

На правах рукописи



Оконечников Анатолий Сергеевич

**Нестационарное движение сосредоточенной нагрузки по границе
упругой полуплоскости**

Специальность: 01.02.04

Механика деформируемого твердого тела

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Москва 2015

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном учреждении высшего профессионального образования, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ).

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент
Федотенков Григорий Валерьевич.

Официальные оппоненты: **Пшеничнов Сергей Геннадиевич**
доктор физико-математических наук, профессор,
ведущий научный сотрудник Научно-исследовательского института механики МГУ имени М.В. Ломоносова;

Горшков Александр Анатольевич
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры «Прикладная механика и основы конструирования» Московского государственного университета тонких химических технологий имени М.В. Ломоносова.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт прикладной механики Российской академии наук (ИПРИМ РАН).

Защита состоится «25» декабря 2015 года в 14.00 на заседании диссертационного совета Д 212.125.05 ФГБОУ ВПО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВПО МАИ (НИУ) и на сайте http://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=62093.

Автореферат разослан « » 2015 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Федотенков Г.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы.

В современных условиях защита элементов конструкций космических аппаратов от высокоскоростных локализованных внешних воздействий не имеет исчерпывающего решения и остается весьма актуальной при внедрении новых материалов и защитных элементов конструкций.

В силу динамического характера, при моделировании и исследовании процессов данного класса необходимо учитывать нестационарные явления механики деформируемого твердого тела. Динамические задачи приобретают все большую актуальность в силу увеличиваемых требований к объектам эксплуатации. Тем не менее, в большинстве работ анализ процесса проводится в предположении о стационарном характере задачи.

Численное решение задачи о воздействии подвижной нагрузки на упругие конструкции не обеспечивает возможность качественного анализа динамического процесса и должно быть дополнено аналитическими решениями, позволяющими, хотя бы в приближенной постановке задачи, определить критические скорости движения нагрузки. При этом одним из наиболее эффективных подходов к аналитическому исследованию нестационарных процессов указанного класса является развитие аппарата переходных функций.

Диссертационная работа посвящена аналитическому исследованию нестационарного воздействия подвижных нагрузок на упругую полуплоскость.

Целью работы является постановка задачи о воздействии подвижной нагрузки на упругую полуплоскость, построение ее аналитического решения и исследование нестационарной реакции полуплоскости при всевозможных значениях параметров процесса.

Научная новизна диссертационной работы заключается в следующем:

- впервые получено и исследовано аналитическое решение нестационарной задачи о равномерном движении сосредоточенной нагрузки по границе упругой полуплоскости на произвольном временном интервале;

- предложен метод решения этой задачи для случая произвольного закона движения;
- разработан и реализован численно-аналитический алгоритм, позволяющий строить решение при произвольном режиме движения.

Практическая значимость работы заключается в построении точных решений задач о воздействии подвижной нагрузки на упругую полуплоскость. Они могут быть использованы в качестве основы для решений более сложных задач о подвижных распределенных нагрузках, нестационарных контактных задач с подвижными штампами, для оценки точности численных и приближенных решений, а также могут быть полезны для различных технических приложений при проектировании современных ракетно-космических объектов, например, в задачах прогнозирования процесса посадки космических аппаратов на грунт, а также в области развития скоростного наземного транспорта.

Достоверность и обоснованность изложенных в диссертации результатов подтверждается использованием в постановке задач апробированной модели упругой среды, применением строгого математического аппарата, а также построением решений на основе известных результатов для плоских задач.

Методы исследования. В работе проводится математическая постановка нестационарной задачи о воздействии подвижной нагрузки на упругую полуплоскость с использованием потенциалов упругих смещений, а также аппарата обобщенных функций. Метод решения задачи основан на принципе суперпозиции. Искомые перемещения определяются с помощью двойной свертки напряжений, заданных на границе полуплоскости, с функцией влияния. В роли функции влияния выступает известное решение задачи Лэмба. Для выделения и исследования особенностей в окрестности положений фронтов поверхностных и объемных упругих волн, в окрестности подвижной точки приложения нагрузки, а также для исследования случаев критических скоростных режимов движения нагрузки используется асимптотический анализ интегралов, входящих в представление решения.

Основные положения, выносимые на защиту.

Получено аналитическое решение задачи о воздействии движущейся с постоянной скоростью сосредоточенной нагрузки на упругую полуплоскость на произвольном временном интервале.

Проведен анализ построенных решений при всевозможных значениях параметрах процесса.

Разработан численно-аналитический алгоритм решения задачи о воздействии на упругую полуплоскость движущейся по произвольному закону сосредоточенной нагрузки.

Апробация результатов работы.

Материалы диссертационной работы докладывались на следующих научных конференциях:

– XVI-XXI Международные симпозиумы «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Россия, Москва, 2012-2015);

– конференция Ломоносовские чтения 2013 (Москва, МГУ им. Ломоносова 23 апреля 2013 г.);

– X Международная научная конференция «Импульсные процессы в механике сплошных сред» (Украина, Николаев, 2013);

– Международная научная конференция «Современные проблемы математики, механики, информатики» (Тула, 2014);

– XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 2015);

– I и II Международные научные семинары «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы» (Россия, Москва, МАИ, 2014, 2015).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 14 работ, в том числе 2 в журналах из перечня, рекомендованного ВАК РФ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, состоящего из 61 наименования. Общий объем диссертации – 96 страниц, 16 рисунков и 4 таблицы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность выбора темы диссертационной работы, сформулированы цель, научная новизна, защищаемые положения и практическая значимость работы. Кратко изложена структура диссертации.

