

УДК 533.6

Некоторые особенности решений задачи Блазиуса

Покровский А.Н., Дадашов Ч.М.*

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

**e-mail: cingiz_dadashov@mail.ru*

Аннотация

Представляются результаты численного исследования поведения решений ламинарного несжимаемого пограничного слоя на плоской пластине (задача Блазиуса) [1,2]. Показано, что прежние постановки задачи содержат разногласия. Выделение четырех характерных видов пластин позволяет доработать постановку задачи, снять часть неточностей и получить правильное решение задачи.

Ключевые слова: пограничный слой, коэффициенты трения и теплообмена.

Введение

В последнее время большое внимание уделяется развитию численных методов для решения задач с разрывными условиями на границах области интегрирования. Высокие требования к точности определения аэродинамических характеристик сверхзвуковых и гиперзвуковых летательных аппаратов (ЛА) могут быть удовлетворены за счёт более полного учёта вязких эффектов в пограничном слое. Разработка методов расчета параметров стационарного и нестационарного пограничного слоя позволяет более полно изучить вопросы статической и

динамической устойчивости движения ЛА. Так в работе [1] С. Гольдштейном рассмотрена задача об образовании следа за пластиной конечной длины, когда резко меняются граничные условия на оси абсцисс. Полученные результаты удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными.

В работе [3] рассмотрена задача об обтекании затупленной по цилиндру пластины равномерным набегающим потоком, Г.Г. Черным показано, что необходимо учитывать влияние затупления на изменение коэффициента трения. Характерный график изменения C_x затупленной по цилиндру пластины приведен в работе [1] (с. 30).

В работе [4] предложен подход с образованием нового пограничного слоя в месте изменения граничных условий, формирующегося в «старом». В другой работе [5] введено сглаживание граничных условий.

В других работах [6-25] были рассмотрены задачи о вдуве (или отсосе) жидкости с поверхности пластины, влияние различной температуры на поверхности и песочной шероховатости пластины. Кроме того, рассмотрено влияние завихренности и пульсаций скорости внешнего потока. Показано также влияние пограничного слоя на донное давление и переход пограничного слоя от ламинарного течения к турбулентному.

Постановка и решение задачи

Рассмотрим теперь характерные виды пластин, их можно разделить на два типа: геометрические – когда точка не имеет ни одного размера по осям Ox , Oy и Oz . Линия представляющая передний носок пластины не имеет размеров по осям Ox и Oy , а координата z изменяется в диапазоне $-\infty \leq z \leq \infty$.

И второй тип: физические – когда размеры указаны по всем осям.

Рассмотрим постановку задачи Блазиуса. На тонкую пластинку набегают равномерный поток газа. Начиная с передней кромки пластины формируется пограничный слой за счет торможения газа около стенки (Рис.1).

Картина образования пограничного слоя представлена на рис.1. Выберем систему координат, связанную с твердым телом: ось Ox направим вдоль образующей тела, а ось Oy – по нормали к ней. Соответственно компонент скорости вдоль оси Ox – u , а вдоль оси Oy – v .

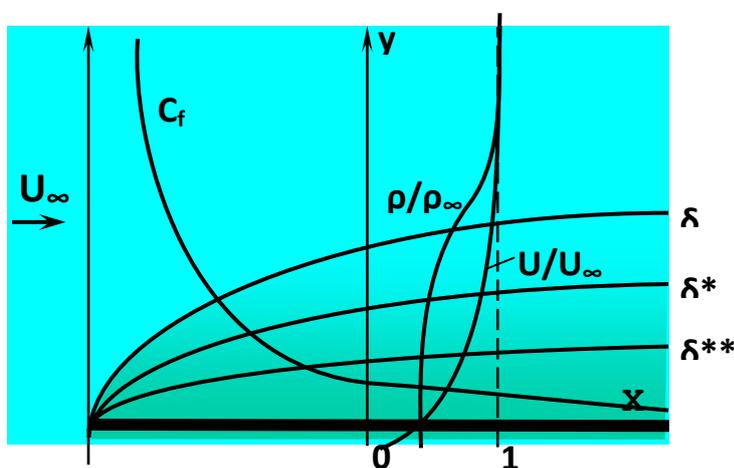


Рис. 1

Проводя оценку членов, входящих в уравнения Навье-Стокса [1, 2], с помощью преобразования (все параметры с чертой размерные) можно установить, что некоторые члены становятся весьма малыми по сравнению с другими (из-за большой величины числа Рейнольдса Re_L) и их можно отбросить. В результате приходим к системе уравнений, полученных Л. Прандтлем, для несжимаемой жидкости:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

