На правах рукописи

Игнащенко Егор Юрьевич

МЕТОДЫ МИНИМАКСНО-СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ И ОЦЕНИВАНИЯ В ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫХ МОДЕЛЯХ

Специальность 05.13.01
Системный анализ, управление и обработка информации
(авиационная и ракетно-космическая техника)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2010

Работа выполнена на кафедре Теории вероятностей Московского авиационного института (государственного технического университета).

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Панков Алексей Ростиславович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Назин Александр Викторович

кандидат физико-математических наук, доцент Горяинов Владимир Борисович

Ведущая организация: Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем (ГосНИИАС)

Защита состоится « 12 » ноября 2010 года в 10 ч. 00 мин. на заседании Диссертационного совета Д 212.125.04 Московского авиационного института по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское ш., 4, Ученый совет МАИ.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского авиационного института (государственного технического университета).

Автореферат разослан « __ » ___________ 2010 года.

Ученый секретарь Диссертационного совета Д212.125.04,
кандидат физико-математических наук М.В. Ротанина

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Объект исследования. В диссертационной работе рассматриваются задачи условной минимизации дисперсии линейного стохастического функционала, которые можно представить в виде задачи квадратичной оптимизации с линейными ограничениями и неопределенными параметрами.

Актуальность темы. В связи с интенсивным развитием вычислительных систем, постановкой новых все более сложных задач управления, оптимизации, обработки информации и повышения надежности принимаемых управленческих решений существенно возрастают требования к точностным характеристикам результатов обработки данных.

Если на начальной стадии развития теории управления превалировали классические детерминированные модели, описываемые алгебраическими соотношениями, обыкновенными дифференциальными уравнениями, уравнениями в частных производных, интегральными соотношениями и другими аналогичными моделями, то дальнейшие теоретические исследования и результаты практического использования полученных методов и алгоритмов показали, что для адекватного описания реальных процессов необходимо использовать модели, органической частью которых являются неопределенные параметры и сигналы, значения и поведение которых заранее нельзя достоверно предсказать. Последнее привело к созданию стохастической теории управления и развитию сопутствующих вероятностно-статистических методов и алгоритмов обработки информации. Естественно, основные усилия были направлены на получение оптимальных по некоторым специальным критериям методов идентификации, фильтрации и управления (квантильный, вероятностный критерий, критерий «Value at Risk»).

Указанные критерии явно учитывают вероятностно-статистический характер решаемой задачи, а реализация оптимальных алгоритмов обработки информации предполагает наличие необходимого (достаточно большого) объема априорной информации о вероятностных характеристиках случайных параметров и возмущений, как в модели исследуемой системы, так и в модели, описывающей систему сбора и регистрации информации, необходимой для организации управления.

Основной проблемой в реализации оптимальных методов оценивания и управления, помимо их сложности, является отсутствие полной априорной информации о параметрах моделей и вероятностных характеристиках возмущений. Зачастую нет четкой информации о том, можно ли считать параметр модели случайным или следует трактовать его как неопределенный детерминированный. Но даже в случае, когда есть основания считать, что параметры модели являются случайными, у нас обычно нет достоверной информации о точных значениях их вероятностных характеристик (законов распределения, моментных характеристик, ковариаций с другими параметрами и т.д.). Более того, есть основания считать, что во многих задачах, для которых найдены оптимальные решения, условия реализации последних практически никогда не выполняются. Например, шумы наблюдений практически всегда содержат аномальные значения (выбросы), что не позволяет обоснованно использовать предположение об их гауссовости. Кроме того, оптимальные методы оценивания и управления являются весьма чувствительными даже к незначительным отклонениям от принятых допущений, в условиях которых и были получены указанные методы.

В настоящее время сформировались два основных подхода к разработке методов исследования систем с априорной неопределенностью: минимаксный и адаптивный.

Суть *минимаксного* подхода состоит в том, что для обобщенных параметров модели формируется некоторое множество неопределенности их значений и характеристик, после чего задача оценивания и управления решается оптимальным образом в предположении, что реализован «наихудший» элемент указанного множества. При определенных условиях такое решение существует, а алгоритм его реализации обладает гарантирующими свойствами. Таким образом, задачи оценивания и управления при данном подходе решаются с помощью методов теории игр. Впервые в задачах классической математической статистики указанную идею в достаточно развитой форме реализовал А.Вальд. В силу плодотворности игрового (т.е. минимаксного) подхода, в дальнейшем были получены глубокие и разнообразные результаты по минимаксной параметрической и непараметрической статистике в работах А.А. Боровкова, С.М. Ермакова, И.А. Ибрагимова, А.В. Назина. Для указанного круга задач обычно параметры модели считаются неопределенными неслучайными и принадлежащими некоторым ограниченным областям конечномерного пространства, а модели - стохастическими с неизменными во времени вероятностными характеристиками, которые полностью или частично известны. При идентификации и оптимизации линейных регрессионных моделей использовались различные подходы к минимаксному оцениванию, связанные с разными способами описания возмущений. Так, в работах А.Б. Куржанского, М.Л. Лидова использовалась детерминированная модель возмущений с некоторым фиксированным множеством неопределенности, описывающим допустимые значения самих возмущений, а не их характеристик. В работах Б.Ц. Бахшияна, А.И. Матасова, В.Н. Соловьева неопределенные параметры модели считались неслучайными и неограниченными, а возмущения - стохастическими с частично известными характеристиками. Проблема минимаксного оценивания случайных параметров в конечномерных статических моделях с априорной неопределенностью изучалась в работах А.И. Кибзуна, В.В. Малышева, В.Н. Соловьева, H.V. Poor, V.D. Vande Linde. В основном рассматривались линейные модели и линейные стратегии оценивания. Некоторые результаты для нелинейных моделей получены Ю.П. Пытьевым. Особое внимание при исследовании методов идентификации статистически неопределенных моделей в работах В.И. Мудров, В.Л. Кушко, Я.З. Цыпкин, П. Хубер, Е.И. Шапиро было уделено робастным методам оценивания, которые даже для линейной модели наблюдения реализуются в виде нелинейных алгоритмов, а минимаксные свойства оценок проявляются в асимптотике.