В главе 1 «Постановка нестационарной задачи о движении сосредоточенной нагрузки по границе упругой полуплоскости» описано современное состояние исследований в области изучаемого процесса, представлен обзор литературы.

Дана общая постановка задач плоского движения однородной изотропной упругой среды с использованием потенциалов упругих смещений φ и ψ , включающая в себя:

– уравнения движения среды в компонентах потенциалов

$$\ddot{\varphi} = \Delta\varphi, \quad \eta^2 \ddot{\psi} = \Delta\psi, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (1)$$

где φ, ψ – скалярный и векторный потенциалы упругих смещений. Точкой здесь и далее обозначена производная по безразмерному времени τ , Oxz – прямоугольная декартова система координат.

– граничные условия одного из следующих трех типов:

а) кинематические граничные условия

$$u(x, z, \tau)|_{\Gamma} = U(x, z, \tau), \quad w(x, z, \tau)|_{\Gamma} = W(x, z, \tau), \quad (x, z) \in \Gamma. \quad (2)$$

где $u(x, z, \tau), w(x, z, \tau)$ – компоненты вектора перемещений; $U(x, z, \tau), W(x, z, \tau)$ – компоненты заданного вектора, Γ – граница исследуемой области;

б) силовые граничные условия

$$\sigma_{ij} \nu_j |_{\Gamma} = p_i(x, z, \tau), \quad (i, j = 1, 3), \quad (x, z) \in \Gamma, \quad (3)$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, p_i – компоненты заданного вектора внешней нагрузки;

в) граничные условия смешанного типа

$$\begin{aligned} u(x, z, t)|_{\Gamma_u} &= U(x, z, t), \quad w(x, z, t)|_{\Gamma_u} = W(x, z, t), \quad (x, z) \in \Gamma_u, \\ \sigma_{ij}v_j|_{\Gamma_\sigma} &= p_i(x, z, t), \quad (i, j = 1, 3), \quad (x, z) \in \Gamma_\sigma, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$, v_j – компоненты вектора \mathbf{v} внешней нормали к кривой Γ ;

В постановке задачи используется следующая система безразмерных величин:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x'}{L}, \quad z = \frac{z'}{L}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{L}, \quad u = \frac{u'}{L}, \quad w = \frac{w'}{L}, \quad \varphi = \frac{\varphi'}{L^2}, \quad \psi = \frac{\psi'}{L^2}, \\ \eta &= \frac{c_1}{c_2}, \quad c_R = \frac{c'_R}{c_1}, \quad \sigma'_{ij} = \frac{\sigma'_{ij}}{\lambda + 2\mu}, \quad \kappa = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} = 1 - \frac{2}{\eta^2}. \end{aligned}$$

Здесь t – размерное время; c_1, c_2 – скорость волн растяжения-сжатия и сдвига; λ, μ – упругие постоянные Ламе; c_R – скорость поверхностных волн Рэлея; L – некоторый линейный размер.

Далее рассматривается нестационарное движение сосредоточенной нормальной нагрузки по границе упругой полуплоскости. В начальный момент времени $\tau = 0$ по нормали к свободной границе $z = 0$ невозмущенной однородной изотропной упругой полуплоскости $z \geq 0$ прикладывается нормальная сосредоточенная нагрузка q . Она перемещается в положительном направлении оси Ox по заданному закону $x = f(\tau)$ (рис. 1):

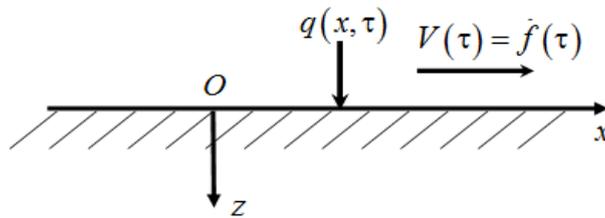


Рис.1.

$$q(x, \tau) = H(\tau)\delta[x - f(\tau)].$$

Здесь и далее $H(\cdot)$ – функция Хевисайда, $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака.

Постановка задачи включает в себя уравнения движения (1), нулевые начальные условия:

$$\varphi|_{\tau=0} = \dot{\varphi}|_{\tau=0} = 0, \quad \psi|_{\tau=0} = \dot{\psi}|_{\tau=0} = 0 \quad (5)$$

и граничные условия:

$$\begin{aligned} \sigma_{13}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{33}|_{z=0} = -q(x, \tau), \\ u = O(1), \quad w = O(1), \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad r = \sqrt{x^2 + z^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Для сведения поставленной задачи к разрешающему интегральному соотношению используется метод суперпозиции:

$$w_0(x, \tau) = -G_f(x, \tau) ** q(x, \tau), \quad (7)$$

где знаком ** обозначена двойная свертка функций по пространственной и временной координатам; $w_0(x, \tau)$ – нормальные перемещения границы полуплоскости; $G_f(x, \tau)$ – функция влияния – решение задачи Лэмба

$$G_f(x, \tau) = \sum_{j=1}^2 G_j(x, \tau) H(\tau - \eta_j |x|), \quad (8)$$

$$G_j(x, \tau) = \frac{g_j(x^2, \tau^2) k_j(x^2, \tau^2)}{\pi \eta^4 P_3(x^2, \tau^2)},$$

$$g_1(x, \tau) = (\eta^2 x - 2\tau)^2, \quad g_2(x, \tau) = 4\tau(\tau - x),$$

$$k_1(x, \tau) = \sqrt{\tau - x}, \quad k_2(x, \tau) = \sqrt{\tau - \eta^2 x}, \quad P_3(x, \tau) = P_1(x, \tau) P_2(x, \tau), \quad P_1(x, \tau) = x - c_R^2 \tau,$$

$$P_2(x, \tau) = x^2 - 2\alpha^2 x \tau + \beta^2 \tau^2, \quad \alpha^2 = \frac{4}{\eta^2} - \frac{c_R^2}{2}, \quad \beta^2 = \frac{16(\eta^2 - 1)}{\eta^8 c_R^2}, \quad \eta_1 = 1, \quad \eta_2 = \eta.$$