В данной системе давление P является функцией только координаты x и времени t , т.е. не зависит от координаты y , ν - кинематическая вязкость газа. Если ввести функцию тока ψ , положив $u = \partial\psi/\partial y$; $v = -\partial\psi/\partial x$, то придем к одному уравнению для стационарного течения около пластины, где давление не зависит от координаты y и постоянно:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}, \quad (1.2)$$

с граничными условиями $\psi = 0$ при $y = 0$ и $-\infty < x < \infty$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} &= 0 \quad \text{при } y = 0 \quad \text{и } 0 \leq x \leq L, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &\rightarrow u_e \quad \text{при } y \rightarrow \infty \quad \text{и } 0 \leq x \leq L. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В такой постановке решение уравнения (1.2) весьма затруднительно. Блазиусом [1, 2] была предложена постановка задачи применительно к плоской пластине, дающая удовлетворительное решение для всей пластины, за исключением передней и задней кромок, и позволяющая с достаточной точностью найти сопротивление пластины. Далее вместо пластины конечной длины L он рассмотрел полубесконечную пластину с передней кромкой в начале координат. Отсутствие в граничных условиях длины L позволило привести уравнение в частных производных к автомодельному виду, т.е. к уравнению с одной переменной с помощью преобразования:

$$\psi = \sqrt{2u_\infty \nu x} f(\eta), \quad \eta = y \sqrt{\frac{u_\infty}{2\nu x}}, \quad \text{Re}_l = \frac{U_\infty L}{\nu_\infty} - \text{число Рейнольдса};$$

ν_∞ – кинематический коэффициент вязкости при температуре T_∞ ;

$$C_f = \frac{2X_{tr}}{\rho_\infty U_\infty^2 S} - \text{интегральный коэффициент трения};$$

$$C_f = \frac{2\mu \frac{\partial u}{\partial y}}{\rho_\infty U_\infty^2} - \text{местный коэффициент трения} \quad (1.4)$$

$$f''' + ff'' = 0 \quad f' = \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{u}{U_\infty}$$

$$\text{Pr} = \frac{\mu c_p}{\lambda} - \text{число Прандтля. } q_w = \lambda_w \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_w - \text{местный тепловой поток; } St_x = \frac{q_w}{\rho_\infty u_\infty (T_{00} - T_w)} - \text{число Стантона.}$$

Отметим, что местные коэффициенты трения C_{fx} и теплообмена

St_x связаны аналогией Рейнольдса [1,2]

$$C_{fx} = 2\text{Pr}^{2/3} St_x, \text{ из которой следует, что при } \text{Re}_x \rightarrow 0, \quad C_{fx} \rightarrow \infty, \quad St_x \rightarrow \infty.$$

Таким образом, даже если при тщательном изготовлении толщина носка пластины составляет несколько микрон, то после нахождения модели в потоке носок модели начинает разрушаться и толщина передней кромки быстро увеличивается. При сверхзвуковых скоростях полета носок пластины начинает быстро оплавляться из-за невозможности отвода через носок большого количества тепла выделяющегося в потоке [3].