Второй подход к решению задач оценивания и управления в условиях априорной неопределенности, называемый обычно *адаптивным*, основан на восстановлении неизвестных вероятностных характеристик стохастических параметров модели, необходимых для построения оптимальных оценок и соответствующего управления. Данный подход исследован в работах Я.З. Цыпкина, А.В. Назина, Б.Т. Поляка, Л. Льюнга, Дж. Саридиса. При определенных условиях оказывается, что такая оценка асимптотически эквивалентна (в некотором вероятностном смысле) оптимальной оценке, однако требует для своего построения существенно меньший объем априорной информации, что достигается за счет более полного и гибкого использования измерительной информации. Как правило, адаптивные алгоритмы фильтрации, идентификации и управления оказываются нелинейными, что существенно затрудняет анализ их неасимптотических свойств. Поэтому поведение адаптивных оценок для выборок конечного объема в практически важных случаях исследуется методами компьютерного статистического моделирования. Кроме того, желание построить теоретически обоснованный алгоритм адаптации требует обычно наложения довольно жестких условий на используемые модели (стационарность, устойчивость, независимость и однородность по распределению шумов, симметрия законов распределения и др.), что несколько ограничивает область обоснованного применения данного подхода на практике. С другой стороны, если для конкретной используемой модели удается строго обосновать процедуру адаптации, то получаемые оценки и стратегии управления могут быть существенно более эффективными, чем минимаксные (т.е. использующие только априорную информацию).

Представляется интересным как с теоретической, так и с прикладной точек зрения попытаться объединить два рассмотренных подхода с целью, с одной стороны, упрощения алгоритмов адаптации, а с другой стороны, повышения точности оценок и эффективности законов управления (по сравнению с чисто минимаксными стратегиями). Это возможно, например, если адаптационный процесс направлен не на восстановление недостающих характеристик модели, а на сужение априорных множеств неопределенности при неизменной общей структуре алгоритма минимаксной обработки информации. В настоящее время проблема адаптации минимаксных алгоритмов находится практически на начальной стадии исследования.

Теория квадратичного программирования достаточно полно разработана в предположении, что все параметры модели точно известны. Тогда решение может быть легко найдено, например, с помощью алгоритмов конического программирования второго порядка (SOCP), которые получили развитие в работах Ben-Tal A., El Ghaoui L., Nemirovski A., Oks M., Oustry F., Lobo M. S., Vandenberghe L., Boyd S., Lebret H.). Однако на практике вместо неизвестных значений параметров обычно используют их оценки, построенные по статистическим данным. В этом случае решение задачи оптимизации существенно зависит от точности используемых оценок. Так, например, предположение о том, что ковариационная матрица стохастического параметра линейного функционала, входящая в выражение для критерия оптимизации, известна точно, представляется нереалистичным. Для учета указанного факта с целью уменьшения чувствительности решения к неопределенности в исходных данных представляется обоснованным модифицировать исходную задачу оптимизации и искать оптимальную стратегию для функционала, вычисленным при наихудших значениях неизвестных параметров.

Диссертационная работа лежит в указанном русле современных исследований в области минимаксно-статистической и адаптивной оптимизации. Множество прикладных задач, решаемых с помощью результатов исследований, и анализ эффективности предложенных методов по результатам численных экспериментов так же подтверждают актуальность выбранной проблематики.

Цель работы. Целью работы является построение и апробирование новых методов поиска гарантирующих решений квадратичных задач условной оптимизации в условия неопределенности с использованием минимаксно-статистического и адаптивного подхода.

Метод исследования. В диссертационной работе использованы методы математического анализа, линейной алгебры, аналитической геометрии для построения аналитического решения задачи условного квадратичного программирования и для описания его свойств.

С помощью результатов теории оптимизации, теории двойственности и теории игр построена процедура решения минимаксных задач.

С помощью результатов математической статистики, многомерного статистического анализа предложены процедуры нахождения робастных гарантирующих решений минимаксных задач.

Математические модели, методики и алгоритмы представлены в виде компьютерных программ в системе программирования MATLAB.

Достоверность результатов. Достоверность результатов обеспечивается:

1. Строгостью постановок и доказательств утверждений.

2. Корректным использованием математических моделей и современных математических методов оптимизации.

3. Сравнением результатов численных расчетов, полученных с помощью итеративных алгоритмов, со значениями, полученными с использованием аналитических решений, если это возможно.

4. Рассмотрением конструктивных примеров, которые демонстрируют достоверность приведенных результатов.

Научная новизна. В работе получены новые результаты, касающиеся методов обработки информации и оптимизации систем, качество которых определяется с помощью квадратичного критерия. К таким результатам относятся:

1. Получено новое аналитическое представление решения сингулярной задачи квадратичного программирования. Для указанного аналитического представления решения найдены условия единственности и непрерывности.

2. Используя известные результаты теории минимакса и указанные выше результаты, доказано существование минимаксного решения задачи квадратичного программирования, а так же предложен эффективный алгоритм его вычисления.

3. Используя результаты многомерного статистического анализа, найдена гарантирующая верхняя грань для критерия оптимизации исходной задачи, что позволило построить адаптивную процедуру поиска решения.

4. Предложены конструктивные способы построения множеств неопределенности в виде доверительных множеств с фиксированной надежностью для параметров модели.

5. Для указанных множеств неопределенности найдены соответствующие минимаксно-статистические решения, для которых доказаны гарантирующие свойства.

6. Предложено новое решение задачи робастного оценивания параметров движения ЛА, обладающее гарантирующими свойствами.

Практическая значимость. Результаты, предложенные в диссертации, использовались при разработке вычислительных алгоритмов обработки информации и построения оптимального управления различными системами, в которых качество управления определяется квадратичным критерием с линейными ограничениями в условиях неопределенности.

Решения, полученные с помощью предложенных численных алгоритмов, обладают высокой точностью и робастными свойствами относительно значений параметров системы за счет использования дополнительной априорной информации, что положительно сказывается на надежности таких управлений.

Кроме того, результаты работы нашли свое применение в решении задачи робастного оценивания параметров траектории ЛА.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на международных научных конференциях «Системный анализ, управление и навигация» (Евпатория, 2007, 2008, 2009, 2010), « Математическое моделирование социальной и экономической динамики (MMSED)» (Москва, 2007, 2010), European Control Conference (ECC'2009), System Identification and Control Problems (SICPRO 2009), и др., а так же на научных семинарах в МАИ, ГосНИИАС.

Диссертационная работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№05-08-17963, 09-08-00369), а так же в рамках Мероприятий 1.1 ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (государственный контракт от 30.09.2009 г. №02.740.11.0471), 1.2.1 «Проведение научных исследований научными группами под руководством докторов наук» (государственный контракт от 18.08.2009 года №П889), ФЦП «Проведение научных исследований целевыми аспирантами» (государственный контракт от 10.08.2009 г. №П674).

