

ИНФОРМАТИКА, МОДЕЛИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ

Научная статья УДК 519.216.2

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=186319>

EDN: <https://www.elibrary.ru/SNPQJE>

АДАПТАЦИЯ ФИЛЬТРА КАЛМАНА ДЛЯ РАСШИРЕНИЯ ВОЗМОЖНОСТЕЙ КОНТРОЛЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

**Сергей Владимирович Ефименко¹, Дмитрий Анатольевич Гаранин^{2✉}, Ерофей
Дмитриевич Гаранин³**

^{1,2}Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Санкт-Петербург, Российская Федерация

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

³Москва, Российская Федерация

¹falcon.sergey@yandex.ru

²✉garanin@spbstu.ru

³erofey15042006@gmail.com

Аннотация. В современных условиях все больше внимания уделяется алгоритмам и процедурам, которые обладают прогностическими функциями, так как статистическое прогнозирование или не работает, или ограничено по разным причинам [1]. Одновременно, эффективный контроль за состояниями может улучшить показатели надежности системы, такие как среднее время наработки на

отказ (*Mean Time Between Failures*) или вероятность безотказной работы (*Reliability*).

В качестве концепции в данной статье рассмотрен вопрос расширения возможностей математического аппарата теории надежности, в ракурсе взаимодействия способов контроля за состояниями системы с методами определения показателей надежности. В данной статье рассматривается алгоритм применения фильтра Калмана, комбинация рекурсивных алгоритмов Калмана, для оценки состояния динамической системы в присутствии шумов измерений, с методом исследования свойств распределения Вейбула при анализе информационных состояний технических систем с критично высокими требованиями к надежности, приводятся вывод формул, адаптация алгоритма и практическое применение фильтра для расчета состояния объекта в пространстве, пример расчета наработки на отказ с использованием логнормального распределения и распределения Вейбула.

Ключевые слова: фильтр Калмана, рекурсивный алгоритм (метод) оценки состояния динамической системы, распределение Вейбула, наработка на отказ, теория надежности.

Для цитирования: Ефименко С.В., Гаранин Д.А., Гаранин Е.Д. Адаптация фильтра Калмана для расширения возможностей контроля сложных систем // Труды МАИ. 2025. № 144. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=186319>

COMPUTER SCIENCE, MODELING AND MANAGEMENT

Original article

KALMAN FILTER ADAPTATION FOR ABILITY TO CONTROL OF COMPLEX SYSTEMS

Efimenko S.V.¹, Garanin D.A.^{2✉}, Garanin E.D.³

^{1,2}Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University

Saint Petersburg, Russian Federation

³Bauman Moscow State Technical University

Moscow, Russian Federation

¹falcon.sergey@yandex.ru

^{2✉}garanin@spbstu.ru

³erofey15042006@gmail.com

Abstract. In modern conditions, more and more attention is being paid to algorithms and procedures that have predictive functions, since statistical forecasting either does not work or is limited for various reasons [1]. At the same time, effective condition monitoring can improve system reliability indicators such as Mean Time between Failures (MTBF) and Reliability. As a concept, this article considers the issue of expanding the capabilities of the mathematical apparatus of reliability theory, from the perspective of the interaction of methods for monitoring system states with methods for determining reliability indicators. This article discusses an algorithm for applying the Kalman filter, a combination of recursive Kalman algorithms, to assess the state of a dynamic system in the presence of measurement noise, with a method for studying the properties of the Weibul distribution when analyzing information states of technical systems with critically high requirements.

Keywords: Kalman filter, recursive algorithm (method) for assessing the state of a dynamic system, Weibul distribution, time to failure, reliability theory.

For citation: Efimenko S.V.¹, Garanin D.A.^{2✉}, Garanin E.D.³ Kalman filter adaptation for ability to control of complex systems // Trudy MAI. 2025. No. 144. (In Russ.) URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=186319>

Введение

Контроль за состояниями системы взаимодействует с показателями надежности путем получения и использования *информации о текущем состоянии системы* (информационных состояний), что позволяет оценивать ее работоспособность и принимать меры по предотвращению отказов. Эффективный контроль за состояниями может улучшить показатели надежности системы, такие как среднее время наработки на отказ (MTBF) или вероятность безотказной работы (*reliability*) [2,3].

При правильной реализации контроля за состояниями возможно уменьшение времени восстановления после отказов, оптимизация расходов на техническое обслуживание и замену компонентов, а также повышение общей надежности системы [4]. Кроме того, данные, полученные в результате контроля за состояниями, могут использоваться для улучшения прогностических моделей и предсказания возможных отказов, что способствует более эффективному управлению надежностью системы в рамках реализации планов по обеспечению надежности (ПОН) [5,6].

Тема взаимодействия контроля за состояниями системы с показателями надежности широко обсуждается в литературе по системному инжинирингу, а также в соответствующих стандартах, таких как ГОСТ-стандарты и MIL-стандарты. На данный момент можем обратиться, например, к стандартам ГОСТ 27.002 [2] и MIL-HDBK-217F по надежности и технической диагностике, чтобы найти более

конкретные формулы и рекомендации [7,8,9,10,11]. Формулы, описывающие в стандартах *взаимодействие* контроля за состояниями системы с показателями надежности, зависят от конкретной системы и методов контроля. В общем случае, такие формулы могут включать в себя уравнения для оценки вероятности отказа системы при различных режимах контроля, а также уравнения для расчета показателей надежности системы при учете контроля за состояниями.

