

УДК 629.7.076 : 519.863

СВОЙСТВА ОПТИМАЛЬНЫХ ЗАМКНУТЫХ МАРШРУТОВ ПОЛЁТА ЛЁГКОГО САМОЛЁТА С УЧЁТОМ ПРОГНОЗА ВЕТРА

Моисеев Д. В. , Фам С. К.

Аннотация: В статье сформулированы и доказаны некоторые свойства замкнутых маршрутов облета точек с известным местоположением в условиях воздействия на летательный аппарат постоянного по направлению и скорости ветра. Показана возможность применения этих свойств при составлении замкнутых маршрутов полета.

Ключевые слова: Задача коммивояжера, оптимальный маршрут полета, замкнутый маршрут облета, прогноз ветра, планирование маршрута полета.

Введение

На современном этапе широко востребованы и активно создаются легкие самолеты различных типов, мотодельтапланы и малые беспилотные летательные аппараты. Широкий круг проблем, связанных с разработкой и эксплуатацией таких аппаратов, активно обсуждается в литературе [1,2]. Одной из таких проблем является рациональное формирование маршрутов полета таких аппаратов. Актуальность этой проблемы обусловлена тем, что рациональная маршрутизация полета малых летательных аппаратов является прямым путем к повышению эффективности их целевого функционирования. Достаточно известным приемом [3] является сведение задачи маршрутизации к задаче коммивояжера [4]. Это понятно, если учесть, что одной из наиболее распространенных схем полета рассматриваемых аппаратов является полет по замкнутому маршруту, который должен соединить набор точек с известным местоположением. Классическим критерием при такой трактовке задачи маршрутизации является длительность полета по маршруту. Минимизация этого критерия, как указано в [3], позволяет снизить расход горючего и повысить оперативность соответствующей системы. Весьма распространенным является прием, предусматривающий сведение сложной исходной задачи маршрутизации к набору

сравнительно более простых подзадач, одной из которых является задача коммивояжера. Примеры использования такого подхода можно найти в работах [5,6]. Для решения задачи маршрутизации полета в форме задачи коммивояжера могут использоваться хорошо известные алгоритмы решения задачи коммивояжера [7]. Меньше работ посвящено исследованию свойств решения этой задачи. Особенно это относится к поиску возможностей практического использования этих свойств при построении методик и вычислительных алгоритмов решения задачи коммивояжера. В частности, при построении эвристических, или приближенных процедур ее решения. Особенностью задачи маршрутизации полета является необходимость учета ветра, действующего в зоне полета. Одной из первых работ, посвященных исследованию свойств замкнутых оптимальных маршрутов полета с учетом прогноза ветра в зоне полета, является вероятно [8]. В этой работе было указано на существование определенных областей постоянства (устойчивости) решений задачи маршрутизации в форме задачи коммивояжера. Там же были отмечены определенные свойства этих областей. В данной статье продолжены исследования свойств замкнутых оптимальных маршрутов полета. В частности, приведены их строгие доказательства.

Техническая постановка задачи маршрутизации и ее формализация

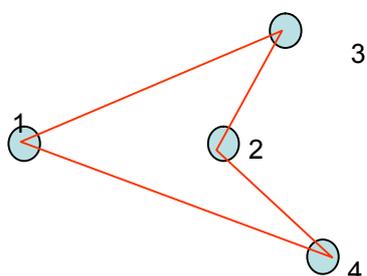
На местности в определенной системе координат задана группа точек. Известны также координаты точки старта (точка, из которой вылетает летательный аппарат) и финиша (точка, в которой аппарат заканчивает полет), причем эти точки совпадают. Задача сводится к определению замкнутого маршрута наискорейшего облета всех заданных точек. Предполагается, что при облете точек аппарат движется на постоянной высоте с постоянной воздушной скоростью. Предполагается также, что аппарат способен выдерживать курс на очередную точку, несмотря на действие ветра. Очевидно, что приведенная выше формулировка задачи совпадает с формулировкой замкнутой задачи коммивояжера [4]. Действительно, требуется найти замкнутый маршрут обхода точек без повторного захода в них, причем за минимум времени. Для аппаратов рассматриваемого типа характерен сравнительно небольшой радиус действия и непродолжительный по времени полет. Это оправдывает использование в качестве прогностической модели ветра такой ее простейший вариант, когда направление и скорость ветра полагаются постоянными для всей зоны и времени полета и соответствующими этим характеристикам ветра в точке старта.

