

На правах рукописи



Зверев Николай Андреевич

**Моделирование одномерных нестационарных  
механодиффузионных процессов в  
многокомпонентных цилиндрических телах**

1.1.8 – «Механика деформируемого твёрдого тела»

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2023

Работа выполнена в *ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»*.

**Научный руководитель:** доктор физико-математических наук, доцент Земсков Андрей Владимирович.

**Официальные оппоненты:**

**Келлер Илья Эрнстович**, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий лабораторией нелинейной механики деформируемого твердого тела «Института механики сплошных сред Уральского отделения РАН» – филиала ФГБУН Пермского федерального исследовательского центра Уральского отделения РАН («ИМСС УрО РАН»).

**Ломовской Виктор Андреевич**, главный научный сотрудник, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией «Структурообразование в дисперсных системах» Института физической химии и электрохимии им. А.Н. Фрумкина Российской Академии Наук, Москва.

**Ведущая организация:** Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)».

Защита состоится 25 октября 2023 г. в 15:00 часов на заседании диссертационного совета *24.2.327.07* при *ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»*, расположенном по адресу: *125993, г.Москва, Волоколамское шоссе, дом 4, МАИ*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»* и на сайте:

[https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT\\_ID=174321](https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT_ID=174321)

Автореферат разослан «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2023 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
к.т.н., доцент



*Сердюк Дмитрий Олегович.*

## Общая характеристика работы

В последнее время все больший научный и практический интерес представляют связанные нестационарные модели механики деформируемого твердого тела, в частности, модели механо-dиффузии, поскольку сама диффузия, влияя на напряженно-деформированное состояние тела, может оказывать нежелательное воздействие на конструкции или их отдельные элементы. Например, диффузия, вызывая движение вакансий и дислокаций, может влиять на процесс трещинообразования и старения материалов. В связи с этим, представляется практически важным вопрос о качественной и количественной оценках взаимодействия механических и диффузионных полей. Также немаловажную роль в вопросах моделирования технических систем играет учет электромагнитных полей, наличие которых может вызывать пьезоэлектрические и пьезомагнитные эффекты.

Существует достаточно много подходов к созданию математических моделей, описывающих те или иные процессы, в той или иной степени приближенные к реальным физическим или механическим процессам. К одному из наиболее перспективных подходов относится построение и анализ моделей связанных полей, к которым можно отнести механическое и диффузионное поля, благодаря которому становится возможным наиболее точное и комплексное описание технологических и физических процессов, происходящих в изучаемом теле (сплошной деформируемой среде).

Как известно, наличие диффузионных потоков приводит к перераспределению компонентов вещества, вызывающего объемные изменения, вследствие чего в диффузионной зоне возникает напряженно-деформированное состояние. Оно, в свою очередь, влияет на величину диффузионного потока, поскольку в результате деформаций изменяется расстояние между атомами решетки. Однако влияние механических нагрузок на диффузионное поле имеет достаточно сложную природу и зависит от механизма диффузии. Если диффузия происходит по вакансионному механизму, то увеличение давления уменьшает содержание вакансий. Происходит это потому, что увеличение содержания вакансий увеличивает объем кристалла, давление стремится уменьшить объем кристалла и поэтому понижает содержание вакансий, соответственно уменьшая скорость диффузии. Если диффузия происходит по межузельному механизму, то, с одной стороны, увеличение давления повышает содержание межузельных атомов, а с другой стороны, атомы в кристалле сближаются и перемещение между узлами затрудняется.

Работа посвящена исследованию нестационарного взаимодействия механического и диффузионного полей в цилиндрических телах. С практической точки зрения интерес к такого рода проблемам возникает благодаря тому, что данные тела являются основой различных трубопроводов (нефте- и газопроводы, системы отопления), используются в качестве валов и втулок в конструкциях, имеющих очень широкий спектр применения в технике. При этом взаимодействие тех или иных физических полей, в процессе эксплуатации указанных объектов, может оказывать негативное влияние на функционирование и целостность конструкций или же их отдельных элементов, испытывающих нагрузки различной физической природы.

Для полноценного анализа возникающих при этом эффектов необходима разработка моделей механодиффузии, а также специальных методов решения соответствующих начально-краевых задач. В этой связи важно отметить, что на сегодняшний день не существует общих аналитических методов исследования нестационарных задач механики связанных полей и, в частности, задач механодиффузии.

**Актуальность работы** связана с тем, что за последние годы, согласно проделанному обзору, значительно возрос интерес ученых к проблеме исследования связанных механодиффузионных процессов, да и сами модели, описывающие эти процессы, постоянно совершенствуются, что необходимо для получения более точного описания функционирования конструкций и их отдельных элементов, эксплуатирующихся в условиях разнофакторных внешних воздействий. При этом данная тема, несмотря на возросшую за последние годы публикационную активность, изучена далеко не полностью. Это в полной мере относится к моделям механодиффузии для тел с криволинейными границами, где в части разработки методов решения нестационарных задач сделано очень мало.

**Целью диссертационной работы** является исследование нестационарного взаимодействия механических и диффузионных полей в различных упругих телах цилиндрической формы, а также постановка новых начально-краевых задач механодиффузии, их решение и практические расчеты, выполненные в математических пакетах и позволяющие количественно оценить эффекты, обусловленные взаимным влиянием вышеуказанных полей друг на друга.

**Методы исследования.** Для построения замкнутой модели механодиффузии используется математический аппарат линейной теории упругости, законы термодинамики и, в частности, законы массопереноса. Метод

решения основан на применении аппарата обобщенных функций, теории интегральных преобразований и рядов Фурье. Также применяется метод эквивалентных граничных условий, который позволяет выразить решение одной начально-краевой задачи через известное решение другой задачи, отличающейся от исходной только набором краевых условий.

**Научная новизна работы** заключается в построении численно-аналитических решений нового класса одномерных нестационарных задач упругой диффузии в цилиндрической системе координат, с учетом релаксации диффузионных потоков. В частности, были решены задачи для сплошного и полого цилиндров, находящихся под действием либо поверхностных, либо объемных возмущений.

**Достоверность и обоснованность результатов** обеспечивается использованием известных методов построения моделей механики деформируемого твёрдого тела и термодинамики, апробированных методов решения начально-краевых задач и строго доказанных утверждений. Кроме того, проведено сравнение результатов с известными решениями задач теории упругости. Для одномерных задач также выполнялась проверка путем перехода к решениям соответствующих статических задач.

**Практическая значимость работы** заключается в разработке методик расчета напряженно-деформированного состояния упругих сред и элементов конструкций цилиндрической формы, работающих в условиях нестационарных внешних воздействий, с учетом протекающих в них явлений массопереноса. Примерами таких конструкций являются: нефте- и газопроводы, трубопроводы систем отопления, валы и втулки в механизмах и двигателях.

**На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:**

- постановка и разработка метода решения одномерной задачи механо-диффузии для ортотропных многокомпонентных цилиндрических тел,
- постановка и решение задачи Штурма-Лиувилля для одномерного упругодиффузионного оператора в цилиндрической системе координат,
- построение объемных и поверхностных функций Грина для сплошного и полого ортотропных цилиндров,
- численное исследование взаимодействия механического и диффузионных полей в цилиндрических телах под действием различных поверхностных и объемных нестационарных механо-диффузионных возмущений.

**Апробация работы.** Все основные результаты данной работы являлись предметами докладов, обсуждений и дискуссий на всероссийских и меж-

дународных конференциях, симпозиумах и семинарах:

- Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Калужская область, г. Кременки, 2018–2023);
- Международная научно-практическая конференция «Проблемы безопасности на транспорте» (Беларусь, Гомель, 2020–2023);
- XIX Всероссийская школа-семинар «Современные проблемы аэрогидродинамики» (Сочи, 2019);
- Международная конференция «Авиация и космонавтика» (Москва, МАИ, 2019–2020);
- Научная конференция «Ломоносовские чтения» (Москва, 2017–2023);
- Международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения» (Москва, 2019–2022);
- Международный научный семинар «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы» (Москва, 2016–2018);
- Всероссийская школа-семинар «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (Краснодарский край, Дивноморское, 2021–2023);
- Всероссийская конференция молодых учёных-механиков «YSM» (Сочи, 2018, 2020–2023);
- Конференция-конкурс молодых учёных научно-исследовательского института механики МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, 2021);
- Международная конференция «Современные проблемы механики сплошных сред» (Ростов-на-Дону, 2020);
- Международная молодёжная научная конференция «Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики» (Томск, 2019);
- Всероссийская конференция «Механика деформируемого твёрдого тела в проектировании конструкций» (Пермь, 2022).

