

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)"

На правах рукописи



УДК 531.01, 531.36, 521.131

Максимов Бадма Александрович

**Методы исследования орбитальной устойчивости
периодических движений гамильтоновой
системы в случаях вырождения и их
приложение в динамике твердого тела**

1.1.7. – Теоретическая механика, динамика машин

Научный руководитель

д. ф.-м. н., доцент

Бардин Борис Сабирович

Москва – 2025

Оглавление

Введение	5
Глава 1. О методе исследования орбитальной устойчивости периодических движений гамильтоновой системы с двумя степенями свободы	13
1.1. Постановка задачи об орбитальной устойчивости периодического движения автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы	13
1.2. Методика введения локальных переменных в окрестности периодического решения	15
1.3. Об орбитальной устойчивости периодических движений в линейном приближении	17
1.4. Нормальная форма функции Гамильтона в окрестности периодических движений и условия орбитальной устойчивости	19
1.5. Изонергетическая редукция и условия орбитальной устойчивости редуцированной системы	23
Глава 2. Исследование орбитальной устойчивости в резонансных случаях при наличии вырождения	28
2.1. О случаях вырождения в задаче об орбитальной устойчивости периодических движений	28
2.2. Орбитальная устойчивость в случае вырождения при резонансах третьего и шестого порядков	30
2.3. Орбитальная устойчивость в случае вырождения при резонансе четвертого порядка	37

2.4.	Орбитальная устойчивость в случае вырождения при резонансах первого и второго порядков	50
2.5.	О построении симплектического отображения генерируемого фа- зовым потоком уравнений возмущенного движения	57
Глава 3. Об орбитальной устойчивости маятниковых периодиче- ских движений тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой при условии Горячева-Чаплыгина		64
3.1.	Постановка задачи	64
3.2.	Локальные переменные и изоэнергетическая редукция	67
3.3.	Линейный анализ орбитальной устойчивости маятниковых пери- одических движений	70
3.4.	Анализ орбитальной устойчивости маятниковых колебаний при малых амплитудах	71
3.5.	Нелинейный анализ орбитальной устойчивости маятниковых ко- лебаний при произвольных амплитудах	79
3.6.	Нелинейный анализ орбитальной устойчивости маятниковых ко- лебаний при наличии вырождения	83
Заключение		86
Приложение А.		89
A.1.	Коэффициенты форм $\Psi_k^{(m)}(q_2, p_2, w)$	89
Список литературы		91

Введение

Актуальность задачи. В классической задаче о движении твердого тела с одной неподвижной точкой в однородном поле тяжести существует целый ряд замечательных частных решений, описывающих семейства периодических движений тела. Периодические движения представляют большой интерес как с теоретической, так и с прикладной точек зрения. Изучение свойств периодических движений часто позволяет получить важные качественные выводы о динамике механической системы в целом. Результаты исследования периодических движений находят также применение и в прикладных задачах моделирования динамики и построения систем оптимального управления движением технических систем.

Важные выводы о поведении механической системы вблизи ее периодического движения можно получить из решения задачи об устойчивости. Периодические движения в динамике твердого тела с неподвижной точкой, как правило, образуют семейства. Период этих движений зависит от одного или нескольких параметров, значения которых определяются начальными условиями. По этой причине периодические движения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой, как правило, неустойчивы по Ляпунову. Вместе с тем, неустойчивые по Ляпунову периодические движения могут быть орбитально устойчивыми. Изучению орбитальной устойчивости периодических движений твердого тела посвящено множество работ [1, 2, 5–7, 11–19, 22, 24, 25, 34, 37, 38, 42, 44, 45, 48, 49, 53–56, 58, 60–62, 64–68, 74–78, 84, 85, 93, 97, 98]. Для получения выводов об орбитальной устойчивости применяются различные подходы и методы, среди которых прямой метод Ляпунова [18, 24], метод построения инвариантных множеств [25], топологические методы [17].

Уравнения движения тяжелого твердого тела могут быть представлены в гамильтоновой форме. Это позволяет применять хорошо развитые к настоящей

му времени математические методы гамильтоновой механики для исследования орбитальной устойчивости периодических движений. В частности, на основании метода нормальных форм и теории КАМ разработаны алгоритмы, позволяющие получать строгие выводы об орбитальной устойчивости периодических движений в системах Гамильтона. Применение этих методов и алгоритмов в целом ряде задач динамики твердого тела показало их эффективность и универсальность [1, 5–7, 11–16, 22, 34–38, 41, 42, 44, 45, 48, 49, 53–56, 58, 61, 62, 64–68, 74–78, 84, 85, 93]. На основе данных методов и алгоритмов получен ряд важных результатов об устойчивости маятниковых периодических движений тяжёлого твёрдого тела с одной неподвижной точкой. Кратко опишем эти результаты.

В [44, 54] была исследована орбитальная устойчивость маятниковых колебаний в случае С.В. Ковалевской. В [5, 34, 67] была решена задача об устойчивости маятниковых колебаний и вращений в случае Д.Н. Горячёва – С.А. Чаплыгина. Орбитальная устойчивость маятниковых периодических движений твердого тела с геометрией масс, отвечающей случаю Д.К. Бобылёва – В.А. Стеклова была исследована в [64, 66, 74, 98]. Строгие выводы об орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений динамически симметричного твёрдого тела были получены в работах [1, 75]. В [11] рассмотрен частный случай динамически симметричного твердого тела в предположении, что центр масс не лежит в экваториальной плоскости, а главные моменты инерции тела, вычисленные для неподвижной точки, связаны равенствами $A = C = 2B$. В этой задаче условия орбитальной устойчивости маятниковых колебаний были получены в явной аналитической форме. В работе [13] было показано, что в случае В. Гесса в задаче об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний твердого тела имеет место трансцендентная ситуация, приводящая к неустойчивости. В [97] исследовалась задача об орбитальной устойчивости маятниковых вращений твердого тела, несущего ротор. В работах [77, 78] выполнен анализ устойчивости периодических движений волчка Ковалевской с вибрирующей точкой подвеса.

Отметим также, что упомянуты алгоритмы теории устойчивости гамильтоновых систем успешно применяются в небесной механике и динамике спутников. В частности, на основе этих алгоритмов изучалась орбитальная устойчивость маятниковых периодических движений относительно центра масс динамически симметричного спутника, движущегося по круговой орбите [37, 62, 65, 85]. Та же задача для спутника произвольной геометрии масс рассматривалась в [56]. В работах [14, 16, 49, 61] была рассмотрена задача об орбитальной устойчивости плоских колебаний спутника-пластинки относительно центра масс на круговой орбите. В работе [12] было проведено исследование орбитальной устойчивости плоских колебаний симметричного намагниченного спутника.

Обзор результатов об орбитальной устойчивости периодических движений вблизи треугольных точек точек либрации плоской ограниченной круговой задачи трех тел приведен в [38, 86]. Задача об орбитальной устойчивости движений вблизи точек либрации в плоской круговой ограниченной задаче четырёх тел рассматривалась в [22, 76, 93].

Различные аспекты задачи об орбитальной устойчивости рассматривались также в [63, 82, 83, 91, 94, 95].

При исследовании орбитальной устойчивости периодических движений в конкретных задачах механики нередко встречаются особые вырожденные случаи, требующие развития существующих и разработки новых методов и алгоритмов теории устойчивости гамильтоновых систем.

Гамильтоновы системы относятся к классу систем, для которых в задаче об орбитальной устойчивости, как правило, недостаточно проведения линейного анализа. Здесь приходится иметь дело так называемыми критическими случаями, когда для строгого решения задачи об орбитальной устойчивости требуется, проводить анализ с учетом нелинейных членов выше второго порядка в разложении функции Гамильтона в окрестности невозмущённой периодической орбиты. По этой причине данная задача является довольно сложной и в

общем случае еще далека от своего полного решения. Особенно интересными и сложными для исследования являются случаи резонансов, каждый из которых требует отдельного изучения. Наиболее общим подходом к исследованию орбитальной устойчивости является введение в окрестности рассматриваемого периодического движения специально выбранных (локальных) координат и построение канонического преобразования, приводящего гамильтониан уравнений возмущенного движения к наиболее простой для дальнейшего исследования (нормальной) форме Пуанкаре [20, 21, 89, 90].

Изучению структуры и свойств нормальных форм, а также разработке эффективных алгоритмов приведения гамильтоновой системы к нормальной форме посвящено много работ. Нормализацию можно проводить как классическим методом Бирхгофа [79], так и современным методом Депри-Хори [38, 50, 81]. Эффективным методом нормализации периодической гамильтоновой системы является использование метода симплектического отображения. В [39, 46, 47, 52] был предложен алгоритм построения симплектического отображения, генерируемого фазовым потоком неавтономной периодической гамильтоновой системы. Зная коэффициенты нормализованного симплектического отображения, можно вычислить коэффициенты нормализованного гамильтониана.

Задача об орбитальной устойчивости исходной гамильтоновой системы и нормализованной гамильтоновой системы эквивалентны. Когда нормальная форма функции Гамильтона найдена, вопрос об орбитальной устойчивости решается на основании методов, разработанных в теории КАМ. К настоящему моменту наиболее строгие и полные результаты получены для гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. В частности, сформулированы и доказаны достаточные условия, позволяющие получать выводы об орбитальной устойчивости на основе анализа членов до четвертого порядка включительно в разложении гамильтониана в окрестности периодического решения [37, 38, 42, 84]. Эти условия записываются в виде неравенств на коэффициенты нормализован-

ного гамильтониана. Вместе с тем, как уже было отмечено выше, в реальных задачах возможны особенные вырожденные случаи, когда для получения строгих выводов об устойчивости необходим анализ членов до шестого, а иногда и более высокого, порядка в разложении функции Гамильтона в окрестности периодического решения. В частности, такая ситуация возникает в различных резонансных случаях.

Следует отметить, что случаи вырождения изучались ранее в связи с исследованием устойчивости положения равновесия гамильтоновых систем. Наиболее полные результаты здесь были получены для периодических гамильтоновых систем с одной степенью свободы. В частности, в работе [23] были получены достаточные условия устойчивости в случаях вырождения при наличии резонансов первого и второго порядков, когда матрица монодромии линеаризованной в окрестности положения равновесия системы не приводится к диагональному виду. В работе [40] была рассмотрена задача об устойчивости положения равновесия периодической гамильтоновой системы с одной степенью при наличии резонанса четвертого порядка, когда необходим анализ членов до шестой степени включительно в разложения гамильтониана в окрестности положения равновесия. Эти исследования были продолжены в цикле работ [51, 52, 52, 69, 70, 96], в которых достаточно подробно изучены случаи вырождения, возникающие в периодической гамильтоновой системе с одной степенью свободы в случае, когда ее гамильтониан можно привести к нормальной форме, не содержащей членов второй степени. Также рассматривались случаи вырождения в задаче об устойчивости положения равновесия автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы [43, 59]. В работе [59] был исследован случай вырождения при наличии в линеаризованной системе одной нулевой частоты (резонанс первого порядка), а в работе [43] исследован случай вырождения при наличии резонанса четвертого порядка, когда частоты линеаризованной системы находятся в отношении 3:1. В работе [80] исследовались случаи вырождения, встречающиеся

ся в задаче об устойчивости положения равновесия гамильтоновых систем при резонансах высоких порядков.

Целью данной диссертационной работы является исследование орбитальной устойчивости периодических решений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случаях вырождения при наличии резонансов, а также полное и строгое решение задачи об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний и вращений тяжелого твердого тела, главные моменты инерции A, B, C которого, вычисленные для неподвижной точки, связаны соотношением $A = C = 4B$.

В первой главе данной диссертационной работы сформулирована постановка задачи об орбитальной устойчивости периодических решений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Кратко описан метод введения локальных координат, который позволят свести исходную задачу к задаче об устойчивости по Ляпунову по части переменных. Приведен вид всех (резонансных и нерезонансных) нормальных форм гамильтониана уравнений возмущенного движения, необходимых для анализа орбитальной устойчивости. В случаях, когда вопрос об орбитальной устойчивости решается членами не выше четвертого порядка приведены достаточные условия орбитальной устойчивости и неустойчивости, представляющие собой неравенства относительно коэффициентов нормальных форм. Рассмотрена ограниченная задача об орбитальной устойчивости на уровне энергии, отвечающем невозмущенной периодической орбите. Приведена методика сведения данной задачи к задаче об устойчивости по Ляпунову тривиального положения равновесия редуцированной периодической гамильтоновой системы с одной степенью свободы. Показано, что во всех рассмотренных случаях условия орбитальной устойчивости в полной системе совпадают с условиями орбитальной устойчивости на уровне энергии, отвечающем невозмущенной периодической орбите.

Во второй главе рассмотрены резонансные случаи вырождения, когда

вопрос об орбитальной устойчивости периодических решений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы не решается членами четвертого порядка в разложении функции Гамильтона в окрестности периодического решения и необходимо учитывать члены не ниже шестого порядка. Были сформулированы и доказаны теоремы об орбитальной устойчивости в случаях вырождения при наличии резонансов первого второго, третьего, четвертого и шестого порядков. Условия устойчивости и неустойчивости были выписаны явно в виде неравенств на коэффициенты нормальной формы функции Гамильтона, вычисленной до членов шестого порядка включительно. Показано, что во всех рассмотренных резонансных случаях эти условия полностью совпадают с условиями устойчивости по Ляпунову положения равновесия редуцированной системы, описывающей движение на уровне энергии, отвечающем невозмущенной периодической орбите. Таким образом обоснована корректность применения общей методики, описанной в Главе 1, также и для исследования рассмотренных в Главе 2 резонансных случаев вырождения.

В третьей главе рассмотрена задача об орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой, главные моменты инерции A , B , C которого, вычисленные для неподвижной точки, связаны соотношением $A = C = 4B$. Исследование выполнено на основании методики приведенной в Главе 1, а также общетеоретических результатов, полученных в Главе 2. Это позволило получить полное (для всех значений параметров) и строгое решение задачи. Было показано, что маятниковые вращения всегда орбитально неустойчивы, а маятниковые колебания могут быть как орбитально устойчивы так и неустойчивы. Оказалось, что при определенных значениях параметров в данной задаче возможны случаи вырождения, отвечающие всем рассмотренным в Главе 2 резонансным случаям. В соответствии с методикой описанной в Главе 1 для всех значений параметров из области устойчивости в линейном приближении были вычислены коэффициенты

нормальной формы гамильтониана возмущенного движения. При малых значениях амплитуд колебаний эти коэффициенты были получены аналитически методом Депри-Хори в виде рядов по степеням малого параметра (амплитуды колебаний). При произвольных амплитудах коэффициенты нормальной формы вычислялись численно на основе построения симплектического отображения, генерируемого фазовым потоком системы уравнений возмущенного движения. Показано, что результаты аналитического и численного нахождения коэффициентов нормальной формы полностью согласуются. На основе анализа коэффициентов нормальной формы получены строгие выводы об орбитальной устойчивости и неустойчивости. Результаты проведенного исследования представлены на диаграмме орбитальной устойчивости.

Основные результаты данной диссертационной работы опубликованы в научных журналах, рекомендованных ВАК [10, 32, 71, 72], а также докладывались на научных семинарах, российских и международных конференциях [8, 9, 27–31, 73].

Глава 1

О методе исследования орбитальной устойчивости периодических движений гамильтоновой системы с двумя степенями свободы

1.1. Постановка задачи об орбитальной устойчивости периодического движения автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы

Периодические решения автономных гамильтоновых систем обычно изолированы. Как правило, они образуют семейство решений, зависящее от одного или нескольких параметров, значения которых определяются начальными условиями. Период этих решений в общем случае непрерывно зависит от указанных параметров. Последнее обстоятельство приводит к тому, что периодические решения автономных гамильтоновых систем являются неустойчивыми по Ляпунову. Вместе с тем, неустойчивые по Ляпунову периодические решения могут быть орбитально устойчивыми. Задача об орбитальной устойчивости представляет большой интерес как с общей теоретической точки зрения, так и для приложений в динамике твёрдого тела, небесной механике и динамике спутников. Современные методы теории динамических систем, теории устойчивости и качественной теории дифференциальных уравнений позволяют получить решение этой задачи в строгом нелинейном смысле.

Рассмотрим автономную гамильтонову систему с двумя степенями свобо-

ды

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2. \quad (1.1)$$

Предположим, что система (1.1) обладает семейством периодических решений. Обозначим через

$$q_i = f_i(t), \quad p_i = g_i(t), \quad i = 1, 2. \quad (1.2)$$

некоторое решение данного семейства, где $f_i(t), g_i(t)$ – функции времени (независимой переменной t), заданные аналитически или численно. Будем также считать, что вблизи замкнутой траектории, отвечающей данному периодическому решению, функция Гамильтона $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$ системы (1.1) аналитична. Кроме того, без ограничения общности, период решения (1.2) можно принять равным 2π .

Рассмотрим задачу об орбитальной устойчивости решения (1.2). Известно [87, 90], что при помощи специально выбранного канонического преобразования

$$q_i = \phi_i(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2), \quad p_i = \psi_i(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2), \quad i = 1, 2 \quad (1.3)$$

можно ввести новые координаты ξ_1, ξ_2 и импульсы η_1, η_2 так, что в новых переменных периодическое решение (1.2) примет вид

$$\xi_1(t) = t + \xi_1(0), \quad \eta_1 = \xi_2 = \eta_2 = 0. \quad (1.4)$$

Новые канонические переменные ξ_i, η_i ($i = 1, 2$) описывают поведение системы (1.1) в малой окрестности периодического решения и называются *локальными переменными*.

Задача об орбитальной устойчивости периодического решения (1.3) сводится к задаче об устойчивости по Ляпунову решения (1.4) системы с гамильтонианом $\Gamma(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) = H(\phi_1(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2), \phi_2(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2), \psi_1(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2), \psi_2(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2))$ по отношению к переменным η_1, ξ_2, η_2 .

1.2. Методика введения локальных переменных в окрестности периодического решения

В работах [37, 68, 84] были предложены различные подходы и разработаны конструктивные алгоритмы построения канонического преобразования (1.3), позволяющего перейти к локальным переменным. Наиболее общий метод введения локальных переменных был предложен в [68]. В этом параграфе, следуя методике работы [68], будет описан способ построения канонической замены переменных (1.3). В векторной форме эту замену можно представить в следующем образом

$$\mathbf{z} = \mathbf{Z}(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2), \quad (1.5)$$

где $\mathbf{z} = (q_1, q_2, p_1, p_2)^T$, $\mathbf{Z} = (\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2)^T$.

Векторная функция $\mathbf{Z}$ имеет следующий явный вид

$$\mathbf{Z} = \mathbf{z}_*(\xi_1) + x\mathbf{z}_x(\xi_1) + y\mathbf{z}_y(\xi_1) + \left(\eta_1 + \tilde{G}(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)\right) \mathbf{z}_\eta(\xi_1), \quad (1.6)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_* &= (f_1(\xi_1), f_2(\xi_1), g_1(\xi_1), g_2(\xi_1))^T, \\ \mathbf{z}_x &= \frac{1}{V} \left(\frac{df_2}{d\xi_1}, -\frac{df_1}{d\xi_1}, -\frac{dg_2}{d\xi_1}, \frac{dg_1}{d\xi_1} \right)^T, \\ \mathbf{z}_y &= \frac{1}{V} \left(\frac{dg_2}{d\xi_1}, -\frac{dg_1}{d\xi_1}, \frac{df_2}{d\xi_1}, -\frac{df_1}{d\xi_1} \right)^T, \\ \mathbf{z}_\eta &= \frac{1}{V^2} \left(-\frac{dg_1}{d\xi_1}, -\frac{dg_2}{d\xi_1}, \frac{df_1}{d\xi_1}, \frac{df_2}{d\xi_1} \right)^T, \end{aligned} \quad (1.7)$$

а скалярная величина V (модуль фазовой скорости движения по рассматриваемой периодической орбите) определяется из равенства

$$V^2 = \frac{d\mathbf{z}_*^T}{d\xi_1} \frac{d\mathbf{z}_*}{d\xi_1}.$$

Не трудно показать, что вектор-функции $\frac{d\mathbf{z}_*}{d\xi_1}, \mathbf{z}_x, \mathbf{z}_y, \mathbf{z}_\eta$ образуют ортогональную систему. Вектор-функция $\mathbf{z}_*(\xi_1)$ определяет периодическую орбиту,

заданную в параметрическом виде. Переменную ξ_1 можно рассматривать как параметр, изменяющийся вдоль периодической орбиты. При заданном значении ξ_1 переменные ξ_2, η_1, η_2 описывают вариации, ортогонально касательной к периодической орбите. Стоит также отметить, что $\mathbf{z}_\eta = \frac{1}{V^2} \text{grad}(H)|_{\mathbf{z}=\mathbf{z}_*(\xi_1)}$. Откуда следует, что в фазовом пространстве системы (1.1) переменная η_1 описывает вариацию периодической орбиты в направлении нормали к многообразию $H = h_*$, где уровень энергии h_* , соответствует периодической орбите $\mathbf{z} = \mathbf{z}_*(\xi_1)$. Переменная η_1 называется нормальной энергетической вариацией.

Функция $\tilde{G}(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$ полностью определяет нелинейную часть канонического преобразования. Функция $\tilde{G}(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$ аналитична в малой окрестности точки $\eta_1 = \xi_2 = \eta_2 = 0$ и периодически зависит от ξ_1 с периодом 2π . Разложение функции $\tilde{G}(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$ в ряд в окрестности периодического решения имеет вид

$$\tilde{G}(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) = \tilde{G}_2 + \tilde{G}_3 + \tilde{G}_4 + O_5, \quad (1.8)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{G}_2 &= \frac{1}{2V^4} ((\xi_2^2 + \eta_2^2)V^2 - 2\eta(B\xi_2 + C\eta_2)V - A\eta_1^2), \\ \tilde{G}_3 &= -\frac{\tilde{G}_2}{V^4} (A\eta_1 + (B\xi_2 + C\eta_2)V), \\ \tilde{G}_4 &= -\frac{\tilde{G}_2}{4V^8} (A^2V^2(\xi_2^2 + \eta_2^2) - 4(B\xi_2 + C\eta_2)^2V^2 - 10A\eta_1(B\xi_2 + C\eta_2)V - 5A^2\eta_1^2), \\ A &= \frac{dg_1}{d\xi_1} \frac{d^2f_1}{d\xi_1^2} + \frac{dg_2}{d\xi_1} \frac{d^2f_2}{d\xi_1^2} - \frac{df_1}{d\xi_1} \frac{d^2g_1}{d\xi_1^2} - \frac{df_2}{d\xi_1} \frac{d^2g_2}{d\xi_1^2}, \\ B &= \frac{df_1}{d\xi_1} \frac{d^2f_2}{d\xi_1^2} + \frac{dg_2}{d\xi_1} \frac{d^2g_1}{d\xi_1^2} - \frac{df_2}{d\xi_1} \frac{d^2f_1}{d\xi_1^2} - \frac{dg_1}{d\xi_1} \frac{d^2g_2}{d\xi_1^2}, \\ C &= \frac{df_1}{d\xi_1} \frac{d^2g_2}{d\xi_1^2} + \frac{dg_1}{d\xi_1} \frac{d^2f_2}{d\xi_1^2} - \frac{df_2}{d\xi_1} \frac{d^2g_1}{d\xi_1^2} - \frac{dg_2}{d\xi_1} \frac{d^2f_1}{d\xi_1^2}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь O_5 – это члены не ниже пятого порядка.

В новых переменных гамильтониан 2π -периодически зависит от переменной ξ_1 и является аналитической функцией переменных η_1, ξ_2, η_2 . Заметим так-

же, что вблизи рассматриваемой периодической орбиты переменные ξ_2, η_2 имеют первый порядок малости, а переменная η_1 – второй порядок малости.

Далее рассмотрим важный для приложений случай, когда после введения локальных координат разложение нового гамильтониана задачи в ряд по степеням переменных η_1, ξ_2, η_2 не содержит членов нечётного порядка. В этом случае указанное разложение имеет следующую структуру

$$\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_4 + \Gamma_6 + \dots, \quad (1.10)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= \eta_1 + \Phi_2^{(0)}(\xi_2, \eta_2, \xi_1), \\ \Gamma_4 &= \chi_2(\xi_1)\eta_1^2 + \Phi_2^{(1)}(\xi_2, \eta_2, \xi_1)\eta_1 + \Phi_4^{(0)}(\xi_2, \eta_2, \xi_1), \\ \Gamma_6 &= \chi_3(\xi_1)\eta_1^3 + \Phi_2^{(2)}(\xi_2, \eta_2, \xi_1)\eta_1^2 + \Phi_4^{(1)}(\xi_2, \eta_2, \xi_1)\eta_1 + \Phi_6^{(0)}(\xi_2, \eta_2, \xi_1). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Функции $\chi_2(\xi_1), \chi_3(\xi_1)$ являются 2π -периодическими функциями, а $\Phi_k^{(m)}, (m = 0, 1, 2)$ – формы k -ой степени относительно переменных ξ_2, η_2 с 2π -периодическими по ξ_1 коэффициентами.