Публикации. Основные результаты работы диссертации опубликованы в трех статьях [1-3] в журналах, входящих в Перечень ВАК, а так же в трудах научных конференций [4-8]. Лично автором диссертации в статьях [1,3] приводятся все математические выкладки и расчеты при получении гарантирующих и минимаксно-статистических решений, а в статье [2] доказываются все основные утверждения, касающиеся решения задачи оценивания параметров движения ЛА.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы (188 источников). Объем диссертации включает 113 машинописных страниц, включая 8 рисунков и 10 таблиц.

Содержание работы

Введение. Во введении обоснована актуальность исследуемых проблем, сформулированы цели и задачи диссертационной работы, представлена структура диссертации, перечислены полученные в диссертации новые результаты. Кроме того в ведении декларируется общая постановка задачи квадратичного программирования с линейными ограничениями и указываются прикладные проблемы, решение которых сводится к решению исследуемых задачы.

Первая глава. Первая глава включает в себя результаты для детерминированной постановки задачи минимаксного программирования.

В первой части главы рассматривается постановка задачи квадратичного программирования с линейными ограничениями-равенствами, к которой, в частности, приводятся задачи оценивания параметров движения ЛА и построения оптимального портфеля ценных бумаг (ЦБ).

Получены различные аналитические результаты, такие как условия существования, единственности и непрерывности аналитического решения указанных задач. В первой главе предложен алгоритм численного нахождения решений соответствующей минимаксной задачи.

Данные результаты находят свое развитие в решении регулярной задачи квадратичного программирования с ограничениями общего вида во второй части главы.

Пусть $x \in R^p$ - вектор стратегий оптимизации; $H \in R^{l \times p}$, $z \in R^l$ - известные матричные параметры; $W \in R^{p \times p}$ - симметричная неотрицательно определенная матрица, т.е. $W = W^T \geq 0$.

Рассмотрим следующую задачу оптимизации:

$$\begin{cases} x^T W x \to \min\limits_x, \\ Hx = z. \end{cases} \tag{1}$$

Пусть в условиях задачи (1) матрица W задана лишь с точностью до принадлежности некоторому априори заданному множеству $\mathcal{W}$ симметричных неотрицательно определенных матриц. В этом случае вместо (1) рассматривается задача минимаксной квадратичной оптимизации

$$\begin{cases} \max\limits_{W \in \mathcal{W}} x^T W x \to \min\limits_x, \\ Hx = z. \end{cases} \tag{2}$$

Используя теорию псевдообращения матриц, можно получить общее аналитическое решение задачи (1). Далее всегда будем полагать, что система уравнений $Hx = z$ разрешима, т.е. $HH^+ z = z$, где здесь и далее H^+- псевдообратная матрица.

Лемма 1.1.

1) *общее решение задачи (1) имеет вид*

$$\tilde{x}(W) = \left(I - (PWP)^+ W\right)\left(Py + H^+ z\right), \forall y \in R^n; \tag{3}$$

2) *минимальное значение* $\underline{J}(W)$ *критерия оптимизации* $J(x, W) = x^T W x$ *не зависит от* y *и имеет вид*

$$\underline{J}(W) = J\left(\tilde{x}(W), W\right) = \left(H^{+}z\right)^{T}\left(W - W(PWP)^{+}W\right)H^{+}z, \tag{4}$$

где

$$P = (I - H^{+}H) \tag{5}$$

- ортопроектор на ядро $Ker(H)$ *матрицы* H.

На основе приведенного выше результата получено обобщение теоремы Прайса и указано всё множество решений, полученных в обобщенном методе наименьших квадратов.

Из соотношения (3) следует, что в общем случае задача (1) имеет бесконечно много решений. Следующее утверждение описывает критерий единственности решения указанной задачи.

Лемма 1.2.

Пусть $HH^{+}z = z$. *Решение задачи (1) единственно тогда и только тогда, когда*

$$\Delta(W, H) = \mathrm{Ker}(W) \cap \mathrm{Ker}(H) = \{0\}. \tag{6}$$

Замечание 1.1. Таким образом, единственность решения задачи оптимизации (1) возможна лишь при $\mathrm{rank}(P) \le \mathrm{rank}(W) \le p$.

Замечание 1.2. Условие (6) очевидно выполнено, если $\mathrm{Ker}(H) \subseteq \mathrm{Im}(W)$.

Замечание 1.3. Общее решение задачи (1) можно представить в виде

$$\tilde{x}(W) = \left(I - (PWP)^{+}W\right)H^{+}z + \left(I - (PWP)^{+}W\right)Py = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2(y). \tag{7}$$

Используя свойства оператора P вида (5), можно показать, что $\tilde{x}_1 \perp \tilde{x}_2(y)$, откуда следует, что при любых W, H решение (3) задачи (1) с минимальной нормой (*нормальное решение*) единственно и имеет вид

$$\tilde{x}(W) = \left(I - (PWP)^{+}W\right)H^{+}z. \tag{8}$$

Таким образом, если решение задачи квадратичного программирования единственно, то оно имеет вид (8).

Покажем теперь, что в условиях леммы 2 решение (3) задачи (1) непрерывно по матричной переменной W.

Лемма 1.3.

Пусть $\mathfrak{W}$ *- множество матриц, для каждой из которых выполняется (6). Тогда решение (3) задачи (1) непрерывно по* W *на* $\mathcal{W}$*; оптимальное значение критерия (4) также непрерывно по* W *на* $\mathcal{W}$.

Из утверждений лемм 1.2 и 1.3 следует, что условие (6) необходимо и достаточно для существования, единственности и непрерывности по W оптимальной стратегии. Ниже будет показано, что в этом случае минимаксная стратегия является функцией от решения двойственной задачи, которое может быть найдено численно с использованием сходящегося итерационного алгоритма.

Рассмотрим теперь решение задачи квадратичного программирования в минимаксной постановке (2) при условии, что множество неопределенности $\mathcal{W}$ задано априори.

Теорема 1.1.