**Публикации.** По теме диссертационного исследования опубликовано: 5 статей [1–5] в рецензируемых журналах, 11 статей в сборниках трудов всероссийских и международных конференций [8–14, 16–19] и 25 тезисов докладов. Всего – 41 публикация.

**Структура и объём диссертации.** Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы, включающего 123 наименования. Общий объём диссертации – 122 страницы, включая 52 рисунка и 1

таблицу.

## Содержание работы

**Во введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

**В первой главе** приводится обзор современного состояния исследований в данной области науки, из которого следует, что одномерными нестационарными задачами занимались и занимаются достаточно активно, особенно за границей, однако многое в данном направлении механики еще только предстоит сделать. В частности, рассматривались, как правило, статические или стационарные задачи, чаще всего несвязанные, которые решались преимущественно численными методами, например, с использованием метода Дурбина и его модификаций.

В этой же главе, на основе общей модели механодиффузии для многокомпонентных анизотропных сред в произвольной криволинейной системе координат, получена постановка одномерной задачи упругой диффузии для тел цилиндрической формы с учетом конечной скорости распространения диффузионных потоков (точками обозначены производные по безразмерному времени  $\tau$ , а штрихами – производные по безразмерной координате  $x$ ):

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j' + F_1, \quad \eta_{N+1} = - \sum_{j=1}^N \eta_j \quad (\forall q = \overline{1, N}), \\ \dot{\eta}_q + \tau_q \ddot{\eta}_q &= -\Lambda_q \left( u''' + \frac{2u''}{r} - \frac{u'}{r^2} + \frac{u}{r^3} \right) + \sum_{j=1}^N D_{qj} \left( \eta_j'' + \frac{\eta_j'}{r} \right) + F_{q+1}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь все параметры являются безразмерными. Их связь с размерными аналогами дается равенствами вида

$$\begin{aligned} r^* &= \frac{r}{L}, \quad u = \frac{u_r}{L}, \quad \tau = \frac{Ct}{L}, \quad C^2 = \frac{C_{11}}{\rho}, \quad c_{ij} = \frac{C_{ij}}{C_{11}}, \quad \eta_q = \eta^{(q)}, \\ \alpha_q &= \frac{\alpha_1^{(q)}}{C_{11}}, \quad D_{qr} = \frac{D_1^{(qr)}}{CL}, \quad \Lambda_q = \frac{m^{(q)} n_0^{(q)} D_1^{(q)} \alpha_1^{(q)}}{\rho CLRT_0}, \quad F_1 = \frac{F_r L}{C_{11}}, \quad F_{q+1} = \frac{F^{(q)} L}{C}, \end{aligned} \quad (2)$$

где:  $t$  – время;  $u_r$  – радиальная компоненты вектора механических перемещений;  $r$  – радиальная координата;  $\eta_q = n^{(q)} - n_0^{(q)}$  – приращение концентрации

многокомпонентного вещества;  $n_0^{(q)}$  и  $n^{(q)}$  – начальная и текущая концентрации  $q$ -го вещества в составе  $N + 1$ -компонентной среды;  $m^{(q)}$  – молярная масса  $q$ -го вещества в составе  $N + 1$ -компонентной среды;  $C_{ij}$  – упругие постоянные;  $\rho$  – плотность сплошной среды;  $\alpha_i^{(q)}$  – упругодиффузионные постоянные, характеризующие деформации, возникающие вследствие диффузии;  $D_i^{(qr)} = g^{(qr)} D_i^{(q)}$ ,  $D_i^{(q)}$  – коэффициенты диффузии;  $g^{(qr)}$  – термодинамические множители Даркена;  $R$  – универсальная газовая постоянная;  $T_0$  – температура сплошной среды;  $F_r$  – удельная плотность объёмных сил;  $F^{(q)}$  – объёмная плотность источников массопереноса;  $\tau^{(q)}$  – время релаксации диффузионных потоков.

Полагаем, что  $L = R_0$  для сплошного цилиндра радиуса  $R_0$  и  $L = r_2$  для полого цилиндра ( $r_1 \leq r \leq r_2$ ).

В соответствии с физической постановкой задачи, уравнения (1) дополняются граничными условиями, описывающими характер внешних поверхностных возмущений (для полого цилиндра):

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + c_{12} \frac{u}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) \Big|_{r=r_1} &= f_{11}(\tau), \quad \eta_q|_{r=r_1} = f_{q+1,1}(\tau), \\ \left( \frac{\partial u}{\partial r} + c_{12} \frac{u}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) \Big|_{r=R_1} &= f_{11}(\tau), \quad \eta_q|_{r=R_1} = f_{q+1,2}(\tau), \end{aligned} \quad (3)$$

$$f_{1l}(\tau) = \frac{f^{(1l)}(\tau L/C)}{C_{11}}, \quad f_{q+1}(\tau) = f^{(q+1,l)}(\tau L/C), \quad R_i = \frac{r_i}{L}.$$

где  $f_{ml}(\tau)$  – поверхностные механодиффузионные нагрузки.

Считая, что изначально среда находится в невозмущённом состоянии, начальные условия полагаем нулевыми.

Основная проблема при решении задачи (1), (3) заключается в том, что граничные условия (3) не позволяют использовать процедуру разделения переменных.

Поэтому для решения поставленных задач будет использоваться метод эквивалентных граничных условий [1, 4], суть которого заключается в том, что вместо поставленной задачи рассматривается некоторая вспомогательная задача, описываемая теми же уравнениями, имеющая ту же область решения, но отличающаяся от исходной задачи граничными условиями. Последние выбираются таким образом, чтобы была возможность получить аналитическое решение вспомогательной задачи, например, методом разделения перемен-



ных Фурье. Далее строятся соотношения, связывающие правые части граничных условий обеих задач. В результате появляется возможность выразить решение исходной задачи через решение вспомогательной задачи.

В соответствии с изложенным алгоритмом, в качестве вспомогательной задачи для цилиндра, находящегося под действием равномерно приложенного по всей его поверхности давления, используется задача с краевыми условиями следующего вида (для полого цилиндра):

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) \Big|_{r=1} &= f_{11}^* (\tau), \quad \eta_q|_{r=1} = f_{q+1,1} (\tau), \\ \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) \Big|_{r=R_1} &= f_{12}^* (\tau), \quad \eta_q|_{r=R_1} = f_{q+1,2} (\tau), \\ f_{1l} (\tau) &= \frac{f^{(1l)} (\tau L/C)}{C_{11}}, \quad f_{q+1,1} (\tau) = f^{(q+1,l)} (\tau L/C), \end{aligned} \quad (4)$$

где функции  $f_{1l}^* (\tau)$  подлежат определению.

Таким образом, алгоритм решения задачи (1), (3) с нулевыми начальными условиями разбивается на ряд этапов:

- вначале находятся функции Грина вспомогательной задачи (1), (4). Для их нахождения используются интегральное преобразование Лапласа по времени и разложение в ряды Фурье по собственным функциям упругодиффузионного оператора. Этому вопросу посвящена глава 2;

- затем строится интегральное уравнение, которое связывает между собой правые части граничных условий (3) и (4). Из этого уравнения определяются функции  $f_k^* (\tau)$ ;

- решение исходной задачи (1), (3) определяется как свертка функций Грина вспомогательной задачи (1), (4) с найденными функциями  $f_k^* (\tau)$ .

Детальное описание данного алгоритма приводится в главах 3 и 4.