1.3. Об орбитальной устойчивости периодических движений в линейном приближении

Рассмотрим сначала задачу об орбитальной устойчивости в линейном приближении. В этом случае движение в окрестности периодической орбиты описывается системой с гамильтонианом Γ_2 . В этой системе переменная η_1 сохраняет постоянное значение, а эволюция переменных ξ_2, η_2 описывается следующей системой уравнений Гамильтона

$$\frac{d\xi_2}{dt} = \frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial \eta_2}, \quad \frac{d\eta_2}{dt} = -\frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial \xi_2}. \quad (1.12)$$

Таким образом, задача об орбитальной устойчивости в линейном приближении сводится к задаче об устойчивости тривиального решения $\xi_2 = \eta_2 = 0$

линейной системы (1.12). Выводы об устойчивости данного решения можно сделать на основании анализа корней ее характеристического уравнения

$$\rho^2 - 2\kappa\rho + 1 = 0, \quad (1.13)$$

где коэффициент 2κ – сумма диагональных элементов матрицы монодромии системы (1.12).

Если $|\kappa| > 1$, то характеристическое уравнение (1.13) имеет корень, модуль которого больше единицы. В этом случае имеет место неустойчивость тривиального решения $\xi_2 = \eta_2 = 0$ линейной системы (1.12). Отсюда следует и неустойчивость решения (1.4) по отношению к переменным η_1, ξ_2, η_2 [33], т.е. орбитальная неустойчивость периодического решения (1.2) исходной системы.

Если же $|\kappa| < 1$, то корни характеристического уравнения (1.13) различны, имеют модули равные единице и представимы в виде $\rho = e^{\pm 2\pi i \lambda}$, где λ – действительное число. В этом случае, тривиальное решение $\xi_2 = \eta_2 = 0$ линейной системы (1.12) устойчиво. Это означает, что решение (1.4) устойчиво в линейном приближении по отношению к переменным η_1, ξ_2, η_2 [33], т.е. имеет место орбитальная устойчивость периодического решения (1.2) в линейном приближении. Из орбитальной устойчивости в линейном приближении не следует, однако, орбитальной устойчивости периодического решения (1.2) в исходной нелинейной системе.

Если имеет место граничный случай $|\kappa| = 1$, то характеристическое уравнение (1.13) имеет кратный корень равный 1 (резонанс первого порядка) или -1 (резонанс второго порядка). Матрица монодромии линейной системы в этом случае может иметь как простые, так и непростые элементарные делители. Если элементарные делители непростые, то имеет место неустойчивость положения равновесия линейной системы (1.12), если же элементарные делители простые, положение равновесия устойчиво в линейном приближении. В данном граничном случае на основе линейного анализа можно сделать вывод только об орби-

тальной устойчивости или неустойчивости в линейном приближении.

Таким образом, при выполнении неравенства $|\kappa| \leq 1$ имеет место так называемый критический случай, когда для получения строгих выводов об орбитальной устойчивости требуется провести нелинейный анализ с учётом членов выше второго порядка в разложении гамильтониана (1.10).

1.4. Нормальная форма функции Гамильтона в окрестности периодических движений и условия орбитальной устойчивости

В настоящее время наиболее общим подходом, применяемым для нелинейного исследования орбитальной устойчивости периодических движений гамильтоновых систем, является подход, основанный на методе нормальных форм и теории КАМ. В случае автономных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы этот подход позволяет получить строгое решение задачи об орбитальной устойчивости, т.е. сделать выводы об устойчивости по Ляпунову по отношению к возмущениям η_1, ξ_2, η_2 , ортогональным к периодической орбите. Суть данного метода состоит в построении канонического преобразования, приводящего систему уравнений возмущенного движения к некоторой наиболее простой (нормальной) форме. Задача об орбитальной устойчивости в нормализованной таким образом системе эквивалентна задаче об орбитальной устойчивости в исходной системе. Исследование нормализованной системы проще, чем исходной, его можно выполнить на основании методов теории КАМ.

Нормальная форма системы канонических уравнений и соответствующая ей функция Гамильтона в нерезонансном и резонансных случаях имеют различный вид. Поэтому необходимо отдельно рассматривать нерезонансный случай и случаи резонансов, когда корень характеристического уравнения (1.13) удо-

влетворяет равенству $\rho^m = 1$, где m – целое число, которое называют порядком резонанса. Как правило, нелинейный анализ устойчивости достаточно провести на основе членов не выше четвертого порядка включительно в разложении функции Гамильтона в ряд в окрестности периодического движения. В этом случае отдельно необходимо рассматривать лишь случаи резонансов до четвертого порядка включительно. Это связано с тем, что резонансы более высокого порядка не вносят вклад в вид нормальной формы, вычисленной до членов четвертого порядка. К настоящему времени были получены общие достаточные условия орбитальной устойчивости и неустойчивости, представляющие собой неравенства относительно коэффициентов гамильтониана нормализованного до членов четвертой степени [84, 88]. В случаях, когда эти неравенства обращаются в равенства для решения задачи об орбитальной устойчивости необходимо учитывать члены более высокого порядка в разложении функции Гамильтона. Эти случаи в дальнейшем мы будем называть случаями *вырождения*.

Приведем кратко результаты работ [37, 38, 43, 84, 88], в которых были сформулированы и доказаны достаточные условия орбитальной устойчивости и неустойчивости при отсутствии вырождения.

Пусть выполнено условие $|\kappa| < 1$, т.е. корни характеристического уравнения (1.13) различны и по модулю равны единице. Тогда, подходящей канонической заменой переменных $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \rightarrow \varphi_1, \varphi_2, r_1, r_2$ гамильтониан (1.10) можно привести к нормальной форме. Нормализацию гамильтониана можно проводить классическим методом Бирхгофа [79] или методом Депри-Хори [81]. Новые канонические переменные r_1, r_2 имеют второй порядок малости по сравнению с исходными переменными ξ_2, η_2 , которые имеют первый порядок малости.

В нерезонансном случае нормальная форма имеет вид

$$\Gamma = r_1 + \lambda r_2 + c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2 + \Gamma^{(3)}(\varphi_1, \varphi_2, r_1, r_2), \quad (1.14)$$

где $\Gamma^{(3)}$ – степенной ряд по переменным r_1, r_2 , начинающийся с членов третьей

степени, коэффициенты которого 2π -периодически зависят от φ_1, φ_2 .

Достаточное условие устойчивости в этом случае задается неравенством (теорема Арнольда-Мозера [2, 88])

$$c_{20}\lambda^2 - c_{11}\lambda + c_{02} \neq 0. \quad (1.15)$$

Если же неравенство (1.15) обращается в равенство, то имеет место случай вырождения, когда необходим анализ устойчивости с учетом членов не ниже шестого порядка (третьей степени по r_1, r_2) в разложении функции Гамильтона (1.14) в окрестности периодического решения.

В рассматриваемом здесь случае функция Гамильтона не содержит членов нечетных степеней, поэтому при резонансе третьего порядка нормальная форма, вычисленная до членов второй степени по r_1, r_2 , не содержит резонансных слагаемых и имеет вид (1.14). Таким образом, в невырожденном случае при наличии в системе с гамильтонианом (1.10) резонанса третьего порядка вопрос об орбитальной устойчивости также решается на основании теоремы Арнольда-Мозера, т.е. условие орбитальной устойчивости задается неравенством (1.15).

Случай резонанса четвертого порядка нужно рассмотреть отдельно. При наличии в системе этого резонанса функция Гамильтона может быть приведена к следующей нормальной форме

$$\begin{aligned} \Gamma(\varphi_1, \varphi_2, r_1, r_2) = & r_1 + \lambda r_2 + c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2 + \\ & + c_{02}^{(1)}r_2^2 \sin 4(\varphi_2 - \lambda\varphi_1) + c_{02}^{(2)}r_2^2 \cos 4(\varphi_2 - \lambda\varphi_1) + \Gamma^{(3)}(\varphi_1, \varphi_2, r_1, r_2). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Достаточное условие орбитальной устойчивости задается следующим неравенством [37, 84]

$$(c_{20}\lambda^2 - c_{11}\lambda + c_{02})^2 > (c_{02}^{(1)})^2 + (c_{02}^{(2)})^2. \quad (1.17)$$

Если же условие (1.17) выполняется с противоположным знаком строгого неравенства, то исследуемое периодическое решение орбитально неустойчиво.

Также отдельно необходимо рассматривать резонансы первого и второго порядка. Ограничимся здесь общим случаем, когда элементарные делители матрицы монодромии линейной системы (1.12) непростые. В этом случае канонической заменой переменных $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \rightarrow \varphi_1, \tilde{q}_2, r_1, \tilde{p}_2$. Функция Гамильтона может быть приведена к следующей нормальной форме

$$\Gamma = r_1 + \frac{1}{2}\delta\tilde{p}_2^2 + \gamma_{40}\tilde{q}_2^4 + \gamma_{20}r_1\tilde{q}_2^2 + \gamma_{00}r_1^2 + \Gamma_6(\varphi_1, \tilde{q}_2, r_1, \tilde{p}_2), \quad (1.18)$$

где δ определяется в процессе нормализации и принимает значение 1 или -1 , а через $\Gamma^{(6)}$ обозначен ряд по степеням $\tilde{q}_2, r_1, \tilde{p}_2$, коэффициенты которого периодически зависят от φ_1 . Этот ряд начинается с членов не ниже шестого порядка. Отметим, что поскольку рассматриваются только системы с гамильтонианом не содержащем нечетных степеней, то его нормальная форма при резонансах первого и второго порядка имеет один и тот же вид. Отличие состоит лишь в том, что при резонансе первого порядка коэффициенты ряда $\Gamma^{(6)}$ зависят от φ_1 2π -периодически, а при резонансе второго порядка 4π -периодически.

Достаточное условие орбитальной устойчивости в рассматриваемых здесь случаях резонансов первого и второго порядка имеет вид [84]

$$\delta\gamma_{40} > 0, \quad (1.19)$$

Достаточное условие орбитальной неустойчивости получается заменой в (1.19) знака строгого неравенства (1.19) на противоположный.

Итак, в случае, когда вопрос об орбитальной устойчивости решается членами четвертого порядка в разложении функции Гамильтона (1.10) в окрестности периодического решения, полное решение задачи об орбитальной устойчивости можно на основе достаточных условий, описанных выше.

1.5. Изонергетическая редукция и условия орбитальной устойчивости редуцированной системы

В [47, 68] было показано, что при отсутствии вырождения, т.е. когда вопрос об орбитальной устойчивости решается членами до четвертой степени включительно в разложении гамильтониана в окрестности периодического решения, достаточные условия орбитальной устойчивости и неустойчивости эквивалентны достаточным условиям орбитальной устойчивости и неустойчивости на уровне энергии, отвечающем невозмущенной периодической орбите. Таким образом, чтобы получить строгие выводы в задаче орбитальной устойчивости достаточно рассмотреть более простую (ограниченную) задачу о движении системы на уровне энергии, отвечающем невозмущенной периодической орбите. С этой целью целесообразно начала выполнить изонергетическую редукцию на указанном уровне энергии и свести задачу об орбитальной устойчивости к задаче об устойчивости тривиального положения равновесия редуцированной гамильтоновой системы с одной степенью свободы.

Опишем кратко процедуру изонергетической редукции системы с гамильтонианом (1.10). Для этого зафиксируем нулевой уровень энергии $\Gamma = 0$, который соответствует невозмущенной периодической траектории. Разрешая уравнение $\Gamma = 0$ относительно переменной η_1 , имеем: $\eta_1 = -K(\xi_1, \xi_2, \eta_2)$, где функция $K(\xi_1, \xi_2, \eta_2)$ является 2π -периодической по ξ_1 , аналитична по ξ_2, η_2 и при достаточно малых ξ_2, η_2 может быть представлена в виде степенного ряда по переменным ξ_2, η_2

$$K = K_2(\xi_1, \xi_2, \eta_2) + K_4(\xi_1, \xi_2, \eta_2) + \dots, \quad (1.20)$$

где функции $K_m(m = 2, \dots)$ – формы порядка m с 2π -периодическими по ξ_1 коэффициентами.

Эволюция переменных ξ_2, η_2 на нулевом изонергетическом уровне энер-

гии описывается уравнениями Уиттекера, которые имеют форму канонических уравнений с гамильтонианом (1.20)

$$\frac{d\xi_2}{d\xi_1} = \frac{\partial K}{\partial \eta_2}, \quad \frac{d\eta_2}{d\xi_1} = -\frac{\partial K}{\partial \xi_2}, \quad (1.21)$$

где ξ_1 является новой независимой переменной.

На нулевом уровне энергии задача об орбитальной устойчивости сводится к задаче об устойчивости по Ляпунову тривиального решения $\xi_2 = \eta_2 = 0$ системы с гамильтонианом (1.20). Решение последней задачи можно получить по методике, описанной выше для системы с двумя степенями свободы. А именно, сначала строится каноническая замена переменных, приводящая гамильтониан (1.20) к нормальной форме. Затем применяются известные достаточные условия устойчивости и неустойчивости положения равновесия неавтономной периодической гамильтоновой системы с одной степенью свободы.

Отметим, что линеаризованная в окрестности тривиального решения редуцированная система имеет тот же вид, что и линейная система (1.12). Полагая, что коэффициент κ характеристического уравнения этой системы удовлетворяет неравенству $|\kappa| \leq 1$, приведем вид нормальной формы гамильтониана для нерезонансного случая и случаев рассмотренных выше резонансов, а также сформулируем известные достаточные условия устойчивости и неустойчивости тривиального положения равновесия для гамильтоновой системы с одной степенью свободы.

В общем нерезонансном случае канонической заменой переменных $\xi_2, \eta_2 \rightarrow \varphi_2, r_2$ функция Гамильтона (1.20) приводится к следующей нормальной форме [3]

$$K = \lambda r_2 + c_2 r_2^2 + O(r_2^3). \quad (1.22)$$

По теореме Арнольда–Мозера [3, 92] достаточное условие устойчивости тривиального положения равновесия имеет вид

$$c_2 \neq 0. \quad (1.23)$$

Если $c_2 = 0$, то вопрос об устойчивости решается на основе членов более высокого порядка в гамильтониане (1.22), т.е. имеет место случай вырождения.

Случаи резонансов требуют отдельного анализа. Если выполнено условие (1.23), то здесь, как и в полной нередуцированной системе, в силу отсутствия в гамильтониане (1.20) членов нечетных степеней, нормальная форма гамильтониана при резонансе третьего порядка имеет тот же вид, что и в нерезонансном случае. Поэтому при отсутствии вырождения, задача об устойчивости в случае резонанса третьего порядка решается на основе теоремы Арнольда–Мозера.

Случай же резонанса четвертого порядка требует отдельного рассмотрения. Напомним сначала, что при наличии в системе этого резонанса корни $\rho = e^{\pm 2\pi i \lambda}$ характеристического уравнения (1.13) линейной системы (1.12) удовлетворяют равенству $\rho^4 = 1$, из которого следует, что выполняется равенство $4\lambda = N$, где N – целое число. При данном резонансе канонической заменой переменных функцию Гамильтона (1.20) можно привести к следующей нормальной форме [38]

$$K = \lambda r_2 + (c_2 + a_2 \sin 4(\varphi_2 - \lambda \xi_1) + b_2 \cos 4(\varphi_2 - \lambda \xi_1))r_2^2 + O(r_2^3). \quad (1.24)$$

Достаточное условие устойчивости в этом резонансном случае имеет вид [38]

$$a_2^2 + b_2^2 < c_2^2. \quad (1.25)$$

Достаточное условие неустойчивости получается заменой знака строгого неравенства в (1.25) на противоположный.

Пусть теперь в системе имеет место резонанс первого или второго порядка. Как и выше будем рассматривать общий случай, когда элементарные делители матрица монодромии линейной системы (1.12) непростые. Тогда канонической заменой переменных $\xi_2, \eta_2 \rightarrow \tilde{q}_2, \tilde{p}_2$ функцию Гамильтона (1.20) можно привести к следующей нормальной форме

$$K = \frac{1}{2} \delta \tilde{p}_2^2 + c_4 \tilde{q}_2^4 + K^{(6)}(\tilde{q}_2, \tilde{p}_2, \xi_1) \quad (1.26)$$

где $K^{(4)}$ – степенной ряд относительно переменных $\tilde{q}_2, \tilde{p}_2$ с 2π -периодическими (в случае резонанса первого порядка) или 4π -периодическими (в случае резонанса второго порядка) коэффициентами.

Достаточное условие устойчивости положения равновесия системы с гамильтонианом (1.26) имеет вид [23]

$$\delta c_4 > 0, \quad (1.27)$$

Достаточное условие неустойчивости можно получить заменой знака строгого неравенства в (1.27) на противоположный.

Далее покажем, что достаточные условия устойчивости в полной системе и в редуцированной системе совпадают. Для общего нерезонансного случая это было показано в работе [68].

Пусть имеет место резонанс четвертого порядка. Рассмотрим полную систему с гамильтонианом (1.16), в котором уже проведена нормализация до членов четвертого порядка включительно. Выполним изоэнергетическую редукцию этой системы на нулевом уровне энергии, соответствующем невозмущенной периодической орбите. Функция Гамильтона редуцированной системы определяется в результате решения уравнения $\Gamma = 0$ относительно переменной r_1 и имеет, с точностью до членов второй степени по r_2 , следующий вид

$$K = \lambda r_2 + (\lambda^2 c_{20} + c_{11}\lambda + c_{02} + c_{02}^{(2)} \cos 4(\varphi_2 - \lambda\varphi_1) + c_{02}^{(1)} \sin 4(\varphi_2 - \lambda\varphi_1))r_2^2 + O(r_2^3). \quad (1.28)$$

Если ввести обозначения

$$c_2 = c_{20}\lambda^2 - c_{11}\lambda + c_{02} \quad a_2 = c_{02}^{(1)}, \quad b_2 = c_{02}^{(2)}, \quad (1.29)$$

то функция K примет вид (1.24). Подставляя (1.29) в достаточные условия (1.25) нетрудно убедиться, что достаточные условия орбитальной устойчивости периодического решения полностью совпадают с достаточными условиями устойчивости положения равновесия редуцированной системы.

Пусть теперь имеет место резонанс первого или второго порядка. Рассмотрим полную систему с гамильтонианом (1.18), в котором уже проведена нормализация до членов четвертого порядка включительно. Выполним изоэнергетическую редукцию этой системы на нулевом уровне энергии, соответствующем невозмущенной периодической орбите. Функция Гамильтона редуцированной системы определяется в результате решения уравнения $\Gamma = 0$ относительно переменной r_1 и имеет, с точностью до членов четвертой степени по переменным $\tilde{q}_2, \tilde{p}_2$, следующий вид

$$K = \frac{1}{2}\delta\tilde{p}_2^2 + \gamma_{40}\tilde{q}_2^4 - \frac{1}{2}\delta\gamma_{20}\tilde{q}_2^2\tilde{p}_2^2 + \frac{1}{4}\gamma_{00}\tilde{p}_2^4 + K^{(6)}, \quad (1.30)$$

где $K^{(6)}$ – члены шестой степени и выше по переменным $\tilde{q}_2, \tilde{p}_2$. Далее при помощи канонического преобразования $\tilde{q}_2, \tilde{p}_2 \rightarrow q'_2, p'_2$ с производящей функцией S

$$S = \tilde{q}_2 p'_2 + \frac{1}{6}\gamma_{20}\tilde{q}_2^3 p'_2 - \frac{1}{4}\delta\gamma_{02}\tilde{q}_2 p'^3_2, \quad (1.31)$$

гамильтониан задачи приводится к виду

$$K = \frac{1}{2}\delta p'^2_2 + \gamma_{60}q'^4_2 + K^{(6)}. \quad (1.32)$$

Если ввести обозначения

$$c_4 = \gamma_{60}, \quad (1.33)$$

то функция K примет вид (1.26). Подставляя (1.33) в достаточные условия (1.27) нетрудно убедиться, что достаточные условия орбитальной устойчивости периодического решения полностью совпадают с достаточными условиями устойчивости положения равновесия редуцированной системы.

Таким образом, показано, что в рассмотренных здесь резонансных случаях задачу об орбитальной устойчивости можно свести к исследованию устойчивости тривиального положения равновесия редуцированной периодической гамильтоновой системы с одной степенью свободы.

Глава 2

Исследование орбитальной устойчивости в резонансных случаях при наличии вырождения

2.1. О случаях вырождения в задаче об орбитальной устойчивости периодических движений

К настоящему времени в задаче об орбитальной устойчивости периодических решений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы неисследованными остаются лишь особые вырожденные резонансные случаи, когда анализа членов четвертого порядка в разложении гамильтониана в ряд в окрестности исследуемого периодического движения недостаточно для получения строгих выводов об орбитальной устойчивости. В этих случаях требуется проводить исследование с учётом членов более высоких порядков.

В параграфе 1.4 были приведены достаточные условия орбитальной устойчивости и неустойчивости в виде неравенств на коэффициенты нормальных форм. Когда рассматриваемые неравенства обращаются в равенства, вопрос об орбитальной устойчивости не решается на основании нелинейного анализа с учетом членов до четвертого порядка включительно в разложении функции Гамильтона. В этом случае будем говорить, что в задаче об орбитальной устойчивости имеет место *вырождение четвертого порядка*. В данной главе исследуется вопрос об орбитальной устойчивости при наличии в системе указанного вырождения, когда нелинейный анализ с учетом членов шестой степени в разложении функции Гамильтона в окрестности периодического решения позволяет получить строгое решение задачи об орбитальной устойчивости.

Рассмотрим сначала наиболее общую ситуацию. Пусть в системе с гамильтонианом (1.10) отсутствуют резонансы первого, второго и четвертого порядка.

Тогда канонической заменой переменных гамильтониан может быть приведен к виду (1.14), а вырождение четвертого порядка имеет место при выполнении равенства

$$c_{20}\lambda^2 - c_{11}\lambda + c_{02} = 0. \quad (2.1)$$

Для строгого решения задачи об орбитальной устойчивости необходимо провести нормализацию функции Гамильтона до членов шестого порядка. В этом случае нормальная форма имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \Gamma(\varphi_1, \varphi_2, r_1, r_2) = & r_1 + \lambda r_2 + c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2 + \\ & + c_{30}r_1^3 + c_{21}r_1^2r_2 + c_{12}r_1r_2^2 + c_{03}r_2^3 + \\ & + \Gamma^{(8)}(\varphi_1, \varphi_2, r_1, r_2), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\Gamma^{(8)}(\varphi_1, \varphi_2, r_1, r_2)$ — члены не ниже восьмого порядка (т.е. не ниже четвертой степени относительно переменных r_1, r_2 , которые имеют второй порядок малости). В работах В.И. Арнольда и Ю.Мозера [2, 88] было показано, что в рассматриваемом случае достаточное условие орбитальной устойчивости имеет вид

$$c_{30}\lambda^3 - c_{21}\lambda^2 + c_{12}\lambda - c_{03} \neq 0. \quad (2.3)$$

Это условие полностью совпадает с условием орбитальной устойчивости на уровне энергии $\Gamma = 0$, отвечающем невозмущенному периодическому решению. Действительно, рассмотрим движение на уровне энергии $\Gamma = 0$. Эволюция переменных φ_2, r_2 на этом уровне энергии описывается уравнениями Уиттекера, которые имеют форму канонических уравнений с гамильтонианом $K(\varphi_1, \varphi_2, r_2)$

$$K = \lambda r_2 + c_3 r_2^3 + \tilde{K}(\varphi_1, \varphi_2, r_2), \quad (2.4)$$

где

$$c_3 = c_{30}\lambda^3 - c_{21}\lambda^2 + c_{12}\lambda - c_{03}. \quad (2.5)$$

Функция $\tilde{K}(\varphi_1, \varphi_2, r_2)$ имеет порядок малости не ниже r_2^4 , а переменная φ_1 играет роль нового времени.

Согласно теореме Арнольда-Мозера [3, 88], если коэффициент c_3 не равен нулю, то имеет место устойчивость по Ляпунову тривиального положения равновесия $r_3 = 0$ редуцированной системы (систем уравнений Уиттекера), а значит и орбитальная устойчивость рассматриваемого периодического решения на уровне энергии $\Gamma = 0$. С другой стороны, учитывая равенство (2.5) условие $c_3 \neq 0$ полностью совпадает с условием орбитальной устойчивости (2.3). Таким образом, в рассматриваемом здесь общем случае вырождения четвертого порядка задача об орбитальной устойчивости сводится к задаче об устойчивости тривиального положения равновесия редуцированной системы.