Для позиционирования точек, связываемых маршрутом, будем использовать прямоугольную систему координат Oxy , жестко связанную с земной поверхностью. На плоскости, определяемой системой координат Oxy , направление ветра будем задавать углом

$\beta_2 \in [0, \pm 180^\circ]$, отсчитываемым от положительной полуоси Ox в направлении против часовой стрелки в пределах от 0 до 180 градусов и в направлении по часовой стрелке в пределах от 0 до -180 градусов (рис.6). Элемент i, j матрицы коммивояжера равен времени, которое затратит летательный аппарат на перелет из точки i в точку j в условиях действия ветра. Особенностью матрицы коммивояжера, сформированной с учетом действия ветра, является то, что она оказывается несимметричной. Другими словами элемент i, j такой матрицы не равен элементу j, i . Частным случаем является траверзное направление ветра, при котором наддиагональный элемент матрицы коммивояжера равен соответствующему поддиагональному элементу.

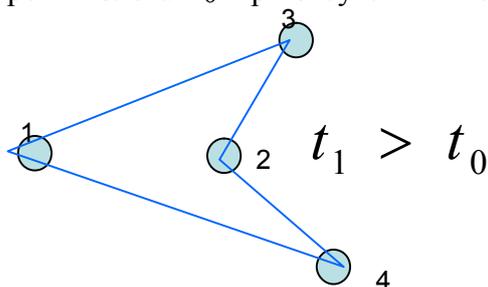
Свойства замкнутого маршрута с учетом действия постоянного ветра

Свойство 1. Если S - протяженность маршрута, а $V_{ЛА}$ - скорость движения ЛА



относительно воздуха (воздушная скорость), то время полета по замкнутому маршруту при отличной от нуля скорости ветра независимо от его направления окажется больше чем $S/V_{ЛА}$ (рис.1)

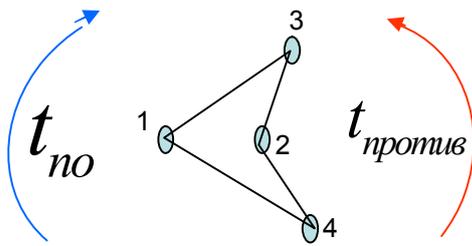
Время полета t_0 при отсутствии ветра



Время полета t_1 при наличии ветра

Рис. 1. Один и тот же маршрут при отсутствии и наличии ветра

Свойство 2. При любой скорости и направлении ветра время облета замкнутого маршрута “по” и “против” часовой стрелки одинаково (рис.2).



$$t_{по} = t_{против}$$

Рис. 2. Оптимальный маршрут при полете “по” и “ против ” часовой стрелки

Свойство 3. Время облета замкнутого маршрута при диаметрально противоположном направлении ветра одинаково (рис.3).

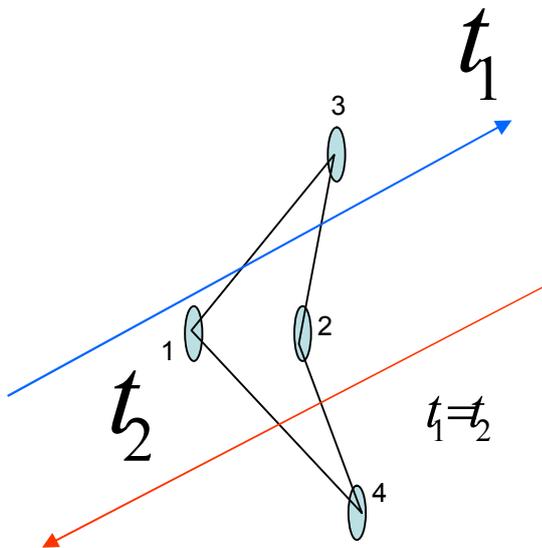


Рис. 3. Оптимальный маршрут при диаметрально противоположном ветре

Обсуждение результатов и выводы

Для наглядности удобно проиллюстрировать обсуждаемые свойства замкнутых маршрутов на следующем простом примере. Пусть четыре точки, которые надо связать замкнутым маршрутом, имеют координаты (в км.):