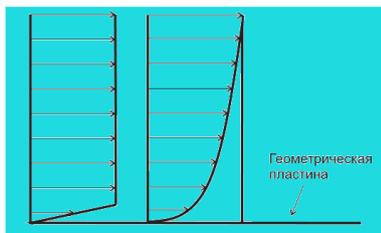


Рис. 2а

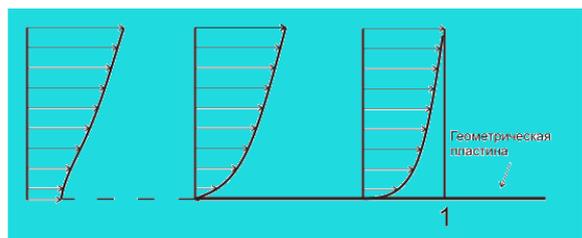


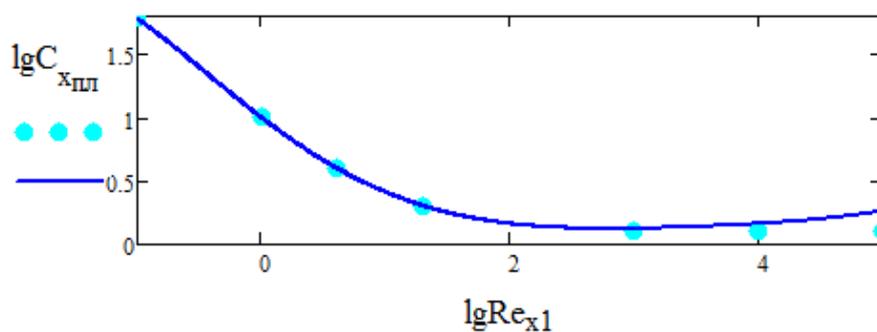
Рис. 2в

На рис. 2а показано обтекание геометрической пластины, когда $0 < Re_{d_\infty} \ll 1$. Здесь d – диаметр цилиндра, из которого состоит затупление пластины. Поскольку $Re_{d_\infty} \ll 1$, то можно не учитывать сопротивление затупления, и подсчитать только сопротивление трения на пластине.

$$C_{x_{тр}} = \frac{1,328}{\sqrt{Re_{d_\infty}}}$$

На рис. 2в показана половина обтекания геометрической пластины. В качестве набегающего потока можно рассматривать как ламинарные, так и турбулентные течения. В этом случае из-за большого затупления пластины, влияние на коэффициент сопротивления можно представить в виде

$$C_{x_{пл}} = C_{x_{тр}} + C_{x_{зат}} + C_{x_{доп}}$$



$$C_{x_{пл}} := -0.0002 \cdot x^6 + 0.0041 \cdot x^5 - 0.0283 \cdot x^4 + 0.0637 \cdot x^3 + 0.1224 \cdot x^2 - 0.7521 \cdot x + 1$$

Величина $C_{x_{зат}}$ – это сопротивление цилиндрического затупления (рис.1) поскольку при переходе от неравномерного набегающего потока (при переходе от струйного течения, в котором $\tau_w = \mu \frac{\partial a}{\partial y} = 0$) к пограничному слою на пластине, в котором $\tau_w \neq 0$ обязательно требуется чтобы не было разрыва в положении толщины слоя $\delta \approx 5,0$ в струйном течении и в потоке на пластине. Это накладывает ограничения на начало влияния вязкости. Это говорит о том, что $x_0 \geq 3l$. Для того,

чтобы найти сопротивление пластины, необходимо найти коэффициент трения по программе LAYER-2 и сопротивление цилиндрического загрязнения и донного давления [7]. Это предполагает, что можно рассчитывать $C_{x_{\text{плас}}}$ как для ламинарного, так и для турбулентного слоя.

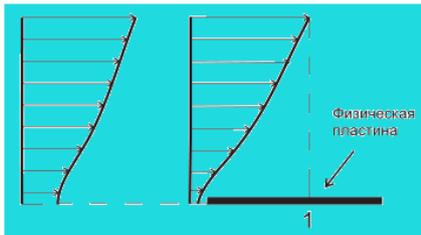


Рис. 2с



Рис. 2d

На рис. 2с показана физическая пластина с различными размерами на осях Ox , Oy . Здесь также как и для рис. 2b можно использовать те же формулы, как и для рис. 2b [7]. И условия для пластины те же самые. При том необходимо учитывать коэффициент сопротивления трения $C_{x_{\text{тр}}}$, сопротивление цилиндра $C_{x_{\text{зат}}}$, донное давление $C_{x_{\text{дон}}}$.

Рис. 2d отличен от рис. 2с только тем, что рассматривается затупленный клин, при этом сопротивление клина $C_{w_{\text{клина}}} = C_{x_{\text{зат}}} + C_{x_{\text{тр}}} + C_{x_{\text{дон}}} + C_{x_{\text{клина}}}$.

Заключение

1. Рассмотрены четыре подхода к использованию разных моделей при решении задач о сопротивлении пластин и затупленного клина.
2. Предложена методика расчета сопротивления пластин и затупленного клина с помощью программ [7].