Если выполнено условие (2.1) и при этом в системе реализуются резонансы третьего или шестого порядков, то нормальная форма (2.2) будет содержать дополнительные резонансные слагаемые. Для получения строгих выводов об орбитальной устойчивости требуется дополнительный анализ, который выполнен в параграфе 2.2 данной главы.

Также отдельно необходимо рассмотреть случай вырождения при наличии резонанса четвертого порядка, когда для коэффициентов нормальной формы (1.16) выполнено равенство $(c_{20}\lambda^2 - c_{11}\lambda + c_{02})^2 = (c_{02}^{(1)})^2 + (c_{02}^{(2)})^2$. Исследованию орбитальной устойчивости в этом вырожденном случае посвящен параграф 2.3.

В случае резонансов первого и второго порядка случай вырождения имеет место, когда неравенства (1.19) на коэффициенты нормальных форм обращаются в равенства, то есть $\delta h_{40} = 0$. Эти случаи вырождения также требуют отдельного анализа и они исследованы в параграфе 2.4 данной главы.

2.2. Орбитальная устойчивость в случае вырождения при резонансах третьего и шестого порядков

Пусть имеет место случай вырождения, когда выполнено условие (2.1) и в системе с гамильтонианом (1.14) имеет место резонанс третьего или шестого

порядка, т.е. корни характеристического уравнения (1.13) удовлетворяют соотношениям $\rho^3 = 1$ или $\rho^3 = -1$ соответственно. В этих случаях величина λ определяется равенством

$$\lambda = \frac{N}{6}, \quad N = \delta_1 + 6n, \quad n \in Z, \quad (2.6)$$

где при резонансе третьего порядка $\delta_1 = \pm 2$, а при резонансе шестого порядка $\delta_1 = \pm 1$.

При указанных резонансах нормальная форма гамильтониана содержит дополнительные резонансные слагаемые в членах порядка r_2^3 и имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \Gamma(\varphi_1, \varphi_2, r_1, r_2) = & r_1 + \lambda r_2 + c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2 + \\ & + c_{30}r_1^3 + c_{21}r_1^2r_2 + c_{12}r_1r_2^2 + c_{03}r_2^3 + \\ & + r_2^3b \sin(6(\varphi_2 - \lambda\varphi_1)) + \Gamma^{(8)}(\varphi_1, \varphi_2, r_1, r_2), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $\Gamma^{(8)}(\varphi_1, \varphi_2, r_1, r_2)$ - члены четвертой и более высоких степеней по переменным r_1, r_2 .

Выполним еще замену переменных

$$\varphi_1 = \theta_1, \quad \varphi_2 = \theta_2 + \lambda\theta_1, \quad r_1 = \rho_1 - \lambda\rho_2, \quad r_2 = \rho_2, \quad (2.8)$$

которая приводит гамильтониан (2.7) к виду

$$\begin{aligned} \Gamma(\theta_1, \theta_2, \rho_1, \rho_2) = & \rho_1 + a_{20}\rho_1^2 + a_{11}\rho_1\rho_2 + a_{30}\rho_1^3 + a_{21}\rho_1^2\rho_2 + \\ & + a_{12}\rho_1\rho_2^2 + (a + b \sin 6\theta_2)\rho_2^3 + \\ & + \Gamma^{(8)}(\theta_1, \theta_2, \rho_1, \rho_2). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Коэффициенты нового гамильтониана (2.9) выражаются через коэффициенты старого гамильтониана (2.7) по формулам

$$\begin{aligned} a_{20} &= c_{20}, & a_{11} &= -2c_{20}\lambda + c_{11}, & a_{30} &= c_{30}, \\ a_{21} &= -3c_{30}\lambda + c_{21}, & a_{12} &= 3c_{30}\lambda^2 - 2c_{21}\lambda + c_{12}, \\ a &= -c_{30}\lambda^3 + c_{21}\lambda^2 - c_{12}\lambda + c_{03}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Рассмотрим сначала поведение системы на нулевом уровне энергии $\Gamma = 0$, который соответствует невозмущенной периодической траектории. С этой целью выполним изоэнергетическую редукцию и перейдем редуцированной системе (уравнения Уиттекера), описывающей эволюцию канонических переменных при $\Gamma = 0$. Разрешая уравнение $\Gamma = 0$ относительно переменной ρ_1 , получим $\rho_1 = -K(\theta_1, \theta_2, \rho_2)$, где функция $K(\theta_1, \theta_2, \rho_2)$ является 2π -периодической по θ_1, θ_2 , аналитична по ρ_2 и при достаточно малых ρ_2 может быть представлена в виде

$$K(\theta_2, \rho_2) = (a + b \sin 6\theta_2)\rho_2^3 + K^{(8)}(\theta_1, \theta_2, \rho_2), \quad (2.11)$$

где $K^{(8)}(\theta_1, \theta_2, \rho_2)$ – члены выше третьей степени по ρ_2 .

Эволюция переменных θ_2, ρ_2 на нулевом изоэнергетическом уровне энергии описывается уравнениями Уиттекера, которые имеют форму канонических уравнений с гамильтонианом $K(\theta_1, \rho_2, \theta_2)$

$$\frac{d\theta_2}{d\theta_1} = \frac{\partial K}{\partial \rho_2}, \quad \frac{d\rho_2}{d\theta_1} = -\frac{\partial K}{\partial \theta_2}, \quad (2.12)$$

где θ_1 является новой независимой переменной.

На нулевом уровне энергии задача об орбитальной устойчивости сводится к задаче об устойчивости по Ляпунову тривиального решения $\rho_2 = 0$ системы с гамильтонианом (2.11). Для исследования устойчивости данного тривиального решения рассмотрим функцию Ляпунова

$$V = \rho^3 \cos 6\theta_2. \quad (2.13)$$

Ее производная, вычисленная в силу уравнений (2.40), имеет вид

$$\frac{dV}{d\varphi_1} = -18\rho^5(b + a \sin 6\theta_2). \quad (2.14)$$

При выполнении неравенства $|b| > |a|$ производная (2.14) знакоопределена, а сама функция (2.13) является знакопеременной. Поэтому по теореме Ляпунова

о неустойчивости [33] тривиальное решение $\rho_2 = 0$ неустойчиво. Из неустойчивости на нулевом уровне энергии следует неустойчивость решения $\rho_1 = \rho_2 = 0$ нормализованной системы, а значит и орбитальная неустойчивость периодического решения (1.2) исходной системы (1.1).

Рассмотрим теперь случай, когда выполняется неравенство $|b| < |a|$. Можно показать, что при выполнении этого неравенства тривиальное решение $\rho_2 = 0$ редуцированной системы (2.12) устойчиво по Ляпунову [33]. Однако, из устойчивости решения $\rho_2 = 0$ редуцированной системы в общем случае не следует орбитальная устойчивость соответствующего периодического решения полной системы.

Для получения строгих выводов об орбитальной устойчивости при $|b| < |a|$ исследуем поведение нормализованной системы с гамильтонианом (2.9) в окрестности $\rho_1 = \rho_2 = 0$. Перепишем гамильтониан (2.9) в виде

$$\Gamma(\theta_1, \theta_2, \rho_1, \rho_2) = \Gamma_0(\theta_1, \theta_2, \rho_1, \rho_2) + \tilde{\Gamma}(\theta_1, \theta_2, \rho_1, \rho_2), \quad (2.15)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_0(\theta_1, \theta_2, \rho_1, \rho_2) &= \rho_1 + (a + b \sin 6\theta_2)\rho_2^3, \\ \tilde{\Gamma}(\theta_1, \theta_2, \rho_1, \rho_2) &= a_{20}\rho_1^2 + a_{11}\rho_1\rho_2 + a_{30}\rho_1^3 + a_{21}\rho_1^2\rho_2 + \\ &\quad + a_{12}\rho_1\rho_2^2 + \Gamma^{(8)}(\theta_1, \theta_2, \rho_1, \rho_2). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Рассмотрим сначала укороченную систему с гамильтонианом Γ_0 . Данная система допускает первый интеграл $\rho_1 = \text{const}$. При фиксированном ρ_1 эволюция переменных ρ_2, θ_2 описывается гамильтоновой системой с одной степенью свободы

$$\dot{\theta}_2 = 3\rho_2^2(a + b \sin(6\theta_2)), \quad \dot{\rho}_2 = -6b\rho_2^2 \cos(6\theta_2). \quad (2.17)$$

Фазовые траектории системы (2.17) являются замкнутыми кривыми, охватывающими тривиальное положения равновесия $\rho_2 = 0$ (см. Рис. 2.1). Движение по этим траекториям является периодическим.

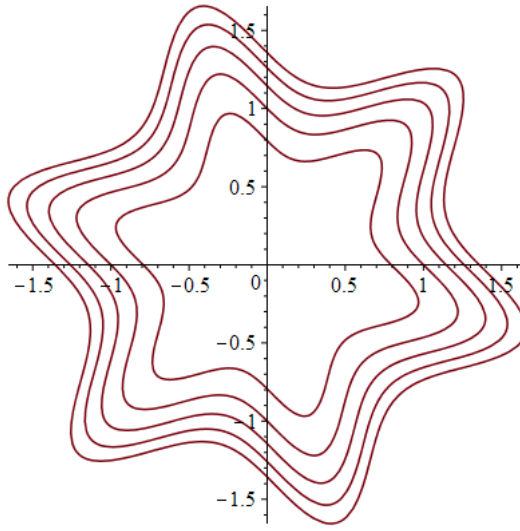


Рис. 2.1: Фазовый портрет системы (2.17)

Используя первый интеграл $\Gamma_0 = h$ имеем явную формулу для ρ_2

$$\rho_2 = \sqrt[3]{\frac{h - \rho_1}{a + b \sin 6\theta_2}}. \quad (2.18)$$

Подставляя (2.18) во второе уравнение системы, имеем

$$\dot{\theta}_2 = 3(h - \rho_1)^{2/3}(a + b \sin(6\theta_2))^{1/3}. \quad (2.19)$$

Решения уравнения (2.19) являются периодическими функциями t , описывающими изменение переменной θ_2 на фазовых траекториях системы (2.17). Период этих решений вычисляется по формуле

$$T = \frac{2\pi J_0}{3(h - \rho_1)^{2/3}}. \quad (2.20)$$

При фиксированных значениях ρ_1 и h формула (2.18) задаёт интегральную кривую системы (2.17). В четырехмерном фазовом пространстве укороченной системы с гамильтонианом Γ_0 этой интегральной кривой соответствует двумерное инвариантное многообразие – инвариантный тор. Таким образом, фазовое пространство укороченной системы расслаивается на инвариантные торы, на которых движение системы в общем случае является условно периодическим. Таким образом, для описания поведения укороченной системы с гамильтонианом Γ_0 можно ввести переменные действие-угол w_1, w_2, I_1, I_2 . На инвариантных

торах переменные действие I_1 и I_2 сохраняют постоянные значения и задаются соотношениями

$$I_1 = \rho_1, \quad I_2 = \frac{1}{2\pi} \oint \rho_2 d\theta_2 = \sqrt[3]{h - \rho_1} J_0, \quad (2.21)$$

где

$$J_0 = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{d\theta_2}{\sqrt[3]{a + b \sin 6\theta_2}}.$$

Новый гамильтониан укороченной системы не зависит от переменных w_1, w_2 и, с учетом (2.21), имеет следующий явный вид

$$\Gamma_0 = I_1 + \frac{I_2^3}{J_0^3}. \quad (2.22)$$

Общее решение системы с гамильтонианом (2.22) задается формулами

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{10}, & w_1 &= t - t_0, \\ I_2 &= I_{20}, & w_2 &= \omega(I_{20})(t - t_0) + w_{20}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

где $\omega(I_{20}) = \frac{3}{J_0}(h - I_{10})^{2/3}$.

Получим явный вид канонической замены переменных $\theta_1, \theta_2, \rho_1, \rho_2 \rightarrow w_1, w_2, I_1, I_2$. С этой целью рассмотрим решение $\theta_2^*(t), \rho_2^*(t)$ системы (2.17) с начальными условиями $\theta_2(t_0) = 0, \rho_2(t_0) = 1$. Это решение лежит на уровне энергии $h = \rho_1 + a$ и имеет период $T^* = 2\pi/\omega_*$, где $\omega_* = \frac{3a^{2/3}}{J_0}$. В общем случае решение системы (2.17), заданное начальными условиями

$$\theta_2(t_0) = 0, \quad \rho_2(t_0) = \sqrt[3]{\frac{h - \rho_1}{a}}, \quad (2.24)$$

можно представить в виде

$$\theta_2(t) = \theta_2^* \left(\frac{\omega}{\omega_*} (t - t_0) \right), \quad \rho_2(t) = \sqrt[3]{\frac{h - \rho_1}{a}} \rho_2^* \left(\frac{\omega}{\omega_*} (t - t_0) \right). \quad (2.25)$$

В этом несложно убедиться подставляя выражения (2.25) в уравнения системы (2.17). Используя теперь выражения (2.25) и (2.23), получаем замену переменных $\theta_1, \rho_1, \theta_2, \rho_2 \rightarrow w_1, I_1, w_2, I_2$ в следующем виде

$$\begin{aligned}\theta_1 &= w_1, & \rho_1 &= I_1, \\ \theta_2 &= \theta_2^* \left(\frac{w_2}{\omega^*}, I_2 \right), & \rho_2 &= I_2 \rho_2^* \left(\frac{w_2}{\omega^*}, I_2 \right).\end{aligned}\quad (2.26)$$

В переменных действие-угол гамильтониан Γ запишется так

$$\begin{aligned}\Gamma &= I_1 + \frac{I_2^3}{J_0^3} + a_{20}I_1^2 + \tilde{a}_{11}I_1I_2 + \tilde{a}_{12}I_1I_2^2 + \\ &+ \tilde{a}_{21}I_1^2I_2 + a_{30}I_1^3 + \Gamma^{(8)}(I_1, I_2, w_1, w_2),\end{aligned}\quad (2.27)$$

где

$$\tilde{a}_{11} = a_{11} \left(\rho_2^* \left(\frac{w_2}{\omega^*}, I_2 \right) \right), \quad \tilde{a}_{12} = a_{12} \left(\rho_2^* \left(\frac{w_2}{\omega^*}, I_2 \right) \right)^2, \quad \tilde{a}_{21} = a_{21} \rho_2^* \left(\frac{w_2}{\omega^*}, I_2 \right). \quad (2.28)$$

Выполним теперь замену переменных с валентностью ε^{-3}

$$I_1 = \varepsilon^3 \tilde{I}_1, \quad w_1 = \tilde{w}_1, \quad I_2 = \varepsilon \tilde{I}_2, \quad w_2 = \varepsilon^2 \tilde{w}_2. \quad (2.29)$$

В результате гамильтониан задачи примет вид

$$\Gamma = \tilde{I}_1 + \frac{\tilde{I}_2^3}{J_0^3} + \varepsilon \tilde{\Gamma}(\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \varepsilon), \quad (2.30)$$

Функция $\tilde{\Gamma}(\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \varepsilon)$ является 2π -периодической по $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2$ и аналитической по всем своим переменным.

Несложно проверить, что для системы с гамильтонианом (2.30) выполнено условие изоэнергетической невырожденности [4]

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Gamma_0}{\partial \tilde{I}_1^2} & \frac{\partial^2 \Gamma_0}{\partial \tilde{I}_1 \partial \tilde{I}_2} & \frac{\partial \Gamma_0}{\partial \tilde{I}_1} \\ \frac{\partial^2 \Gamma_0}{\partial \tilde{I}_2 \partial \tilde{I}_1} & \frac{\partial^2 \Gamma_0}{\partial \tilde{I}_2^2} & \frac{\partial \Gamma_0}{\partial \tilde{I}_2} \\ \frac{\partial \Gamma_0}{\partial \tilde{I}_1} & \frac{\partial \Gamma_0}{\partial \tilde{I}_2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{6\tilde{I}_2}{J_0^3} \neq 0. \quad (2.31)$$

Поэтому на основании результатов теории КАМ [4] можно сделать вывод о том, что при достаточно малом возмущении ε переменные $\tilde{I}_1, \tilde{I}_2$ будут вечно оставаться вблизи своих начальных значений, т.е. рассматриваемая система устойчива по отношению к I_1, I_2 , что очевидно, гарантирует и устойчивость по отношению к переменным ρ_1, ρ_2 . Последнее означает, что исследуемое периодическое решение (1.4) орбитально устойчиво. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2.2.1. *Если коэффициенты нормализованного гамильтониана (2.7) удовлетворяют неравенству $|b| > |a|$, то периодическое решение (1.2) орбитально неустойчиво. Если же выполняется неравенство $|b| < |a|$, то периодическое решение (1.2) орбитально устойчиво.*

На основании доказанной теоремы можно утверждать, что достаточные условия орбитальной устойчивости и неустойчивости периодического решения совпадают с достаточными условиями его устойчивости и неустойчивости на уровне энергии, соответствующем невозмущенной периодической орбите. Таким образом, для получения строгих выводов об орбитальной устойчивости в рассматриваемом случае достаточно провести исследование орбитальной устойчивости на этом уровне энергии. Другими словами, с самого начала можно выполнить изоэнергетическую редукцию и перейти к исследованию более простой задачи об устойчивости редуцированной периодической гамильтоновой системы с одной степенью свободы.

2.3. Орбитальная устойчивость в случае вырождения при резонансе четвертого порядка

Пусть в системе реализуется резонанс четвёртого порядка, то есть $\rho^4 = 1$, и имеет место случай вырождения, когда вопрос об устойчивости не решает-

ся членами четвертой степени в разложении функции Гамильтона в окрестности периодической орбиты. В этом случае неравенство, задающее условие орбитальной устойчивости (1.17) обращается в равенство, то есть коэффициенты нормальной формы (1.16) гамильтониана задачи связаны соотношением

$$(c_{20}\lambda^2 - c_{11}\lambda + c_{02})^2 = (c_{02}^{(1)})^2 + (c_{02}^{(2)})^2. \quad (2.32)$$

Наличие резонанса четвёртого порядка в системе однозначно проверяется равенством нулю коэффициента $\varkappa$ характеристического уравнения (1.13) линейной системы. В этом случае величина λ определяется равенством

$$\lambda = \frac{N}{4}, \quad N = \delta_1 + 4n, \quad n \in Z, \quad (2.33)$$

где $\delta_1 \in \{1, 3\}$.

В случае резонанса четвёртого порядка нормальная форма гамильтониана задачи, вычисленная до членов шестого порядка, имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \Gamma(\varphi_1, \varphi_2, r_1, r_2) = & r_1 + \lambda r_2 + c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2 + \\ & + r_2^2(c_{02}^{(1)} \sin 4(\varphi_2 - \lambda\varphi_1) + c_{02}^{(2)} \cos 4(\varphi_2 - \lambda\varphi_1)) + \\ & + c_{30}r_1^3 + c_{21}r_1^2r_2 + c_{12}r_1r_2^2 + c_{03}r_2^3 + \\ & + r_1r_2^2(c_{12}^{(1)} \sin 4(\varphi_2 - \lambda\varphi_1) + c_{12}^{(2)} \cos 4(\varphi_2 - \lambda\varphi_1)) + \\ & + r_2^3(c_{03}^{(1)} \sin 4(\varphi_2 - \lambda\varphi_1) + c_{03}^{(2)} \cos 4(\varphi_2 - \lambda\varphi_1)) + \\ & + \Gamma^{(8)}(\varphi_1, \varphi_2, r_1, r_2), \end{aligned} \quad (2.34)$$

где $\Gamma^{(8)}(\varphi_1, \varphi_2, r_1, r_2)$ - члены четвертой степени и выше по переменным r_1, r_2 , которые как и в нерезонансном случае, имеют второй порядок малости. При помощи несложных алгебраических преобразований гамильтониан (2.34) можно

представить в следующей, более удобной для дальнейшего исследования, форме

$$\begin{aligned}
\Gamma(\varphi_1, \varphi_2, r_1, r_2) = & r_1 + \lambda r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + \\
& + b_{02} r_2^2 \cos(\alpha + 4(\varphi_2 - \lambda \varphi_1)) + c_{30} r_1^3 + c_{21} r_1^2 r_2 + \\
& + c_{12} r_1 r_2^2 + c_{03} r_2^3 + b_{12} r_1 r_2^2 \sin(\beta + 4(\varphi_2 - \lambda \varphi_1)) + \\
& + b_{03} r_2^3 \sin(\gamma + 4(\varphi_2 - \lambda \varphi_1)) + \\
& + \Gamma^{(8)}(\varphi_1, \varphi_2, r_1, r_2),
\end{aligned} \tag{2.35}$$

где

$$\begin{aligned}
b_{02} &= \sqrt{(c_{02}^{(2)})^2 + (c_{02}^{(2)})^2}, & \alpha &= \arctan \frac{c_{02}^{(1)}}{c_{02}^{(2)}}, \\
b_{12} &= \sqrt{(c_{12}^{(2)})^2 + (c_{12}^{(2)})^2}, & \beta &= \arctan \frac{c_{12}^{(1)}}{c_{12}^{(2)}}, \\
b_{03} &= \sqrt{(c_{03}^{(2)})^2 + (c_{03}^{(2)})^2}, & \gamma &= \arctan \frac{c_{03}^{(1)}}{c_{03}^{(2)}}.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Сделаем теперь замену переменных по формулам

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \theta_1, & \varphi_2 &= \theta_2 + \lambda \theta_1 + \frac{\pi(1 - \delta)}{8} + \frac{\alpha}{4}, \\
r_1 &= \rho_1 - \lambda \rho_2, & r_2 &= \rho_2,
\end{aligned} \tag{2.37}$$

где $\delta = \text{sgn}(b_{02}(c_{20}\lambda^2 - c_{11}\lambda + c_{02}))$.

В новых переменных функция Гамильтона (2.35) принимает вид

$$\begin{aligned}
\Gamma(\theta_1, \theta_2, \rho_1, \rho_2) = & \rho_1 + a_{20} \rho_1^2 + a_{11} \rho_1 \rho_2 + \\
& + a_{02} \rho_2^2 (1 + \cos 4\theta_2) + a_{30} \rho_1^3 + a_{21} \rho_1^2 \rho_2 + \\
& + (a_{12} + a_{12}^{(1)} \sin 4\theta_2 + a_{12}^{(2)} \cos 4\theta_2) \rho_1 \rho_2^2 + \\
& + (a_{03} + a_{03}^{(1)} \sin 4\theta_2 + a_{03}^{(2)} \cos 4\theta_2) \rho_2^3 + \\
& + \Gamma^{(8)}(\theta_1, \theta_2, \rho_1, \rho_2),
\end{aligned} \tag{2.38}$$

где коэффициенты нового гамильтониана (2.38) выражаются через коэффициенты гамильтониана (2.35) по формулам

$$\begin{aligned}
a_{20} &= c_{20}, & a_{11} &= -2c_{20}\lambda + c_{11}, & a_{02} &= c_{20}\lambda^2 - c_{11}\lambda + c_{02}, & a_{30} &= c_{30}, \\
a_{21} &= -3c_{30}\lambda + c_{21}, & a_{12} &= 3c_{30}\lambda^2 - 2c_{21}\lambda + c_{12}, \\
a_{03} &= -c_{30}\lambda^3 + c_{21}\lambda^2 - c_{12}\lambda + c_{03}, & a_{12}^{(1)} &= -\delta b_{12} \sin(\beta - \alpha), \\
a_{12}^{(2)} &= b_{12} \cos(\beta - \alpha), & a_{03}^{(1)} &= \delta b_{03} \cos(\gamma - \hat{\alpha}) + b_{12}\lambda \sin(\beta - \alpha), \\
a_{03}^{(2)} &= b_{03} \sin(\gamma - \alpha) - b_{12}\lambda \cos(\beta - \alpha).
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Исследуем сначала вопрос об орбитальной устойчивости на нулевом уровне энергии $\Gamma = 0$. С этой целью выполним изоэнергетическую редукцию редукцию системы на этом уровне. Как и прежде, разрешая уравнение $\Gamma = 0$ относительно переменной ρ_1 , имеем $\rho_1 = -K(\theta_1, \rho_2, \theta_2)$. На нулевом изоэнергетическом уровне энергии движение системы описывается уравнениями Уиттекера с гамильтонианом $K(\theta_1, \rho_2, \theta_2)$

$$\frac{d\theta_2}{d\theta_1} = \frac{\partial K}{\partial \rho_2}, \quad \frac{d\rho_2}{d\theta_1} = -\frac{\partial K}{\partial \theta_2}, \tag{2.40}$$

Роль независимой переменной играет θ_1 .