**Во второй главе** даётся постановка и приводится решение задачи Штурма-Лиувилля, которая позволяет получить собственные функции упругодиффузионного оператора, используемые в дальнейшем для построения решения задач, сформулированных в главе 1. Для этого применяем к уравнению (1) метод разделения переменных Фурье, согласно которому искомые функции представляются в виде

$$u (r, \tau) = V (r) W (\tau), \quad \eta_q (r, \tau) = \Phi_q (r) \Psi (\tau). \quad (5)$$

Для простоты полагается, что релаксационные эффекты отсутствуют

( $\tau_q = 0$ ) и среда является идеальным твердым раствором ( $D_{qr} = \delta_{kr}D_q$ ). Тогда, подставляя (5) в (1), приходим к следующей задаче Штурма-Лиувилля [1]:

$$V''(r) + \frac{V'(r)}{r} - \frac{V(r)}{r^2} - p \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi_j'(r) = -\gamma^2 V(r), \quad (6)$$

$$D_q \left( \Phi_q''(r) + \frac{\Phi_q'(r)}{r} \right) - \frac{\Lambda_q}{p} \left( V'''(r) + \frac{2V''(r)}{r} - \frac{V'(r)}{r^2} + \frac{V(r)}{r^3} \right) = -\gamma^2 \omega \Phi_q(r).$$

Таблица 1 Решения задачи Штурма-Лиувилля

| Граничные условия   | Решение задачи Штурма-Лиувилля  |
|---|---|
| $V(R_2) = 0, V(R_1) = 0,$ $\left[ \Lambda_q \left( V'' + \frac{V'}{r} - \frac{V}{r^2} \right) - D_q \Phi_q' \right] \Big _{r=1} = 0,$ $\left[ \Lambda_q \left( V'' + \frac{V'}{r} - \frac{V}{r^2} \right) - D_q \Phi_q' \right] \Big _{r=R_1} = 0;$ | $V(r) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \Psi_{11}(\lambda_n r),$ $\Phi_q(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{qn} \Psi_{10}(\lambda_n r),$ $\Psi_{11}(\lambda_n R_1) = 0;$ |
| $\Phi_q(1) = 0, \Phi_q(R_1) = 0,$ $\left( V' + \frac{V}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi_j \right) \Big _{r=R_1} = 0,$ $\left( V' + \frac{V}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi_j \right) \Big _{r=1} = 0;$   | $V(r) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \Psi_{01}(\lambda_n r),$ $\Phi_q(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{qn} \Psi_{00}(\lambda_n r),$ $\Psi_{11}(\lambda_n R_1) = 0;$ |
| $\Phi_q(1) = 0, V(R_1) = 0,$ $\left[ \Lambda_q \left( V'' + \frac{V'}{r} - \frac{V}{r^2} \right) - D_q \Phi_q' \right] \Big _{r=R_1} = 0,$ $\left( V' + \frac{V}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi_j \right) \Big _{r=1} = 0;$                        | $V(r) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \Psi_{11}(\lambda_n r),$ $\Phi_q(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{qn} \Psi_{10}(\lambda_n r),$ $\Psi_{01}(\lambda_n R_1) = 0;$ |
| $\Phi_q(R_1) = 0, V(1) = 0,$ $\left[ \Lambda_q \left( V'' + \frac{V'}{r} - \frac{V}{r^2} \right) - D_q \Phi_q' \right] \Big _{r=1} = 0,$ $\left( V' + \frac{V}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi_j \right) \Big _{r=R_1} = 0;$                        | $V(r) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \Psi_{01}(\lambda_n r),$ $\Phi_q(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{qn} \Psi_{00}(\lambda_n r),$ $\Psi_{10}(\lambda_n R_1) = 0.$ |

Возможные аналитические решения задачи Штурма-Лиувилля для согласованных граничных условий представлены в таблице 1. Здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\Psi_{11}(\lambda_n r) &= Y_1(\lambda_n) J_1(\lambda_n r) - J_1(\lambda_n) Y_1(\lambda_n r), \\ \Psi_{10}(\lambda_n r) &= Y_1(\lambda_n) J_0(\lambda_n r) - J_1(\lambda_n) Y_0(\lambda_n r), \\ \Psi_{01}(\lambda_n r) &= Y_0(\lambda_n) J_1(\lambda_n r) - J_0(\lambda_n) Y_1(\lambda_n r), \\ \Psi_{00}(\lambda_n r) &= Y_0(\lambda_n) J_0(\lambda_n r) - J_0(\lambda_n) Y_0(\lambda_n r),\end{aligned}$$

где  $J_\alpha(z)$  – функция Бесселя 1-го рода порядка  $\alpha$ ,  $Y_\alpha(z)$  – функция Бесселя 2-го рода (функция Неймана) порядка  $\alpha$

Вид граничных условий [1], представленных в таблице, выбирался с учетом свойств цилиндрических функций Бесселя.

Приведённые в этой таблице 4 типа граничных условий определяют, так называемые, вспомогательные задачи, с помощью которых по методу эквивалентных граничных условий находится решение основной задачи.

Здесь же, используя найденные собственные функции, построены интегральные преобразования, применяемые в дальнейшем при построении решений задач для сплошного и полого цилиндров, находящихся под действием нестационарных упругодиффузионных возмущений.

**В третьей и четвертой главах** излагается алгоритм решения одномерной полярно-симметричной нестационарной задачи механодиффузии для однородных ортотропных многокомпонентных цилиндрических тел (сплошной и полый цилиндры), находящихся под действием поверхностных и объемных возмущений с учётом релаксации диффузионных потоков. Полагаем, что среда является идеальным твердым раствором, т.е.  $D_{qr} = \delta_{kr} D_q$ .

В соответствии с алгоритмом, изложенным в главе 1, вначале вместо задачи (1), (3) рассматриваем вспомогательную задачу с граничными условиями (4). Решение этой задачи записывается в виде

$$\begin{aligned}u(r, \tau) &= \sum_{l=1}^2 \int_0^\tau G_{11l}(r, \tau - t) f_{1l}^*(t) dt + \sum_{l=1}^2 \sum_{m=2}^{N+1} \int_0^\tau G_{1ml}(r, \tau - t) f_{ml}(t) dt + \\ &+ \sum_{m=1}^{N+1} \int_0^\tau \int_{R_1}^1 \tilde{G}_{1m}(r, \xi, t) F_m(\xi, \tau - t) dt d\xi,\end{aligned}\tag{7}$$

$$\eta_q(r, \tau) = \sum_{l=1}^2 \int_0^{\tau} G_{q+1,1l}(r, \tau-t) f_{1l}^*(t) dt + \sum_{l=1}^2 \sum_{m=2}^{N+1} \int_0^{\tau} G_{q+1,ml}(r, \tau-t) f_{ml}(t) dt + \\ + \sum_{m=1}^{N+1} \int_0^{\tau} \int_{R_1}^1 \tilde{G}_{q+1,m}(r, \xi, t) F_m(\xi, \tau-t) dt d\xi.$$

Здесь  $G_{nml}(r, \tau)$  ( $n, m = \overline{1, N+1}$ ) – поверхностные функции Грина рассматриваемой задачи, т.е. решения следующих краевых задач с нулевыми начальными условиями:

$$\left( G''_{1ml} + \frac{G'_{1ml}}{r} - \frac{G_{1ml}}{r^2} \right) - \sum_{j=1}^N \alpha_j G'_{j+1,ml} = \ddot{G}_{1ml}, \\ -\Lambda_q \left( G'''_{1ml} + \frac{2G''_{1ml}}{r} - \frac{G'_{1ml}}{r^2} + \frac{G_{1ml}}{r^3} \right) + D_q \left( G''_{q+1,ml} + \frac{G'_{q+1,ml}}{r} \right) = \\ = \dot{G}_{q+1,ml} + \tau_q \ddot{G}_{q+1,ml}; \quad (8)$$

$$\left( G'_{1ml} + \frac{1}{r} G_{1ml} - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,ml} \right) \Big|_{r=1} = \delta_{1m} \delta_{1l} \delta(\tau), \\ \left( G'_{1ml} + \frac{1}{r} G_{1ml} - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,ml} \right) \Big|_{r=R_1} = \delta_{1m} \delta_{2l} \delta(\tau), \quad (9)$$

$$G_{q+1,ml} \Big|_{r=1} = \delta_{q+1,m} \delta_{1l} \delta(\tau), \quad G_{q+1,ml} \Big|_{r=R_1} = \delta_{q+1,m} \delta_{2l} \delta(\tau).$$