Номер объекта - j	1	2	3	4
x_j	10	3	9	20
y_j	0	8	6	20

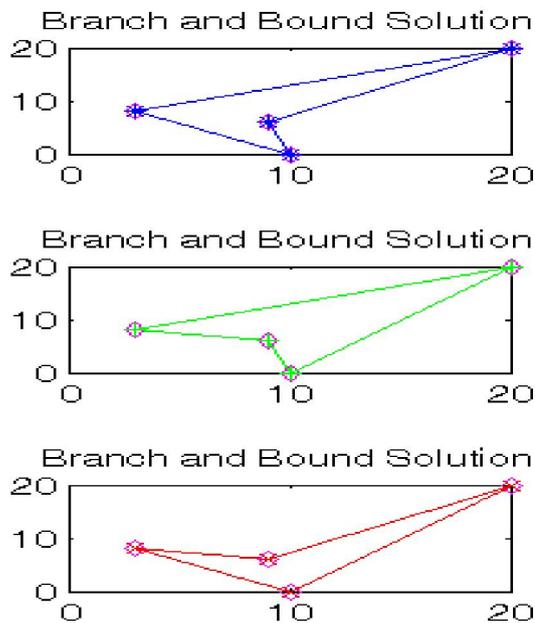
Общее количество маршрутов, которыми можно связать эти точки, равно $3!$, то есть 6. С учетом свойства 2 количество допустимых маршрутов уменьшается вдвое. Эти маршруты показаны на рис. 4. Примем, что воздушная скорость летательного аппарата $V_{ЛА}$ на маршруте составляет 101 км/час. На рис.5 показан график зависимости времени полета по оптимальному маршруту в зависимости от скорости и направления ветра. На графике хорошо просматривается справедливость первого свойства. Действительно самый «быстрый» маршрут удастся найти при отсутствии ветра. Более того, хорошо видно, что с возрастанием скорости ветра увеличивается продолжительность полета по оптимальным маршрутам независимо от направления ветра. Особенно заметен этот эффект для сравнительно больших значений скорости ветра. На рис. 6 изображены области постоянства оптимальных решений задачи маршрутизации на плоскости, определяемой параметрами ветра. Как видно таких областей оказалось три. Это значит, что каждый из трех возможных в принципе маршрутов для определенных подмножеств значений скорости и направления ветра оказался наилучшим. Каждая область имеет свой цвет, позволяющий с помощью рис.4 увидеть какой именно маршрут для этой области является оптимальным. На рис. 6 хорошо просматривается справедливость третьего свойства замкнутых маршрутов. Действительно, точки, соответствующие ветру одной и той же скорости, но диаметрально противоположного направления имеют одинаковый цвет. На плоскости такие точки разнесены по горизонтали на 180 градусов. Также справедливость третьего свойства замкнутых маршрутов видна и на рис.5.

В качестве выводов отметим следующее:

Существуют определенные области постоянства оптимальных решений, которые позволяют провести количественную и качественную оценку влияния параметров ветра на характер оптимальных маршрутов.

Первое свойство замкнутых маршрутов важно в методическом плане с точки зрения понимания “физики” влияния ветра на продолжительность полета по маршруту, что полезно, например, при разработке эвристических процедур маршрутизации.

Второе свойство замкнутых маршрутов позволяет в два раза сократить количество допустимых маршрутов, что потенциально полезно для уменьшения объема вычислений при решении задачи маршрутизации.



Третье свойство полезно для построения области постоянства оптимальных решений задачи маршрутизации.

В заключение добавим, что сформулированные выше свойства справедливы не только для оптимальных замкнутых маршрутов, но и для любых замкнутых маршрутов при учете действия постоянного по своим характеристикам ветра.