3. Приложение этих программ [7] позволило с повышенной точностью найти сопротивление этих пластин, включая все компоненты полного сопротивления.

Библиографический список

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - М.: Наука, 1974, - 712 с.
2. Лойцянский Л.Г. Ламинарный пограничный слой. - М.: Физматлит, 1962. - 480 с.
3. Черный Г.Г. Влияние малого затупления переднего конца тела на его обтекания потоком с большой сверхзвуковой скоростью. - М.: Наука, 2009. -759 с.
4. Демьянов Ю.А. Об одном способе построения решения уравнений типа Прандтля в окрестности точек нарушения аналитичности граничных условий // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1969. Т. 7. № 4. С. 894 - 907.
5. Покровский А.Н., Шманенков В.Н. Влияние дискретного вдува газа в пограничный слой на коэффициенты трения и теплообмена на поверхности конуса в сверхзвуковом потоке // Космонавтика и ракетостроение. 2016. № 4. С. 118 - 124.
6. Голубев А.Г., Калугин В.Т., Луценко А.Ю. и др. Аэродинамика. - М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2010. - 687 с.
7. Липницкий Ю.М., Красильников А.В., Покровский А.Н., Шманенков В.Н.. Нестационарная аэродинамика баллистического полета. - М.: Физматлит, 2003. - 176 с.
8. Петров А.Г. Аналитическая гидродинамика. - М.: Физматлит, 2010. – 520 с.
9. Ламб Г. Гидродинамика. - Москва – Ижевск: ОГИЗ, 2003. Т. 1 - 452 с., Т. 2 – 482 с.

10. Na T.Y. Computational methods in engineering boundary value Problems, New York, Academic Press, 1980, 346 p.
11. Швец А.И., Швец И.Г. Газодинамика ближнего следа. - Киев: Наукова Думка, 1976. – 353 с.
12. Покровский А.Н. Об одном представлении решения уравнения Блазиуса и его приложениях // Механика жидкости и газа. 1975. № 3. С. 143 - 146.
13. Лунев В.В. Течение реальных газов с большими скоростями - М.: Физматлит, 2007. – 760 с.
14. Paul K. Chang. Separation of Flow, New York, Pergamon Press, 1970, 777 p.
15. Покровский А.Н., Фролов Л.Г. Определение стационарных и нестационарных параметров в донной области за осесимметричными телами в сверхзвуковом потоке газа // Космонавтика и ракетостроение. 2002. № 2. С. 89 – 99.
16. Sebeci T., Smith A.M.O., Analysis of turbulent boundary layers, New York, Akademic Press, 1974, 404 p.
17. Покровский А.Н. Решение уравнения Блазиуса для сжимаемого газа при различных граничных условиях // Материалы XX школы-семинара "Аэродинамика летательных аппаратов", п. Володарского, Московская обл., 26-27 февраля 2009. С. 107 – 108.
18. Черный Г.Г. Газовая динамика. - М.: Наука, 1988. – 424 с.
19. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. - М.: Гос. Изд-во технико-теоретической литературы, 1955. – 520 с.
20. Rothmayer A.P. Supersonic break away separation past a adiabatic wavy wall // AIAA Journal, 1988, vol. 36, no. 4, pp. 571 - 577.

21. Reda D.C., Wilder M.C., Prabhu D.K. Transition experiments on slightly blunted cones with distributed roughness in hypersonic flight // AIAA Journal, 2012, vol. 50, no. 10, pp. 2248 - 2254.
22. Probst A., Radespiel R., Rist V. Linear-Stability-Based transition Modeling for aerodynamic flow simulations with a Near-Wall Reynolds-Stress Model // AIAA Journal 2012, vol. 50, no. 2, pp. 416 - 428.
23. Park G., Sudhir L.G., Needly A.J. Laminar near wake of a cylinder at hypersonic speed // AIAA Journal, 2010, vol. 48, no. 1, pp. 236 - 248.
24. Волков В.А., Семенов В.В., Сидху Джуниор С.С. Волновое сопротивление периодических плоских рельефов // Труды МАИ. 2017. № 93. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=80248>
25. Гарипова Л.И., Батраков А.С., Кусюмов А.Н. Учет динамических условий обтекания профиля при решении задачи определения балансировочных углов несущего винта вертолета // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=84439>