При достаточно малых значениях переменной ρ_2 гамильтониан K представим в виде

$$\begin{aligned}
K(\theta_2, \rho_2) &= a_{02}\rho_2^2(1 + \cos 4\theta_2) + \\
&+ (A + B \sin 4\theta_2 + C \cos 4\theta_2)\rho_2^3 + \\
&+ K^{(8)}(\theta_1, \theta_2, \rho_2),
\end{aligned} \tag{2.41}$$

где $K^{(8)}(\theta_1, \theta_2, \rho_2)$ – члены выше третьей степени по ρ_2 . Коэффициенты A, B, C выражаются через коэффициенты гамильтониана (2.38) по формулам

$$A = a_{03} - a_{02}a_{11}, \quad B = a_{03}^{(1)}, \quad C = a_{03}^{(2)} - a_{02}a_{11}. \tag{2.42}$$

Таким образом, задача об орбитальной устойчивости на нулевом уровне энергии свелась к задаче об устойчивости тривиального решения системы с гамильтонианом (2.41). Далее следует отдельно рассмотреть два случая: $a_{02} = 0$ и $a_{02} \neq 0$.

Пусть сначала $a_{02} = 0$, тогда гамильтониан (2.41) не содержит членов порядка ρ_2^2 и его можно представить в виде

$$K(\theta_2, \rho_2) = (A + \sqrt{B^2 + C^2} \cos(4\theta_2 - \theta^*))\rho_2^3 + K^{(8)}(\theta_1, \theta_2, \rho_2), \quad (2.43)$$

где $\theta^* = \arctan B/C$.

В этом случае условие устойчивости тривиального положения равновесия $\rho_2 = 0$ и, как следствие, орбитальной устойчивости периодического решения системы с гамильтонианом (2.38) на нулевом уровне энергии, имеет вид [38]

$$A^2 > B^2 + C^2. \quad (2.44)$$

Если же неравенство (2.44) выполнено с противоположным знаком, то имеет место неустойчивость тривиального положения равновесия редуцированной системы и, как следствие, орбитальная неустойчивость исследуемого периодического движения.

Рассмотрим теперь случай $a_{02} \neq 0$. Для исследования устойчивости тривиального решения $\rho_2 = 0$ рассмотрим функцию

$$V = \rho_2^2 \sin 4\theta_2 \quad (2.45)$$

Ее производная в силу уравнений с гамильтонианом (2.41) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\theta_1} = & 8a_{02}(1 + \cos 4\theta_2)\rho_2^3 + \\ & + \rho_2^4(4C \cos^2 4\theta_2 + 4B \sin 4\theta_2 \cos 4\theta_2 + 12A \cos 4\theta_2 + 8C). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Если $1 + \cos 4\theta_2 \neq 0$, то знак $\frac{dV}{d\theta_1}$ определяется знаком первого слагаемого, то есть знаком a_{02} . Если $1 + \cos 4\theta_2 \rightarrow 0$, то знак $\frac{dV}{d\theta_1}$ определяется знаком

разности $C - A$. Таким образом, при выполнении неравенства $(A - C)a_{02} < 0$ производная $\frac{dV}{d\theta_1}$ является знакоопределенной функцией, а сама функция V знакопеременная, поэтому в силу теоремы Ляпунова о неустойчивости [33] тривиальное положение равновесия $\rho_2 = 0$ неустойчиво по Ляпунову. Из неустойчивости тривиального положения равновесия сразу следует орбитальная неустойчивость периодического решения исходной системы.

Пусть теперь выполнено неравенство

$$(A - C)a_{02} > 0. \quad (2.47)$$

Построим каноническую замену переменных, которая позволит уничтожить члены, содержащие $\sin 4\theta_2$ в гамильтониане K . Эту замену будем искать в виде следующего ряда

$$\theta_2 = \psi + k_1 R + k_2 R^2 + O(R^3), \quad \rho_2 = R \quad (2.48)$$

Коэффициенты этого ряда определяются так, чтобы после подстановки (2.48) в (2.41) в новом гамильтониане не было членов, содержащих $\sin 4\theta_2$.

Вычисления показали, что этому условию можно удовлетворить, выбрав коэффициенты ряда (2.48) следующим образом

$$k_1 = \frac{B}{4a_{02}}, \quad k_2 = -\frac{BC}{4a_{02}^2}.$$

В результате такой замены функция Гамильтона примет следующий вид

$$K(\psi, R) = a_{02}(1 + \cos 4\psi)R^2 + (A + C \cos 4\psi)R^3 + O(R^4). \quad (2.49)$$

Рассмотрим теперь приближенную систему с гамильтонианом $\hat{K}$

$$\hat{K}(\psi, R) = a_{02}(1 + \cos 4\psi)R^2 + (A + C \cos 4\psi)R^3. \quad (2.50)$$

Канонические уравнения этой системы имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{d\theta_1} &= 2a_{02}(1 + \cos 4\psi)R + 3R^2(A + C \cos 4\psi), \\ \frac{dR}{d\theta_1} &= 4a_{02} \sin 4\psi R^2 + 4C \sin 4\psi R^3.\end{aligned}\tag{2.51}$$

Система (2.51) имеет тривиальное положение равновесия $R = 0$ и первый интеграл $\hat{K} = h$. При выполнении условия (2.47) функция Гамильтона $\hat{K}$ положительно-определена. Поэтому по теореме Ляпунова об устойчивости [26] положение равновесия $R = 0$ устойчиво. Далее учтем, что траектории гамильтоновых систем с одной степенью свободы, находящиеся вблизи устойчивого положения равновесия, суть замкнутые кривые, охватывающие это положение равновесия.

Рассмотрим формально равенство $\hat{K}(\psi, R) = h$ как уравнение относительно R . Положительным корням этого уравнения соответствуют фазовые траектории системы (2.51). При $h = 0$ это уравнение имеет корень $R = 0$ кратности 2 и отрицательный корень $R = -a_{02}(1 + \cos 4\psi)/(A + C \cos 4\psi)$. При $h < 0$ все корни данного уравнения отрицательные, поэтому область возможного движения системы (2.51) определяется условием $h \geq 0$. При $h > 0$ уравнение $\hat{K}(\psi, R) = h_0$ имеет единственный положительный корень $R = R_0(\psi, h_0)$, описывающий фазовую траекторию системы (2.51). Таким образом, фазовая траектория при достаточно малых положительных h определяется однозначно. Как было отмечено ранее, в силу устойчивости положения равновесия, эта траектория является замкнутой кривой, охватывающей положение равновесия $R = 0$.

Если $h = h_0 + \mu(|\mu| \ll 1)$, то корень уравнения $\hat{K}(\psi, R) = h$ представим в виде ряда по μ

$$R = R_0 + \mu R_1 + \dots, \tag{2.52}$$

где $R_1 = (R_0 a_{02}(2(1 + \cos 4\psi) + 3R_0(A + C \cos 4\psi)))^{-1} > 0$.

В приближенной системе можно переменные действие-угол $\psi, R \rightarrow w, I$. При малых h выражение для переменной действие I через константу энергии

h можно получить, используя ряд (2.52) по формулам

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \oint R d\psi = I_0 + \mu I_1 + \dots, \\ I_0 &= \frac{1}{2\pi} \oint R_0 d\psi, \quad I_1 = \frac{1}{2\pi} \oint R_1 d\psi, \end{aligned} \quad (2.53)$$

где I_0 – площадь, лежащая внутри фазовой кривой $R = R_0(\psi, h_0)$, поделенная на 2π .

Если теперь сделать замену $(\psi, R) \rightarrow (w, I)$ в полной системе, то ее функция Гамильтона примет вид

$$K = K_0(I) + K_1(w, I, \theta_1), \quad (2.54)$$

где функция $K_1(w, I, \theta_1)$ 2π -периодична по w и 8π -периодична по θ , а также является аналитической по всем своим аргументам. Канонические уравнения (2.51) за период 8π задают сохраняющее площадь отображение окрестности начала координат. Если выполнено условие невырожденности $d^2 K_0(I)/dI^2 \neq 0$, то на основании результатов КАМ теории в любой сколь угодно малой окрестности положения равновесия существуют замкнутые кривые, инвариантные при таком отображении. Последнее гарантирует устойчивость положения равновесия по Ляпунову.

Заметим, что имеют место следующие соотношения

$$\begin{aligned} \frac{d^2 K_0(I)}{dI^2} &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{dK_0(I)}{dI} \right)^3 \oint \frac{\partial^2 \hat{K}}{\partial R^2} \left(\frac{\partial \hat{K}}{\partial R} \right)^{-3} d\psi, \\ \frac{dK_0(I)}{dI} &= 2\pi \left(\oint \left(\frac{\partial \hat{K}}{\partial R} \right)^{-1} d\psi \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.55)$$

где соответствующие производные можно явно получить, используя (2.50)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{K}}{\partial R} &= 2a_{02}(1 + \cos 4\psi)R + 3R^2(A + C \cos 4\psi) \neq 0, \\ \frac{\partial^2 \hat{K}}{\partial R^2} &= 2a_{02}(1 + \cos 4\psi) + 6R(A + C \cos 4\psi) \neq 0. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Из (2.55) видно, что условие невырожденности выполнено, то есть на нулевом уровне энергии при выполнении условия (2.47) положение равновесия устойчиво. Из этого следует орбитальная устойчивость периодического решения исходной системы. Таким образом доказаны следующие теоремы.

Теорема 2.3.1. *Если коэффициент нормализованного гамильтониана (2.41) редуцированной системы $a_{02} = 0$, то периодическое решение (1.2) орбитально неустойчиво при условии $A^2 < B^2 + C^2$. Если выполняется неравенство с противоположным знаком, то есть $A^2 > B^2 + C^2$, то имеет место орбитальная устойчивость на нулевом уровне энергии.*

Теорема 2.3.2. *Если коэффициенты нормализованного гамильтониана (2.41) редуцированной системы удовлетворяют неравенству $(A - C)a_{02} < 0$, то периодическое решение (1.2) орбитально неустойчиво. Если выполняется неравенство с противоположным знаком, то есть $(A - C)a_{02} > 0$, то имеет место орбитальная устойчивость на нулевом уровне энергии.*

Рассмотрим произвольный уровень энергии. Сначала предположим, что пусть $a_{02} = 0$, тогда гамильтониан (2.38) имеет вид

$$\begin{aligned} \Gamma(\theta_1, \theta_2, \rho_1, \rho_2) = & \rho_1 + a_{20}\rho_1^2 + a_{11}\rho_1\rho_2 + a_{30}\rho_1^3 + a_{21}\rho_1^2\rho_2 + \\ & + (a_{12} + a_{12}^{(1)} \sin 4\theta_2 + a_{12}^{(2)} \cos 4\theta_2)\rho_1\rho_2^2 + \\ & + (a_{03} + a_{03}^{(1)} \sin 4\theta_2 + a_{03}^{(2)} \cos 4\theta_2)\rho_2^3 + \\ & + \Gamma^{(8)}(\theta_1, \theta_2, \rho_1, \rho_2), \end{aligned} \quad (2.57)$$

Перепишем гамильтониан (2.57) в виде

$$\Gamma(\theta_1, \theta_2, \rho_1, \rho_2) = \Gamma_0(\theta_1, \theta_2, \rho_1, \rho_2) + \tilde{\Gamma}(\theta_1, \theta_2, \rho_1, \rho_2), \quad (2.58)$$

где

$$\begin{aligned}\Gamma_0(\theta_1, \theta_2, \rho_1, \rho_2) &= \rho_1 + (a + b \sin(4\theta_2 + \theta_0))\rho_2^3, \\ a &= a_{03}, \quad b = \sqrt{(a_{03}^{(1)})^2 + (a_{03}^{(2)})^2}, \\ \theta_0 &= \arctan a_{03}^{(2)}/a_{03}^{(1)},\end{aligned}\tag{2.59}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}(\theta_1, \theta_2, \rho_1, \rho_2) &= a_{20}\rho_1^2 + a_{11}\rho_1\rho_2 + a_{30}\rho_1^3 + \\ &+ (a_{12} + a_{12}^{(1)} \sin 4\theta_2 + a_{12}^{(2)} \cos 4\theta_2)\rho_1\rho_2^2 + \\ &+ a_{21}\rho_1^2\rho_2 + \Gamma^{(8)}(\theta_1, \theta_2, \rho_1, \rho_2).\end{aligned}$$

В этом случае при выполнении условия $|a| > |b|$ можно ввести переменные действия-угол по формулам

$$\begin{aligned}\theta_1 &= w_1, \quad \rho_1 = I_1, \\ \theta_2 &= \theta_2^* \left(\frac{w_2}{\omega^*}, I_2 \right), \quad \rho_2 = I_2 \rho_2^* \left(\frac{w_2}{\omega^*}, I_2 \right),\end{aligned}\tag{2.60}$$

где $\theta_2^*(t), \rho_2^*(t)$ - решение укороченной системы с гамильтонианом Γ_0 с начальными условиями $\theta_2(t_0) = 0, \rho_2(t_0) = 1$ и периодом

$$T^* = \frac{1}{3a^{2/3}} \oint \frac{d\theta_2}{\sqrt[3]{a + b \sin(4\theta_2 + \theta_0)}}.$$

В переменных действие-угол гамильтониан Γ запишется так

$$\Gamma = I_1 + \frac{I_2^3}{J_0^3} + a_{20}I_1^2 + \tilde{a}_{11}I_1I_2 + \tilde{a}_{12}I_1I_2^2 + \tilde{a}_{21}I_1^2I_2 + a_{30}I_1^3 + \Gamma^{(8)}(I_1, I_2, w_1, w_2),\tag{2.61}$$

где

$$\begin{aligned}J_0 &= \frac{1}{2\pi} \oint \frac{d\theta_2}{\sqrt[3]{a + b \sin(4\theta_2 + \theta_0)}}, \quad \tilde{a}_{12} = a_{12} \left(\rho_2^* \left(\frac{w_2}{\omega^*} \right) \right)^2, \\ \tilde{a}_{11} &= a_{11}\rho_2^* \left(\frac{w_2}{\omega^*} \right), \quad \tilde{a}_{21} = a_{21}\rho_2^* \left(\frac{w_2}{\omega^*} \right).\end{aligned}\tag{2.62}$$

Выполним теперь замену переменных с валентностью ε^{-3}

$$I_1 = \varepsilon^3 \tilde{I}_1, \quad w_1 = \tilde{w}_1, \quad I_2 = \varepsilon \tilde{I}_2, \quad w_2 = \varepsilon^2 \tilde{w}_2.\tag{2.63}$$

В результате гамильтониан задачи примет вид

$$\Gamma = \tilde{I}_1 + \frac{\tilde{I}_2^3}{J_0^3} + \varepsilon \tilde{\Gamma}(\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \varepsilon), \quad (2.64)$$

Функция $\tilde{\Gamma}(\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \varepsilon)$ является 2π -периодической по $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2$ и аналитической по всем своим переменным.

Для системы с гамильтонианом (2.64) выполнено условие изоэнергетической невырожденности [4]

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Gamma_0}{\partial \tilde{I}_1^2} & \frac{\partial^2 \Gamma_0}{\partial \tilde{I}_1 \partial \tilde{I}_2} & \frac{\partial \Gamma_0}{\partial \tilde{I}_1} \\ \frac{\partial^2 \Gamma_0}{\partial \tilde{I}_2 \partial \tilde{I}_1} & \frac{\partial^2 \Gamma_0}{\partial \tilde{I}_2^2} & \frac{\partial \Gamma_0}{\partial \tilde{I}_2} \\ \frac{\partial \Gamma_0}{\partial \tilde{I}_1} & \frac{\partial \Gamma_0}{\partial \tilde{I}_2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{6\tilde{I}_2}{J_0^3} \neq 0. \quad (2.65)$$

Поэтому на основании результатов теории КАМ [4] можно сделать вывод о том, что при достаточно малом возмущении ε переменные $\tilde{I}_1, \tilde{I}_2$ будут вечно оставаться вблизи своих начальных значений, т.е. рассматриваемая система устойчива по отношению к I_1, I_2 , что очевидно, гарантирует и устойчивость по отношению к переменным ρ_1, ρ_2 . Последнее означает, что исследуемое периодическое решение (1.4) орбитально устойчиво.

Пусть теперь $a_{02} \neq 0$. В системе с гамильтонианом (2.35) и сделаем следующую замену переменных с валентностью $1/\varepsilon$

$$\vartheta_1 = \theta_1, \quad \vartheta_2 = \theta_2 + \lambda \theta_1, \quad R_1 = (\rho_1 - \lambda \rho_2)\varepsilon, \quad R_2 = \rho_2 \varepsilon. \quad (2.66)$$

С учётом обозначений (2.39) и равенства (2.32) гамильтониан запишется в виде

$$\begin{aligned} \Gamma = & \rho_1 + \varepsilon \left[a_{02}(1 + \cos 4\theta_2)\rho_2^2 + f_1(\rho_1, \rho_2, \theta_2) + \right. \\ & \left. + \varepsilon \left((a_{03} + a_{03}^{(1)} \sin 4\theta_2 + a_{03}^{(2)} \cos 4\theta_2)\rho_2^3 + f_2(\rho_1, \rho_2, \theta_2) \right) \right], \end{aligned} \quad (2.67)$$

где функции $f_1(\rho_1, \rho_2, \theta_2)$, $f_2(\rho_1, \rho_2, \theta_2)$ обращаются в нуль при $\rho_1 = 0$ и имеют вид

$$\begin{aligned} f_1(\rho_1, \rho_2, \theta_2) &= a_{20}\rho_1^2 + a_{11}\rho_1\rho_2, \\ f_2(\rho_1, \rho_2, \theta_2) &= a_{30}\rho_1^3 + a_{21}\rho_1^2\rho_2 + a_{12}\rho_1\rho_2^2 + \\ &\quad + a_{12}^{(1)}\rho_1\rho_2^2 \sin 4\theta_2 + a_{12}^{(2)}\rho_1\rho_2^2 \cos 4\theta_2. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Выполним еще одну замену переменных

$$\theta_1 = w_1, \quad \rho_1 = I_1, \quad \theta_2 = \psi + \varepsilon k_1 R, \quad \rho_2 = R. \quad (2.69)$$

В результате гамильтониан примет вид

$$\begin{aligned} \Gamma &= I_1 + \varepsilon \left[a_{02}(1 + \cos 4\psi)R^2 + f_1(I_1, R, \psi) + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \left((a_{03} + a_{03}^{(2)} \cos 4\psi)R^3 + f_2(I_1, R, \psi) \right) \right] + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \Gamma^{(0)} &= I_1, \\ \Gamma^{(1)} &= a_{02}(1 + \cos 4\psi)R^2 + f_1(I_1, R, \psi) + \\ &\quad + \varepsilon \left((a_{03} + a_{03}^{(2)} \cos 4\psi)R^3 + f_2(I_1, R, \psi) \right). \end{aligned} \quad (2.71)$$

используя которые, перепишем функцию Гамильтона (2.70) в виде

$$\Gamma = \Gamma^{(0)} + \varepsilon \Gamma^{(1)} + O(\varepsilon^3), \quad (2.72)$$

Укороченная система с гамильтонианом $\Gamma^{(0)} + \varepsilon \Gamma^{(1)}$ имеет два первых интеграла

$$I_1 = I_1(0) = \text{const}, \quad \Gamma^{(0)} + \varepsilon \Gamma^{(1)} = h = \text{const}. \quad (2.73)$$

Заметим, что при $I_1 = 0$ имеем равенство $\Gamma^{(1)} = \hat{K}$. Тогда гамильтониан укороченной системы при малых I_1 отличается на бесконечно малую величину от гамильтониана $\hat{K}$ редуцированной системы. Как следствие, мы можем ввести переменные действия-угол по формулам

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \oint R d\psi, \quad w_2 = \psi. \quad (2.74)$$

Гамильтониан полной системы при замене (2.74) запишется в виде

$$\Phi = \Phi^{(0)}(I_1) + \varepsilon \Phi^{(1)}(I_1, I_2) + O(\varepsilon^3), \quad (2.75)$$

где $\Phi^{(0)}(I_1) = I_1$. Для устойчивости по отношению к I_1, I_2 необходимо выполнение условия невырожденности [4]

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial I_1^2} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial I_1 \partial I_2} & \frac{\partial \Phi}{\partial I_1} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial I_2 \partial I_1} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial I_2^2} & \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial I_1} & \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} & 0 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.76)$$

В нашей задаче имеет место так называемый случай собственного вырождения и условие невырожденности упрощается к виду

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial I_1^2} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial I_1 \partial I_2} & \frac{\partial \Phi}{\partial I_1} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial I_2 \partial I_1} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial I_2^2} & \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial I_1} & \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} & 0 \end{vmatrix} = -\varepsilon \left(\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial I_1} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial I_2^2} \neq 0. \quad (2.77)$$

Очевидно выполняется неравенство $\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial I_1} = 1 \neq 0$. Кроме того, при $I_1 = 0$ выполнены неравенства $\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial I_2} \neq 0, \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial I_2^2} \neq 0$ справедливость которых была показана для редуцированной системы (2.55). В силу аналитичности функции $\Phi^{(1)}$ последние два неравенства будут выполняться и при достаточно малых значениях $|I_1|$. Таким образом, условие (2.77) выполнено. Последнее означает, что имеет место отношение к I_1, I_2 и, как следствие, орбитальная устойчивость исследуемого периодического движения.

Результаты проведенного исследования сформулируем в виде следующих теорем.

Теорема 2.3.3. *Если коэффициент нормализованного гамильтониана (2.38) $a_{02} = 0$, то периодическое решение (1.2) орбитально неустойчиво при условии*

$a_{03}^2 < (a_{03}^{(1)})^2 + (a_{03}^{(2)})^2$. Если выполняется неравенство с противоположным знаком, то есть $a_{03}^2 > (a_{03}^{(1)})^2 + (a_{03}^{(2)})^2$, то имеет место орбитальная устойчивость.

Теорема 2.3.4. Если коэффициенты нормализованного гамильтониана (2.38) удовлетворяют неравенству $(a_{03} - a_{03}^{(2)})a_{02} < 0$, то периодическое решение (1.2) орбитально неустойчиво. Если выполняется неравенство с противоположным знаком, то есть $(a_{03} - a_{03}^{(2)})a_{02} > 0$, то имеет место орбитальная устойчивость.

Замечание 2.3.1. Принимая во внимание соотношения (2.42), можно вывести, что $(A - C)a_{02} = (a_{03} - a_{03}^{(2)})a_{02}$. Более того, если $a_{02} = 0$, то $A = a_{03}$, $B = a_{03}^{(1)}$, $C = a_{03}^{(2)}$. Тогда, учитывая эти соотношения, на основании доказанных теоремы можно утверждать, что достаточные условия орбитальной устойчивости и неустойчивости совпадают с достаточными условиями устойчивости и неустойчивости на нулевом уровне энергии. Таким образом, для решения вопроса об орбитальной устойчивости в рассматриваемом случае можно сначала проводить изоэнергетическую редукцию. И далее рассматривать задачу на нулевом уровне энергии, тем самым перейти к исследованию устойчивости не автономной периодической гамильтоновой системы с одной степенью свободы.

2.4. Орбитальная устойчивость в случае вырождения при резонансах первого и второго порядков

Рассмотрим случаи резонансов первого и второго порядка. Напомним, что в этих случаях при помощи канонической замены $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \rightarrow \varphi_1, \tilde{q}_2, r_1, \tilde{p}_2$

гамильтониан приводится к нормальной форме

$$\begin{aligned}\Gamma(\varphi_1, \tilde{q}_2, r_1, \tilde{p}_2) = & r_1 + \frac{1}{2}\delta\tilde{p}_2^2 + \gamma_{40}\tilde{q}_2^4 + \gamma_{20}r_1\tilde{q}_2^2 + \gamma_{02}r_1^2 + \\ & + \gamma_{60}\tilde{q}_2^6 + \gamma_{41}r_1\tilde{q}_2^4 + \gamma_{22}r_1^2\tilde{q}_2^2 + \gamma_{03}r_1^3 + \\ & + \Gamma_8(\varphi_1, \tilde{q}_2, r_1, \tilde{p}_2),\end{aligned}\tag{2.78}$$

где $\Gamma_8(\varphi_1, \tilde{q}_2, r_1, \tilde{p}_2)$ – члены не ниже восьмого порядка.