Рис. 4. Оптимальные маршруты при изменении ветра

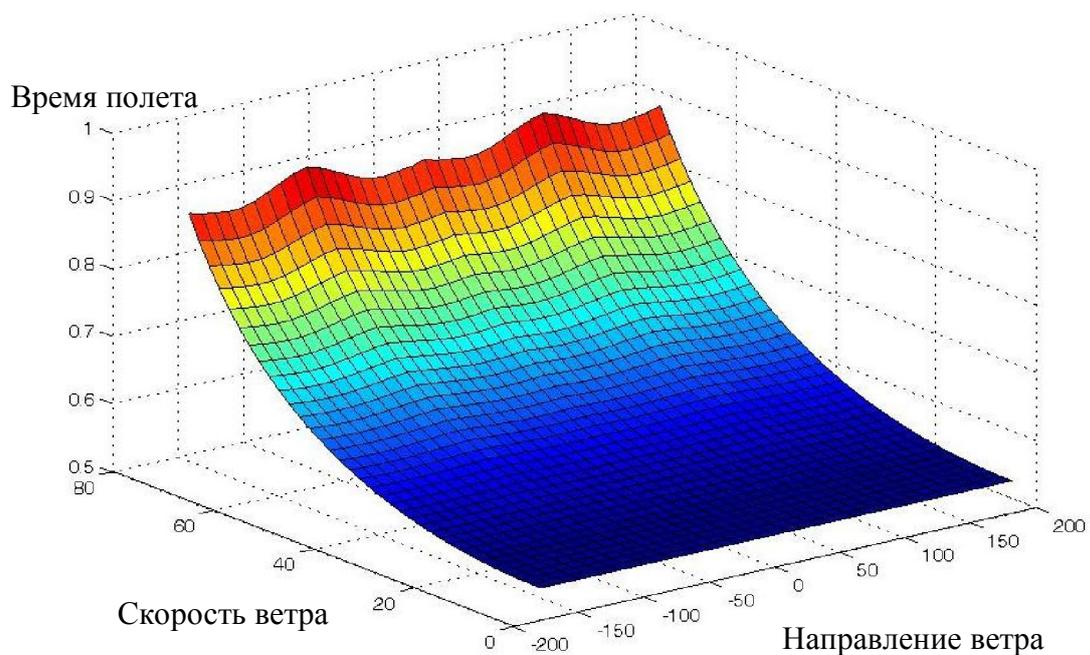


Рис.5. Время полета по оптимальному маршруту в зависимости от параметров ветра

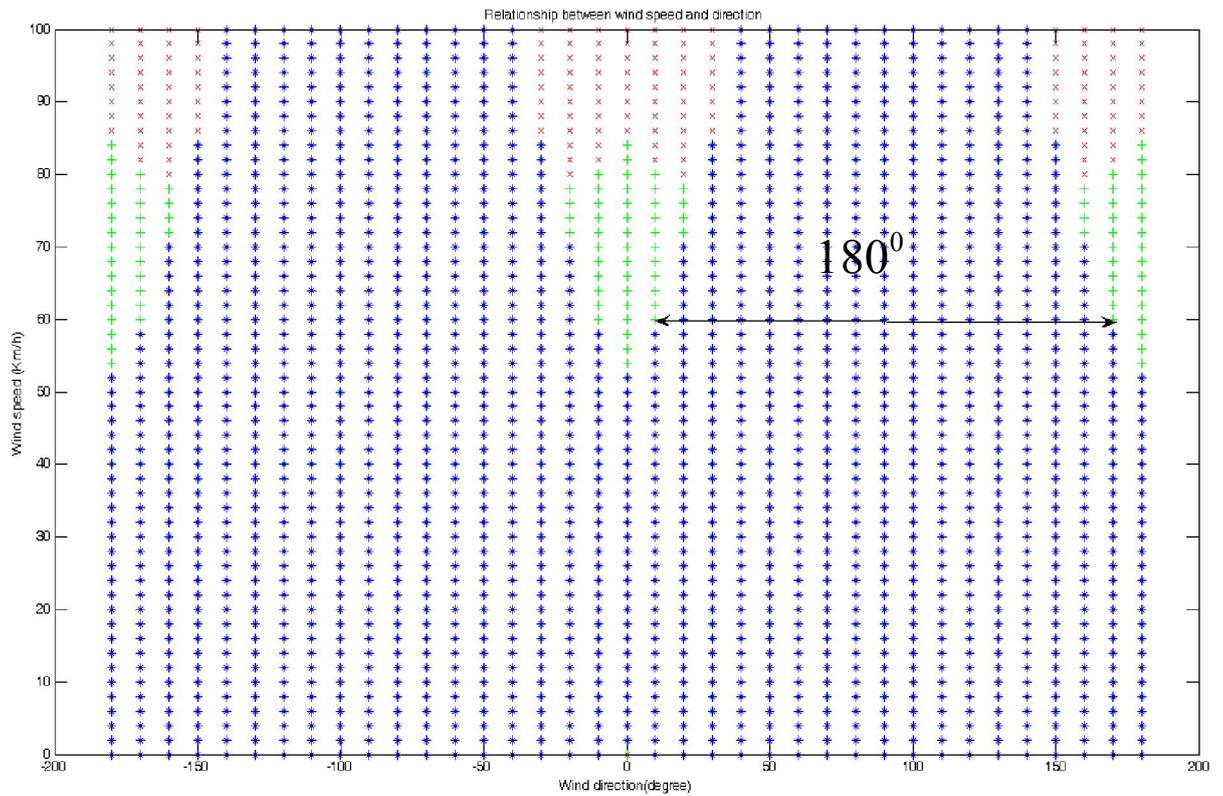
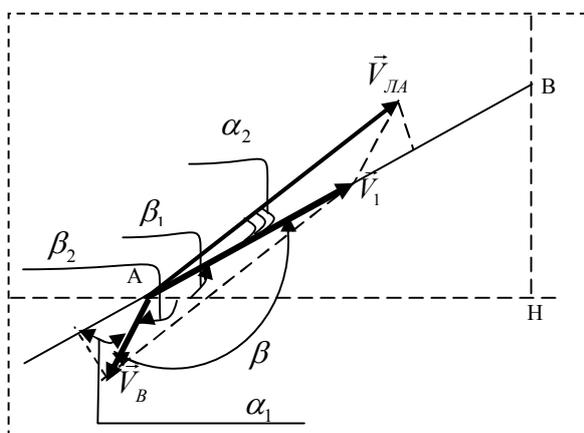