С учетом свойств дельта-функции, интегральное представление (7) сводится к одномерному интегралу по времени:

$$w_0(x, \tau) = -\int_0^{\tau} G_f(x - f(t), \tau - t) dt = -\sum_{j=1}^2 w_j(x, \tau), \quad (9)$$

$$w_j(x, \tau) = \int_0^{\tau} G_j(x - f(t), \tau - t) H(\tau - t - \eta_j |x - f(t)|) dt.$$

В главе 2 «Равномерное движение сосредоточенной поверхностной нагрузки» рассматривается случай, когда сосредоточенная нагрузка движется по границе упругой полуплоскости с постоянной скоростью:

$$f(\tau) = V\tau, \quad V = \text{const.} \quad (10)$$

Выражение для перемещений границы полуплоскости (9) с учетом свойств функции Хевисайда и закона движения (10) будет иметь вид:

$$w_0(x, \tau) = -\sum_{j=1}^2 w_j(x, \tau), \quad w_j(x, \tau) = \int_{\tau_{j1}}^{\tau_{j2}} G_j(x - Vt, \tau - t) dt. \quad (11)$$

где τ_{j1}, τ_{j2} являются границами области решений системы неравенств

$$0 < t < \tau, \quad -\frac{\tau - t}{\eta_j} < x - Vt < \frac{\tau - t}{\eta_j}. \quad (12)$$

Решения неравенств (12) удобно получить графоаналитическим способом с учетом трех характерных режимов движения нагрузки: сверхзвуковой $V > 1$, трансзвуковой $1/\eta < V < 1$ и дозвуковой $V < 1/\eta$. Он продемонстрирован на примере сверхзвукового режима движения с помощью рис. 2.

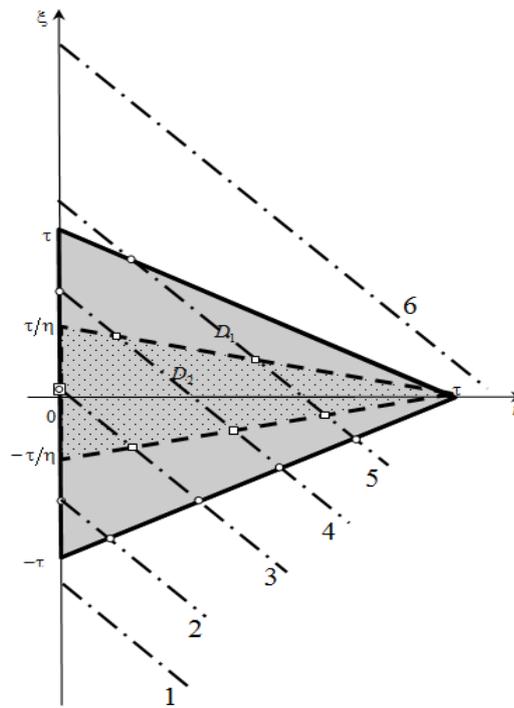


Рис. 2.

Сплошные линии соответствуют прямым $\xi = \pm \frac{\tau - t}{\eta}$, штриховые – $\xi = \pm(\tau - t)$, а штрихпунктирная – $\xi = x - Vt$. Пределы τ_{k1} , τ_{k2} являются абсциссами точек пересечения прямой $\xi = x - Vt$ с границами областей

$$D_j = \left\{ (t, \xi) : 0 < t < \tau, -\frac{\tau - t}{\eta_j} < \xi < \frac{\tau - t}{\eta_j} \right\}, j = 1, 2.$$

Как видно из рис. 2, эти области геометрически представляют собой треугольники с вершинами $(\tau, 0)$, $(0, \pm \tau/\eta_j)$. Фиксируя определенное значение $V > 1$ и перемещая прямую $L: \xi = x - Vt$ в вертикальном направлении параллельно самой себе, получаем 6 характерных случаев относительного расположения областей D_j и прямой L . Здесь круглыми и квадратными маркерами обозначены точки пересечения прямой L с границами областей D_1 и D_2 соответственно. Абсциссы точек пересечения в случае не равенства их нулю находятся как решения уравнений

$$\begin{aligned} x - Vt &= \pm \frac{\tau - t}{\eta_j} \Rightarrow t = t_{j1}, t_{j2}, \\ \tau > t_{j2} &= \frac{\tau + \eta_j x}{V\eta_j + 1} > t_{j1} = \frac{\eta_j x - \tau}{V\eta_j - 1} > 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Аналогично определяются все возможные случаи значения пределов в (11) при двух других характерных режимах движения нагрузки.