Пусть множество $\mathcal{W}$ - выпуклый компакт симметричных неотрицательно определенных матриц, причем $\Delta(W,H)=\{0\}$ для любой матрицы $W\in\mathcal{W}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) существует решение двойственной задачи

$$\hat{W}\in \operatorname{Arg}\max_{W\in\mathcal{W}} \underline{J}(W); \tag{9}$$

2) стратегия $\hat{x}=\tilde{x}(\hat{W})=\left(I-\left(P\hat{W}P\right)^{+}\hat{W}\right)H^{+}z$ *является минимаксной на множестве* $X\times\mathcal{W}$*;*

3) *пара* $(\hat{x},\hat{W})$ *образует седловую точку критерия* $J(x,W)$ *на* $X\times\mathcal{W}$*;*

4) *гарантированное значение критерия* $J(x,W)$ *на* $X\times\mathcal{W}$ *равно*

$$\hat{J}=J(\hat{x},\hat{W})=\left(H^{+}z\right)^{T}\left\{\hat{W}-\hat{W}(P\hat{W}P)^{+}\hat{W}\right\}\left(H^{+}z\right). \tag{10}$$

Для доказательства теоремы 1.2 достаточно проверить выполнение условий известного результата теоремы о минимаксе.

Из п.1 утверждения теоремы 1.2 следует, что минимаксная стратегия вычисляется аналитически, если найдено решение двойственной задачи (9). Заметим, что в общем случае проблема (9) является задачей максимизации вогнутой функции многих переменных на произвольном выпуклом множестве неопределенности. В связи с этим решение задачи минимаксной оптимизации общего вида требует использования некоторого численного алгоритма решения двойственной задачи и, следовательно, всей задачи минимаксной оптимизации:

Приведенный ниже алгоритм базируется на теоретических положениях, приведенных в леммах 1.1 - 1.3 и теореме 1.2.

Алгоритм 1.1. Пусть i – номер итерации. Полагаем $i:=0$ и выбираем произвольно начальное приближение $W_0\in\mathcal{W}$.

1) По формуле (8) находим текущее приближение стратегии $x_i=\tilde{x}(W_i)$.

2) Находим решение задачи максимизации линейной функции:

$$\hat{W}_{i+1}\in \operatorname{Arg}\max_{W\in\mathcal{W}} J(x_i,W). \tag{11}$$

3) Решаем задачу одномерной максимизации по переменной δ:

$$\overline{\delta}=\arg\max_{\delta\in[0;1]} \underline{J}\left(\delta W_i+(1-\delta)\hat{W}_{i+1}\right). \tag{12}$$

4) Находим очередное приближение по формуле:

$$W_{i+1}=\overline{\delta}W_i+\left(1-\overline{\delta}\right)\hat{W}_{i+1}. \tag{13}$$

5) Если $\underline{J}(W_{i+1})-\underline{J}(W_i)>0$, то увеличиваем номер итерации $i:=i+1$ и переходим к пункту 1), иначе завершаем итерационный процесс.

Указанный алгоритм является модификацией известного метода условного градиента. Сходимость данного алгоритма сформулирована в виде следующей теоремы.

Пусть Ω - множество решений задачи двойственной оптимизации (9), а $r(x,\Omega)=\min_{y\in\Omega}\|x-y\|$ - расстояние от x до выпуклого компакта Ω.

Теорема 1.2.

Пусть выполнены условия теоремы 1.1.

Тогда возможны следующие варианты:
а) если итерационный процесс прекращается после конечного числа k итераций, то $W_k \in \Omega$, а $\hat{x} = \tilde{x}(W_k)$ - искомая минимаксная стратегия;
б) в противном случае $r(W_i, \Omega) \to 0$ и $x_i = \tilde{x}(W_i) \to \hat{x}$ при $i \to \infty$.

Утверждение теоремы 1.2 получено с использованием известных результатов о применении метода условного градиента в задачах минимаксной оптимизации.

В некоторых практически важных частных случаях функционал $\overline{J}(x) = \max_{W \in \mathcal{W}} x^T W x$ удается вычислить аналитически, что, в свою очередь, позволяет найти минимаксную стратегию $\hat{x}$ непосредственно, т.е. не решая двойственную задачу (9).

Теорема 1.3.

Пусть $G \neq 0$, тогда решение задачи

$$\begin{cases} \operatorname{tr}\left[WG\right] \to \max\limits_{W \in \mathcal{W}}, \\ \mathcal{W} = \left\{ W \in R_{+}^{p \times p} : \left\| I - V^{-1/2} W V^{-1/2} \right\| \le \varepsilon \right\} \end{cases} \tag{14}$$

имеет вид $\max\limits_{W \in \mathcal{W}} \operatorname{tr}\left[WG\right] = \operatorname{tr}\left[\hat{W}G\right] = \operatorname{tr}\left[VG\right] + \varepsilon \sqrt{\operatorname{tr}\left[\left(VG\right)^2\right]}$,

где $\hat{W} = V + \varepsilon \dfrac{VGV}{\sqrt{\operatorname{tr}\left[\left(VG\right)^2\right]}} \in \mathcal{W}$

Рассмотрим множество неопределенности, заданное с помощью поэлементных ограничений:

$$\mathcal{W}_{\infty} = \left\{ W \in \mathbb{R}_{+}^{p \times p} : W_{ij}^{-} \le W_{ij} \le W_{ij}^{+}; i, j = 1, \ldots, n \right\}, \tag{15}$$

где $W_{-} = \left\{ W_{ij}^{-} \right\}$ и $W_{+} = \left\{ W_{ij}^{+} \right\}$ — симметричные матрицы такие, что $W^c = \{W_{ij}^c\} = \left(W_{+} + W_{-}\right)/2$ и $\Delta = \{\Delta_{ij}\} = \left(W_{+} - W^c\right)/2$ также неотрицательно определены.

В этом случае реализация алгоритма 1.1 существенно упрощается, так как задача (11) имеет аналитическое решение:

$$\hat{W}_{i+1} = \{\hat{W}_{ij}\} = \{W_{ij}^c + \Delta_{ij} \operatorname{sign}\left(x_i\right) \operatorname{sign}\left(x_i\right)^T\}, \tag{16}$$

причем $\hat{W}_{i+1}$ также будет неотрицательно определенной матрицей.

Так же в работе рассмотрен аналогичный итерационный алгоритм решения минимаксной задачи квадратичного программирования с ограничениями общего вида

$$\hat{x} \in \operatorname{Arg} \min_{x \in X} \sup_{V \in \mathcal{W}} J\left(x, W\right), \; X = \left\{ x \in R^p : Ax = a, Bx \le b \right\}, \tag{17}$$

базирующийся на теории двойственности.

Вторая глава. Во второй главе представлены стохастические результаты диссертационной работы. В первой части главы найдена верхняя гарантирующая граница для критерия задачи, с помощью которой найдено аналитическое выражение для адаптивного решения задачи (1).

Во второй части главы предложены конструктивные методы построения доверительных множеств для параметров модели с заданной надежностью. Так же найдены минимаксно-статистические решения, обладающие гарантирующими свойствами.