Рис. 6 Области постоянства оптимальных решений задачи маршрутизации на плоскости

Приложение.

Доказательство вышеприведенных свойств

Рассмотрим перелет летательного аппарата из точки А в точку В (рис.7). Здесь V_1 и $V_{ЛА}$ - это путевая и воздушная скорости ЛА, а V_B - скорость ветра, причем $V_{ЛА} > V_B$. Угол



$\beta_1 \in [0, \pm 180^\circ]$ - угол между вектором путевой скорости \vec{V}_1 и положительной полуосью Ох. Положительные значения этого угла отсчитываются от положительной полуоси Ох в направлении против часовой стрелки в пределах от 0 до 180 градусов, а отрицательные в направлении по часовой стрелке в пределах от 0 до -180 градусов.

Рис. 7. Отрезок замкнутого маршрута между точками А и В

Очевидно, что $\vec{V}_1 = \vec{V}_{ЛА} + \vec{V}_B$

Следовательно,

$$V_1 = V_{ЛА} \cos \alpha_2 - V_B \cos \alpha_1 \quad (1)$$

$$\cos \beta_1 = \frac{AH}{AB} = \frac{x_b - x_a}{\sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}}; \quad (2)$$

Согласно рис.6 $\beta = |\beta_1 - \beta_2|$ - угол между вектором скорости ветра (\vec{V}_B) и вектором путевой скорости ЛА (\vec{V}_1), причем

$$\alpha_1 = |180^\circ - \beta|, \text{ где } \beta \in [0^\circ, 360^\circ] \quad (2')$$

Из рис.6 видно, что

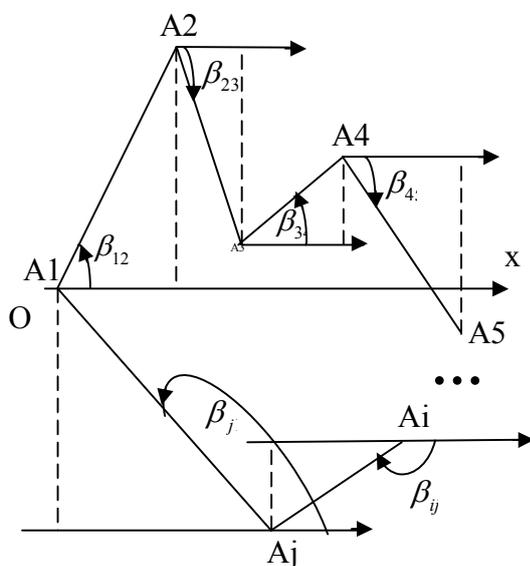
$$\sin \alpha_2 = \frac{V_B}{V_{ЛА}} \sin \beta$$