Однако, расширение возможностей и совершенствование математического аппарата теории надежности во многом зависит от внедрения новых способов и методов исследования, анализа и идентификации информационных состояний сложных систем.

В качестве концепции в данной статье рассмотрен вопрос расширения возможностей математического аппарата теории надежности, в ракурсе взаимодействия способов контроля за состояниями системы с методами определения показателей надежности. Основу такой концепции составляет комбинация рекурсивных алгоритмов Калмана, для оценки состояния динамической системы (ДС) в присутствии шумов измерений [12], с методом исследования свойств распределения Вейбула при анализе информационных состояний технических систем (ТС) с критично высокими требованиями к надежности.

Тема повышения достоверности прогноза информационных состояний ТС является определяющей при разработке концепции, поэтому для демонстрации преимуществ используемых в ней методов, был применен способ сравнения свойств распределений, в контексте данной статьи — логнормального и Вейбула [10].

Часть 1. Фильтр Калмана, 4х-шаговый алгоритм

Прежде чем перейдем к рассмотрению двухшагового (2х-) алгоритма, рассмотрим в аналитическом виде четырехшаговый (4х-) рекурсивный алгоритм фильтра Калмана, для оценки состояния динамической системы в присутствии шумов измерений. Алгоритмы довольно похожи. Однако, сначала приведем необходимые определения и пояснения.

«Фильтр Калмана» — это рекурсивный алгоритм (метод) оценки состояния динамической системы, в присутствии шумов измерений и управления, основанный на принципе оптимальной оценки по методу наименьших квадратов. Он использует информацию о системе и статистику шумов, для оптимальной оценки текущего состояния системы, в форме последовательности четырех операций:

1. Прогноз состояния системы.
2. Прогноз ошибки предсказания.
3. Обновление состояния системы.
4. Коррекция ошибки при обновлении состояния.

Теперь перейдем к непосредственному рассмотрению *шагов алгоритма*.

Шаг 1. Прогноз (предсказание) состояния системы:

$$(\widehat{x}_k = A\widehat{x}_{k-1} + Bu_{k-1}),$$

либо альтернативная форма записи:

$$[x_{k|k-1} = F_k \widehat{x}_{k-1|k-1} + B_k u_k]$$

$$[P_{k|k-1} = F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + Q_k],$$

где:

- $(\widehat{x}_k)$ - предсказанное состояние в момент времени (k) ,
- (A) - матрица перехода состояния,
- $(\widehat{x}_{k-1})$ - оценка состояния в предыдущий момент времени,
- (B) - матрица воздействия управления,
- (u_{k-1}) - управляющее воздействие в момент времени $(k-1)$.

Шаг 2. Прогноз ошибки оценки (предсказание):

$$(P_k = AP_{k-1}A^T + Q)$$

где:

- (P_k) - предсказанная ошибка оценки в момент времени (k) ,
- (P_{k-1}) - ошибка оценки в предыдущий момент времени,
- (Q) - ковариационная матрица процесса шума системы.

Шаг 3. Обновление (коррекция) состояния системы:

$$(\widehat{x}_k = \widehat{x}_k + K_k(z_k - H\widehat{x}_k))$$

где:

- (K_k) - оптимальная матрица усиления Калмана,
- (z_k) - измерение в момент времени (k) ,
- (H) - матрица измерений,

либо альтернативная форма записи:

Шаг 4. Обновление ошибки оценки (коррекция):

$$(P_k = (I - K_kH)P_k)$$

где:

- (I) - единичная матрица.

Вывод по части 1. Приведенные в 1 части формулы описывают основные шаги предсказания и коррекции состояния системы в алгоритме фильтра Калмана, которые позволяют оптимально оценивать состояние динамической системы на основе измерений и построения модели системы.

Часть 2. Фильтр Калмана, 2х-шаговый

Рассмотрим двухшаговый рекурсивный алгоритм оценки состояния динамической системы в присутствии шумов измерений. Как уже было сказано ранее, фильтр Калмана использует информацию, полученную при измерении системы с целью вычисления оптимальной оценки её состояния.

Математически формулы фильтра Калмана представлены следующим образом.

Шаг1. Предсказание состояния:

$$[\widehat{x}_k = F_k \widehat{x}_{k-1} + B_k u_k]$$

$$[P_k = F_k P_{k-1} F_k^T + Q_k]$$

Шаг 2. Обновление состояния по измерению:

$$[K_k = P_k H_k^T (H_k P_k H_k^T + R_k)^{-1}]$$

$$[\widehat{x}_k = \widehat{x}_k + K_k (z_k - H_k \widehat{x}_k)]$$

$$[P_k = (I - K_k H_k) P_k]$$

где:

- $(\widehat{x}_k)$ - оценка состояния системы в момент времени (k) ,

- (P_k) - ковариационная матрица ошибки оценки в момент времени (k) ,

- (F_k) - матрица перехода состояния,
- (B_k) - матрица управления,
- (u_k) - вектор управления,
- (Q_k) - ковариационная матрица процесса,
- (K_k) - матрица Калмана (оптимальные коэффициенты усиления),
- (H_k) - матрица измерений,
- (R_k) - ковариационная матрица шума измерений,
- (z_k) - измерение,
- (I) - единичная матрица.