Далее с использованием замены переменной

$$y = \frac{x - Vt}{\tau - t} \quad (14)$$

выражения для $w_j(x, \tau)$ записываются следующим образом:

$$w_j(x, \tau) = \int_{y_{j1}}^{y_{j2}} \tilde{G}_j(y) \sqrt{1 - \eta_j^2 y^2} dy,$$

$$\tilde{G}_j(y) = \frac{G_j(y, 1)}{(y - V) \sqrt{1 - \eta_j^2 y^2}} = \frac{1}{\pi \eta^4} \frac{1}{y - V} \frac{g_j(y^2, 1)}{(y^2 - c_R^2) Q_2(y) Q_2(-y)},$$

$$Q_2(y) = y^2 + \gamma y + \beta = (y + c)(y + \bar{c}), \quad Q_2(-y) = (y - c)(y - \bar{c}),$$

$$\gamma = \sqrt{2(\alpha^2 + \beta)}, \quad c = \frac{\gamma + i\sqrt{2(\beta - \alpha^2)}}{2}.$$

Раскладывая функцию $\tilde{G}_j(y)$ на сумму элементарных дробей

$$\tilde{G}_j(y) = \sum_{l=1}^7 \frac{a_{jl}}{y - b_l},$$

$$b_1 = V, \quad b_2 = c_R, \quad b_3 = -c_R, \quad b_4 = c, \quad b_5 = \bar{c}, \quad b_6 = -c, \quad b_7 = -\bar{c}, \quad (15)$$

$$a_{jl} = \frac{1}{\pi \eta^4} \frac{g_j(b_l^2, 1)}{\prod_{\substack{r=1 \\ r \neq l}}^7 (b_l - b_r)},$$

С использованием замены переменной $z = \eta_j y$, получаем следующую формулу для нормальных перемещений границы полуплоскости:

$$w_0(x, \tau) = -\sum_{j=1}^2 w_j(x, \tau), \quad w_j(x, \tau) = \sum_{l=1}^7 a_{jl} I_{jl}(x, \tau; c_{jl}),$$

$$I_{jl}(x, \tau; c_{jl}) = \int_{z_{j1}}^{z_{j2}} \frac{\sqrt{1 - z^2}}{z - c_{jl}} dz, \quad c_{jl} = \eta_j b_l. \quad (16)$$

Пределы интегрирования в (16) определяются из (13), (14).

Как видно из представления (16), для проведения расчетов и выделения характерных особенностей решения, необходимо исследовать свойства интеграла вида

$$I(a) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\sqrt{1 - z^2}}{z - a} dz, \quad z_1, z_2 \in [-1, 1]. \quad (17)$$

При этом параметр a может быть как действительным, так и комплексным. При $a \in R$ возможны такие варианты: $a \notin [z_1, z_2]$, $a \in [z_1, z_2]$. В последнем

случае интеграл (17) – сингулярный и понимается в смысле главного значения по Коши.

При $a \in R$, $a \notin [z_1, z_2]$ подынтегральная является непрерывной действительной, следовательно, для (17) применима формула Ньютона-Лейбница:

$$I(a) = J(z_2; a) - J(z_1; a), \quad (18)$$

$$J(z; a) = \begin{cases} \sqrt{1-z^2} + a \arcsin z + \sqrt{1-a^2} \ln |X(z; a)| & \text{при } a < 1; \\ \sqrt{1-z^2} + a \arcsin z + 2\sqrt{a^2-1} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a-1}\sqrt{1+z}}{\sqrt{a+1}\sqrt{1-z}} & \text{при } a > 1; \\ \frac{\sqrt{1+z}}{\sqrt{1-z}} - 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1+z}}{\sqrt{1-z}} & \text{при } a = 1; \end{cases}$$

$$X(z; a) = \frac{\sqrt{1-a}\sqrt{1+z} - \sqrt{1+a}\sqrt{1-z}}{\sqrt{1-a}\sqrt{1+z} + \sqrt{1+a}\sqrt{1-z}}.$$

При $a \in C$ этот интеграл записывается так:

$$I(a) = J_c(z_2, a) - J_c(z_1, a), \quad (19)$$

$$J_c(z; a) = \sqrt{1-z^2} + a \arcsin z + \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \ln(X(z; a)),$$

Доказываются следующие утверждения.

Утверждение 1. Главное значение интеграла (17) определяется формулой (18).

Следствие. Утверждение 1 дает основание для вычисления регулярных и сингулярных интегралов, входящих в интегральное представление решения, с помощью одних и тех же формул (18).

Утверждение 2. В случае $a \in R$, $a \rightarrow z_2 \pm 0$ значение интеграла (17) стремится к $+\infty$ по логарифмическому закону. В случае $a \in R$, $a \rightarrow z_1 \pm 0$ значение интеграла (17) стремится к $-\infty$ по логарифмическому закону.

Утверждение 3. В случае $a \in R$, $z_2 \rightarrow a \pm 0$ значение интеграла (17) стремится к $+\infty$ по логарифмическому закону. В случае $a \in R$, $z_1 \rightarrow a \pm 0$ значение интеграла (17) стремится к $-\infty$ по логарифмическому закону.

Далее дается анализ полученных решений для следующих характерных скоростных диапазонов нагрузки:

- сверхзвуковой – $V > 1$;
- трансзвуковой – $1/\eta < V < 1$;
- дозвуковой – $0 < V < 1/\eta$.

Проводится исследование решения при критических режимах движения:

- движение нагрузки со скоростью волн расширения-сжатия $V = 1$;
- движение нагрузки со скоростью волн сдвига $V = 1/\eta$;
- движение нагрузки со скоростью волн Рэлея $V = c_R$.

В результате анализа построенных решений, с использованием утверждений 1-3, были получены следующие свойства.

Сверхзвуковой режим ($V > 1$).