Следовательно:

$$\cos \alpha_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_2} = \sqrt{1 - \left(\frac{V_B}{V_{ЛА}} \sin \beta\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{V_B}{V_{ЛА}}\right)^2 (1 - \cos^2 \beta)} = \sqrt{\frac{V_{ЛА}^2 - V_B^2 + V_B^2 \cos^2 \beta}{V_{ЛА}^2}} \quad (3)$$

Подставив (2) и (3) в (1), получаем:

$$V_1 = V_{ЛА} \sqrt{\frac{V_{ЛА}^2 - V_B^2 + V_B^2 \cos^2 \beta}{V_{ЛА}^2}} - V_B \cos(180^\circ - \beta) = \sqrt{V_{ЛА}^2 - V_B^2 + V_B^2 \cos^2 \beta} + V_B \cos \beta \quad (4)$$



Из (4) следует, что значение V_1 не зависит от знака угла β , т.к. $\cos(\beta) = \cos(\pm\beta)$. Поэтому в выражении (2') нас интересуют только модули значений β и α_1 , где $\beta, \alpha_1 \in [0, 360^\circ]$. Рассмотрим произвольный замкнутый маршрут полета (рис.8).

Рис. 8 Произвольный замкнутый маршрут полета

По свойству замкнутого маршрута имеем:

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \dots + \overrightarrow{A_iA_j} + \overrightarrow{A_jA_1} = 0 \quad (5)$$

Пусть направление ветра совпадает с осью Ох. Тогда уравнение (5) в проекции на ось Ох запишется в виде:

$$A_1A_2 \cos \beta_{12} + A_2A_3 \cos \beta_{23} + A_iA_j \cos \beta_{ij} + A_jA_1 \cos \beta_{j1} = 0 \quad (6)$$

Где $\beta_{12}, \beta_{23}, \dots, \beta_{ij}, \beta_{j1}$ - углы между векторами скорости ветра и положительной полуосью Ох.

1. Доказательство первого свойства.

Время полета по замкнутому маршруту (рис.7) вычисляется по формуле:

$$t = \frac{A_1A_2}{V_{12}} + \frac{A_2A_3}{V_{23}} + \dots + \frac{A_jA_1}{V_{j1}} \quad (7)$$

Подставляя (4) в (7), получим:

$$t = \frac{A_1A_2}{\sqrt{V_{ЛA}^2 - V_B^2 + V_B^2 \cos^2 \beta_{12}} + V_B \cos \beta_{12}} + \frac{A_2A_3}{\sqrt{V_{ЛA}^2 - V_B^2 + V_B^2 \cos^2 \beta_{23}} + V_B \cos \beta_{23}} + \dots$$

$$+ \frac{A_jA_1}{\sqrt{V_{ЛA}^2 - V_B^2 + V_B^2 \cos^2 \beta_{j1}} + V_B \cos \beta_{j1}}$$

или

$$t = \frac{A_1A_2(\sqrt{V_{ЛA}^2 - V_B^2 + V_B^2 \cos^2 \beta_{12}} - V_B \cos \beta_{12})}{(\sqrt{V_{ЛA}^2 - V_B^2 + V_B^2 \cos^2 \beta_{12}})^2 - (V_B \cos \beta_{12})^2} + \frac{A_2A_3(\sqrt{V_{ЛA}^2 - V_B^2 + V_B^2 \cos^2 \beta_{23}} - V_B \cos \beta_{23})}{(\sqrt{V_{ЛA}^2 - V_B^2 + V_B^2 \cos^2 \beta_{23}})^2 - (V_B \cos \beta_{23})^2} + \dots$$

$$+ \frac{A_jA_1(\sqrt{V_{ЛA}^2 - V_B^2 + V_B^2 \cos^2 \beta_{j1}} - V_B \cos \beta_{j1})}{(\sqrt{V_{ЛA}^2 - V_B^2 + V_B^2 \cos^2 \beta_{j1}})^2 - (V_B \cos \beta_{j1})^2}$$

Преобразуя, получаем

$$t = \frac{A_1A_2\sqrt{V_{ЛA}^2 - V_B^2 + V_B^2 \cos^2 \beta_{12}}}{V_{ЛA}^2 - V_B^2} + \frac{A_2A_3\sqrt{V_{ЛA}^2 - V_B^2 + V_B^2 \cos^2 \beta_{23}}}{V_{ЛA}^2 - V_B^2} + \dots$$

$$+ \frac{A_jA_1\sqrt{V_{ЛA}^2 - V_B^2 + V_B^2 \cos^2 \beta_{j1}}}{V_{ЛA}^2 - V_B^2} + \dots - \frac{V_B(A_1A_2 \cos \beta_{12} + A_2A_3 \cos \beta_{23} + \dots + A_jA_1 \cos \beta_{j1})}{V_{ЛA}^2 - V_B^2} \quad (8)$$