Соответственно,  $\tilde{G}_{km}(r, \xi, \tau)$ ,  $\forall k, m = \overline{1, N+1}$ ,  $\forall \xi \in [0; 1]$  – объемные функции Грина, которые удовлетворяют системе уравнений

$$\left( \tilde{G}''_{1m} + \frac{\tilde{G}'_{1m}}{r} - \frac{\tilde{G}_{1m}}{r^2} \right) - \sum_{j=1}^N \alpha_j \tilde{G}'_{j+1,m} + \delta_{1m} \delta(r-\xi) \delta(\tau) = \ddot{\tilde{G}}_{1m}, \\ -\Lambda_q \left( \tilde{G}'''_{1m} + \frac{2\tilde{G}''_{1m}}{r} - \frac{\tilde{G}'_{1m}}{r^2} + \frac{\tilde{G}_{1m}}{r^3} \right) + D_q \left( \tilde{G}''_{q+1,m} + \frac{\tilde{G}'_{q+1,m}}{r} \right) + \\ + \delta_{q+1,m} \delta(r-\xi) \delta(\tau) = \dot{\tilde{G}}_{q+1,m} + \tau_q \ddot{\tilde{G}}_{q+1,m}; \quad (10)$$

и однородным краевым условиям, соответствующим (9).

Начальные условия для поверхностных и объемных функций Грина также полагаем нулевыми.

Для нахождения функций Грина применяем к задаче (8), (9) интегральное преобразование Лапласа по времени, после чего первое уравнение в (8)

домножаем на  $r\Psi_{01}(\lambda_n r)$ , второе – на  $r\Psi_{00}(\lambda_n r)$ , а затем интегрируем по  $r$  в промежутке  $[R_1, 1]$ . В итоге получаем систему линейных алгебраических уравнений, решая которую, находим изображения поверхностных функций Грина. Далее, с учетом того, что найденные таким образом функции являются рациональными по параметру преобразования Лапласа  $s$ , их оригиналы находятся аналитически, в частности, с помощью комплексных вычетов и таблиц операционного исчисления (штрихом в формулах ниже обозначена производная по параметру преобразования  $s$ ):

$$G_{1kln}(\tau) = \frac{1}{\Psi_0(\lambda_n)} \sum_{m=1}^{2N+2} A_{1kln}^{(m)} \exp(s_{mn}\tau), \quad (11)$$

$$A_{1kln}^{(m)} = \frac{P_{1kln}(s_{mn})}{P'_n(s_{mn})}, \quad A_{q+1,kln}^{(m)} = \frac{P_{q+1,kln}(s_{mn})}{Q'_{qn}(s_{mn})},$$

$$G_{q+1,1ln}(\tau) = -\frac{1}{\Psi_0(\lambda_n)} \times \\ \times \left[ \sum_{m=1}^{2N+4} A_{q+1,1ln}^{(m)} \exp(s_{mn}\tau) + \lambda_n \Lambda_q \Omega_l \sum_{j=1}^2 \frac{\exp(\chi_{jqn}\tau)}{k'_{q+1,n}(\chi_{jqn})} \right], \quad (12)$$

$$G_{q+1,p+1,ln}(\tau) = -\frac{1}{\Psi_0(\lambda_n)} \left[ \sum_{m=1}^{2N+4} A_{q+1,p+1,ln}^{(m)} \exp(s_{mn}\tau) + \right. \\ \left. + \lambda_n \left( \Lambda_q \alpha_p - D_1^{(q)} \delta_{pq} \right) \Omega_l \sum_{j=1}^2 \frac{\exp(\chi_{jqn}\tau)}{k'_{q+1,n}(\chi_{jqn})} \right];$$

$$P_{11ln}(s) = \Omega_{ln} \left[ \Pi_n(s) - \lambda_n^2 \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \Pi_{jn}(s) \right],$$

$$P_{1,q+1,ln}(s) = \lambda_n^2 \alpha_q \Omega_{ln} \left[ D_q \Pi_{qn}(s) - \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \Pi_{jn}(s) \right], \quad (13)$$

$$P_{q+1,kln}(s) = -\Lambda_q \lambda_n^3 P_{1kln}(s).$$

$$P_n(s) = k_{1n}(s) \Pi_n(s) - \lambda_n^4 \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \Pi_{jn}(s), \quad Q_{qn}(s) = k_{q+1,n}(s) P_n(s), \quad (14)$$

$$\Pi_n(s) = \prod_{j=1}^N k_{j+1,n}(s), \quad \Pi_{jn}(s) = \prod_{k=1, k \neq j}^N k_{k+1,n}(s),$$

$$k_{1n}(s) = \lambda_n^2 + s^2, \quad k_{q+1,n}(s) = D_q \lambda_n^2 + s + \tau_q s^2,$$

$$\Psi_0(\lambda_n) = \|\Psi_{0\alpha}(\lambda_n r)\|^2 = \frac{R_2^2}{2} [\Psi_{01}(\lambda_n R_2)]^2 - \frac{R_1^2}{2} [\Psi_{01}(\lambda_n R_1)]^2.$$

Здесь  $s_{ln}(\lambda_n)$  – нули полинома  $P_n(s)$ , а  $\chi_{jqn}(\lambda_n)$  – дополнительные нули полинома  $Q_{qn}(s)$ , определяемые по формулам:

$$\begin{aligned}\chi_{1qn}(\lambda_n) = s_{2N+3,n}(\lambda_n) &= \frac{-1 - \sqrt{1 - 4\tau_q D_q \lambda_n^2}}{2\tau_q}, \\ \chi_{2qn}(\lambda_n) = s_{2N+4,n}(\lambda_n) &= \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\tau_q D_q \lambda_n^2}}{2\tau_q}.\end{aligned}\tag{15}$$

Алгоритм нахождения объёмных функций Грина полностью аналогичен алгоритму построения поверхностных функций Грина, а оригиналы этих функций запишутся так:

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{11n}(\xi, \tau) &= \frac{\Psi_{01}(\lambda_n \xi) \xi}{\Psi_0(\lambda_n)} \sum_{l=1}^{2N+2} \tilde{A}_{11n}^{(l)}(s_{ln}) \exp(s_{ln} \tau), \\ \tilde{G}_{1,q+1,n}(\xi, \tau) &= \frac{\Psi_{00}(\lambda_n \xi) \xi}{\Psi_0(\lambda_n)} \sum_{l=1}^{2N+2} \tilde{A}_{1,q+1,n}^{(l)}(s_{ln}) \exp(s_{ln} \tau), \\ \tilde{G}_{q+1,p+1,n}(\xi, \tau) &= \frac{\Psi_{01}(\lambda_n \xi) \xi}{\Psi_0(\lambda_n)} \sum_{l=1}^{2N+4} \tilde{A}_{q+1,1n}^{(l)}(s_{ln}) \exp(s_{ln} \tau), \\ \tilde{G}_{q+1,p+1,n}(\xi, \tau) &= \frac{\Psi_{00}(\lambda_n \xi) \xi}{\Psi_0(\lambda_n)} \times \\ &\times \left[ \sum_{r=1}^2 \frac{\delta_{qp} \exp(\chi_{rqn} \tau)}{k'_{q+1,n}(\chi_{rqn})} + \sum_{l=1}^{2N+4} \tilde{A}_{q+1,p+1,n}^{(l)}(s_{ln}) \exp(s_{ln} \tau) \right].\end{aligned}\tag{16}$$

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{11n}(s) &= \Pi_n(s), \quad \tilde{P}_{q+1,kn}(s) = \Lambda_q \lambda_n^3 \tilde{P}_{1kn}(s), \\ \tilde{P}_{1,q+1,n}(s) &= \lambda_n \alpha_q \Pi_{qn}(s),\end{aligned}\tag{17}$$

$$\tilde{A}_{1mn}^{(k)}(s_{kn}) = \frac{\tilde{P}_{1mn}(s_{kn})}{P'_n(s_k)}, \quad \tilde{A}_{q+1,mn}^{(k)}(s_{kn}) = \frac{\tilde{P}_{q+1,mn}(s_{kn})}{Q'_{qn}(s_{kn})};\tag{18}$$

$$\begin{aligned}G_{1m}(r, \xi, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{1mn}(\xi, \tau) J_1(\lambda_n r), \\ G_{q+1,m}(r, \xi, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{q+1,mn}(\xi, \tau) J_0(\lambda_n r),\end{aligned}\tag{19}$$

где  $s_{kn} \forall k = \overline{1, 2N+2}$  – нули полинома  $P_n(s)$ ,  $\chi_{jqn}$  – дополнительные нули полинома  $Q_{qn}(s)$ , определяемые по формулам (15).

