^1$  и  $\bar{X}^2$ . Рассмотрим также отрезок  $z = \lambda F[\bar{X}^1] + (1-\lambda)F[\bar{X}^2]$ , соединяющий значения  $F[\bar{X}^1]$  и  $F[\bar{X}^2]$  функции  $F(\bar{X})$ . Функция  $F(\bar{X})$  называется выпуклой, если она целиком лежит ниже (не выше) отрезка, соединяющего две ее произвольные точки при любых  $\bar{X}^1$  и  $\bar{X}^2$  и любом  $\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$ , т.е.

$$F[\lambda\bar{X}^1 + (1-\lambda)\bar{X}^2] \leq \lambda F[\bar{X}^1] + (1-\lambda)F[\bar{X}^2] \quad (3.12)$$

В противном случае функция называется вогнутой. Доказано, что сумма выпуклых (вогнутых) функций есть выпуклая (вогнутая) функция. Линейная функция не является ни строго выпуклой, ни строго вогнутой. Положительно определенная квадратичная форма есть выпуклая функция, отрицательно определенная - вогнутая функция. Соответственно выпукла сумма линейной функции и положительно определенной квадратичной формы и, наоборот, вогнута сумма линейной функции и отрицательно определенной квадратичной формы.

Весьма важно, что для выпуклых ( вогнутых ) функций любой локальный минимум (максимум) на множестве  $X$  есть глобальный минимум (максимум), не может быть двух и более различных локальных минимумов (максимумов) и, наоборот, глобальный максимум достигается в одной или более крайних точках множества  $X$ . Перечисленные свойства облегчают поиск максимума или минимума целевой функции в зависимости от постановки задачи, поскольку ясно существование одного экстремума внутри допустимой области либо наличие глобального значения на ее границах.

Рассмотрим вначале функцию  $F(x)$  от одной переменной  $X$  на интервале  $[a,b]$ . При этом возможны три случая существования минимума, как это показано на рис.3.4 -точка  $X_1^*$  является стационарной ( в которой производная  $\frac{\partial F(X_1^*)}{\partial X}=0$ , а вторая производная  $\frac{\partial^2 F(X_1^*)}{\partial X^2}>0$  ), в точке  $X_2^*$  производной  $\frac{\partial F}{\partial X}$  не существует, но  $\frac{\partial F(X_2^*-0)}{\partial X}<0$ , а  $\frac{\partial F(X_2^*+0)}{\partial X}>0$  и в граничной точке  $X_3^*=a$  производная  $\frac{\partial F(X_3^*+0)}{\partial X}>0$ , а при  $X_3^*=b$  производная  $\frac{\partial F(X_4^*-0)}{\partial X}<0$ .



**Рис.3.4. Примеры минимума одномерной целевой функции на заданном интервале**

Эти особенности необходимо учитывать в инженерной практике. Для дифференцируемых функций при поиске экстремума внутри заданной области (исключая граничные точки) необходимым условием отыскания локального

минимума функции  $F(X_1, \dots, X_n)$  нескольких переменных является нахождение стационарных точек, в которых обращаются в нуль частные производные:

$$\frac{\partial F(\bar{X}_n^*)}{\partial X_i} = 0, \quad i=1, \dots, n \quad (3.13)$$

Соотношения (3.13) открывают путь к решению задачи отыскания безусловного минимума - действительно, имеется  $n$  уравнений относительно  $n$  искомых переменных  $X_i$ .

Рассмотрим теперь случай отыскания условного минимума при наличии ограничений типа равенств

$$z = F(\bar{X}_n) \rightarrow \min; \quad \varphi_j(\bar{X}_n) = 0; \quad j=1, \dots, m; \quad m < n$$

Классический способ решения данной задачи состоит в том, что дополнительные равенства используются для исключения из рассмотрения  $m$  переменных, при этом целевая функция  $F$  становится зависимой от  $(n-m)$  неисключенных переменных, на которые не наложено теперь никаких ограничений. Однако если равенства имеют сложный вид, то этот способ представляет значительные трудности.

В связи с этим на практике применяется так называемый метод неопределенных множителей, использующий функцию Лагранжа, если функция  $F(\bar{X}_n)$  и  $\varphi_j(\bar{X}_n)$  дифференцируемы. Сущность метода состоит в том, что вводится в рассмотрение вектор  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  и составляется функция Лагранжа  $L$  от  $(n+m)$  переменных:

$$L(\bar{X}_n, \bar{\lambda}_m) = F(\bar{X}_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi_j(\bar{X}_n) \quad (3.14)$$

Необходимым условием экстремума этой функции являются

$$\frac{\partial L}{\partial X_i} = 0; \quad i=1, \dots, n; \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0; \quad j=1, \dots, m$$

или имеется  $(n+m)$  алгебраических равенств

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial X_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial X_i} &= 0; \quad i=1, \dots, n; \\ \varphi_j(\bar{X}_n) &= 0; \quad j=1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.15)$$

В случае максимизации целевой функции  $Z$  функция Лагранжа имеет вид

$$L(\bar{X}_n, \bar{\lambda}_m) = F(\bar{X}_n) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi_j(\bar{X}_n)$$

Таким образом, задача на условный минимум целевой функции сводится к задаче определения стационарных точек функции Лагранжа.

В задаче с ограничениями типа неравенств

$$\begin{aligned} F(\bar{X}_n) &\rightarrow \min; \\ g_\ell(\bar{X}_n) &\geq 0; \quad \ell=1, \dots, \rho \end{aligned}$$

если функции  $F(\bar{X}_n)$  и  $g_\ell(\bar{X}_n)$  дифференцируемы, то функция Лагранжа от  $n+\rho$  переменных составляется с помощью вектора неопределенных множителей

$$L(\bar{X}_n, \bar{\mu}_\rho) = F(\bar{X}_n) - \sum_{\ell=1}^{\rho} \mu_\ell g_\ell(\bar{X}_n)$$

и условия экстремума можно записать в виде  $(n+\rho)$  равенств:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial X_i} - \sum_{\ell=1}^{\rho} \mu_\ell \frac{\partial g_\ell(\bar{X}_n)}{\partial X_i} &= 0; \quad i=1, \dots, n; \\ \mu_\ell g_\ell(\bar{X}_n) &= 0; \quad \ell=1, \dots, \rho; \\ g_\ell(\bar{X}_n) &\geq 0; \quad \ell=1, \dots, \rho; \\ \mu_\ell &\geq 0; \quad \ell=1, \dots, \rho \end{aligned}$$

Объединение перечисленных задач отыскания условного экстремума дает следующую формулировку. Необходимо решить задачу оптимизации с учетом ограничений типа равенств и неравенств. Тогда, составив функцию Лагранжа от  $(n+m+\rho)$  переменных в виде

$$L(\bar{X}_n, \bar{\lambda}_m, \bar{\mu}_\rho) = F(\bar{X}_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi_j(\bar{X}_n) - \sum_{\ell=1}^{\rho} \mu_\ell g_\ell(\bar{X}_n)$$

можно получить необходимые условия экстремума, которые записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial X_i} &= 0; \quad i=1, \dots, n; \\
\varphi_j(\bar{X}_n) &= 0; \quad j=1, \dots, n; \\
\mu_\ell g_\ell(\bar{X}_n) &= 0; \quad \ell=1, \dots, \rho; \\
g_\ell(\bar{X}_n) &\geq 0; \quad \ell=1, \dots, \rho; \\
\mu_\ell &\geq 0; \quad \ell=1, \dots, \rho
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Воспользовавшись  $(n+m+\rho)$  равенствами и  $2\rho$  неравенствами, можно в ряде случаев довести задачу до конца. Следует также обратить внимание на то обстоятельство, что при использовании метода Лагранжа, наряду с переменными параметрами  $X_i$  и минимизируемой функцией  $z=F(\bar{X}_n)$  впервые появились сопутствующие параметры  $\lambda_j$  и  $\mu_j$ , позволяющие учесть имеющиеся ограничения. Однако, хотя аналитические методы позволяют изучить качественную сторону поведения оптимальных систем, все же это возможно лишь при малом числе ограничений, особенно если они имеют нелинейный вид. Поэтому необходимо применять другие приближенные подходы к задачам оптимизации [25, 27, 40-43].

### 3.2.2 Динамическое программирование

Метод динамического программирования, разработанный в 50-х годах американским математиком Р. Беллманом, представляет собой новый подход к решению вариационных задач [16]. Идея этого подхода состоит в том, что оптимальное поведение рассматривается как функция состояния системы, описываемого с помощью значения фазовых координат  $X_i(t)$  в текущий момент времени  $t$ . Беллман очень точно подметил связь между причинностью и оптимальностью для динамических систем в том смысле, что если изменение состояния  $\bar{X}_i(t)$  любой динамической системы под воздействием входного управляющего сигнала  $\bar{U}(t)$  можно описать функциональным уравнением, характеризующим причинность

$$\bar{X}(t)=F[\bar{X}(0), t+\Delta t]=F[F\{\bar{X}(0), t\}, \Delta t]$$



то у оптимальной системы для описания изменения ее состояния, характеризуемого некоторой функцией  $S(\bar{X}, t)$  как степень достижения подавленной цели, существует по аналогии такого же типа функциональной уравнение лишь с той разницей, что достигается минимум или максимум целевой функции при выборе управления  $\bar{U}(t)$ :

$$S[\bar{X}(0), t+\Delta t] = \min_{U(t)} [S\{X(0), t\}, \bar{U}(t), \Delta t]$$

При этом выбор управления на отдельном шаге производится с точки зрения интересов не только данного шага, но и всего процесса в целом как на текущем, так и на всех последующих шагах.

Исходя из этого, Беллманом был сформулирован принцип оптимальности: каковы бы ни были начальное состояние и начальное управление, последующие управления должны быть оптимальными относительно состояния, являющегося результатом применения первого управления. Принцип оптимальности можно также сформулировать следующим образом: оптимальное поведение не зависит от предыстории системы, а определяется только начальным (к данному моменту времени) условием и конечной целью, и текущее управление должно выбираться с учетом последствий в будущем. Классическим примером оптимального поведения является стратегия бегуна на дальнюю дистанцию. На старте бегун составляет график своего бега так, чтобы пройти дистанцию за минимальное время. Это не значит, что каждый участок он должен бежать как можно быстрее. Наоборот, находясь на дистанции, он в каждый момент времени должен распределять свои силы так, чтобы с учетом своего состояния пробежать оставшийся участок за минимальное время, чему может соответствовать и бурный финиш в конце дистанции.

Динамическому программированию органически присуще решение задач, дискретных по своей природе в силу рекуррентности последовательного выбора управления в многошаговой процедуре оптимизации. Заметим, что принцип оптимальности справедлив как для непрерывных детерминированных,

так и для стохастических процессов управления, благодаря чему динамическое программирование может широко применяться в ряде кибернетических задач. Несмотря на кажущуюся простоту принципа оптимальности из него можно вывести ряд нетривиальных условий оптимальной траектории.

### *Дискретная форма динамического программирования*

Изучение метода начнем с решения одномерной задачи, когда управляемый автономный одномерный объект описывается либо в дискретной форме

$$X_{\ell+1} = X_{\ell} + \varphi(X_{\ell}, U_{\ell}), \quad \ell = 0, 1, \dots, K \quad (3.17)$$

либо в дифференциальной форме

$$\dot{X} = F(X, U)$$

которой соответствует разностное уравнение

$$X_{\ell+1} = X_{\ell} + F(X_{\ell}, U_{\ell}) \Delta t \quad (3.18)$$

где  $u$  - ограниченное в общем случае управление, т.е.

$$U_{\min} \leq U \leq U_{\max}; \quad \Delta t - \text{дискрет времени, равный } \frac{1}{K}(t_K - t_0).$$

При заданном начальном состоянии  $X(t_0)$  объекта и свободном правом конце необходимо за фиксированное время  $(t_K - t_0)$  обеспечить минимум заданного функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_K} F_0(X, U) dt \cong \sum_{\ell=0}^K F_0(X_{\ell}, U_{\ell}) \Delta t$$

или в виде аддитивной целевой функции

$$J = \sum_{\ell=0}^K F(X_{\ell}, U_{\ell}) \rightarrow \min_{U_{\ell}, \ell=0, \dots, K} \quad (3.19)$$

Таким образом,  $J$  есть функция  $(K+1)$  выбираемых переменных  $U_{\ell}$ , присутствующих в  $(K+1)$  уравнениях связи, т.е. можно попытаться решить задачу с помощью множителей Лагранжа. Однако это сложно из-за большой размерности задачи, поэтому применим иной подход.

Выведем сначала функциональное уравнение Беллмана [16], рассуждая следующим образом. Пусть минимизируемое значение функционала  $J$  в начальный момент времени определенным образом зависит от начального состояния системы, т.е. от  $t_0$  и  $X(t_0)$ . Обозначим эту зависимость через  $S[X(t_0), t_0]$ , называемую функцией Беллмана, понимая под этим не любое значение функционала, а его минимум при оптимальном поведении системы.