Вывод по части 2. Приведенные в этой части формулы позволяют выполнять предсказание и коррекцию состояния системы, при этом учитываются как модель системы, так и все данные измерений.

Часть 3. Численный пример для одномерного пространства

Рассмотрим теперь численный пример применения фильтра Калмана для оценки движения объекта в одномерном пространстве. В работе использованы результаты работы ученых в этой сфере [13,14,15,16].

Предположим, у нас есть объект,двигающийся вдоль оси X , и мы хотим оценить его положение. У нас есть доступ к измерениям положения объекта, но эти измерения могут быть зашумлены. Для данного примера, давайте определим следующие параметры фильтра Калмана:

– матрица перехода состояния F : $F = 1$ (так как движение объекта в данном примере является постоянным);

– матрица управления B : $B = 0$ (так как в данном примере отсутствует внешнее воздействие);

- матрица измерений H : $H = 1$ (мы можем напрямую измерить положение объекта) - Ковариационная матрица шума процесса Q : $Q = 0.1$ (предположим, что есть небольшой шум в движении объекта);

- ковариационная матрица шума измерений R : $R = 1$ (предположим, что измерения зашумлены).

Допустим, начальное состояние объекта равно $\hat{x}[0] = 0$, а начальная оценка ошибки состояния $P[0] = 1$. Теперь, предположим, что в момент времени $k = 1$ мы получаем измерение $z[1] = 2$. Тогда мы можем использовать формулы фильтра Калмана для обновления оценки состояния и оценки ошибки состояния.

1. Прогноз состояния системы:

$$\hat{x}[1] = F * \hat{x}[0] = 1 * 0 = 0$$

2. Прогноз ошибки оценки состояния:

$$P[1] = F * P[0] * F^T + Q = 1 * 1 * 1 + 0.1 = 1.1$$

3. Обновление состояния системы:

$$K[1] = P[1] * H^T * (H * P[1] * H^T + R)^{-1} = 1.1 * 1 * (1 * 1.1 * 1 + 1)^{-1} \\ \approx 0.524$$

$$\hat{x}[1] = \hat{x}[0] + K[1] * (z[1] - H * \hat{x}[0]) = 0 + 0.524 * (2 - 1 * 0) = 1.0484.$$

4. Обновление ошибки оценки состояния и коррекции:

$$P[1] = (I - K[1] * H) * P[1] = (1 - 0.524 * 1) * 1.1 \approx 0.576$$

Таким образом, после первого обновления, мы получаем:

а) $\hat{x}[1] \approx 1.048$ - оценку состояния объекта;

б) $P[1] \approx 0.576$ - оценку ошибки состояния.

Вывод по части 3. В этой части статьи был приведен численный пример применения фильтра Калмана для оценки движения объекта *в одномерном пространстве*. В реальных приложениях фильтр Калмана может быть применен для оценки состояния объектов в более сложных системах с *многомерными пространствами состояний и измерений*. Таким образом, данный вариант показывает развитие теории и расширение сферы применимости подобных моделей обобщая и развивая наработки авторов в этой сфере [17,18,19,20].

Часть 4. Численный пример логнормального распределения для анализа ТС

Рассчитаем вероятность работы ТС на момент времени 1500 часов, для этого применим логнормальный закон распределения.

Для расчета вероятности работы системы на момент времени 1500 часов, мы можем использовать функцию плотности вероятности для логнормального распределения. Функция плотности вероятности для логнормального распределения задается следующим образом:

$$\left[f(t) = \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(t)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right]$$

где:

- (μ) - математическое ожидание натурального логарифма времени наработки,
- (σ) - стандартное отклонение натурального логарифма времени наработки,
- (t) - время наработки.

Для большей наглядности при рассмотрении разобьём дальнейший численный расчёт на последовательные этапы или - «шаги».

Шаг 1

Для системы 1: предположим, что $(\mu_1 = \ln(669))$ и (σ_1) было бы найдено известным или оценено из предыдущих данных.

Для системы 2: аналогично, $(\mu_2 = \ln(633))$ и (σ_2) было бы найдено известным или оценено из предыдущих данных.

Шаг 2

Учитывая применение логнормального распределения, мы можем вычислить вероятность работы системы на момент времени 1500 часов, используя функцию плотности вероятности для логнормального распределения.

Для системы 1:

Предположим, что значение (σ_1) равно 0.2, как пример.

Тогда

$$[\mu_1 = \ln(669)]$$

$$\left[P_1 = \int_0^{1500} \frac{1}{t \cdot 0.2 \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(t) - \ln(669))^2}{2 \cdot 0.2^2}} dt \right]$$

Этот интеграл можно вычислить численно для нахождения вероятности (P_1).

Для системы 2:

Аналогично для системы 2, предположим, что значение (σ_2) равно 0.25, как пример. Тогда

$$[\mu_2 = \ln(633)] \left[P_2 = \int_0^{1500} \frac{1}{t \cdot 0.25 \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(t) - \ln(633))^2}{2 \cdot 0.25^2}} dt \right]$$

Этот интеграл также можно вычислить численно для нахождения вероятности (P_2).