Напомним также, что если вопрос об орбитальной устойчивости решается членами до четвертого порядка включительно, то достаточное условие устойчивости имеет вид [42]

$$\delta\gamma_{40} > 0.\tag{2.79}$$

Достаточное условие орбитальной неустойчивости можно получить заменой в (2.79) знака строгого неравенства на противоположный.

Если неравенство (2.79) обращается в равенство, то есть $\gamma_{40} = 0$, то указанные достаточные условия не дают ответа на вопрос об орбитальной устойчивости. В этом случае в задаче об орбитальной устойчивости имеет место случай вырождения при наличии резонансов первого и второго порядков и для ее строгого решения необходимо рассматривать члены не ниже шестой степени в разложении функции Гамильтона в окрестности периодического решения.

Для исследования орбитальной устойчивости на уровне энергии, отвечающем невозмущенной периодической орбите, проведем изоэнергетическую редукцию. Для этого решим уравнение $\Gamma = 0$ относительно переменной r_1 . Получим решение этого уравнения в виде ряда по переменным p_2, q_2 . Эволюция переменных $\tilde{q}_2, \tilde{p}_2$ описывается уравнениями Уиттекера (2.40) с гамильтонианом

$$K = -r_1$$

$$\begin{aligned}
K(\varphi_1, \tilde{q}_2, \tilde{p}_2) = & \frac{1}{2}\delta\tilde{p}_2^2 - \frac{1}{2}\delta\gamma_{20}\tilde{q}_2^2\tilde{p}_2^2 + \gamma_{02}\tilde{p}_2^4 + \\
& + \gamma_{60}\tilde{q}_2^6 + \frac{1}{2}\delta(\gamma_{20}^2 - \gamma_{41})\tilde{q}_2^4\tilde{p}_2^2 + \\
& + \frac{1}{4}(\gamma_{22} - 3\gamma_{20}\gamma_{02})\tilde{q}_2^2\tilde{p}_2^4 + \\
& + \frac{1}{8}\delta(2\gamma_{02}^2 - \gamma_{03})\tilde{p}_2^6 + \\
& + K_8(\varphi_1, \tilde{q}_2, \tilde{p}_2),
\end{aligned} \tag{2.80}$$

где $K_8(\varphi_1, \tilde{q}_2, \tilde{p}_2)$ – члены не ниже восьмой степени, а φ_1 – новая независимая переменная.

Далее при помощи канонической замены переменных $\tilde{q}_2, \tilde{p}_2 \rightarrow q_2', p_2'$ с производящей функцией S

$$\begin{aligned}
S = & \tilde{q}_2 p_2' + \frac{1}{6}\gamma_{20}\tilde{q}_2^3 p_2' - \frac{1}{4}\delta\gamma_{02}\tilde{q}_2 p_2'^3 + \\
& + \left(\frac{1}{10}\gamma_{41} - \frac{1}{15}\gamma_{20}^2 \right) \tilde{q}_2^5 p_2' - \\
& - \delta \left(\frac{1}{12}\gamma_{22} - \frac{1}{4}\gamma_{20}\gamma_{02} \right) \tilde{q}_2^3 p_2'^3 - \\
& - \frac{1}{8}(2\gamma_{02}^2 - \gamma_{03})\tilde{q}_2 p_2'^5,
\end{aligned} \tag{2.81}$$

гамильтониан задачи приводится к виду

$$K = \frac{1}{2}\delta p_2'^2 + \gamma_{60}q_2'^6 + K_8(q_2', p_2'). \tag{2.82}$$

Сделав еще одну каноническую замену переменных по формулам

$$q_2' = \delta|\gamma_{60}|^{-1/2}Q_2, \quad p_2' = |\gamma_{60}|^{-1/2}P_2 \tag{2.83}$$

с валентностью $\delta|\gamma_{60}|$, гамильтониан (2.82) упростится до вида

$$K = \frac{1}{2}P_2^2 - Q_2^6 + K_8. \tag{2.84}$$

Рассмотрим функцию $V = P_2 Q_2$. Производная функции V в силу системы с гамильтонианом (2.84) имеет вид

$$\frac{dV}{d\varphi_1} = 6Q_2^6 + P_2^2. \tag{2.85}$$

При выполнении неравенства $\delta\gamma_{60} < 0$ производная (2.85) знакоопределена, а сама функция V является знакопеременной. Поэтому по теореме Ляпунова о неустойчивости [33] тривиальное решение $Q_2 = P_2 = 0$ неустойчиво. Из неустойчивости на нулевом уровне энергии следует неустойчивость решения нормализованной системы, а значит и орбитальная неустойчивость периодического решения (1.2) исходной системы (1.1).

Пусть теперь выполняется неравенство $\delta\gamma_{60} > 0$. Для получения строгих выводов об орбитальной устойчивости в рассматриваемом случае исследуем поведение нормализованной системы с гамильтонианом (2.78) в окрестности $r_1 = \tilde{q}_2 = \tilde{p}_2 = 0$. Перепишем гамильтониан (2.78) в виде

$$\Gamma(\varphi_1, \tilde{q}_2, r_1, \tilde{p}_2) = \Gamma_0(\varphi_1, \tilde{q}_2, r_1, \tilde{p}_2) + \tilde{\Gamma}(\varphi_1, \tilde{q}_2, r_1, \tilde{p}_2), \quad (2.86)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_0(\varphi_1, \tilde{q}_2, r_1, \tilde{p}_2) &= r_1 + \frac{1}{2}\delta\tilde{p}_2^2 + \gamma_{60}\tilde{q}_2^6, \\ \tilde{\Gamma}(\varphi_1, \tilde{q}_2, r_1, \tilde{p}_2) &= \gamma_{20}r_1\tilde{q}_2^2 + \gamma_{02}r_1^2 + \gamma_{41}r_1\tilde{q}_2^4 + \gamma_{22}r_1^2\tilde{q}_2^2 + \gamma_{03}r_1^3 + \\ &+ \Gamma_8(\varphi_1, \tilde{q}_2, r_1, \tilde{p}_2). \end{aligned} \quad (2.87)$$

Рассмотрим сначала укороченную систему с гамильтонианом Γ_0 . Данная система допускает первый интеграл $r_1 = \text{const}$. При фиксированном r_1 эволюция переменных $\tilde{q}_2, \tilde{p}_2$ описывается гамильтоновой системой с одной степенью свободы

$$\dot{\tilde{q}}_2 = \delta\tilde{p}_2, \quad \dot{\tilde{p}}_2 = -6\gamma_{60}\tilde{q}_2^5. \quad (2.88)$$

Рассмотрим первый интеграл укороченной системы $\Gamma_0 = h$. В силу неравенства $\delta\gamma_{60} > 0$, функция h является знакоопределенной, поэтому положение равновесия устойчиво. Фазовые траектории являются замкнутыми кривыми, охватывающие тривиальное положение равновесия. Последнее обстоятельство позволяет ввести переменные действия-угол w_1, w_2, I_1, I_2 . Переменная действия

I_2 вводится как интеграл по замкнутой траектории, которая определяется интегралом энергии h , то есть

$$I_1 = r_1, \quad I_2 = \frac{1}{2\pi} \oint \tilde{q}_2 d\tilde{p}_2 = (h - r_1)^{2/3} J_0, \quad (2.89)$$

где

$$J_0 = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \oint \sqrt{\delta(1 - \gamma_{60} x^6)} dx.$$

Новый гамильтониан укороченной системы не зависит от переменных w_1, w_2 и, с учетом (2.89), имеет следующий явный вид

$$\Gamma_0 = I_1 + \left(\frac{I_2}{J_0} \right)^{3/2}. \quad (2.90)$$

Общее решение системы с гамильтонианом (2.90) имеет вид

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{10}, & w_1 &= t - t_0, \\ I_2 &= I_{20}, & w_2 &= \omega(I_{20})(t - t_0) + w_{20}, \end{aligned} \quad (2.91)$$

где $\omega(I_{20}) = \frac{3}{2J_0}(h - I_{10})^{1/3}$.

Получим явный вид канонической замены переменных $\varphi_1, \tilde{q}_2, r_1, \tilde{p}_2 \rightarrow w_1, w_2, I_1, I_2$. С этой целью рассмотрим решение $\tilde{q}_2^*(t), \tilde{p}_2^*(t)$ системы (2.88) с начальными условиями $\tilde{q}_2(t_0) = 0, \tilde{p}_2(t_0) = 1$. Это решение лежит на уровне энергии $h = r_1 + a$ и имеет период $T^* = 2\pi/\omega_*$, где $\omega_* = \frac{3a^{1/3}}{2J_0}$. В общем случае решение системы (2.88), заданное начальными условиями

$$\tilde{q}_2(t_0) = 0, \quad \tilde{p}_2(t_0) = \left(\frac{h - r_1}{a} \right)^{2/3}, \quad (2.92)$$

можно представить в виде

$$\tilde{q}_2(t) = \tilde{q}_2^* \left(\frac{\omega}{\omega_*}(t - t_0) \right), \quad \tilde{p}_2(t) = \left(\frac{h - r_1}{a} \right)^{2/3} \tilde{p}_2^* \left(\frac{\omega}{\omega_*}(t - t_0) \right). \quad (2.93)$$

В этом несложно убедиться подставляя выражения (2.93) в уравнения системы (2.88).

Используя теперь выражения (2.93) и (2.91), получаем замену переменных $\varphi_1, \tilde{q}_2, r_1, \tilde{p}_2 \rightarrow w_1, w_2, I_1, I_2$ в следующем виде

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= w_1, & r_1 &= I_1, \\ \tilde{q}_2 &= I_2^{1/4} \tilde{q}_2^* \left(\frac{w_2}{\omega^*}, I_2 \right), & \tilde{p}_2 &= I_2^{3/4} \tilde{p}_2^* \left(\frac{w_2}{\omega^*}, I_2 \right), \end{aligned} \quad (2.94)$$

где функции $\tilde{q}_2^* \left(\frac{w_2}{\omega^*}, I_2 \right), \tilde{p}_2^* \left(\frac{w_2}{\omega^*}, I_2 \right)$ – 2π -периодические функции переменной w_2 .

В переменных действие-угол гамильтониан Γ запишется так

$$\begin{aligned} \Gamma(w_1, w_2, I_1, I_2) &= I_1 + \left(\frac{I_2}{J_0} \right)^{3/2} + \tilde{\gamma}_{20} I_1 I_2^{1/2} + \tilde{\gamma}_{02} I_1^2 +, \\ &+ \tilde{\gamma}_{41} I_1 I_2 + \tilde{\gamma}_{22} I_1^2 I_2^{1/2} + \tilde{\gamma}_{03} I_1^3 + \\ &+ \Gamma_8(w_1, w_2, I_1, I_2), \end{aligned} \quad (2.95)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{20} &= \gamma_{20} \left(\tilde{q}_2^* \left(\frac{w_2}{\omega^*}, I_2 \right) \right)^2, & \tilde{\gamma}_{02} &= \gamma_{02}, \\ \tilde{\gamma}_{41} &= \gamma_{41} \left(\tilde{q}_2^* \left(\frac{w_2}{\omega^*}, I_2 \right) \right)^4, & & \\ \tilde{\gamma}_{22} &= \gamma_{22} \left(\tilde{q}_2^* \left(\frac{w_2}{\omega^*}, I_2 \right) \right)^2, & \tilde{\gamma}_{03} &= \gamma_{03}. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Коэффициенты $\tilde{\gamma}_{20}, \tilde{\gamma}_{02}, \tilde{\gamma}_{41}, \tilde{\gamma}_{22}, \tilde{\gamma}_{03}$ – 2π -периодические функции переменных w_1, w_2 .

Выполним теперь замену переменных с валентностью ε^{-3}

$$I_1 = \varepsilon^3 \tilde{I}_1, \quad w_1 = \tilde{w}_1, \quad I_2 = \varepsilon^2 \tilde{I}_2, \quad w_2 = \varepsilon \tilde{w}_2. \quad (2.97)$$

В результате гамильтониан задачи примет вид

$$\Gamma = \tilde{I}_1 + \left(\frac{\tilde{I}_2}{J_0} \right)^{3/2} + \varepsilon \tilde{\Gamma}(\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \varepsilon), \quad (2.98)$$

Функция $\tilde{\Gamma}(\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \varepsilon)$ является 2π -периодической по $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2$ и аналитической при $\tilde{I}_2 \neq 0$.

Для системы с гамильтонианом (2.98) выполнено условие изоэнергетической невырожденности [4]

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Gamma_0}{\partial \tilde{I}_1^2} & \frac{\partial^2 \Gamma_0}{\partial \tilde{I}_1 \partial \tilde{I}_2} & \frac{\partial \Gamma_0}{\partial \tilde{I}_1} \\ \frac{\partial^2 \Gamma_0}{\partial \tilde{I}_2 \partial \tilde{I}_1} & \frac{\partial^2 \Gamma_0}{\partial \tilde{I}_2^2} & \frac{\partial \Gamma_0}{\partial \tilde{I}_2} \\ \frac{\partial \Gamma_0}{\partial \tilde{I}_1} & \frac{\partial \Gamma_0}{\partial \tilde{I}_2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{3}{4} \tilde{I}_2^{-1/2} J_0^{3/2} \neq 0. \quad (2.99)$$

Поэтому на основании результатов теории КАМ [4] можно сделать вывод о том, что при достаточно малом возмущении ε переменные $\tilde{I}_1, \tilde{I}_2$ будут вечно оставаться вблизи своих начальных значений, т.е. рассматриваемая система устойчива по отношению к I_1, I_2 , что очевидно, гарантирует и устойчивость по отношению к переменным. Последнее означает, что исследуемое периодическое решение (1.4) орбитально устойчиво. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2.4.1. *Если коэффициенты нормализованного гамильтониана (2.78) удовлетворяют неравенству $\delta\gamma_{60} < 0$, то периодическое решение (1.2) орбитально неустойчиво. Если же выполняется неравенство $\delta\gamma_{60} > 0$, то периодическое решение (1.2) орбитально устойчиво.*

На основании доказанной теоремы можно утверждать, что достаточные условия орбитальной устойчивости и неустойчивости периодического решения совпадают с достаточными условиями его устойчивости и неустойчивости на нулевом уровне энергии. Таким образом, для получения строгих выводов об орбитальной устойчивости в рассматриваемом случае достаточно провести исследование орбитальной устойчивости на нулевом уровне энергии. Другими словами, с самого начала можно выполнить изоэнергетическую редукцию и перейти к исследованию более простой задачи об устойчивости редуцированной периодической гамильтоновой системы с одной степенью свободы.

2.5. О построении симплектического отображения генерируемого фазовым потоком уравнений возмущенного движения

Итак, в рассматриваемых случаях удалось свести задачу орбитальной устойчивости периодических решений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы к задаче устойчивости положения равновесия не автономной периодической гамильтоновой системы с одной степенью свободы. В этом случае необходимо проводить нормализацию гамильтониана до шестого порядка включительно. Соответствующее нелинейные канонические преобразования близкие к тождественному задаются рядами с периодическими по времени коэффициентами. Построение этих рядов - весьма громоздкая процедура.

В работах Маркеева А.П. [39, 46, 47, 52] был предложен метод нормализации периодической гамильтоновой системы с одной степенью свободы при помощи построения симплектического отображения, генерируемого фазовым потоком неавтономной периодической гамильтоновой системы. Зная коэффициенты нормализованного симплектического отображения, можно вычислить коэффициенты нормализованного гамильтониана. Нелинейный анализ орбитальной устойчивости можно проводить на основании этой методики. Кратко опишем алгоритм построения симплектического отображения и приведем явные формулы связи коэффициентов нормальных форм и коэффициентов симплектического отображения в каждом отдельном случае вырождения, рассматриваемом в этой главе.

Рассматривается периодическая гамильтонова система с одной степенью свободы с гамильтонианом K . Предполагается, что система имеет тривиальное положение равновесия и гамильтониан K имеет только четные формы в разло-

жении в окрестности положения равновесия, то есть

$$K(q, p, t) = K_2 + K_4 + K_6 + \dots \quad (2.100)$$

Без ограничения общности, будем считать, что период равен 2π .

Пусть q_0, p_0 — начальные значения положений системы. Функции $q = q(q_0, p_0, t), p = p(q_0, p_0, t)$, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям движения с гамильтонианом K , задают каноническое унивалентное преобразование $(q_0, p_0) \rightarrow (q, p)$. Пусть $q_1 = q(q_0, p_0, 2\pi), p_1 = p(q_0, p_0, 2\pi)$ — аналитические по q_0, p_0 функции, которые задают сохраняющее площадь отображение S окрестности положения равновесия на себя. Прежде чем строить симплектическое отображение, сделаем линейную замену переменных, приводящую линейную часть будущего отображения к вещественной нормальной форме

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (2.101)$$

Вид матрицы N определяется в каждом отдельном случае по-разному [52]. Наличие резонансов существенно накладывают условия на эту замену.

Кратко опишем вид матрицы N . При отсутствии резонансов первого и второго порядков получаем

$$\begin{aligned} n_{11} &= x_{12}(2\pi), & n_{12} &= 0, \\ n_{21} &= \kappa - x_{11}(2\pi), & n_{22} &= \sqrt{1 - \kappa^2}, \end{aligned} \quad (2.102)$$

где $x_{ij}(2\pi), (i, j = 1, 2)$ — это элементы матрицы монодромии системы с гамильтонианом K_2 .

Заметим, что благодаря замене переменных линейная часть симплектического отображения, порожденная канонической системой с гамильтонианом $K(x, y, t)$, принимает наиболее простой вид. Она определяется следующей матрицей поворота G на угол $\tilde{\gamma} = \frac{1}{2\pi} \arccos \kappa$

$$G = \begin{bmatrix} \cos(2\pi\gamma) & \sin(2\pi\gamma) \\ -\sin(2\pi\gamma) & \cos(2\pi\gamma) \end{bmatrix} \quad (2.103)$$

В случае резонанса первого порядка замена строится следующим образом:

если $x_{12}(2\pi) \neq 0, x_{21}(2\pi) = 0$, то

$$\begin{aligned} n_{11} &= \sqrt{|x_{12}(2\pi)|}, & n_{12} &= 0, \\ n_{21} &= 0, & n_{22} &= \frac{\sqrt{|x_{12}(2\pi)|}}{x_{12}(2\pi)}, \end{aligned} \quad (2.104)$$

если $x_{12}(2\pi) = 0, x_{21}(2\pi) \neq 0$, то

$$\begin{aligned} n_{11} &= 0, & n_{12} &= \frac{\sqrt{|x_{21}(2\pi)|}}{x_{21}(2\pi)}, \\ n_{21} &= \sqrt{|x_{21}(2\pi)|}, & n_{22} &= 0, \end{aligned} \quad (2.105)$$

если $x_{12}(2\pi)x_{21}(2\pi) \neq 0$, то

$$\begin{aligned} n_{11} &= x_{12}(2\pi), & n_{12} &= 0, \\ n_{21} &= 1 - x_{11}(2\pi), & n_{22} &= 1. \end{aligned} \quad (2.106)$$

При этом линейная часть отображения S приводится к виду

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.107)$$

В случае резонанса второго порядка замена подбирается следующим образом:

если $x_{12}(2\pi) \neq 0, x_{21}(2\pi) = 0$, то

$$\begin{aligned} n_{11} &= \sqrt{|x_{12}(2\pi)|}, & n_{12} &= 0, \\ n_{21} &= 0, & n_{22} &= \frac{\sqrt{|x_{12}(2\pi)|}}{x_{12}(2\pi)}, \end{aligned} \quad (2.108)$$

если $x_{12}(2\pi) = 0, x_{21}(2\pi) \neq 0$, то

$$\begin{aligned} n_{11} &= 0, & n_{12} &= \frac{\sqrt{|x_{21}(2\pi)|}}{x_{21}(2\pi)}, \\ n_{21} &= \sqrt{|x_{21}(2\pi)|}, & n_{22} &= 0, \end{aligned} \quad (2.109)$$

если $x_{12}(2\pi)x_{21}(2\pi) \neq 0$, то

$$\begin{aligned} n_{11} &= x_{12}(2\pi), & n_{12} &= 0, \\ n_{21} &= -1 - x_{11}(2\pi), & n_{22} &= 1. \end{aligned} \quad (2.110)$$

При этом линейная часть отображения S приводится к виду

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.111)$$

Сделав замену (2.101), Гамильтониан системы перепишется в виде

$$K(x, y, t) = K_2 + K_4 + K_6 + \dots \quad (2.112)$$

Тогда, согласно [46], искомое симплектическое отображение S примет вид

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} x_0 - \frac{\partial S_4}{\partial y_0} + \frac{\partial^2 S_4}{\partial x_0 \partial y_0} \frac{\partial S_4}{\partial y_0} - \frac{\partial S_6}{\partial y_0} + O_6 \\ y_0 - \frac{\partial S_4}{\partial x_0} + \frac{\partial^2 S_4}{\partial x_0^2} \frac{\partial S_4}{\partial y_0} - \frac{\partial S_6}{\partial x_0} + O_6 \end{bmatrix} \quad (2.113)$$

где O_6 – члены шестой степени и выше, $S_m = \Phi_m(x_0, y_0, 2\pi)$, и $\Phi_m((x_0, y_0, t))$ формы степени $m = 4, 6$, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial \Phi_4}{\partial t} = -G_4, \quad \frac{\partial \Phi_6}{\partial t} = -G_6 - \frac{\partial G_4}{\partial y_0} \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_0}, \quad (2.114)$$

где $G_m(x_0, y_0, t)$ – формы, полученные из $K^*(x, y, t)$ при помощи замены переменных

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = X^*(t) \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \quad (2.115)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в обеих частях уравнений (2.114), получаем пять обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов вида Φ_m . Правые части этих уравнений зависят от $x_{ij}(t)$, которые являются элементами матрицы $X^*(t)$. Таким образом, интегрируя систему шестнадцати уравнений (двенадцать уравнений для коэффициентов вида Φ_m

и четыре уравнения для $x_{ij}(t)$ на интервале $(0, 2\pi)$, получаем коэффициенты вида S_m . В общем случае, указанную выше систему можно решить только численно.

Следуя методике, разработанной в [52], коэффициенты нормальной формы гамильтоновой системы с одной степенью свободы можно получить через коэффициенты симплектического отображения. Нерезонансный случай и различные случаи резонансов надо рассматривать отдельно. Приведем формулы в каждом отдельном случае.

В нерезонансном случае при наличии вырождения выражение $c_3 = c_{30}\lambda^3 - c_{21}\lambda^2 + c_{12}\lambda - c_{03}$ имеет вид

$$\begin{aligned} c_3 = & \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{5}{2}s_{06} - \frac{1}{2}s_{24} - \frac{5}{2}s_{60} - \frac{1}{2}s_{42} + s_{31}(4s_{04} + 2s_{22} + 5s_{40}) + \right. \\ & -\frac{1}{2} \left((s_{04} - s_{22} + s_{40})^2 + (s_{13} - s_{31})^2 \right) \operatorname{ctg} 2\pi\gamma - \\ & \left. + s_{13}(4s_{04} + 2s_{22} + 5s_{40}) - \left((s_{13} + s_{31})^2 + 4(s_{04} - s_{40})^2 \right) \operatorname{ctg} \pi\gamma \right]. \end{aligned} \quad (2.116)$$

В случае резонансов третьего шестого порядков имеем выражения для a, b , входящих в 2.2.1,

$$\begin{aligned} a = & \frac{1}{6\pi} [-18(s_{40}s_{13} + s_{04}s_{31}) - 6(s_{13}s_{04} + s_{31}s_{04}) - \\ & - 15(s_{06} + s_{60}) - 3(s_{42} + s_{24}) + \\ & + 2 \sin 2\pi\gamma (-8(s_{40}^2 + s_{04}^2 + 6s_{40}s_{04}) + \\ & + 6s_{13}s_{13} + s_{31}^2 + s_{13}^2)], \\ b = & \sqrt{\nu^2 + \mu^2}, \end{aligned} \quad (2.117)$$

where

$$\begin{aligned}
\nu &= -\frac{1}{6\pi}[102s_{40}s_{04} + 45(s_{04}^2 + s_{40}^2) + \\
&\quad + \sin 2\pi\gamma(4(s_{31}s_{04} + s_{13}s_{40}) + 12(s_{04}s_{13} + s_{40}s_{40}s_{31}))], \\
\mu &= -\frac{1}{12\pi}[42(s_{40}s_{31} - s_{04}s_{13}) + 54(s_{31}s_{04} - s_{13}s_{40}) - \\
&\quad - 3(s_{60} - s_{06} + s_{24} - s_{42}) + 4(s_{13}^2 - s_{13}^2)) - \\
&\quad - \sin 2\pi\gamma(32(s_{40}^2 - s_{04}^2))].
\end{aligned} \tag{2.118}$$

В случае вырождения при резонансе четвертого порядка можно показать, что выражение $(A - C)a_{02}$ в 2.3.2 вычисляется по формулам

$$\begin{aligned}
(A - C)a_{02} &= -\frac{1}{4\pi^2}[-5s_{60} - s_{42} - s_{24} - 5s_{06} + 2(3(s_{40}s_{13} + s_{04}s_{31}) + \\
&\quad + 5(s_{40}s_{31} + s_{04}s_{13}) + 2(s_{31} + s_{13})s_{22}))(3s_{04} + s_{22} + 3s_{04}) + \\
&\quad + \frac{s_{40} - s_{22} + s_{04}}{4\pi^2}[-3s_{60} + s_{42} + s_{24} - 3s_{06} + \\
&\quad + 2(3(s_{40}s_{31} + s_{04}s_{13} - s_{40}s_{13} - s_{04}s_{31}) - 2(s_{31} + s_{13})s_{22})) - \\
&\quad - \frac{s_{31} - s_{13}}{4\pi^2}[2(s_{51} - s_{15}) - 8(s_{40} - s_{04})s_{22} - 3(s_{31}^2 - s_{13}^2)]].
\end{aligned} \tag{2.119}$$

В случае резонансов первого и второго порядков соответственно имеем

$$\delta\gamma_{06} = -2s_{60} - s_{31}^2, \quad \delta\gamma_{06} = 2s_{60} - s_{31}^2. \tag{2.120}$$

В качестве выводов главы 2, предлагается развитие методики исследования орбитальной устойчивости, описанной в главе 1, на случаи вырождения при наличии резонансов. Для исследования орбитальной устойчивости периодического решения автономной гамильтоновой системы при наличии резонансов в случаях вырождения, когда вопрос об устойчивости не решается членами четвертого порядка в разложении функции Гамильтона в окрестности периодического решения, можно действовать по методике:

- Введение локальных координат и разложение функцию Гамильтона в окрестности периодического решения до членов шестого порядка включительно
- Изоэнергетическая редукция
- Построение симплектического отображения
- Вычисление по формулам коэффициентов нормальной формы редуцированной системы по коэффициентам симплектического отображения
- Применение достаточных условий устойчивости и неустойчивости.