Представим теперь, что система функционировала некоторое время  $\Delta t$ , в результате чего к моменту  $t_1$  она пришла в новое состояние  $X(t_1)$ . Тогда, согласно принципу оптимальности, оставшееся значение минимизируемого функционала

$$\int_{t_1}^{t_k} F_0(X, U) dt$$

как результат последующих оптимальных действий есть также функция Беллмана  $S[X(t_1), t_1]$ , но уже зависящая от новых значений  $X(t_1)$  и  $t_1$ . Теперь осталось связать функции  $S(X_0, t_0)$  и  $S(X_1, t_1)$ , друг с другом, представив последствия от выбираемого управления  $u_0$  в промежуток времени  $(t_1 - t_0)$  в виде двух слагаемых - потерь  $F_0(X_0, U_0)$  внутри данного шага и потерь на всех последующих шагах вплоть до конца решения задачи, зависящих от  $U_0$ , потому что последствия в будущем определяются новым состоянием  $X_1$ , которое согласно формуле (3.17) описывается выражением

$$X_1 = X_0 + \varphi(X_0, U_0)$$

Поэтому, преследуя цель минимизации суммарных потерь, как текущих так и последующих, можно записать

$$\begin{aligned} S(X_0, t_0) &= \min_{U_0} \{ F_0(X_0, U_0) + S[X_0 + \varphi(X_0, U_0), t_0 + \Delta t] \} = \\ &= \min_{U_0} \{ F_0(X_0, U_0) + S(X_1, t_1) \} \end{aligned}$$

Рассуждая аналогичным образом при переходе к следующему шагу от момента  $t_1$  к моменту  $t_2$  и т.д. к моменту  $t_1$ , можно записать следующее функциональное уравнение:

$$S(X_\ell, t_\ell) = \min_{U_\ell} \{F_\ell(X_\ell, U_\ell) + S[X_\ell + \varphi(X_\ell, U_\ell), t_\ell + \Delta t]\} \quad (3.20)$$

Развивая этот же подход применительно к многомерному неавтономному объекту, можно получить функциональное уравнение Беллмана:

$$S(\bar{X}(t_\ell), t_\ell) = \min_{U_r(t_\ell)} \{F[\bar{X}(t_\ell), U_r(t_\ell)] + S[\bar{X}(t_{\ell+1}), U_r(t_{\ell+1})]\} \quad (3.21)$$

Пошаговый выбор управления с помощью уравнения (3.21) удобен для расчетов на ЭВМ. В этом случае численное решение обычно осуществляют с правого конца задачи. Поскольку краевые условия на правом конце не определены однозначно, то расчеты начинают, задавшись множеством значений вектора  $\bar{X}_n(t_k)$ , разбивая, например, диапазон возможных значений  $X_i(t_k)$  на  $R-1$  участков. В результате для каждого из  $R^n$  вариантов конечного состояния определяется единственное управление  $\bar{U}_r(t_k)$  на последнем шаге (в предположении, что управления на остальных шагах будут найдены позже), поскольку при заданном  $\bar{X}_n(t_k)$  только от него зависит последнее слагаемое в функции (3.19):

$$S_k(\bar{X}_n) = \min_{U_r(t_k)} \{F[\bar{X}(t_k), \bar{U}_r(t_k)]\} \quad (3.22)$$

Эта операция проводится также численно, например путем разбиения каждого из диапазонов возможных значений  $U_j$  на  $M-1$  участков, что образует  $M^r$  вариантов управления. Результаты наилучшего варианта запоминаются, а именно для каждого из  $R^n$  вариантов фиксируются три величины - вектор состояния  $\bar{X}_n(t_k)$ , оптимальное управление  $\bar{U}_r(t_k)$  и минимум целевой функции  $S_k$ . Таким образом, в памяти ЭВМ хранится  $(n+r+1)R^n$  чисел.

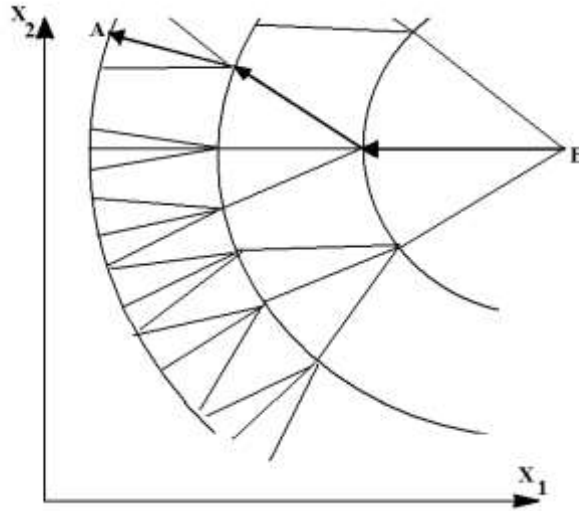
На следующем шаге, являющемся уже типичным для расчетов, снова формируются варианты состояния  $\bar{X}_n(t_{k-1})$ , а затем для каждого из них численно определяется управление  $\bar{U}_r(t_{k-1})$ , но уже исходя из минимума суммы двух слагаемых, причем второе слагаемое отыскивается в памяти ЭВМ в соответствии с переходом из  $\bar{X}_n(t_{k-1})$  в  $\bar{U}_r(t_{k-1})$ :

$$S_{k-1}[\bar{X}_n(t_{k-1})] = \min_{U_r(t_{k-1})} \{ [\bar{X}_n(t_{k-1}), \bar{U}_r(t_{k-1})] + S_k[\bar{X}_n(t_{k-1})] \} \quad (3.23)$$

где,  $\bar{X}_n(t_k) = \bar{X}_n(t_{k-1}) + \varphi[\bar{X}_n(t_{k-1}), \bar{U}_r(t_{k-1})]$

Результаты расчета для нового шага также запоминаются в ЭВМ. Эта процедура повторяется, двигаясь от конца к началу для всех шагов, кроме первого. При этом необходимый объем памяти непрерывно растет. Наконец на первом шаге, воспользовавшись единственным вариантом заданного начального состояния, численно определяют оптимальное управление  $\bar{U}_r(t_0)$ , но именно ради этого необходимо было запомнить итоги оптимизации на втором шаге, а это приводит к необходимости помнить результаты на предыдущих шагах.

Теперь, поскольку управление  $\bar{U}_r(t_0)$  найдено и, значит, определено значение  $S_0[\bar{X}(t_0), t_0]$ , представляющее собой минимизируемое значение функционала, осталось выявить конкретные значения  $\bar{U}_r(t_1), \bar{U}_r(t_2), \dots, \bar{U}_r(t_k)$ , соответствующие данной оптимальной траектории. Для этого, на основании уравнения (3.23) и известного управления  $\bar{U}_r(t_0)$  определяется состояние  $\bar{X}_n(t_1)$ , которому соответствует свое запомненное управление  $\bar{U}_r(t_1)$ . Продолжая теперь движение слева направо, последовательно восстанавливают всю программу управления и оптимальную траекторию за все  $K$  шагов.



**Рис 3.5. Иллюстрация численного решения с правого конца задачи при дискретной форме динамического программирования**

Рассмотренным методом решаются задачи, когда на правом конце часть фазовых координат закреплена. Например, на рис. 3.5 представлен случай перехода из точки А в точку В с произвольной конечной скоростью; Тогда движение справа налево (как это показано на рис. 3.5), при  $K=3$  требует переменного объема запоминаемых результатов, поскольку по координатам  $X_1$  и  $X_2$  вначале оценивается малое число вариантов, а потом число растет, вплоть до момента достижения точки А. При этом основное содержание расчета на каждом шаге остается прежним.

Нужно отметить, что, несмотря на определенную утомительность рассмотренной вычислительной процедуры, метод динамического программирования сводит задачу минимизации функции  $(K+1)g$  переменных  $(K+1)$  отдельным шагам расчета минимизации функции Беллмана, зависящей только от  $g$  переменных. Это экономит время расчета, требуя, правда, значительного объема памяти ЭВМ. Достоинством метода при численных расчетах является также и снижение объема вычислений при сужении области допустимых управлений  $\bar{U}$  или допустимого множества значений  $\bar{X}$ . Однако с увеличением размерности задачи дискретизация увеличивает число вариантов расчета запоминаемых результатов в степени  $n$ ,

что известно как «проклятие размерности», и требует иных подходов к применению динамического программирования [44, 46, 48].

### *Непрерывная форма динамического программирования*

Принцип оптимальности Беллмана дает достаточно общее условие, которое можно применять как для дискретных, так и для непрерывных систем управления.

Рассмотрим следующий предельный случай, когда дискрет времени  $\Delta t$  бесконечно мал, т.е.  $\Delta t \rightarrow 0$ . Обратимся к функциональному уравнению Беллмана для одномерного объекта, заменив в нем дискретный момент времени  $t_\ell$  ( на текущее время ) и согласно (3.18) и (3.19) функции  $\varphi(X_\ell, U_\ell)$  и  $F(X_\ell, U_\ell)$  соответственно на  $F(X, U)\Delta t$  и  $F_0(X, U)\Delta t$ . Тогда можно получить выражение

$$S(X, t) = \min_{U(t)} \{ F_0(X, U)\Delta t + S[X + F(X, U)\Delta t, t + \Delta t] \} \quad (3.24)$$

При этом функция  $S$  во втором слагаемом правой части уравнения также имеет бесконечно малые приращения. Допустим, что функция Беллмана  $S$  непрерывна и, кроме того, существуют частные производные  $\frac{\partial S}{\partial t}$  и  $\frac{\partial S}{\partial X}$ . Тогда можно разложить функцию  $S(X + F\Delta t, t + \Delta t)$  в ряд Тейлора в точке  $(X, t)$  и, пренебрегая членами второго порядка малости, получить:

$$\begin{aligned} S[X + F(X, U)\Delta t, t + \Delta t] \cong & S(X, t) + \frac{\partial S}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial S}{\partial X} F(X, U)\Delta t + \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \cdot \frac{\Delta t^2}{2} + \\ & + \frac{\partial^2 S}{\partial X \partial t} F(X, U)\Delta t^2 + \frac{\partial^2 S}{\partial X^2} \cdot \frac{\Delta X^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

Заметим, что последнее слагаемое может быть учтено, если переменная  $X(t)$  есть случайный процесс, в котором присутствует составляющая типа белого шума с бесконечно большой дисперсией  $D$ , равной  $\sigma^2 \cdot \Delta t$ , где  $\sigma^2$  - коэффициент диффузии. Подставим полученный результат в правую часть уравнения (1.25).

С учетом того, что функции  $S(X, U)$  и  $\frac{\partial S}{\partial t} \cdot \Delta t$  от управления не зависят как

результаты уже проведенной оптимизации и могут быть вынесены за фигурные скобки, уравнение (3.24) можно представить в виде

$$S(X,t) \cong S(X,t) + \frac{\partial S}{\partial t} \Delta t = \max \left\{ \begin{aligned} &F_0(X,U)\Delta t + \frac{\partial S}{\partial X} F(X,U)\Delta t + \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \cdot \frac{\Delta t^2}{2} + \\ &+ \frac{\partial^2 S}{\partial X \partial t} F(X,U)\Delta t^2 + \frac{\partial^2 S}{\partial X^2} \cdot \frac{\Delta t^2}{2} \end{aligned} \right\}$$

Перенеся первые два члена в левую часть, разделим уравнение на  $\Delta t$  :

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \max_{u(t)} \left\{ F_0(X,U)\Delta t + \frac{\partial S}{\partial X} F(X,U)\Delta t + \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \cdot \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \Delta t + \frac{\partial^2 S}{\partial X \partial t} F(X,U)\Delta t \right\}$$

Последними двумя слагаемыми при  $\Delta t \rightarrow 0$  можно пренебречь из-за их малости. Тогда с учетом случайного характера оптимизируемого процесса получим уравнение.

$$-\frac{\partial S(X,t)}{\partial t} = \max_{u(t)} \left\{ F_0(X,U)\Delta t + \frac{\partial S}{\partial X} F(X,U) + \frac{\partial^2 S}{\partial X^2} \cdot \frac{\sigma^2}{2} \right\} \quad (3.25)$$

Если рассматривать детерминированный случай при  $\sigma^2 = 0$  и наконец, исследовать поведение системы с  $n$  координатами  $X_i$  и  $r$  управлениями  $U_j$ , то можно получить известное уравнение Беллмана в частных производных

$$-\frac{\partial S(X,t)}{\partial t} = \max_{U_r(t)} \left\{ F_0(\bar{X}_n, \bar{U}_r, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial X_i} F_i(\bar{X}_n, \bar{U}_r, t) \right\} \quad (3.26)$$

Очень важно подчеркнуть, что уравнение Беллмана (3.26) является нелинейным дифференциальным уравнением, поскольку в нем присутствует операция минимизации. В векторной форме его можно записать так:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \max_{\bar{U}} \left\{ F_0(\bar{X}_n, \bar{U}_r, t) + \text{grad} S \bar{F} \right\}$$

где  $S(\bar{X}, t) = \min \left\{ \int_{t_1}^{t_k} F_i(\bar{X}_n, \bar{U}_r, t) dt \right\}$



Поясним теперь смысл слагаемых, входящих в правую часть уравнения (3.26). Первое слагаемое  $F_0$  характеризует потери на текущем шаге, второе слагаемое в виде суммы членов оценивает последствия от принятого решения в будущем. Причем каждый член учитывает изменение текущего состояния по координате  $X_i$ , возникающее за счет управления  $\bar{U}_r(t)$ , с помощью производной  $\dot{X}_i = F_i(\bar{X}_n, \bar{U}_r, t)$ , которая умножается на свой весовой коэффициент  $\frac{\partial S}{\partial X_i}$ . Таким образом, производные  $\frac{\partial S}{\partial X_i}$  есть своего рода «коэффициенты чувствительности» оставшегося значения минимизируемого функционала к изменениям текущих значений фазовых координат  $X_i$ . Это соображение иллюстрирует дальновидность метода и оживляет представление о функции Беллмана  $S(\bar{X}_n)$  как о некоторой функции отклика критерия оптимальности на измененные вектора состояния  $\bar{X}_n$ . Часто в технических задачах можно физически уяснить себе характер зависимости функции  $S$  от фазовых координат системы. Поэтому удается найти управление в функции от состояния фазовых координата  $X_i$ , что позволяет прийти к замкнутой системе управления с обратной связью и тем самым ускорить решение задачи, что будет показано ниже в примерах.