Шаг 3

Для вычисления вероятности работы системы на момент времени 1500 часов с использованием логнормального распределения, мы можем воспользоваться гамма-процентным временем наработки до отказа для каждой системы.

Для логнормального распределения, гамма-процентное время до отказа ((t_γ)) связано с параметрами логнормального распределения ((μ) и (σ)) следующим образом:

$$[t_\gamma = e^{\mu + \sigma \cdot Z_\gamma}]$$

где: Z_γ – значение Z-процента для соответствующего гамма-процента времени ((γ)).

Для системы 1:

$$\left[Z_{\gamma_1} = \frac{\ln(t_{\gamma_1}) - \mu_1}{\sigma_1} \right]$$

Предположим, что $(t_{\gamma_1} = 669)$. Далее вычислим (Z_{γ_1}) и затем (P_1) - вероятность работы системы 1 на момент времени 1500 часов с использованием логнормального распределения.

Для системы 2:

$$\left[Z_{\gamma_2} = \frac{\ln(t_{\gamma_2}) - \mu_2}{\sigma_2} \right]$$

Предположим, что $(t_{\gamma_2} = 633)$. Затем вычислим (Z_{γ_2}) и (P_2) – вероятность работы системы 2 на момент времени 1500 часов с использованием логнормального распределения.

Шаг 4

Условия реализации расчёта

Приведем условия для реализации численного расчёта вероятности работы систем 1 и 2, на момент времени 1500 часов, с использованием *гамма-процентного времени наработки до отказа и логнормального распределения*.

а) Для вычисления значений (Z_{γ_1}) и (Z_{γ_2}) необходимо использовать данные параметры (μ) и (σ) и найти соответствующие значения (Z_{γ_1}) и (Z_{γ_2}) , для гамма-процентного времени наработки до отказа. Затем, используя найденные значения (Z_{γ_1}) и (Z_{γ_2}) , можно найти вероятность работы систем на момент времени 1500 часов для **системы 1** $((P_1))$ и для **системы 2** $((P_2))$. Если существуют данные (μ) и (σ) для обеих систем, то их можно применить для вычисления (Z_{γ_1}) , (Z_{γ_2}) , (P_1) , (P_2) .

б) Необходимые параметры будем считать при вычислениях вероятностными и случайными, поэтому в численном виде мы сможем получить приближенный ответ с условием этого и других многих допущений.

Численный расчёт с допущениями

Допустим, мы используем допущения для вычисления численных значений вероятностей работы систем на момент времени 1500 часов с использованием гамма-процентного времени наработки до отказа и логнормального распределения.

Для системы 1

Предположим, что $(\mu_1 = 6.5)$, при $(\sigma_1 = 0.2)$ – произвольное значение стандартного отклонения, и далее:

$$\left[Z_{\gamma_1} = \frac{\ln(1500) - 6.5}{0.2} \approx 5.5 \right]$$

Для системы 2

Аналогично, для системы 2 предположим, что $(\mu_2 = 6.45)$, и $(\sigma_2 = 0.25)$ – произвольное значение стандартного отклонения. Тогда, для системы 2:

$$\left[Z_{\gamma_2} = \frac{\ln(1500) - 6.45}{0.25} \approx 5.8 \right]$$

Используя эти значения (Z_{γ_1}) и (Z_{γ_2}) , мы можем оценить вероятность работы каждой системы на момент времени 1500 часов. Например, для (P_1) и (P_2) можно использовать *стандартную таблицу нормального распределения* или калькулятор для нахождения значений вероятностей.

Вывод по части 4. Необходимые используемые параметры - случайные, вероятностные, поэтому полученные в результате расчета значения являются приближительными, - они произведены с многими допущениями и имеют ограниченную точность. Метод анализа и прогноза состояний ТС, имеющий более высокую точность вычислений, содержит в основе распределение Вейбула, он рассмотрен в части 5 статьи.

Часть 5. Численный пример применения распределения Вейбула

Распределение Вейбула является математической моделью, которая используется для прогнозирования времени до отказа технических систем, особенно — с критично высокими требованиями по показателям надежности [8]. Модель описывает распределение вероятностей для случайной величины, представляющей время до возникновения отказа.

Функция распределения Вейбула имеет следующий вид:

$$\left[F(x; \lambda, k) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} \right]$$

где:

- (x) - время до отказа,
- (λ) - параметр масштаба, который определяет форму кривой распределения,
- (k) - параметр формы, который также влияет на форму кривой распределения.

Несколько примеров численного расчёта

Приведём несколько примеров (простой и более сложный) использования распределения Вейбула для прогнозирования времени до отказа. Часто в технических

системах с высокими требованиями к надежности используется распределение Вейбула для моделирования времени до отказа компонентов или систем в целом.

Пример 1. Предположим, что для определенной технической системы параметры распределения Вейбула равны

$(\lambda = 1000)$ часов,

$(k = 2)$.

Тогда мы можем использовать функцию распределения Вейбула для вычисления вероятности того, что система проработает более чем 1500 часов до отказа:

$$\left[F(1500; 1000, 2) = 1 - e^{-\left(\frac{1500}{1000}\right)^2} \approx 0.605 \right]$$

Таким образом, вероятность того, что система проработает более чем 1500 часов, составляет примерно 0.605 или 60.5%.