Основные результаты данной главы опубликованы в [32, 72].

Глава 3

Об орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой при условии Горячева-Чаплыгина

3.1. Постановка задачи

Рассмотрим движение твёрдого тела массой m вокруг неподвижной точки O в однородном поле тяжести. Для описания движения тела введем неподвижную систему координат $OXYZ$, ось OZ которой направлена вертикально вверх, и подвижную систему координат $Oxyz$, жестко связанную с телом, оси которой направлены по главным осям инерции тела для точки O . Кроме того, будем предполагать, что главные моменты инерции A, B, C тела для неподвижной точки O удовлетворяют равенству $A = C = 4B$. Никаких ограничений на положение центра масс не накладывается. В силу динамической симметрии тела направления осей Ox, Oz можно выбрать так, что центр масс тела будет лежать в плоскости Oxy . При таком выборе осей положение центра масс тела будет определяться расстоянием до начала координат, которое будем обозначать l , и углом α между радиусом-вектором центра масс и положительным направлением оси Ox . Без ограничения общности, можно считать, что $0 \leq \alpha \leq \pi/2$. Отметим, что при $\alpha = 0$ имеет место случай интегрируемости Д.Н. Горячева – С.А. Чаплыгина, а при $\alpha = \pi/2$ – случай Лагранжа с дополнительным ограничением на моменты инерции.

Положение твёрдого тела в пространстве будем задавать при помощи углов Эйлера ψ, θ, φ . Уравнения движения тела можно записать в виде канонических

уравнений Гамильтона. Обобщенные импульсы, соответствующие углам Эйлера обозначим через $p_\psi, p_\theta, p_\varphi$. Угол ψ является циклической координатой, поэтому соответствующий ему обобщенный импульс сохраняет постоянное значение $p_\psi = \text{const}$. Далее положим $p_\psi = 0$. В этом случае гамильтониан канонических уравнений движения тела имеет вид

$$H = \frac{(p_\theta \cos \varphi - p_\varphi \operatorname{ctg} \theta \sin \varphi)^2}{2A} + \frac{(p_\theta \sin \varphi + p_\varphi \operatorname{ctg} \theta \cos \varphi)^2}{2B} + \frac{p_\varphi^2}{2C} + mgl \sin \theta \sin (\varphi + \alpha), \quad (3.1)$$

Поскольку центр масс тела лежит в плоскости главных осей инерции, то уравнения с гамильтонианом (3.1) допускают частное решение [57], описывающее плоское движение твёрдого тела, при котором ось Oz сохраняет постоянное горизонтальное положение, а само тело совершает маятниковые движения относительно этой оси. В зависимости от начальных условий, в таком плоском движении тело либо совершает периодические колебания или вращения, либо асимптотически приближается к неустойчивому положению равновесия. Несмотря на то, что периодические маятниковые движения неустойчивы по Ляпунову, с теоретической и прикладной точек зрения большой интерес представляет задача об орбитальной устойчивости таких движений.

Введем безразмерное время $\tau = \mu t$, где $\mu^2 = mgl$. Для описания поведения тела в окрестности его периодических маятниковых движений удобно ввести следующие координаты и безразмерные импульсы

$$q_1 = \varphi + \alpha - \frac{3\pi}{2}, \quad q_2 = \theta - \frac{\pi}{2}, \quad p_1 = \frac{p_\theta}{C_\mu}, \quad p_2 = \frac{p_\varphi}{C_\mu}. \quad (3.2)$$

В новых переменных гамильтониан задачи принимает вид

$$H = 1/2 (p_2 \sin (q_1 - \alpha) - p_1 \operatorname{tg} q_2 \cos (q_1 - \alpha))^2 + \\ + 2 (p_2 \cos (q_1 - \alpha) + p_1 \operatorname{tg} q_2 \sin (q_1 - \alpha))^2 + \\ + 1/2 p_1^2 - \cos q_2 \cos q_1. \quad (3.3)$$

На маятниковых движениях твёрдого тела канонические переменные q_2, p_2 принимают нулевые значения, а эволюция переменных q_1, p_1 описывается системой с гамильтонианом

$$H_0 = 1/2 p_1^2 - \cos q_1. \quad (3.4)$$

Характер маятниковых движений зависит от величины константы интеграла энергии $H_0 = h$: при $|h| < 1$ тело совершает маятниковые колебания, а при $|h| > 1$ тело совершает маятниковые вращения относительно своей оси Oz .

В случае маятниковых колебаний, когда $|h| < 1$, общее решение канонической системы с гамильтонианом (3.4) имеет вид [44]

$$\begin{aligned} q_1^*(\tau + \tau_0) &= 2 \arcsin(k_1 \operatorname{sn}(\tau + \tau_0, k_1)), \\ p_1^*(\tau + \tau_0) &= 2 k_1 \operatorname{cn}(\tau + \tau_0, k_1). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Период колебаний вычисляется по формуле

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \omega = \frac{\pi}{2K(k_1)}. \quad (3.6)$$

В (3.5) и (3.6) используются общепринятые обозначения для эллиптических функций и интегралов. Модуль эллиптического интеграла k_1 связан с константой энергии h соотношением $k_1^2 = h/2 + 1/2$.

В случае маятниковых вращений, когда $|h| > 1$, общее решение канонической системы с гамильтонианом (3.4) имеет вид [43]

$$q_1^*(\tau + \tau_0) = 2 \operatorname{am}(\tau + \tau_0, k_2), \quad p_1^*(\tau + \tau_0) = 2 k_2^{-1} \operatorname{dn}(\tau + \tau_0, k_2), \quad (3.7)$$

где $k_2^2 = 1/k_1^2$. Период колебаний вычисляется по формуле

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \omega = \frac{\pi}{2k_2 K(k_2)}. \quad (3.8)$$

Как уже упоминалось, орбитальная устойчивость маятниковых периодических движений в случае Горячева-Чаплыгина, когда $\alpha = 0$, исследовалась в [5, 17, 25, 45]. Отметим также, что в случае Горячева-Чаплыгина возможны

маятниковые колебания относительно оси динамической симметрии тела (оси Oy). Орбитальная устойчивость таких движений исследовалась ранее в [34]. В этой главе будет проведен анализ орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений тела при $0 < \alpha < \pi/2$.

3.2. Локальные переменные и изоэнергетическая редукция

Введем в окрестности невозмущённого периодического движения локальные координаты. С этой целью прежде всего заметим, что пара канонических переменных q_2, p_2 уже описывают возмущения ортогональные инвариантной плоскости $q_2 = p_2 = 0$, на которой лежит семейство исследуемых периодических движений. Для описания возмущений в инвариантной плоскости $q_2 = p_2 = 0$, следуя методике, описанной в Главе 1, выполним каноническую замену переменных $q_1, p_1 \rightarrow \xi, \eta$ по следующим формулам

$$\begin{aligned}
 q_1 = & q_1^*(\xi) + \frac{\sin q_1^*(\xi)}{V^2} \eta - \frac{\sin q_1^*(\xi)}{2V^4} \eta^2 + \\
 & + \left[\frac{(p_1^*(\xi) \cos^2 q_1^*(\xi) + \sin^2 q_1^*(\xi)) \sin q_1^*(\xi)}{3V^8} + \right. \\
 & \left. + \frac{\sin q_1^*(\xi) (\cos q_1^*(\xi) + (p_1^*(\xi))^2)}{6V^6} \right] \eta^3 + O(\eta^4), \\
 p_1 = & p_1^*(\xi) + \frac{p_1^*(\xi)}{V^2(\xi)} \eta - \frac{p_1^*(\xi) \cos q_1^*(\xi)}{2V^4} \eta^2 + \\
 & + \left[\frac{p_1^*(\xi) \cos q_1^*(\xi)}{6V^6} + \frac{((p_1^*(\xi))^2 \cos^2 q_1^*(\xi) + \sin^2 q_1^*(\xi)) p_1^*(\xi)}{3V^8} \right] \eta^3 + O(\eta^4),
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

где V – функция переменной ξ , удовлетворяющая равенству $V^2(\xi) = (p_1^*(\xi))^2 + q_1^*(\xi)$. Функции $q_1^*(\xi), p_1^*(\xi)$ задаются формулами (3.7) случае маятниковых колебаний и формулами (3.8) случае маятниковых вращений.

В переменных ξ, q_2, η, p_2 невозмущенное периодическое движение имеет вид

$$\xi = \tau + \tau_0, \quad \eta = q_2 = p_2 = 0. \quad (3.10)$$

Таким образом, в фазовом пространстве системы уравнений движения переменные η, q_2, p_2 описывают возмущения исследуемой периодической орбиты в трех взаимно ортогональных направлениях и являются локальными координатами. Функция Гамильтона периодически зависит от ξ и является аналитической функцией переменных η, q_2, p_2 .

Задача об орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений твердого тела состоит в исследовании устойчивости по Ляпунову по отношению к переменным η, q_2, p_2 .

Выполним ещё одну каноническую замену переменных по формулам

$$\xi = \frac{w}{\omega}, \quad \eta = \omega r, \quad (3.11)$$

и разложим функцию Гамильтона в ряд по степеням η, q_2, p_2

$$\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_4 + \Gamma_6 + \dots, \quad (3.12)$$

Многоточием в (3.12) обозначены члены восьмого и более высокого порядка.

Члены второго, четвертого и шестого порядка в разложении (3.12) имеют следующую структуру

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= \omega \zeta + \Psi_2^{(0)}(q_2, p_2, w), \\ \Gamma_4 &= \omega^2 \chi_2(w) \zeta^2 + \omega \zeta \Psi_2^{(1)}(q_2, p_2, w) + \Psi_4^{(0)}(q_2, p_2, w), \\ \Gamma_6 &= \omega^3 \chi_3(w) \zeta^3 + \omega^2 \zeta^2 \Psi_2^{(2)}(q_2, p_2, w) + \omega \zeta \Psi_4^{(1)}(q_2, p_2, w) + \\ &\quad + \Psi_6^{(0)}(q_2, p_2, w), \end{aligned} \quad (3.13)$$

где

$$\chi_2 = \frac{(\cos Q_* - 1)(\sin^2 Q_* - P_*^2)}{2V_*^4}, \quad \chi_3 = \frac{(\cos Q_* - 1)^2}{6V_*^4},$$

а Q_*, P_*, V_* – 2π -периодические функции переменной w , которые определяются равенствами

$$Q_*(w) = q_1^*(w/\omega), \quad P_*(w) = p_1^*(w/\omega), \quad V_*(w) = V(w/\omega).$$

Через $\Psi_k^{(m)}(q_2, p_2, w)$ обозначены формы k -ой степени относительно переменных q_2, p_2 . Коэффициенты этих форм являются 2π -периодическими функциями переменной w . Их явный вид приводится в Приложении А.1.

В соответствии с методикой исследования орбитальной устойчивости, описанной в Главе 1, рассмотрим движение на нулевом изоэнергетическом уровне $\Gamma = 0$, отвечающем невозмущённому периодическому движению. Эволюция переменных q_2, p_2 на уровне $\Gamma = 0$ может быть описана с помощью редуцированной канонической системы (уравнения Уиттекера)

$$\frac{dq_2}{dw} = \frac{\partial K}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_2}{dw} = -\frac{\partial K}{\partial q_2}, \quad (3.14)$$

где w играет роль новой независимой переменной. В свою очередь эволюция переменной r определяется соотношением $r = -K(q_2, p_2, w)$, которое является результатом решения уравнения $\Gamma = 0$ относительно r . При малых q_2, p_2 гамильтониан K можно представить в виде ряда по степеням q_2, p_2 . Принимая во внимание формулы (3.12) и (3.13), получаем следующее разложение функции Гамильтона K в ряд по q_2, p_2

$$K = K_2 + K_4 + K_6 + \dots, \quad (3.15)$$

где

$$\begin{aligned} K_2 &= \omega^{-1} \Psi_2^{(0)}, \\ K_4 &= \omega^{-1} \left[\chi_2(w) \left(\Psi_2^{(0)} \right)^2 + \Psi_2^{(0)} \Psi_2^{(1)} + \Psi_4^{(0)} \right], \\ K_6 &= \omega^{-1} \left[\left(\Psi_2^{(0)} \right)^3 (2\chi_2^2 - \chi_3) + \left(\Psi_2^{(0)} \right)^2 \left(\Psi_2^{(2)} - 3\chi_2 \Psi_2^{(1)} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \Psi_2^{(0)} \left(2\chi_2 \Psi_4^{(0)} + \left(\Psi_2^{(1)} \right)^2 - \Psi_4^{(1)} \right) - \Psi_2^{(1)} \Psi_4^{(0)} + \Psi_6^{(0)} \right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Из результатов Главы 2 следует, что если вопрос об орбитальной устойчивости решается на основании нелинейного анализа с учетом членов не выше шестого порядка в разложении (3.12), то задача об орбитальной устойчивости периодических движений твёрдого тела эквивалентна задаче об устойчивости положения равновесия системы (3.14).

3.3. Линейный анализ орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений

Рассмотрим сначала задачу об орбитальной устойчивости в линейном приближении. Для этого рассмотрим каноническую систему с гамильтонианом K_2

$$\frac{dq_2}{dw} = \psi_{11}^{(0)} q_2 + 2\psi_{02}^{(0)} p_2, \quad \frac{dp_2}{dw} = -2\psi_{20}^{(0)} q_2 - \psi_{11}^{(0)} p_2. \quad (3.17)$$

Применяя критерии устойчивости для линейной системы, описанные в §1.4, был проведен линейный анализ устойчивости. Линейный анализ орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений проводился следующим образом. При помощи численного интегрирования системы (3.17) от 0 до 2π вычислялась ее матрица монодромии, определялся коэффициент κ характеристического уравнения (1.13) и делались выводы об орбитальной устойчивости в линейном приближении или об орбитальной неустойчивости.

В случае маятниковых вращений численное нахождение коэффициента κ выполнялось для интервалов $1 < h < 100$ и $0 < \alpha < \pi/2$. Сетка значений параметров строилась с шагом 0,01. Оказалось, что в указанном диапазоне значений всегда выполняется неравенство $|\kappa| > 1$, поэтому линейная система неустойчива. Это означает, что маятниковые вращения твёрдого тела в указанном диапазоне параметров орбитально неустойчивы.

В случае маятниковых колебаний линейный анализ показал, что в зависимости от значений параметров задачи, может иметь место как орбитальная

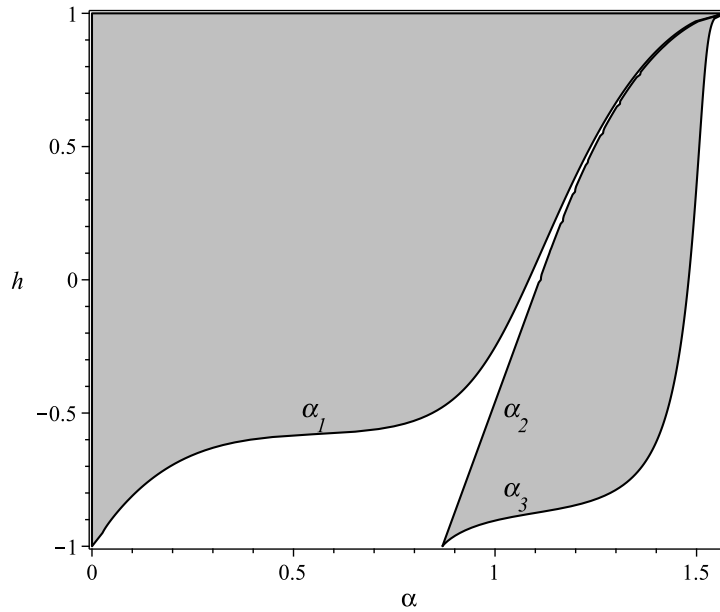


Рис. 3.1: Диаграмма устойчивости маятниковых колебаний в линейном приближении

устойчивость в линейном приближении, так и орбитальная неустойчивость. Результаты линейного анализа орбитальной устойчивости маятниковых колебаний, полученные на основании численных расчетов коэффициента κ , представлены на диаграмме, построенной в плоскости параметров h и α (см. Рис. 3.1). Области неустойчивости отмечены серым цветом. Вне этих областей маятниковые колебания устойчивы в линейном приближении. Границы, разделяющие области устойчивости и неустойчивости, обозначены $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Далее в работе рассматриваются только маятниковые колебания, поэтому для простоты введем обозначение $k = k_1$.

3.4. Анализ орбитальной устойчивости маятниковых колебаний при малых амплитудах

В общем случае из орбитальной устойчивости в линейном приближении не следует орбитальная устойчивость в строгом нелинейном смысле. Однако

при малых амплитудах колебаний тяжёлого твёрдого тела с неподвижной точкой исследование их орбитальной устойчивости можно выполнить аналитически. В этом случае можно ввести малый параметр, в качестве которого удобно выбрать величину $k = k_1$ – модуль эллиптического интеграла в (3.5), который связан с амплитудой маятниковых колебаний тела соотношением: $k = \sin \beta/2$, где β – амплитуда колебаний. Исследование орбитальной устойчивости при малых амплитудах колебаний начнем с анализа линейной системы. Разложения в ряд по степеням k коэффициентов системы (3.17) имеют вид

$$\begin{aligned}\psi_{11}^{(0)} &= -3 \cos w \sin 2\alpha k + 6k^2 \sin 2w \cos 2\alpha + O(k^3), \\ \psi_{02}^{(0)} &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \alpha + 3k \sin w \sin 2\alpha \cos \alpha + \\ &\quad + \frac{1}{16} (\cos 2\alpha (48 \cos 2w - 45) + 5) k^2 + O(k^3), \\ \psi_{20}^{(0)} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} (-12 (\cos 2w + 1) \cos 2\alpha + 24 \cos 2w + 17) k^2 + O(k^3).\end{aligned}\tag{3.18}$$

При $k = 0$ линейная система автономна и описывает гармонические колебания с частотой $\Omega_0 = \sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha}$. Если $\Omega_0 \neq N/2, N \in \mathbb{Z}$, то для достаточно малых k имеет место устойчивость в линейном приближении. Если $\Omega_0 \approx N/2$, то при $k \ll 1$ возможно так называемое явление параметрического резонанса, приводящее к неустойчивости.

В данной задаче параметрический резонанс имеет место в двух случаях: $\Omega_0 \approx 2$ и $\Omega_0 \approx 3/2$. Вычисления показали, что области параметрического резонанса в плоскости параметров (α, h) исходят из точек $\alpha_* = 0$ и $\alpha_{**} = \arccos(\sqrt{5/12})$ прямой $h = -1$. При $k \ll 1$ границы областей параметрического резонанса могут быть получены в виде сходящихся рядов по степеням малого параметра k

$$\alpha = \alpha_0 + k\alpha_1 + \dots,\tag{3.19}$$

где в случае резонанса $\Omega_0 \approx 2$ нужно положить $\alpha_0 = \alpha_*$, а в случае резонанса $\Omega_0 \approx 3/2$ нужно положить $\alpha_0 = \alpha_{**}$. Для получения коэффициентов выше-

указанных рядов используем методику, разработанную в [50]. В соответствии с этой методикой линейной канонической заменой переменных $(q_2, p_2) \rightarrow (X, Y)$ гамильтониан K_2 необходимо привести к нормальной форме. При указанных выше резонансах нормальная форма гамильтониана принимает следующий вид [50]

$$K_2 = k_{20}X^2 + k_{11}XY + k_{02}Y^2, \quad (3.20)$$

где k_{20}, k_{11}, k_{02} аналитически зависят от k, α . Для построения вышеупомянутой линейной замены переменных, а также нахождение коэффициентов k_{20}, k_{11}, k_{02} применялся метод Депри-Хори [50], который позволяет вычислить выражения для этих коэффициентов в виде рядов по степеням k до сколь угодно высокой степени. Вычисления показали

$$\begin{aligned} k_{20} &= -\frac{\alpha_1^2}{4}k^2 - \frac{9\alpha_2\alpha_1}{2}k^3 + O(k^4), \\ k_{11} &= O(k^4), \\ k_{02} &= -\frac{\alpha_1^2}{4}k^2 - \frac{9\alpha_2\alpha_1}{2}k^3 + O(k^4). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Простой анализ канонической системы с гамильтонианом (3.18) показывает, что она устойчива, если $k_{11}^2 < 4k_{20}k_{02}$, в противном случае, то есть если $k_{11}^2 > 4k_{20}k_{02}$, она неустойчива. Таким образом, границы областей параметрического резонанса определяются следующим уравнением

$$k_{11}^2 = 4k_{20}k_{02}. \quad (3.22)$$

Подставляя (3.21) в (3.22) и приравняв члены при равных степенях k в правой и левой частях (3.20), можно получить уравнения для коэффициентов рядов (3.19).

Вычисления показали, что в случае резонанса $\Omega_0 \approx 2$, граница области параметрического резонанса определяется следующей асимптотической формулой

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}k^2 + O(k^3). \quad (3.23)$$

При этом нормализованный гамильтониан примет вид

$$K_2 = -\frac{9}{32} X^2 k^4 + O(k^5). \quad (3.24)$$

В случае резонанса $\Omega_0 \approx 3/2$ на правой границе имеем

$$\begin{aligned} \alpha &= \arccos\left(\frac{\sqrt{15}}{6}\right) + \frac{27\sqrt{35}}{160}k^2 + \frac{315}{128}k^3 + O(k^4), \\ K_2 &= -\frac{105\sqrt{35}(X+Y)^2}{512}k^3 + O(k^5), \end{aligned} \quad (3.25)$$

а уравнение левой границы и соответствующий нормализованный гамильтониан определяются равенствами

$$\begin{aligned} \alpha &= \arccos\left(\frac{\sqrt{15}}{6}\right) + \frac{27\sqrt{35}}{160}k^2 - \frac{315}{128}k^3 + O(k^4), \\ K_2 &= \frac{105\sqrt{35}(X-Y)^2}{512}k^3 + O(k^5). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Вне областей параметрического резонанса линейная система устойчива. Однако из этого не следует устойчивость исходной нелинейной системы. Для получения строгих выводов об орбитальной устойчивости при значениях параметров вне областей параметрического резонанса и на их границах требуется нелинейный анализ.