С помощью динамического программирования можно решать задачи и с незакрепленным временем управления  $t_k$ . В частности, для автономных систем можно получить уравнение Беллмана в виде

$$0 = \min_{U_r(0)} \{ F_0(\bar{X}_n, \bar{U}_r) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S(\bar{X}_n)}{\partial X_i} F_i(\bar{X}_n, \bar{U}_r) \} \quad (3.27)$$

где функция  $S(\bar{X}_n)$  от времени не зависит. Для задач максимального быстродействия в уравнении (3.27) нужно ввести замену  $F_0(\bar{X}_n, \bar{U}_r) = 1$ . Отметим, что вывод уравнений (3.26) и (3.27) требовал дифференцируемости функции  $S$ .

В заключение нужно сказать, что **метод динамического программирования в непрерывной форме является наиболее приемлемым как основа оптимального синтеза управления.**

### *3.2.3 Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов (АКОР)*

Поскольку динамическое программирование наиболее близко к получению оптимального управления в замкнутой форме, нужно подробнее остановиться на задаче синтеза систем автоматического управления, удовлетворяющего при существующих ограничениях требуемому качеству. Одним из направлений в этой области является разработанный у нас в стране А.М. Летовым подход, названный аналитическим конструированием регуляторов [14], когда алгоритм управляющего устройства замкнутой системы находится аналитически в соответствии с определенным функционалом качества, соответствующим квадратическому критерию вида

$$J=0.5\bar{X}^T(t_k)+0.5\int_{t_0}^{t_k}[\bar{X}(t)P(t)\bar{X}^T(t)+U^T(t)R(t)\bar{U}(t)]dt \quad (3.28)$$

Минимизация функционала (3.28) соответствует задаче о регуляторе состояния, когда важно удерживать около нуля все компоненты вектора состояния. Возможны другие варианты удержания около нуля некоторой ошибки, представляющей собой разность между желаемым и выходным сигналами в задачах слежения [37], но смысловое содержание структуры критерия остается неизменным. Первое слагаемое характеризует терминальную ошибку в конечный момент, второе слагаемое преследует цель обеспечить малость ошибки при удерживании системы в заданном положении. Последнее слагаемое представляет «штраф за большие управления» и оценивает затрачиваемую на управление энергию.

Соответственно положительно полуопределенные матрицы  $M$ ,  $P$  и положительно определенная матрица  $R$  выбираются с учетом значимости указанных факторов, преимущественно с ненулевыми диагональными элементами, либо, по желанию проектировщика, можно положить некоторые из

матриц нулевыми. При этом, как правило, рассматривается линейный нестационарный объект, описываемый уравнениями

$$\dot{\bar{X}} = A\bar{X} + B\bar{U} \quad (3.29)$$

где на управление  $\bar{U}$  никаких прямых ограничений не наложено. В связи с этим для аналитического решения можно применять как вариационное исчисление, так и принцип максимума, но для получения решения в замкнутой форме воспользуемся методом динамического программирования. С учётом терминального члена функцией Беллмана  $S$  является функция

$$S(\bar{X}, t) = \min_{\bar{U}} \left\{ 0.5 \bar{X}^T(t_k) M \bar{X}(t_k) + \int_t^{t_k} F_0(\bar{X}, \bar{U}) dt \right\}$$

которая при  $t = t_k \neq 0$ .

С учетом (3.28) и (3.29) уравнение Беллмана имеет вид

$$\frac{\partial S(\bar{X}, t)}{\partial t} = \min_{\bar{U}} \left\{ 0.5 \bar{X}^T P(t) \bar{X} + 0.5 \bar{U}^T R(t) \bar{U} + \frac{\partial S}{\partial \bar{X}} [A(t) \bar{X} + B(t) \bar{U}] \right\} \quad (3.30)$$

При отсутствии ограничений на оптимальное управление вычислим производную от выражения в фигурных скобках и, приравняв ее нулю, получим

$$\bar{U}^T R + \frac{\partial S}{\partial \bar{X}} B(t) = 0$$

Поскольку матрица  $D$  положительно определена, можно найти, во-первых, оптимальное управление

$$\bar{U}(t) = -R^{-1} B^T(t) \left[ \frac{\partial S(\bar{X}, t)}{\partial \bar{X}} \right] \quad (3.31)$$

и, во-вторых, записать уравнение Беллмана без операции минимизации:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = 0.5 \bar{X}^T P(t) \bar{X} - 0.5 \frac{\partial S}{\partial \bar{X}} B(t) R^{-1}(t) B^T \left[ \frac{\partial S}{\partial \bar{X}} \right]^T + \frac{\partial S}{\partial \bar{X}} A(t) \bar{X} \quad (3.32)$$

Уравнение (3.32) можно решить при условии  $S(\bar{X}, t_k) = 0.5\bar{X}^T M \bar{X}$ . Можно показать [31], что уравнение (3.32) имеет точное аналитическое решение, которое представляет собой квадратичную форму

$$S(\bar{X}, t) = 0.5\bar{X}^T K(t)\bar{X}$$

где  $K(t)$  - симметричная нестационарная матрица с искомыми элементами. Вычислив частные производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= 0.5\bar{X}^T K'(t)\bar{X}; \\ \frac{\partial S}{\partial X} &= \bar{X}^T K(t) \end{aligned}$$

подставим их в уравнение (3.32):

$$\begin{aligned} -0.5\bar{X}^T K'(t)\bar{X} &= 0.5\bar{X}^T P(t)\bar{X} - \\ &- 0.5\bar{X}^T K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)\bar{X} + \bar{X}^T K(t)A(t)\bar{X} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Учитывая, что  $\bar{X}^T K(t)A(t)\bar{X} = 0.5\bar{X}^T K(t)A\bar{X} + 0.5\bar{X}^T A^T(t)K(t)\bar{X}$ , уравнение

(3.33) можно преобразовать к виду

$$0.5\bar{X}^T \left[ \begin{array}{c} K(t) - P(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) + \\ + K(t)A(t) + A^T(t)K(t) \end{array} \right] \bar{X} = 0$$

что соответствует равенству нулю выражения в квадратных скобках, имеющего вид системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений с граничным условием  $K(t_k) = M$ :

$$K = -KA(t) - A^T(t)K + KB(t)R^{-1}(t)B^T(t)K - P(t) \quad (3.34)$$

Уравнение (3.34) называется матричным уравнение Риккати, решение которого обычно находят численно на ЭВМ до начала работы системы. Оптимальному управлению соответствует в общем случае линейный закон управления с переменным коэффициентом передачи

$$\bar{U}(\bar{X}) = -R^{-1}KB^T(t)\bar{X}$$

И снова, возникает закономерный вопрос - при каких условиях структура и параметры регулятора будут неизменны. В работах Калмана доказывается, что при  $M=0$  и  $t_k \rightarrow 0$  для стационарных объектов, т.е. при постоянных матрицах  $A$ ,  $B$ ,  $K$  и  $P$ , решение уравнения Риккати есть постоянная матрица  $K$ , соответствующая уравнению

$$KA + A^T K - KBR^{-1}B^T K + P = 0$$

В этом случае оптимальная замкнутая система является стационарной

$$\dot{\bar{X}} = (A - BR^{-1}B^T K)\bar{X}$$

и асимптотически устойчивой вследствие установившегося поведения при  $t \rightarrow \infty$ , несмотря на то что объект управления может быть неустойчив.

**Главной полезной особенностью метода АКОР является то, что закон управления может быть найден алгебраическим путем в квадратурах.**

### 3.3 Формирование закона управления производственным и конструкторским звеном с помощью динамического программирования

#### 3.3.1 Синтез оптимального управления с помощью динамического программирования

Как показали последние исследования [2-4], наиболее удобным методом получения закона оптимального управления для нелинейных динамических систем является динамическое программирование с использованием функции Беллмана [16]. Принципиальной особенностью решаемой задачи является то, что выбираемое управление  $U_3$  входит в правые части дифференциальных управлений мультипликативно. Это требует более сложного представления функции Беллмана от координат  $X_3, X_4, X_6$  в виде степенного полинома не второго, а более высокого порядка, что существенно осложняет расчеты и требует дополнительных упрощений, но все - таки позволяет найти нужное аналитическое решение в квадратурах.

Прежде всего, с учетом соотношений запишем условие оптимальности в виде уравнения Беллмана в частных производных [5]:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \min U_3 \left( \begin{aligned} &0,5U_3^2 + 0,5r_1(X_3 - n)^2 + 0,5r_2(X_6 - m)^2 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_3} [a(M - U_3) + M(X_6 - bX_6^2)] + \\ &+ \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_6} \frac{1}{T_c} [C_1 \dot{X}_4 + \frac{C_2}{T_k} (1 - X_4) U_3 - X_6] + \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_4} \frac{U_3}{T_k} (1 - X_4) \end{aligned} \right) \quad (3.35)$$

Предварительные расчеты показали, что для синтеза оптимального управления достаточно ограничиться представлением функции Беллмана степенным полиномом третьего порядка следующего вида:

$$\begin{aligned} \varepsilon(X_3, X_4, X_6) = &\beta_1 X_3 + \beta_2 X_6 + \beta_3 X_4 + 0,5\gamma_1 X_3^2 + 0,5\gamma_2 X_6^2 + 0,5\gamma_3 X_4^2 + \\ &+ \Psi_{12} X_3 X_6 + \Psi_{13} X_3 X_4 + \Psi_{23} X_4 X_6 + \varphi X_4^2 X_6 \end{aligned} \quad (3.36)$$

Выражение (3.36) показывает, что кроме обычной квадратичной формы представления функции  $\varepsilon$  последнее слагаемое имеет суммарную третью степень, а коэффициент  $\varphi$  и остальные 9 искомых коэффициентов  $\beta_i, \gamma_i, \Psi_{ik}$

играют существенную роль при синтезе.