Для того, чтобы найти решение задачи (1), (3), построим интегральные соотношения, связывающие правые части граничных условий (4) и (3). Для

этого подставляем решение (7) задачи (1), (4) в граничные условия (3) и получаем уравнения относительно искомых функций:

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau} a_{11}(\tau-t) \dot{f}_{11}^*(t) dt + \int_0^{\tau} a_{12}(\tau-t) \dot{f}_{12}^*(t) dt &= \varphi_1(t), \\ \int_0^{\tau} a_{21}(\tau-t) \dot{f}_{11}^*(t) dt + \int_0^{\tau} a_{22}(\tau-t) \dot{f}_{12}^*(t) dt &= \varphi_2(t). \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_{11}(\tau-t) &= (c_{12}-1) G_{111}^*(1, \tau-t) + 1, \\ a_{12}(\tau-t) &= (c_{12}-1) G_{112}^*(1, \tau-t), \\ a_{21}(\tau-t) &= \frac{c_{12}-1}{R_1} G_{111}^*(R_1, \tau-t), \\ a_{22}(\tau-t) &= \frac{c_{12}-1}{R_1} G_{112}^*(R_1, \tau-t) + 1, \end{aligned} \quad (21)$$

$$G_{11i}^*(r, \tau) = \int_0^{\tau} G_{11i}(r, t) dt.$$

Эта система решается численно с помощью квадратурных формул средних прямоугольников.

В результате, решение исходной задачи (1), (3) в точках  $\tau = t_i$  запишется так:

$$\begin{aligned} u(r, t_i) &= \sum_{k=1}^{N+1} \int_{R_1}^1 \int_0^{t_i} \tilde{G}_{1k}(r, \xi, t_i-t) F_k(\xi, t) d\xi dt + \\ &+ h \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^i G_{11l}^*(r, t_{i-m+1/2}) y_l^{(m-1/2)}, \\ \eta_q(r, t_i) &= \sum_{k=1}^{N+1} \int_{R_1}^1 \int_0^{t_i} \tilde{G}_{q+1,k}(r, \xi, t_i-t) F_k(\xi, t) d\xi dt + \\ &+ h \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^i G_{q+1,l}^*(r, t_{i-m+1/2}) y_l^{(m-1/2)}, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $y_l^{(m)} = \partial f_{1l}^*(t_m) / \partial \tau$  – численное решение системы (20).

Исследуя последовательно в (11)–(19) предельные переходы при  $\tau_q \rightarrow 0$ ,  $\alpha_p \rightarrow 0$  и  $s \rightarrow 0$ , получаем решения задач с бесконечной скоростью распро-

странения диффузионных потоков, решения несвязанных задач упругости и диффузии, а также решения статических механодиффузионных задач.

В качестве примера рассматриваем трехкомпонентный цилиндр ( $N = 2$ , независимые компоненты: цинк и медь, которые диффундируют в алюминии). Физические характеристики для этого материала будут следующими:

$$\begin{aligned}
 C_{12} &= 6.93 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{М}^2}, \quad C_{66} = 2.56 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{М}^2}, \quad T_0 = 700\text{К}, \quad \rho = 2700 \frac{\text{кг}}{\text{М}^3}, \\
 L &= 0.5 \cdot 10^{-2} \text{М}, \quad \alpha_1^{(1)} = 6.55 \cdot 10^7 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}, \quad \alpha_1^{(2)} = 6.14 \cdot 10^7 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}, \\
 D_1^{(1)} &= 2.62 \cdot 10^{-12} \frac{\text{М}^2}{\text{с}}, \quad D_1^{(2)} = 2.89 \cdot 10^{-15} \frac{\text{М}^2}{\text{с}}, \quad n_0^{(1)} = 0.01, \\
 m^{(1)} &= 0.065 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}, \quad m^{(2)} = 0.064 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}, \quad n_0^{(2)} = 0.045.
 \end{aligned} \tag{23}$$

**Пример 1.** Рассматриваем сплошной цилиндр радиуса  $5 \cdot 10^{-4}$  м. Для расчета полагаем, что объемные возмущения заданы следующим образом:

$$F_1(r, \tau) = J_1(\lambda_1 r) H(\tau), \quad F_{q+1}(r, \tau) = 0. \tag{24}$$

Результаты вычислений представлены на рисунках 1–4.

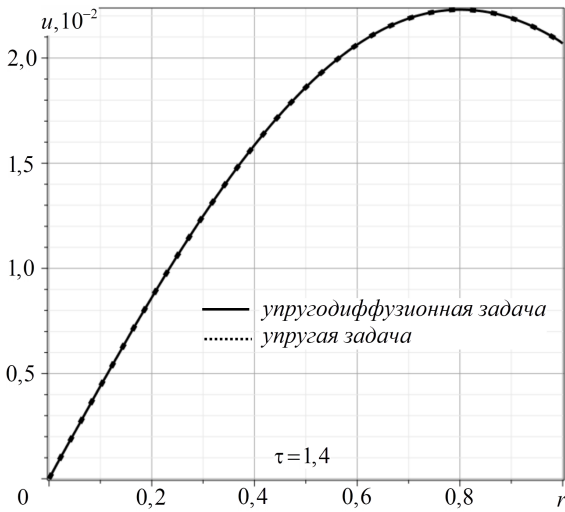


Рис. 1 Перемещения  $u(r, \tau)$  в момент времени  $\tau = 1.4$ .

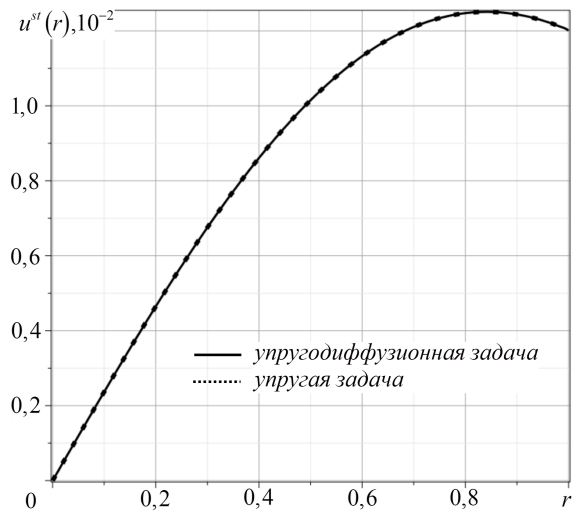


Рис. 2 Поле механических перемещений  $u^{st}(r)$ .