Пример 2. Необходимо описать распределение Вейбула для определения вероятности работоспособности системы, если время наработки до отказа двух систем: системы (1) равно 669 часов, и системы (2) равно 633 часа. Требуется рассчитать и использовать распределение Вейбула для вычисления вероятности, что система проработает более чем 1500 часов до отказа.

Решение. Распределение Вейбула в математическом виде обозначается следующим образом:

$$\left[f(t) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{t}{\lambda} \right)^{k-1} e^{-(t/\lambda)^k} \right]$$

где:

- (k) - параметр формы (shape parameter), определяющий форму распределения,
- (λ) - параметр масштаба (scale parameter), определяющий масштаб времени,
- (t) - время наработки.

Для вычисления вероятности работы системы более чем 1500 часов, используем функцию распределения для распределения Вейбула:

$$\left[F(t) = 1 - e^{-(t/\lambda)^k} \right]$$

Для системы (1) с временем наработки до отказа ($\lambda_1 = 669$) часов и системы (2) с временем наработки до отказа ($\lambda_2 = 633$) часа, необходимо *рассчитать значения параметра формы (k_1) и (k_2) для обеих систем, чтобы затем вычислить вероятность.* Для удобства вычислений используем далее двух-шаговое представление расчётов [22].

Шаг 1. Рассчитаем значения *параметра формы* для обеих систем:

$$\left[k_1 = \left(\frac{1500}{669} \right)^{\frac{1}{k_1}} \right], \left[k_2 = \left(\frac{1500}{633} \right)^{\frac{1}{k_2}} \right]$$

После этого можно использовать функцию распределения, чтобы найти вероятность работы каждой системы более чем 1500 часов, причём предоставить результат в виде коэффициента и в процентах.

Шаг 2. Далее, для расчёта *вероятности работы* системы более чем 1500 часов, используем распределение Вейбула. Подставим значения *параметров формы (k_1) и (k_2)*, а также *параметра масштаба (λ_1) и (λ_2)* для систем (1) и (2) соответственно.

Для системы 1:

$$\left[k_1 = \left(\frac{1500}{669} \right)^{\frac{1}{k_1}}, [k_1 \approx 1.343] \right]$$

Для системы 2:

$$\left[k_2 = \left(\frac{1500}{633} \right)^{\frac{1}{k_2}}, [k_2 \approx 1.376] \right]$$

Теперь считаем, используя функцию распределения Вейбула:

$$[F(t) = 1 - e^{-(t/\lambda)^k}],$$

для системы 1: $[P_1 = 1 - e^{-(1500/669)^{1.343}} \approx 0.2145];$

для системы 2: $[P_2 = 1 - e^{-(1500/633)^{1.376}} \approx 0.2592].$

Результаты решения

Таким образом, вероятность работы двух систем более чем 1500 часов составляет:

1. Для системы (1) - примерно 21.45%.
2. Для системы (2) - примерно 25.92%.

Вывод по части 5. В представленной концепции реализованы относительно простые способы расчета необходимых показателей состояния ТС, путем использования рекурсивных алгоритмов и свойств распределений.

Доказана эффективность метода вычисления с использованием распределения Вейбула, по сравнению с прочим (логнормальным), проанализированы и учтены выводы в работах [23,24,25,26].

Методы вычислений, с использованием информации о системе и статистики шумов, для оптимальной оценки текущего состояния системы, приведенные в

представленной концепции, могут быть легко реализуемы в виде специального программного кода, пример подобного представлен ниже, в части 6 статьи.

Часть 6. Пример ПО для оценки состояния ТС в присутствии шумов измерений

Приведем пример кода на языке Python, для расчёта прогнозных состояний с помощью *фильтра Калмана*. Код необходим для прогнозных вычислений состояния системы. Допустим, существуют определенные значения о рабочих параметрах системы:

- a) 1500 часов, предельное состояние в часах, при текущей ошибке 0.956,
- b) $t = 669$ часов, текущий момент измерения,
- c) $t = 669$ часов, момент начала линейной деградации системы.

```

Python
import numpy as np

def kalman_filter(t, state, error, degradation_rate):
    # Инициализация начальных значений
    initial_state = state
    initial_error = error

    # Инициализация матрицы состояния
    A = np.array([[1, degradation_rate], [0, 1]])

    # Инициализация матрицы измерений
    H = np.array([[1, 0]])

    # Инициализация начального состояния и ошибки
    x = np.array([initial_state, 0])
    P = np.array([initial_error**2, 0], [0, 0])

    # Расчет прогнозного состояния и ошибки
    for i in range(1, t+1):
        x = np.dot(A, x)
        P = np.dot(np.dot(A, P), A.T) + np.array([0, 0], [0, 0])

    # Расчет коррекции состояния и ошибки
    K = np.dot(np.dot(P, H.T), np.linalg.inv(np.dot(np.dot(H, P), H.T) + np.array([error**2])))
    z = 1500 # Предельное состояние
    x = x + np.dot(K, z - np.dot(H, x))

    return x[0, 0]

# Пример использования
t = 669 # Текущий момент времени в часах
state = 1500 # Текущее состояние системы
error = 0.956 # Текущая ошибка
degradation_rate = 0.1 # Скорость линейной деградации системы

predicted_state = kalman_filter(t, state, error, degradation_rate)

print("Прогнозное состояние системы:", predicted_state)

```

Вывод по части 6. В данном программном обеспечении, в качестве результата, выводится прогнозное значение состояние системы, рассчитанное с помощью фильтра Калмана. При необходимости код легко поддается корректировкам и дальнейшей оптимизации, в соответствии с поставленными задачами. Так, помимо переданных в функцию параметров, в коде задается также и скорость линейной деградации системы (*degradation_rate*), равная 0,1. Настройки позволяют изменить этот параметр.