Далее, получив частные производные  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial X_i}$  в виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varepsilon}{\partial X_3} &= \beta_1 + \gamma_1 X_4 + \Psi_{12} X_6 + \Psi_{23} X_4; \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_6} &= \beta_2 + \gamma_2 X_6 + \Psi_{12} X_3 + \Psi_{23} X_4 + \varphi X_4^2; \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_4} &= \beta_3 + \gamma_3 X_4 + \Psi_{13} X_3 + \Psi_{23} X_6 + 2\varphi X_4 X_6\end{aligned}\quad (3.37)$$

и подставив их в уравнение Беллмана (8), можно получить для установившегося состояния при  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0$  систему нелинейных алгебраических уравнений, являющихся сомножителями для разных степеней полученного в правой части уравнения (3.35) полинома. Ниже приводятся эти уравнения, перед каждым из них стоит соответствующий сомножитель степеней от координат  $X_3, X_4, X_6$ . Всего этих уравнений - десять, что равно числу искомых коэффициентов  $\beta_i, \gamma_i, \Psi_{ik}, \varphi$ . При этом часть членов в этих уравнениях из-за их малости в данной работе не учитывалась

$$\begin{aligned}X_3 \rightarrow 1. \quad & -nr_1 - 0,5 \left( \frac{2C_2^2}{T_C T_K^2} \beta_1 \Psi_{12} - \beta_1 \Psi_{12} \frac{2aC_2}{T_C T_K} + \frac{2C_2}{T_C T_K^2} + \Psi_{12} \beta_3 \right) = 0; \\ X_4 \rightarrow 2. \quad & \frac{2aC_2}{T_C T_K} (\beta_1 \Psi_{23} - \beta_1 \beta_2) + \frac{2a}{T_C T_K} (\beta_1 \gamma_3 - \beta_1 \beta_3) + \\ & + \frac{2C_2}{T_C T_K^2} (\beta_3 \Psi_{23} + \beta_2 \gamma_3 - 2\beta_2 \beta_3) + \frac{2\beta_2 C_2^2}{T_C^2 T_K^2} (2\Psi_{23} - \beta_2) = 0; \\ X_3^2 \rightarrow 3. \quad & r_1 - \frac{\Psi_{12}^2 C_2^2}{T_C^2 T_K^2} = 0; \\ X_6^2 \rightarrow 4. \quad & 0,5r_2 - \frac{\gamma_2}{T_C} + a^2 \Psi_{12}^2 - 0,5 \left( \frac{\Psi_{23}^2}{T_K^2} - \frac{\Psi_{12} \gamma_2 2aC_2}{T_C T_K} - \frac{2a\Psi_{12} \Psi_{23}}{T_C T_K} \right) = 0; \\ X_3 X_6 \rightarrow 5. \quad & \Psi_{12} (2\Psi_{23} - 4\beta_2) \frac{C_2^2}{T_C^2 T_K^2} + \beta_1 \Psi_{12} \frac{2aC_2}{T_C T_K} + \frac{1}{T_K^2} (4\beta_3 \varphi + 2\Psi_{23} \gamma_3 - 4\beta_3 \Psi_{23}) +\end{aligned}\quad (3.38)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2C_2}{T_C T_{K^2}} (\gamma_3 \Psi_{12} - 2\Psi_{12} \beta_3) = 0; \\
X_4 X_6 \rightarrow 6. & \frac{1}{T_{K^2}} (4\beta_3 \varphi + 2\Psi_{23} \gamma_3 - 4\beta_2 \Psi_{23}) - \frac{2aC_2}{T_C T_K} (\Psi_{12} \Psi_{23} - \Psi_{12} \beta_2 - \beta_1 \gamma_2) - \\
& - \frac{2a}{T_C T_K} (2\varphi \beta_1 - \beta_1 \Psi_{23} + \Psi_{12} \gamma_3 - \Psi_{12} \beta_3) + \frac{2C_2}{T_C T_{K^2}} (\Psi_{23}^2 + 2\varphi \beta_2 - 2\beta_2 \Psi_{23}) = 0; \\
X_4 X_6^2 \rightarrow 7. & \frac{1}{T_{K^2}} (4\Psi_{23} \varphi - 2\Psi_{23}^2) - \frac{2a}{T_K T_C} (2\varphi \Psi_{12} - \Psi_{12} \Psi_{23}) + \frac{2C_2}{T_C T_{K^2}} (2\varphi \gamma_2 - 2\gamma_2 \Psi_{23}) = 0; \\
X_4^3 \rightarrow 8. & \frac{1}{T_{K^2}} (4\Psi_{23} \varphi - 2\Psi_{23}^2) - \frac{2a}{T_C T_K} (2\varphi \Psi_{12} - \Psi_{12} \Psi_{23}) + \frac{2C_2 \gamma_2}{T_C T_{K^2}} (2\varphi - \Psi_{23}) = 0; \\
X_3 X_6 \rightarrow 9. & \frac{2C_2^2}{T_C^2 T_{K^2}} \Psi_{12} \gamma_2 - \frac{2aC_2}{T_C T_{K^2}} \Psi_{12}^2 + \frac{2C_2^2}{T_C T_{K^2}} \Psi_{12} \Psi_{23} = 0; \\
X_4^2 \rightarrow 10. & a^2 \Psi_{13}^2 - \frac{4C_2^2 \beta_2 \Psi_{23}}{T_C^2 T_{K^2}} + \frac{1}{T_{K^2}} (\beta_3^2 + \gamma_3^2 - 4\beta_3 \gamma_3) - \frac{2aC_2}{T_C T_K} (\Psi_{13} \Psi_{23} - \Psi_{13} - \Psi_{23}) + \\
& + \frac{2C_2}{T_{K^2} T_C} (\Psi_{23} \gamma_3 - \Psi_{23} - \gamma_3) - \frac{2a}{T_K} (\Psi_{13} \gamma_3 - \Psi_{13} - \gamma_3) = 0
\end{aligned}$$

Полученных уравнений системы (3.38) достаточно, чтобы определить искомые коэффициенты функции Беллмана в квадратурах. Из уравнения 3 системы (3.38) найдем коэффициент  $\Psi_{12}$ :

$$\Psi_{12} = \frac{2T_C T_K}{C_2} \sqrt{\Gamma_1} \quad (3.39)$$

Уравнения 4 и 9 системы (3.38) можно привести к упрощенному виду:

$$\begin{aligned}
C_2 \gamma_2 - a T_C T_K \Psi_{12} + \Psi_{23} T_C &= 0; \\
a T_C T_K \Psi_{12} + C_2 \gamma_2 - \Psi_{23} - \frac{T_C}{T_K a \Psi_{12}} \Psi_{23}^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Из первого уравнения определим

$$\Psi_{23} : \Psi_{23} = \frac{2a T_C T_K}{1 + T_C} \Psi_{12} \quad (3.40)$$

Во втором уравнении пренебрежем последним слагаемым, содержащим



$\Psi_{23}^2$ , тогда получим:

$$\gamma_2 = \frac{aT_C T_K (1 - T_C)}{1 + T_C} \quad (3.41)$$

Найдем коэффициент  $\varphi$  из уравнения 7 системы (3.38)

$$\varphi = 0,5 \Psi_{23} \left( 1 - \frac{\Psi_{23} T_C}{a \Psi_{12} T_K} - \frac{2C_2 \gamma_2}{a \Psi_{12} T_K} \right) \quad (3.42)$$

Найдя из уравнения 1 зависимость  $\beta_3$  от  $\beta_1$ , вычислим коэффициент  $\beta_3$  как функцию  $\beta_1$ , что будет использовано ниже

$$\beta_3 = a T_K \beta_1 \frac{n r T_C T_K^2}{C_2 \Psi_{12}} \quad (3.43)$$

Рассмотрим отдельно систему уравнений 5, 8, 10, которые взяты из (3.38), и их можно свести к виду, учитывающему  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_3$ :

$$\begin{aligned} -\beta_1 &= \frac{C_2 \Psi_{23}}{a T_C T_K \varphi} \beta_2 + \frac{\varphi - 2 \Psi_{23}}{a T_C T_K \varphi} \gamma_3 = \frac{C_2 \Psi_{23}^2}{a T_C T_K \varphi}; \\ -\beta_1 (\Psi_{23} + a T_K) + \beta_2 \frac{2 T_C}{a T_K} + \gamma_3 \left( \Psi_{12} - \frac{T_C}{a T_K} \Psi_{23} \right) &= \Psi_{23} \frac{T_K}{2a} - \frac{n R_1 T_C T_K^2}{C_2}; \\ -\beta_1 a T_C T_K \left( 1 - \frac{a T_C T_K}{C_2 \Psi_{12}} \gamma_1 \right) - 2 C_2 \beta_2 \left( 1 - \frac{a T_C T_K}{2 C_2 \Psi_{12}} \gamma_1 \right) + T_C \gamma_3 \left( 1 - \frac{T_C T_K}{C_2 \Psi_{12}} \right) &= \\ &= \Psi_{13} \left( \frac{2a}{T_K} \Psi_{13} - 2a^2 \gamma_1 + \frac{2a C_2}{T_C T_K} \Psi_{12} \right) - C_2 \left( 1 - \frac{a T_C T_K}{C_2 \Psi_{12}} \right) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Представленная группа уравнений (3.44) вместе с формулой (3.42) представляет систему, линейно зависящую от коэффициентов  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_3$ , множители при которых будут полностью известны, если доопределить оставшиеся коэффициенты  $\Psi_{13}$  и  $\gamma_1$ . Уравнение 10 системы (3.38) можно свести к квадратному алгебраическому уравнению относительно  $\Psi_{13}$ :

$$\begin{aligned}
& a^2\Psi_{13}^2 - \frac{2a}{T_C T_K} [C_2(\Psi_{23}-1) + T_C(\gamma_3-1)]\Psi_{13} + \\
& + \frac{2a}{T_C T_K} \left[ C_2\Psi_{23} + \frac{\Psi_{23}}{aT_K}(\gamma_3-1) \right] + \frac{2a}{T_K}\gamma_3 = 0
\end{aligned} \tag{3.45}$$

решение которого дает ответ в виде следующей приближенной оценки:

$$\Psi_{13} = \frac{C_2\Psi_{23}(1 + \frac{\gamma_3-1}{aT_K}) + T_C\gamma_3}{C_2(\Psi_{23}-1) + T_C(\gamma_3-1)} \tag{3.46}$$

Учитывая последнее неучтенное уравнение 6 и решая систему уравнений (3.44), получены следующие недостающие оценки коэффициентов:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{nr_1 T_C T_K}{2a C_2 \Psi_{12}} - \frac{\beta_2}{C_2 a T_C T_K}; \quad \beta_2 = \frac{C_2 \Psi_{23}^2}{C_2 \Psi_{23} \frac{8\varphi}{C_2}}; \quad \beta_3 = -\frac{\Psi_{23}^2}{T_C (C_2 \Psi_{23} + \frac{6\varphi}{C_2})}; \\
\gamma_1 &= \frac{(C_2 \Psi_{23} + \frac{2a}{T_K} \Psi_{13}^2 - 2C_2 \beta_2) C_2 \Psi_{12}}{a T_C T_K (C_2 \Psi_{23} - C_2 \beta_2)}; \quad \gamma_3 = \frac{8\varphi \Psi_{23}^2}{T_C (C_2 \Psi_{23} \frac{8\varphi}{C_2}) (\varphi - 2\Psi_{23})}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Полученных оценок коэффициентов достаточно, чтобы выразить искомое оптимальное управление  $U_3$ , которое из условия минимума правой части уравнения Беллмана имеет вид

$$U_3 = a \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_3} - \frac{C_2(1-X_4)}{T_C T_K} \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_6} - \frac{(1-X_4)}{T_K} \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_4} \tag{3.48}$$

где частные производные  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial X_i}$  представлены в виде формул (3.37), а само

уравнение нуждается в упрощении.

### 3.3.2 Представление оптимального управления в квазилинейной форме и пояснение её физического смысла

Из формул (3.37) и (3.48) очевидно, что управление  $U_3$  есть степенной полином второго порядка, содержащий множество членов. Целесообразно

упростить полученное решение, представив его в квазилинейной форме следующего вида:

$$U_3 = (A_0 + A_1 X_3 + A_2 X_6 + A_3 X_4)(1 - X_4) \quad (3.49)$$

Тогда получаются следующие формулы расчета четырёх коэффициентов  $A_i$ , которые можно назвать передаточными числами регулятора:

$$\begin{aligned} A_0 &= a\beta_1 - \frac{C_2\beta_2}{T_C T_K} + \frac{\beta_3}{T_K}; \\ A_1 &= \gamma_1 a - \frac{C_2\Psi_{12}}{T_C T_K} - \frac{\Psi_{13}}{T_K}; \\ A_2 &= a \frac{\Psi_{12}}{2} - \frac{C_2\gamma_2}{T_C T_K} + \frac{\varphi - \Psi_{13}}{T_K}; \\ A_3 &= a\beta_1 - \frac{C_2\Psi_{23}}{T_C T_K} - \frac{\gamma_3}{T_K} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Чтобы раскрыть физический смысл полученных передаточных чисел и найденного управления в целом, рассмотрим следующий численный пример:

$$\text{пусть } \begin{cases} a=4; r_1=0,25; r_2=0,125; \\ T_C=0,5; T_K=4; \\ C_1=0,2; C_2=0,8; \\ n=10; m=10; M=0,015 \end{cases}$$

тогда найденные коэффициенты функции Беллмана равны:

$$\begin{cases} \beta_1=0,6; \beta_2=0,22; \beta_3=-21; \\ \gamma_1=40; \gamma_2=8,3; \gamma_3=-1,2 \\ \Psi_{12}=4; \Psi_{13}=0,83; \Psi_{23}=40; \\ \varphi=11,1. \end{cases}$$

При этих результатах можно в заключение оценить передаточные числа  $A_0 = -2,9$ ;  $A_1 = 2$ ;  $A_2 = -3,2$ ;  $A_3 = -7,1$ .

Полученные численные значения передаточных чисел позволяют трактовать оптимальное управление  $U_3$  следующим образом.

Во-первых, при низком первоначальном качестве и спросе на новую авиационную технику, т.е. при  $X_6 \rightarrow 0$ ;  $X_4 \rightarrow 0$  оптимальное управление  $U_3$  равно:

$$U_3 = A_0 + A_1 X_3$$

Но при  $A_0 < 0$ , в силу неотрицательности управления  $U_3$ , средства в конструкторские разработки можно вкладывать лишь после накопления в банке существенной прибыли, а это возможно, если:

$$X_3 > -\frac{A_0}{A_1}$$

В приведенном примере значение  $X_3 > 5,8$ . Поэтому, в начале работы предприятия нужно все ресурсы вложить в производство и сбыт существующей техники. По преодолении указанного порога, можно приступать к проектированию новой авиационной техники.