**Пример 2.** Рассматривается полый цилиндр, внутренний радиус которого равен  $7 \cdot 10^{-4}$  м, внешний –  $10^{-3}$  м. Полагаем для расчета, что массовые силы отсутствуют, а поверхностные возмущения в граничных условиях (3) имеют вид

$$f_{11}(\tau) = H(\tau), \quad f_{12}(\tau) = 0, \quad f_{q+1,1}(\tau) = f_{q+1,2}(\tau) = 0, \tag{25}$$



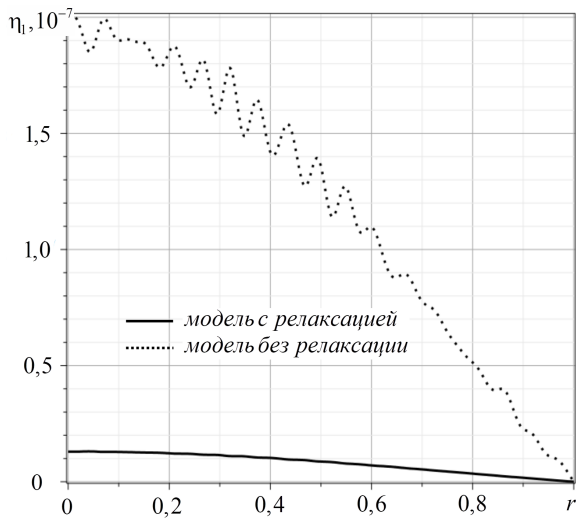


Рис. 3 Приращение концентрации цинка  $\eta_1(r, \tau)$ . Сравнение моделей с релаксацией и без релаксации в момент времени  $\tau = 0.35 \cdot 10^9$ .

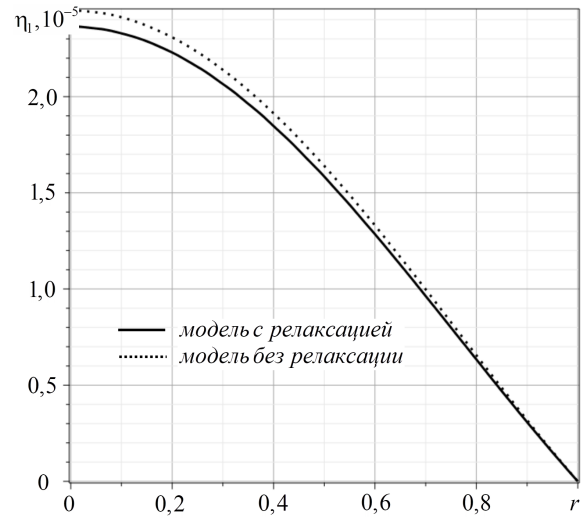


Рис. 4 Приращение концентрации цинка  $\eta_1(r, \tau)$ . Сравнение моделей с релаксацией и без релаксации в момент времени  $\tau = 0.5 \cdot 10^{11}$ .

т.е. рассматривается случай, когда давление задано на внешней поверхности цилиндра, а внешняя поверхность свободна от нагружения.

Результаты вычислений представлены на рисунках 5–8.

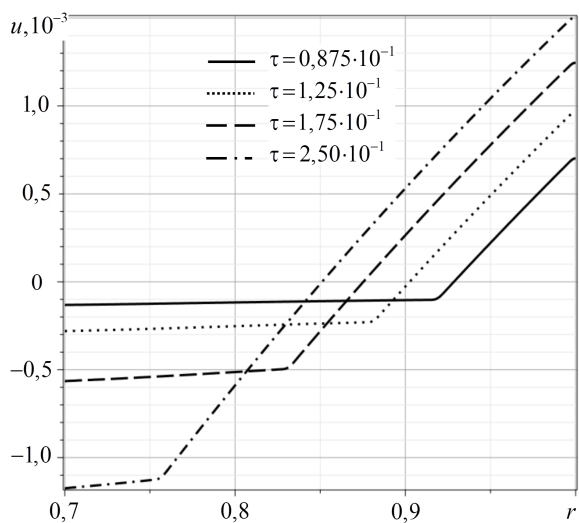


Рис. 5 Перемещения  $u(r, \tau)$ , соответствующие решению упругодиффузионной задачи.

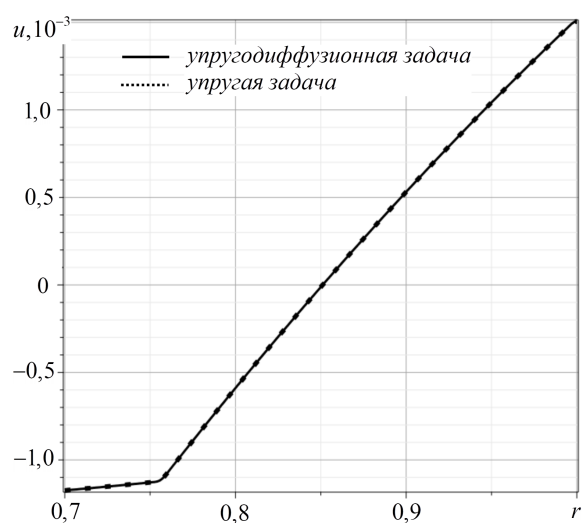


Рис. 6 Перемещения  $u(r, \tau)$ . Сравнение решений упругой и упругодиффузионной задач.

**Пример 3.** Еще один пример иллюстрирует взаимодействие механического и диффузионных полей в полном цилиндре, находящемся под действием внешних объемных нестационарных возмущений. Для расчета полагаем, что

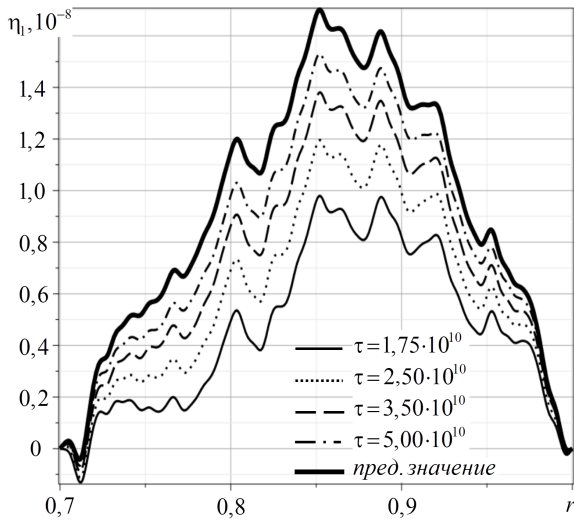


Рис. 7 Приращение концентрации цинка  $\eta_1(r, \tau)$ .

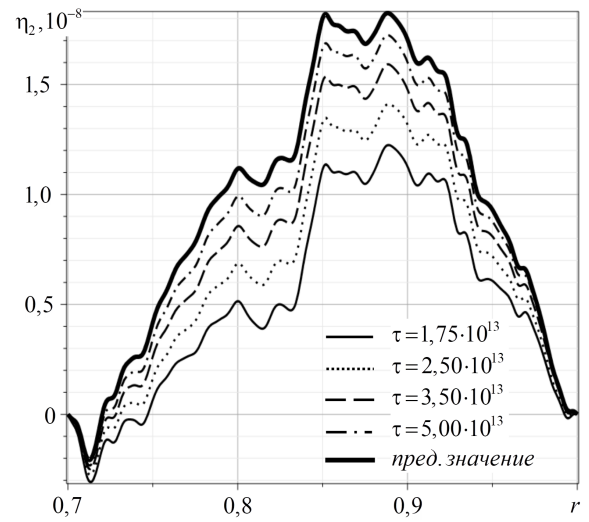


Рис. 8 Приращение концентрации меди  $\eta_2(r, \tau)$ .

объемные возмущения заданы так:

$$F_1(r, \tau) = \Psi_{01}(\lambda_1 r) H(\tau), \quad F_{q+1}(r, \tau) = 0. \quad (26)$$

Результаты вычислений представлены на рисунках 9–16.