Исследуем сначала вопрос об орбитальной устойчивости для значений параметров вне областей параметрического резонанса и вне границ этих областей. В этом случае при помощи линейной канонической замены переменных

$$q_2 = a_{11}(w)x + a_{12}(w)y, \quad p_2 = a_{21}(w)x + a_{22}(w)y. \quad (3.27)$$

гамильтониан K_2 можно привести к следующей нормальной форме

$$K_2 = 1/2 \Omega (x^2 + y^2), \quad (3.28)$$

где коэффициенты $a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22}$ являются 2π -периодическими функциями переменной w и аналитичны по k . Величина Ω является аналитической функцией

k и α . Для нахождения коэффициентов $a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22}$ и Ω применялся метод Депри-Хори. Вычисления показали, что

$$\begin{aligned}\Omega &= \Omega_0 + \Omega_1 k^2 + O(k^3), \\ \Omega_1 &= \frac{-(36\Omega_0^2 + 72)\sin^2 2\alpha - 16\Omega_0^6 + 48\Omega_0^4 + 69\Omega_0^2 - 20}{4\Omega_0^2(4\Omega_0^2 - 1)}.\end{aligned}\quad (3.29)$$

Дальнейшее исследование удобно провести в канонических полярных координатах ρ, ϑ , которые вводятся по формулам

$$x = k^3 \sqrt{2\rho} \sin \vartheta, \quad y = k^3 \sqrt{2\rho} \cos \vartheta. \quad (3.30)$$

В этих переменных гамильтониан K полной нелинейной системы примет вид

$$K = \Omega \rho + G_4 \rho^2 + G_6 \rho^3 + O(\rho^4). \quad (3.31)$$

Выражения для $G_4(\vartheta, w), G_6(\vartheta, w)$ опущено в силу его громоздкости. Строгие выводы об устойчивости тривиального решения системы с гамильтонианом (3.31) могут быть получены на основе теории КАМ. С этой целью выполним нормализацию гамильтониана K до членов порядка ρ^2 .

Если в системе нет резонансов третьего и четвёртого порядка, то есть $\Omega \neq n/3$ и $\Omega \neq n/4, n \in \mathbb{Z}$, соответственно, то функцию Гамильтона (3.31) близкой к тождественной, аналитической по k , канонической заменой переменных $\rho, \vartheta \rightarrow R, \phi$ можно привести к следующей нормальной форме [38]

$$\begin{aligned}\Phi &= \Omega R + c_2 R^2 + \tilde{G}_6(\phi, w) R^3 + O(R^4), \\ c_2 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} G_4(\vartheta, w) d\vartheta dw.\end{aligned}\quad (3.32)$$

Вычисления показали, что коэффициент c_2 имеет вид

$$c_2 = -\frac{126 \cos^6 \alpha + 93 \cos^4 \alpha - 34 \cos^2 \alpha - 25}{8(4 \cos^2 \alpha + 1)(1 + 3 \cos^2 \alpha)} k^6 + O(k^8). \quad (3.33)$$

На основании теоремы Арнольда-Мозера [3, 88], положение равновесия системы (3.14) устойчиво при $c_2 \neq 0$. В интервале $0 < \alpha < \pi/2$ уравнение $c_2 = 0$

имеет единственное решение, которое аналитически зависит от α . При достаточно малых k это решение задаётся следующей асимптотической формулой $\alpha_{***} = 0.7665103122 + O(k^2)$. Таким образом, вне областей параметрического резонанса, при $\alpha \neq \alpha_{***}$ и при отсутствии резонансов до четвёртого порядка включительно положение равновесия системы (3.14) при малых значениях k устойчиво.

Рассмотрим случай $\alpha = \alpha_{***}$, когда имеет место вырождение и анализ орбитальной устойчивости требуется проводить с учетом членов порядка R^3 включительно. В этом случае при помощи канонической, близкой к тождественной, аналитической по k замены переменных $R, \phi \rightarrow \tilde{R}, \tilde{\phi}$ система приводится к нормальной форме с гамильтонианом следующего вида

$$\begin{aligned}\Phi &= \Omega \tilde{R} + c_3 \tilde{R}^3 + O(\tilde{R}^4), \\ c_3 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{G}_6(\phi, w) \, d\phi \, dw.\end{aligned}\tag{3.34}$$

Вычисления показали, что коэффициент c_3 имеет вид

$$c_3 = -\frac{(1 + 3 \cos^2 \alpha_{***})^{3/2}}{12288} + O(k^2).\tag{3.35}$$

Поскольку для малых k выполнено неравенство $c_3 \neq 0$, то по теореме Арнольда-Мозера положение равновесия будет устойчивым.

Резонансные случаи требуют отдельного анализа. Случаи резонансов первого и второго порядков имеют место на границах областей параметрического резонанса и будут рассмотрены ниже. Поскольку функция Гамильтона не содержит членов порядка $\rho^{3/2}$, то резонансы третьего порядка в данном приближении не проявляются. Однако, в данной системе имеют место резонансы четвёртого порядка, когда $\Omega = n/4, n \in \mathbb{Z}$. В нашей задаче возможны два таких резонанса: $\Omega = 5/4, \Omega = 7/4$. В случае резонанса четвёртого порядка гамильтониан (3.31) близкой к тождественной, аналитической по k , канонической заменой перемен-

ных может быть приведен к виду

$$\begin{aligned}\Phi &= \Omega R + (c_2 + a_4 \cos(nw - 4\vartheta) - b_4 \sin(nw - 4\vartheta)) R^2 + O(R^3), \\ a_4 &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} G_4(\vartheta, w) \cos(4\vartheta - nw) d\vartheta dw, \\ b_4 &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} G_4(\vartheta, w) \sin(4\vartheta - nw) d\vartheta dw.\end{aligned}\tag{3.36}$$

В случае $\Omega = 5/4$ значение параметра α соответственно определяется следующим резонансным соотношением, которое нетрудно получить, используя выражение (3.29)

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{3\sqrt{39}}{7} k^2 + O(k^3).\tag{3.37}$$

В случае резонанса $\Omega = 5/4$ имеем

$$\begin{aligned}c_2 &= \frac{55859}{11200} k + O(k^3), \\ a_4 &= O(k^3), \quad b_4 = O(k^3).\end{aligned}\tag{3.38}$$

В случае резонанса $\Omega = 7/4$ значение параметра α и коэффициенты определяются соотношениями

$$\begin{aligned}\alpha &= \arccos\left(\frac{\sqrt{11}}{4}\right) + \frac{3\sqrt{55}}{55} k^2 + O(k^3), \\ c_2 &= -\frac{4987}{3136} k + O(k^3), \\ a_4 &= O(k^3), \quad b_4 = O(k^3).\end{aligned}\tag{3.39}$$

Достаточное условие устойчивости положения равновесия при резонансе четвертого порядка имеет вид [38]

$$\sqrt{a_4^2 + b_4^2} < |c_2|.\tag{3.40}$$

В обоих случаях это условие очевидно выполняется, то есть имеет место устойчивость по Ляпунову для системы (3.14). Откуда следует, что при резонансе четвертого порядка маятниковые колебания с малыми амплитудами орбитально устойчивы.

Таким образом, вне областей параметрического резонанса маятниковые колебания с малыми амплитудами орбитально устойчивы при всех значениях параметров.

Для решения вопроса об орбитальной устойчивости на границах областей параметрического резонанса применим ту же методику исследования. На границах областей параметрического резонанса имеют место резонансы первого ($\Omega = 2$) и второго порядков ($2\Omega = 3$). В следующих случаях линейной заменой переменных $X, Y \rightarrow u, v$ гамильтониан приводится к виду

$$K = \frac{\delta}{2} u^2 + K_4(u, v) + O_6, \quad (3.41)$$

где $K_4 = \sum_{i+j=4} s_{ij} u^i v^j$, а коэффициенты s_{ij} формы K_4 являются 2π -периодическими функциями независимой переменной w . Коэффициент δ определяется в процессе построения указанной линейной замены переменных и принимает одно из двух значений $\delta = 1$ или $\delta = -1$.

Далее нелинейной близкой к тождественной заменой переменных $u, v \rightarrow x, y$ можно выполнить нормализацию до членов четвертой степени и привести гамильтониан K к виду

$$K = \frac{\delta}{2} x^2 + c_4 y^4 + O_6, \quad (3.42)$$

$$c_4 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s_{04} dw.$$

На основе теоремы Иванова-Сокольского [23] положение равновесия системы с гамильтонианом (3.42) устойчиво при выполнении неравенства

$$\delta c_4 > 0 \quad (3.43)$$

и неустойчиво, если это неравенство выполняется с противоположным знаком.

Вычисления показали, что на границах (3.23) и (3.26) коэффициенты δ, c_4 имеют вид

$$c_4 = -\frac{1}{4} k^4 + O(k^5), \quad \delta = -1 \quad (3.44)$$

и

$$c_4 = \frac{445}{6144}k^4 + O(k^5), \quad \delta = 1 \quad (3.45)$$

соответственно. Неравенство (3.43) очевидно выполняется, поэтому на указанных границах колебания с малыми амплитудами орбитально устойчивы. На границе же (3.25) имеем

$$c_4 = \frac{445}{6144}k^4 + O(k^5), \quad \delta = -1. \quad (3.46)$$

Здесь неравенство (3.43) выполнено с обратным знаком и колебания с малыми амплитудами орбитально неустойчивы.

Кратко подведем итоги проведенного анализа орбитальной устойчивости. Неустойчивость колебаний с малыми амплитудами может возникнуть в результате явления параметрического резонанса. В данной задаче было установлено, что существуют две области параметрического резонанса и аналитически были получены границы этих областей. Было установлено, что почти для всех значениях параметров вне указанных областей имеет место орбитальная устойчивость. На границе первой области параметрического резонанса и на левой границе второй области параметрического резонанса колебания с малыми амплитудами орбитально устойчивы, а на правой границе второй области параметрического резонанса – неустойчивы.

3.5. Нелинейный анализ орбитальной устойчивости маятниковых колебаний при произвольных амплитудах

Для получения строгих выводов об орбитальной устойчивости для всех (а не только малых) значений параметров из областей устойчивости в линейном приближении, а также на границах этих областей необходимо выполнить нелинейный анализ.

Нелинейный анализ орбитальной устойчивости будем проводить на основании методики, разработанной в [52], суть которой состоит в построении симплектического отображения, порожденного системой нелинейных уравнений (3.14). Краткое описание методики построения симплектического отображения и явные формулы представлены в параграфе 2.5.

Для значений параметров внутри областей устойчивости в линейном приближении численно вычислялись коэффициенты симплектического отображения. Учитывая явные формулы, выписанные в параграфе 2.5, вычислялись коэффициенты нормальных форм. Далее проверялись условия орбитальной устойчивости и неустойчивости, выписанные в Главе 1. Полученные результаты проиллюстрированы на диаграмме устойчивости, которая представлена на Рис. 3.2.

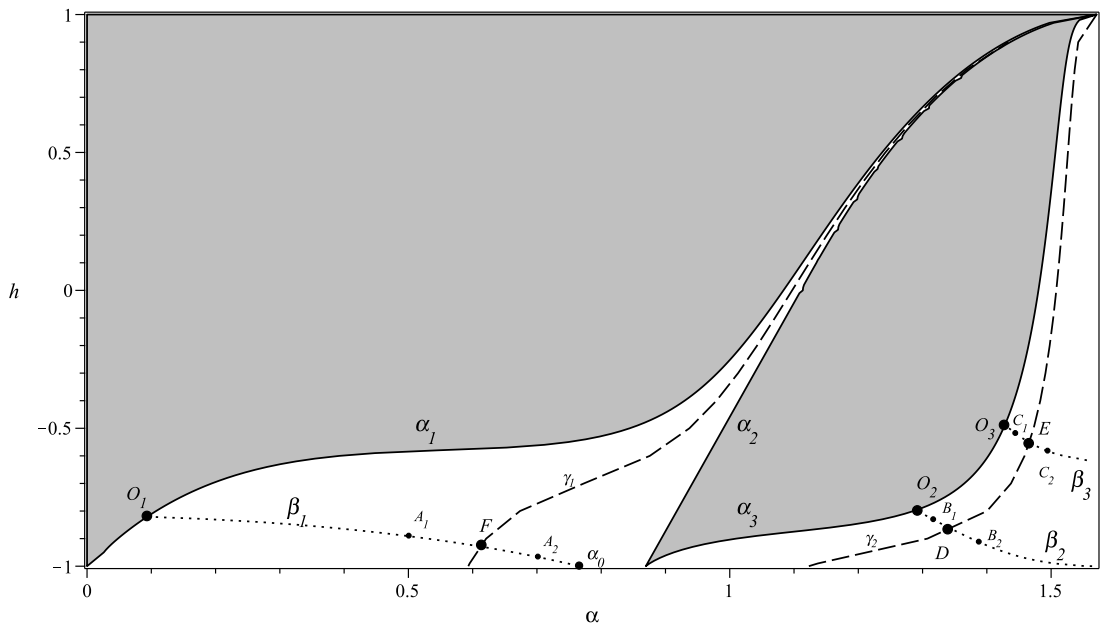


Рис. 3.2: Диаграмма устойчивости маятниковых колебаний

Кривые, отвечающие резонансу четвертого порядка, обозначены γ_1, γ_2 и выделены пунктирной линией. Кривые, отвечающие случаю вырождения $c_{20}\lambda^2 - c_{11}\lambda + c_{02} = 0$, обозначены $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ и показаны точками. Вне резонансных кривых четвертого порядка γ_1, γ_2 и вне кривых вырождения $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ маятниковые колебания орбитально устойчивы в строгом нелинейном смысле.

Оказалось, что на всех трех кривых вырождения $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ выполняется неравенство $c_3 \neq 0$, поэтому в случаях вырождения маятниковые колебания также орбитально устойчивы, за исключением лишь точек F, E, D , отвечающих случаям резонанса четвертого порядка и, возможно, точек $A_i, B_i, C_i, i = 1, 2$, в которых реализуются резонансы третьего ($i = 1$) и шестого ($i = 2$) порядков. Также почти всюду на кривых γ_1, γ_2 имеет место орбитальная устойчивость маятниковых колебаний. Исключение составляют лишь небольшие сегменты кривых γ_1, γ_2 , расположенные вблизи точек пересечения этих кривых с кривыми вырождения.

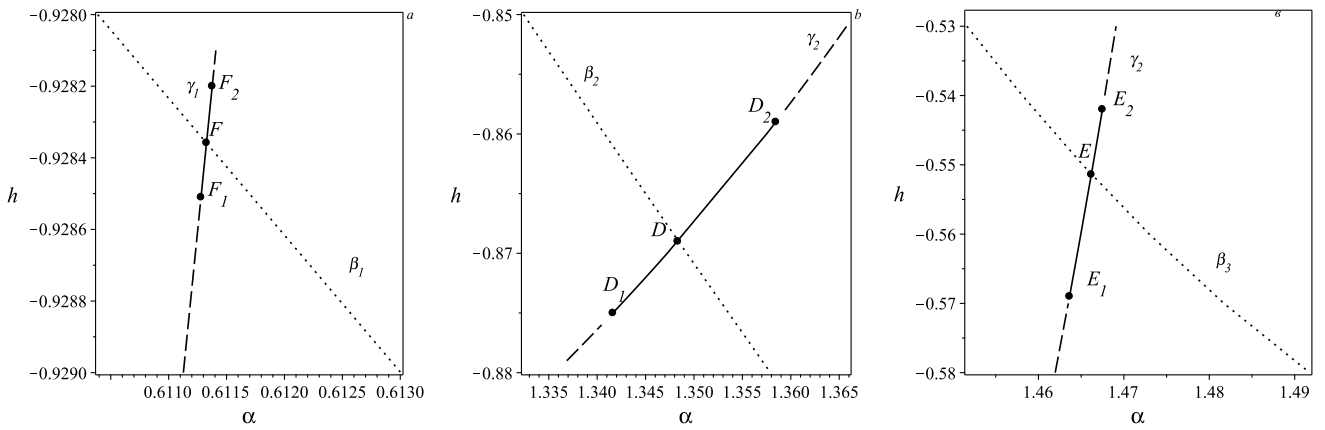


Рис. 3.3: Сегменты неустойчивости

Сегменты неустойчивости кривых γ_1, γ_2 изображены на Рис. 3.3. На этих сегментах, включая и точки F, E, D , маятниковые колебания орбитально неустойчивы. Координаты этих точек приведены в таблице 3.1. В точках $F_i, E_i, D_i, i = 1, 2$ ограничивающих указанные выше сегменты неустойчивости, где реализуется случай вырождения при наличии резонанса четвертого порядка, а также в точках $A_i, B_i, C_i, i = 1, 2$, где реализуется случай вырождения при наличии резонансов третьего и шестого порядков, исследование орбитальной устойчивости будет изложено отдельно в следующем параграфе. Координаты этих точек приведены в таблицах 3.2 и 3.3 соответственно.

Случаи резонансов первого и второго порядков, которые реализуются на

Таблица 3.1: Координаты точек пересечения резонансных кривых четвертого порядка γ_1, γ_2 и кривых вырождения $\beta_1, \beta_2, \beta_3$

	Точка F	Точка E	Точка D
α	0.611	1.348	1.466
h	-0.928	-0.869	-0.551

Таблица 3.2: Координаты точек пересечения резонансных кривых третьего и шестого порядков с кривыми вырождения

	Точка A_1	Точка A_2	Точка B_1	Точка B_2	Точка C_1	Точка C_2
α	0.702332	0.501423	1.317423	1.388369	1.445120	1.495322
h	-0.967229	-0.891362	-0.831726	-0.913163	-0.519193	-0.583186

Таблица 3.3: Координаты концов сегментов неустойчивости на кривых γ_1, γ_2

	Точка F_1	Точка F_2	Точка D_1	Точка D_2	Точка E_1	Точка E_2
α	0.6112	0.6113	1.3406	1.3593	1.4636	1.4675
h	-0.9285	-0.9282	-0.8758	-0.8580	-0.5695	-0.5415

Таблица 3.4: Координаты пересечения кривых вырождения с резонансными кривыми первого и второго порядков

	Точка O_1	Точка O_2	Точка O_3
α	0.09	1.29	1.43
h	-0.82	-0.80	-0.49

границах областей устойчивости в линейном приближении, требуют отдельного нелинейного анализа, который проводится по той же методике. На границе α_1 реализуется резонанс первого порядка ($\kappa = 1$), а на границах α_2, α_3 – резонансы второго порядка ($\kappa = -1$).

Вычисления показали, что на участке границы α_1 , расположенном ниже точки O_1 , маятниковые колебания орбитально устойчивы, а на участке границы α_1 , расположенном выше точки O_1 , маятниковые колебания орбитально неустойчивы. На всей границе α_2 маятниковые колебания орбитально устойчивы. На границе α_3 маятниковые колебания орбитально устойчивы на участке между точками O_2, O_3 . Вне этого участка маятниковые колебания орбитально неустойчивы. Координаты точек O_1, O_2, O_3 , где реализуются случаи вырождения при наличии резонансов первого и второго порядков, представлены в таблице 3.4.

Отметим, что при малых значениях амплитуд колебаний результаты, представленные на диаграмме устойчивости (см. Рис. 3.2) полностью согласуются с результатами, полученными аналитически в параграфе 3.5.

3.6. Нелинейный анализ орбитальной устойчивости

маятниковых колебаний при наличии вырождения

Нелинейный анализ орбитальной устойчивости маятниковых колебаний при наличии вырождения проводился следуя методике, описанной в Главе 2. Согласно этой методике, используя построенное симплектическое отображение (2.113), в каждом отдельном случае вырождения вычислялись коэффициенты нормальной формы и применялись достаточные условия орбитальной устойчивости и неустойчивости, полученные в Главе 2.

В точках A_1, B_1, C_1 , которые отвечают случаю вырождения при наличии резонанса третьего порядка, численно вычислялись a, ν, μ по формулам (2.117). Результаты вычислений представлены в таблице 3.5. Опираясь на теорему 2.2.1, можно сделать вывод, что во всех точках имеет место орбитальная устойчивость.

Для решения задачи об орбитальной устойчивости в точках A_2, B_2, C_2 , в

Таблица 3.5: Коэффициенты a, ν, μ для точек A_1, B_1, C_1

	Точка A_1	Точка B_1	Точка C_1
a	131.8	-14.27	10.42
ν	-0.6923	1.080	1.579
μ	-0.0075	-1.358	0.118

которых реализуется случай вырождения при наличии резонанса шестого порядка, численно вычислялись a, ν, μ по формулам (2.117). Результаты вычислений представлены в таблице (3.6). Опираясь на теорему 2.2.1, можно сделать вывод, что во всех точках имеет место орбитальная устойчивость.

Таблица 3.6: Коэффициенты a, ν, μ для точек A_2, B_2, C_2

	Точка A_1	Точка B_1	Точка C_1
a	69.14	48.49	30.56
ν	0.0800	0.3981	-0.0502
μ	0.0119	-0.7494	-0.0044

В концевых точках сегментов неустойчивости резонансных кривых γ_1, γ_2 , где реализуется случай вырождения при наличии резонанса четвертого порядка, численно вычислялось значение выражения $(A-C)a_{02}$ по формулам (2.119). Результаты вычислений представлены в таблице 3.7. Опираясь на теорему 2.3.4, можно сделать вывод, что в точках F_1, E_2, D_2 имеет место орбитальная устойчивость, а в точках E_1, D_1, F_2 имеет место орбитальная неустойчивость.

Для точек $O_j (j = 1, 2, 3)$, соответствующим случаям вырождения при наличии резонансов первого и второго порядков, был рассчитан коэффициент $\delta\gamma_{06}$ по формулам (2.120). Результаты расчетов представлены в таблице 3.8. Опираясь на теорему 2.4.1, можно сделать вывод, что в точке O_1 имеет место орбитальная устойчивость, а в точках O_2, O_3 имеет место орбитальная неустой-

Таблица 3.7: Результаты вычислений для случая вырождения при наличии резонанса четвертого порядка

Точка	h	α	$(A - C)a_{02}$	Вывод
Точка F_1	-0.9285	0.6112	20035	устойчивость
Точка F_2	-0.9282	0.6113	-118298	неустойчивость
Точка D_1	-0.8758	1.3406	-1.9036	неустойчивость
Точка D_2	-0.8580	1.3593	1.8251	устойчивость
Точка E_1	-0.5695	1.4636	-13.3151	неустойчивость
Точка E_2	-0.5415	1.4675	2.8027	устойчивость

чивость.

Таблица 3.8: Коэффициент $\delta\gamma_{06}$ для точек $O_j (j = 1, 2, 3)$

	Точка O_1	Точка O_2	Точка O_3
c_6	$1.89 \cdot 10^6$	-885.507	-358.764

Проведенные исследования позволили получить строгие выводы об орбитальной устойчивости в случаях резонансов первого, второго, третьего, четвертого и шестого порядков, когда в разложении гамильтониана в окрестности невозмущенного движения необходимо учитывать члены до шестой степени. Данное исследование завершает изучение устойчивости маятниковые периодические движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, главные моменты инерции которого находятся в соотношении $A = C = 4B$.

Основные результаты данной главы опубликованы в [8–10, 27–31, 71, 73].

Заключение

Кратко изложим основные результаты, полученные в диссертационной работе.

1. Получены достаточные условия орбитальной устойчивости и неустойчивости периодических решений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случаях вырождения при наличии резонансов третьего и шестого порядков, когда для решения вопроса об орбитальной устойчивости необходимо учитывать члены не ниже шестого порядка в разложении функции Гамильтона в окрестности невозмущенной периодической орбиты. Результаты сформулированы в виде теоремы.
2. Получены достаточные условия орбитальной устойчивости и неустойчивости периодических решений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при наличии резонанса четвертого порядка в случае вырождения. Были получены выводы об орбитальной устойчивости и неустойчивости в случае, когда необходимо учитывать члены не ниже шестого порядка в разложении функции Гамильтона в окрестности невозмущенной периодической орбиты. Полученные выводы были сформулированы в виде теорем.
3. Получены достаточные условия орбитальной устойчивости и неустойчивости периодических решений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в особых случаях вырождения при наличии резонансов первого и второго порядков. Достаточные условия записаны в виде неравенств на коэффициенты нормальной формы функции Гамильтона с учетом членов не ниже шестого порядка.
4. Показано, что в случаях вырождения при наличии резонансов третьего,

четвертого и шестого порядков достаточные условия орбитальной устойчивости и неустойчивости периодического решения совпадают с достаточными условиями его устойчивости и неустойчивости на уровне энергии, отвечающем невозмущенной периодической орбите. Таким образом, обоснована методика, на основании которой для решения вопроса об орбитальной устойчивости в рассматриваемых случаях можно с самого начала проводить изоэнергетическую редукцию и исследовать задачу на уровне энергии, отвечающем невозмущенной периодической орбите. Это позволяет решать более простую задачу об устойчивости положения равновесия неавтономной периодической гамильтоновой системы с одной степенью свободы.