В задачах оптимального линейного оценивания и оптимизации инвестиционного портфеля, сводящихся, как было указано выше, к задаче (1), матрица W является ковариационной матрицей случайного вектора $\theta \in \mathbb{R}^p$ параметров оптимизируемой модели. Предположим, что матрица W неизвестна, но у нас имеется выборка $\{\theta_1,...,\theta_n\}$ объема n реализаций вектора θ, построим вероятностный аналог минимаксной стратегии, рассмотренной выше.

Далее будем предполагать, что вектор θ имеет нормальное распределение $\mathbf{N}(\mu;W)$ с неизвестными параметрами, причем $W \in \mathcal{W}$ и для любой матрицы из $\mathcal{W}$ выполняется условие (6)

Пусть $\bar{W}_n$ - выборочная оценка ковариационной матрицы $W \in \mathcal{W}$. Из результатов по статистическому оцениванию ковариационных матриц следует, что для любого $x \notin Ker(W)$ и $n \geq 2$ статистика

$$\tau_n = \frac{(n-1)x^T \bar{W}_n x}{x^T W x} \tag{18}$$

имеет распределение $\chi^2(n-1)$ (хи-квадрат с $r = n-1$ степенью свободы). Отсюда немедленно следует, что при любом $x \notin Ker(W)$

$$\mathbf{P}\left(x^T W x \leq \phi_n(x)\right) = q = 1-\beta, \tag{19}$$

если

$$\phi_n(x) = \lambda_n x^T \bar{W}_n x,\ \lambda_n = (n-1)\big/\chi^2_\beta(n-1), \tag{20}$$

а $\chi^2_\beta(n-1)$ - квантиль уровня β распределения $\chi^2(n-1)$.

Итак, для любой матрицы $W \in \mathcal{W}$ и любого вектора $x \in R^p$ выполнено (19). Отсюда следует, что при каждом $x \in R^p$ $\phi_n(x)$ - верхняя гарантирующая (с надежностью $q = 1-\beta$) граница критерия $J(x,W) = x^T W x$ на множестве неопределенности $\mathcal{W}$ матриц ковариаций. Сразу заметим, что величина λ_n, определенная в (20), асимптотически совпадает с $\tilde{\lambda}_n = 1\Big/\left(1-u_q\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}\right)$, где u_q - квантиль уровня q стандартного нормального распределения (т.е. $\tilde{\lambda}_n/\lambda_n \to 1,\ n\to\infty$). Поэтому $\lambda_n \to 1,\ N \to \infty$.

В соответствии с идеологией гарантирующего подхода, изложенной выше, определим *минимаксно-адаптивную* стратегию $\hat{x}_N$ из условия минимизации верхней гарантирующей границы критерия

$$\hat{x}_n \in \arg\min_{x\in X} \phi_n(x). \tag{21}$$

Из выражения (20) для $\phi_n(x)$ с учетом $\lambda_n > 0$ при $n \geq 2$ следует, что

$$\arg\min_{x\in X}\phi_n(x)=\arg\min_{x\in X}J(x,\bar{W}_n).$$

В работе доказано, что задача (21) почти наверное имеет единственное решение.

Пусть $\hat{x}_n=\arg\min_{x\in X}J\left(x,\bar{W}_n\right)$, а $\hat{J}_n=J\left(\hat{x},\bar{W}_n\right)$, а $W_0\in\mathcal{W}$ - истинное неизвестное значение ковариационной матрицы. Обозначим так же u_q - квантиль уровня $q=1-\beta$ распределения $\mathbf{N}(0,1)$, $0<\beta\ll 1$.

Теорема 2.1.

Пусть $x_0=\arg\min_{x\in X}J\left(x,W_0\right)$ *- оптимальная стратегия,* $J_0=J\left(x_0,W_0\right)>0$. *Тогда* $\forall W_0\in\mathcal{W}$

$$P\left(J\left(\hat{x}_n,W_0\right)\le\frac{\hat{J}_n}{1-u_q\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}}\right)\to 1-\beta,\ n\to\infty. \qquad (22)$$

Следствие 1.

Так как почти наверное $J\left(\hat{x}_n,W_0\right)\ge J_0$, то из (22) следует, что $P\left(J_0\le\dfrac{\hat{J}_n}{1-u_q\sqrt{2/(n-1)}}\right)\ge q=1-\beta$, т.е. величина $\dfrac{\hat{J}_n}{1-u_q\sqrt{2/(n-1)}}$ является гарантирующей с надежностью q верхней границей для значения критерия $J_0=J\left(x_0,W_0\right)$.

Для получения минимаксно-статистического решения, использующего априорную информацию, наравне с предыдущим результатом, рассмотрим другой метод, который заключается в использовании доверительного множества с фиксированной асимптотической надежностью и размером, зависящим от объема выборки реальных данных, вместо априори заданного множества неопределенности задачи (2).

Используя результаты работы, связанные с оцениванием ковариационной матрицы по многомерной гауссовской выборке, можно показать, что

$$\left(I-\tilde{W}_n^{-1/2}W\tilde{W}_n^{-1/2}\right)\sqrt{(n-1)/2}\xrightarrow{D}N\left(O,\mathbb{I}_p\right),\text{ при } n\to\infty, \qquad (23)$$

где $\mathbb{I}_p$ — единичный оператор в пространстве симметричных матриц размера $(p\times p)$.

Из (23) можно найти асимптотическое распределение спектральной нормы:

$$\left\|I-\tilde{W}_n^{-1/2}W\tilde{W}_n^{-1/2}\right\|\sqrt{(n-1)/2}\xrightarrow{D}\Lambda(p), \qquad (24)$$

где $\Lambda(p)$ — распределение наибольшего по модулю собственного значения случайной симметричной матрицы размера $(p\times p)$, распределенной по закону $N\left(O,\mathbb{I}_p\right)$. Точный вид закона распределения $\Lambda(p)$ известен.

Аналогично, для распределения квадрата фробениусовой нормы имеем

$$\left\| I-\tilde{W}_n^{-1/2} W \tilde{W}_n^{-1/2} \right\|_2^2 (n-1)/2 \xrightarrow{D} \chi^2(r) \text{ при } n \to \infty, \tag{25}$$

где $\chi^2(r)$ — распределение хи-квадрат с $r = p(p+1)/2$ степенями свободы.