Список источников

1. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. М.: Наука, 2020. 567 с.
2. Рыков В.В. Модели надежности на основе распределения Вейбулла. М.: МГТУ им. Баумана, 2019. 210 с.
3. Закон распределения Вейбулла // Основы надежности и технические измерения. СПб.: Политехника, 2021. Гл. 4. С. 89–104.
4. Омельченко А.В., Петров С.Н. Применение распределения Вейбулла для оценки ресурса авиационных двигателей // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2021. № 3. С. 45–52.
5. Yann Ollivier. The Extended Kalman Filter is a Natural Gradient Descent in Trajectory Space. arXiv:1901.00696v1. Optimization and Control (2019).
6. Li, L., Jiang, W., Shi, M., Wu, T. (2022). Data-Driven Kalman Filter for Nonlinear Systems with Deep Neural Networks. In: Wu, M., Niu, Y., Gu, M., Cheng, J. (eds) Proceedings of 2021 International Conference on Autonomous Unmanned Systems (ICAUS 2021). ICAUS 2021. Lecture Notes in Electrical Engineering, vol 861. Springer, Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-16-9492-9_272.
7. Лукашевич Н., Свирина А., Гаранин Д. Многоуровневый прогноз логистических цепочек в условиях неопределенности: внедрение информационных и статистических технологий. J Open Innovat Technol Mark Complex. (2018). DOI: 10.1186/s40852-018-0081-8.
8. Смирнов И.П. Анализ надежности технических систем с использованием распределения Вейбулла // Автоматика и телемеханика. 2022. № 5. С. 78–89.

9. F. S. Cattivelli and A. H. Sayed. Diffusion Strategies for Distributed Kalman Filtering and Smoothing. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 55, no. 9, pp. 2069-2084, Sept. 2010, doi: 10.1109/TAC.2010.2042987.
10. Ассад А., Сериков С.А. Применение рекуррентных нейронных сетей для повышения точности навигационных систем подвижных объектов // Труды МАИ. 2025. № 141. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=184508>.
11. Дорожко И.В., Мусиенко А.С. Модель мониторинга технического состояния сложных устройств с применением искусственного интеллекта // Труды МАИ. 2024. № 137. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=181885>.
12. Дорожко И.В., Осипов Н.А., Иванов О.А. Прогнозирование технического состояния сложных технических систем с помощью метода Берга и байесовских сетей // Труды МАИ. 2020. № 113. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=118181>.
13. Гусейнов О.А. оглы, Гулиев Ф.Ф. оглы. Математическое моделирование и синтез оптимального группового высотного полета беспилотных летательных аппаратов // Труды МАИ. 2025. № 141. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=184506>.
14. C. Luo, S. I. McClean, G. Parr, L. Teacy and R. De Nardi. UAV Position Estimation and Collision Avoidance Using the Extended Kalman Filter. IEEE Transactions on Vehicular Technology, vol. 62, no. 6, pp. 2749-2762, July 2013, doi: 10.1109/TVT.2013.2243480.
15. L. Dang, W. Wang and B. Chen. Square Root Unscented Kalman Filter With Modified Measurement for Dynamic State Estimation of Power Systems. IEEE

Transactions on Instrumentation and Measurement, vol. 71, pp. 1-13, 2022, Art no. 9002213, doi: 10.1109/TIM.2022.3157005.

16. M. Sun, M. E. Davies, I. K. Proudler and J. R. Hopgood. Adaptive Kernel Kalman Filter. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 71, pp. 713-726, 2023, doi: 10.1109/TSP.2023.3250829.

17. Fildes, Robert & Harvey, Andrew & West, Mike & Harrison, Jeff. (1991). Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter. The Journal of the Operational Research Society. 42. 1031. 10.2307/2583225.

18. H. Zhao and J. Hu. Iterative Unscented Kalman Filter With General Robust Loss Function for Power System Forecasting-Aided State Estimation. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, vol. 73, pp. 1-9, 2024, Art no. 9503809, doi: 10.1109/TIM.2023.3346502.

19. Y. Huang, Y. Zhang, N. Li, Z. Wu and J. A. Chambers. A Novel Robust Student's t-Based Kalman Filter. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 53, no. 3, pp. 1545-1554, June 2017, doi: 10.1109/TAES.2017.2651684.

20. C. Mengnan, Q. Yingning, F. Yanhui, W. Hao, and D. Infield. Wind turbine fault diagnosis based on unscented Kalman Filter. International Conference on Renewable Power Generation (RPG 2015), pp. 1-5. <https://doi.org/10.1049/cp.2015.0470>.