5. На основании методики, описанной в Главе 1, была изучена задача об орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, моменты инерции которого удовлетворяют соотношению $A = C = 4B$. На основе линейного анализа установлено, что маятниковые вращения орбитально неустойчивы. Маятниковые колебания могут быть как и орбитально устойчивыми в линейном приближении, так и орбитально неустойчивыми. Для устойчивых в линейном приближении значений параметров был выполнен строгий нелинейный анализ орбитальной устойчивости. Результаты представлены на диаграмме устойчивости. Также были найдены значения параметров, при которых требуется дополнительный анализ с учётом членов до шестой степени включительно в разложении функции Гамильтона. Этим значениям отвечают кривые вырождения и особые точки резонансных кривых.
6. При указанном выше соотношении главных моментов инерции тяжелого твердого тела с неподвижной точкой аналитически было выполнено строгое исследование орбитальной устойчивости маятниковых колебаний с ма-

лыми амплитудами. Аналитически получены строгие выводы об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний с учетом нелинейных членов в разложении функции Гамильтона. Найдены области параметрического резонанса, где имеет место орбитальная неустойчивость. Также аналитически получены уравнения границ областей орбитальной устойчивости и неустойчивости. Результаты аналитического исследования и численного анализа полностью согласуются.

7. На основании общетеоретических результатов, полученных в Главе 2, была решена задача об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в вырожденных случаях, когда необходим анализ с учётом членов до шестой степени включительно в разложении функции Гамильтона. В частности, получены строгие выводы об орбитальной устойчивости и неустойчивости в случае вырождения при отсутствии резонансов и при наличии резонансов первого, второго, третьего, четвертого, шестого порядков. Последнее обстоятельство позволило завершить решение задачи об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, моменты инерции которого удовлетворяют соотношению $A = C = 4B$.

Приложение А

А.1. Коэффициенты форм $\Psi_k^{(m)}(q_2, p_2, w)$

Формы $\Psi_k^{(m)}(q_2, p_2, w)$ имеют следующую структуру

$$\Psi_k^{(m)}(q_2, p_2, w) = \sum_{i+j=k} \psi_{ij}^{(m)} q_2^i p_2^j$$

Коэффициенты этих форм представлены ниже.

Коэффициенты формы $\Psi_2^{(0)}$:

$$\begin{aligned} \psi_{20}^{(0)} &= -3/4 \cos(2Q_* - 2\alpha) P_*^2 + 1/2 \cos Q_* + 5/4 P_*^2, \\ \psi_{11}^{(0)} &= 3/2 P_* \sin(2Q_* - 2\alpha), \\ \psi_{02}^{(0)} &= 3/4 \cos(2Q_* - 2\alpha) + 5/4. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Коэффициенты формы $\Psi_2^{(1)}$:

$$\begin{aligned} \psi_{20}^{(1)} &= \frac{1}{2V_*^2} (6 \cos(2Q_* - 2\alpha) P_*^2 - 3 P_*^2 \cos(Q_* - 2\alpha) + \\ &\quad + 3 P_*^2 \cos(3Q_* - 2\alpha) - 10 P_*^2 - \cos(2Q_*) + 1), \\ \psi_{11}^{(1)} &= \frac{1}{V_*^2} (3 P_* \sin(2Q_* - 2\alpha) + 3 P_* \sin(3Q_* - 2\alpha) \\ &\quad - 3 P_* \sin(Q_* - 2\alpha)), \\ \psi_{02}^{(1)} &= \frac{3 \cos(Q_* - 2\alpha) 3 \cos(3Q_* - 2\alpha)}{2V_*^2}. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Коэффициенты формы $\Psi_4^{(0)}$:

$$\begin{aligned} \psi_{40}^{(0)} &= \frac{-1/2 \cos(2Q_* - 2\alpha) P_*^2 - 1/24 \cos Q_* + 5/6 P_*^2}{V_*^2}, \\ \psi_{31}^{(0)} &= \frac{1/2 P_* \sin(2Q_* - 2\alpha)}{V_*^2}, \\ \psi_{13}^{(0)} &= \psi_{22}^{(0)} = \psi_{04}^{(0)} = 0. \end{aligned} \tag{A.3}$$

Коэффициенты формы $\Psi_2^{(2)}$:

$$\begin{aligned}
\psi_{20}^{(2)} &= \frac{1}{16V_*^4} [2P_*^2 (10 + 12 \cos(Q_* - 2\alpha) - 10 \cos Q_* - 6 \cos(3Q_* - 2\alpha) - \\
&\quad - 3 \cos(4Q_* - 2\alpha) - 3 \cos 2\alpha) + \cos 3Q_* - 2 \cos 2Q_* - \cos Q_* + 2], \\
\psi_{11}^{(2)} &= \frac{3P_*}{8V_*^4} (2 \sin(4Q_* - 2\alpha) + \sin(3Q_* - 2\alpha) - 4 \sin(2Q_* - 2\alpha) - \\
&\quad - 3 \sin(Q_* - 2\alpha) - 2 \sin(2\alpha)), \\
\psi_{02}^{(2)} &= \frac{3}{8V_*^4} (\cos(Q_* - 2\alpha) + \cos(4Q_* - 2\alpha) + \cos(2\alpha) - \\
&\quad - \cos(3Q_* - 2\alpha) - 2 \cos(2Q_* - 2\alpha)).
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Коэффициенты формы $\Psi_4^{(1)}$:

$$\begin{aligned}
\psi_{40}^{(1)} &= \frac{1}{48V_*^2} (8P_*^2 (10 + 3 \cos(Q_* - 2\alpha) - 6 \cos(2Q_* - 2\alpha) - 3 \cos(3Q_* - 2\alpha)) - \\
&\quad - \cos 2Q_* + 1), \\
\psi_{31}^{(1)} &= \frac{P_*}{2V_*^2} (\sin(3Q_* - 2\alpha) + \sin(2Q_* - 2\alpha) - \sin(Q_* - 2\alpha)), \\
\psi_{22}^{(1)} &= \psi_{13}^{(1)} = \psi_{04}^{(1)} = 0.
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Коэффициенты формы $\Psi_6^{(0)}$:

$$\begin{aligned}
\psi_{60}^{(0)} &= \frac{P_*^2 (340 - 204 \cos(2Q_* - 2\alpha) + \cos Q_*)}{720}, \\
\psi_{51}^{(0)} &= \frac{P_* \sin(2Q_* - 2\alpha)}{5}, \\
\psi_{42}^{(0)} &= \psi_{33}^{(0)} = \psi_{24}^{(0)} = \psi_{15}^{(0)} = \psi_{06}^{(0)} = 0.
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Список литературы

1. *Алехин А.К.* Об устойчивости плоских движений тяжелого осесимметричного твердого тела // *Известия РАН. Механика твердого тела*. 2006. №. 4. С. 56–62.
2. *Арнольд В.И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // *Успехи Математических Наук*. 1963. Т. 18, Вып. 6. С. 91–192.
3. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М. : Наука, 1989. Р. 472.
4. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. Москва: УРСС, 2002.
5. *Бардин Б. С.* . К задаче об устойчивости маятникообразных движений твердого тела в случае Горячева-Чаплыгина // *Изв. РАН. МТТ*. 2007. №. 2. С. 14–21.
6. *Бардин Б.С.* Об орбитальной устойчивости периодических движений гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае резонанса $3 : 1$ // *Прикладная математика и механика*. 2007. Т. 71, №. 6. С. 976–988.
7. *Бардин Б.С.* О тождественном резонансе в задаче об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Гесса // *X Поляховские чтения. Материалы международной научной конференции по механике*. 2024. С. 61–65.
8. *Бардин Б.С., Максимов Б.А.* Линейный анализ орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений тяжелого твердого тела при выполнении условия Горячева-Чаплыгина. // *Материалы XXII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2021)*. 2021. С. 533–535.
9. *Бардин Б.С., Максимов Б.А.* Нелинейный анализ орбитальной

- устойчивости малых колебаний симметричного твердого тела с неподвижной точкой в однородном поле тяжести // *Авиация и космонавтика. Тезисы 20-ой Международной конференции.* 2021. С. 441–443.
10. Бардин Б.С., Максимов Б.А. Об орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой, главные моменты инерции которого находятся в отношении 4:1:4 // *Прикладная математика и механика.* 2023. Т. 87, №. 5. С. 784–800.
 11. Бардин Б.С., Савин А.А. . Об устойчивости плоских периодических движений симметричного твердого тела с неподвижной точкой // *Прикладная математика и механика.* 2013. Т. 77, №. 6. С. 806–821.
 12. Бардин Б.С., Савин А.А. Исследование орбитальной устойчивости плоских колебаний симметричного намагниченного спутника на круговой орбите // *Труды МАИ.* 2016. №. 85.
 13. Бардин Б.С., Савин А.А. Об орбитальной устойчивости маятниковых движений твердого тела в случае Гесса // *Доклады Российской Академии Наук. Математика, Информатика, Процессы управления.* 2024. Т. 515, №. 1. С. 66–70.
 14. Бардин Б.С., Чекин А.М. Об орбитальной устойчивости плоских вращений спутника-пластинки на круговой орбите // *Вестник Московского авиационного института.* 2007. Т. 14, №. 2. С. 23–36.
 15. Бардин Б.С., Чекин А.М. Об орбитальной устойчивости плоских колебаний спутника на круговой орбите // *Космические исследования.* 2008. Т. 46, №. 3. С. 279–289.
 16. Бардин Б.С., Чекина Е.А. Об устойчивости плоских колебаний спутника-пластинки в случае резонанса основного типа // *Нелинейная динамика.* 2017. Т. 13, №. 4. С. 465–476.
 17. Болсинов А.В., Борисов А.В., Мамаев И.С. Топология и устойчивость

- интегрируемых систем // *Успехи математических наук*. 2010. Т. 65, №. 2. С. 71–132.
18. Брюм А.З. . Исследование орбитальной устойчивости при помощи первых интегралов // *Прикладная математика и механика*. 1989. Т. 53, №. 6. С. 873–879.
 19. Брюм А.З., Савченко А.Я. Об орбитальной устойчивости одного периодического решения уравнений движения гироскопа Ковалевской // *Прикладная математика и механика*. 1986. Т. 50, №. 6. С. 967–973.
 20. Брюно А. Д. О локальных задачах механики. Москва: Препринт ИПМ 1973. № 96.
 21. Брюно А.Д. Неустойчивость в системе Гамильтона и распределение астероидов // *Математический сборник*. 1970. Т. 83, №. 2. С. 273–372.
 22. Волков Е.В. Линейный анализ орбитальной устойчивости периодических движений в плоской круговой ограниченной задаче четырёх тел // *Труды МАИ*. 2024. №. 138.
 23. Иванов А.П., Сокольский А.Г. . Об устойчивости неавтономной гамильтоновой системы при параметрическом резонансе основного типа // *Прикладная математика и механика*. 1980. Т. 44, №. 6. С. 963–970.
 24. Иртегов В.Д. . Устойчивость маятниковых колебаний гироскопа Ковалевской // *Тр. Казан. Авиац. ин-т математики и механики*. 1968. Т. 97. С. 38–40.
 25. Карапетян А.В. Инвариантные множества в задаче Горячева–Чаплыгина: существование, устойчивость и ветвление // *Прикладная математика и механика*. 2006. Т. 70, №. 2. С. 221–224.
 26. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения // *Собрание сочинений*. Т. 2. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 7–263.
 27. Максимов Б.А. Нелинейный анализ орбитальной устойчивости маятниковых колебаний тяжелого твердого тела с неподвижной точкой

- при условии Горячева-Чаплыгина // *Авиация и космонавтика. Тезисы 21ой международной конференции.* 2022. С. 404–405.
28. *Максимов Б.А.* Анализ орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений тяжелого твердого тела с неподвижной точкой при условии Горячева-Чаплыгина // XIII Всероссийский Съезд по теоретической и прикладной механике. Сборник тезисов докладов. 2023. С. 115–117.
 29. *Максимов Б.А.* Об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний динамически симметричного тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой при резонансах // *Авиация и космонавтика. Тезисы 22-ой Международной конференции.* 2023. С. 262–263.
 30. *Максимов Б.А.* О построении симплектического отображения, генерируемого гамильтоновой системой с одной степенью свободы, в критических случаях при наличии резонансов. // *Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам.* 2024. С. 207–208.
 31. *Максимов Б.А.* Об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний твердого тела при резонансах третьего и шестого порядков // 52 Школа-конференция: Актуальные проблемы механики. 2025. С. 139–140.
 32. *Максимов Б.А.* Об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний тяжелого твердого тела при резонансе четвертого порядка в случае вырождения // *Труды МАИ.* 2025. №. 144.
 33. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: "Наука", 1966.
 34. *Маркеев А.П.* . О маятникообразных движениях твердого тела в случае Горячева – Чаплыгина // *Прикладная математика и механика.* 2004. Т. 68, №. 2. С. 282–293.
 35. *Маркеев А.П.* Об устойчивости канонической системы с двумя степенями свободы при наличии резонанса // *Прикладная математика и механика.*

1968. Т. 32, Вып. 4. С. 738–744.
36. Маркеев А.П. К задаче об устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем // *Прикладная математика и механика*. 1970. Т. 34, Вып. 6. С. 997–1004.
 37. Маркеев А.П. Устойчивость плоских колебаний и вращений спутника на круговой орбите // *Космические исследования*. 1975. Т. 13, № 3. С. 322–336.
 38. Маркеев А.П. Точки либраций в небесной механике и космодинамике. М.: "Наука", 1978.
 39. Маркеев А.П. О сохраняющих площадь отображениях и их применении в динамике систем с соударениями // *Изв. АН. МТТ*. 1996. № 2. С. 37–54.
 40. Маркеев А.П. О критическом случае резонанса четвертого порядка в гамильтоновой системе с одной степенью свободы // *Прикладная математика и механика*. 1997. Т. 61, №. 3. С. 369–376.
 41. Маркеев А.П. О нелинейных колебаниях гамильтоновой системы при резонансе 2:1 // *Прикладная математика и механика*. 1999. Т. 63, Вып. 5. С. 757–769.
 42. Маркеев А.П. Исследование устойчивости периодических движений автономной гамильтоновой системы в одном критическом случае // *Прикладная математика и механика*. 2000. Т. 64, №. 5. С. 833–847.
 43. Маркеев А.П. К задаче об устойчивости положения равновесия гамильтоновой системы при резонансе 3:1 // *Прикладная математика и механика*. 2001. Т. 65, Вып. 4. С. 653–660.
 44. Маркеев А.П. Об устойчивости плоских движений твердого тела в случае Ковалевской // *Прикладная математика и механика*. 2001. Т. 65, №. 1. С. 51–58.
 45. Маркеев А.П. О тождественном резонансе в одном частном случае задачи об устойчивости периодических движений твердого тела // *Изв. РАН. МТТ*. 2003. №. 3. С. 32–37.

46. Маркеев А.П. Об одном способе исследования устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем // *Механика твёрдого тела*. 2004. № 6. С. 3–12.
47. Маркеев А.П. Конструктивный алгоритм нормализации периодического гамильтониана // *Прикладная математика и механика*. 2005. Т. 69, №. 3. С. 355–371.
48. Маркеев А.П. О движении твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Стеклова // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2005. №. 1. С. 20–33.
49. Маркеев А.П. Об устойчивости плоских вращений спутника на круговой орбите // *Известия РАН. Механика твердого тела*. 2006. №. 4. С. 63–85.
50. Маркеев А.П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований, 2009.
51. Маркеев А.П. Об одном способе аналитического представления отображений, сохраняющих площадь // *Прикладная математика и механика*. 2014. Т. 78, №. 5. С. 611–624.
52. Маркеев А.П. Об устойчивости неподвижных точек отображений, сохраняющих площадь // *Нелинейная динамика*. 2015. Т. 11, №. 3. С. 503–545.
53. Маркеев А.П. Об устойчивости регулярной прецессии несимметричного гироскопа в критическом случае резонанса четвертого порядка // *Доклады Академии наук*. 2018. Т. 481, №. 2. С. 151–155.
54. Маркеев А.П., Медведев С.В., Чеховская Т.Н. . К задаче об устойчивости маятниковых движений твердого тела в случае Ковалевской // *Изв. РАН. МТТ*. 2003. Т. 1. С. 3–9.
55. Маркеев А.П., Сокольский А.Г. Исследование периодических движений,

- близких к лагранжевым решениям ограниченной задачи трех тел // *Предпринт ИПМ АН СССР*. 1975. №. 110.
56. Маркеев А.П., Сокольский А.Г. Об устойчивости периодических решений, близких к лагранжевым решениям // *Астрономический журнал*. 1977. №. 4. С. 46–57.
 57. Млодзеевский Б.К. О перманентных осях в движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки // *Предпринт ИПМ АН СССР*. 1894. Т. 7, №. 1. С. 46–48.
 58. Савин А.А. Использование алгоритма Ковачича в анализе орбитальной устойчивости маятниковых движений твердого тела с неподвижной точкой // 19-я Международная конференция «Авиация и космонавтика». 2020. С. 596–598.
 59. Сокольский А.Г. Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае равных частот // *Прикладная математика и механика*. 1974. Т. 38, Вып. 5. С. 791–799.
 60. Сухов Е.А. Об орбитальной устойчивости периодических движений, рождающихся из регулярных прецессий динамически симметричного спутника // Материалы XIII Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (АММАІ'2020). 2020. С. 388–389.
 61. Холостова О.В. Линейный анализ устойчивости плоских колебаний спутника-пластинки на круговой орбите // *Нелинейная динамика*. 2005. Т. 1, №. 2. С. 181–190.
 62. Чекина Е.А. Исследование орбитальной устойчивости плоских вращений спутника-пластинки на круговой орбите в случае резонансов первого и второго порядков // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. 2019. Т. 1. С. 144–146.
 63. Abishev M., Quevedo H., Toktarbay S., Zhami B. Orbital stability of the re-

- stricted three-body problem in general relativity // *Gravitation, Astrophysics, and Cosmology*. 2016. P. 187–188.
64. *Bardin B. S., Chekina E. A.* On the orbital stability of pendulum-like oscillations of a heavy rigid body with a fixed point in the Bobylev – Steklov case // *Russian Journal Nonlinear Dynamics*. 2021. V. 17, no. 4. P. 453–464.
 65. *Bardin B. S., Chekina E. A., and Chekin A. M.* On the orbital stability of pendulum oscillations of a dynamically symmetric satellite // *Russian Journal Nonlinear Dynamics*. 2022. V. 18, no. 4. P. 587–607.
 66. *Bardin B.S.* Local coordinates in problem of the orbital stability of pendulum-like oscillations of a heavy rigid body in the Bobylev–Steklov case // *J. Phys.: Conf. Ser., Bristol*. 2021. no. 012016. P. 1–10.
 67. *Bardin B.S.* On a method of introducing local coordinates in the problem of the orbital stability of planar periodic motions of a rigid body // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2020. V. 16, no. 4. P. 581–594.
 68. *Bardin B.S.* On the method of introduction of local variables in a neighborhood of periodic solution of a Hamiltonian system with two degrees of freedom // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2023. V. 28, no. 6. P. 878–887.
 69. *Bardin, B.S., Lanchares V.* On the stability of periodic Hamiltonian systems with one degree of freedom in the case of degeneracy // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2015. V. 20, no. 5. P. 627–648.
 70. *Bardin, B.S., Lanchares V.* Stability of a one-degree-of-freedom canonical system in the case of zero quadratic and cubic part of a Hamiltonian // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2020. V. 25, no. 3. P. 237–249.
 71. *Bardin B.S, Maksimov B.A.* The orbital stability analysis of pendulum oscillations of a heavy rigid body with a fixed point under the Goryachev-Chaplygin condition // *Journal of Mathematical Sciences*. 2023. V. 275, no. 1. P. 66–77.
 72. *Bardin B.S., Maksimov B.A.* On resonant cases of degeneracy in the problem of orbital stability of periodic solutions of Hamiltonian system with two degrees

- of freedom // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2025. V. 21, no. 4.
73. *Bardin B.S., Maksimov B.A., Zarodov V.K.* Analysis of the orbital stability of periodic pendulum motions of a heavy rigid body with a fixed point under the Goryachev-Chaplygin condition // *MATEC Web of Conferences*. 2022. V. 362, no. 01003.
 74. *Bardin B.S., Rudenko T.V., Savin A.A.* On the orbital stability of planar periodic motions of a rigid body in the Bobylev–Steklov case // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2012. V. 17, no. 6. P. 533–546.
 75. *Bardin B.S., Savin A.A.* . On the orbital stability of pendulum-like oscillations and rotations of a symmetric rigid body with a fixed point // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2012. V. 17, no. 3-4. P. 243–257.
 76. *Bardin B.S., Sukhov E.A., Volkov E.V.* Nonlinear orbital stability of periodic motions in the planar restricted four-body problem // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2023. V. 19, no. 4. P. 545–557.
 77. *Belichenko M.V.* Linear orbital stability analysis of the pendulum-type motions of a Kovalevskaya top with a suspension point vibrating horizontally // *IOP Conference Series Materials Science and Engineering*. 2019. no. 489(1):012034.
 78. *Belichenko M.V.* On the orbital stability of pendulum-type motions in the approximate problem of Kovalevskaya top dynamics with a vibrating suspension point // *Mechanics of Solids*. 2021. V. 57, no. 7. P. 1607–1619.
 79. *Birkhoff G.D.* Dynamical systems. American Mathematical Society, N. Y., 1927.
 80. *Cabral H. E., Meyer K. R.* Stability of equilibria and fixed points of conservative systems // *Nonlinearity*. 1999. V. 12. P. 1351-1362.
 81. *Giacaglia G.E.O.* Perturbation Methods in Non-Linear Systems. Springer New York, NY, 1972.
 82. *Irene De Blasi, Alessandra Celletti, Christos Efthymiopoulos.* Satellites’ orbital stability through normal forms // *Proceedings IAU Symposium*. No. 364. 2022. P. 146–151.

83. *Jinxin Zhao, Tetsuya Iwasaki*. Orbital stability analysis for perturbed nonlinear systems and natural entrainment via adaptive Andronov–Hopf oscillator // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2020. V. 65, no. 1. P. 87–101.
84. *Markeev A.P.* An algorithm for normalizing Hamiltonian systems in the problem of the orbital stability of periodic motions // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2002. V. 66, no. 6. P. 889–896.
85. *Markeev A.P., Bardin B.S.* On stability of planar oscillations and rotations of satellite in a circular orbit. // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2003. V. 85, no. 1. P. 51–66.
86. *Meyer K., Hall G., Offin D.* Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem. New York: Springer, 2009.
87. *Moser, J., K.* New aspects in the theory of stability in Hamiltonian systems // *Comm. Pure Appl. Math.* 1958. V. 11, no. 1. P. 81–114.
88. *Moser J.K.* Lectures on Hamiltonian Systems. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1968.
89. *Poincare H.* Sur les proprietes des fonctions definies par les equations aux differences partielles. Paris Gauthier-Villars, 1879.
90. *Poincare H.* Les methodes nouvelles de la mecanique celeste: T. 2. Methodes de Newcomb, Glyden, Lindstedt et Bohlin. Paris: Gauthier-Villars, 1892.
91. *Qingqing Li, Yuming Tao, Fanghua Jiang* . Orbital stability and invariant manifolds on distant retrograde orbits around Ganymede and nearby higher-period orbits // *Aerospace*. 2022. V. 9, no. 454. P. 1–21.
92. *Siegel C., Moser J.* . Lectures on celestial mechanics. Grundlehren Math. Wiss. New York: Springer., 1971. V. 187.
93. *Sukhov E.A., Volkov E.V.* Numerical orbital stability analysis of nonresonant periodic motions in the planar restricted four-body problem // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2022. V. 18, no. 4. P. 563–576.
94. *Tabare Gallardo*. Orbital stability in the Solar system for arbitrary inclinations

- and eccentricities: planetary perturbations versus resonances // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2019. V. 487, no. 2. P. 1709–1716.
95. *Tao Fu, Yue Wang*. Orbital stability around the primary of a binary asteroid system // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2021. V. 44, no. 9.
 96. *Gutierrez R., Vidal C.*. Stability of Equilibrium Points for a Hamiltonian Systems with One Degree of Freedom in One Degenerate Case // *Regul. Chaot. Dyn.*. 2017. V. 22. P. 880-892.
 97. *Yehia H.M., El-Hadidy E.G.* . On the orbital stability of pendulum-like vibrations of a rigid body carrying a rotor // *Regular Chaotic Dynamics*. 2013. V. 18, no. 5. P. 539–552.
 98. *Yehia H.M., Hassan S.Z., Shaheen M.E.* . On the orbital stability of the motion of a rigid body in the case of Bolyaev–Steklov. // *Nonlinear Dynamics*. 2015. V. 80, no. 3. P. 1173–1185.