Наконец, асимптотическое распределение равномерной нормы, т.е. предельное распределение статистики

$$\left\| I-\tilde{W}_n^{-1/2} W \tilde{W}_n^{-1/2} \right\|_\infty \sqrt{(n-1)/2} \tag{26}$$

совпадает с распределением максимума из $r = p(p+1)/2$ независимых стандартных гауссовских случайных величин. Соответствующая квантиль уровня β такого распределения равна $\Phi^{-1}\left(\dfrac{1+\sqrt[r]{\beta}}{2}\right)$, где $\Phi^{-1}(\cdot)$ — функция, обратная к функции распределения стандартной нормальной величины.

Асимптотические распределения случайных величин (23)–(26) позволяют определить характерный размер доверительных множеств, построенных с помощью спектральной, фробениусовой и равномерной норм соответственно:

$$\mathcal{W}_{sp}^{(n)} = \left\{ W \in \mathbb{R}_+^{p\times p} : \left\| I-\tilde{W}_n^{-1/2} W \tilde{W}_n^{-1/2} \right\| \le \delta_{sp}^{(n)} \right\}, \tag{27}$$

$$\mathcal{W}_2^{(n)} = \left\{ W \in \mathbb{R}_+^{p\times p} : \left\| I-\tilde{W}_n^{-1/2} W \tilde{W}_n^{-1/2} \right\|_2 \le \delta_2^{(n)} \right\}, \tag{28}$$

$$\mathcal{W}_\infty^{(n)} = \left\{ W \in \mathbb{R}_+^{p\times p} : \left\| I-\tilde{W}_n^{-1/2} W \tilde{W}_n^{-1/2} \right\|_\infty \le \delta_\infty^{(n)} \right\}. \tag{29}$$

Здесь

$$\delta_{sp}^{(n)} = \Lambda_\beta(p)\sqrt{\frac{2}{n-1}},\ \delta_2^{(n)} = \sqrt{\frac{2\chi_\beta^2(r)}{n-1}},\ \delta_\infty^{(n)} = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\sqrt[r]{\beta}}{2}\right)\sqrt{\frac{2}{n-1}},$$

где $\Lambda_\beta(p)$ — квантиль уровня β распределения $\Lambda(p)$, а $\chi_\beta^2(r)$ — квантиль уровня β распределения хи-квадрат с r степенями свободы.

Поскольку множества (27)–(29) построены на основе статистических данных, будем их называть *статистическими множествами неопределенности*.

Все построенные выше статистические множества неопределенности являются асимптотическими доверительными областями надежности β для матрицы W, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{ W \in \tilde{\mathcal{W}}^{(n)} \right\} = \beta$, где $\tilde{\mathcal{W}}^{(n)}$ - любая из областей, определенных соотношениями (27)–(29).

Используя свойства минимаксных стратегий, рассмотренные в первой главе, и свойства статистических множеств неопределенности, можно показать справедливость следующего утверждения.

Теорема 2.2.

Пусть $\tilde{\mathcal{W}}^{(n)}$ совпадает с множеством (27)–(29). Тогда

1) минимаксное решение

$$\hat{x}_n \in \operatorname{Arg}\min_{x\in X} \max_{W\in\tilde{\mathcal{W}}^{(n)}} J(x,W) \tag{30}$$

совпадает с решением задачи квадратичной оптимизации

$$\bar{x}_n \in \operatorname{Arg}\min_{x\in X} J(x,\bar{W}_n), \tag{31}$$

где $\bar{W}_n$ — выборочная оценка ковариационной матрицы;

2) гарантированное значение критерия равно

$$\hat{J}_n = \min_{x \in X} \max_{W \in \tilde{\mathcal{W}}^{(n)}} J(x, W) = \left(1 + \delta^{(n)}\right) J\left(\hat{x}_n, \overline{W}_n\right); \qquad (32)$$

3) стратегия $\hat{x}_n$ *является* ε_n*-оптимальной с вероятностью* β*, т.е.* $\liminf_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{J\left(\hat{x}_n, W\right) \le J\left(x^0, W\right) + \varepsilon_n\right\} \ge \beta$*, где* $\varepsilon_n = 2\delta^{(n)} J\left(\hat{x}_n, \overline{W}_n\right)$*, а* x^0 *— оптимальная стратегия.*

Выбор указанных доверительных множеств как множеств неопределенности в задаче (2) так же удобен тем, что соответствующий двойственный функционал (9) в этих случаях имеет аналитическое представление, рассмотренное ранее в первой главе.

Третья глава. Рассмотрим многомерную линейную модель наблюдения

$$y_k = a(\tau_k)\theta + \varepsilon_k, \; k = 1, \ldots, n, \qquad (33)$$

где $y_k \in R^m$ - результат k-ого наблюдения, $\theta \in R^p$ - вектор неслучайных неизвестных параметров, $a(\tau) \in R^{m\times p}$ - известная функция времени, τ_k - заданный момент времени k-ого наблюдения. Далее мы всегда будем полагать, что процесс $\{\varepsilon_k\}$ - векторный гауссовский белый шум с параметрами $E\{\varepsilon_k\} = 0$, $\operatorname{cov}\{\varepsilon_k, \varepsilon_k\} = V$, где $V = V^k \succ 0$, т.е. симметричная положительно определенная матрица. В общем случае ковариационная матрица V известна лишь с точностью до принадлежности некоторому множеству $\mathfrak{W}$ положительно определенных симметричных матриц размера $(m \times m)$. Далее $\mathfrak{W}$ будим называть множеством неопределенности для V.

$$V \in \mathfrak{M} = \left\{W : W \in R^{m\times m}, W = W^T > 0\right\}. \qquad (34)$$

Обозначим $Y = \operatorname{col}[y_1, \ldots, y_n]$, $A = \operatorname{col}\left[a(\tau_1), \ldots, a(\tau_n)\right]$, $\varepsilon = \operatorname{col}[\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n]$, где $\operatorname{col}[x_1, \ldots, x_n] = \left\{x_1^*, \ldots, x_n^*\right\}$. Тогда модель (34) принимает вид

$$Y = A\theta + \varepsilon, \qquad (35)$$

где $\varepsilon \in R^{mn}$ - гауссовский случайный вектор с параметрами $E\{\varepsilon\} = 0$, $\operatorname{cov}\{\varepsilon, \varepsilon\} = diag[V, \ldots, V] = I \otimes V$.

По наблюдениям (35) требуется построить с.к. оптимальную линейную несмещенную оценку $\tilde{x}$ вектора

$$x = a\theta, \qquad (36)$$

где $a \in R^{q\times p}$ - заданная неслучайная матрица.