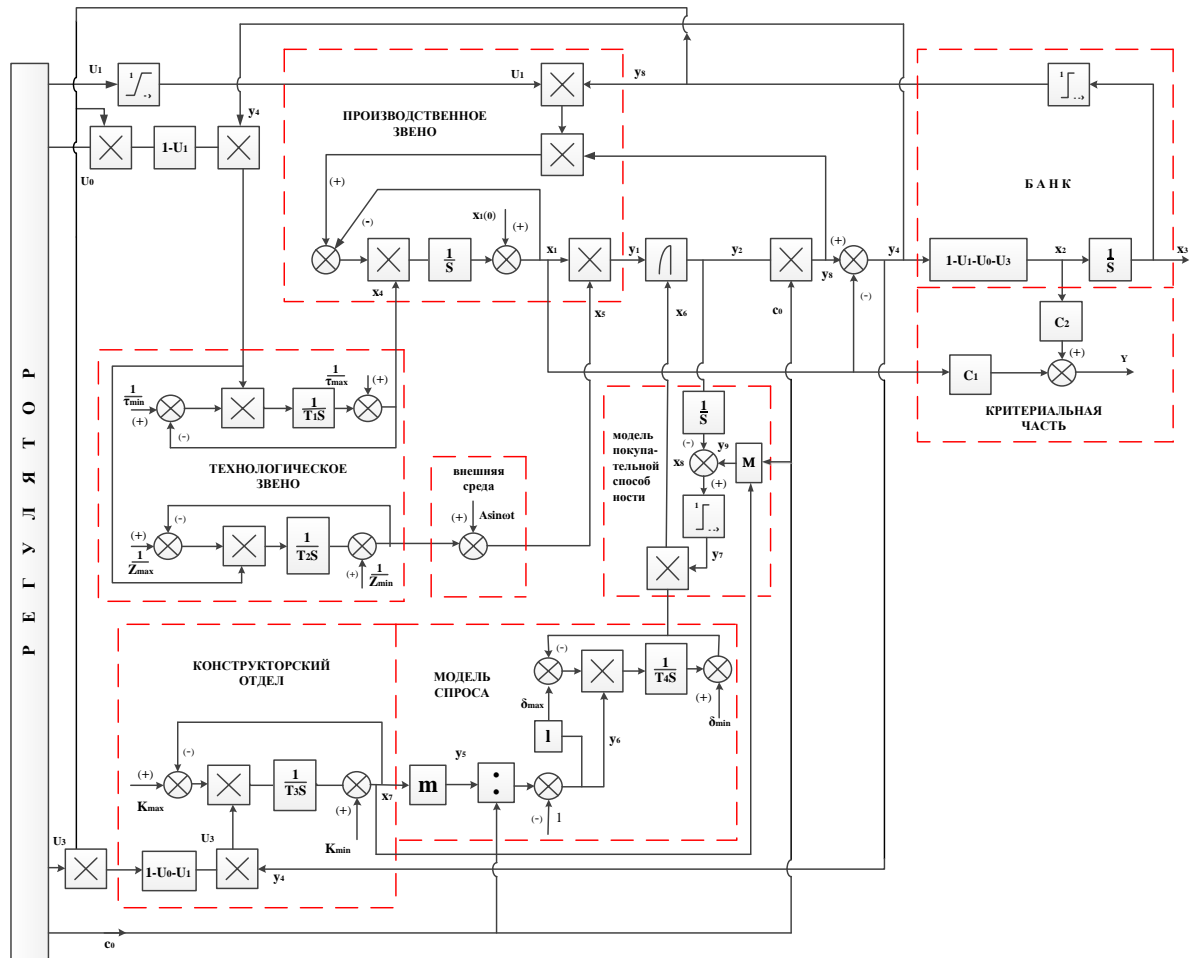
Во-вторых, передаточные числа  $A_2$  и  $A_3$  отрицательны. Это означает, что чем ниже качество  $X_4$  и спрос  $X_6$  на существующую продукцию, тем большую долю дохода  $U_3$  нужно вложить в ОКР. С ростом  $X_6$  и  $X_4$  эта доля будет постепенно падать.

В-третьих, общий множитель  $(1-X_4)$  также указывает на увеличение средств для проведения ОКР, если спрос  $X_6$  на производимую продукцию невелик или постепенно падает.

Приведенные соображения подтверждают, что полученный результат оптимального синтеза соответствует физическому смыслу решаемой задачи.

### **3.4 Первые результаты моделирования на ЭВМ системы управления, содержащей одно производственное и одно конструкторское звено**

Полученная математическая модель спроса вместе с динамической моделью конструкторского звена, сформированной, согласно пункту 3 постановки задачи, в виде апериодического звена, позволила составить в среде Matlab общую схему моделирования, представленную на рис. 3.6 [6].



**Рис.3.6. Общая схема моделирования производственного и конструкторского звена предприятия с переменной рентабельностью**

где

$X_1$  - стоимость произведенной продукции/мес.;

$X_5$  - величина обратная меняющимся затратам на изготовление единицы продукции – ( $X_5 = 1/Z$ );

$X_7$  - достигнутый показатель качества (в свертке) продукции;

$X_8$  - общее число продольной продукции;

$X_9$  - потенциальной спрос/мес.;

$U_1$  - доля прибыли после затрат на окупание производства, идущая на него расширение;

$U_3$  - доля прибыли на повышение качества продукции;

$C_0$  - назначаемая цена;

$\tau$  - время оборота капитала;

$K$  - качество товара;

$C_1, C_2$  - коэффициент свертки;

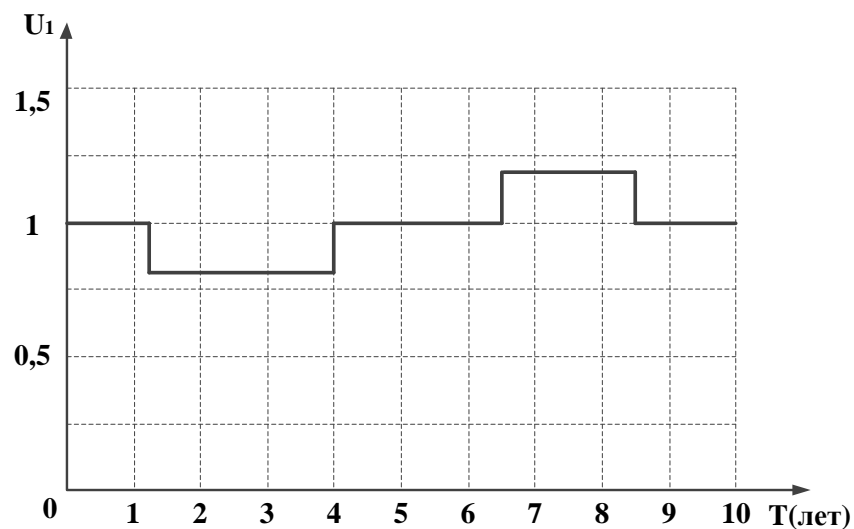
$m$  - функция зависимости ожидаемого дохода товара от него качества;

$M$  - функция числа покупателей от назначенной цены.

Считается, что предприятие функционирует в переменных условиях, включающих благоприятный и неблагоприятный периоды. Это обстоятельство учитывается с помощью переменной рентабельности

$$\rho(t) = \rho_0 + A \sin \frac{t}{T} \quad (3.51)$$

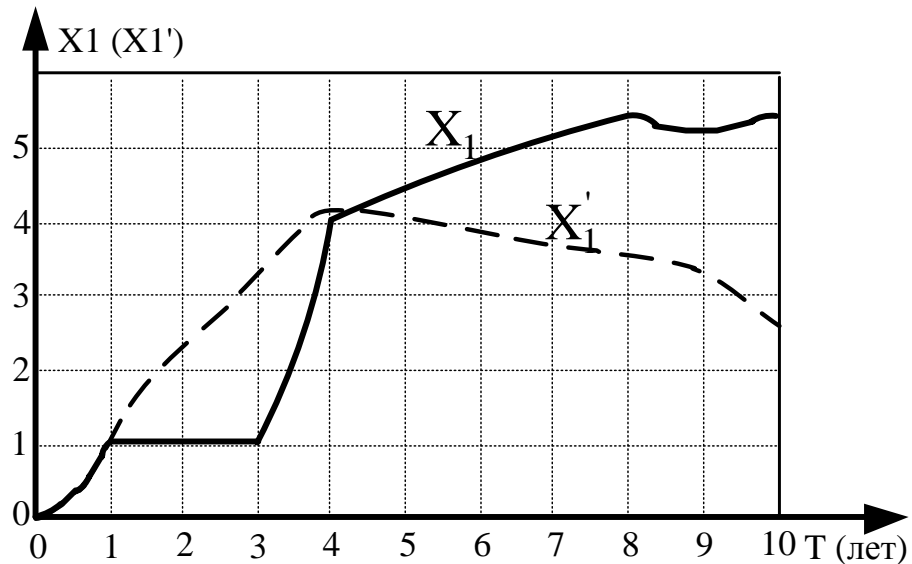
Считается также, что управление  $U_1$  производственным звеном является кусочно-постоянным, вследствие переменных условий (3.51), как показано на рис 3.6 и было получено в [18,19]



**Рис. 3.7. Кусочно-постоянное управление производственным звеном**

Интересующее управление конструкторским звеном в данной работе пока взято постоянным. Моделирование должно ответить на вопрос - будет ли более эффективно вкладывать часть получаемого дохода при  $U_3 \neq 0$  в повышение качества новой продукции, или лучше этого не делать, т.е. согласиться, что  $U_3 = 0$ .

Первые результаты моделирования показали, что при определенных, но вполне реальных условиях предприятие будет более устойчивым в неблагоприятный период, если это качество продукции непрерывно и заблаговременно повышать в удобное время. Это можно проиллюстрировать графиками зависимости критерия  $Y$  от времени, показанным на рис.3.8



**Рис. 3.8. Сравнительная оценка эффективности предприятия при производстве с конструкторским звеном и без конструкторского звена**

$X_1$  - уровень производства с конструкторским звеном;

$X_1'$  - уровень производства без конструкторского звена.

Графики на рис.3.8 убедительно показывают, что несмотря на первоначальное отставание в расширении производства, подготовка конструкторским звеном к выпуску новой продукции и последующий её выпуск при повышенном спросе позволяет к концу планируемого периода повысить темпы производства не менее чем на 30-50%.

### 3.5 Выводы по главе 3

Проведенные исследования позволяют сделать следующие выводы.

1. Сформулирована математическая постановка задачи оптимального управления конструкторского звена предприятия и найдено её решение при создании новой авиационной техники в кризисных ситуациях;
2. Показано, что доля отводимого на ОКР дохода в квазилинейной форме зависит от текущей прибыли и снижается при повышении качества и спроса на новую продукцию;
3. Передаточные числа субоптимального регулятора определяются с помощью простых формул в квадратурах, однако для их уточнения целесообразно численное решение системы нелинейных алгебраических уравнений;
4. Первые результаты моделирования на ЭВМ синтезированной системы управления подтвердили эффективность оптимального планирования проектно-конструкторских работ с учетом динамики производства, спроса и темпа продаж авиационной техники.



## ГЛАВА IV. ИССЛЕДОВАНИЕ МНОГОЗВЕННОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫМИ И КОНСТРУКТОРСКИМИ ЗВЕНЬЯМИ ПРЕДПРИЯТИЯ В КРИЗИСНЫХ СИТУАЦИЯХ.

### 4.1 Формирование способа управления несколькими конструкторскими отделами при одном производственном звене

Как показали результаты предварительного моделирования, при повышении в каждом отделе ожидаемого качества  $\Delta K_i$  создаваемой продукции и при снижении ожидаемого времени  $T_i$  изменения этого качества, доля средств должна быть увеличена. В связи с этим возникла гипотеза учитывать прежде всего в каждом отделе скорость повышения качества, равную  $\frac{\Delta K_i}{T_i}$ , от которой зависит доля  $\delta_i$  располагаемого объёма средств, равного  $U_3$ , вследствие чего может быть предложена следующая линейная модель

$$\delta_i = \frac{\frac{\Delta K_i}{T_i}}{\sum_{i=1}^m \frac{\Delta K_i}{T_i}} \quad (4.1)$$

где  $m$  - число конструкторских отделов;  $\Delta K_i$  - ожидаемое изменение качества выпускаемой продукции в  $i$ -том отделе;  $T_i$  - время достижения нужного качества в этом отделе.