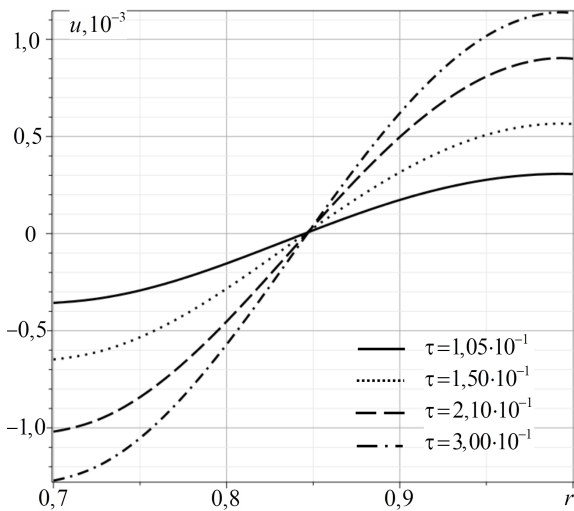


Рис. 9 Перемещения  $u(r, \tau)$ , соответствующие решению упругодиффузионной задачи.

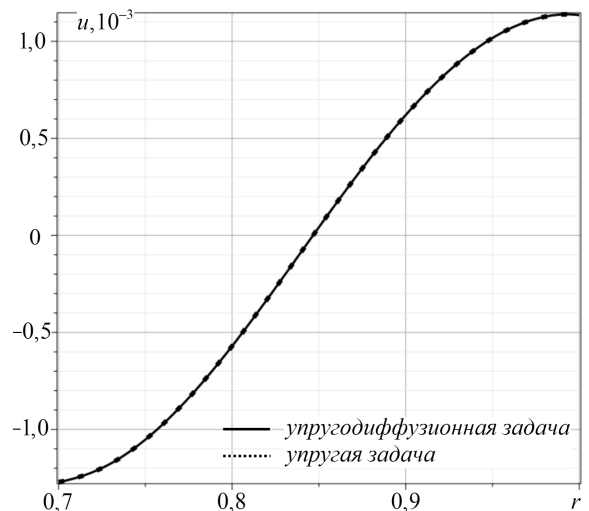


Рис. 10 Перемещения  $u(r, \tau)$ . Сравнение решений упругодиффузионной и упругой задач.

По результатам численного моделирования, выполненного в главах 3 и 4, можно сказать следующее:

1. Нестационарные механические нагрузки порождают слабое диффузионное поле, которое, в силу своей малости, уже практически не влияет на поле механических перемещений.

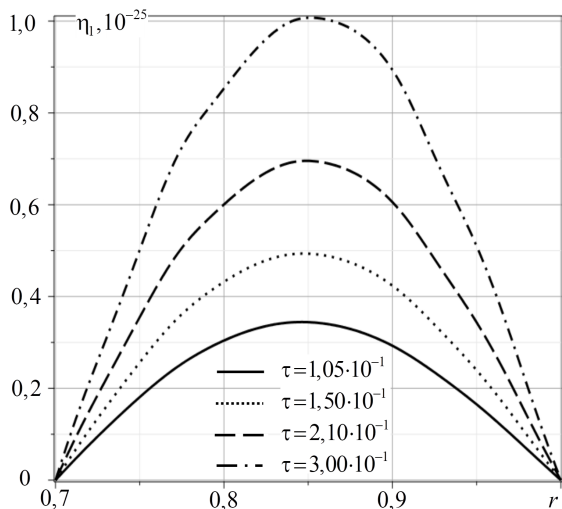


Рис. 11 Приращение концентрации цинка  $\eta_1(r, \tau)$  с учетом релаксации (начальные моменты времени).

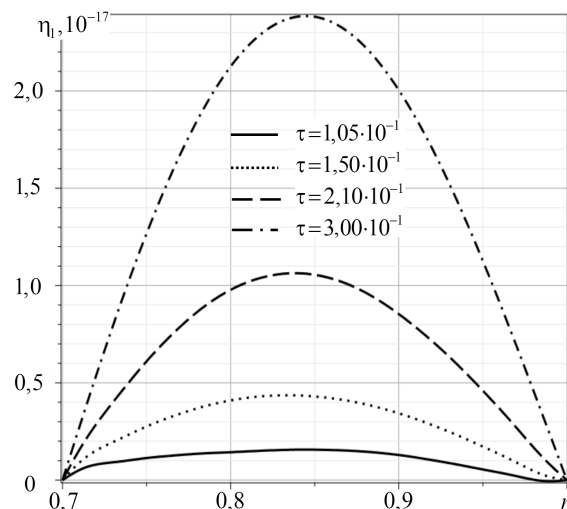


Рис. 12 Приращение концентрации цинка  $\eta_1(r, \tau)$  без релаксации (начальные моменты времени).

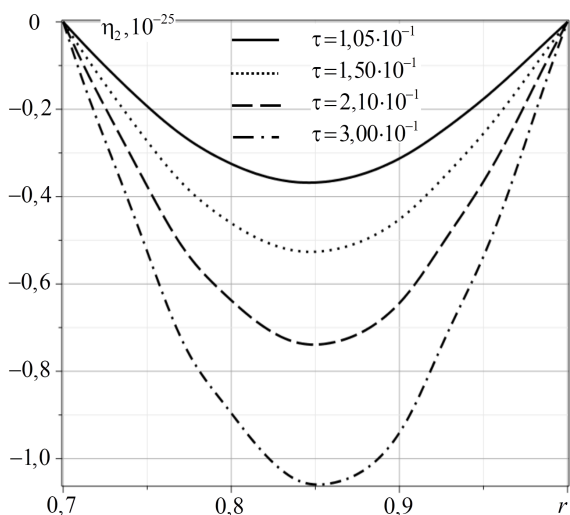


Рис. 13 Приращение концентрации меди  $\eta_2(r, \tau)$  с учетом релаксации (начальные моменты времени).

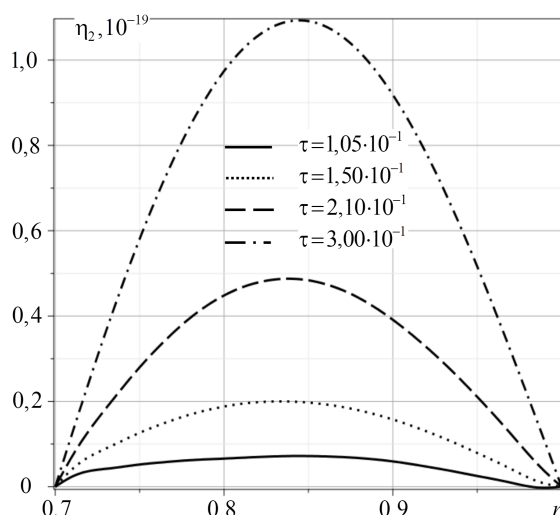


Рис. 14 Приращение концентрации меди  $\eta_2(r, \tau)$  без учета релаксации (начальные моменты времени).

2. Статические поверхностные механические нагрузки не порождают диффузионного поля.
3. Нестационарные объемные источники массопереноса могут по прошествии времени породить существенные механические перемещения.
4. Релаксационные эффекты влияют на кинетику массопереноса только в начальные моменты времени, соизмеримые с временами релаксации компонент в составе сплошной среды.

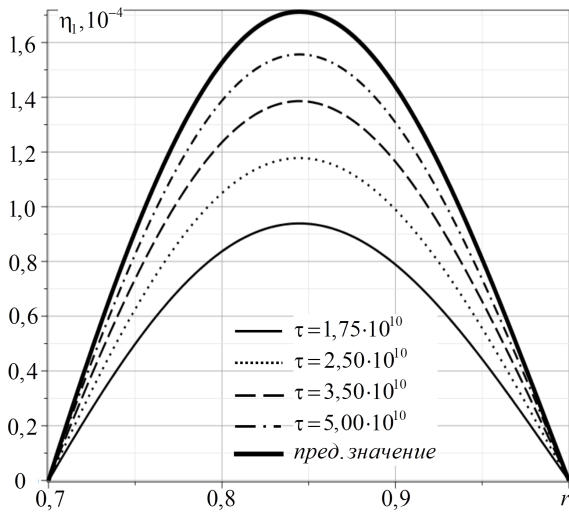


Рис. 15 Приращение концентрации цинка  $\eta_1(r, \tau)$  (предельное развитие процесса).