Произвольная линейная по Y оценка для x имеет вид $\tilde{x} = FY$, где $F \in R^{q\times mn}$ - оператор линейного оценивания.

Для оптимизации F будем использовать с.к. критерий

$$J(F, V) = E\left\{\|x - FY\|^2\right\}. \qquad (37)$$

Если оценка $\tilde{x}$ обладает свойствами несмещенности, то $E\{x - FY\} = 0$, откуда следует, что F должен удовлетворять условию

$$FA = a, \qquad (38)$$

а критерий оптимизации с учетом (38) принимает вид

$$J(F,V) = \operatorname{tr}\left\{F(I \otimes V)F^*\right\}. \qquad (39)$$

Необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (38) при заданных A и a имеет вид

$$aA^+A = a. \qquad (40)$$

В этом случае говорят, что $x = a\theta$ допускает линейную несмещенную оценку по наблюдениям Y вида (35).

Если матрица V известна точно, то оператор $\tilde{F}$ оптимального оценивания x по критерию $J(F,V)$ вида (39) определяется из условия

$$\tilde{F} \in \operatorname{Arg}\min_{F \in \mathfrak{F}} J(F,V), \qquad (41)$$

где $\mathfrak{F}$ - множество решений (38), т.е. $\mathfrak{F} = \left\{F \in R^{q \times r} : FA = a, aA^+A = a\right\}$.

В общем случае мы знаем лишь то, что $V \in \mathfrak{W}$, поэтому вместо задачи (41) будем рассматривать её минимаксный вариант:

$$\hat{F} \in \operatorname{Arg}\min_{F \in \mathfrak{F}} \left\{\max_{V \in \mathfrak{W}} \operatorname{tr}\left[F(I \otimes V)F^*\right]\right\}. \qquad (42)$$

С помощью результатов, полученных в работе, удалось найти решение задачи (42) в следующем виде

$$\hat{V} \in \operatorname{Arg}\max_{V \in \mathfrak{W}} \underline{J}(V), \qquad (43)$$

где $\underline{J}(V)$ имеет вид

$$\underline{J}(V) = \operatorname{tr}\left[a\left(A^*\left(I \otimes V^{-1}\right)A\right)a^*\right]. \qquad (44)$$

Минимаксный оператор оценивания $\hat{F}$ в (42) имеет вид

$$\hat{F} = F\left(\hat{V}\right), \qquad (45)$$

где $F(V)$ определяется выражением

$$\tilde{F} = F(V) = a\left(A^*\left(I \otimes V^{-1}\right)A\right)^+ A^*\left(I \otimes V^{-1}\right), \qquad (46)$$

а $\hat{V}$ - решение (43); соответствующая минимаксная оценка $\hat{x}$ для x имеет вид

$$\hat{x} = F\left(\hat{V}\right)Y, \qquad (47)$$

Оценка $\tilde{x}$, приведенная в работе, является оценкой Гаусса-Маркова и дает решение задачи с.к. оптимального оценивания в модели (35), (36), с полной информацией.

Пусть движение центра масс ЛА на промежутке времени $[0,T]$ описывается линейной многомерной кинематической моделью вида

$$Z_t = \Psi_t \vartheta, \ t = 0,1,\dots,T, \qquad (48)$$

где $Z_t \in R^3$ - вектор декартовых координат центра масс ЛА в момент времени t в некоторой базовой системе координат $\{0, z_1, z_2, z_3\}$,

$$\Psi_t = \begin{bmatrix} \psi_{0t} & \psi_{1t} & \dots & \psi_{p_1 t} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \psi_{0t} & \psi_{1t} & \dots & \psi_{p_2 t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \psi_{0t} & \psi_{1t} & \dots & \psi_{p_3 t} \end{bmatrix},$$

где $\{\psi_{kt}\}_{k=1}^{\infty}$ - некоторая полная система базисных функций на $[0,T]$, используемая для аппроксимации закона движения ЛА, p_i - порядок разложения по i-ой координате, $i=1,2,3$; $\vartheta=\{\vartheta_1,...,\vartheta_m\}^*$ - вектор неизвестных параметров (коэффициентов разложения); $p = p_1 + p_2 + p_3$.

Предполагается, что измерение параметров движения ЛА осуществляется комплексом из $k \geq 1$ внешне траекторных измерительных средств (ИС), с каждым из которых связана собственная система декартовых координат $\{0, z_1^i, z_2^i, z_3^i\}$, $i=1,...,k$. Каждое ИС комплекса принадлежит к одному из следующих двух типов. ИС первого типа измеряет наклонную дальность r^i, азимут β^i и угол места ε^i, где i-номер ИС в комплексе. ИС второго типа измеряет наклонную дальность r^i и косинусы направляющих углов α_1^i, α_2^i.

Параметрическая модель наблюдения i-ого ИС имеет вид:

$$Y_t^i = A_t^i\theta + \Delta Q_t^i,\ t=1,..,T,\ i=1,...,k, \qquad (49)$$

где введены обозначения $Y_t^i = \tilde{Q}_t^i - W_i\left(\bar{Z}_t^i\right)$; $A_t^i = R_i\left(\bar{Z}_t^i\right)H_t^i = R_i\left(\bar{Z}_t^i\right)U_i\Psi_t$. Здесь Z_t^i - декартовы координаты ЛА в системе i-го ИС в момент времени t; $Q^i = W_i\left(Z_t^i\right)$ - связь декартовых и измеряемых координат в системе i-го ИС, $\tilde{Q}_t^i = W_i\left(Z_t^i\right) + \Delta Q_t^i$ - измерения i-ого ИС в момент времени t; $\Delta Q_t^i \sim N\left(0, V_i\right)$ - вектор ошибок измерений i-го ИС в момент времени t, $\bar{Z}_t^i = H_t^i\bar{\vartheta} + u_i$ - опорное движение ЛА в системе i-го ИС, $R_i\left(Z\right) = \dfrac{\partial W_i\left(Z\right)}{\partial Z}$, U_i - матрица перехода из базовой системы координат к системами каждого ИС.

Очевидно, что модель (49) совпадает с исходной моделью (35) с точностью до обозначений.

Пусть модель опорного движения ЛА имеет вид

$$\begin{cases} z_{1t} = 25000, \\ z_{2t} = -19990 + 300t, \\ z_{3t} = 20000 - 10t, \end{cases} \qquad (50)$$

где $t \in [0, 250]$.

Представим модель (50) в векторном виде $Z_t = \Psi_t\bar{\vartheta}$, где

$$\Psi_t = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{bmatrix},$$ а $\bar{\vartheta} = \{25000, 0, -19990, 300, 20000, -10\}$ - вектор опорных значений параметров модели.