Результаты моделирования работы двух параллельно действующих конструкторских отделов представлены в таблице 4.1

$U_3=0.02$ $a=0.7$ $b=0.6$ $\frac{a}{a+b}=0.5$	$\delta$	<b>КРИТЕРИЙ</b>	$U_3=0.02$ $a=0.6$ $b=0.6$ $\frac{a}{a+b}=0.5$	$\delta$	<b>КРИТЕРИЙ</b>
	0	30.20		0	30.20
	0.1	30.25		0.1	30.21
	0.3	30.33		0.3	30.22
	0.5	30.39		<b>0.5</b>	<b>30.22</b>
	0.6	30.42		0.6	30.21
	0.7	30.44		0.7	30.20
	<b>0.9</b>	<b>30.47</b>		0.9	30.16
1	30.47	1	30.13		
$U_3=0.02$ $a=0.7$ $b=0.65$ $\frac{a}{a+b}=0.6$	$\delta$	<b>КРИТЕРИЙ</b>	$U_3=0.02$ $a=0.6$ $b=0.55$ $\frac{a}{a+b}=0.5$	$\delta$	<b>КРИТЕРИЙ</b>
	0	30.37		0	30.02
	0.1	30.40		0.1	30.05
	0.3	30.45		0.3	30.10
	0.5	30.48		0.5	30.13
	<b>0.6</b>	<b>30.49</b>		<b>0.6</b>	<b>30.14</b>
	0.7	30.49		0.7	30.14
	0.9	30.48		0.9	30.14
1	30.47	1	30.13		

**Таблица 4.1. Результаты моделирования двух конструкторских отделов**

Результаты моделирования [6] проводились при следующих условиях - работают два конструкторских отдела, т.е.  $m=2$ . Общая доля средств, отводимых на конструкторские разработки, составляет 2% от получаемого при сбыте продукции дохода, что соответствует  $U_3=0.02$ ; времена  $T_1=0,5$ ;  $T_2=1$ . Это значит, что первое звено создает новое качество два раза быстрее, чем второе звено. При принятых  $m=2$  обозначениях в виде  $\frac{\Delta K_1}{T_1}=a$  и  $\frac{\Delta K_2}{T_2}=b$  можно получить простую формулу, проверенную с помощью моделирования на ЭВМ, что подтверждается таблицей 4.1

$$\delta_1 = \frac{a}{a+b} \quad (4.2)$$

Чтобы полностью убедиться в этом, зададимся следующей целью моделирования: меняя возможные на практике значения  $a$  и  $b$ , но так чтобы  $a+b=1$ , найдем экспериментально такие значения  $\delta_1$  и  $\delta_2=1-\delta_1$ , при которых главный критерий эффективности  $J$  окажется максимальным. Затем проверим, соответствуют ли полученные результаты высказанной гипотезе (4.1).

Результаты моделирования показаны в трёх таблицах 4.1а, 4.1б, 4.1в. В них представлены результаты, которые дают разные значения критерия эффективности, и выделенные среди них цифры - достижение наибольшего значения  $J$ .

$U_3$	$\delta$	<i><b>КРИТЕРИЙ</b></i>	$U_3$	$\delta$	<i><b>КРИТЕРИЙ</b></i>	$U_3$	$\delta$	<i><b>КРИТЕРИЙ</b></i>
0.02	0	30.37	0.02	0	30.47	0.02	0	30.37
	0.1	30.42		0.1	30.49		0.1	30.40
	0.3	30.45		0.3	30.49		0.3	30.45
	0.5	30.47		<b>0.5</b>	<b>30.49</b>		0.5	30.48
	0.6	30.48		0.6	30.49		<b>0.6</b>	<b>30.49</b>
	<b>0.7</b>	<b>30.49</b>		0.7	30.47		0.7	30.49
	0.9	30.49		0.9	30.43		0.9	30.48
	1	30.47		1	30.37		1	30.47
<i>5а</i>			<i>5б</i>			<i>5в</i>		

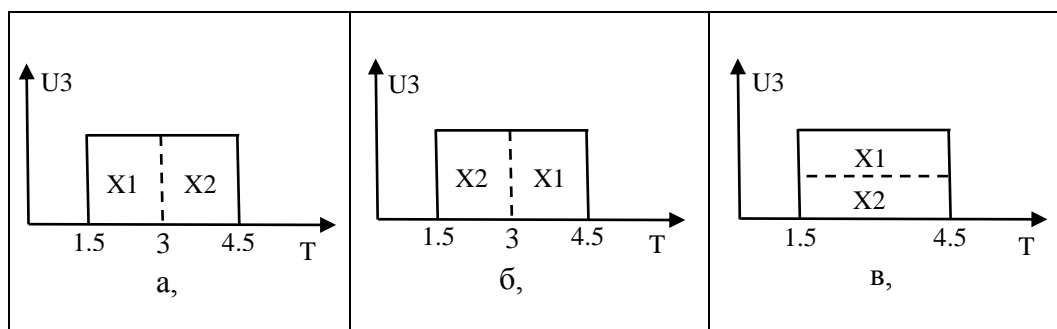
**Таблица 4.2. Результаты моделирования распределения средств между двумя конструкторскими отделами**

Каждая из этих трех таблиц соответствует трем возможным случаям распределения средств, как показано на рис.4.1:

- 1-ый случай: все средства вначале отдаются первому отделу, а потом - второму;

- 2-ой случай: все средства вначале отдаются второму отделу, а потом - первому;

- 3-ий случай: эти средства одновременно распределяются между отделами в определенном отношении  $\delta$ , и они работают одновременно.



**Рис.4.1** Варианты распределения средств между двумя конструкторскими отделами

При условии, что суммы всех средств, отводимых в каждом варианте на конструкторские работы одинаковы, в результате моделирования оказалось:

1. Лучшим вариантом является решение отдать вначале все средства отделу, у которого отношение  $\frac{\Delta K_i}{T_i}$  максимально, то есть максимальна скорость

повышения качества, что сразу повышает спрос на выпускаемую продукцию;

2. Разница в трех случаях порядка использования распределения средств незначительна;

3. Полученные в результате моделирования оптимальные значения доли  $\delta_1$  и  $\delta_2$  средств хорошо согласуются с выдвинутой гипотезой (4.1), согласно

$$\delta_i = \frac{\frac{\Delta K_i}{T_i}}{\sum_{i=1}^m \frac{\Delta K_i}{T_i}}$$

которой эти доли линейно зависят от ожидаемой скорости  $\frac{\Delta K_i}{T_i}$  повышения

качества вновь создаваемой продукции в каждом конструкторском отделе.

## 4.2 Формирование способа управления одним конструкторским звеном в целом, состоящим из нескольких отделов

Из высказанных выше соображений, говорящих о том, что чем выше скорость повышения качества, тем больше нужно для этого предоставить средств, возьмем в качестве первой рабочей гипотезы также некоторую линейную модель

$$U_3 = L_1 \frac{\sum \Delta K_i}{\sum T_i} \quad (4.3)$$

или при  $m=2$  с учетом принятых обозначений имеем

$$U_3 = L_1 (a+b) \quad (4.4)$$

В качестве второй гипотезы можно представить другую линейную модель, используя зависимость от отношения общих сумм  $\sum \Delta K_i$  и  $\sum T_i$

$$U_3 = L_2 \left( \sum_{i=1}^n \frac{\Delta K_i}{T_i} \right) \quad (4.5)$$

В качестве третьей гипотезы можно представить, что при распределении средств учитывается не только доля, но и время, отведенное на работу при использовании этой доли, что определяется произведением  $\Delta_i = \delta_i T_i$ . Отсюда получим формулу

$$U_3 = L_3 \frac{\sum_{i=1}^m \left( \frac{\Delta K_i}{T_i} \right)^2}{\sum_{i=1}^m \left( \frac{\Delta K_i}{T_i} \right)} \quad (4.6)$$

Цель моделирования в данном случае состояла в выборе одной из трех моделей, как наиболее подходящей

Результаты моделирования при одновременном работе двух отделов представлены в таблице 4.3

<b>КРИТЕРИЙ</b>					
$\delta/U_3$	$U_3 = 0.01$	$U_3 = 0.02$	$U_3 = 0.03$	$U_3 = 0.04$	$U_3 = 0.05$
$\delta=0$	30.05	30.37	30.29	29.77	29.03
$\delta=0.1$	30.06	30.40	30.31	29.80	29.05
$\delta=0.3$	30.09	30.45	30.35	29.83	29.07
$\delta=0.5$	30.11	30.48	30.37	29.85	29.08
$\delta=0.6$	30.11	<b>30.49</b>	30.37	29.84	29.07
$\delta=0.7$	30.12	30.49	30.37	29.84	29.07
$\delta=0.9$	30.13	30.48	30.35	29.81	29.05
$\delta=1$	30.13	30.47	30.34	29.79	29.03

**Таблица 4.3 Результаты моделирования при одновременном работе двух отделов**

При этом в отличие от первых результатов общие доли средств  $U_3$  были равны не одному значению  $U_3 = 0.02$ , а разным значениям  $U_3 = 0.01 \div 0.05$ .

На основании этих результатов были вначале получены для разных условий оптимальные значения  $U_3$ , а с их помощью были проведены оценки правильности трех моделей с помощью вычисления трех коэффициентов для трех моделей.

В частности при  $U_3 = 0.01$ ;  $U_3 = 0.02$  и  $U_3 = 0.03$  получены следующие оценки этих коэффициентов, а по ним средние значения  $L_{cp}$  этих коэффициентов и средние отклонения  $|\Delta_i|$ , которые равны:

$L_{1a}=0.017$	$L_{2a}=0.006$	$L_{3a}=0.008$
$L_{1b}=0.040$	$L_{2b}=0.016$	$L_{3b}=0.024$
$L_{1c}=0.010$	$L_{2c}=0.004$	$L_{3c}=0.003$
$L_{1cp}=0.022$	$L_{2cp}=0.009$	$L_{3cp}=0.012$
$\frac{ \Delta_1 _{cp}}{L_{1cp}}=0.60$	$\frac{ \Delta_2 _{cp}}{L_{2cp}}=0.56$	$\frac{ \Delta_3 _{cp}}{L_{3cp}}=0.70$

Видно, что лучшей является линейная модель по формуле (4.5) согласно второму столбцу.

Учитывая участие в сбыте продукции как процесса повышения качества, так и процесса спроса, который определяется двумя коэффициентами  $C_1$  и  $C_2$  ( $C_1 \ll C_2$ ), можно получить оценку коэффициента  $L_1=M_1-M_2C_2$  и соответствующего уравнения  $U_3$  в следующем общем виде.

$$U_3=(M_1-M_2C_2)\sum_{i=1}^m \frac{\Delta K_i}{T_i} \quad (4.7)$$

Эту формулу можно объяснить так. Чем выше скорость  $C_2$  повышения спроса при повышении качества продукции, тем меньше необходимо средств на конструкторские работы (то-есть тем меньше  $U_3$ ).

В конкретном случае моделирования работы предприятия с одним производственным и двумя отделами конструкторского звена оказалось, что  $M_0=0.015$ ;  $M_1=0.01$  при  $C_1=0.1$ ;  $C_2=0.45$ , а оптимальное значение  $U_3$  зависит от показателей конструкторских работ по формуле

$$U_3=0.01(a+b) \quad (4.8)$$

в следующих рассмотренных условиях :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum \Delta K_i=1 ; 1.5 \leq \frac{\Delta K_1}{T_1} \leq 3 ; 0.5 \leq \frac{\Delta K_2}{T_2} \leq 1; \\ 2 \leq \sum_{i=1}^m \frac{\Delta K_i}{T_i} \leq 3 ; 0.4 \leq C_2 \leq 0.8 ; T_2 \leq 3 \text{ лет } T_1 \leq 0.5T_2 \end{array} \right.$$

### **4.3 Обобщение предложенного подхода на многозвенную систему управления производством в условиях конкуренции**

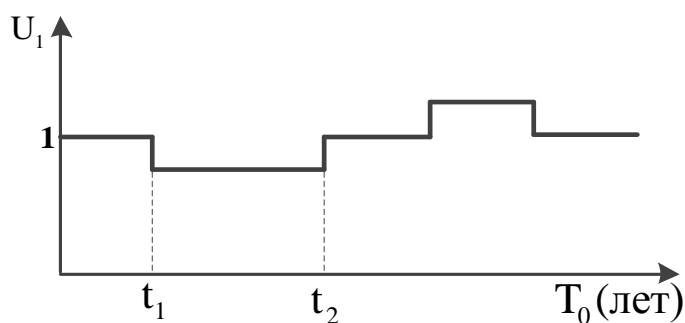
В данном разделе рассматриваются следующие подлежащие сравнению варианты работы предприятия [6]:

1. Работает одно производственное звено №1 без использования конструкторских разработок;
2. Работает одно производственное звено №2, постепенно переходящее на выпуск новой продукции, спроектированной одним конструкторским звеном;
3. Работают два производственного звена, из которых только одно звено использует конструкторские разработки и конкуренции между ними нет;
4. Оба производственных звена используют эти разработки, но по разному - сначала перестраивается одно звено, а затем через некоторое время - второе звено, когда темп продаж новой продукции в первом звене начинает превышать темп продаж старой продукции во втором звене из за разницы в спросе. При этом действует одно конструкторское звено, а детальное поведение отделов внутри конструкторских звеньев уже не рассматривается.