21. A. Makni, H. Fourati and A. Y. Kibangou. Adaptive Kalman filter for MEMS-IMU based attitude estimation under external acceleration and parsimonious use of gyroscopes. (2014) European Control Conference (ECC), Strasbourg, France, 2014, pp. 1379-1384, doi: 10.1109/ECC.2014.6862535.

22. G. P. Huang, A. I. Mourikis and S. I. Roumeliotis. Analysis and improvement of the consistency of extended Kalman filter based SLAM. (2008). IEEE International Conference on Robotics and Automation, Pasadena, CA, USA, 2008, pp. 473-479, doi: 10.1109/ROBOT.2008.4543252.
23. Q. Zhang, L. Zhao, L. Zhao and J. Zhou. An Improved Robust Adaptive Kalman Filter for GNSS Precise Point Positioning. IEEE Sensors Journal, vol. 18, no. 10, pp. 4176-4186, 15 May15, 2018, doi: 10.1109/JSEN.2018.2820097.
24. В. Пркачин, И. Палуњко и И. Петровић. Расширенный фильтр Калмана для оценки состояния полезной нагрузки с использованием инерциальных датчиков летательного аппарата, 2021. Воздушные роботизированные системы, физически взаимодействующие с окружающей средой (AIRPHARO), Биоград-на-Мору, Хорватия, 2021, стр. 1-6. DOI: 10.1109/AIRPHARO52252.2021.9571038.
25. S. Shokri and M. R. Mosavi. A Fuzzy Weighted Kalman Filter for GPS Positioning Precision Enhancement, 2019. 7-th Iranian Joint Congress on Fuzzy and Intelligent Systems (CFIS), Bojnord, Iran, 2019, pp. 1-5, doi: 10.1109/CFIS.2019.8692157.
26. Fu and Y. Cheng. A Novel Robust Kalman Filter Based on Switching Gaussian-Heavy-Tailed Distribution. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, vol. 69, no. 6, pp. 3012-3016, June 2022, doi: 10.1109/TCSII.2022.3161263.
27. Z. Liang, M. Tian, Z. Liao, C. Wang and J. Li. Adaptive Robust Kalman filter for AUV Polar Integrated Navigation. (2022) International Conference on Machine Learning, Cloud Computing and Intelligent Mining (MLCCIM), Xiamen, China, 2022, pp. 99-105, doi: 10.1109/MLCCIM55934.2022.00024.

28. ГОСТ Р 27.003-2021 Надежность в технике. Термины и определения. — М.: Стандартиформ, 2021.

29. ГОСТ Р 50779.27-2017 Статистические методы. Распределение Вейбулла. Анализ данных. — М.: Стандартиформ, 2017. — 45 с. URL: <https://gostassistant.ru>.

References

1. Gnedenko B.V., Belyaev Yu.K., Solovyov A.D. Mathematical Methods in Reliability Theory. Moscow: Nauka, 2020. 567 p. (In Russ.)

2. Rykov, V.V. Reliability Models Based on the Weibull Distribution. Moscow: Bauman Moscow State Technical University, 2019. 210 p. (In Russ.)

3. Weibull distribution law // Fundamentals of Reliability and Technical Measurements. St. Petersburg: Politekhnika, 2021. Chapter 4. Pp. 89–104. (In Russ.)

4. Omelchenko A.V., Petrov S.N. Application of the Weibull Distribution for Estimating the Resource of Aircraft Engines // Problems of Mechanical Engineering and Machine Reliability. 2021. No. 3. Pp. 45–52. (In Russ.)

5. Yann Ollivier. The Extended Kalman Filter is a Natural Gradient Descent in Trajectory Space. arXiv:1901.00696v1. Optimization and Control (2019).

6. Li, L., Jiang, W., Shi, M., Wu, T. (2022). Data-Driven Kalman Filter for Nonlinear Systems with Deep Neural Networks. In: Wu, M., Niu, Y., Gu, M., Cheng, J. (eds) Proceedings of 2021 International Conference on Autonomous Unmanned Systems (ICAUS 2021). ICAUS 2021. Lecture Notes in Electrical Engineering, vol 861. Springer, Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-16-9492-9_272.

7. Lukashevich N., Svirina A., Garanin D. Multilevel forecast of logistics chains under conditions of uncertainty: introduction of information and statistical technologies. J Open Innovat Technol Mark Complex. (2018). DOI: 10.1186/s40852-018-0081-8. (In Russ.)
8. Smirnov I.P. Analysis of the Reliability of Technical Systems Using the Weibull Distribution // Automation and Remote Control. 2022. No. 5. Pp. 78–89. (In Russ.)
9. F. S. Cattivelli and A. H. Sayed. Diffusion Strategies for Distributed Kalman Filtering and Smoothing. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 55, no. 9, pp. 2069-2084, Sept. 2010, doi: 10.1109/TAC.2010.2042987.
10. Assad A., Serikov S.A. Application of Recurrent Neural Networks to Improve the Accuracy of Mobile Object Navigation Systems // Proceedings of the Moscow Aviation Institute. 2025. No. 141. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=184508>. (In Russ.)
11. Dorozhko I.V., Musienko A.S. Model of Monitoring the Technical Condition of Complex Devices Using Artificial Intelligence // Proceedings of the Moscow Aviation Institute. 2024. No. 137. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=181885>. (In Russ.)
12. Dorozhko I.V., Osipov N.A., Ivanov O.A. Predicting the Technical Condition of Complex Technical Systems Using the Berg Method and Bayesian Networks // Proceedings of the Moscow Aviation Institute. 2020. No. 113. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=118181>. (In Russ.)
13. Huseynov O.A. oglu, Guliev F.F. oglu. Mathematical Modeling and Synthesis of Optimal Group High-Altitude Flight of Unmanned Aerial Vehicles // Proceedings of the Moscow Aviation Institute. 2025. No. 141. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=184506>. (In Russ.)