Пусть вектор неизвестных возмущений параметров движения равен $\theta = \{50, 2, 50, -2, 50, 1\}$.

Измерительный комплекс из двух средств представлен на рис. 1.

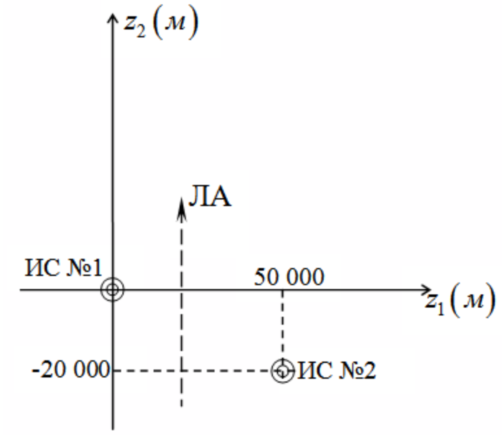

Рис. 1. Комплекс из 2-х ИС и траектория ЛА (Вид со стороны оси z_3).

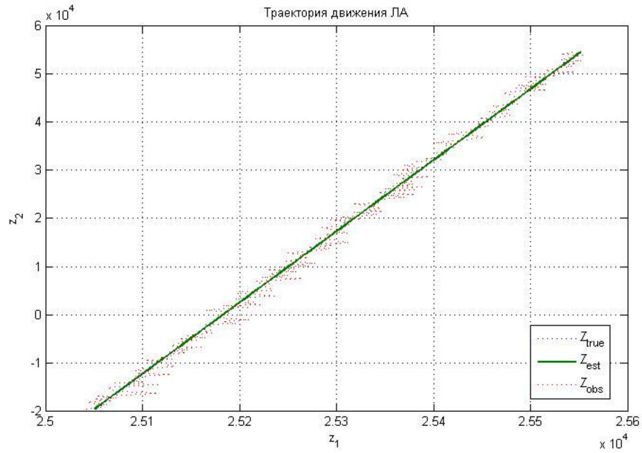

Рис. 2. Траектория движения ЛА.

Измерительные средства проводят наблюдения с частотой 1 Гц.

В процессе паспортизации ИС было проведено $N = 100, 250, 1000$ наблюдений для построения доверительных областей указанных ковариационных матриц V_1 и V_2 на уровне надежности $\beta = 0{,}95$, с помощью методов, изложенных во второй главе работы.

Для различных объемов выборки априорной информации были найдены минимаксно-статистические оценки $\hat{\theta}$ вектора неизвестных параметров модели движения летательного аппарата (для этого в соответствующей модели $a = I$ - единичная матрица соответствующей размерности) и оценки траектории летательного аппарата в моменты измерений (рис. 2).

Полученные результаты оценивания показали, что разработанный алгоритм минимаксно-статистической обработки измерительной информации позволяет получить на требуемом уровне надежности высокоточные оценки как параметров модели движения летательного аппарата, так и его фазовой траектории на всем интервале наблюдения. Кроме того, результаты численных вычислений позволяют сделать следующие выводы:

— найденные минимаксно-статистические стратегии оказались близкими к оптимальной стратегии, построенной в условиях наличия полной априорной информации;

— для небольшого объема статистических данных гарантированное значение критерия заметно превышает оптимальное значение критерия, что объясняется довольно большим радиусом доверительной области, если надежность последней близка к единице;

— при увеличении объема выборки статистическое множество неопределенности «уменьшается», что приводит к сходимости минимаксных стратегий и соответствующего гарантированного значения критерия к их оптимальным значениям. Аналогичным свойством обладает и адаптивная стратегия.

Основные результаты, выносимые на защиту

1. Найдены необходимые и достаточные условия существования, единственности и непрерывности по параметрам модели решения сингулярной задачи квадратичного программирования. [1].
2. Предложены методы построения по эмпирическим данным статистических множеств неопределенности требуемого уровня надежности для ковариационной матрицы случайных параметров линейно-квадратичной модели [2,3].
3. Найдено аналитическое представление минимаксно-статистических стратегий в задаче квадратичной оптимизации для статистических множеств неопределенности специального вида [2,3].
4. Разработан алгоритм численного построения минимаксно-статистических стратегий для произвольных выпуклых компактных статистических множеств неопределенности [1].
5. Предложено новое решение задачи робастного оценивания параметров движения ЛА с использованием априорной информации, обладающее гарантирующими свойствами [2].

Публикации в журналах из перечня ВАК

[1] Игнащенко Е.Ю., Панков А.Р. Минимаксно-адаптивная оптимизация линейных статистически неопределенных моделей// Вестник МАИ, 2008, т. 15, № 2, с. 105-112.

[2] Игнащенко Е.Ю., Панков А.Р., Семенихин К.В. Минимаксно-статистический подход к повышению надежности обработки измерительной информации. // Автоматика и телемеханика, 2010, №02, с.76-92.

[3] Игнащенко Е.Ю., Панков А.Р., Семенихин К.В. Минимаксно-статистический подход к оптимизации линейных моделей в условиях априорной неопределенности. // Изв. РАН, ТиСУ, 2010, № 5, с. 32-40.

Публикации в других изданиях

[4] Панков А.Р., Игнащенко Е.Ю. Адаптивный алгоритм минимаксного оценивания траектории движения ЛА// 13-я Международная научная конференция «Системный анализ, управление и навигация ЛА». М.: МАИ-Принт, 2008, с. 263-265.

[5] Pankov A., Siemenikhin K., Ignastchenko E. Sample-Based Minimax Linear-Quadratic Optimization // Proceedings of the European Control Conference (ECC-2009), Budapest, Hungary, 2009, pp. 3221-3226.

[6] Панков А.Р., Игнащенко Е.Ю. Адаптивный алгоритм минимаксного оценивания траектории движения ЛА// 13-я Международная научная конференция «Системный анализ, управление и навигация ЛА». М.: МАИ-Принт, 2008, с. 263-265.

[7] Панков А.Р., Игнащенко Е.Ю. Методика повышения надежности результатов оценивания параметров движения ЛА// 14-я Международная научная конференция Системный анализ, управление и навигация ЛА». М.: МАИ-Принт, 2009, с. 103-104.

[8] Pankov A.R., Platonov E.N. and Ignastchenko E.Yu. Minimax-Optimal Portfolio Selection by Probability Criterion under Uncertainty// SicPRO’2009, Moscow, Russia, 2009