Перед текущим положением подвижной нагрузки перемещения отсутствуют:

$$w_0(x, \tau) = 0 \text{ при } x > V\tau.$$

В области между положением нагрузки и фронтом волны растяжения сжатия перемещения постоянны:

$$w_0(x, \tau) = \text{const} \text{ при } \tau < x < V\tau.$$

На интервале $x \in [-\tau, \tau)$ решения непрерывны и определяются согласно формулам (16) везде, кроме точек, соответствующих положений фронтов волн Рэлея

$$w_0(x, \tau) \in C \text{ при } x \in x \in [-\tau, \tau) \setminus \{\pm c_R \tau\}.$$

В точках, соответствующих фронтам волн Рэлея имеется логарифмическая особенность:

$$w_0(x \pm \varepsilon, \tau) \sim \pm A \ln \varepsilon \quad (\varepsilon \rightarrow +0, A = \text{const}) \text{ при } x = \pm c_R \tau.$$

В точке, текущего приложения нагрузки, имеется конечный скачок:

$$w_0(x, \tau) \Big|_{x=\tau/\eta-\varepsilon} - w_0(x, \tau) \Big|_{x=\tau/\eta+\varepsilon} \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow +0. \text{ при } x = V\tau.$$

Трансзвуковой режим ($1/\eta < V < 1$).

Перед фронтом волны растяжения-сжатия перемещения отсутствуют:

$$w_0(x, \tau) = 0 \text{ при } x > \tau.$$

На интервале $x \in [-\tau, \tau]$ решения непрерывны и определяются согласно формулам (16) везде, кроме точек, соответствующих положению фронтов волн Рэлея и подвижной нагрузки:

$$w_0(x, \tau) \in C \text{ при } x \in (-\tau, \tau) \setminus \{\pm c_R \tau, V\tau\}.$$

В точках, соответствующих фронтам волн Рэлея и приложенной нагрузке имеется логарифмическая особенность:

$$w_0(x \pm \varepsilon, \tau) \sim \pm A \ln \varepsilon \quad (\varepsilon \rightarrow +0, A = \text{const}) \text{ при } x = V\tau$$

$$w_0(x \pm \varepsilon, \tau) \sim \pm B \ln \varepsilon \quad (\varepsilon \rightarrow +0, B = \text{const}) \text{ при } x = \pm c_R \tau$$

Дозвуковой режим ($V < 1/\eta$).

Перед фронтом волны растяжения-сжатия перемещения отсутствуют:

$$w_0(x, \tau) = 0 \text{ при } x > \tau.$$

На интервале $x \in [-\tau, \tau]$ решения непрерывны и определяются согласно формулам (16) везде, кроме точек, соответствующих фронтам волн Рэлея и приложенной нагрузке:

$$w_0(x, \tau) \in C \text{ при } x \in (-\tau, \tau) \setminus \{\pm c_R \tau, V\tau\}.$$

В точках, соответствующих фронтам волн Рэлея текущему положению нагрузки наблюдается логарифмическая особенность:

$$w_0(x \pm \varepsilon, \tau) \sim \pm A \ln \varepsilon \quad (\varepsilon \rightarrow +0, A = \text{const}) \text{ при } x = V\tau,$$

$$w_0(x \pm \varepsilon, \tau) \sim \pm B \ln \varepsilon \quad (\varepsilon \rightarrow +0, B = \text{const}) \text{ при } x = \pm c_R \tau.$$

Критические режимы движения нагрузки.

Из анализа полученных решений при движении сосредоточенной нагрузки с критическими скоростями получены следующие результаты.

- *Нагрузка движется со скоростью распространения волн растяжения-сжатия.*

В точке наблюдения, соответствующей текущему положению нагрузки наблюдается *конечный скачок*. Во всей остальной области изменения пространственной координаты, свойства решений совпадают с полученными для движения на сверхзвуковом скоростном диапазоне.

- *Нагрузка движется со скоростью распространения волн сдвига.*

В точке наблюдения, соответствующей приложенной нагрузке наблюдается *логарифмическая особенность*:

$$w_0(x \pm \varepsilon, \tau) \sim \pm A \ln \varepsilon \quad (\varepsilon \rightarrow +0, A = \text{const}) \quad \text{при } x = \tau.$$

Во всей остальной области изменения пространственной координаты, свойства решений совпадают с полученными для движения на трансзвуковом скоростном диапазоне.

- *Нагрузка движется со скоростью распространения волн Рэлея.*

В точке наблюдения, соответствующей приложенной нагрузке наблюдается *степенно-логарифмическая особенность*:

$$w_0(x \pm \varepsilon, \tau) \sim A \ln \varepsilon \mp B \frac{1}{\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0, A = \text{const}, B = \text{const}) \quad \text{при } x = c_R \tau.$$

Во всей остальной области изменения пространственной координаты, свойства решений совпадают с полученными для случая трансзвукового скоростного диапазона.

В главе 3 «Движение нагрузки по произвольному закону» представлен численно-аналитический метод решения изучаемой проблемы для случая произвольного закона движения нагрузки $f(t)$. Метод основан на линейной интерполяции произвольного закона движения:

$$f(t) \approx \sum_{k=1}^n (f_{k-1} + V_k (t - t_{k-1})) H(t - t_{k-1}) H(t_k - t), \quad (20)$$

$$f_{k-1} = f(t_{k-1}), \quad V_k = \frac{\Delta f_k}{t_k - t_{k-1}}.$$

Здесь t_k, t_{k-1} – узлы интерполяции.

Таким образом, единственное требование, накладываемое на закон движения – требование монотонности закона движения на временных интервалах $t \in [t_{k-1}, t_k]$.

Выражения для перемещений (9), с учетом интерполяции (20) приобретают вид:

$$\begin{aligned} w_0(x, \tau) &= -\sum_{j=1}^2 w_j(x, \tau), \quad w_j(x, \tau) = \sum_{k=1}^n w_{jk}(x, t_k), \\ w_{jk}(x, t_k) &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} G_j[p_k(x, t), \Delta t] H(\Delta t - \eta_j |p_k(x, t)|) dt, \\ x_k &= x - f_{k-1} + V_k t_{k-1}, \quad p_k(x, t) = x_k - V_k t. \end{aligned} \quad (21)$$

Пределы интегрирования t_{k-1}, t_k в (21), как и в предыдущей главе, определяются графоаналитическим методом.