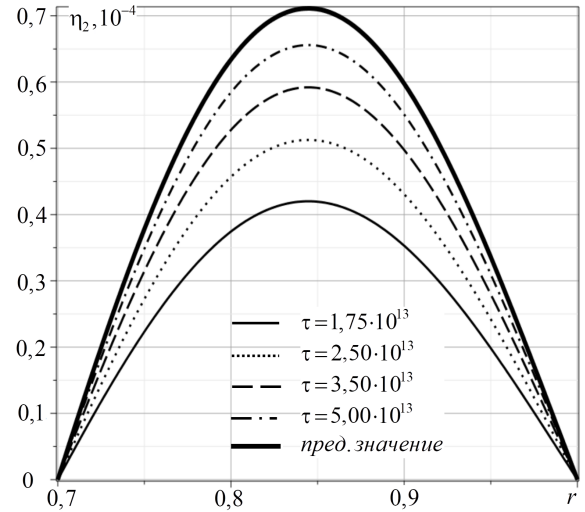


Рис. 16 Приращение концентрации меди  $\eta_2(r, \tau)$  (предельное развитие процесса).

5. Релаксационные диффузионные эффекты не влияют на поле механических перемещений.

Выводы, полученные в работе, совпадают с результатами экспериментальных исследований, полученных ранее другими авторами.

**В заключении** приведены основные результаты диссертационной работы, к которым относятся нижеследующие.

1. Из общей модели механодиффузии для произвольной анизотропной среды получена одномерная модель механодиффузии в цилиндрической системе координат. Построенная модель учитывает конечную скорость распространения диффузионных возмущений, обусловленную релаксацией диффузионных потоков.
2. Сформулирована и решена задача Штурма-Лиувилля для одномерного упругодиффузионного оператора в цилиндрической системе координат. Построены системы собственных функций для упругодиффузионного оператора, соответствующие различным видам граничных условий, допускающих процедуру разделения переменных.
3. Методом эквивалентных граничных условий решены одномерные нестационарные задачи механодиффузии для сплошных и полых однородных многокомпонентных цилиндров, находящихся под действием поверхностных и объемных механодиффузионных возмущений.

4. Проанализированы:

- предельные переходы от модели с конечной скоростью распространения диффузионных возмущений к классической модели механодиффузии с бесконечной скоростью распространения диффузионных возмущений;
- предельные переходы к упругим и диффузионным задачам;
- предельные переходы к статическим задачам механодиффузии.

5. Исследовано взаимное влияние механических и диффузионных полей друг на друга при различных видах внешних нагружений цилиндрических тел.

## **Основные работы по теме диссертации, опубликованные в изданиях, рекомендованных Перечнем ВАК**

1. *Зверев Н.А., Земсков А.В.* Моделирование нестационарных механодиффузионных процессов в полом цилиндре с учетом релаксации диффузионных потоков // Математическое моделирование. – 2023. – Т. 35, № 1. – С. 95–112.
2. *Зверев Н.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Нестационарные связанные механодиффузионные процессы в ортотропном сплошном цилиндре с учетом релаксации диффузионных потоков // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2022. – № 1. – С. 25–37 = *Zverev N.A., Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V.* Unsteady coupled elastic diffusion processes in an orthotropic cylinder taking into account relaxation of diffusion fluxes // Russian Mathematics. – 2022. – Vol. 66, No 1. – pp. 19–30.
3. *Зверев Н.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Моделирование одномерных механодиффузионных процессов в ортотропном сплошном цилиндре, находящемся под действием нестационарных объемных возмущений // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. – 2022. – Т. 26, № 1. – С. 62–78.
4. *Зверев Н.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Нестационарная механодиффузия сплошного ортотропного цилиндра, находящегося под действием равномерного давления, с учетом релаксации диффузионных потоков // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – Т. 27, № 4. – С. 570–586.

5. *Зверев Н.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Моделирование нестационарных связанных механодиффузионных процессов в изотропном сплошном цилиндре // Проблемы прочности и пластичности. – 2020. – Т. 82, № 2. – С. 156–167.
6. *Зверев Н.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Нестационарная электромагнитоупругость пьезоэлектриков с учетом диффузии // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2020. – Т. 20, № 2. – С. 193–204.
7. *Zverev N.A., Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V.* One-dimensional problem of piezoelectric electromagnetic diffusion for a layer // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – No 1129. – 012040. DOI: 10.1088/1742-6596/1129/1/012040.

### Публикации в других изданиях

8. *Зверев Н.А., Земсков А.В.* Нестационарная механодиффузия в ортотропных многокомпонентных полых цилиндрических телах с учетом релаксации диффузионных потоков // Материалы XXVIII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. – Т. 2, – М.: ООО «ТРП Москва», 2022. – С. 171–176.
9. *Зверев Н.А., Земсков А.В.* Нестационарная механодиффузия в ортотропных многокомпонентных телах цилиндрической формы под действием объемных возмущений // Материалы XXVII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. – Т. 2. – М.: ООО «ТРП Москва», 2021. – С. 127–132.
10. *Зверев Н.А., Земсков А.В.* Применение метода эквивалентных граничных условий к решению одномерных задач механодиффузии для многокомпонентных цилиндрических тел, находящихся под действием поверхностных нагрузок // Труды 64-й Всероссийской научной конференции МФТИ. Аэрокосмические технологии. – Москва.: М., 2021. – С. 187–189.
11. *Зверев Н.А., Земсков А.В.* Модель нестационарной пьезомеханодиффузии с учетом релаксации диффузионных процессов // Международная молодежная научная конференция «XLVI Гагаринские чтения». Сборник трудов секции «Механика и моделирование материалов и технологий». – М.: ИПМех РАН, 2020. – С. 49–51.
12. *Зверев Н.А., Земсков А.В.* Модель одномерной нестационарной задачи

- упругой диффузии для ортотропного сплошного цилиндра с учетом релаксации диффузионных потоков // Международная молодежная научная конференция «XLVI Гагаринские чтения». Сборник трудов секции «Механика и моделирование материалов и технологий». – М.: ИПМех РАН, 2020. – С. 51–53.
13. *Зверев Н.А., Земсков А.В.* Нестационарная механодиффузия для многокомпонентного цилиндра под действием объемных возмущений с учетом релаксации // Проблемы безопасности на транспорте. Материалы X Международной научно-практической конференции. Часть 1. – Т. 1. – Гомель.: Издательство БелГУТ Гомель, Белорусский государственный университет транспорта, 2020. – С. 86–87.
  14. *Зверев Н.А., Земсков А.В.* Нестационарные упругодиффузионные волны в ортотропном сплошном цилиндре // Современные проблемы механики сплошной среды: труды XX Международной конференции. – Т. 1. – Таганрог.: Издательство ЮФУ. Ростов-на-Дону, 2020. – С. 102–106.
  15. *Зверев Н.А., Земсков А.В.* Модель нестационарной пьезомеханодиффузии с учетом релаксации диффузионных процессов // Механика и моделирование материалов и технологий. Сборник трудов Секции Международной молодежной научной конференции «XLV Гагаринские чтения». – М.: ИПМех РАН Москва, 2019. – С. 87–87.
  16. *Зверев Н.А., Земсков А.В.* Нестационарные полярно-симметричные механодиффузионные процессы в изотропном сплошном цилиндре // Международная молодежная научная конференция «Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики»: Материалы конференции / под ред. М.Ю. Орлова. – Томск: ЗАО Издательство «Красное знамя», 2019. – С. 133–136.
  17. *Зверев Н.А., Земсков А.В.* Постановка нестационарной задачи упругой диффузии для изотропного сплошного цилиндра // Проблемы безопасности на транспорте: материалы IX Международной научно-практической конференции. – Т. 2. – Гомель: БелГУТ, 2019. – С. 212–214.
  18. *Зверев Н.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Полярно-симметричная стационарная задача механодиффузии для изотропного полого цилиндра // Материалы XXIII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. – Т. 2. – М.: Москва, 2017. – С. 128–131.
  19. *Зверев Н.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Сплошной ортотропный цилиндр под действием поверхностных полярно-симметричных стационар-

ных возмущений // Материалы XXIII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. – Т. 2. – М.: Москва, 2017. – С. 132–136.