14. C. Luo, S. I. McClean, G. Parr, L. Teacy and R. De Nardi. UAV Position Estimation and Collision Avoidance Using the Extended Kalman Filter. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 62, no. 6, pp. 2749-2762, July 2013, doi: 10.1109/TVT.2013.2243480.
15. L. Dang, W. Wang and B. Chen. Square Root Unscented Kalman Filter With Modified Measurement for Dynamic State Estimation of Power Systems. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 71, pp. 1-13, 2022, Art no. 9002213, doi: 10.1109/TIM.2022.3157005.
16. M. Sun, M. E. Davies, I. K. Proudler and J. R. Hopgood. Adaptive Kernel Kalman Filter. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 71, pp. 713-726, 2023, doi: 10.1109/TSP.2023.3250829.
17. Fildes, Robert & Harvey, Andrew & West, Mike & Harrison, Jeff. (1991). Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter. *The Journal of the Operational Research Society*. 42. 1031. 10.2307/2583225.
18. H. Zhao and J. Hu. Iterative Unscented Kalman Filter With General Robust Loss Function for Power System Forecasting-Aided State Estimation. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 73, pp. 1-9, 2024, Art no. 9503809, doi: 10.1109/TIM.2023.3346502.
19. Y. Huang, Y. Zhang, N. Li, Z. Wu and J. A. Chambers. A Novel Robust Student's t-Based Kalman Filter. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 53, no. 3, pp. 1545-1554, June 2017, doi: 10.1109/TAES.2017.2651684.

20. C. Mengnan, Q. Yingning, F. Yanhui, W. Hao, and D. Infield. Wind turbine fault diagnosis based on unscented Kalman Filter. International Conference on Renewable Power Generation (RPG 2015), pp. 1-5. <https://doi.org/10.1049/cp.2015.0470>.
21. A. Makni, H. Fourati and A. Y. Kibangou. Adaptive Kalman filter for MEMS-IMU based attitude estimation under external acceleration and parsimonious use of gyroscopes. (2014) European Control Conference (ECC), Strasbourg, France, 2014, pp. 1379-1384, doi: 10.1109/ECC.2014.6862535.
22. G. P. Huang, A. I. Mourikis and S. I. Roumeliotis. Analysis and improvement of the consistency of extended Kalman filter based SLAM. (2008). IEEE International Conference on Robotics and Automation, Pasadena, CA, USA, 2008, pp. 473-479, doi: 10.1109/ROBOT.2008.4543252.
23. Zhang, L. Zhao, L. Zhao and J. Zhou. An Improved Robust Adaptive Kalman Filter for GNSS Precise Point Positioning. IEEE Sensors Journal, vol. 18, no. 10, pp. 4176-4186, 15 May15, 2018, doi: 10.1109/JSEN.2018.2820097.
24. V. Prkacin, I. Palunko, and I. Petrovic. Extended Kalman Filter for Estimating the State of a Payload Using Inertial Sensors of an Aircraft, 2021. Airborne Robotic Systems that Physically Interact with the Environment (AIRPHARO), Biograd na Moru, Croatia, 2021, pp. 1-6. DOI: 10.1109/AIRPHARO52252.2021.9571038. (In Russ.)
25. S. Shokri and M. R. Mosavi. A Fuzzy Weighted Kalman Filter for GPS Positioning Precision Enhancement, 2019. 7-th Iranian Joint Congress on Fuzzy and Intelligent Systems (CFIS), Bojnord, Iran, 2019, pp. 1-5, doi: 10.1109/CFIS.2019.8692157.

26. Fu and Y. Cheng. A Novel Robust Kalman Filter Based on Switching Gaussian-Heavy-Tailed Distribution. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, vol. 69, no. 6, pp. 3012-3016, June 2022, doi: 10.1109/TCSII.2022.3161263.
27. Z. Liang, M. Tian, Z. Liao, C. Wang and J. Li. Adaptive Robust Kalman filter for AUV Polar Integrated Navigation. (2022) International Conference on Machine Learning, Cloud Computing and Intelligent Mining (MLCCIM), Xiamen, China, 2022, pp. 99-105, doi: 10.1109/MLCCIM55934.2022.00024.
28. GOST R 27.003-2021 Reliability in Engineering. Terms and Definitions. — Moscow: Standartinform, 2021.
29. GOST R 50779.27-2017 Statistical Methods. Weibull Distribution. Data Analysis. — Moscow: Standartinform, 2017. — 45 p. URL: <https://gostassistant.ru>.