Проводя разложение на элементарные дроби (15) и производя замену переменной $z = \eta_j p_k(x, t) / (\tau - t)$, получим следующее интегральное представление для перемещений:

$$w_0(x, \tau) = -\sum_{j=1}^2 w_j(x, \tau), \quad w_j(x, \tau) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^7 I_{jkl}, \quad I_{jkl} = a_{jkl} \int_{z_{j1}^k}^{z_{j2}^k} \frac{k_j(z^2, 1)}{z - \eta_j b_{kl}} dz. \quad (22)$$

$$b_{k1} = V_k, \quad b_{k2} = c_R, \quad b_{k3} = -c_R, \quad b_{k4} = c, \quad b_{k5} = \bar{c}, \quad b_{k6} = -c, \quad b_{k7} = -\bar{c},$$

$$a_{jkl} = \frac{g_j[(b_{kl})^2, 1]}{\pi \eta^4 \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq l}}^7 (b_{kl} - b_{kr})},$$

Как видно из (22), в случае произвольного закона движения нагрузки задача сводится к анализу n задач с нагрузкой, движущейся с постоянной скоростью. По этой причине все выводы об особенностях, содержащихся в решении задачи, полученные в предыдущей главе, справедливы и для произвольного закона движения нагрузки.

В работе представлены графические результаты для распределения нормальных перемещений границы полуплоскости от координаты x для следующих случаев (рис. 3а-г).

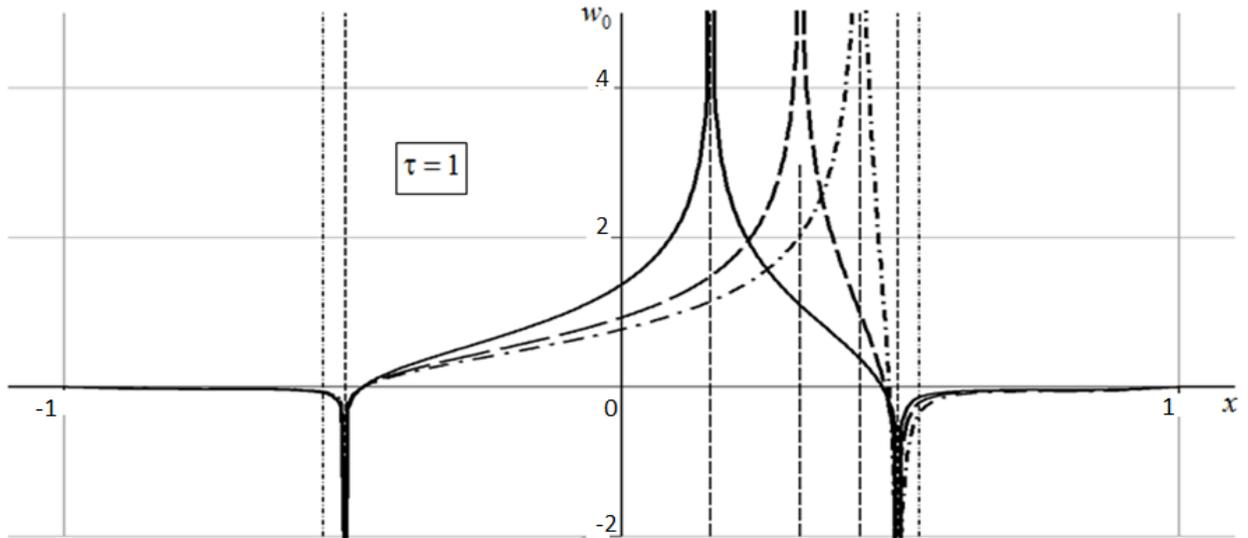


Рис. 3а. Нагрузка движется с постоянной скоростью $V < 1/\eta$.