С учетом (6) выражение (8) перепишем в виде:

$$t = \frac{A_1 A_2 \sqrt{V_{ЛА}^2 - V_B^2 + V_B^2 \cos^2 \beta_{12}}}{V_{ЛА}^2 - V_B^2} + \frac{A_2 A_3 \sqrt{V_{ЛА}^2 - V_B^2 + V_B^2 \cos^2 \beta_{23}}}{V_{ЛА}^2 - V_B^2} + \dots$$

$$+ \frac{A_j A_1 \sqrt{V_{ЛА}^2 - V_B^2 + V_B^2 \cos^2 \beta_{j1}}}{V_{ЛА}^2 - V_B^2}$$
(9)

Отметим, что:

$$t_{ij} = \frac{A_i A_j \sqrt{V_{ЛА}^2 - V_B^2 + V_B^2 \cos^2 \beta_{ij}}}{V_{ЛА}^2 - V_B^2} \geq \frac{A_i A_j \sqrt{V_{ЛА}^2 - V_B^2}}{V_{ЛА}^2 - V_B^2} = \frac{A_i A_j}{\sqrt{V_{ЛА}^2 - V_B^2}} \geq \frac{A_i A_j}{V_{ЛА}}$$
(10)

Длина замкнутого маршрута S и время полета летательного аппарата по этому маршруту t вычисляются по формулам:

$$S = A_1 A_2 + A_2 A_3 + \dots + A_i A_j + A_j A_1 \quad \text{и} \quad t = t_{12} + t_{23} + \dots + t_{ij} + t_{j1}$$
(11)

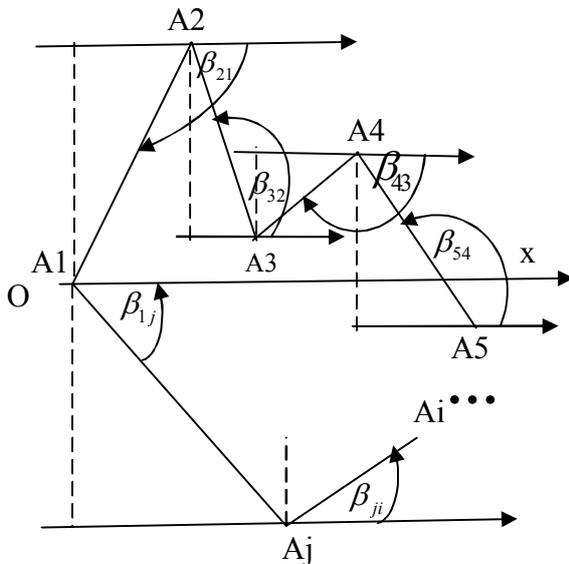
Из (9), (10) и (11) имеем:

$$t_{12} + t_{23} + \dots + t_{ij} + t_{j1} \geq \frac{A_1 A_2 + A_2 A_3 + \dots + A_i A_j + A_j A_1}{V_{ЛА}} \quad \text{или} \quad t \geq \frac{S}{V_{ЛА}}$$

Таким образом, первое свойство доказано.

2. Доказательство второго свойства.

Рассмотрим ситуацию, когда меняется направление облета контура.



На рис.8 и рис. 9 показано, что если β_{ij} (по часовой стрелке) = β_{ij} - угол между вектором скорости ветра и вектором путевой скорости ЛА при облете замкнутого маршрута “по” часовой стрелке, то

β_{ij} (против часовой стрелке) = $180^\circ - \beta_{ij}$ - угол между вектором путевой скорости ЛА и вектором скорости ветра при облете замкнутого маршрута “против” часовой стрелки.

Рис. 9 замкнутый маршрут с облетом “против” часовой стрелки.