Целью моделирования является стремление показать, насколько последний случай выгоднее всех остальных. Эта выгода оценивается с помощью критерия эффективности  $J$ .

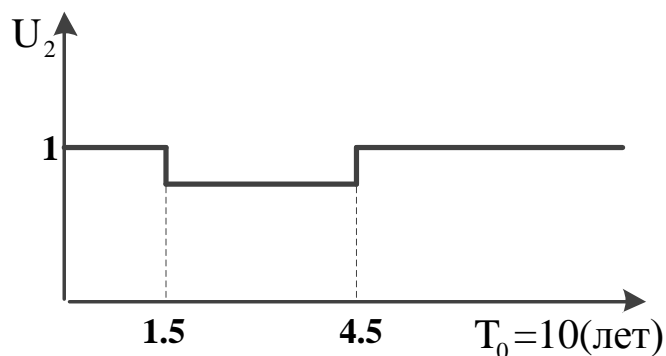
Моделирование проводилось последовательно перечисленным случаям, при этом в первом случае работы без конструкторского звена сигнал управления  $U_1$  производственным звеном при выпуске продукции имеет вид, полученный в [1] и показанный на рис. 4.2





**Рис. 4.2. Сигнал управления одним производственным звеном при  $T_0=10$ ;  $t_1=1.5$ ;  $t_2=4.5$  и выпуске продукции одного качества без использования конструкторского звена**

При использовании конструкторского звена экспериментально подобранный вариант оптимального управления  $U_2$  производственным звеном имеет другой вид, как показано на рис. 4.3

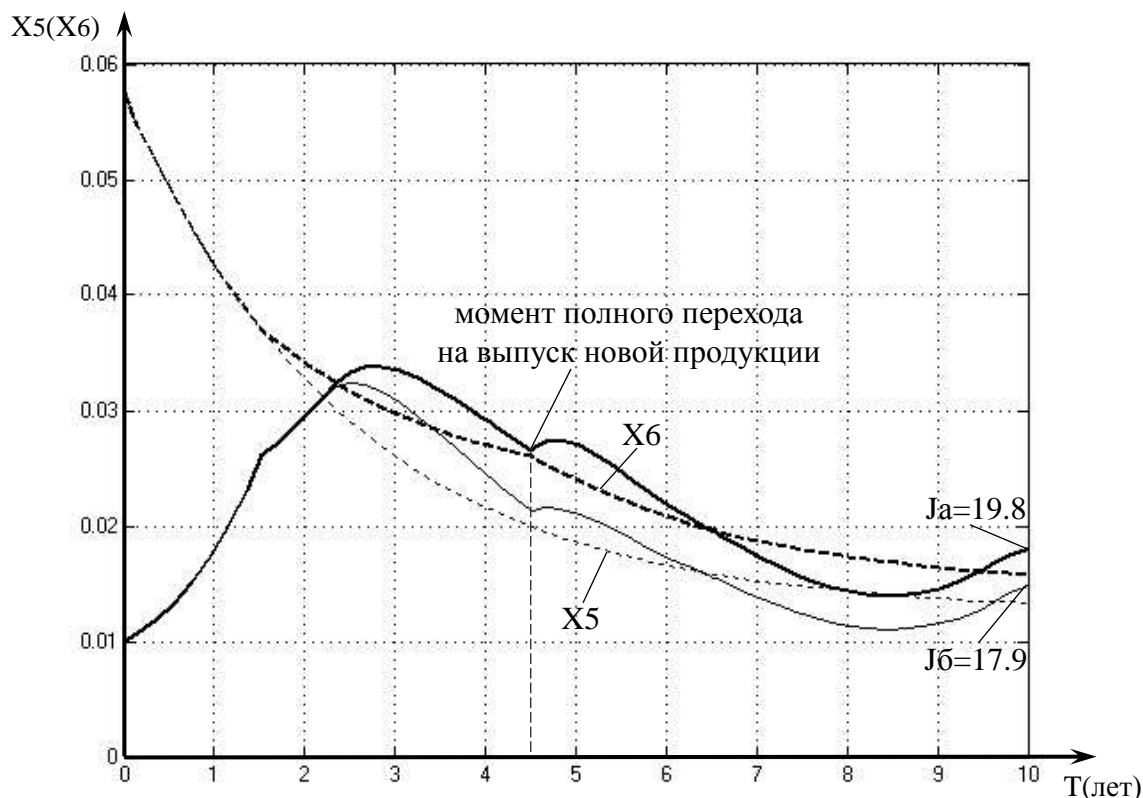


**Рис. 4.3 Сигнал управления одним производственным звеном при участии одного конструкторского звена**

Модель изменения качества продукция в конструкторском звене учитывает суммарное улучшение качества  $\Delta K$ , близкое к единице, а общее время проведения конструкторских разработок  $t_2 - t_1$  составляет 3 года. Модель спроса имеет следующие показатели - коэффициент постоянного спроса  $C_1=0.05$ , коэффициент зависимости спроса от скорости улучшения качества  $C_2=0.45$ .

В процессе моделирования получились следующие результаты.

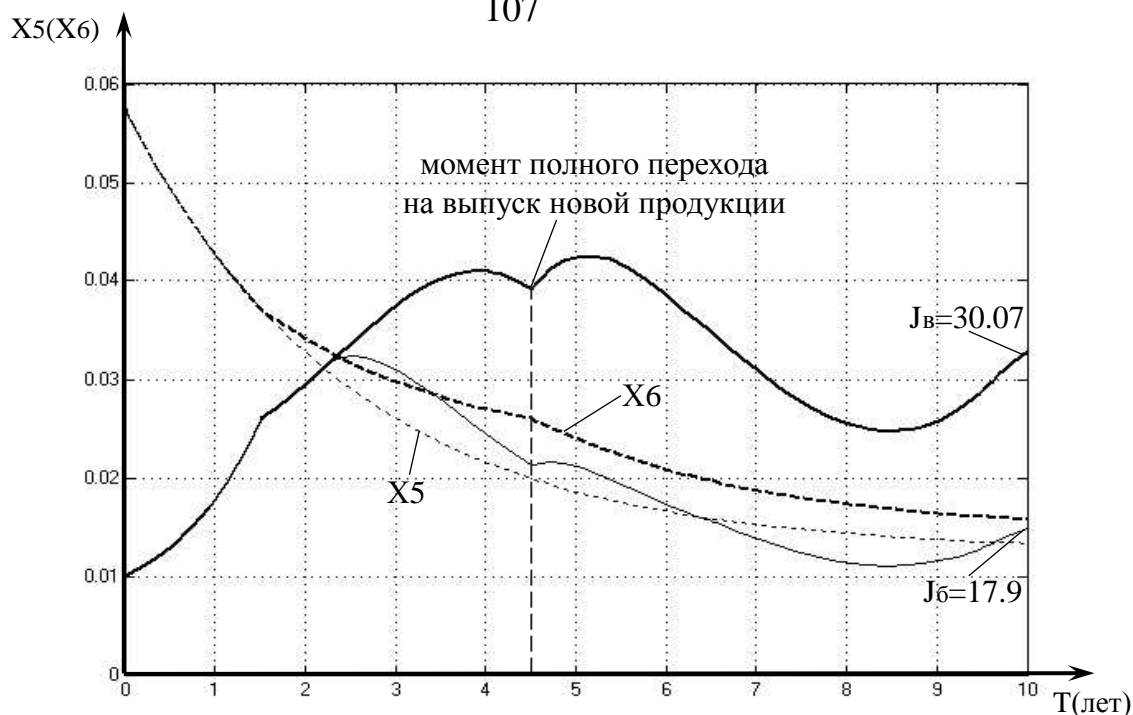
Оказалось, что эффективность работы предприятия по мере увеличения номера варианта растет, что показано в частности на рис. 4.4 и рис. 4.5



**Рис. 4.4 Показатели эффективности одного производственного звена при  $U_3=0.02$  ( $X_6$  - спрос производственного звена при выпуске новой продукции,  $X_5$  - спрос производственного звена при выпуске старой продукции)**

На рис. 4.4 видно, что если предприятие использует конструкторские разработки для одного производственного звена и начинает постепенно выпускать новую продукцию с растущим спросом, то производственная мощность  $X_1$  вырастет на 13% ( $X_{1a}(T_0) = 0.018$ ;  $X_{1б}(T_0) = 0.015$ ), а эффективность  $J$  - на 10% ( $J_a=19.8$ ;  $J_б=17.9$ ).

Показатели действий двух производственных звеньев показаны на рис. 4.5



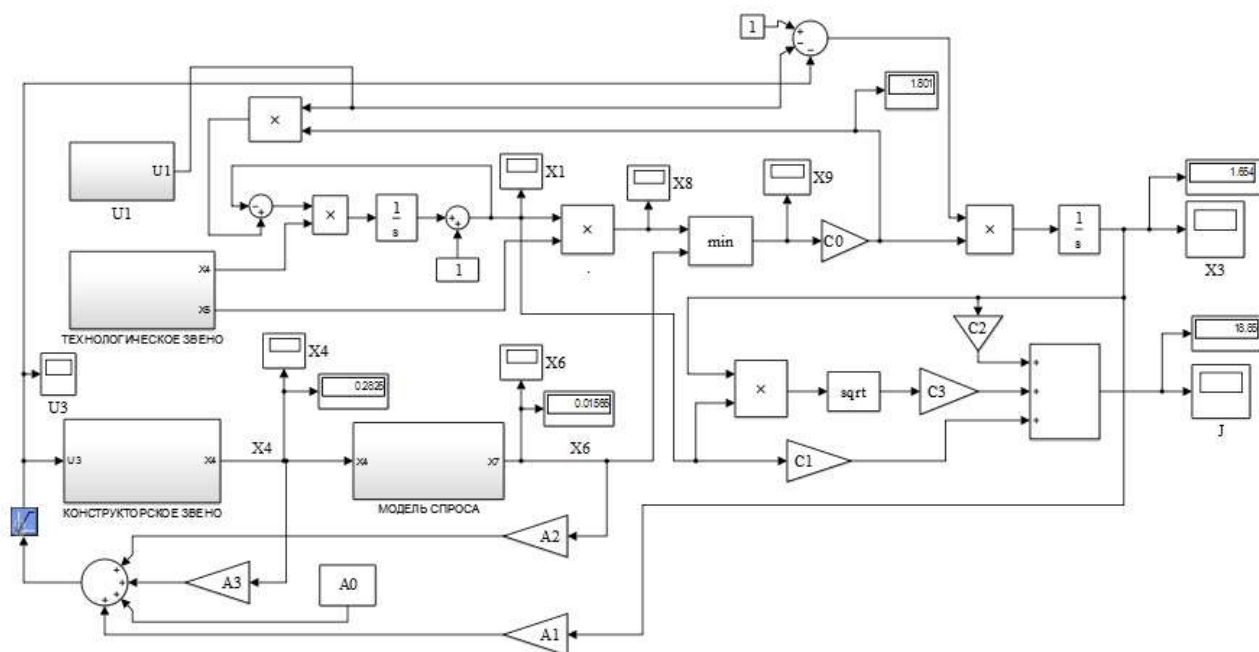
**Рис. 4.5 Показатели эффективности двух производственных звеньев, использующих конструкторские разработки**

( $X_6$  - спрос двух производственных звеньев при выпуске новой продукции,  
 $X_5$  - спрос производственного звена при выпуске старой продукции)

Максимальная эффективность достигается в случае, когда работают два производственных звена, при этом первое звено сразу использует новые разработки, постепенно внедряя в производство новые отдельные компоненты, а второе звено ждет, когда спрос на новую продукцию и темп её продаж в первом звене станет выше, чем темп продаж своей старой продукции. После этого второе звено выпускает ту же продукцию, что первое. Оказалось, что эффективность возрастает на 100% ( $J_6 = 30,07$  ;  $J_6 = 17,9$ ). При этом второе звено начинает выпускать новую продукцию не сразу, а через 5 лет, когда спрос старой продукции уже неизбежно падает, а спрос на новую продукции растет.