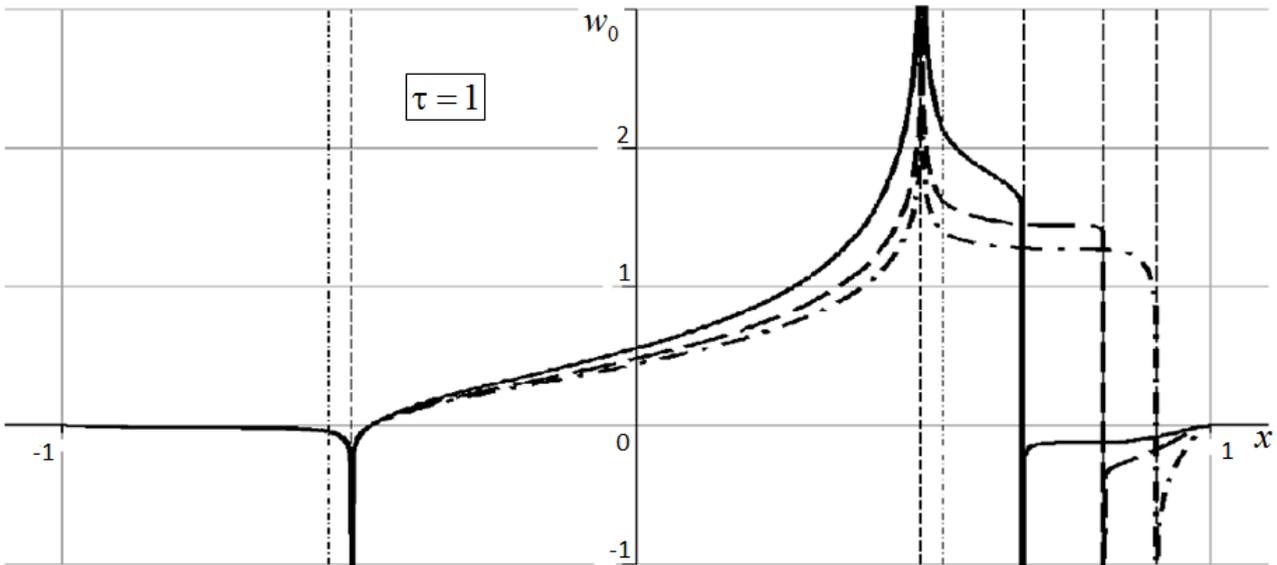


Рис. 3б. Нагрузка движется с постоянной скоростью $1/\eta < V < 1$

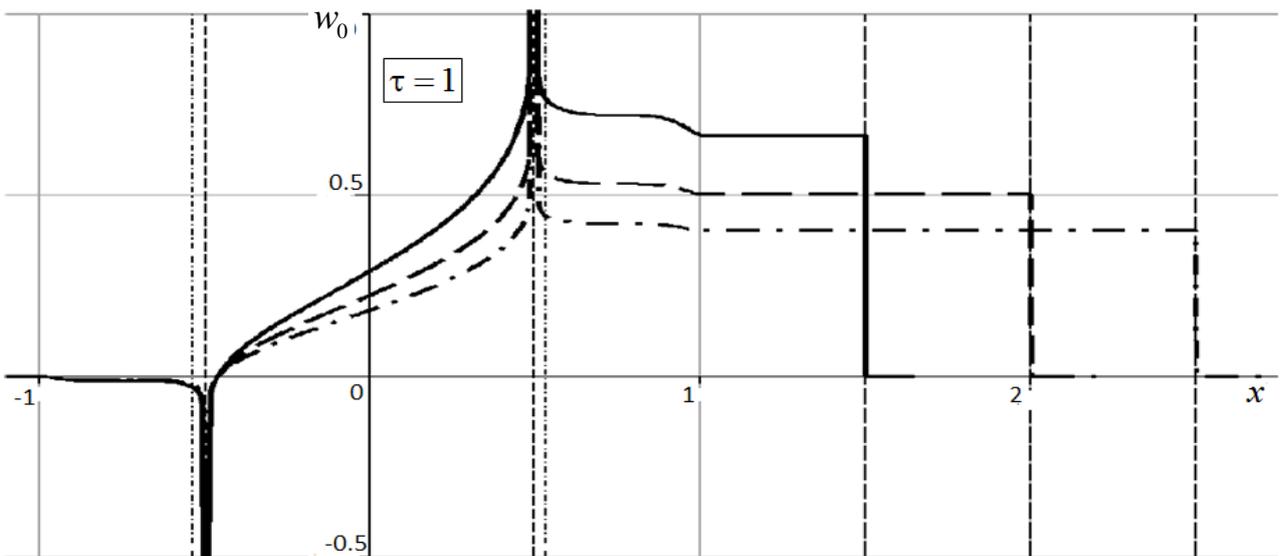


Рис. 3в. Нагрузка движется с постоянной скоростью $V > 1$.

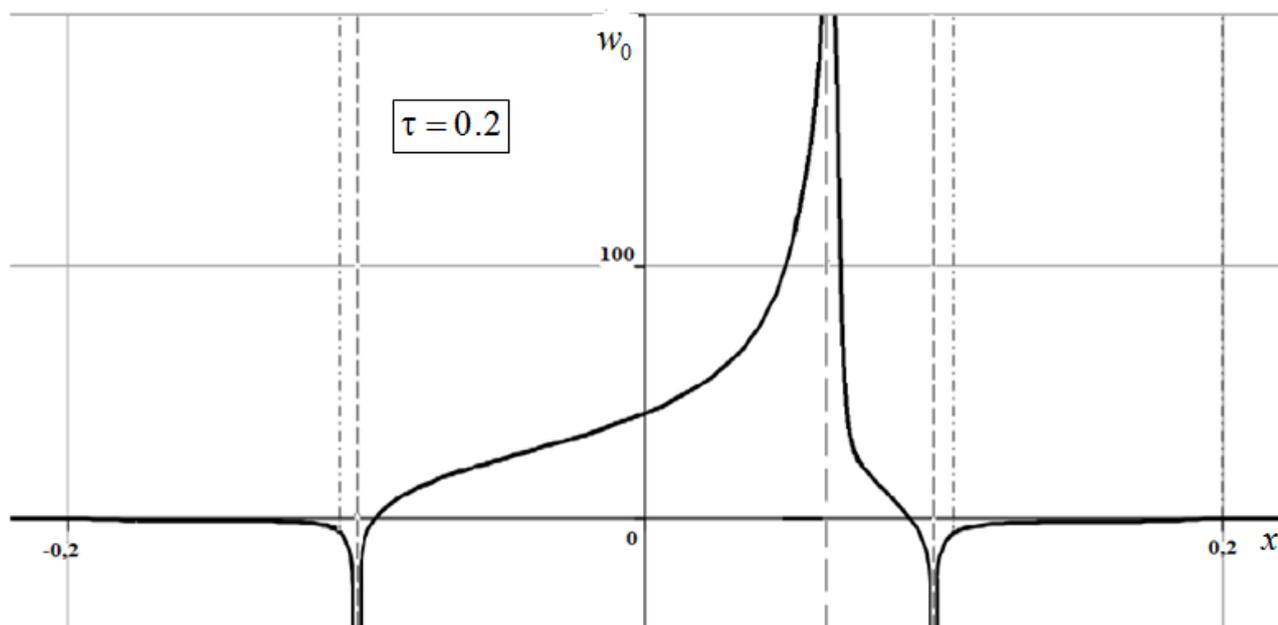


Рис. 3г. Нагрузка движется по закону: $f(\tau) = 1.3\tau^2 + (0.1/\eta)\tau$.