Выражение (9) для случая облета «против» часовой стрелки, примет вид:

$$t_{\text{прот.часовой стрелке}} = \frac{A_1 A_2 \sqrt{V_{\text{ЛЛ}}^2 - V_B^2 + V_B^2 \cos^2(180^\circ - \beta_{12})}}{V_{\text{ЛЛ}}^2 - V_B^2} + \frac{A_2 A_3 \sqrt{V_{\text{ЛЛ}}^2 - V_B^2 + V_B^2 \cos^2(180^\circ - \beta_{23})}}{V_{\text{ЛЛ}}^2 - V_B^2} + \dots \quad (12)$$

$$+ \frac{A_j A_1 \sqrt{V_{\text{ЛЛ}}^2 - V_B^2 + V_B^2 \cos^2(180^\circ - \beta_{j1})}}{V_{\text{ЛЛ}}^2 - V_B^2}$$

Однако, с учетом того, что

$$\cos^2(\beta_{ij}) = \cos^2(180^\circ - \beta_{ij}),$$

видно, что формулы (9) и (12) совпадают. Таким образом, второе свойство доказано.

3. Доказательство третьего свойства.

В случае изменения ветра на противоположный по сравнению с ситуацией, когда ветер был направлен по оси Oх (рис.9), углы β_{ij} будут выглядеть так, как показано на рис.10.

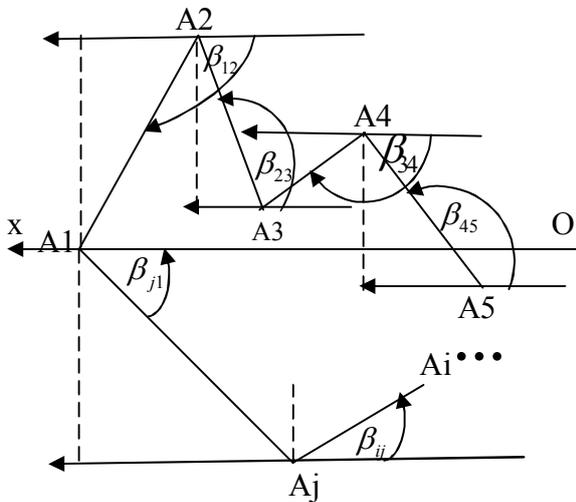


Рис. 10 Замкнутый маршрут с измененным на противоположном направлении ветра

Доказательство свойства 3 будет совершенно аналогично доказательству свойства 2.

Библиографический список

1. Красильщиков М.Н. Современные информационные технологии в задачах навигации и наведения беспилотных маневренных летательных аппаратов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009
2. Брусов В.С., Баранов С.К. Оптимальное проектирование летательных аппаратов. Многоцелевой подход. - М. Машиностроение 1989г. 230с.
3. Nicola Ceccarelli, John J. Enright, Emilio Frazzoli, Steven J. Rasmussen and Corey J. Schumacher // Micro UAV Path Planning for reconnaissance in Wind. Proceedings of the 2007 American Control Conference. Marriott Marquis Hotel at Times Square. New York City, USA, July 11-13, 2007. FrB12.3
4. Сигал И.Х., Иванова А.П. Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
5. Кузнецова Г.В., Моисеев Д.В. Комбинированная процедура решения одного типа задач маршрутизации // Тезисы докладов 10-й международной конференции "Системный анализ, управление и навигация". - М.: Изд-во МАИ, 2005
6. Подлипьян П.Е., Максимов Н.А. Комбинированный алгоритм решения транспортной задачи в системе планирования полета группы беспилотных летательных аппаратов //Тезисы докладов 9 Международной конференции «Авиация и космонавтика – 2010» - СПб: Мастерская печати, 2010. – С. 138-139.
7. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. – М.: Наука, 1969;
8. Моисеев Д.В. Анализ устойчивости оптимальных маршрутов полета БПЛА с учетом прогноза ветра // Труды XVII Международного научно-технического семинара «Современные технологии в задачах управления, автоматике и обработки информации» - СПб: РИЦ ГУАП, 2008. – С. 172.

Сведение об авторах

МОИСЕЕВ Дмитрий Викторович, заместитель заведующего кафедрой Московского авиационного института (национального исследовательского университета), к.т.н. , доцент

МАИ, Волоколамское ш., 4, г. Москва, ГСП, 125871; тел.: (499) 158-43-55; e-mail: 600@mai.ru

ФАМ Суан Куен, аспирант Московского авиационного института (национального исследовательского университета).

Ул. Вилиса Лациса, 14, кв. 1015, Москва, 125480; тел.: +7965-225-28-34; e-mail: famvn@mai.ru