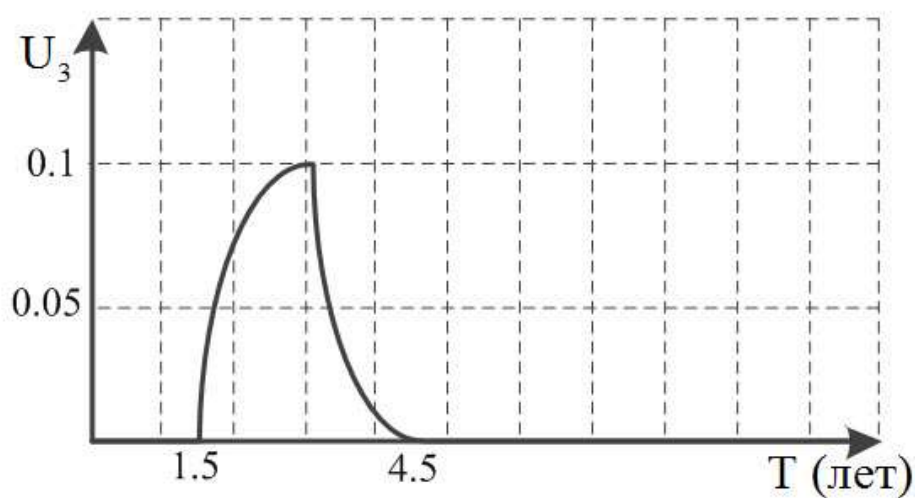
Таким образом, осуществляя постепенное степенное повышение качества продукции, удастся обеспечить неизменный растущий спрос, а значит неизменный растущий темп продаж этой продукции, что гарантирует устойчивое сохранение производства, в том числе кризисных ситуациях.

Полученные результаты были найдены при использовании схемы моделирования в среде Matlab, показанной на рис.4.6



**Рис.4.6. Моделирование системы управления производства**

Также с помощью этой была найдена аппроксимация квазилинейного управления  $U_3$  в виде кусочно-постоянного сигнала. В частности, при  $C_2 = 0.3$  и последующем вычислении необходимых передаточных чисел  $A_0 = -1.25$ ;  $A_1 = 2$ ;  $A_2 = -3.2$ ;  $A_3 = -7.1$  оказалось, что сигнал управления  $U_3$  лежит в интервале  $[0, 1-U_1]$  и претерпевает незначительные изменения при  $U_1 = 0.8$ , как показано на рис.4.7



**Рис. 4.7. Изменение сигнала управления во времени**

Поэтому последующие экспериментальные исследования проводились при  $U_3 = \text{const}$

#### 4.4 Выводы по главе 4

На основании проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Анализ совершенствования авиационной техники показал, что скорость повышения качества отдельных её компонент неодинакова, и наибольший рост некоторых из них достигается за малое время, а длительное улучшение других обеспечивается при малой скорости;

2. Для распределения средств между конструкторскими звеньями получена линейная модель (6), согласно которой доля этих средств пропорциональна ожидаемой скорости повышения качества в каждом звене;

3. Для определения доли средств, отводимых в целом на конструкторские разработки, найдена формула (12), учитывающая ожидаемую суммарную скорость повышения качества авиационной техники и повышение скорости её спроса;

4. При анализе деятельности двух производственных звеньев предприятия установлено, что максимальная эффективность достигается в условиях конкуренции, когда сначала первое звено постепенно внедряет отдельные новые компоненты, а второе звено полностью переходит на новую продукцию после того, как темп её продаж станет выше старой.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

На основании проведённых исследований можно сделать следующие выводы

1. Предложена многомерная динамическая модель конструкторского звена предприятия, учитывающая при экспоненциальном повышении качества продукции мультипликативное влияние доли средств, отводимых на конструкторские разработки новой техники.

2. Сформулирована новая постановка и решена задача совместного управления производственным и конструкторским звеном и показано, что управление конструкторским звеном в квазилинейной форме зависит от текущей прибыли и снижается при повышенном спросе на новую продукцию.

3. Предложена нелинейная свертка технических показателей качества продукции в виде суммы линейной и мультипликативной форм, что позволяет получить сбалансированную оценку эффективности предприятия. С помощью этой оценки доказано, что распределение средств между отделами конструкторского звена пропорционально ожидаемой скорости повышения качества в каждом из них.

4. Показано, что максимальная эффективность достигается, когда два производственных звена предприятия работают в условиях конкуренции, при этом новая продукция выпускает одним звеном, а второе звено ждет, пока темп её продаж станет ниже первого звена. Тогда оба звена переходят на новую продукцию, что обеспечивает выигрыш в 1.5 - 2 раза.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Царьков В.А. Экономическая динамика и эффективность капитальных вложений. М., Изд. дом «Лексикон», 1997 г., 103 с.
2. Царьков В.А. Динамические модели экономической (теория и практика экономической динамики). М., Изд. «Экономика», 2007 г., 213 с.
3. Лебедев Г.Н., Аунг Мьё Тху, Дао Нгок Тхай «Оценка условий устойчивого сохранения эффективности промышленного производства авиационной техники в кризисных ситуациях за счет совершенствования технологии её изготовления». М., МАИ «Вестник МАИ», 2012 г., стр. 13-19.
4. Лебедев Г. Н., Дао Нгок Тхай «Задача оптимального управления производством в кризисных ситуациях с учетом совершенствования создаваемой новой авиационной техники». М., «Труды МАИ», 2013 г., №63, 9 с.
5. Лебедев Г. Н., Дао Нгок Тхай, Михайлин Д. А. «Синтез оптимального управления конструкторским звеном предприятия при создании новой авиационной техники в кризисных ситуациях». М., «Авиакосмическое приборостроение», 2013 г., №10, стр. 22-30.
6. Лебедев Г. Н., Дао Нгок Тхай «Результаты моделирования многозвенной системы управления конструкторским звеном и производством авиационной техники в условиях конкуренции». (в печати)
7. Малеев П. И. Новые типы гироскопов. Л., Изд. «Судостроение», 1971 г., 160 с.
8. Лебедев Г.Н. Постановка задачи оптимального управления технологическими процессами для обеспечения динамической устойчивости промышленного производства в кризисных ситуациях. М., Изд. «Новые технологии», 2010 г., №7 стр. 53-55.
9. Кобринский Н. Е. Кузьмин В. М. Точность экономико-математических моделей. М.: Финансы и статистика, 1981 г., 255 с.
10. Алёшин Б. С., Веремеенко К. К., Ориентация и навигация подвижных объектов. М., Физматлит, 2006 г., 422 стр.

11. Гуревич О. С. Системы автоматического управления авиационными ГТД. М. Изд. «ТОРУС ПРЕСС», 2011 г., 207 стр.
12. Лебедев Г.Н., Аунг Мьё Тху, Пашкевич А.Г. «Динамические модели производственного и технологического звена в задаче оптимального управления предприятием в кризисных ситуациях». М., Изд. «системы управления и информационные технологии», 2011 г., №3(45), стр. 36-40.
13. Повышение эффективности управления чашевым окомкователем путем совершенствования алгоритмов экстремального регулирования / П. Д. Александров // Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. Липецк, 2007 г.
14. Лётов А.М. Динамика полёта и управления. М., Наука, 1969 г.
15. Калецкий М. Очерки теории роста социалистической экономики. М.: Прогресс, 1970 г., 143 с.
16. Беллман Р. Динамическое программирование. Издательство иностранной литературы, 1960 г., 161 с.
17. Лебедев Г.Н. Методы принятия оперативных решений в задачах управления и контроля. М.: Изд. МАИ, 1992 г., 120 с.
18. Лебедев Г.Н., Дегтярёв Ю.И., Степанянц Г.А., Аунг Мьё Тху. «Оценка устойчивости управления высоко-технологичным проектированием и производством авиационной техники в кризисных ситуациях». М., Изд. «Труды МАИ», 2011 г., №12.
19. Лебедев Г.Н., Аунг Мьё Тху «Оптимальное управление промышленным производством в кризисных ситуациях с учетом совершенствования технологии выпуска продукции». Алушта., Изд. «Современные технологии в задачах управления, автоматике и обработки информации», 2012 г., стр 5.
20. Лебедев Г.Н., Щеткин С.Л. «Разработка оптимального управления процессом обогащения руды при её сортировке». Алушта., Изд. «Теоретический и прикладной научно-технический журнал», 2008 г., №7(88), стр 34-37.



21. Синтез систем автоматического управления многосвязными объектами с запаздываниями на основе технологии вложения систем / К. В. Сергеев // Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. Уфа, 2013 г.
22. Повышение энергоэффективности электротехнических комплексов и систем электроснабжения/ Б. В. Сергеев // Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. Спб, 2011 г.
23. Ланге О. Введение в экономическую кибернетику. М.: Прогресс, 1968 г., 199 с.
24. Ю.С. Гришанин, Г.Н Лебедев, А.В Липатов, Г.А Степаньянц “Теория оптимальных систем”. Изд. МАИ 1999 г., 320 с.: ил.
25. Аналитическое конструирование многосвязных систем автоматического управления динамическими объектами на основе технологии вложения / А. И. Завдятович // Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. Уфа, 2010 г.
26. Кобринский Н.Е., Кузьмин В.М. Точность экономико-математических моделей. М.: Финансы и статистика, 1981 г., 255 с.
27. Болтянский В.Г, Математика и оптимальное управление. М.: Знание 1968 г.
28. Царьков В.А «Моделирование экономической динамики предприятия», журнал «Аудит и финансовый анализ» №4, 2004 г., рег. №77-1602 Минпечати, стр. 186-190.
29. Венцель Е.С. Исследование операций. М., «Советское радио», Москва, 1972 г.
30. Зуховицкий С. И, Авдеева Л. И. Линейное выпуклое программирование. Изд. «Наука» 1964 г.
31. Дегтярев Ю.И. Методы оптимизации: Учеб. Пособие для вузов. М.: Сов. Радио, 1980 г.. 272 с.,ил.
32. Белова Е.С., Войнич Г.В., Новиков А.Н. Оптимальное управление (Сборник задач по курсу «Теория оптимальных систем управления»): Учебное пособие, М.: МАИ, 1993 г., 40 с.: ил.

33. Гасс С. Линейное программирование. М.: Физматгиз, 1961, 303 с.
34. Атманов С.А. Линейное программирование. М.: Наука, Физ-матгиз, 1981 г.
35. Бервелл Ф.Т. Автоматика и управление на транспорте: пер. с англ.- 2-е изд., испр, М: Транспорт, 1990 г., 367 с.
36. Ким Д. П. Теория автоматического управления. Т.1. Линейные системы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003 г., 288 с.
37. Кузин Л.Т. Основы кибернетики. Т. 1 и 2. М.; Энергия, 1973 г.
38. Ким Д. П. Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы: Учеб. пособие. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004 г., 464 с.
39. Севрюгин Э.В. Анализ функционально-слеящей системы автоматического управления поезда. Автореферат. М. 1973 г.
40. А.В. Аттетков, С.В. Галкин, В.С. Зарубин. Методы оптимизации: Учеб. для вузов. - 2-е изд., стереотип. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003 г., 440 с.
41. Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы: Учеб. Пособие для вузов по спец. «Автоматика и упр. в техн. системах». М: Высш.шк., 1989 г., 263 с.: ил.
42. Ларин Р.М., Плясунов А.В., Пяткин А.В. Методы оптимизации. Примеры и задачи: Учеб. пособие. Новосиб. Ун-т Новосибирск.
43. Чаки Ф. Современная теория управления. Нелинейные, оптимальные адаптивные системы. М.: Мир. 1975 г.
44. Чураков Е.П. Оптимальные и адаптивные системы. Энегоатомиздат, 1987 г.
45. Винер Н. Кибернетика. М.: Сов. Радио, 1968 г.
46. Юдин Д. Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование. Физматгиз.1963 г.
47. Румянцев В.В., Озиранер А.С. устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М., Наука 1987 г., 256с.
48. Фельдбаум А.А. Основы теории оптимальных автоматических систем.

М.: Наука, 1966 г.

49. Калитин Б.С. Качественная теория устойчивости движения динамических систем. Ми.: БГУ, 2002 г., 198 с.

50. Иванов В.А., Фалдин Н.В. Теория оптимальных систем автоматического управления. М.: Наука, 1981 г., 336 с.

51. Соболев И. М., Статников Р. Б. «Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями» 2-е изд-во перераб и доп, М: Дрофа, 2006 г., 175 с.

52. Коршунов Ю. М. Математические основы кибернетики: Учеб. Пособие для вузов. М: Энергия, 1980 г.

53. Гришанов Г. М., Павлов О. В. Исследование систем управления. Самара, 2005 г., 128 с.

54. Инновационный менеджмент. Под ред. Л.Н. Оголевой - М.: ИНФРА, М., 2007 г.

55. Новиков Д.А. Сетевые структуры и организационные системы. М.: ИПУ РАН, 2002 г., 102 с.

56. Зайцев А. В., Трянин П. А., Канушкин С. В. «Построение системы управления качеством технологического процесса». Серпухов: МОУ «ИИФ», «Современное непрерывное образование и инновационное развитие» 2013 г, стр 7.

57. <http://omop.su/poisk/Boeing%20377%20Stratocruiser/2>

58. [http://ru.wikipedia.org/wiki/Rolls-Royce\\_RB211](http://ru.wikipedia.org/wiki/Rolls-Royce_RB211)

59. Gribbens A.H., Giles L.J. The Inverness Wick radio scheme. Raylways in the Electronic Age.I.E.E. Conference Publication No.203, P.11/1981.