Здесь, штриховые асимптоты соответствуют положению фронта движения нагрузки (длинный штрих) и фронтам волны Рэлея (короткий штрих). Штриховые пунктирные асимптоты соответствуют положению фронтов волны сдвига.

Основные результаты и выводы.

1. Построено аналитическое решение задачи о воздействии подвижной сосредоточенной нагрузки на упругую полуплоскость в случае равномерного режима движения.
2. Полученное решение полностью исследовано во всем диапазоне изменения параметров процесса.
3. Аналитически выделены и исследованы особенности решения.
4. Предложен метод, построен и реализован алгоритм решения задачи о движении нагрузки по произвольному временному закону.

Публикации по теме диссертации

1. Игумнов Л.А., Оконечников А.С., Тарлаковский Д.В., Белов А.А. Плоская нестационарная задача о движении поверхностной нагрузки по упругому полупространству // Математические методы и физико-механические поля - 2013.- Т.56, № 2. – С. 157 -163. Перевод: L.A. Igumnov, A.S. Okonechnikov, D.V. Tarlakovskii, and G.V. Fedotenkov Plane nonstationary problem of motion of the surface load over an elastic half-space // Journal of Mathematical Sciences. Vol. 174. No. 2. February. 2014. P 193-201. DOI 10.1007/s10958-014-2100-z.
2. Оконечников А.С., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Нестационарное движение нормальной сосредоточенной нагрузки вдоль границы упругой полуплоскости // Электронный журнал Труды МАИ – 2015., – №82, https://www.mai.ru/upload/iblock/0f1/okonechnikov_tarlakovskiy_fedotenkov_rus.pdf.
3. Оконечников А.С., Федотенков Г.В. Нестационарные задачи о движении нагрузки вдоль поверхности упругой полуплоскости // Матер. XVIII Междунар. симп. «Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред» им. А.Г. Горшкова - М., 2012., том 2 - С. 56-58.
4. Оконечников А.С., Федотенков Г.В. Нестационарная задача о движении сосредоточенной нагрузки вдоль упругой полуплоскости // Сборник тезисов докладов конференции «Инновации в авиации и космонавтике - 2012». - СПб.: ООО «Принт-салон», 2012. - С. 279-280.

5. Оконечников А.С., Федотенков Г.В. Плоская нестационарная задача о движении поверхностной нагрузки по упругому полупространству // Нестационарные процессы деформирования элементов конструкций, обусловленные воздействием полей различной физической природы. – Львов: ИППММ им. Я.С. Подстригача. – 2012. – С. 131 – 135.

6. Оконечников А.С., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Плоская нестационарная задача о равноускоренном движении сосредоточенной поверхностной силы по упругому полупространству // Матер. XIX междунар. симп. «Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред» им. А.Г. Горшкова - М., 2013., том 2 - С. 32-35.

7. Оконечников А.С., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Нестационарная задача о равноускоренном движении сосредоточенной нагрузки вдоль границы упругой полуплоскости. // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. 15–23 апреля 2013 г., Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова. – М.: Издательство Московского университета, 2013. - С. 130.

8. Бугаев Н.М., Оконечников А.С., Тарлаковский Д. В., Федотенков Г.В. Плоская нестационарная задача о равноускоренном движении сосредоточенной силы вдоль границы упругого полупространства // Сучасні проблеми механіки та математики. Т. 1. – Львів, ИППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2013. – С. 78 - 80.

9. Оконечников А.С., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Плоская нестационарная задача о движении сосредоточенной нагрузки вдоль поверхности упругого полупространства по произвольному временному закону // Матер. X Междунар. научн. конф. «Импульсные процессы в механике сплошных сред» – Николаев: КП «Миколаївська областна друкарня», 2013. - С. 36-39.

10. Оконечников А.С., Федотенков Г.В. Нестационарная задача о движении сосредоточенной нагрузки вдоль границы упругой полуплоскости // Матер. XX междунар. симп. «Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред» им. А.Г. Горшкова - М., 2014., том 2 - С. 34-35.

11. Оконечников А.С., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Нестационарное воздействие подвижной сосредоточенной нагрузки на границу упругой полуплоскости // Междунар. научн. конф. «Совр. пробл. матем. механ. инф.» Тула. 2014. – С. 332-333.

12. Оконечников А.С., Федотенков Г.В. Нестационарная реакция упругой полуплоскости на воздействие нормальной подвижной сосредоточенной нагрузки // XI Всероссийский съезд по фундам. пробл. теоретич. и прикл. механ.- Казань, 2015, Аннотации докладов. – С. 210.

13. Кузнецова Ел.Л., Оконечников А.С., Онджелик О. Нестационарное воздействие подвижной сосредоточенной нагрузки на упругую полуплоскость // II междунар. научн. семинар «Динамич. деформир. и конт. взаимодействие тонкостенных констр. при возд. полях различной физич. природы» - М., 2015 – С. 69.

14. Оконечников А.С., Федотенков Г.В. Исследование воздействия подвижной сосредоточенной нагрузки на упругую полуплоскость // Матер. XXI междунар. симп. «Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред» им. А.Г. Горшкова - М., 2015., том 2 - С. 55-56.